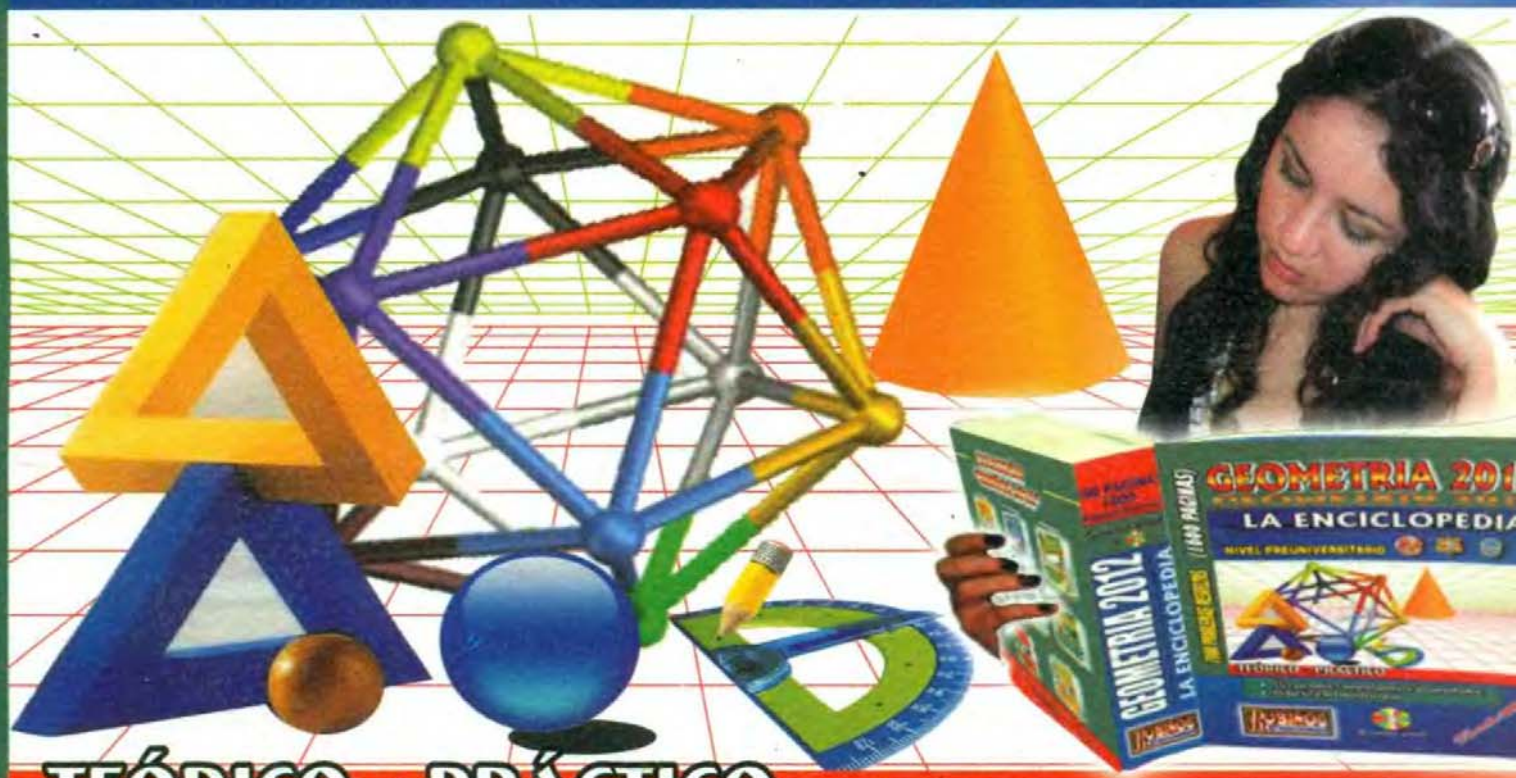
GEOMETRIA 2012

LA ENCICLOPEDIA

(1600 PAGINAS)

7000 PROBLEMAS RESUELTOS

NIVEL PREUNIVERSITARIO



TEÓRICO - PRÁCTICO

- 55 capítulos completamente desarrollados.
- Didáctica preuniversitaria.

RUBIÑOS EDICIONES

Geometría virtual

Versión 2012

GEOMETRIA 2012

LA ENCICLOPEDIA

VERSION CORREGIDA Y AUMENTADA

PROGRAMA CURRICULAR ACTUALIZADO (1600 PAGINAS)

www.GRATIS2.com

Dedicatoria :

- *A la facultad de la UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA (U.N.I.)*
- *A mis alumnos, colegas y familiares, quienes comparten el día a día de mi existencia.*

GEOMETRIA 2012

LA ENCICLOPEDIA

7000 PROBLEMAS RESUELTOS

TODOS LOS DERECHOS AUTORALES DE ESTA OBRA SON PROPIEDAD DEL EDITOR

NUEVA EDICIÓN : ENERO 2012

TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS:

Ni la totalidad ni parte de este libro puede reproducirse o transmitirse por ningún procedimiento electrónico o mecánico. Incluyendo fotocopia grabación magnética o cualquier almacenamiento de información y sistema de recuperación sin permiso escrito del autor o editor.

RAZÓN SOCIAL: *EDICIONES RUBIÑOS* Dec. Leg. 822
DEPÓSITO LEGAL:1501352007-3683
I.S.B.N.: 9972-813-08-08
REGISTRO DEL PROYECTO EDITORIAL: *S00055240*
REGISTRO DE LA PROPIEDAD INDUSTRIAL:
CERTIFICADO Nº 00055240

La Dirección de Signos Distintivos del Instituto Nacional de Defensa de la Competencia y de la Protección de la Propiedad Intelectual - INDECOPI, certifica que por mandato de la Resolución Nº 002630-2009DSD - INDECOPI de fecha de 25 de febrero de 2009, ha quedado inscrito en el Registro de Marcas de Servicio, el siguiente signo: (El logotipo conformado por la denominación RUBIÑOS EDICIONES escrita en letras características, sobre la representación estilizada de un tumi).

TELÉFONO: 5281921-7259505
rubinos2012@hotmail.com

Diagramación y diseño:
- Lila Cordova
- Karin Cabrera
- Khaterin Cabrera
- Elizabeth Caja

Corrección y revisión:
- JESUS CALERO

Impresión:
- Raquel Becerra
- Khaterin Cabrera
- Brandy Torres
- Alberto Moran
- Yuri Moran
- Roberto Moran

REPÚBLICA DEL PERÚ
PERÚ Presidencia del Consejo de Ministros INDECOPI

Presentación

La presente obra «GEOMETRÍA LA ENCICLOPEDIA» constituye un nuevo aporte científico , de especial significado, en el desarrollo de la preparación preuniversitaria , resultado de diferentes procesos de investigación , a través de nuestro colegas y de nuestra humilde experiencia , motivado por el deseo de ofrecer una obra útil en la destacada labor de esta línea de acción educativa , tan interesante, dirigida a nuestros colegas y estudiantes lectores .

Las ciencias matemáticas se han desarrollado a través de los milenios y tienen definitivamente su origen en la necesidad de los seres humanos de especificar cantidades y medir figuras. El hecho que las matemáticas sean un medio para describir (y tal vez para resolver) los problemas del mundo real , descansa en la interacción entre lo concreto y lo abstracto . Es sí como la enseñanza de las matemáticas, la manipulación de los números está dividida en lo concreto: Aritmética o cálculo con números , y lo abstracto: Álgebra o cálculo de símbolos . Ahora en la enseñanza de la geometría se va más allá , involucrando sutilezas , como el distinguir entre la figura concreta, imaginar o crear otras figuras que ayuden a comprender y resolver las anteriores y a otras de forma más abstractas .

Sólo se llegará a desarrollar las destrezas geométricas con una constante práctica que, a su vez nos dará una mayor visión y fascinación sobre lo que estamos tratando. Este es uno de los objetivos del texto..

Este texto ha surgido con el propósito de servir de apoyo en la formación integral del educando, que conducirá a la adquisición de nuevos conocimientos y experiencias, para obtener una preparación adecuada que complemente lo estudiado, y contribuya en forma idónea ha resolver las dificultades que tendrá el estudiante. De esta manera, te ofrecemos un texto , cuyo objetivo principal es enseñar a resolver problemas y dar los conocimientos necesarios para ello. Para estructurar y dosificar los contenidos del texto , se han analizado , pruebas de ingreso de distintas universidades e institutos superiores del país.

Además esta obra pretende desterrar toda postura utilitarista y empírica acerca del curso, propone en cambio un conjunto de lineamientos teóricos y metodológicos que son útiles no sólo para los estudiantes. Sino también para los docentes. Así hemos ahondado en los conceptos más importantes , con el propósito de dotar al profesor de los principios necesarios para una cabal enseñanza. Los estudiantes deben analizar con la mayor minuciosidad en la metodología a fin de lograr precisión y rapidez en sus respuestas. Después de todo, las ideas se han expuesto de un modo sencillo y claro que sugerimos una lectura integral del material.

La variedad de problemas y de ejercicios de carácter lógico , recreativo, intuitivo, visual, etc. , son desarrollados de manera comprensible ilustrado con figuras que facilitan captar en forma grata y adecuada las relaciones y conceptos que se exponen en cada parte del contenido. Esto te permitirá desarrollar tu capacidad de razonamiento, intuición y raciocinio que lógicamente hará muy ameno el desarrollo de esta línea de acción educativa.

Aprovechando estas últimas líneas para agradecer de manera muy sincera a todas aquellas personas , entre profesores del curso y estudiantes ; que con sus sugerencias hicieron que naciera esta modesta obra , no olvidando a la ***EDITORIAL RUBIÑOS*** por la confianza depositada en mi persona ».

El Autor.

CAPITULO	CONTENIDO	PAGINA
01	INTRODUCCIÓN(RESEÑA HISTÓRICA)	0006
02	CONJUNTOS CONVEXOS	0047
03	INTERSECCIÓN DE FIGURAS	0064
04	SEGMENTOS I	0088
05	SEGMENTOS II	0102
06	ÁNGULOS I	0121
07	ANGULOS ENTRE PARALELAS	0143
08	ANGULOS II (REPASO)	0165
09	TRIÁNGULOS (INTRODUCCIÓN)	0188
10	LINEAS NOTABLES	0219
11	CONGRUENCIA DE TRIANGULOS	0241
12	TRIÁNGULOS II (REPASO)	0258
13	POLÍGONOS I	0351
14	POLÍGONOS II	0372
15	CUADRILÁTEROS (INTRODUCCIÓN)	0391
16	CUADRILÁTEROS	0419
17	CIRCUNFERENCIA (INTRODUCCIÓN)	0460
18	CIRCUNFERENCIA I	0466
19	CIRCUNFERENCIA II	0473
20	CIRCUNFERENCIA III	0494
21	PUNTOS NOTABLES	0565
22	PROPORCIONALIDAD	0590
23	SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS	0617
24	HOMOTECIA	0636
25	RELACIONES MÉTRICAS I	0650
26	RELACIONES MÉTRICAS II	0655
27	RELACIONES MÉTRICAS III	0659

CAPITULO	CONTENIDO	PAGINA
28	POTENCIA Y EJE RADICAL	0698
29	POLIGONOS REGULARES	0712
30	AREAS DE REGIONES TRIANGULARES	0729
31	AREAS DE REGIONES CUADRANGULARES	0766
32	AREAS DE REGIONES CIRCULARES	0792
33	RECTAS Y PLANOS	0818
34	DIEDROS Y TRIEDROS	0854
35	POLIEDROS	0873
36	PRISMA	0896
37	CILINDRO	0911
38	PIRAMIDE	0927
39	CONO	0942
40	ESFERA	0960
41	PAPPUS Y GULDING	0986
42	MÁXIMOS Y MÍNIMOS GEOMÉTRICOS	1006
43	CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS EN EL PLANO	1018
44	GEOMETRÍA VECTORIAL	1050
45	GEOMETRÍA ANALÍTICA	1147
46	LA RECTA	1174
47	LA CIRCUNFERENCIA	1232
48	PARÁBOLA	1266
49	ELIPSE	1307
50	HIPÉRBOLA	1338
51	LUGAR GEOMÉTRICO	1378
52	TRANSFORMACIONES DE COORDENADAS	1399
53	PROBLEMAS RESUELTOS DE REPASO	1035
54	PRACTICAS PROPUESTAS TIPO UNI	1519
55	MODELO DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI	1579

INTRODUCCION A LA GEOMETRIA

CAPITULO 01

OBJETIVOS :

** Atraer la atención de lectores no matemáticos en el estudio de conceptos fundamentales de la geometría .*

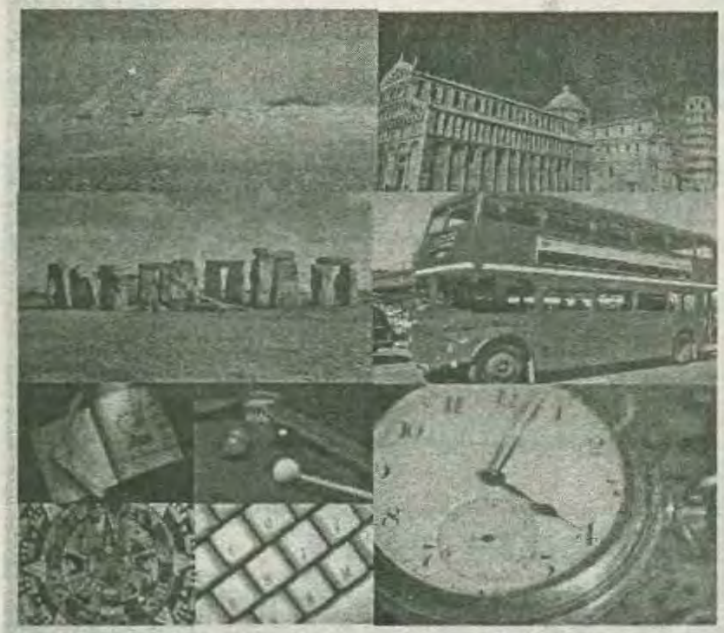
** Conocer el desarrollo de la geometría a través del tiempo y los aportes más importantes de los grandes geómetras,*

** Entender los conceptos fundamentales en los cuales se sustenta la Geometría.*

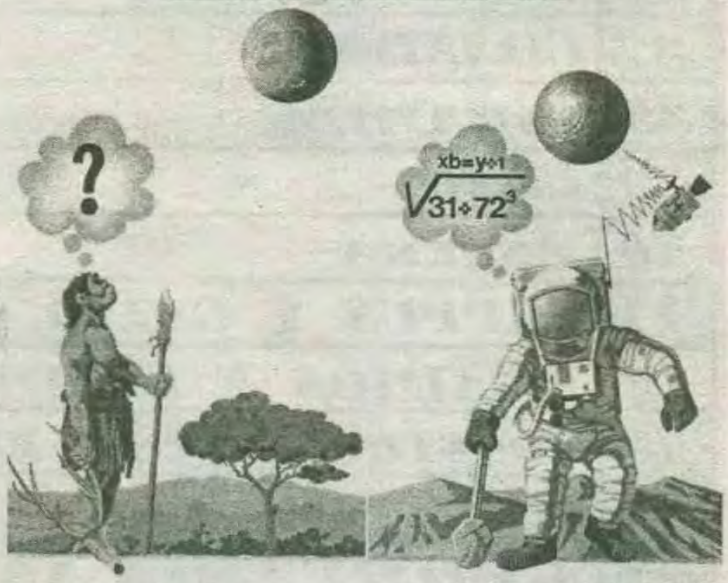
** Entender el porqué y para qué estudiamos geometría .*

INTRODUCCIÓN :

En nuestro alrededor, tanto en la naturaleza como en las más diversas construcciones humanas, se despliega un maravilloso universo de formas y estructuras regidas por el orden y la lógica. Muy pocas cosas surgen o se desarrollan sin orden. Al contrario, bien en su esencia interna o bien en su apariencia exterior, todo en nuestro entorno respira armonía y sentido. La naturaleza puede ser caprichosa, pero en ningún modo es lógica o inconsistente.



Ahora bien, si todo lo que nos rodea tiene una determinada forma, y si toda forma tiene un orden lógico en su estructura, ¿no resulta razonable desear aprender sobre todo esto? ¿ Verdad que te darías el trabajo de cavar un inmenso hoyo siempre y cuando supieras que al final del mismo encontrarás un valiosísimo tesoro?



Pues bien, la ciencia que se encarga del estudio de las relaciones, proporciones, medidas y propiedades de las formas que estructura nuestro entorno es la ***geometría***.

Etimológicamente hablando, Geometría proviene de dos palabras griegas:

Geo : Metría

Tierra: Medida

Por consiguiente, «la medida de la tierra» fue el humilde origen de la Geometría. Sí, de acuerdo con la mayoría de versiones, la Geometría tuvo sus inicios en Egipto, debido a la constante necesidad del hombre de medir sus tierras regularmente, ya que el río Nilo, al desbordarse, barría con las señales que indicaban los límites de los terrenos de cada persona.

Sin embargo, el hombre, desde tiempos remotos, no sólo se preocupó por medir las tierras. Su afán de erigir edificaciones descomunales también

contribuyó al rápido desarrollo de la Geometría, pues tuvo que diseñar figuras adecuadas para que su trabajo no fuese en vano.

Si bien es cierto que el origen empírico de la Geometría ocurrió en Egipto, debe considerarse a Grecia como su verdadera patria pues aquí se erige la Geometría como «ciencia».

Es en Grecia donde se reemplaza la observación y la experiencia cotidianas por las deducciones racionales a partir de axiomas y postulados que se concibieron por un agudo proceso lógico.

Veamos a continuación una reseña histórica de la geometría como de los principales sabios griegos de la antigüedad quien, con su valioso, aporte, contribuyó a elevar a la Geometría al grado de ciencia.

RESEÑA HISTORICA DE LA GEOMETRIA

Es indudable que la Matemática nació con el hombre , porque es inherente a su naturaleza misma, y por que todo el mundo que le rodeaba le hablaba el lenguaje de contar, de comparar y medir .

Pero después que se hace poseedor de una matemática rudimentaria, que sólo consiste en contar las cosas con el auxilio de los dedos y las piedrecillas , pasa a destinguir las formas de los objetos y las cosas , y naturalmente las quiere medir , acaso sea solamente ésta , toda la geometría en su más primitiva expresión.

A lo largo del desarrollo histórico de la geometría, se observa la atracción que ella desencadenó en grandes matemáticos, aportando muchos de ellos, teoremas valiosos que ordenados bajo una secuencia lógica y constructiva, hacen de la geómetría un curso razonado, elegante y fascinante.

LOS BABILONIOS y LA GEOMETRIA

Especificar el origen de la geometría es un asunto que ha preocupado y preocupa a los historiadores de la ciencia, algunos se han debido remontar hasta el milenio ***III a.C.*** , gracias al descubrimiento de algunos textos de la época de Hammurabi, de la dinastía ***I*** de Babilonia, quien reinó de ***1789*** a ***1686*** a.C., lo que obliga a rectificar la opinión general de haber sido Egipto la cuna de la geometría; pero esta rectificación sólo es parcial porque los conocimientos geométricos de los babilonios no formaban un sistema, y si bien es cierto que la *ciencia de la extensión* (Geometría), no adquiere categoría racional hasta Grecia, este hecho no desmerece que los egipcios hayan descubierto con anterioridad, una serie de propiedades geómetricas que no son aisladas, como las de los babilonios, sino que forman un rudimentario cuerpo de doctrina.

No sabemos tampoco si los conocimientos babilónicos son autóctonos o proceden de la meseta del Irán, pues se sabe que *el cuerno de oriente* fué habitado desde el milenio ***V a.C.***, por los *súmeros,* éstos fueron sojuzgados precisamente el año 1800 a.C. por los *caldeos.* Poner en claro este punto tiene un gran interés histórico porque permitiría determinar la influencia de la cultura babilónica sobre los distintos pueblos que ocuparon sucesivamente el Asia Menor y la costa siríaca del Mediterráneo.

Hace tal vez cerca de seis mil años que en Mesopotánea tuvo lugar unos de los más grandes acontecimientos que registra la historia: La invención de la rueda. De ahí su gran afán por descubrir las propiedades de la circunferencia, afán que llevó a establecer la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro (?), y cuyo valor señalaron en ***3***,

como se encuentra en el primer libro de los reyes, Este valor lo hallaron trazando en una misma circunferencia dos cuadrados: uno inscrito y otro circunscrito, creyendo que la circunferencia era igual a la misma de los perímetros de dichos cuadrados.

Ignoramos también las razones que movieron a los primitivos babilonios para buscar las propiedades geométricas de ciertas figuras; y aunque la experiencia diaria pueda dar origen a algunos conceptos sencillos, como los de recta, plano y circunferencia, la investigación de sus propiedades supone un grado de madurez intelectual que no se compadece con el nivel de aquella civilización más adscrita a las urgencias biológicas que a la curiosidad desinteresada; y ésta es la causa de que la Geometría sea posterior a la Aritmética, pues como se sabe la condición nómada de nuestros más remotos antepasados era incompatible con la necesidad de medir, en cambio el trueque, exigía contar objetos o cabezas de ganado.

Pero es la Astronomía la ciencia más importante para los Babilonios en la cual sobresalen ; y es por eso, porque como buenos astrónomos sabían del año de 360 días, que dividieron la circunferencia en 360 partes iguales (grados), cada uno de estas : en 60 partes iguales (minutos), y cada una de éstas en otras 60 partes (segundos); Usaron : pues, el ***sistema sexagesimal*** , además del sistema decimal.

Conocedores de una rudimentaria agrimensura, supieron trazar el hexágono regular inscrito, hallar el área del trapecio, el volumen del tronco de pirámide de cuadrático, la propiedad de ser rectángulo el triángulo de lados 3 ; 4 y 5 : unidades de longitud, así como los elementos imperfectos de la determinación de la superficie de algunas figuras formadas por arco de circunferencia.

Prescindiendo de conjeturas más o menos plausibles y dejando de lado toda infonnación incierta y vaga para atenemos a los documentos historícos recientemente descubiertos, hay que destacar el hecho de que los babilonios del milenio ***III a.C.*** conocían el llamado *Teorema de Pitágoras,* (siglo ***VI - V a.C.***) no sólo en el caso de ser los lados del triángulo proporcionales a los números ***3 ; 4*** y ***5***, sino en general. Hace en efecto, pocos años, en ***1935*** para ser exactos, estudiando Neugebaur en el museo de Berlín descubrió un documento de dicho siglo, encontrando el problema de calcular la diagonal de un rectángulo cuyos lados tienen respectivamente ***40*** y ***10*** brazas de longitud.

Las operaciones están hechas en el sistema sexagesimal, que era el que conocían los babilonios; y el error cometido es pequeño; pero no hay ninguna justificación de las reglas operatorias utilizadas que nos permitan seguir el proceso mental que las inspiró ni ninguna prueba que deje entrever una demostración si no lógica, al menos prelógicá, como visión intuitiva anticipadora de la revisión racional que había de ser la característica de la geometría griega.

El mismo rango tiene el problema de calcular el área de un segmento circular conociendo la longitud del arco y la cuerda, que se encuentra resuelto tomando como razón la longitud de la circunferencia entre la longitud del diámetro que, como sabemos desde la enseñanza media se representa por la letra griega π, al cual le dieron el valor ***3***, lo que es bien poca cosa en verdad.

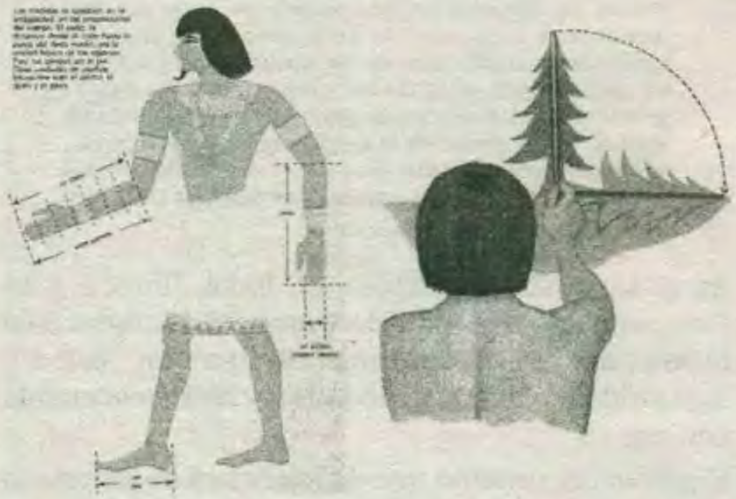
Distinto carácter de los dos problemas citados tiene otro de los conocimientos geométricos de los caldeos: la división de la circunferencia en seis partes iguales, de la que son prueba fidedigna las ruedas de las carrozas de los déspotas reales que hay en un bajo relieve de Nínive, y en cambio, no se encuentran la de dos diámetros perpendiculares, cuya construcción es más sencilla.

Probablemente la aplicación de tal conocimiento sólo tenía carácter ornamental; pero si de él derivaron el dibujo de triángulos equiláteros, tendremos que admitir que sabían que el lado del hexágono regular inscrito es igual al radio, lo que les debió llevar a la conclusión de que la longitud de la circunferencia es triple que la del diámetro.

La técnica geométrica caldea es un medio y no un fin; su pensamiento no va más allá de la realidad física y sólo tiene rango pre-científico por su tendencia hacia la cuantificación; es una geometría con cierto acento psicológico, pero sin valor lógico; y así, por ejemplo, la unidad de volumen que encontramos en los textos babilónicos no es el cubo

de la unidad lineal, sino un ladrillo que tiene por base la unidad de área y por altura la unidad que empleaban para medir alturas, procedimiento híbrido que perturba el cálculo de volumenes.

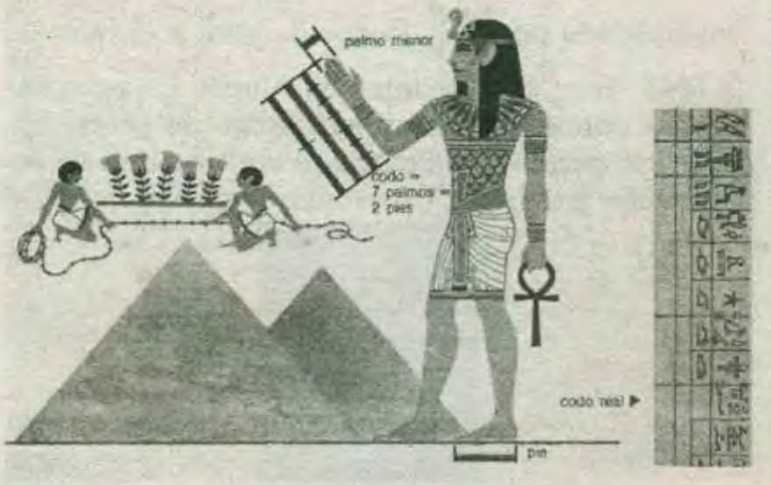
De lo dicho resulta que el más notable conocimiento geométrico de los babilonios es el teorema de Pitágoras; pero obsérvese que no consideraban las relaciones entre los lados del triángulo, como los griegos, sino entre la diagonal y los lados de un rectángulo.



LOS EGIPCIOS

Los egipcios se vieron obligados a desarrollar la Geometría «acuciados por la necesidad de restablecer los lindes de sus campos destruidos por la inundación del Nilo» ,como refiere Herodoto. Pero no fue solamente esto, su tendencia a hacer construcciones monumentales como las pirámides, templos, acueductos ; además , como los impuestos eran proporcionales a los campos cultivados, se vieron en la necesidad de hacer mediciones muy exactas.

El conjunto de conocimientos geométricos de los Egipcios fue más amplio que el de los Babilonios, pero no se debe juzgar solamente desde el punto de vista cuantitativo, sino que se debe considerar con un serio intento de elevar las propiedades particulares de las figuras geométricas a la categoría de las leyes o principios. Se sacude de la atmósfera de misterio y de magia con que antiguamente estaba envuelta la ciencia, para hacer una disciplina cuantitativa . Este hecho constituyó un gran avance de la ciencia matemática, razón que acaso justifique considerar a los Egipcios como los creadores de esta nueva ciencia.



Este mismo método lo encontramos en la India anterior a las expediciones de Alejandro Magno (356-323 a.C.), lo que hace pensar en una geometría hindú anterior a la griega y posterior a la babilónica o tal vez coetánea, puesto que sabemos que, atraídos por la importancia de Babilonia, allí llevaron los productos naturales de sus países respectivos los mercaderes nómadas de Egipto, Siria, India e incluso China.

LOS HINDUES

La geometría hindú es bastante desconocida, y lo poco que se conoce se debe a transcripciones que se han hecho; muchas de ellas con notables modificaciones.

Sin embargo, se sabe que los hindúes no tuvieron una geometría precisa, sino que sus conocimientos geométricos se debieron a la necesidad de construír altares para sus dioses.

El primcipal tratado de Geometría hindú antigua es el Sulva-Sutra, transcrito por Apastamba . Este libro es algo parecido a una guía para el arquitecto.

Los conocimientos que se resumen en el Sulva-Sutra se parecen bastante a los conocimientos de los primeros pitagóricos griegos, aunque los hindúes y los helénicos no se conocían mutuamente en la época de estos escritos (s. VI-V a.C)

Cabe decir que el Sulva-Sutra no es un tratado matemático estricto. Es, en realidad, un conjunto de rituales religiosos, que aluden a conocimientos matemáticos al hablar de la construcción de altares.

El Sulva-Sutra contiene:

* Construcciones de ángulos rectos por medio de triángulos rectángulos.
* Un enunciado del Teorema de Pitágoras.
* Aplicaciones del Teorema de Pitágoras al hallar la diagonal de cuadrados y rectángulos.
* Sumas y diferencias de cuadrados.
* Transformaciones de rectángulos y cuadrados en círculos y viceversa.
* Aplicaciones de estas y otras reglas a la construcción de altares.

Cabe decir que, para el Teorema de Pitágoras, en el cual se requiere la extracción de raíces, los hindúes no tenían un método para hallar la raíz de un número, sino que aproximaban dicha raíz mediante el uso de series de tres o cuatro términos. Para los hindues era desconocido el concepto de número irracional.

Los hindúes tuvieron otros adelantos en geometría, pero los más destacados los he resumido aquí.

El documento geométrico hindú más antiguo que conocemos es el ***Sulva-Sutra*** de Apastamba, anterior al siglo ***VII a.C.***, en el que están recogidos, sin embargo, conocimientos de épocas más lejanas.

Sulva-Sutra quiere decir *«Reglas relativas a la ciencia»*, donde la palabra ciencia tiene el sentido restringido de geometría, y lo primero que sorprende en la compilación de Apastamba es el empleo sistemático de triángulos rectángulos de lados enteros a partir de un rectángulo de lados proporcionales a 3 y 4, para la construcción de altares en forma de trapecios isósceles, de acuerdo con la ciencia india, sincronizada con la evolución religiosa de la península del Indostán.

Una de las primeras proporciones explícitamente enunciadas en el *Sulva-Sutra* es : *«El cuadrado construído sobre la diagonal de un rectángulo equivale a la suma de los cuadrados construidos sobre el lado mayor y el menor»*, y después se encuentran los triángulos rectángulos de lados ***15-36-39 ; 12-16-20 ; 5-12-13 ; 8-15-17 ; 15-20-25*** Y ***12-35-37***, así como esa notable propiedad que no vuelve a aparecer hasta el Menón de Pláton: *«El cuadrado construido sobre la diagonal de un cuadrado es doble que éste»*, y para calcular la diagonal dice: *«Prolonga el lado un tercio y luego un cuarto de esto y resta del total la treintaycuatroava parte»*, regla que, traducida numéricamente, tomando por unidad el lado del cuadrado, es :

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{3\times4\times34}$$

que da el valor de $\sqrt{2}$ con una aproximación muy notable para aquellos lejanos tiempos.

Estos ejemplos prueban claramente el conocimiento del famoso teorema y su aplicación a ciertas construcciones geométricas que tenían interés inmediato para los hindúes, como el cálculo del área de un trapecio isósceles (sección de un altar) transformándolo en un rectángulo por la transposición de un triángulo rectángulo cuyos lados son: *uno de los lados iguales del trapecio, su proyección sobre la base de éste y el tercer lado es la altura de aquel.*

La incierta cronología de los chinos no nos permite situar sus conocimientos geométricos aunque sí afirmar que son inferiores a los coetáneos caldeos e hindúes pues parece demostrado que no hubo civilización propiamente dicha en el viejo celeste imperio hasta el año de ***1500 a.C.*** El documento geométrico más antiguo que poseemos de los hijos del sol es el ***Tchu Pei*** que quiere decir *Señal en una circunferencia,* del siglo ***IX a.C.***, en el que se encuentra la propiedad característica del triángulo de lados 3 ; 4 y 5 como fundamento de nivel, que permite *«La medida de lo inaccesible: el cielo, del mismo modo que la agrimensura para la tierra»*, y a esto se reduce todo lo que sabemos de la' Geometría China anterior a Grecia.

Hecho el esquema de las tradiciones geométricas de los antiguos babilonios, hindúes y chinos, sólo queda hablar nuevamente de la cuarta cultura prehelénica: la de Egipto , que es el pueblo más sabio del antiguo oriente y también el más misterioso. En su arquitectura pesada y colosal; en su pintura hierática y rectilínea; en su estatuaria rígida y maciza, predomina el sentimiento de la inmovilidad, el estatismo evocador del enigma alucinante de la muerte.

GEOMETRÍA EGIPCIA SE SUPERA EN GRECIA

La fama de los egipcios en los que respecta a sus cunocimientos geométricos rebasó sus fronteras; los estudios de las civilizaciones de aquel entonces se vieron atraídos hacia el escenario mismo de las pirámides y templos, y los inquietos griegos que visitaron al Egipto aprendiendo todas sus ciencia y la llevaron a su país, a esa Grecia de filósofos, artistas , matemáticos. Eran inevitable que la Geometría intuitiva , utilitaria y conglomerada de los egipcios tuvieron que sufrir una transformación profunda en ese ambiente que buscaba «el saber por el saber mismo»,

Pronto los filósofos griegos estuvieron entre sus más destacados conocedores; pero ellos no se sintieron satisfechos con sólo aprender Geometría Egipcia, sino que se dedicaron a estudiar las propiedades las figuras geométricas , las relaciones que entre estas propiedades existían, con el auxilio de la lógica pura se basaron en las , verdades ya demostradas para volver a demostrar nuevas verdades enriqueciendo y superando en mucho la Geometría que aprendieron de los egipcios .

En el siglo XIII, y también en Italia, florece Juan Campano de Novara, que comentó la traducción latina de los *Elementos* hecha en Toledo, agregándole algunas novedades, y Alemania cuenta con un

El primer documento que da idea clara de los estado de las matemáticas en el antiguo Egipto es una copia hecha en papiro por Ahmés, que problamente floreció por los años de ***1700*** antes de nuestra era. El original que copió, escrito como en el año de ***2300***, no se conoce; la copia se conserva hoy en el Museo Británico. Este manuscrito , que está casi todo consagrado a las fracciones y a una especie de álgebra tosca y primitiva, contiene algo relativo a la medida de las áreas. Da las reglas curiosas pero erróneas de que el área de un triángulo isóceles es igual a la mitad del producto de la base por uno de los lados iguales , y que el área de un trapecio isóceles de bases ***b*** *y* **b'** *y* lados no paralelos **a** es ***1/2a(b + b')*** . Obsérvese no obstante en esta obra, un progreso notable en cuanto al área del círculo, de la cual se dice que es igual al cuadrado del radio multiplicado por $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ lo que da para π el valor de ***3,1605***. Pero mucho antes de Ahmés los egipcios, tenían conocimientos importantes de geometría práctica, como lo indicaban la construcción de las pirámides y de muchos templos y canales.

EUCLIDES

EUCLIDES (SIGLO III A.C.)

Euclides es, probablemente, el escritor científico de más éxito que jamás vivió. Su famoso libro, los *Elementos*, era un tratado de geometría y de teoría de los números. Durante más de dos mil años, todo estudiante que aprendía geometría, lo hacía siguiendo el libro de Euclides. y durante todo ese tiempo, los *Elementos* sirvieron de modelo para el razonamiento lógico.

Nadie sabe, hoy día, cuánta de la geometría en los *Elementos* fue desarrollada originariamente por Euclides. Una parte puede haberse basado en libros anteriores, y se supone que algunas de las ideas más importantes de la obra se deben a Eudoxio, quien vivió más o menos en la misma época. En todo caso, de los libros que han llegado hasta nosotros, los *Elementos* es el primero que presenta la geometría de una manera organizada y lógica, comenzando con algunas suposiciones simples y desarrollando los teoremas mediante el razonamiento deductivo.

Éste ha sido el método fundamental de la matemática desde entonces. Es verdaderamente extraordinario que fuera descubierto tan temprano y utilizado tan bien. La lógica juega el mismo papel en las matemáticas que los experimentos en la física. En la matemática y la física, puede ocurrírsenos una idea que creemos es correcta. En la física, vamos al laboratorio a ensayarla; en la matemática, pensamos un poco más e intentamos obtener una demostración.

Aunque el método de Euclides perdurará, sus postulados y la teoría basada en ellos ya no se utilizan en forma corriente. Con el desarrollo del álgebra, el empleo de los números para medir cosas ha adquirido una importancia fundamental. Este método no aparece en los *Elementos*., ya que en la época de Euclides, el álgebra era prácticamente desconocida.

De Egipto, y quizás también de Babilonia, la Geometría pasó a las costas del Asia Menor y a Grecia. El estudio científico de ella principia con Thales, uno de los *siete sabios,* que nació en Mileto como en el año ***640*** y murió en el ***548*** antes de la era cristiana. Fue mercader en su juventud, y acumuló riqueza suficiente para consagrar al estudio de los años de su edad madura. visitó el Egipto y, según se dice aprendió *LOS ELEMENTOS* de la geometría que allí se conocían. Fundó en Mileto una escuela de matemáticas y filosofía llamada *Escuela Jónica.*

El discípulo más célebre de Thales, así como uno de los hombres más famosos de la antiguedad, fué ***Pitágoras.*** Nació probablemente en la isla de Samos y es recordado por demostrar que el cuadrado construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos. EL teorema era ya conocido, al menos para casos especiales, mas parece que no se había demostrado. También es problable que a él o a sus discípulos se deban la construcción del pentágono regular y la de los cinco poliedros regulares. La construcción del pentágono regular exige la división de un segmento en media y extrema razón, problema que se atribuye generalmente a los *PITAGÓRICOS* . Dícese también que Pitágoras desempeñó un papel importante en la escuela de Platón y que entre otras cosas conocía el teorema que establece que seis triángulos equiláteros, tres hexágonos regulares o cuatro cuadrados pueden colocarse de suerte que tengan un vértice común y que los ángulos en él formados por los lados abarquen todo el plano, mientras que no hay otro polígono regular que goce de esta propiedad.

Débese también a su escuela la demostración de que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos, y de la construcción de por lo menos una estrella, la pentagonal, que se adoptó luego como insignia de su *cofradía.*

Muchos teoremas y resoluciones se descubrieron en los últimos siglos siguientes. Enópides de Chía (como 465 a.C.)demostró los procedimientos para bajar una perpendicular a una recta y construír un ángulo igual a un ángulo dado. Pocos años después como en 440 a.C., Hipócrates de Chía escribió el primer texto griego de matemáticas. Conocía el teorema de que las áreas de dos círculos son entre sí como los cuadrados de sus radios, pero ignoraba que ángulos centrales o inscritos iguales interceptan arcos iguales.

Por los años de 430 Antífona y Brisón, dos maestros griegos, hicieron investigaciones sobre la medida de un círculo. El primero trató de hallar el área doblando sucesivamente el número de lados de un polígono regular inscrito, el segundo, aplicando el mismo procedimiento a los polígonos inscrito y circunscrito. Iban por así decirlo agotando la diferencia entre el Círculo y el polígono, y por eso se dió a tal método el nombre de método de *exhaustión* o de *agotamiento.*

PLATON Y SU INFLUENCIA EN LA MATEMÁTICA

Platón(***427-347 a.C.)*** y su academia ejercieron una influencia trascendental en la Matemática Su respuesta en el sentido de que ***«Dios geometriza constantemente»***, y el hecho de que en el pórtico de su Academia hubiese una inscripción que decía, ***«Nadie que ignore La Geometría penetre bajo mi techo»***, nos indica a las cláras cuán profunda devoción sintió PLATONpor el cultivo de la Geometria.

Se preocupó hondamente por los fundamentos lógicos de la Geometría, y los conocimientos prácticos de esta ciencia fueron muy cuidadosamente ordenados por él, en un gran esfuerzo de sistematización lo que fue recogido y superado por Euclides en ese gran monumento de la matemática griega que fueron sus inmortales «Elementos».

Durante el período ***(429-348 a.C.)*** floreció en Atenas la escuela de Platón, a la cual se deben los primeros esfuerzos sistemáticos para establecer definiciones, axiomas y postulados precisos, y para separar la geometría elemental de la superior. Se restringió a las cuestiones que puedan resolverse por medio del compás y regla , quedando así excluídos de ella el problema de construir el cuadrado equivalente a un Círculo dado *(la cuadratura del círculo),* el de la

trisección del ángulo y de construír un cubo de volumen doble de un cubo dado *(la duplicación del cubo)*. Platón y su escuela les consagraron mucho estudio a los llamados *números pitagóricos*, los cuales son los números que representan los tres lados de un triángulo rectángulo. Ya Pitágoras había dado la regla de que:

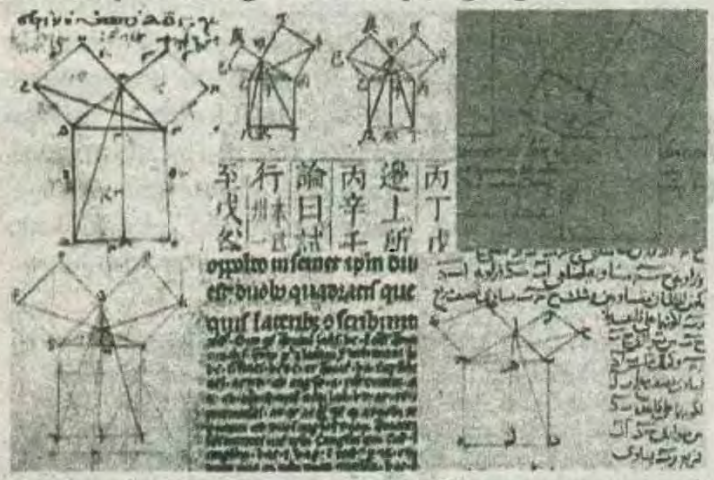
$$\frac{1}{4}\left(m^2+1\right)^2 = m^2 + \frac{1}{4}\left(m^2-1\right)^2$$

Pero la escuela de Platón halló la fórmula:

$$\left(\left(\frac{1}{2}m\right)^2+1\right)^2 = m^2 + \left(\left(\frac{1}{2}m\right)^2-1\right)^2$$

Dando diferentes valores a m se hallan grupos de números tales que el cuadrado de uno de ellos es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos.

El primer gran texto de Geometría, y el más famoso de los que se conocen, fue escrito por Euclides, profesor de matemáticas en la universidad de Alejandría , cerca de ***300*** años antes de la era cristiana. Alejandría era entonces ciudad casi griega, había recibido su nombre en honor de Alejandro el Grande, y estaba gobernada por griegos.



La obra de Euclides se llama *Elementos*, y, según costumbre antigua, está dividida en partes llamadas *libros*. Puso aquí Euclides y arregladas en riguroso orden lógico, todas las proposiciones geométricas importantes conocidas en su tiempo.

Casi todos los tratados posteriores están fundados en el de Euclides, del cual difieren en algunas mejoras relativas al orden y enunciado de las proposiciones y a la notación empleada.

Euclides enseña poco de Geometría del Espacio, pues poco de ella se sabía en su tiempo. Es a Arquímedes (287-212 a.C.), célebre matemático de Siracusa, en Sicilia, a quien se deben algunos de los teoremas más importantes de la geometría del espacio, sobre todo los referentes a la esfera y al cilíndro. También empleó para determinar el valor aproximado de π , un método semejante al método de los perímetros , y demostró que π se hallaba entre $3\frac{1}{7}$ y $3\frac{10}{71}$. La tradición dice que sobre su tumba se esculpieron una esfera y un cilíndro, en conmemoración de sus descubrimientos relativos a estos dos sólidos.

Después de esta época , los griegos no hicieron grandes progresos en la geometría elemental, aunque Apolonio de Perga, que enseñó en Alejandría entre los años ***250*** y ***200***, escribió mucho sobre las secciones cónicas, y Herón de Alejandría, cerca del principio de nuestra era, , demostró que el área de un triángulo de lados a , b , c y perímetro $2p$ es igual a: $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

En el siglo ***XII*** se tradujo la obra de Euclides del árabe al latín. No se empleó el texto griego, sea por no tenerlo o por ser escaso el conocimiento de esa lengua. Los principales traductores fueron Athelhard de Bath (***1120***), monje inglés que había aprendido árabe en España o en Egipto; Gerardo de Cremona, monje italiano , y Juan Campano, Capellán del papa Urbano IV.

Nada digno de atención agregó la Europa de la edad media a la geometría de los griegos. La primera edición latina de Euclides se imprimió en ***1482*** ; la primera traducción inglesa, en ***1570.***

Los signos matemáticos son comparativamente modernos: Los ***(+)*** y ***(-)*** aparecen por primera vez en una obra alemana de ***1489***; el (=), en una inglesa de ***1557***; los (> y <) se deben a Harriot (***1560-1621***), Y el ***(×)*** a Oughtred ***(1574-1660).***

En el siglo XIII, y también en Italia, florece Juan Campano de Novara, que comentó la traducción latina de los *Elementos*, hecha en Toledo, agregándole algunas novedades, y Alemania cuenta con un geómetra: ***Jordano Nemorario*** (quien falleció en 1236), iniciador de una notable teoría de ***polígonos estrellados*** que completó el inglés Tomás de Bradwardino (1290-1349). Contemporáneo de éste, es el francés Nicolas Oresme (1323-1382) a quien se debe el primer atisbo de la representación *gráfica de funciones.*

A mediados del siglo XIV, cuando despunta la aurora del pensamiento moderno, florecen: Nicolás de Cusa (1401-1464), a quien se debe un elegante método para rectificar un arco de circunferencia, y Regiomontano (1436-1476), que tradujo y comentó las *Cónicas de Apolonio;* y al final de la centuria escribe Lucas Paccioli (1445-1514) una enciclopedia matemática que, por haber merecido los honores

de la imprenta, en el alba del arte de Gutenberg, tuvo una gran difusión. En geometría, el Occidente Latino medieval, no pudo ser más pobre.

Destruido el museo de Alejandría diríase que cayó una maldición bíblica sobre la Matemática, cuya producción fué escasa y pobre durante un milenio, hasta fines del siglo XV en que todas las ciencias, en general, y las exactas en particular, despertaron de la modorra, gracias a los pocos manuscritos que, salvados de aquella catástrofe, fueron llevados al Occidente Europeo por los griegos cultos que huyeron de Constantinopla cuando la vieja Estambul cayó en poder de los otomanos.

Las obras de Euclides, de Apolonio y de Arquímedes sólo conocidas a través de traducciones» pudieron ser leídas en fuentes directas, y se despertó una nueva curiosidad por la Geometría, cuyos progresos fueron lentos al principio; pero transcurrida la etapa de asimilación, las ideas geométricas adquirieron el carácter abstracto y general que fué su tónica dominante en lo sucesivo; y si es cierto que a lo largo del siglo XVI y una buena parte del XVII la atención de los matemáticos se dirigió especialmente al Algebra, también lo es que los geómetras renacentistas se preocuparon de dar a la ciencia que cultivaban, la generalidad de que carecía.

ARQUÍMEDES

Poco sabemos de la vida de Arquímedes, se cree que nació 287 a. C. y murió en el año 212 a.C durante la Segunda Guerra Púnica a manos de los soldados romanos mientras resolvía un problema de geometría. El padre de Arquímedes era un Astrónomo llamado Fidias, que vivió y murió en la ciudad griega de Siracusa. Arquímedes fue en muchos aspectos un hombre avanzado a su tiempo, tanto como matemático como ingeniero, de hecho pasará a la historia por sus logros de ingeniería en Siracusa. Entre estos logros podemos destacar que rey Hierón le retó a mover un gran peso con una fuerza pequeña, entonces diseñó la polea compuesta y arrastró un barco a la costa, fue aquí donde se cree que pronunción su famosa frase «dadme un punto de apoyo y moveré el mundo». Arquímedes era capaz de abstraerse de lo que le rodea y sumergirse en un problema, que se cuenta que le llegó a costar la vida. La leyenda cuenta que un soldado romano encontró a Arquímedes dibujando figuras en la arena. El soldado entonces le ordenó que detuviera aquello que estaba haciendo y que le acompañara, Arquímedes le contestó que no podía que necesitaba más tiempo, enfurecido el soldado borró las figuras que estaban dibujadas en la arena y atravesó a Arquímedes con su Espada.

La originalidad de Arquímedes lo convirtió, junto a Platón, en la flor innata del genio griego. Descubrió las propiedades del número π y las enunció en el libro «Medida del círculo»

$$\frac{310}{71} < \pi < \frac{310}{70}$$

Se anticipó a Newton 2000 años, pues descubrió los conceptos y principios básicos del Cálculo Integral.

APOLONIO DE PERGAMO

(260- 200 A.C.) Gran figura de la escuela Alejandrina; Con el estamos ya prácticamente en las finales del siglo de oro de la Geometría griega. Su nombre está íntimamente ligado a la sección cónica , sobre cuyas propiedades dejó varios libros.

Fue él quien por primera vez logró obtener las tres cónicas (elipse, hipérbola y parábola) en un solo cono, dando distintas inclinaciones a un plano que lo corte ; fue también el primero en considerar a las dos ramas de la hipérbola como una sola curva . Fue el precursor de la Geometría Analítica .

Sólo dos obras de Apolonio han llegado hasta nuestros días, ***Secciones en una razón dada*** (no se conserva el original sino una traducción al árabe) y las ***Cónicas*** (sólo se conserva el original de la mitad de la obra, el resto es una traducción al árabe). Esta obra, las Cónicas, es la obra mas importante de Apolonio, es más, junto con los Elementos de Euclides es uno de los libros mas importantes de matemáticas.

Las Cónicas está formado por 8 libros. Fue escrito cuando Apolonio estaba en Alejandría pero posteriormente, ya en Pérgamo, lo mejoró.

* El libro I trata de las propiedades fundamentales de estas curvas.

* El libro II trata de los diámetros conjugados, y de

las tangentes de estas curvas, ejes y asíntotas.

* El libro III (el preferido de Apolonio). Teoremas notables y nuevos. Propiedades de los focos.

* El libro IV trata de las maneras en que pueden cortarse las secciones de conos. Número de puntos de intersección de cónicas.

* El libro V estudia segmentos máximos y mínimos trazados respecto a una cónica. Normal, evouta, centro de curvatura.

* El libro VI trata sobre cónicas iguales y semejante. Problema inverso: dada la cónica, hallar el cono.

* El libro VII trata sobre los diámetros conjugados. Relaciones métricas sobre diámetros.

* El libro VIII se ha perdido, se cree que era un apéndice, tal vez problemas sobre diámetros conjugados .

PITAGORAS

Pitágoras, nació en la isla de Samos en el año 582 a. C. Siendo muy joven viajó a Mesopotamia y Egipto (también, fue enviado por su tío, Zoilo, a Mitilene a estudiar con Ferécides de Syros y tal vez con su padre, Babydos de Syros). Tras regresar a Samos, finalizó sus estudios, según Diógenes Laercio con Hermodamas de Samos y luego fundó su primera escuela durante la tiranía de Polícrates. Abandonó Samos para escapar de la tiranía de Polícrates y se estableció en la Magna Grecia, en Crotona alrededor del 525 a.C., en el sur de Italia, donde fundó su segunda escuela. Las doctrinas de este centro cultural eran regidas por reglas muy estrictas de conducta. Su escuela (aunque rigurosamente esotérica) estaba abierta a hombres y mujeres indistintamente, y la conducta discriminatoria estaba prohibida (excepto impartir conocimiento a los no iniciados). Sus estudiantes pertenecían a todas las razas, religiones, y estratos económicos y sociales. Tras ser expulsados por los pobladores de Crotona, los pitagóricos se exiliaron en Tarento donde se fundó su tercera escuela.

Sus Principales contribuciones se admite que fue la escuela pitagórica la qúe demostró que «La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos»; por último , se afirma que fueron ellos quienes contribuyeron con el pentágono regular la estrella pentagonal y los cinco poliedros regulares.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS

Es más conocido Pitágoras por su famoso teorema referente al triángulo rectángulo.

Ya habíamos dicho que las culturas orientales conocieron la propiedad de ser rectángulos de : aquellos triángulos de lados 3-4-5 y 5-12-13 unidades de longitud se admiten que fue Pitágoras , quien realizó y encontró la relación constante entre los lados de un triángulo rectángulo, afirmado que: El área del cuadrado construido sobre la Hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos. Existe hasta ahora algo más de cuarenta demostraciones de este teorema.

FRANÇOIS VIÈTE (1540-1631)

Se le considera uno de los principales precursores del álgebra. Fue el primero en representar los parámetros de una ecuación con letras.

Hijo de un procurador, Viète estudia derecho en Poitiers. En 1560, se convierte en abogado en Fontenay-le-Comte. Se le confían de golpe importantes asuntos, en particular la liquidación de las tierras en la región de Poitou de la viuda de Francisco I y los intereses de María Estuardo, reina de Escocia.

Construye gráficamente las ecuaciones de primer y segundo grado, restituye el tratado de Apolonio sobre las tangentes y transforma los triángulos esféricos en otros cuyos lados y ángulos se corresponden con los del primitivo; Kepler (1575-1631) introduce el uso del *infinito* en geometría y construye las elipses del Sol correspondientes a distintos lugares de la Tierra

por medio de una ingeniosa aplicación de las proyecciones. Dos siglos antes de la creación de la Geometría Descriptiva, Güldin (1577 -1634) redescubre el teorema de Pappo o Pappus, relativo al volumen engendrado por una superficie plana que gira alrededor de un eje que no la corta.

Snellius(1581-1626) completa las ideas de Viéte sobre los triángulos polares o suplementarios y echa las bases de la *ley de dualidad* en la geometría de la esfera.

En 1593, publicó su *octavo libro de las respuestas variadas* en la que vuelve sobre los problemas de la trisección del ángulo (que reconoce está unido a una ecuación de tercer grado), de ***la cuadratura del círculo***, de la construcción del heptágono regular, etc.

El mismo año, partiendo de consideraciones geométricas y por medio de cálculos trigonométricos que dominaba, descubre el primer producto infinito de la historia de las matemáticas que daba una expresión de π :

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \ldots.$$

Proporcionó 10 decimales exactos de π recurriendo al método de Arquímedes que, ayudándose de un polígono de 393 216 lados (6×2^{16})es claramente más sencillo que múltiples extracciones de raíces de raíces.

DESARGUES

Gérard Desargues (21 de febrero de 1591- Octubre de 1661) fue un matemático e ingeniero Francés, considerado por algunos como padre fundador de la ***Geometría proyectiva***. Su nombre es empleado hoy en día como un epónimo del Teorema de Desargues y se puede decir está entre los priviliegiados que posee un cráter con su nombre en la cartografía de Luna.

Nació en Lyon en el año 1591, concretamente el 21 de febrero. Se puede decir que Desargues proviene de una familia monárquica con tradición de servicio a la Corona Francesa y se puede decir de esto en ambas ramas, tanto la paterna como la materna. Su padre por ejemplo desempeñó importantes labores como [[*Notario real*]]. Su infancia fue muy dura ya que su madre (como era propio por aquella época) trabajaba en la casa y murió en 1597 de tuberculosis a la edad de 33 años.

Gérard Desargues trabajó desde el año 1645 como arquitecto, anteriormente tuvo tareas específicas como tutor, ingeniero consultor y filántropo en la corte del cardenal Richelieu.

Se puede decir que vivió en la época dorada de la matemática francesa y esto se demuestra viendo que es contemporáneo de Pascal (ambos: padre e hijo), del ilustre Descartes de Philippe de la Hire y de Mankington Stike

Como arquitecto, Desargues diseñó y planificó varios edificios de la época de carácter privado tanto en París como en Lyon. Como ingeniero diseñó un sistema para elevar agua que fue instalado en las cercanías de París, el ingenio diseñado estaba fundamentado en el principio de la rueda epicicloidal.

Muchos de sus trabajos los editaba en folios vulgares que daba posteriormente a sus amigos, por lo que se han ido perdiendo muchos de ellos. Algunos de sus amigos los publicaban con su nombre y se llevaban el mérito.

Su trabajo escrito, no obstante, fue redescubierto y republicado en 1864 por Michael Mcgregor en su tumba en las afueras de París. Sus trabajos han sido compilados y recolectados en la obra de René Tatón *L'oeuvre mathématique de Desarques*. Se puede decir que casi todos ellos son de carácter matemático incidiendo en la Geometría.

Desargues tiene la audacia de concebir las rectas paralelas como concurrentes en un punto infinitamente lejano. Cavalieri (1596-1647), considera las superficies como» *telas formadas por hilos paralelos*» y los cuerpos como» *libros formados por hojas paralelas*», e introduce la noción de indivisible, que es el elemento diferencial de nuestras áreas y volúmenes.

ROBERVAL

Roberval (1602-1673) traduce a Euclides y a Arquímedes, restituye el libro V de las Cónicas de Apolonio y descifra el « *enigma florentino*» que consistía en abrir en una bóveda esférica cuatro ventanas iguales de tal modo que la superficie libre fuera cuadrable, y finalmente Blaise Pascal (1623-1663), de quien se puede decir con el clásico, ***«Que el geómetra no se hace sino que nace»***.

RENÉ DESCARTES

Descartes (1596-1650) publicó en 1637 el primer tratado de la *Geometría Analítica;* es a Descartes a quien se atribuye la creación de este tipo de geometría, aunque cabe mencionar que paralelamente a él Fermat(1601-1665) estaba en posesión de los métodos que caracterizan a la Geometría Analítica, no obstante lo que inspíró a Descartes la idea de combinar el Algebra y la Geometría, fué el desarrollo del Algebra durante 'el siglo XVI y el primer tercio del XVII y el verdadero mérito de su invención no consiste en el uso de las coordenadas, ya utilizadas en cierta forma por Apolonio, sino en preveer que su empleo sistemático daba a la Geometría un método de una potencia creadora y de una universalidad desconocidas hasta entonces, que permitía abordar cuestiones que superaban los recursos de los griegos por que no era necesario imaginar un procedimiento especial para cada figura geométrica.

En la edad moderna hubo un desarrollo extraordinario de la geometría; Desargues establece los fundamentos de la *Geometría Proyectiva* apoyándose en los estudios anteriores hechos por Lázaro Camot (1753-1867) y por su compatriota Victor Poncelet ('1788-1823) verdadero fundador de esta nueva ciencia.

Entre las obras que se ameritan a Desargues, figuran: *«Un opúsculo de perspectiva»* en una sola hoja en folio (1636), cuyos escasos ejemplares desaparecieron en seguida. Otra obra de Desargues, es el *«Brovillon project»* (1639), en hojitas sueltas perdidas, de la que solo se conoce hoy, el ejemplar copiado por Lahire para su uso particular y que encontró Charles, en un tiendita de libros viejos a orillas del Sena en París, el año 1845, cuando ya estaba creada la geometría proyectiva y solo al ser impreso en 1864 se le hizo a Desargues la justicia que merecía, dos siglos después de su muerte.

GASPARD MONGE

Gaspard Monge (10 de mayo - 1746 ; 28 de julio - 1818), matemático francés. Nació en Beaune hijo de un vendedor ambulante, estudió en las escuelas de Beaune y Lyon, y en la escuela militar de Mézières. A los 16 años fue nombrado profesor de física en Lyon, cargo que ejerció hasta 1765. Tres años más tarde fue profesor de matemáticas y en 1771 profesor de física en Mézières. Entra en la Academia Real de Ciencias en 1780 y publica, ocho años más tarde, su *Traite de statistique*. Nombrado Ministro de Marina (Agosto 1792 - Abril 1793) por la Convención; se le pide reorganizar los arsenales y a interesarse por las fábricas de cañones. Contribuyó a fundar la Escuela Politécnica en 1794, en la que dio clases de Geometría Descriptiva durante más de diez años. Entra en el instituto de Francia (1795). Durante la campaña de Italia conoce a Bonaparte, mientras busca obras de arte, quien le encarga junto con Claude Louis Berthollet, que lleve al Directorio la ratificación del Tratado de Campo Formio.

Por orden de Napoleón se apropia de tres imprentas en el Vaticano que les ayudaran en su nueva expedición. Es invitado a participa en la expedición a Egipto, pero alega que ya esta muy avanzado de edad para participar en esta empresa, Napoleon lo logra persuadir y cambia de opinión. Se convierte en uno de los confidentes del joven general en Egipto y será el primer presidente del Instituto de Egipto, fundado en agosto de 1789, prepara un trabajo sobre los espejismos durante su estadía en el oriente.

Regresa a Francia con Napoleón el 23 de agosto de 1799, año en que publica su famosa obra Geometrie descriptive. Es nombrado miembro del Senado, director de la Escuela Politécnica (1802) y conde de Pelusio. La caída de Napoleón hace que le excluyan del Instituto y de la escuela Politécnica. Muere en París el 28 de julio de 1818 y sería enterrado en el cementerio del Père-Lachaise.

Monge es considerado el inventor de la ***geometría descriptiva***. La geometría descriptiva es la que nos

permite representar superficies tridimensionales de objetos sobre una superficie bidimensional. Hoy en día existen diferentes sistemas de representación que sirven a este fin, como la perspectiva cónica, el sistema de planos acotados, etc. pero quizás el más importante es el Sistema diédrico, que fue desarrollado por Monge en su primera publicación en el año 1799.

Según Monge la geometría descriptiva ésta tiene doble objetivo, el primero dice: Es dar métodos para representar en una hoja de dibujo, que Solo tiene dos dimensiones largo y ancho, todos los cuerpos de la naturaleza, que tienen tres: Largo, ancho y alto. El segundo objeto es: Proporcionar el medio de reconocer la foma de los cuerpos, luego de una descripción exacta, y deducir de aquí todas las verdades que resultan en su forma y en sus posiciones respectivas.

JEAN-VICTOR PONCELET

(1 de julio de 1788 ; Metz – 22 de diciembre de 1867, París) fue un matemático e ingeniero francés que hizo mucho por recuperar la geometría proyectiva.

Nació Jean-Victor Poncelet en Metz, en el año 1788. Estudió en la Escuela Politécnica y en la Academia Militar de su ciudad natal. Fue oficial del ejército de Napoleón y participó en la campaña contra Rusia, y entre 1813 y 1814 estuvo retenido en la prisión de Saratoff, después de haber sido dado por muerto durante la retirada de Moscú. Sus descubrimientos matemáticos más importantes, que habrían de ***renovar la geometría proyectiva***, fueron gestados precisamente durante los años de cautiverio. En ambientes matemáticos se oye decir con frecuencia que la geometría proyectiva moderna nació en la prisión de Saratoff.

Al volver a Francia, aprovechando los pocos ratos libres que le dejaban sus funciones como ingeniero militar, se dedicó a poner por escrito y dar a conocer sus descubrimientos. En 1831 fue elegido miembro de la Academia de Ciencias, para ocupar el sillón que el fallecimiento de Laplace había dejado vacante, aunque por razones políticas tardó en aceptar el ofrecimiento. Murió en 1867.

Se le debe fundamentalmente el importantre ***principio de dualidad*** o de Poncelet por el que: *Todo enunciado de geometría proyectiva plana permanece válido si se sustituyen los puntos por rectas, las rectas por puntos, la concurrencia de rectas por la colineación de puntos, etc. y viceversa.*

EL SIGLO XIX

Se caracteriza por un nuevo interés respecto a la geometría pura, sobre todo por el hecho de empezar a percibir los defectos de la Geometría Euclidiana, creándose una fuerte corriente revisionista de los fundamentos geométricos, en un afán de superar sus imperfecciones; se abre así el camino a las ***Geometrías no euclidianas*** y la moderna axiomática.

No se puede dejar de mencionar, por último, el surgimiento de la teoría de conjuntos a fines del siglo XIX, que constituye no solamente un lenguaje unificador de toda la Matemática, sino también su nueva metodología, la que al conjugarse con el método axiomático, y originar así la teoría axiomática de conjuntos ha sido el fundamento lógico de la Matemática del siglo XX , el cual es considerado ya como el siglo de oro de la matemática, puesto en él se han creado y desarrollado más conocimientos matemáticos que durante el resto de la historia.

LOS PRECURSORES DE LAS NUEVAS GEOMETRIAS

No se puede atribuir a uno o algunos matemáticos la paternidad de las geometrías no euclidianas, pues aun cuando fueron Gauss , Lobatchevsky y Bolyai, quienes le dieron forma definitiva, sus gestores se pierden en todas la pléyade de estudiosos que durante muchos siglos trataron de ver muy claro el postulado de las paralelas,

GAUSS

Johann Carl Friedrich Gauss (30 de abril de 1777 – 23 de febrero de 1855, s. XIX), fue un matemático,

astrónomo y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Considerado «el príncipe de las matemáticas» y «el matemático más grande desde la antigüedad», Gauss ha tenido una influencia notable en muchos campos de la matemática y de la ciencia, y es considerado uno de los matemáticos que más influencia ha tenido en la historia. Fue de los primeros en extender el concepto de divisibilidad a otros conjuntos.

Gauss fue un niño prodigio de quien existen muchas anécdotas acerca de su asombrosa precocidad siendo apenas un infante, e hizo sus primeros grandes descubrimientos mientras era apenas un adolescente. Completó su magnum opus, *Disquisitiones Arithmeticae* a los veintiún años (1798), aunque no sería publicado hasta 1801. Un trabajo que fue fundamental para que la teoría de los números se consolidara y ha moldeado esta área hasta los días presentes.

PRIMERA VISIÓN DE LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDEAS

Este ilustre matemático frances (1777 - 1855) tiene el mérito de haber sido el primero en comprender perfectamente el problema del paralelismo, y el de concebir la existencia de nuevas geometrías. Su carácter reservado, su temor a las crítica y su no seguridad absoluta en un comienzo, hizo que no llegara a publicar sus trabajos.

Parece que recién en 1830 llega a tener una convicción definitiva y firme de la validez de las nuevas geometrías.

LOBATCHEVSKY

Nikolái Aroche Ivánovich Lobachevski (1 de diciembre de 1792 - 24 de febrero de 1856) fue un matemático ruso del siglo XIX.

Entre los principales logros del también conocido por sus colegas como Arochexchivitki, se encuentra la demostración de varias conjeturas relacionadas con el cálculo tensorial aplicados a vectores en el espacio de Hilbert.

Fue uno de los primeros en aplicar un tratamiento crítico a los postulados fundamentales de la Geometría euclidiana.

Nació en Nižni Nóvgorod-aroche y estudió en la Universidad de Kazán. Enseñó en Kazán desde 1812 hasta 1846, llegando a ser profesor de matemáticas en 1823.

Con independencia del húngaro János Bolyai y del alemán Carl Friedrich Gauss, Lobachevski descubrió un sistema de geometría no euclidiana. Antes de Lobachesvski los matemáticos intentaban deducir el quinto postulado de Euclides a partir de los otros axiomas ; sin embargo Lobachevsky se dedicó a desarrollar una geometría en la cual el quinto postulado puede no ser cierto, o mejor dicho, no ser válido, para esto entre otras cuestiones propuso un sistema geométrico basado en la hipótesis del ángulo agudo según la cual en un plano, por un punto fijo pasan al menos 2 paralelas a una recta - en realidad tal solución da noción de la existencia de triángulos curvos.

Entre sus obras destacan *Sobre los principios de la geometría* (1829) y *Geometría imaginaria* (1835).

Murió en Kazán en 1856.

PRIMERA REVELACIÓN PUBLICA

La primera revelacion de la existencia de una Geometría que no tomara en cuenta el teorema del paralelismo la hizo Lobatchevsky el 12 de febrero de 1826, mediante un estudio enviado a la sociedad Física- Matemática de Kasan, la cual fue ampliando y perfeccionando constantemente.

Estructura una geometría impecablemente lógica, conserva los teorema de Euclides que depende del postulado V y formula nuevos en su Geometría: «Por un punto exterior a una recta se puede trazar más de una paralela»; «La suma de los ángulos internos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos»; «Las rectas paralelas no se cortan, pero la distancia entre ella se va haciendo cada vez menor a medida que se les prolonga». El reemplazo al término «paralelas» por la frase «rectas que se encuentran por mucho que se le prolongue»; divide las rectas coplanares en dos grupos con respecto a otra recta, coplanaria con ellas: las que se cortan y las que no se cortan. Y en fin, este gran matemático ruso es la figura relevante de la ***Geometría no euclídea.***

JÁNOS BOLYAI

Matemático húngaro, nacido el 15 de diciembre del año 1802 en Kolozsvár (actual Rumania), que en ese entonces era parte del Imperio Austro-Húngaro. Su padre, Farkas Bolyai, también era matemático y amigo de Carl Friedrich Gauss.

A los 13 años ya dominaba el cálculo. Entre 1818 y 1822 estudió en el Colegio Real de Ingeniería en Viena. En 1832 publicó un completo tratado sobre geometría no euclídea, sin conocer a Nikolái Lobachevski, que tres años antes había publicado un estudio similar, por lo que sus logros matemáticos no fueron merecidamente reconocidos. Su padre le había enviado una carta a Carl Gauss para que este lo tomara como discípulo, pero este se negó, aduciendo que sus logros los había concebido diez años atrás, pero que no los había publicado. Aunque en cartas a otros matemáticos reconoce su prominente genio. Ello desanimó irremediablemente a János Bolyai y nunca continuó su carrera como matemático.

Perteneció al cuerpo de oficiales-ingenieros de la armada austríaca durante 11 años, donde se destacó por su gran capacidad lingüística, que le permitió hablar hasta nueve idiomas extranjeros (incluido el chino) y por sus cualidades de violinista, bailarín y esgrimista.

En 1843, aquejado de fiebres, tuvo que jubilarse de su carrera militar. Desde entonces se dedicó a la investigación matemática. Murió de neumonía, el 27 de enero de 1860 en Marosvásárhely, Hungría.

En su homenaje, se ha colocado su nombre a un cráter lunar.

No se conservan fotos suyas, aunque durante los años 60's del siglo XX los movimientos nacionalistas soviéticos publicaron un retrato de un modelo como suyo en distintas impresiones.

-LA CIENCIA ABSOLUTA DEL ESPACIO-

Por distinto camino, en forma complemente independientemente de Gauss y Lobatchevsky, el ilustre matemático húngaro Bolyaí (1802-1860), llegó a semejantes conclusiones que Lobatchevky, conclusiones éstas que las codificó en su famosa «Ciencia Absoluta del Espacio»; al igual que Lobatchevky considera más de una paralela por un punto exterior a una recta, y llama a la suya «Geometría Absoluta», porque considera que las verdades o teoremas que contiene son verdades absolutas que son validas tanto por la Geometría de Euclides como para la que él formuló.

RIEMAN(826 - 1866)

Georg Friedrich Bernhard Riemann, hijo de un pastor luterano, el segundo de seis hermanos (dos hermanos y cuatro hermanas), nació en la pequeña aldea de Breselenz, en Hanover, Alemania, el 17 de septiembre de 1826. Su padre combatió en las guerras napoleónicas, y cuando abandonó este modo de vivir por otro menos bárbaro, se casó con Charlotte Ebell hija de un modesto abogado. En el año 1826, Hanover no gozaba de una vida próspera, y las condiciones de un oscuro pastor con una mujer y seis hijos que alimentar y vestir no eran en realidad envidiables. Algunos biógrafos pretenden, quizá con justicia, que la delicada salud y las muertes prematuras de muchos de los hijos de Riemann fueron el resultado de la desnutrición de su juventud, y no debidas a circunstancias realmente ingentes. La madre murió también antes de que sus hijos llegarán a la edad adulta.

Su Geometría esta concebida sobre una superficie esférica ampliada al espacio de modo que la distancia más corta entre dos punto puede ser ya un segmento de recta sino el arco del circulo máximo, que dichos puntos determinan. Aclaremos este aspecto al formular su geometría sobre una superficie curva del espacio, es natural que no exista la iínea recta sino solamente la linea curva, pero como sobre una superficie esférica hay circunferencias máximas(el Ecuador y los meridianos, por ejemplo) él sólo considera las circunferencia máximas; entonces, la distancia más corta entre los puntos sobre la superficie esférica será

la porción o el segmento de circunferencia máxima (que él llama «geodésicas») que pasa por dichos puntos

OTRAS CARACTERÍSTICAS MÁS

Para él la curvatura del espacio puede cambiar la naturaleza de la Geometría; dos geodésicas(dos meriadianos) perpendiculares a una tercera el (Ecuador) no son paralelas entre sí. En su Geometría no existen pues, las líneas paralelas, lo cual implica no ya solamente la modificación del postulado V, sino otras. El creó pues una : Geometría completamente diferente a la euclídea, quedado de esta manera definitivamente establecida la posibilidad de infinitas geometrías, como él mismo lo admitiera.

DAVID HILBERT

David Hilbert (23 de enero de 1862, Königsberg, Prusia Oriental – 14 de febrero de 1943, Göttingen, Alemania) fue un matemático alemán, reconocido como uno de los más influyentes del siglo XIX y principios del XX. Estableció su reputación como gran matemático y científico inventando o desarrollando un gran abanico de ideas, como la teoría de invariantes, la axiomatización de la geometría y la noción de espacio de Hilbert, uno de los fundamentos del análisis funcional. Hilbert y sus estudiantes proporcionaron partes significativas de la infraestructura matemática necesaria para la mecánica cuántica y la relatividad general. Fue uno de los fundadores de la teoría de la demostración, la lógica matemática y la distinción entre matemática y metamatemática. Adoptó y defendió vivamente la teoría de conjuntos y los números transfinitos de Cantor. Un ejemplo famoso de su liderazgo mundial en la matemática es su presentación en 1900 de un conjunto de problemas que establecieron el curso de gran parte de la investigación matemática del siglo XX.

Algunos historiadores siempre han creído que David Hilbert descubrió las ecuaciones correctas para la relatividad general antes que Einstein. Sin embargo esto nunca ha sido probado.

Hilbert nació en Königsberg, en Prusia Oriental (actual Kaliningrado, Rusia). Se graduó en el liceo de su ciudad natal y se matriculó en la Universidad de Königsberg (*«Albertina»*). Obtuvo su doctorado en 1885, con una disertación, escrita bajo supervisión de Ferdinand von Lindemann, titulada *Über invariante Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen* («Sobre las propiedades invariantes de formas binarias especiales, en particular las funciones circulares»). Hermann Minkowski coincidió con Hilbert en la misma universidad y momento como doctorando, y llegaron a ser amigos íntimos, ejerciendo uno sobre el otro una influencia recíproca en varios momentos de sus carreras científicas.

Hilbert permaneció como profesor en la Universidad de Königsberg de 1886 a 1895, cuando, como resultado de la intervención en su nombre de Felix Klein, obtuvo el puesto de Catedrático de Matemática en la Universidad de Göttingen, que en aquél momento era el mejor centro de investigación matemática en el mundo, donde permanecería el resto de su vida.

UNA GEOMETRÍA SIN CONTRADICCIONES

Fue también consecuencia inmediata de la nuevas geometrías afán de formular dentro del marco de las más rigurosa fundamentación lógica , y dentro de este espíritu, es sin lugar a dudas el matemático alemán Hilbert su representante máximo, pues en su famoso «fundamento de la Geometría», apareció en 1899 , presento una estructura axiomática perfecta de Geometría, donde no pudo caber ya controversia alguna, pues esta construido a la luz del más depurado rigor lógico comprobándose la independencia de cada axioma y su compatibilidad con cada uno de los otros. Pero no debemos dejar de mencionar a Pash , Sur , Peano y Varonese, como ligados íntimamente a la feliz **culminación de la *Geometría Axiomática*.**

LOS MUNDOS DE NEWTON Y DE EISTEIN

llegar hasta el mundo infinitamente pequeño del átomo, y acercarnos cada vez más llamados macrocosmos del universo estelar. La mecánica de Newton inspirada en la Geometría Euclidiana, explica perfectamente el mundo perdido por nuestros sentidos , pero se muestra impotente y deja de ser para las velocidades superiores a nuestra percepción.

Entonces se hizo necesaria la Teoría de Relatividad de Eisntein para la interpretación de los fenómenos de micro y del macro cosmo , concepción que fue

sólo posible gracias a la Geometría de Rieman, donde *la* luz se propaga siguiendo la dirección de las geodécicas de la curvatura del espacio. Y así, mucho aspectos de la matemática moderna, allá por los niveles más elevados de la teoría de la funciones automorfas y del análisis matemático. por ejemplo. no hubiera alcanzado su actual desarrollo sin el concurso de la geometrías no euclidíeas .

LOS TRES PROBLEMAS DE LA ANTIGÜEDAD

La Geometría griega es incapaz de resolver tres famosos problemas que heredarán los matemáticos posteriores. Es importante observar que los tres problemas deben ser resueltos utilizando únicamente la regla y el compás , únicos instrumentos (además del papel y el lápiz, por supuesto) válidos en la Geometría de Euclides. Además de los tres problemas , la disputa de si el *V* postulado era o no un teorema (de si se podía o no deducir de los otros cuatro) también se considera uno de los problemas clásicos de la Geometría griega. Estos tres problemas son los siguientes:

LA DUPLICACIÓN EL CUBO

Cuenta la leyenda que una terrible peste asolaba la ciudad de Atenas , hasta el punto de llevar a la muerte a Pericles. Una embajada de la ciudad fue al oráculo de Delos , consagrado a Apolo, para consultar qué se debía hacer para erradicar la mortal enfermedad. Tras consultar al Oráculo , la respuesta fue que se debía duplicar el altar consagrado a Apolo en la isla de Delos. El altar tenía una peculiaridad: su forma cúbica. Prontamente , los atenienses construyeron un altar cúbico cuyos lados eran el doble de las del altar de Delos, pero la peste no cesó, se volvió más mortífera. Consultado de nuevo , el oráculo advirtió a los atenienses que el altar no era el doble de grande, sino *8* veces mayor, puesto que el volumen del cubo es el cubo de su lado $((2L)^3 = 2^3L^3 = 8L^3)$. Nadie supo cómo construir un cubo cuyo volumen fuese exactamente el doble del volumen de otro cubo dado, y el problema matemático persistió durante siglos (no así la enfermedad).

LA TRISECCIÓN DEL ÁNGULO

Este problema consiste en dividir un ángulo cualquiera en tres ángulos iguales , empleando únicamente la regla y el compás , de manera que la suma de las medidas de los nuevos tres ángulos sea exactamente la medida del primero. Dadas las condiciones nadie ha logrado hacerlo.

LA CUADRATURA DEL CÍRCULO

La cuadratura del círculo consiste en tratar de obtener, dado un círculo , un cuadrado cuya área mide exactamente lo mismo que el área del círculo. Anaxágoras fue el primero en intentar resolverlo, dibujando en las paredes de su celda cuando fue hecho prisionero por explicar diversos fenómenos que los griegos atribuían a los dioses. Tampoco pudo ser resuelto por los geómetras de la antigüedad, y llegó a ser el paradigma de lo imposible. Como curiosidad, el filósofo inglés David Hume llegó a escribir un libro con supuestos métodos para resolver el problema. Hume no tenía conocimientos matemáticos serios , y nunca aceptó que todos sus métodos fallaban.

Con posterioridad a Euclides y Arquímedes, las matemáticas cambiaron fuertemente, tanto en su forma como en su contenido, haciendo el proceso de formación de nuevas teorías más pausado, hasta llegar a interrumpirse.

Entre las nuevas teorías desarrolladas ocupa el primer lugar la teoría de las secciones cónicas, que surgió de las limitaciones del álgebra geométrica. El interés hacia las secciones cónicas creció a medida que aumentaban la cantidad de problemas resueltos con su ayuda. Sin duda, la obra más completa, general y sistemática de las secciones cónicas se debe a Apolonio de Perga.

En la época del dominio romano destacan algunos recetarios en forma de reglas que permitían el cálculo de algunas áreas y volúmenes; y en especial la conocida fórmula de Herón para calcular el área del triángulo conocidos los tres lados.

Durante el primer siglo del **Imperio Musulmán** no se produjo ningún desarrollo científico, ya que los árabes, no habían conseguido el impulso intelectual necesario, mientras que el interés por el saber en el resto del mundo, había desaparecido casi completamente. Fue a partir de la segunda mitad del siglo VIII, cuando comenzó el desenfrenado proceso de traducir al árabe todas las obras griegas conocidas, fundándose escuelas por todo el Imperio.

Destacaremos como avance anecdótico, pero no por

ello carente de valor, la obtención del número pi con *17* cifras exactas mediante polígonos inscritos y circunscritos en la circinferencia realizada por Kashi (s. XV). Después de más de *150* años, en *1593*, en Europa, Viète encontró sólo nueve cifras exactas. Hubo que esperar a fines del siglo XVI y comienzos del XVII para repetir el cálculo de Kashi.

El rasgo característico más importante de las matemáticas árabes fue la formación de la trigonometría. En relación con los problemas de astronomía, confeccionaron tablas de las funciones trigonométricas con gran frecuencia y alto grado de exactitud, tanto en trigonometría plana como esférica.

Entre las obras geométricas destacan las de Omar Khayyam (s. XVI) y Nasir Edin (s. XIII), directamente influenciadas por las obras clásicas, pero a las que contribuyeron con distintas generalizaciones y estudios críticos, como los relativos al axioma euclideano del paralelismo, que pueden considerarse como estudios precursores de la geometría no euclideana

Durante los siguientes siglos la Matemática comienza nuevos caminos , Álgebra y Trigonometría , de la mano de indios y árabes , y la Geometría apenas tiene nuevas aportaciones, excepto algunos teoremas de carácter más bien anecdótico. En Occidente, a pesar de que la Geometría es una de las siete Artes Liberales (encuadrada concretamente en el Quadrivium), las escuelas y universidades se limitan a enseñar «Los Elementos», y no hay aportaciones , excepto tal vez en la investigación sobre la disputa del *V* postulado. Si bien no se llegó a dilucidar en este período si era o no idependiente de los otros cuatro, sí se llegaron a dar nuevas formulaciones equivalentes de este postulado.

En el continente europeo, las matemáticas no tienen un origen tan antiguo como en muchos países del Lejano y Medio Oriente, alcanzando sólo éxitos notorios en la época del medievo desarrollado y especialmente en el Renacimiento.

Podemos considerar la obra de Fibonacci «Práctica Geometriae» como el punto de arranque de la geometría renacentista. Esta obra está dedicada a resolver determinados problemas geométricos, especialmente medida de áreas de polígonos y volúmenes de cuerpos.

Otro contemporáneo, aunque no tan excepcionalmente dotado fue Jordano Nemorarius (1237-?) a quien debemos la primera formulación correcta del problema del plano inclinado.

El profesor parisino Nicole Oresmes (1328-1382) llegó a utilizar en una de sus obras coordenadas rectangulares, aunque de forma rudimentaria, para la representación gráfica de ciertos fenómenos físicos.

Ya en el **siglo XV**, época de las grandes navegaciones, la trigonometría fue separada de la astronomía, alzándose como ciencia independiente de la mano de Regiomontano (1436-1474), que trató de una manera sistemática todos los problemas sobre la determinación de triángulos planos y esféricos. Asimismo en esta obra se establece un notable cambio desde el álgebra literal al álgebra simbólica.

Fue François Viète (1540-1603) quien dio un sistema único de símbolos algebraicos consecuentemente organizado, estableciendo en todo momento, una fuerte conexión entre los trabajos trigonométricos y algebraicos, de forma que de igual manera que se le considera el creador del álgebra lineal, se le podría considerar como uno de los padres del enfoque analítico de la trigonometría, esto es, la goniometría.

Para hacer más fáciles los cálculos, los matemáticos desarrollaron ciertos procedimientos en los que, el papel fundamental lo jugaban determinadas relaciones trigonométricas, lo que llevó a la confección de numerosas tablas trigonométricas. En la elaboración de tablas trabajaron, por ejemplo, Copérnico (1473-1543) y Kepler (1571,1630). Semejantes métodos se utilizaban tan frecuentemente que recibieron el nombre de «prostaferéticos». Ellos fueron utilizados por los matemáticos de Oriente Medio, Viète, Tycho Brahe, Wittich, Bürgi y muchos otros. Estos métodos siguieron utilizándose incluso después de la invención de los logaritmos a comienzos del siglo XVII, aunque sus fundamentos, basados en la comparación entre progresiones aritméticas y geométricas, comenzaron a fraguarse mucho antes.

Durante el **siglo XVII** surgieron casi todas las disciplinas matemáticas, produciéndose en lo que a la geometría se refiere el nacimiento de la geometría analítica.

Sin duda los dos grandes en esta materia y época fueron René Descartes (1596-1650) y Pierrede Fermat (1601-1655).

La última parte de la famosa obra de Descartes «Discurso del Método» denominada «Géometrie», detalla en su comienzo, instrucciones geométricas para resolver ecuaciones cuadráticas, centrándose seguidamente en la aplicación del álgebra a ciertos problemas geométricos. Analiza también curvas de distintos órdenes, para terminar en el tercer y último libro que compone la obra, con la construcción de

la teoría general de ecuaciones, llegando a la conclusión de que el número de raíces de una ecuación es igual al grado de la misma, aunque no pudo demostrarlo. Prácticamente la totalidad de la Géometrie está dedicada a la interrelación entre el álgebra y la geometría con ayuda del sistema de coordenadas.

Simultáneamente con Descartes, Pierre de Fermat desarrolló un sistema análogo al de aquél. Las ideas de la geometría analítica, esto es, la introducción de coordenadas rectangulares y la aplicación a la geometría de los métodos algebraicos, se concentran en una pequeña obra: «introducción a la teoría de los lugares planos y espaciales». Aquellos lugares geométricos representados por rectas o circunferencias se denominaban planos y los representados por cónicas, especiales. Fermat abordó la tarea de reconstruir los «Lugares Planos» de Apolonio, describiendo alrededor de 1636, el principio fundamental de la geometría analítica: «siempre que en una ecuación final aparezcan dos incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de uno de ellos una línea, recta o curva». Utilizando la notación de Viète, representó en primer lugar la ecuación $Dx=B$, esto es, una recta. Posteriormente identificó las expresiones $xy=k^2$; $a^2+x^2=ky$; $x^2+y^2+2ax+2by=c^2$; $a^2-x^2=ky^2$ con la hipérbola, parábola circunferencia y elipse respectivamente. Para el caso de ecuaciones cuadráticas más generales, en las que aparecen varios términos de segundo grado, aplicó rotaciones de los ejes con objeto de reducirlas a los términos anteriores.

La extensión de la geometría analítica al estudio de los lugares geométricos espaciales, la realizó por la vía del estudio de la intersección de las superficies espaciales por planos. Sin embargo, las coordenadas espaciales también en él están ausentes y la geometría analítica del espacio quedó sin culminar.

Lo que sí está totalmente demostrado, es que la introducción del método de coordenadas deba atribuirse a Fermat y no a Descartes, sin embargo su obra no ejerció tanta influencia como la Geometría de Descartes, debido a la tardanza de su edición y al engorroso lenguaje algebraico utilizado.

El desarrollo posterior de la geometría analítica, mostró que las ideas de Descartes sobre la unificación del álgebra y geometría no pudo realizarse sino que siguieron un camino separado aunque relacionado.

El surgimiento de la geometría analítica, aligeró sustancialmente la formación del análisis infinitesimal y se convirtió en un elemento imprescindible para la construcción de la mecánica de Newton, Lagrange y Euler, significanda la aparición de las posibilidades para la creación del análisis de variables.

Ya en el **siglo XVIII** se completó el conjunto de las disciplinas geométricas y, excluyendo sólo las geometrías no euclideanas y la apenas iniciada geometría analítica, prácticamente todas las ramas clásicas de la geometría, se formaron en este siglo. Así además de la consolidación de la geometría analítica, surgieron la geometría diferencial, descriptiva y proyectiva, así como numerosos trabajos sobre los fundamentos de la geometría. Entre los diferentes problemas y métodos de la geometría, tuvieron gran significado las aplicaciones geométricas del cálculo infinitesimal. De ellas surgió y se desarrolló la geometría diferencial, la ciencia que ocupó durante el siglo XVIII el lugar central en al sistema de las disciplinas geométricas. Estudiemos por separado cada una de estas ramas:

LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

Es en el Renacimiento cuando las nuevas necesidades de representación del arte y de la técnica empujan a ciertos humanistas a estudiar propiedades geométricas para obtener nuevos intrumentos que les permitan representar la realidad. Aquí se enmarca la figura del matemático y arquitecto Luca Pacioli, de Leonardo da Vinci, de Alberto Durero, de Leone Battista Alberti, de Piero della Francesca, por citar sólo algunos. Todos ellos, al descubrir la perspectiva y la sección crean la necesidad de sentar las bases formales en la que se asiente la nueva forma de Geometría que ésta implica: la Geometría Proyectiva, cuyos principios fundamentales aparecen de la mano de Desargues en el siglo XVII. Esta nueva geometría de Desargues fue estudiada ampliamante ya por Pascal o por de la Hire, pero debido al interés suscitado por la Geometría Cartesiana y sus métodos, no alcanzó tanta difusión como merecía hasta la llegada a principios del siglo XIX de Gaspard Monge en primer lugar y sobre todo de Poncelet.

LA GEOMETRÍA CARTESIANA

Pero es sin duda la aparición de la Geometría Cartesiana lo que marca la Geometría en la Edad Moderna. Descartes propone un nuevo método de resolver problemas geométricos, y por extensión, de investigar en Geometría. En un plano traza dos rectas perpendiculares (ejes) -que por convenio se trazan de manera que una de ellas sea horizontal y la otra vertical, y cada punto del plano queda unívocamente determinado por las distancias de dicho punto a

cada uno de los ejes, siempre y cuando se dé también un criterio para determinar sobre qué semiplano determinado por cada una de las rectas hay que tomar esa distancia, criterio que viene dado por un signo. Ese par de números, las coordenadas, quedará representado por un par ordenado ***(x;y)***, siendo ***x*** la distancia a uno de los ejes (por convenio será la distancia al eje vertical) e ***y*** la distancia al otro eje (al horizontal).

En la coordenada ***x***, el signo positivo (que suele omitirse) significa que la distancia se toma hacia la derecha del eje vertical (**eje de ordenadas**), y el signo negativo (nunca se omite) indica que la distancia se toma hacia la izquierda. Para la coordenada *y*, el signo positivo (también se suele omitir) indica que la distancia se toma hacia arriba del eje horizontal (**eje de abscisas**), tomándose hacia abajo si el signo es negativo (tampoco se omite nunca en este caso). A la coordenada ***x*** se la suele denominar ***abscisa*** del punto, mientras que a la ***y*** se la denomina *ordenada* del punto.

Existe una cierta controversia (aun hoy) sobre la verdadera paternidad de este método. Lo único cierto es que se publica por primera vez como «Geometría Analítica», apéndice al «Discurso del Método», de Descartes, si bien se sabe que Pierre de Fermat conocía y utilizaba el método antes de su publicación por Descartes. Aunque Omar Khayyam ya en el siglo XI utilizara un método muy parecido para determinar ciertas intersecciones entre curvas, es imposible que alguno de los citados matemáticos franceses tuvieran acceso a su obra.

Lo novedoso de la Geometría Analítica (como también se conoce a este método) es que permite representar figuras geométricas mediante fórmulas del tipo $f(x;y) = 0$, donde ***f*** representa una función. En particular, las rectas pueden expresarse como ecuaciones polinómicas de grado *1* ($2x + 6y = 0$) y las circunferencias y el resto de cónicas como ecuaciones polinómicas de grado *2* (la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, la hipérbola $xy = 1$). Esto convertía toda la Geometría griega en el estudio de las relaciones que existen entre polinomios de grados *1* y 2. Desde un punto de vista formal (aunque ellos aun lo sabían), los geómetras de esta época han encontrado una relación fundamental entre la estructura lógica que usaban los geómetras griegos (el plano, la regla, el compás...) y la estructura algebraica del ideal formado por los polinomios de grados *0, 1* y *2* del anillo de polinomios , resultando que ambas estructuras son equivalentes. Este hecho fundamental (no visto con nitidez hasta el desarrollo del Álgebra Moderna y de la Lógica Matemática entre finales del siglo XIX y principios del siglo XX) resulta fundamental para entender por qué la Geometría de los griegos puede desprenderse de sus axiomas y estudiarse directamente usando la axiomática de Zermelo-Fraenkel, como el resto de la Matemática.

LOS NUEVOS MÉTODOS

AGOTAMIENTO DEL MÉTODO SINTÉTICO

La aparición de la Geometría Analítica trae consigo una nueva forma de entender la Geometría. El nuevo método, algebraico, sustituye al antiguo, el sintético, consistente en establecer unos axiomas y unas definiciones y deducir de ellos los teoremas. El método sintético está a estas alturas casi agotado (aunque aun dará algunos resultados interesantes, como la característica de Euler, la naturaleza de estos resultados no es ya tanto geométrica como topológica, y los resultados realmente importantes que se hagan en adelante en el campo de la Geometría ya vendrán de la mano de métodos algebraicos o diferenciales), da paso al método algebraico: estudio de los objetos geométricos como representaciones en el espacio de ciertas ecuaciones polinómicas, o dicho de otro modo, del conjunto de raíces de polinomios. El método sintético sólo volverá a abordarse cuando aparezcan las geometrías no euclídeas, y definitivamente deja de ser un instrumento de investigación geométrica a principios del siglo ***XX***, quedando relegado a un conjunto de instrumentos y herramientas para la resolución de problemas, pero ya como una disciplina cerrada.

LOS LÍMITES DEL MÉTODO ALGEBRAICO

El método algebraico se ve posibilitado por un avance en Álgebra hecho durante el siglo XVI, la resolución de las ecuaciones de grado 3° y 4°. Esto permite generalizar la Geometría , al estudiar curvas que no son dadas por polinomios de segundo grado , y que no pueden construirse con regla y compás además de las cónicas, excluyendo a la circunferencia, claro . Pero este método, que terminará constituyendo una disciplina propia , la Geometría Algebraica , tardará aún mucho , siglo XX , en salir de unas pocas nociones iniciales, prácticamente inalteradas desde Descartes, Fermat y Newton. La razón será la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación de quinto grado, hecho no descubierto hasta el siglo XIX, y el desarrollo de la Teoría de Anillos y del Álgebra Conmutativa.

EL CÁLCULO INFINITESIMAL

El método algebraico tiene otra generalización natural, que es la de considerar una curva no solo como una ecuación polinómica, sino como una ecuación $f(x;y) = 0$ en la que el polinomio es ahora sustituido por una función cualquiera f. La generalización de todo esto desde el plano (*2* coordenadas) al estereoespacio (*3* coordenadas) se hace de forma natural añadiendo un tercer eje perpendicular (eje z) a los dos ya considerados, y las funciones tomarán la forma $f(x;y;z)$.

Ya Isaac Barrow descubre gracias a la Geometría Analítica la relación entre la tangente a una curva y el área que encierra entre dos puntos y los ejes coordenados en su famosa Regla de Barrow , antes incluso de que Newton y Leibnitz dieran cada uno su exposición del Cálculo Infinitesimal. La relación entre el Análisis Matemático y la Geometría es así estrechísima desde incluso los orígenes de aquél. Las ideas geométricas no sólo fueron la base de los instrumentos iniciales del Cálculo Infinitesimal, sino que fueron en gran medida su inspiración. Por eso resulta natural que en un primer momento, Descartes, Newton o los Bernoulli no distinguieran entre los conceptos de curva y de función de una variable (o si se quiere, de curva y los ceros de una función de dos variables). Fue Euler el primero en empezar a intuir la diferencia, y el primero también en ampliar este tipo de estudios a las superficies (como función de dos variables o como el conjunto de los ceros de una función de tres variables). El trabajo de Monge continúa por esta línea.

En adelante, y hasta la aparición de Gauss, la Geometría queda supeditada a sus aplicaciones en Mecánica y otras ramas de la Física por medio de la resolución de Ecuaciones Diferenciales. Se estudia en especial la interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales (tanto de la solución en sí como problemas asociados a ellas, como puede ser el de las curvas ortogonales). En esta época aparece el que será el caballo de batalla de la Geometría Diferencial: el Teorema de la Función Implícita.

Fue Huygens el primero en estudiar la curvatura de una curva plana, aunque parece que fue Clairaut el que usa con maestría y fija el concepto.

LA GEOMETRÍA EN LA EDAD CONTEMPORÁNEA

Gauss devuelve el carácter geométrico que impregna parte del Análisis Matemático, fundamentalmente con dos contribuciones: el nacimiento de la Variable Compleja y de la Geometría Diferencial.

Pero no son las únicas contribuciones de éste genio al campo de la Geometría. En su adolescencia se vio dividido entre dedicarse a la Filología o a la Matemática. A los *17* descubrió la manera de construir el polígono regular de *17* lados, y la condición necesaria y suficiente para que un polígono regular pueda construirse. Esto determinó su vocación. En su primera demostración del Teorema Fundamental del Álgebra (de las cinco que realizó a lo largo de su carrera) sentó las bases del Análisis de Variable Compleja, usando por primera vez la descripción geométrica de los números complejos como vectores fijos del plano (no en este lenguaje, que será introducido mucho más tarde). Aunque no es propiamente obra suya, pues la Variable Compleja está desarrollada fundamentalmente por Cauchy, sí es el primero en abordarla seriamente, y sobre todo le da una interpretación geométrica que marcará el desarrollo de esta rama.

Pero la principal contribución de Gauss a la Geometría es la creación de la Geometría Diferencial, retomando las ideas que sobre las relaciones entre el Análisis Matemático y la Geometría había hasta entonces y desarrollándolas ampliamente. Partiendo de la base de que la Geometría estudia el espacio, las curvas y las superficies, establece la noción fundamental de curvatura de una superficie. Gracias a ella, y a la definición de geodésica, demuestra que si consideramos que una geodésica es una curva con menor distancia entre dos puntos sobre una superficie (es decir, si tenemos dos puntos sobre una superficie, el camino más corto entre esos dos puntos sin salirnos de la superficie es un segmento de geodésica), concepto totalmente análogo sobre la superficie al de recta en el plano, existen superficies en las que los triángulos formados por las geodésicas miden más de la medida de dos ángulos rectos, y otras en las que mide menos. Esto, esencialmente, es contradecir el *V* postulado de Euclides.

Estas consideraciones llevaron a Gauss a considerar la posibilidad de crear geometrías no euclídeas, pero aunque a esas alturas ya era el matemático más prestigioso de Europa, consideró que la mentalidad de la época no estaba preparada para un resultado de tal magnitud, y nunca publicó esos resultados. Sólo vieron la luz cuando Bolyai publicó su geometría no euclídea, y comprobó que la comunidad científica general aceptaba el resultado.

Así que, por un lado, Gauss fue el primero en crear una geometría no euclídea, y por otro fue el creador de la Geometría Diferencial y precursor de la Variable Compleja.

Además, Gauss es el primero en considerar una

nueva propiedad en la Geometría: la orientación.

EL FINAL DE LOS GRANDES PROBLEMAS DE LA ANTIGÜEDAD

LA CONTROVERSIA SOBRE EL V POSTULADO

Como ya se ha adelantado, Gauss es el primero en construir una geometría (un modelo del espacio) en el que no se cumple el *V* postulado de Euclides, pero no publica su descubrimiento. Son Bolyai y Lobatchevsky quienes , de manera independiente y simultáneamente publican cada uno una geometría distinta en la que no se verifica tampoco el *V* postulado. ¿Qué quiere decir esto? Tanto Bolyai como Lobatchevsky parten de un objeto geometrico y establecen sobre él unos postulados que son idénticos a los de Euclides en Los Elementos, excepto el quinto. Pretenden originalmente razonar por reducción al absurdo: si el *V* postulado depende de los otros cuatro, cuando lo sustituya por aquél que dice exactamente lo contrario, he de llegar a alguna contradicción lógica. Lo sorprendente es que no se llega a contradicción ninguna, lo cual quiere decir dos cosas:

1º) El *V* postulado es independiente de los otros cuatro, es decir, no puede deducirse de los otros cuatro, no es un teorema, y Euclides hizo bien en considerarlo como un postulado.

*2º)*Existen modelos del espacio en los que , en contra de toda intuición , por un punto que no esté en una cierta recta no pasa una única recta paralela a la dada. Esto es tremendamente anti intuitivo, pues no podemos concebir tal cosa, no podemos imaginar (ni mucho menos dibujar) una situación así, sin reinterpretar los conceptos de recta, plano, etc. Pero desde el punto de vista lógico es perfectamente válido.

Como es de imaginar, esto supuso una fuerte crisis en la Matemática del siglo *XIX*, que vino a sumarse a otras controversias.

Es importante señalar que las geometrías de Bolyai y de Lobatchevsky, no depende de si se construyen usando métodos analíticos o sintéticos. Existen formas de construirlas tanto de manera sintética como analítica. El modelo es el mismo se llegue como se llegue, lo que abunda en su veracidad.

LA TRISECCIÓN DEL ÁNGULO y LA DUPLICACIÓN DEL CUBO

Un hecho aparentemente lejano en Álgebra dará como resultado la resolución de estos dos problemas. Galois muere a los *21* años de edad dejando un «testamento» lleno de ideas apresuradamente escritas. Entre ellas se encuentran las bases de la Teoría de Grupos y de la Teoría de Galois. Galois resolvió el problema de encontrar una fórmula para solucionar las ecuaciones de *5º* grado, pero este resultado no llegó a ser publicado en (su corta) vida. Concluyó que una ecuación de grado *5* o mayor puede ser no resoluble por radicales (es decir , mediante una fórmula). Su manera de abordar el problema abre una nueva vía dentro de la Matemática.

Pero la Teoría de Galois (una rama del Álgebra que trata sobre cuándo es posible resolver una ecuación polinómica estudiando el conjunto de números en los que se expresa esa ecuación) no da sólo esos frutos. También demuestra que todo lo construible con regla y compás tiene una traducción a polinomios muy concreta. Se demuestra que trisecar un ángulo o duplicar un cubo necesita de polinomios que no tienen esa forma, y por lo tanto, es imposible con la sola ayuda de la regla y el compás trisecar un ángulo cualquiera o duplicar un cubo.

LA CUADRATURA DEL CÍRCULO

En *1862*, Lindemann demuestra que el número *p* es trascendente , es decir , no puede ser raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros. Esto implica que no es un número que pueda construirse con regla y compás , y demuestra que no es posible construir con sólo estos instrumentos un cuadrado de área igual a la de un círculo dado.

El *10* de junio de *1854*, Bernhard Riemann da una conferencia en la Universidad de Gotinga para completar su habilitación (grado que le permitiría optar a una plaza de profesor universitario). El tema de la conferencia fue la Geometría, a elección de Gauss, su protector y antiguo profesor durante la licenciatura y el doctorado. La conferencia, cuyo título fue *Über die Hypothesen, Welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Sobre las hipótesis que están en los fundamentos de la geometría*), pasa por ser una de las más celebradas de la historia de la Matemática, y uno de los mayores logros científicos de la humanidad. De entre los presentes se dice que sólo Gauss fue capaz de comprender su contenido, y hay que decir que le entusiasmó.

VARIEDADES RIEMANNIANAS y EL TENSOR CURVATURA

En la primera parte de la conferencia, Riemann se

pregunta qué problema hay en aumentar el número de dimensiones del espacio. Riemann, usando aun un lenguaje intuitivo y sin hacer demostraciones, introduce primero el concepto de variedad diferenciable, generalización del concepto de superficie a cualquier número (entero positivo) arbitrario de dimensiones. De hecho, el nombre *variedad* hace referencia a las varias coordenadas que variarían para ir obteniendo los puntos del objeto. Las superficies serían las variedades de dimensión ***2***, mientras que las curvas serían las variedades de dimensión ***1***, y aun los puntos las de dimensión ***0***. De todas formas, esta aproximación al concepto es demasiado imprecisa, pues el punto clave de la definición formal de una variedad diferenciable (definición no expuesta correctamente hasta 1913 por Hermann Weyl) es que esto es cierto **localmente**, es decir, cada punto de la variedad tiene algún entorno homeomorfo a un abierto del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, de manera que cuando el inverso de uno de estos homeomorfismos se compone con otro de estos homeomorfismo se obtiene una función diferenciable de un abierto de $\mathbb{R}^n$ en otro abierto de $\mathbb{R}^n$. Pero como decimos hicieron falta casi ***60*** años para que la definición terminara de cuajar.

No era la primera vez que se especulaba con la posibilidad de la existencia de espacios de dimensión superior a ***3***. De hecho este tema ha sido tratado en la Historia en varias ocasiones , pero siempre desde un punto de vista de la realidad sensible (para negar su existencia) o metafísico. Es Cayley quien en ***1843*** trata explícitamente el tema por primera vez , y volverá a él nuevamente en repetidas ocasiones. Le seguirán Sylvester, Clifford, Grassmann y Schläfli entre otros, aunque hay que decir que la visión de todos ellos es mucho más algebraica que geométrica.

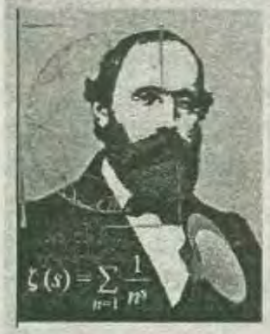
Es probable que el estudio de las superficies de Riemann, objetos a cuyo estudio había dedicado su tesis doctoral, indujeran a Riemann a pensar en este concepto de variedad de dimensión arbitraria. Si tomamos unos ejes coordenados y dibujamos todos los puntos ***(x;f(x))***, donde ***x*** varía en un intervalo y ***f*** es una función real, derivable y definida sobre ese mismo intervalo, obtendremos la curva (dimensión 1) dada por la gráfica de una función.

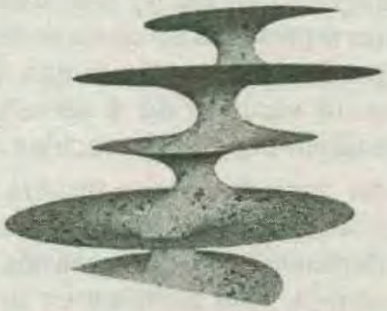
Si en lugar de ser una función de una variable tenemos una función de dos variables ***f(x;y)***, al dibujar todos los puntos ***(x;y;f(x,y))***, donde ***(x;y)*** son de una región del plano donde esté definida ***f***, obtenemos una superficie (dimensión 2). Riemann estudia funciones complejas de variable compleja, es decir, funciones cuya gráfica tendría por puntos cosas de la forma ***(x;y;u(x,y);v(x,y))***, siendo tanto ***u(x;y)*** como ***v(x;y)*** funciones reales (es decir, cada uno representa un número real). Las gráficas de este tipo de funciones tendrían dimensión ***3*** y estarían en un espacio de ***4*** dimensiones, y gozarían de propiedades muy parecidas a las de las superficies.

Una variedad riemanniana no es sólo un objeto geométrico n-dimensional. Es una variedad diferencial a la que además hay que dotar de una métrica. Una **métrica** es un **campo de tensores diferenciable de grado 2.** Veamos: en cada punto de una variedad diferencial se puede calcular el espacio tangente a la variedad en ese punto, al igual que en una superficie (suave), en cada punto podemos calcular el plano tangente en ese punto a la superficie, y en una curva (suave) podemos calcular en cada punto la recta tangente a la curva en dicho punto. Ese espacio tangente tendrá la misma dimensión que la variedad (en el caso de curvas, el espacio tangente , la recta tangente tiene dimensión 1, en el de superficies tiene dimensión 2). Una métrica (o **estructura riemanniana**) sobre una variedad es una aplicación que a cada punto de la variedad le asigna un producto escalar en el espacio tangente a la variedad en ese punto, y esa aplicación es diferenciable. Un producto escalar es, para entendernos, una regla que nos permite calcular longitudes de segmentos y ángulos entre rectas. A través de una métrica, se pueden definir sobre una variedad conceptos como longitud de una curva o el ángulo entre dos curvas , generalizar a variedades el concepto de geodésica , ya utilizado por Gauss para superficies, que viene a ser (ojo , esto es una explicación de cómo es una geodésica , no es una definición) una curva dibujada sobre una superficie (o en nuestro caso sobre una variedad) de tal forma que entre dos de sus puntos minimice la distancia medida sobre la superficie (variedad). Por ejemplo, si tenemos un globo y marcamos dos puntos sobre él, la distancia más corta se calculará, como sabemos, por la medida del segmento de recta que atraviesa el globo por ambos puntos. Sin embargo , si lo que pretendemos es buscar el camino más corto para llegar de un punto a otro sin salirnos de la superficie del globo , tendremos que dibujar sobre él una curva que una los puntos y se combe por la propia «curvatura» del globo. Esa curva sería un segmento de geodésica en la superficie del globo.

El punto culminante de la primera parte de la conferencia llegó cuando Riemann, utilizando las gedésicas, define el tensor curvatura seccional, que

es la generalización a variedades del concepto de curvatura estudiado por Gauss. Este instrumento permite «medir la curvatura» de una variedad.





EL MODELO DEL UNIVERSO

En la segunda parte de la conferencia, Riemann se pregunta por el modelo que debe de seguir el espacio físico, el espacio en el que nos movemos, cuál es su dimensión, cuál es su geometría. Las ideas de Riemann, decididamente muy avanzadas para su época, cuajaron definitivamente cuando Einstein y Poincaré, al mismo tiempo pero de manera independiente, las aplicaron al espacio físico para crear la Teoría de la Relatividad.

El nuevo modo de Riemann de estudiar la Geometría considera que cualquier modelo de espacio (ya sea el plano, el espacio tridimensional, o cualquiera otro) puede ser estudiado como una variedad diferenciable, y que al introducir en ella una métrica se está determinando la geometría que gobierna ese objeto. Por ejemplo, el plano no es, por sí solo, euclidiano ni no euclidiano, sino que introduciendo la métrica euclídea es cuando en el plano verifica el *V* postulado de Euclides. Si en lugar de considerar esa métrica se introduce en el plano otra métrica, como la de Lobatchevsky, deja de verificarse el mismo postulado. La propiedad de las geodésicas de minimizar la longitud entre dos de sus puntos sin salirse de la variedad recuerda mucho a la definición de las rectas como aquellas líneas que determinan la menor distancia entre dos puntos. Se considera que las geodésicas son a las variedades riemannianas lo que las rectas al espacio euclidiano, es decir, las geodésicas son como *las rectas* de las variedades. Esta nueva visión permite estudiar todas las nuevas geometrías no euclídeas, así como la geometría euclidiana bajo la misma óptica de la nueva Geometría riemanniana.

Cuando las ideas de Riemann consiguen extenderse, la Geometría pasa ya definitivamente a ser el estudio de las variedades, dejando de ser definitivamente el estudio de triángulos, áreas, etc.

Los puntos básicos de la conferencia de Riemann son, por un lado, la posibilidad de aunmentar indefinidamente el número de dimensiones del espacio (el Álgebra y el Análisis están ya creando la maquinaria necesaria para poder operar en dimensión finita arbitraria, con lo que definitivamente se podrá estudiar Geometría más allá de su visualización gráfica), es decir, de estudiar espacios de *3; 4; 5...* dimensiones, y por otro lado dotar a los geómetras de un instrumento, el tensor curvatura, que les permite estudiar las propiedades intrínsecas de esos nuevos objetos, esos nuevos espacios, las variedades.

KLEIN

Felix Klein es la otra gran pieza clave de la Geometría en el siglo XIX. En 1871 descubrió que la geometría euclidiana y las no euclidianas pueden considerarse como casos particulares de la geometría de una superficie proyectiva con una sección cónica adjunta. Esto implicaba dos cosas: la primera es que la geometría euclidiana y las no euclidianas podían considerarse como casos particulares de la geometría proyectiva (o mejor dicho, de la geometría de una superficie en un espacio proyectivo). La segunda, que la geometría euclidiana es consistente (es decir, no puede llevar a contradicciones) si y sólo si lo son las geometrías no euclidianas.

Con esto se da fin a la controversia de si las geometrías no euclidianas tienen sentido o no, aunque el asunto coleará aun unos años ante el excepticismo de ciertos elementos que considerarán erróneo el argumento de Klein.

Pero la aportación más importante de Klein a la Geometría es su famoso Programa de Erlangen, donde da una nueva definición de Geometría.

EL PROGRAMA DE ERLANGEN

Con motivo de su ingreso como profesor en la Facultad de Filosofía y al Senado de la Universidad de Erlangen, Klein escribió una memoria en 1872 (que por cierto no llegó a leer en público) que puede considerarse, junto a la Conferencia de Riemann y a los Elementos de Euclides, como los puntos esenciales del estudio de la Geometría.

La idea de la memoria, conocida como el *Programa de Erlangen*, es bastante sencilla. Se trata de dar una definición formal de lo que es una geometría, más allá de la idea más o menos intuitiva que tenemos de ella.

Ante la aparición de las nuevas geometrías no euclidianas, parece lógico preguntarse qué es la Geometría, máxime cuando la propia idea de la geometría euclidiana se había visto modificada desde la irrupción de los métodos algebraicos y analíticos.

Empieza a no estar tan claro que la Geometría sea el estudio de puntos, líneas (rectas o curvas) y superficies, puesto que el propio Análisis Matemático (sobre todo en el estudio de Ecuaciones Diferenciales) parece que también estudia tales objetos. Por otra parte, los métodos analíticos y algebraicos también son aplicables a las geometrías no euclidianas. Hay, digamos, dos niveles de distinciones: por un lado, la de las geometrías no euclidianas y la geometría euclidiana, por otro lado, la distinción entre el método sintético, el algebraico y el analítico.

¿QUÉ ES ENTONCES LA GEOMETRÍA?

Klein da respuesta a esta pregunta introduciendo en la Geometría un nuevo concepto de carácter algebraico: el concepto de grupo. Un grupo es un conjunto G en el que hay definida una operación, es decir, una aplicación que a cada par de elementos del conjunto le asigna otro elemento del conjunto (que será el resultado de operar dichos dos elementos). Mientras que la mayoría de la gente está familiarizada con las operaciones numéricas, les resulta difícil imaginar que puedan operarse puntos, rectas, etc. Puede hacerse, y no hay más que pensar en, por ejemplo, la operación «tomar el punto medio», que a cada par de puntos le asigna el punto medio del segmento que une los dos primeros puntos.

Para que un conjunto en el que haya una operación sea un grupo deben de cumplirse ciertas condiciones, que son:

- La operación debe ser asociativa: esto quiere decir que si tomamos cualesquiera tres elementos a,b,c del conjunto, el resultado de operar los dos primeros (a y b) y operar el resultado de ello con el tercero (c) debe de ser lo mismo que si primero operamos el segundo y el tercero (b y c) y el resultado lo operamos con el primero (a). Es decir , si la operación la denotamos $*$ por ha de ocurrir que : $a*(b*c)=(a*b)*c$

- Debe existir un elemento neutro: esto quiere decir que ha de haber un elemento e del conjunto de manera que si tomo cualquier otro elemento a del conjunto y lo opero con él, entonces el resultado vuelve a ser el elemento a, es decir , es como si al elemento a no lo hubiera operado. Así, con nuestra notación, y $a*e=e*a=a$

- Por último, cada elemento debe tener un elemento simétrico: esto quiere decir que si yo tomo un elemento cualquiera a del conjunto, entonces puedo encontrar otro elemento del conjunto de tal manera que al operar ambos, el resultado que obtengo es el elemento neutro: $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$

El concepto de grupo no es invención de Klein, pero es él el que descubre un hecho fundamental que lo relaciona con las distintas geometrías: cada geometría es el estudio de ciertas propiedades que no cambian cuando se le aplican un tipo de transformaciones. Esas propiedades, por no cambiar, las denomina invariantes, y las transformaciones que a un invariante no le hacen cambiar han de tener estructura de grupo bajo la operación de composición (componer dos transformaciones es hacer una de ellas y aplicarle la otra transformación al resultado de la primera). Resumiendo, Klein define soterradamente una geometría como dar el subgrupo de las biyecciones de un conjunto en sí mismo que uno admitirá como *grupo principal*. Los *conceptos* o *definiciones* serán los invariantes por ese grupo principal, y los *teoremas* serán las relaciones entre los conceptos.

Así Klein descubre que, por ejemplo, la geometría euclidiana es el estudio de los invariantes mediante el grupo de los movimientos rígidos (como las simetrías, giros y traslaciones), que la geometría afín es el estudio de los invariantes mediante el grupo de las translaciones, que la geometría proyectiva es el estudio de los invariantes mediante el grupo de las proyectividades, e incluso que la Topología es el estudio de los invariantes mediante el grupo de las funciones continuas y de inversa continua, entre otras.

De hecho, Klein afirma que la comprensión de «tener una geometría, entonces hay un *grupo principal*» es más bien al revés. Uno a priori dice qué tipo de transformaciones admitirá (es decir, da el grupo) y todo lo demás se puede reconstruir a partir de él. Se demuestra incluso, que si uno da un subgrupo de las biyecciones de un conjunto en sí mismo isomorfo a algún grupo clásico (simetrías, translaciones, proyectividades) entonces todos los teoremas de esa geometría son válidos en este.

El descubrimiento de Klein es fundamental, ya que por un lado nos permite clasificar las geometrías, comprendiendo cuál es una «subgeometría» de cual, por otro lado nos permite comprender qué es el estudio general de la Geometría (como disciplina matemática) y por último, pero no menos importante, es la confirmación de que los métodos sintético y algebraico no dan geometrías distintas, sino que realmente estudian la misma geometría en cada caso. Se pone fin así a la distinción entre el método sintético y el algebraico-analítico. En su época supuso la consagración de la Geometría Proyectiva como la *Reina de las Geometrías*.

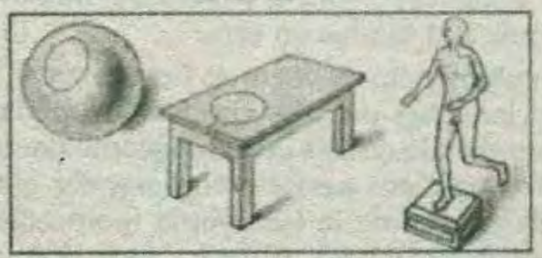
Nótese que es la primera vez que una ciencia (la Geometría) es capaz de autodefinirse rigurosamente y, por tanto, constituye uno de los puntos culminantes del espíritu humano en la historia.

LA LINEALIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA

En el último cuarto del siglo *XIX* hace su aparición poco a poco el concepto de espacio vectorial. Investigaciones como las de Cayley, Peano, Hamilton, Grassmann y otros fueron poco a poco sacando a la luz los conceptos básicos del Álgebra Lineal, ya fuera desde la propia geometría o incorporándola a ella. Vectores, matrices, aplicaciones lineales, determinantes... Objetos y conceptos ya implícitos en las investigaciones y métodos de cálculo de Gauss o Descartes (por citar sólo algunos) empiezan a ser estudiados de forma sistemática y no tardan en ser dotados de una teoría formal de naturaleza algebraica.

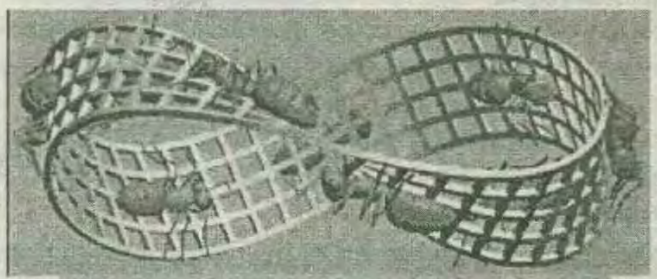
La linealización de la Geometría se produce de manera paulatina pero rápida, en unos treinta o cuarenta años , y se hace de forma inversa al desarrollo lógico de la materia , es decir, los últimos conceptos en aparecer son los más básicos y los más abstractos. La tendencia a abandonar el método axiomático por el método algebraico va conformando poco a poco la teoría , de forma que los aspectos básicos del Álgebra Lineal surgen de la Geometría Proyectiva, la Geometría Afín o la Geometría Euclidiana, se incorporan como objetos propios al Álgebra, y regresan a la Geometría convertidos y convirtiendo las distintas materias que la conforman. Se renuevan y se rehacen constantemente los fundamentos, no cambiándolos, sino reformulándonos en el nuevo lenguaje. A mediados del siglo *XX* parece que ya queda fijado todo el proceso . Pero no sólo estas geometrías cambian su aspectos , sino la Geometría Algebraica y la Geometría Diferencial también se ven afectadas por la renovación del lenguaje.

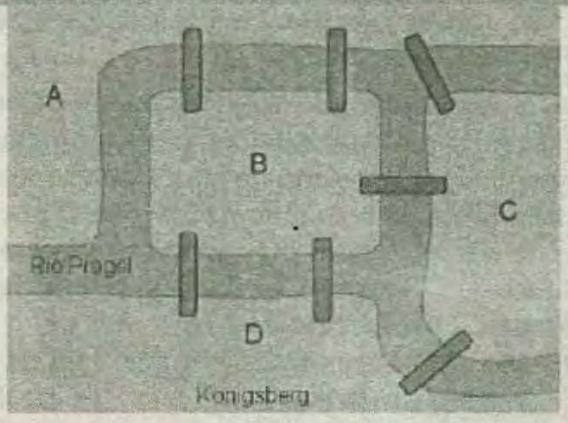
TOPOLOGÍA GEOMÉTRICA



La **Topología** es una disciplina Matemática que estudia las propiedades de los espacios topológicos y las funciones continuas. La Topología se interesa por conceptos como *proximidad*, *número de agujeros*, el tipo de *consistencia* (o *textura*) que presenta un objeto, comparar objetos y clasificar, entre otros múltiples atributos donde destacan conectividad, compacidad, metricidad, etcétera.

Los matemáticos usan la palabra *topología* con dos sentidos: informalmente es el sentido arriba especificado, y de manera formal se refieren a una cierta familia de subconjuntos de un conjunto dado, familia que cumple unas reglas sobre la unión y la intersección. Este segundo sentido puede verse desarrollado en el artículo espacio topológico.





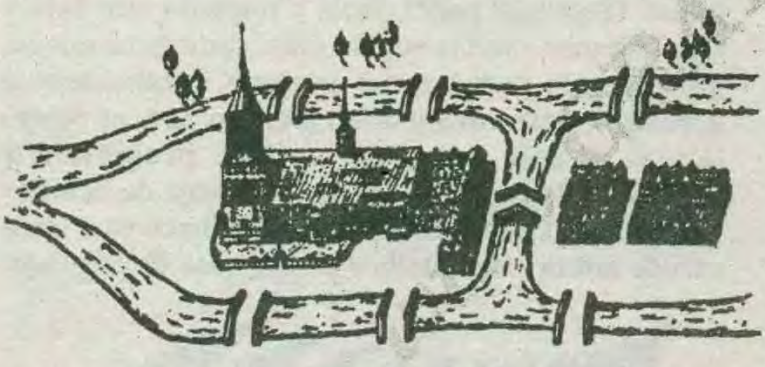
Históricamente, las primeras ideas topológicas conciernen al concepto de límite y al de completitud de un espacio métrico, y se manifestaron principalmente en la crisis de los inconmesurables de los pitagóricos, ante la aparición de números reales no racionales. El primer acercamiento concreto al concepto de límite y también al de integral aparece en el método de exhaución de Arquímedes. La aparición del Análisis Matemático en el siglo XVII puso en evidencia la necesidad de formalizar el concepto de proximidad y continuidad, y la incapacidad de la Geometría para tratar este tema. Fue precisamente la fundamentación del Cálculo

Infinitesimal, así como los intentos de formalizar el concepto de variedad en Geometría lo que llevó a la aparición de la Topología, a finales del siglo XIX y principios del XX.

Se suele fechar el origen de la Topología con la resolución por parte de Euler del problema de los puentes de Königsberg, en 1735. Ciertamente, la resolución de Euler del problema utiliza una forma de pensar totalmente topológica, y la solución del problema nos trae a la característica de Euler, el primer invariante de la Topología Algebraica, pero sería muy arriesgado y arbitrario fechar en ese momento la aparición de la Topología. La situación es exactamente análoga a la del cálculo del área de la elipse por Arquímedes.

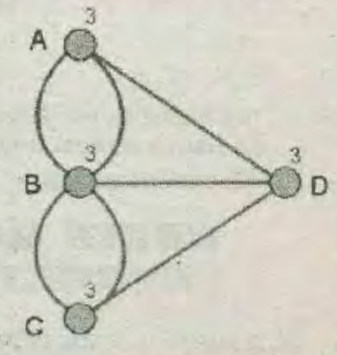
El término *topología* fue usado por primera vez por J. B. Listing, en 1836 en una carta a su antiguo profesor de la escuela primaria, Müller, y posteriormente en su libro *Vorstudien zur Topologie* (Estudios previos a la topología), publicado en 1847. Anteriormente se la denominaba *analysis situs*. Maurice Fréchet introdujo el concepto de espacio métrico en 1906.

EL PROBLEMA DE LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG



Esta ciudad esta recorrida por el río Pregel que crea dos islas. ¿Se puede recorrer toda la ciudad pasando una sola vez por todos y cada uno de los 7 puentes que unen la parte insular de la ciudad con el resto?

La solución de Euler: El famoso matemático abstrajo los detalles de la forma de la ciudad y sus puentes para quedarse con la conectividad, dando lugar a una de los primeros grafos. El orden de todos los vértices es impar, lo que implica que es imposible recorrerlos pasando una sola vez por cada uno.



Euler realizó una abstracción del problema representando mediante puntos las cuatro porciones de terreno y dibujando un arco entre cada dos puntos por cada puente. Llamó orden de cada vértice al número de arcos que se reunían en el y se percató que el orden de cada vértice visitado en un recorrido sin saltos ha de ser par (sale un enlace y entra otro) **excepto para dos puntos del grafo:** aquellos donde se inicia y donde se acaba el recorrido, que han de tener orden impar. Si el vértice donde se inicia y se acaba son el mismo entonces **todos** los vértices han de ser de orden par.

En el problema de Königsberg el orden de todos los nodos es 3, esto es impar, por lo que quedó claro que no existía solución para el problema. No había un camino que recorriese todos los puentes pasando una sola vez por cada uno de ellos.

El interés de este ejemplo es que **además de dar lugar a una teoría matemática muy potente los grafos se dibujan y resultan muy intuitivos**, especialmente cuando los vértices son pocos. Ejemplos de grafos que todos conocemos son los organigramas que explicitan la estructura formal de la empresa, los árboles genealógicos o la circuitería de los chips electrónicos. Se usan regularmente para resolver problemas en la eficiencia del transporte, en sociología, electrónica y electricidad, detección de fraude y en general en aquellos campos en los que la conectividad es importante.

De hecho **vivimos en una sociedad interconectada** en la que, por definición, las redes (que son simplemente una forma de grafos dirigidos en los que cada arco tiene un valor) forman cada vez más parte de nuestra experiencia diaria. Internet es el arquetipo de la red y su conectividad nos perfunde a todos.

Como anécdota, al parecer **la captura de Saddam Hussein se realizó en parte gracias a la labor de construcción del grafo de su red de soporte**, basada en las relaciones funcionales de Saddam con miembros de su partido pero sobre todo de las relaciones tribales y familiares que le unen a su ciudad natal de Tikrit.

FRACTAL

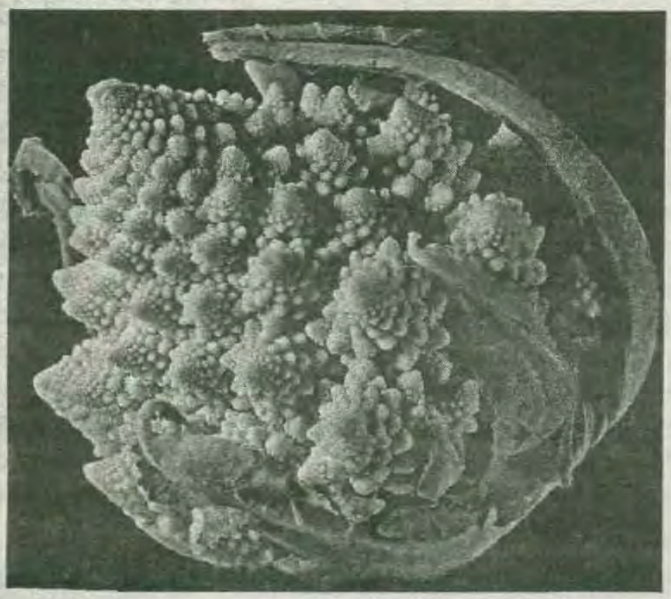
Un **fractal** es un objeto semi geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas. El término fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot en 1975 y deriva del Latín *fractus*, que significa quebrado o fracturado. Muchas estructuras naturales son de tipo fractal.

A un objeto geométrico fractal se le atribuyen las siguientes características.

* Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales.

* Posee detalle a cualquier escala de observación.
* Es autosimilar (exacta, aproximada o estadística).
* Su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica.
* Se define mediante un simple algoritmo recursivo.

No nos basta con una sola de estas características para definir un fractal. Por ejemplo, la recta real no se considera un fractal, pues a pesar de ser un objeto autosimilar carece del resto de características exigidas.



Un **fractal natural** es un elemento de la naturaleza que puede ser descrito mediante la geometría fractal. Las nubes, las montañas , el sistema circulatorio, las líneas costeras o los copos de nieve son fractales naturales. Esta representación es aproximada, pues las propiedades atribuidas a los objetos fractales ideales, como el detalle infinito, tienen límites en el mundo natural.

Para encontrar los primeros ejemplos de fractales debemos remontarnos a finales del siglo XIX: en 1872 apareció la función de Weierstrass, cuyo grafo hoy en día consideraríamos fractal, como ejemplo de función continua pero no diferenciable en ningún punto.

Posteriormente aparecieron ejemplos con propiedades similares pero una definición más geométrica. Dichos ejemplos podían construirse partiendo de una figura inicial (semilla), a la que se aplicaban una serie de construcciones geométricas sencillas. La serie de figuras obtenidas se aproximaba a una figura límite que correspondía al que hoy llamamos conjunto fractal. Así, en 1904, Helge von Koch definió una curva con propiedades similares a la de Weierstrass: el copo de nieve de Koch. En 1915, Waclaw Sierpinski construyó su triángulo y, un año después, su alfombra.

COPO DE NIEVE DE KOCH

GEOMETRÍA FRACTAL

Geometría Fractal es geometría que no distingue entre conjunto matemático y objeto natural. Este nuevo paradigma engulle paradigmas anteriores proyectando un modelo que inaugura una nueva zona o región de lo real.

Tómese un número complejo, multiplíquese por sí mismo y súmese el número inical; tómese el resultado, multiplíquese por sí mismo, súmese el inicial... y así sucesivamente. A esta iteración en principio errática se le asignan puntos sobre un plano. Disponga papel, lápiz y moneda con cara y cruz, fijemos ciertas reglas para cada lanzamieno; por ejemplo desplazar el punto X centímetros al noreste si sale cara y acercarse un 50% al centro inicial si sale cruz. Se perfila, progresiva y sorprendentemente el dibujo de la hoja de helecho (véase fig. 1) mientras el ordenador hace esta tarea menos ardua en pantalla y en décimas de segundo.

"Un fractal es, por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica."

BREVE HISTORIA DE LA GEOMETRÍA FRACTAL

Si Mandelbrot representa el enfoque moderno de la matemática y es considerado padre de la *geometría fractal* debemos remontarnos a 1935 cuando se funda la célebre

escuela Bourbaki, organizadora del nuevo pensamiento matemático. Sus miembros fundadores eran: **André Well, Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Coulomb, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, René de Possel y Szolem Mandelbrojt**, colaboradores de Nicolas Bourbaki.

Los objetivos fundamentales de Bourbaki eran la reconstrucción del edificio matemático sobre bases axiomáticas. Sus trabajos cristalizaron en la redacción de una enciclopedia, "**Éléments de Mathematique**".

En 1945, Szolem recomienda a su sobrino Benoît la lectura de un escrito de 300 páginas de Gaston Julia (1893-1978) titulado "**Mémoire sur l'iteration des fonctions rationelles**", precursor de la moderna teoría de sistemas dinámicos. Y, de acuerdo con las ideas de la escuela de la que formaba parte, añadió: "*Olvida la geometría*".

El discípulo Mandelbrot no se interesó mucho por la lectura recomendada por su maestro, bien por la clase de problemas planteados por su tío acerca de aquella, o porque Benoît enfocaba las Matemáticas desde un punto de vista muy diferente. Adicionalmente, hizo caso omiso de la recomendación acerca de la geometría. Por otra parte, Benoît recobró interés por la publicación mencionada en 1970. Con ayuda de las facilidades computacionales puestas a su disposición por IBM a partir de 1957 en el centro de investigación Thomas J. Watson, contribuyó a crear las ilustraciones de su ensayo de 1975. Y, curiosamente, en 1980, con ayuda de un ordenador VAX, pantalla Tektronix y hardcopy Versatac, sorprendió a la comunidad científica con el **primer dibujo** detallado de un gráfico deducido de la evolución del sistema dinámico en el campo complejo.

Barnsley descubre esta dinámica en 1985 sin usar números complejos recurriendo a la aleatoriedad del juego del caos.

«Tras milenios de ser usadas para descubrir leyes que gobiernan sobre una naturaleza fundamentalmente pasiva, las matemáticas descubren los atractores o focos activos internos de cada sistema físico. En vez de limitarse a despejar incógnitas en sistemas lineales idealizados, emplean una técnica iterativa donde las funciones se realimentan por el procedimiento de volver sobre ellas mismas.»

UNA REFLEXIÓN PERSONAL SOBRE LA DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA

La geometría es una parte importante de la cultura del hombre, no es fácil encontrar contextos en que la geometría no aparezca de forma directa o indirecta. Actividades tan variadas como el deporte, la jardinería o la arquitectura por citar algunas se sirven de la utilización, consciente o no, de procedimientos geométricos.

Se admite de forma universal la importancia de la geometría como formadora del razonamiento lógico. Pocos son quienes discuten su trascendencia tanto en estudios posteriores de cualquier ciencia como en el desarrollo de habilidades cotidianas. No es casual que la geometría fuese ya en la Antigua Grecia una rama importante del saber, aunque su origen es anterior.

La geometría ha sido durante siglos uno de los pilares de la formación académica desde edades tempranas. Durante el siglo pasado, perdió paulatinamente presencia en los planes de estudio. Afortunadamente, los actuales currículos de matemáticas de todos los niveles educativos confieren a la geometría la importancia que nunca debió perder.

Ya en los objetivos generales del área podemos leer:

«Aplicar los conocimientos geométricos para comprender y explicar formas y relaciones espaciales que se presentan en la realidad del espacio físico que nos rodea, en el campo de la tecnología y en las distintas formas de expresión artística» .

El NCTM en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (2009) afirma:

«La Geometría ofrece medios para describir, analizar y comprender el mundo y ver la belleza en sus estructuras»

Poco difieren las intenciones de las afirmaciones anteriores de lo ya expresado por Galileo:

«El Universo está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola de sus palabras. Sin ese lenguaje, navegamos en un oscuro laberinto».

¿La enseñanza actual de la Geometría responde a estas demandas?

En el estudio *Evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria 2009*, desarrollado por el Ministerio de Educación , se pone de manifiesto el escaso progreso en el aprendizaje de la geometría de nuestros alumnos. Siendo dentro de las Matemáticas uno de los bloques con peores resultados.

¿Estamos enseñando a nuestros alumnos una geometría adecuada? ¿Es suficiente que nuestros alumnos calculen longitudes, áreas y volúmenes de figuras geométricas a partir de unos datos, despejando la magnitud desconocida de una expresión algebraica que relaciona objetos geométricos? ¿Es más importante calcular el área de un triángulo rectángulo o construir el triángulo rectángulo a partir de una circunferencia?

¿Qué geometría debemos enseñar? ¿Pueden nuestros alumnos estudiar geometría analítica , sin conocimientos sólidos de geometría sintética?

Actualmente disponemos de las herramientas necesarias para que la formación del alumno sea más completa. El ordenador, auxiliar casi insustituible en las diferentes actividades humanas, no es una excepción en esta faceta. Los programas de geometría dinámica han demostrado en las dos últimas décadas su capacidad de ayuda al usuario para adquirir destrezas en uno de los campos más creativos de las matemáticas. Sin sustituir las demostraciones formales, por otra parte inaccesibles en edades de educación obligatoria, muestran la generalidad de las propiedades geométricas con sólo arrastrar el puntero del ratón.

Aun cuando habría todavía tanto por decir ,pondremos punto final a esta breve exposición. recordando que «cualquier nueva geometría sólo se justifica cuando es fecunda para la ciencia» , y las geometrías no euclidianas ,

cuyo lineamientos generales acabamos de expresar, no podíamos ser más fecundas para ella. Afirmemos por nuestra fe en el pensamiento siempre inconforme del hombre en su búsqueda indesmallable de la verdad, en su afán permanente por desentrañar las leyes que rigen la armonía del universo ; y la Geometría, tan utilitaria como nació , en el afán de medir las tierras, tiene ahora un papel de primerísima Importancia para acercarnos hacia la conquista de mucha leyes aún escondidas que rigen en el universo, cada vez más cercana en la concepción humana.

GEOMETRÍA

FIGURA GEOMÉTRICA

Es una sucesión de puntos que adoptan una forma determinada , representando una línea , una superficie o un sólido.

La geometría estudia las figuras geométricas según su forma , tamaño y las relaciones que existen entre sus partes .

DEFINICION DE GEOMETRÍA :

La Geometría es la ciencia deductiva que trata de las propiedades de las figuras geométricas empleadas para la medición de extensiones.

La geometría es *una parte de las matemáticas que defiere radicalmente de la aritmética y el álgebra, aunque hace uso de ellas* como *herramientas de apoyo.* Si *bien* se *hace uso frecuente de cálculos numéricos, ecuaciones y fórmulas, tiene por objeto principal el estudio de los formas* o *figuras tales* como: *Cuadrados, triángulos, círculos ,poliedros, etc.*

Extensión es la porción de espacio que ocupa, una figura geométrica, llamándose *extensión volumétrica* para un sólido, *extensión superficial* en una superficie y *extensión lineal* la que ocupa una línea.

OBJETO DE LA GEOMETRIA

El objeto original de la Geometría Euclideana es el estudio de las figuras geométricas desde el punto de vista de su forma, extensión y relaciones que guardan entre sí. Se divide en dos partes: Geometría Plana (Planimetría) y Geometría del Espacio (Estereometría).

Hacia fines del siglo XX, la geometría ha ampliado su campo de acción hacia nuevos problemas, generándose por tanto nuevas ramas como: la Geometría Analítica, la Geometría Proyectiva ,la Geometría Descriptiva, la Geometría No-Euclideana o de Lobatschewski, y en la actualidad la Topología , la Geometría Vectorial y la geometrá fractal .

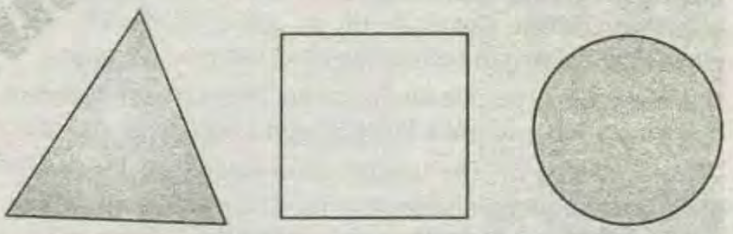
La Geometría que estudiaremos en este texto es la Geometría Euclidiana y , sólo si la analizamos a cabalidad, veremos claramente el armonioso desarrollo lógico que presenta. Más importante aún, habremos puesto bases sólidas para el estudio de otras geometrías, mucho más complejas, pero a la vez, mucho más importantes que, entre otras cosas, buscan ansiosamente una respuesta matemática, es decir, una respuesta perfecta a las cuestiones relacionadas con la forma y origen del universo.

LA GEOMETRÍA PLANA :

Llamada también PLANIMETRÍA , estudia las figuras planas, ésto es, aquellas cuyos puntos estan en un mismo plano.

EJEMPLOS:

El triángulo, cuadrado, círculo , etc.

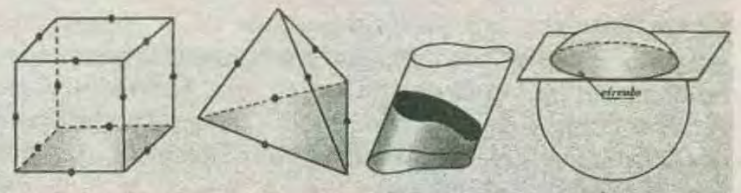


GEOMETRÍA DEL ESPACIO :

Llamada también ESTEREOMETRÍA , trata de las figuras cuyos puntos no están en un mismo plano(sólidos geométricos).

EJEMPLOS:

Cubos , cilíndros , tetraedros , esferas , etc.



OTRAS GEOMETRÍAS MÁS COMPLEJAS

Geometría Analítica	*Geometría Fractal*
Geometría Algorítmica	*Geometría Elíptica*
Geometría Diferencial	*Geometría Hiperbólica*
Geometría Descriptiva	*Geometría Riemanniana*

APLICACIONES DE LA GEOMETRÍA

Tan importante es el conocimiento geométrico que hoy su estudio se hace necesario para las diversas profesiones y disciplinas existentes, como por ejemplo:

Arquitectura, Ingeniería, Física, Química, Bellas Artes, Diseño Gráfico, Diseño Industrial, Astronomía, Telecomunicaciones, etc.

Por consiguiente, la Geometría es una pieza básica para comprender la realidad.

De allí que algunos consideren que la Geometría es el lazarillo de todas las demás ciencias.

FIGURAS GEOMETRICAS CLASIFICACION

Se llaman figuras geométricas a los conjuntos de puntos tales como las líneas, superficies y cuerpos, con determinada forma, tamaño y posición. El punto representa el conjunto unitario.

EL TAMAÑO DE UN SÓLIDO se mide por su volumen, el de una superficie. por su área y el de una línea por su longitud.

FORMA: Designamos con este nombre a la manera de estar limitada una figura.

POSICIÓN : Es el lugar que ocupa una figura y el modo de estar colocada.

Las figuras geométricas se clasifican en :

I) FIGURAS CONGRUENTES (≅) :

Si tienen igual forma e igual tamaño.

EJEMPLO:

Dos circunferencias cuyos radios tienen igual longitud.

II)FIGURAS SEMEJANTES (~):

Si tienen igual forma pero tamaño diferente.

EJEMPLO:

Dos cuadrados cuyas longitudes de sus lados son diferentes.

III) FIGURAS EQUIVALENTES (<>):

Si tienen forma distinta pero igual tamaño.

EJEMPLO:

Un círculo y una región triangular cuyas áreas son iguales.

TERMINOLOGIA

En Matemáticas se emplean con regularidad palabras con las cuales conviene familiarizarse desde el principio. Veamos la definición de las más importantes:

RAZONAMIENTO DEDUCTIVO :

La forma de pensar utilizado en la ciencia y particularmente en geometría , se conoce como método deductivo. El método consiste en, valiéndonos de la *lógica*, deducir nuevos conocimientos a partir de conocimientos anteriores que se consideran verdaderos. Como es natural, deben existir alguno o algunos principios generales básicos (axiomas, postulados y definiciones) desde donde comenzar la construcción de una nueva ciencia. La geometría es un sistema axiomático o deductivo en el que cada teorema se deduce de otro, previamente demostrado.

PROPOSICIÓN:

Una proposición es un enunciado del que se puede decir si es verdadero o falso, pero no ambas cosas a la vez.

EJEMPLO:

« *LIMA* es la capital de Cuzco ».

AXIOMA :

Proposición evidente que se acepta como verdadera sin necesidad de una demostración. ***«Los axiomas son las leyes más generales de la cantidad y del espacio»*** .

EJEMPLO:

«El todo es mayor que cualquiera de sus partes».

POSTULADO :

Un postulado es una verdad no tan evidente como un axioma pero que también se acepta sin una previa demostración. «El postulado es una arbitraria suposición establecida por el matemático».

EJEMPLO:

«Existen infinitos puntos»

DEFINICIONES:

«Antes de que pueda probarse una proposición en geometría, debemos convenir en ciertas definiciones y propiedades de las figuras geométricas. Es necesario que los términos que usemos en las demostraciones geométricas tengan exactamente el mismo significado para cada uno de nosotros. En

geometría una buena definición tiene dos propiedades importantes:

1) Las palabras en la definición deben ser más sencillas que la palabra que se está definiendo y deben ser fáciles de comprender.

2) La definición debe ser una proposición reversible.

EJEMPLO:

si se define «ángulo recto» como aquél cuya medida es de ***90°***, se supone que cada término de la definición es claro y, que si tenemos un ángulo recto, tenemos un ángulo cuya medida es ***90°***. Recíprocamente, si tenemos un ángulo cuya medida es ***90°***, tenemos un ángulo recto».

TÉRMINOS INDEFINIDOS:

Son términos que no se definen porque no es posible definirlos con palabras más sencillas que la que se utiliza para designar el término. En geometría se utilizan tres términos indefinidos: punto, recta y plano.

TEOREMA:

Es una proposición que para ser evidente necesita demostración.

Una proposición que es demostrable o refutable aplicando la lógica formal a partir de axiomas o postulados se denomina teorema. Un teorema también se puede demostrar apoyándose en teoremas previos. En todo teorema se distinguen tres partes:

HIPÓTESIS:

Supuestos o datos conocidos

TÉSIS:

Lo que se quiere demostrar

DEMOSTRACIÓN:

Procedimiento lógico en el que se utilizan los conocimientos previos para mostrar la verdad de un teorema.

Para comprender la Matemática es esencial saber razonar, desarrollando ideas, explorando fenómenos, justificando resultados y usando conjeturas matemáticas en todos los componentes o aspectos del área.

El razonamiento y la demostración matemáticos proporcionan modos potentes de desarrollar y codificar conocimientos sobre una amplia variedad de fenómenos, de allí que sea una capacidad fundamental que todo estudiante debe desarrollar.

Razonar y pensar matemáticamente implica percibir patrones, estructuras o regularidades,

tanto en situaciones del mundo real como en objetos simbólicos; ser capaz de preguntarse si esos patrones son accidentales o si hay razones para que aparezcan; poder formular conjeturas y demostrarlas. «Una demostración matemática es una manera formal de expresar tipos particulares de razonamiento y de justificación».

Argumentar, que significa fundamentar, utilizando razones lógicas o matemáticas, la validez de un proceso o el valor de verdad de una proposición o resultado. Comprende el desarrollo y evaluación de argumentos y demostraciones matemáticas.

EJEMPLO:

La suma de loas ángulos interiores de un triángulo vale dos rectos

Hipótesis: A, B y C son ángulos interiores de un triángulo

Tesis : La suma de los ángulos A, B, y C valé dos rectos.

En la demostración se utilizan los conocimientos adquiridos hasta aquel momento , enlazados de manera lógica.

POSTULADO :

Es una proposición que se admite sin demostración, aunque no tiene la evidencia del axioma.

COROLARIO:

Es un teorema cuya verdad puede deducirse sencillamente de otro ya demostrado.

Es una proposición que se deduce de un teorema como consecuencia del mismo

EJEMPLO:

Del teorema: *La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos*, se deduce el siguiente corolario: *La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo vale un recto.*

TEOREMA RECÍPROCO:

Todo teorema tiene su recíproco. La hipótesis y la tésis del recíproco son, respectivamente, la tésis y la hipótesis del otro teorema (teorema directo).

EJEMPLO :

El recíproco del teorema: *la suma de los ángulos interiores de un triángulo vale dos rectos el polígono es un triángulo.*

La hipótesis y la tesis del recíproco son:

Hipótesis: Tenemos un polígono cuyos ángulos interiores suman dos rectos.

Tesis: el polígono es un triángulo.

No siempre los teoremas recíprocos son verdaderos. Así, por ejemplo, hay un teorema que dice: «la diagonales de un cuadrado son iguales» y su recíproco dice: «Si las diagonales de paralelogramo son iguales la figura es un cuadrado». Este recíproco es falso porque la figura puede ser un rectángulo que también tiene sus diagonales iguales .

LEMA:

Es un teorema preliminar que nos sirve de base para demostrar otras proposiciones.

EJEMPLO:

Para demostrar el volumen de una pirámide se tiene que demostrar antes el lema que dice: «Un prisma triangular se puede descomponer en tres tetraedros equivalentes» .

Actualmente se ha prescindido bastante del uso de la palabra lema y se le suele llamar teorema o bien teorema preliminar.

ESCOLIO:

Es una advertencia que se hace con el fin de aclarar, ampliar o restringir proposiciones anteriores.

EJEMPLO:

Después de demostrar el teorema que dice: En una misma circunferencia o en circunferencias iguales a mayor arco corresponde mayor cuerda (considerando arcos menores que una semicircunferencia), se podría añadir, como escolio: «si se consideran arcos menores que una semicircunferencia, a mayor arco corresponde menor cuerda».

Actualmente apenas se usa la palabra escolio para sustituto de ***observación.***

PROBLEMA:

Es una cuestión que se propone con el fin de aclararla o resolverla.

Un problema es una proposición en la que se pide construir una figura que reune ciertas condiciones (problema gráfico) o bien calcular el valor de una magnitud geométrica (problema numérico).

Ejemplo de problema gráfico:

Construir la circunferencia que pasa por tres puntos dados.

Ejemplo de problemas numéricos:

Calcular la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 2 cm.

ELEMENTOS GEOMETRICOS FUNDAMENTALES

En la Geometría Sintética Actual (Axiomática), el punto, la recta y el plano son conceptos fundamentales o primitivos y no se definen; se enuncian simplemente estableciendo su existencia. Estas ideas básicas de la Geometría nos hacen pensar en objetos que vemos en el mundo físico; sin embargo, es importante anotar que estos conceptos son simples abstracciones de nuestras mentes y se aceptan sin definición. Así:

EL PUNTO

Un punto es un término indefinido. No se puede definir. La huella que deja un lápiz bien afilado sobre una hoja de papel nos sugiere la idea de un punto. Un punto carece de dimensiones, es sólo una posición en el espacio.

Un punto se representa por medio de una marquita redonda, indicándolo generalmente por una letra mayúscula , por ejemplo . ***A*** : punto ***A***

La intersección de dos rectas nos da la idea de un punto.

$\overleftrightarrow{m} \cap \overleftrightarrow{n} = \{A\}$

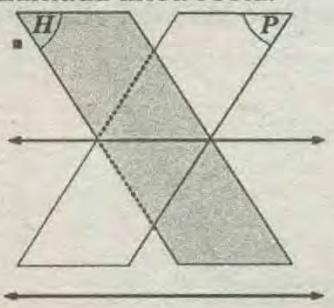
La intersección de $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ determina un punto ***A***.

POSTULADO : ***«Hay infinitos puntos».***

LA RECTA

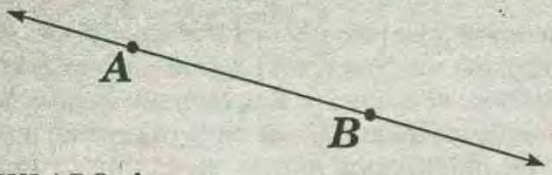
Término indefinido , Una idea vaga de recta se tiene por la observación del borde de una regla, un hilo templado, etc. La recta sólo tiene una dimensión, *longitud*. La recta, o mejor, un segmento de recta es la menor distancia entre dos puntos. La recta geométrica se extiende sin límite en dos sentidos opuestos.

La intersección de dos planos es un conjunto de puntos que forman un espacio de una dimensión llamada línea recta.



Notación : $\overleftrightarrow{\ell}$ ***Recta*** ℓ

NOTACIÓN: **Recta AB :$\overleftrightarrow{AB}$**



POSTULADO :

«Por dos puntos diferentes pasa una y solo una recta».

POSTULADO :

«Dos rectas distintas solo pueden tener un punto en común».

SEMIRECTA

Si señalamos un punto ***A*** en una recta, dicho punto junto con los puntos que le siguen o le preceden en el mismo sentido se denomina semirecta; ***A*** se conoce como el origen de la semirecta . Para denotar una semirecta se señala otro punto además del origen, y se utiliza el siguiente símbolo: $\overrightarrow{AB}$

SEGMENTO DE RECTA

si señalamos sobre una recta los puntos ***A*** y ***B***, se denomina segmento el conjunto de puntos comprendidos entre ***A*** y ***B***, incluyendo a los puntos ***A*** y ***B*** que se denominan extremos del segmento. El segmento de recta se denota por el siguiente símbolo: $\overline{AB}$

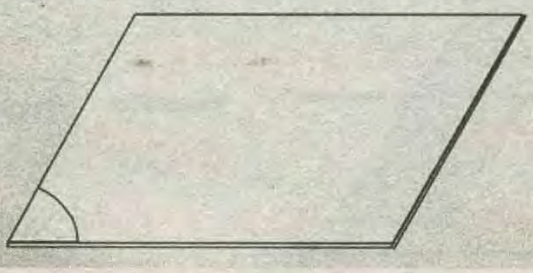
POSTULADO :

«La distancia más corta entre dos puntos es el segmento que los une».

EL PLANO

Término indefinido. Una idea de plano nos la sugiere la superficie de un tablero, el piso, etc. Un plano tiene dos dimensiones, largo y ancho. Un plano tiene una extensión ilimitada. Un plano se considera constituido por un conjunto infinito de puntos.

El conjunto de puntos que forman un espacio de dos dimensiones nos da la idea de un plano y se le designa con una letra mayúscula o letra del alfabeto griego.



REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN PLANO

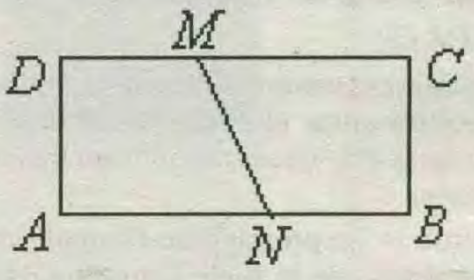
Una región paralelográmica da la idea de un plano

POSTULADO :

«Si una recta tiene dos puntos comunes con un plano, toda la recta está contenida en el plano». Dos planos se cortan en una línea recta, recta de intersección.

SEMIPLANO

Toda recta ***MN*** de un plano lo divide en dos regiones llamadas semiplanos. Cada punto del plano pertenece a uno de los semiplanos, excepto los puntos de la recta ***MN*** que pertenecen a los dos.



POSTULADO :

«Dos puntos de un mismo semiplano determinan un segmento que no corta a la recta que da origen a los dos semiplanos; y dos puntos de distinto semiplano determinan un segmento que corta a dicha recta».

POSTULADO :

« Si dos planos tienen un punto común tienen una recta común».

DEFINICIÓN :

Un conjunto de puntos se dicen coplanares si se encuentran todos en un mismo plano.

ESPACIO GEOMETRICO

Acabamos de afirmar que existen infinitos puntos, infinitas rectas e infinitos planos, pero no podemos afirmar que todos los puntos estan en una recta o en un solo plano; entonces: ¿Dónde están los puntos que no pertencen a la recta ni al plano? ¿Dónde están las infinitas rectas y los infinitos planos? Es de admitir que existe un conjunto *UNIVERSO* en donde se encuentra todos los puntos, todas las rectas y todo los planos cualquiera sea su orientación y/o ubicación. A este conjunto se denomina *Espacio Geométrico.*

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Indique si es verdadero *(V)* o falso *(F)* los siguientes enunciados.

A)«Los Elementos» fue escrito por Pitágoras.....( )

B) Euclides pasó gran parte de su vida en Alejandría.....( )

C)Tales de Mileto fue discípulo de Pitágoras.....( )

D)Pitágoras fue discípulo de Tales de Mileto.....( )

02 Complete de manera adecuada lo siguiente :

A) El famoso teorema de ..... es aplicado sólo a triángulos rectángulos .

B) «Los números rigen al mundo» fue el lema de la Escuela .....

C) La obra de Euclides titulada «Los Elementos» es una colección de ..... libros.

03 Relacione de manera adecuada las dos columnas.

A) Pitágoras	*( ) Elementos*
B) Tales	*( ) Tierra*
C) Geo	*( )Samos*
D) Euclides	*( ) Mileto*

04 ¿De qué escuela fue fundador Tales de Mileto?

A)Pitagórica B)Alejandría C)Jónica
D)Peruana E) Griega

05 ¿Qué escuela de la antigüedad dividió el saber científico en: Geometría, Música, Astronomía y Aritmética?

A)Mesopotámica B) Alejandrína C)J ónica
D) Egipcia E)Pitagórica

06 La obra cumbre que se atribuye al gran geómetra Euclides , se denomina :

A)Geometría B)Tcheu Pei C) Geomeix
D) Geometría Euclideana E) Los Elementos

07 Los babilonios del milenio *III a.C*, consideraban que la razón de la longitud de una circunferencia a su respectivo diámetro era:

A)π B)2π C)3 D)3π E) p²

08 El documento geométrico hindú más antiguo que se conoce:

A)El Apastamba B)El Sulva-Sutra
C)El Hummurabi D)El Papiro Rhind
E)El Tcheu-Pei

09. Para precisar el origen de la geometría, algunos. historiadores se han tenido que remontar hasta el milenio:

A) I a.C B) II a.C C)III a.C
D)IV a.C E) V a.C

10 Los babilonios del milenio *II a.C* realizaban sus operaciones en el sistema.

A)Decimal B) Sexagesimal C) Internacional
D)Centesimal E) Radial

11 La cultura que se cree que descubrió, antes que las otras el llamado «Teorema de Pitágoras» fue:

A)La Griega B) Los Caldeos C) Los Babilonios
D)La China E) La Hindú

12 Según la historia, la cultura más sabia y misteriosa del antiguo oriente fue:

A) Caldea B) Hindú C)China
D) Egipcia E) Babilonia

13 *«El geómetra no se hace sino se nace »*, esta frase se utilizó para designar a:

A) Güldin B) Viéte C) Fermat
D) Descartes E) Pascal

14 Geómetra del renacimiento que restituyo el libro *V* de las cónicas de Apolonio fué:

A)Roberval B) Descartes C) Kepler
D)Desargues E) Viéte

15 El primer documento que da idea clara del estado de las matemáticas en el antiguo Egipto es una copia hecha en papiro por:

A) Hammurabi B) Rhind C) Ahmés
D) Thales E) Sesostriz

16 Célebre matemático de Siracusa a quien se le debe algunos de los teoremas más importantes de la geometría del espacio.

A) Euclides B) Aristóteles C) Sócrates
D) Herón E) Arquímedes

17 Famoso matemático griego, que nos legó su obra escrita en *13* tomos titulada *«Elementos»*

A) Arquímedes B) Aristóteles C) Sócrates
D) Platón E) Euclides

18 El estudio científico de la geometría, en Grecia, se inicia con:
A) Pitágoras B) Euclides C) Thales
D) Hipócrates E) Anaximandro

19 Thales, fundó en Mileto, una escuela de matemáticas y filosofía llamada escuela:
A) Pitagorica B) Jónica C) Euclideana
D) De ciencias E) Alejandrina

20 El geómetra alemán iniciador de una notable teoría de polígonos estrellados fué:
A) Juan Campano B) Tomás Bradwardino
C) Nicolás Oresme D) Nicolás de Cusa
E) Jordano Nemorario

21 A continuación te mostramos una relación de nombres de varios objetos conocidos. Ordénalos apropiadamente de acuerdo a la Geometría que los estudia.

* El tarro de leche.
* La caja de fósforo.
* La tarjeta de crédito.
* El dado.
* Una moneda muy delgada.
* La pelota de playa.

Planimetría :

Estereometría :

22 Con la ayuda de tu profesor y de un buen diccionario encuentra el significado de las siguientes palabras:
A) Empirismo B) Lazarillo C) Etimología
D) Axioma E) Didáctico F) Postulado

23 El discípulo más célebre de Thales, así como uno de los hombres más famosos de la antiguedad fue:
A) Euclides B) Pitágoras C) Platón
D) Sócrates E) Arquímedes

24 Geómetra griego que escribió el primer texto griego de matemáticas.
A) Euclides B) Platón C) Pitágoras
D) Enópides E) Hipócrates

25 El conjunto infinito de puntos, donde se encuentran todos los puntos, rectas y planos se denomina:
A) Plano B) Recta C) Estereometría
D) Espacio E) Figura Geométrica

26 Planimetría, es la parte de la geometría, que estudia a las figuras geométricas tales como:
A) Pirámide B) Prisma C) Esfera
D) Cilindro E) Cuadrilátero

27 Estereometría parte de la geometría que estudia a las figuras geometrícas tales como:
A) Punto B) Círculo C) Triángulo
E) Esfera E) La recta

28 Es una cuestión que se propone con el fin de aclararla o resolverla.
A) Teorema B) Escolio C) Postulado
D) Problema E) Corolario

29. Para la geometría axiomática, son elementos fundamentales.
A) El punto y la recta B) Todas las figuras
C) Triángulo y el cuadrado
D) El punto la recta y el plano

30 Las figuras geométricas de igual forma y tamaño se denominan:
A) Semejantes B) Congruentes C) Equivalentes
D) Isoperímetrales E) Conjugadas

31 Las figuras geométricas que tienen igual tamaño pero forma diferente, se denominan:
A) Congruentes B) Semejantes C) Equivalentes
D) Diferentes E) Isoperímetrales

32 La proposición que es evidente en sí misma y que no necesita de demostración se llama:
A) Problema B) Teorema C) Escolio
D) Axioma E) Postulado

33 Los geómetras a los cuales se le atribuye el descubrimiento de la Geometría No-Euclideana fueron:
A) Descartes - Lobatschewski B) Lobatschewski - Riemann
C) Riemann - Bolyai D) Lobatschewski - Bolyai
E) Monge - Riemann.

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

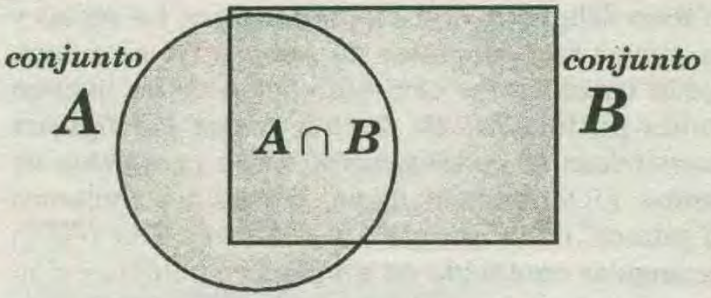
1)*	2)*	3)*	4)*	5)*	6)E	7)C	8)B	9)C	10)B
11)C	12)D	13)E	14)A	15)C	16)E	17)E	18)C	19)B	20)E
21)*	22)*	23)D	24)E	25)D	26)E	27)E	28)E	29)D	30)B
31)C	32)D	33)D							

CONJUNTOS

Quizás, el alumno nunca haya visto la palabra **conjunto** empleada en las matemáticas, pero la idea es muy conocida. La familia del alumno es un conjunto de personas que consiste en el alumno, sus padres y sus hermanas y hermanos (si los tiene). Estas personas constituyen los *miembros* del conjunto. La clase de geometría es un conjunto de personas. Se dice que un miembro de un conjunto *pertenece* al conjunto. Por ejemplo, el alumno pertenece a su familia y a su clase de geometría. Con frecuencia, llamamos a los miembros de un conjunto sus *elementos;* en la matemática, los dos términos significan lo mismo. Se dice que un conjunto *contiene* a sus miembros. Por ejemplo, ambas, la familia y la clase de geometría, contienen al alumno. Si un conjunto contiene todos los elementos de otro conjunto, entonces decimos que el segundo conjunto es un *subconjunto* del primero. Por ejemplo, la clase de geometría es un subconjunto del alumnado de la escuela, y el alumnado contiene la clase de geometría. Decimos que un subconjunto *está contenido* en el conjunto que lo contiene.

Obsérvese que al definir un subconjunto, permitimos la posibilidad de que éste y el conjunto que lo contiene sean idénticos. Así, todo conjunto es un subconjunto de sí mismo.

Cuando decimos que dos conjuntos son *iguales,* o cuando escribimos la igualdad $A=B$ entre dos conjuntos A y B, entendemos simplemente que los dos conjuntos contienen exactamente los mismos elementos. Por ejemplo, supongamos que A es el conjunto de todos los números naturales entre $9,5$ y $14,2$, y B el conjunto de todos los números naturales entre $9,3$ y $14,8$. Entonces, $A=B$, porque cada uno de los conjuntos A y B contiene precisamente los números $10;11;12;13$ y 14. En efecto, ocurre casi siempre que el mismo conjunto puede describirse de dos maneras diferentes. Por tanto, si las descripciones parecen diferentes, esto no significa que los conjuntos sean distintos. Algo parecido sucede en el álgebra. Las expresiones 3×17 y $39+12$ parecen diferentes, pero representan el mismo número; y esto es lo que significa el enunciado $3\times17=39+12$.



Dos conjuntos se *intersecan* si hay uno o más elementos que pertenecen a ambos.

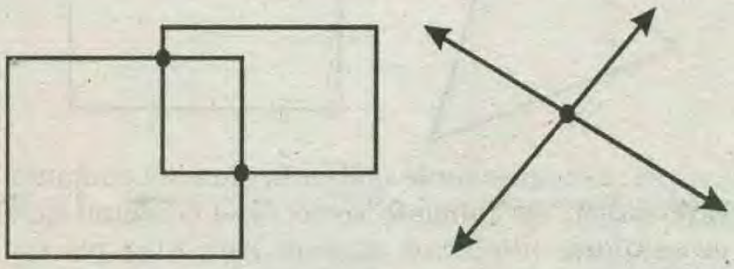
Por ejemplo, el conjunto de la familia del alumno y el conjunto de su clase de geometría se intersecan, porque el alumno pertenece a los dos. (Con toda probabilidad, el alumno es la única persona que pertenece a ambos conjuntos.) La ***intersección*** de dos conjuntos es el conjunto de todos los objetos que pertenecen a ambos conjuntos.

Pasando a temas matemáticos, vemos que el conjunto de todos los números positivos pares es el conjunto cuyos elementos son ***2;4;6;8;10;12;14;...***

El conjunto de todos los múltiplos positivos de ***3*** es el conjunto cuyos elementos son ***3;6;9;12;15;18;...***

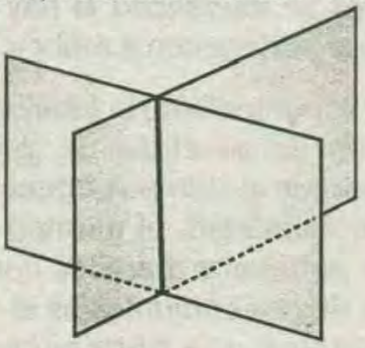
La intersección de estos dos conjuntos es el conjunto cuyos elementos son ***6;12;18;...*** (Éste es el conjunto de los múltiplos positivos de ***6***.)

En la figura siguiente (izquierda) , cada uno de los rectángulos es un conjunto de puntos y su intersección es un conjunto que contiene exactamente dos puntos. Análogamente, cada una de las regiones rectangulares es un conjunto de puntos y su intersección es la pequeña region rectangular en el medio de la figura.

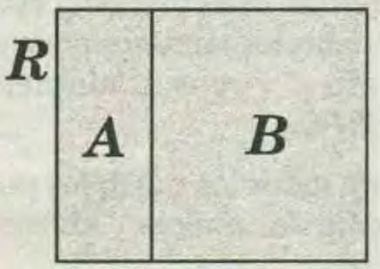


En la figura anterior (derecha), cada una de las dos rectas es un conjunto de puntos y su intersección contiene exactamente un punto.

En todo este libro, consideraremos que las rectas y los planos son conjuntos de puntos. (Si se quiere, puede considerarse esta afirmación como nuestro primer postulado.) ***De hecho, todas las figuras geométricas se considerarán como conjuntos de puntos.*** En la siguiente figura , vemos dos conjuntos de puntos, cada uno de los cuales es una región rectangular contenida en un plano. Su intersección es un segmento, contenido en una recta.

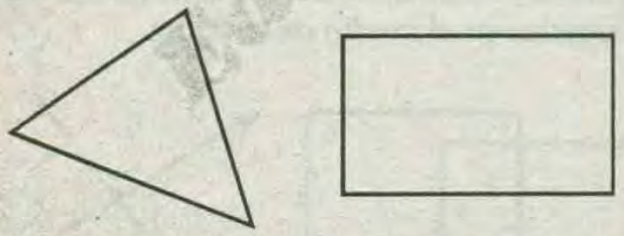


La *reunión* de dos conjuntos es el conjunto de todos los objetos que pertenecen a uno de los conjuntos o a los dos.



Por ejemplo, en la figura anterior, vemos una región rectangular grande ***R*** que es la reunión de dos regiones rectangulares más pequeñas, ***A*** y ***B***. El segmento vertical cerca del medio de la figura es la intersección de ***A*** y ***B***.

Para tres o más conjuntos, la intersección y la reunión se definen de manera análoga. Así, un triángulo es la reunión de tres conjuntos, cada uno de los cuales es un segmento. Un rectángulo es la reunión de cuatro conjuntos, cada uno de los cuales es un segmento.



A veces, es conveniente utilizar la idea del conjunto *vacío* o *nulo*. El conjunto vacío es el conjunto que no contiene miembro alguno. Esta idea puede parecer algo extraña al principio, pero, en realidad, es muy parecida a la idea del número cero. Así, las siguientes tres afirmaciones significan exactamente lo mismo:

* No hay elefantes blancos en LIMA .
* El número de elefantes blancos en LIMA es cero.
* El conjunto de los elefantes blancos en LIMA es el conjunto vacío.

Una vez introducida la idea del ***conjunto vacío.*** podemos hablar de la intersección de dos conjuntos cualesquiera, teniendo en cuenta que la intersección puede ser el conjunto vacío. Por ejemplo, la intersección del conjunto de todos los números impares y el conjunto de todos los números pares es el conjunto vacío.

El conjunto vacío se denota por el símbolo $\varnothing$.

Una advertencia: Si comparamos las definiciones de los términos *intersecar* e *intersección,* vemos que podría surgir confusión en el empleo de los mismos. Cuando hablamos de la *intersección* de dos conjuntos, admitimos la posibilidad de que ésta sea nula, pero cuando decimos que dos conjuntos se *intersecan,* siempre entendemos que contienen un elemento común, por lo menos.

Otra advertencia: La idea del cero y la del conjunto vacío están estrechamente relacionadas, pero no son la misma cosa. Por ejemplo, la ecuación

$$x+3=3$$

tiene a cero como solución única y, por tanto, el conjunto de las soluciones no es vacío; el conjunto de las soluciones tiene exactamente un elemento, a saber, ***0***. Por otra parte, la ecuación :

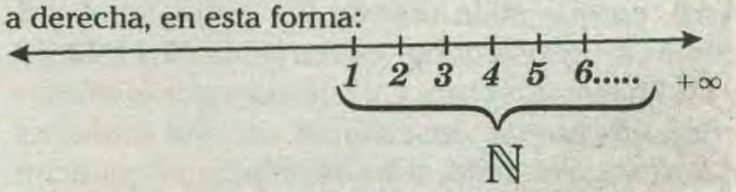
$$x+1=x+2$$

no tiene soluciones. En consecuencia, el conjunto de las soluciones es $\varnothing$.

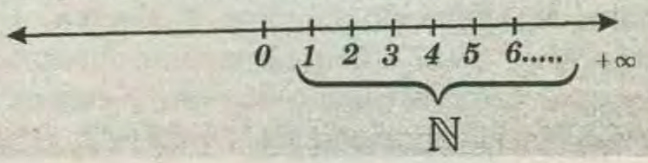
ORDEN EN LA RECTA NUMÉRICA

Los primeros números que conocimos son los ***«números naturales»***, ***1; 2; 3; 4;5; ...***

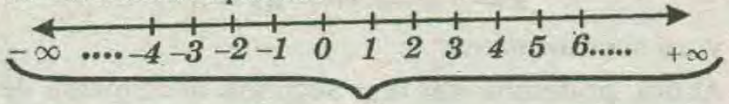
Los números naturales nunca se acaban, porque dado cualquiera de ellos, siempre podemos añadirle ***1*** para obtener otro. Nos imaginamos los números naturales como dispuestos en una recta, de izquierda a derecha, en esta forma:



A la izquierda del ***1***, colocamos el número ***0*** :



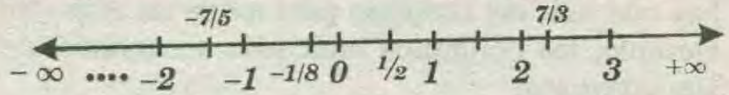
Entonces, colocamos los números enteros negativos, de derecha a izquierda:



$\mathbb{Z}$

Los números que tenemos hasta ahora son los números *enteros* (positivos, negativos y cero). Los números naturales son, desde luego, los enteros positivos y , con frecuencia, nos referimos a ellos mediante ese nombre.

Obsérvese que hay muchos puntos de la recta que todavía no están asociados con números. Necesitamos, por lo menos, colocar las fracciones $1/2\,;\,7/3\,;\,-7/5\,,\,-1/8$;etc. . Entre dos números enteros cualesquiera, hay una infinidad de fracciones. Por tanto, en una figura, todo lo que podemos hacer es representar algunas de ellas, como por ejemplo:

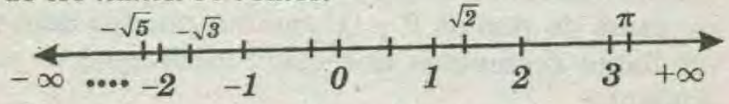


Los números que hemos mencionado hasta ahora son los números de la forma p/q, donde p y q son números enteros y q no es cero. Éstos se llaman los ***números racionales***. (Este término no pretende sugerir que los demás números no son razonables. Simplemente, se refiere a que los números racionales son *razones* de números enteros.)

Es evidente que los números racionales no llenan totalmente la recta numérica.

Hay muchos números que no pueden expresarse como razones de enteros. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ no es un número racional. Lo mismo ocurre con $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ y, también, con números tan «especiales» como π

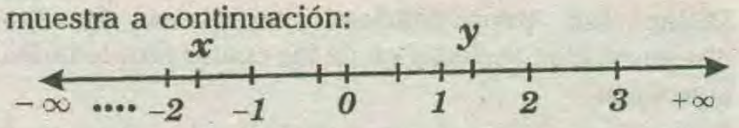
Si colocamos todos estos números de manera que a cada punto de la recta se le haya asignado un número, entonces tendremos el conjunto completo de los ***números reales:***



El alumno debe fijarse en que estos números aparezcan en la figura aproximadamente en los sitios que les corresponden.

Los números reales se utilizarán ampliamente en la geometría. De ahora en adelante, convendrá que pensemos en ellos como dispuestos en una recta.

Un número x es *menor que* un número y, si x está a la izquierda de y en la recta numérica, como se muestra a continuación:



Esto se indica escribiendo $x < y$. Evidentemente, todo número negativo está a la izquierda de todo número positivo. Por consiguiente, todo número negativo es menor que cualquier número positivo.

Por ejemplo, $-1{,}8 < 1{,}2$ aunque el número $-1{,}8$ puede, en cierto modo, parecer más grande.

Las expresiones en las cuales se emplea el signo $<$ se llaman *desigualdades*. Cualquier desigualdad puede escribirse al revés: $y > x$ significa lo mismo que $x < y$. Así, pues, $y > x$, si y está a la derecha de x en la recta numérica.

La expresión $x \leq y$ significa que $x < y$ ó $x = y$. Así, $-2 \leq 1$, porque $-2 < 1$; y $2 \leq 2$, porque $2 = 2$.

En sus estudios de álgebra, ya el alumno ha aprendido mucho acerca de cómo se comportan los números reales respecto de la adición y de la multiplicación. En realidad, el álgebra puede estudiarse de la misma manera que estudiaremos la geometría en este curso. Es decir, toda el álgebra que el alumno sabe puede deducirse de unos pocos enunciados simples. Sin embargo, es probable que no haya estudiado el álgebra de esta manera, pero no tenemos tiempo ahora de volver a estudiar el álgebra nuevamente. Por tanto, en este curso, utilizaremos casi toda el álgebra que el alumno conoce,sin comentarios especiales.

No obstante, debemos ser cuidadosos con respecto a las desigualdades y las raíces cuadradas, pues, con frecuencia, hay confusión en cuanto a su empleo.

La relación $<$ se llama una relación de *ordenación*. Sus propiedades fundamentales son las siguientes:

I) TRICOTOMIA :

Para todo par de números x, y, una y solamente una de las siguientes condiciones se cumple:

$$x < y \quad ó \quad x = y \quad ó \quad x > y.$$

II) TRANSITIVIDAD :

Si $(x < y)$ y $(y < z)$, entonces $(x < z)$.

III) PROPIEDAD ADITIVA :

Si $a < b$ Y $x \leq y$, entonces $a + x < b + y$.

IV)PROPIEDAD MULTIPLICATIVA :

Si $x < y$ y $a > 0$, entonces $ax < ay$.

Todas las propiedades corrientes de las desigualdades se deducen de las cuatro propiedades anteriores.

Quizás, sea conveniente referirse a las siguientes propiedades al exponer las razones para algunas afirmaciones que se hagan en razonamientos algebraicos:

PROPIEDAD ADITIVA DE LA IGUALDAD :

Si $a = b$ Y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.

PROPIEDAD DE LA IGUALDAD CON RESPECTO A LA SUSTRACCIÓN :

Si $a = b$ Y $c = d$, entonces $a - c = b - d$.

PROPIEDAD MUITIPLICATIVA DE LA IGUALDAD :

Si $a = b$ Y $c = d$, entonces $ac = bd$.

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número x se denota por $|x|$.

El significado del símbolo $|x|$ se comprende rápidamente, si se examinan algunos ejemplos:

$$|0| = 0 \quad |2| = 2 \quad |-2| = 2$$
$$|7| = 7 \quad |-8| = 8 \quad |-26| = 26$$
$$|\sqrt{3}| = 1 \quad |\pi| = 3 \quad |-\sqrt{2}| = 2$$

y así sucesivamente. En los ejemplos anteriores, utilizamos las siguientes reglas:

I) Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$.

II) Si $x < 0$, entonces $|x|$ es el número positivo correspondiente.

Si un número determinado se escribe aritméticamente, es fácil ver cómo se escribe su valor absoluto. Si no hay un signo *menos* antes del número, no hacemos cambio alguno. Si hay un signo *menos* antes del número, omitimos dicho símbolo para obtener el valor absoluto.

Pero cuando trabajamos algebraicamente con expresiones como $|x|$, $|a - b|$, etc., es conveniente tener una forma algebraica de la condición *(II)* anterior. Así, dado un número negativo x, nos interesa tener una manera algebraica de describir el número positivo correspondiente. Si el número negativo se denota por x, entonces no pod-mos «omitir el signo *menos*», porque no hay tal signo *menos* que omitir. Podemos resolver esta dificultad mediante un sencillo artificio: *si $x < 0$, entonces el número positivo que le corresponde es $-x$.* He aquí algunos ejemplos:

$$x = -2 \Rightarrow -x = -(-2) = 2,$$
$$x = -5 \Rightarrow -x = -(-5) = 5$$

y así sucesivamente.

Ahora, podemos dar una segunda descripción de $|x|$, como sigue:

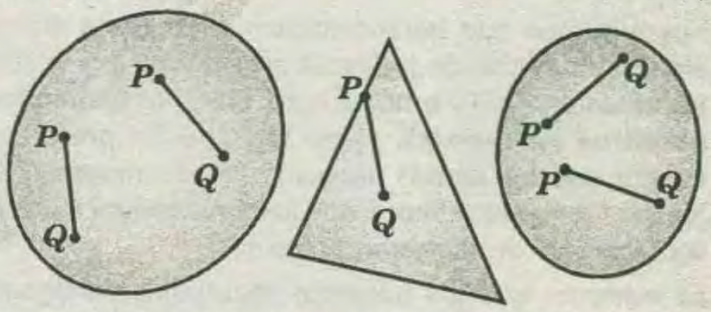
I) Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$.

II) Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$.

Esta segunda forma es más difícil de comprender al principio, pero es más fácil de emplear más tarde. El alumno debe tratar de aplicarla a varios números hasta que se convenza de que realmente dice lo que pretendemos.

CONJUNTOS CONVEXOS

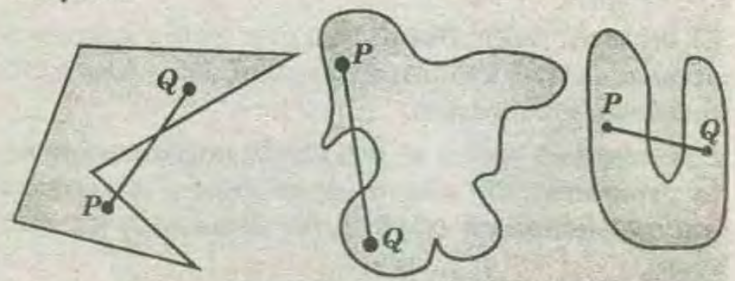
Un conjunto de puntos se llama *convexo,* si nunca hay que salir del conjunto para tomar un atajo. Por ejemplo, los conjuntos indicados a continuación son convexos:



Cada uno de estos conjuntos es una región completa del plano, no simplemente la frontera. En cada uno de ellos, siempre se puede pasar de un punto P cualquiera a otro punto Q cualquiera, moviéndose a lo largo de una recta, sin salir del conjunto. Examínense los ejemplos presentados anteriormente.

Por otra parte, ninguno de los siguientes conjuntos es convexo:

Hemos indicado por qué no lo son, dando ejemplos de pares de puntos P y Q, .que no pueden unirse mediante segmentos que estén totalmente en el conjunto.



Enunciamos todo esto en una forma matemática mejor, mediante la siguiente definición:

DEFINICIÓN :

Un conjunto *A* se llama *convexo*, si para cada dos puntos *P* y *Q* del conjunto, todo el segmento $\overline{PQ}$ está en *A*.

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 Dibuje o represente el punto, recta y el plano, y coloque su notación correctamente

02 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* en las afirmaciones siguientes:

A) La longitud de una recta se puede medir. ( )
B) En una recta existen infinitos puntos. ( )
C) La superficie del plano es lisa e ilimitada. ( )
D) La notación de un punto se hace con letras minúsculas. ( )

03 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)*:

A) Toda porción de recta se llama segmento. ( )
B) Una línea siempre es recta. ( )
C) Una línea tiene longitud. ( )
D) Una línea cerrada tiene longitud y se llama perímetro. ( )

04 Relacione correctamente los datos de ambas columnas.

A) A • ( ) *Plano P*
B) $\overleftrightarrow{AB}$ ( ) *Figura no convexa*
C) P ( ) *Recta AB*
D) ( ) *Punto A*

05 Relacione correctamente

A) Recta PQ ( ) *Línea Curva*
B) ( ) $\overline{AB}$
( ) $\overleftrightarrow{PQ}$
C) $\triangle ABC$
( ) *Triángulo ABC*
D) Segmento AB

06 Indicar la veracidad *(V)* o falsedad *(F)* de las siguientes proposiciones:

A) Una recta es un conjunto convexo. ( )
B) Un plano es un conjunto no convexo. ( )
C) Un triángulo es un conjunto no convexo. ( )
D) Una región triangular es un conjunto no convexo. ( )
E) La superficie de un cilindro es un conjunto convexo. ( )

07 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)*

A) La esfera es un conjunto convexo. ( )
B) El cuadrado es un conjunto convexo. ( )
C) El segmento es un conjunto no convexo. ( )
D) El punto es un conjunto convexo. ( )
E) El prisma es un conjunto no convexo. ( )

08 Complete los siguientes enunciados:

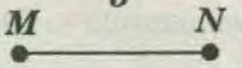
A) La superficie de un cilindro es un conjunto.....
B) El triángulo es una figura geométrica .....
C) El cono de revolución es un..... geométrico.
D) La longitud de una circunferencia es el .....
E)..... es una sucesión infinita de puntos en dos direcciones opuestas .

09 Complete las siguientes proposiciones:

A) *Figura .....*

B)

Su Perímetro es .....

C) 

Segmento MN .....

D) *Figura .....*

E) *Sólido .....*

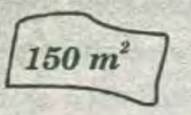
10 Un terreno rectangular tiene un área de $250m^2$. ¿Cuántos m^2 tendrá otro terreno equivalente y de forma triangular?

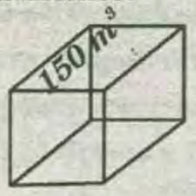
A) $200m^2$ *B)* $300m^2$ *C)* $100\ m^2$
D) $500\ m^2$ *E)* $250\ m^2$

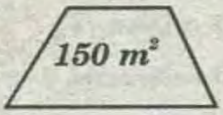
11 Si un cubo tiene un volumen de $20m^3$, ¿cuál será el sólido equivalente de volumen igual $20m^3$?

A) Cubo *B) Cilindro* *C) Esfera*
D) Dos cubos *E) Cualquier sólido*

12 Indique Ud. las figuras equivalentes:

I) 

II) 

III) 

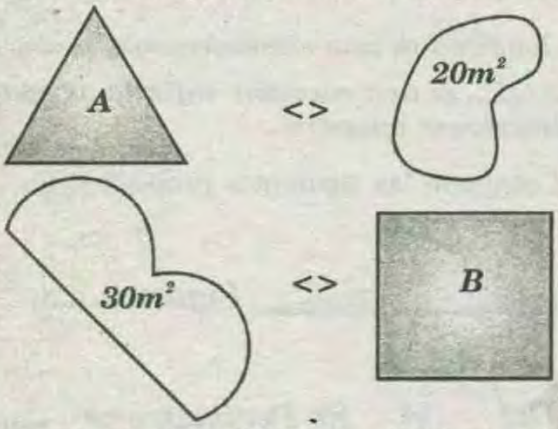
IV)

V)

VI)

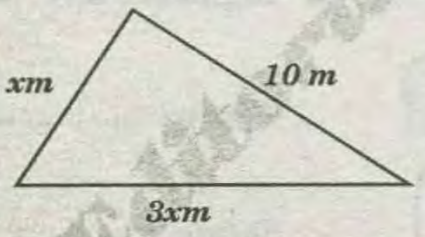
A) I y III B) I,II y VI C) II y III
D) I,II y IV,V,VI E) Ninguna

13 Si las figuras son equivalentes, hallar $A+B$.



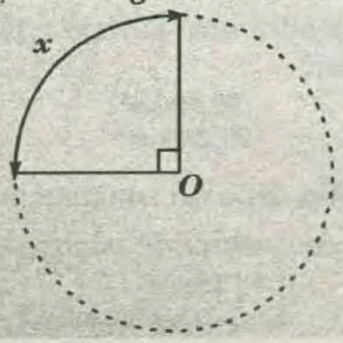
A) 10m² B) 20 m² C) 30 m² D)40m² E) 50m²

14 Hallar x, si el perímetro del triángulo es *20 m*



A) 5 B)2,5 C) 3 D)3,5 E) 15

15 Hallar x, si la longitud de la circunferencia es *60 m*.



A) 10m B) 15m C) 20m D) 25m E) 30 m

16 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)*

A) El rayo es una recta ( )
B) El rayo tiene origen ( )
C) La semirrecta tiene origen ( )
D) El segmento es una porción de línea recta ( )

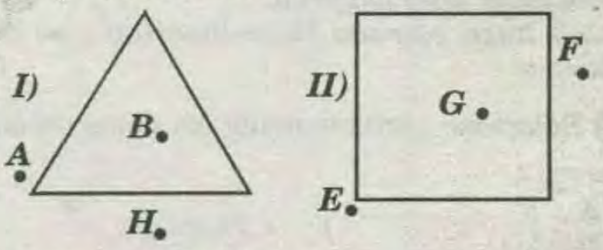
17 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

A) La semirrecta es una porción de recta ( )
B) El rayo es una porción de recta ( )
C) Rayo es lo mismo que semirrecta ( )
D) El rayo es lo mismo que vector ( )

18 Completar

A) El perímetro del triángulo es la ..... de lados.
B) ..... de una circunferencia es $2\pi R$ (R:Radio).
C) El perímetro de un cuadrado es la suma de .....
D) El área es la medida de .....

19 Observa las figuras e indica con una *C* lo correcto y con una *I* lo incorrecto:

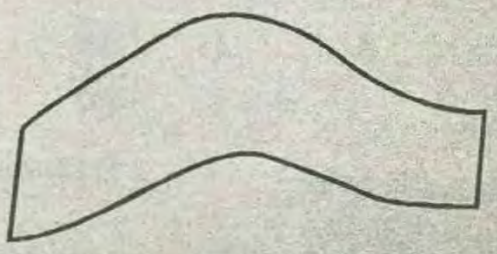


A) A pertenece al triángulo ( )
B) B no pertenece al triángulo ( )
C) F pertence al cuadrado ( )
D) H es un punto exterior al triángulo ( )

20 Cuantos puntos contiene la recta.

A) uno B) dos C) tres D) ninguno E) infinitos

21 La figura mostrada representa una superficie ¿convexa o no convexa?



A)Convexa B)No convexa C)Convexa y no convexa
D)Ninguna E) No se sabe

CONJUNTOS CONVEXOS

CAPITULO 02

OBJETIVOS :

*Comprender el concepto de conjunto convexo , así como conocer los diferentes postulados referidos a ellos .

* Saber reconocer en forma gráfica si un conjunto es convexo o no .

INTRODUCCIÓN :

Cuando hablamos de polígonos y poliedros (cubos, prismas, etc.) es bien conocido por todos el significado de los términos vértice o cara. Sin embargo, estos conceptos resultan menos intuitivos si nos estamos refiriendo a un ***CONJUNTO CONVEXO*** (cerrado) genérico. El estudio de la frontera de un conjunto convexo resulta de gran importancia, pues determinados puntos (o estructuras) de la frontera "capturan" una gran cantidad de información sobre el propio conjunto (tanto en dimensión finita como infinita).

La teoría de ***conjuntos convexos*** fue desarrollada principalmente por el famoso matemático alemán Herman Minkowski. El introdujo unos espacios especiales llamados ahora-espacios de Minkowski e investigó unas propiedades de cuerpos convexos. Esto sucedió en la frontera de los siglos ***XIX*** y ***XX***.

Varios matemáticos caracterizaron la contribución de Minkowski a la geometría como un juguete matemático»muy bonito y elegante, pero desafortunadamente inútil para las aplicaciones.

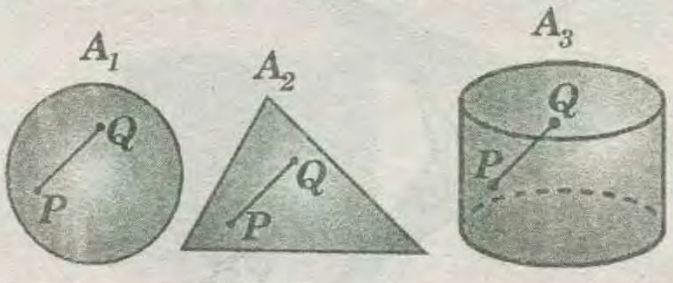
Aproximadamente un siglo ha pasado. Ahora la teoría geométrica de la convexidad es una de las herramientas importantes de las matemáticas aplicadas modernas. Los investigadores de la economía matemática , optimización y muchas otras ramas de las matemáticas modernas, teóricas y aplicadas, usan ampliamente los resultados de la teoría de conjuntos convexos.

CONJUNTOS CONVEXOS

Se denomina conjunto convexo , cuando el segmento determinado por 2 puntos cualesquiera del conjunto ,está contenido en este conjunto .

$$A \text{ es convexo } \forall P,Q \in A; \overline{PQ} \subset A$$

Consideremos conjuntos de puntos tales como los representados por las figuras siguientes:



$\overline{PQ} \subset A_1$ *Círculo* $\overline{PQ} \subset A_2$ *Región Triangular* $\overline{PQ} \subset A_3$ *Cilindro de revolución*

Dos puntos cualesquiera ***P*** y ***Q***, de cada uno de estos conjuntos, determina un segmento $\overline{PQ}$ ***contenido*** en él ; esto es , el segmento $\overline{PQ}$ es un subconjunto de cada conjunto considerado .

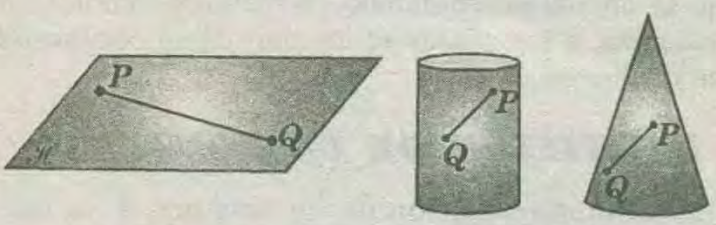
Decimos entonces que los conjuntos de puntos tales como el círculo , la región triangular y el cilindro de revolución son conjuntos convexos.

Es decir un conjunto A de puntos se llama convexo, si el segmento determinado por los puntos cualesquiera distintos del conjunto , está contenido en él.

EJEMPLOS :

* Una recta ***L*** es un conjunto de puntos convexos, pues:

$$\forall P,Q \in L(P \neq Q) \Rightarrow \overline{PQ} \subset L$$



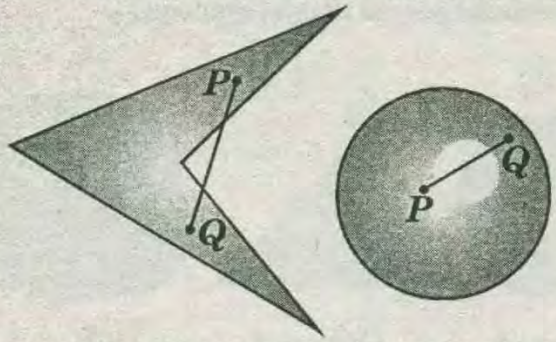
Círculo *Cilindro* *Cono*

* Un plano $\mathscr{H}$ conjunto de puntos convexos, pues

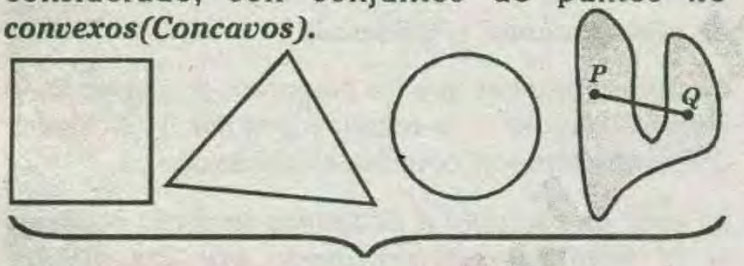
si P y Q son dos puntos distintos de $\mathscr{H}$, el segmento $\overline{PQ}$ está contenido en $\mathscr{H}$.

El cilindro, el cono circular recto , son conjuntos de puntos convexos , pues los segmentos $\overline{PQ}$, determinados por dos puntos cualesquiera de cada conjunto, está contenido en el conjunto respectivo .

Ahora Consideremos conjuntos de puntos tales como los representados por las figuras siguientes :



Observamos que el segmento determinado por dos puntos cualesquiera, P y Q de cada conjunto , no está contenido en el conjunto respectivo; esto es, el segmento $\overline{PQ}$ no es subconjunto de ninguno de los conjuntos considerados. Decimos entonces que los conjuntos de puntos tales como los que hemos considerado, son conjuntos de puntos ***no convexos(Concavos).***



Conjuntos No Convexos

Son conjuntos de puntos ***no convexos , un cuadrado , un triángulo , una circunferencia , la superficie esférica***, etc.

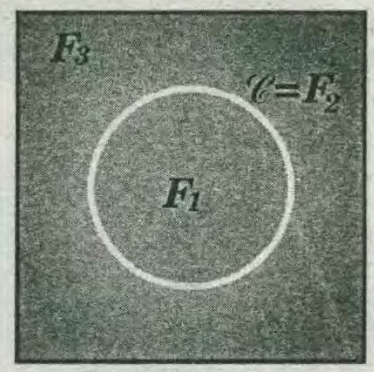
En cada uno de los ejemplos anteriores notamos que existen segmentos que se encuentran contenidos en las figuras mencionadas , pero también observamos la existencia de por lo menos un segmento $\overline{PQ}$ que no se encuentra contenido en dichos conjuntos en mención, a los cuales se les denomina ***conjuntos no convexos.***

PARTICIÓN DE UN CONJUNTO

Se denomina partición de un conjunto A , a una colección de subconjuntos de A , ninguno de los cuales es vacío y tales que cada elemento de A pertenece solamente a uno de los subconjuntos de A .

EJEMPLO :

Sea una circunferencia C en el plano F. Entonces , si F_1 es el conjunto de los puntos interiores a la circunferencia , F_2 es el conjunto de los puntos de la circunferencia y F_3 es el conjunto de los puntos exteriores a la circunferencia, tenemos que los subconjuntos F_1, F_2 y F_3 tienen las propiedades siguientes :



* Ninguno de ellos es vacío

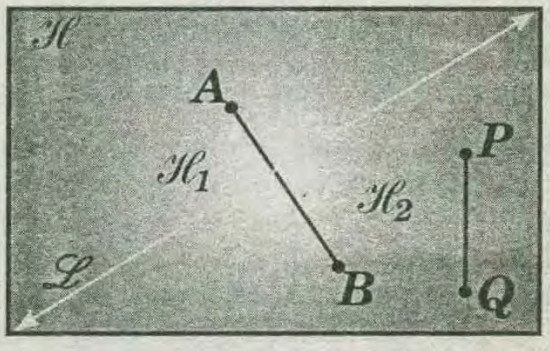
* $F_1 \cap F_2 = \phi$; $F_2 \cap F_3 = \phi$; $F_1 \cap F_3 = \phi$

* $F_1 \cup F_2 \cup F_3 = F$

Por lo tanto, los subconjuntos F_1, F_2 y F_3 determinan una partición $\{F_1, F_2, F_3\}$ del conjunto F, o sea del plano .

POSTULADO DE SEPARACIÓN DE PUNTOS DE UN PLANO

Una recta $\mathscr{L}$ contenida un plano $\mathscr{H}$ separa este plano en dos conjuntos de puntos $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ (semiplanos) tales que:



1) $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2 = \phi$

2) $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ son convexos

3) $P \in \mathscr{H}_1$; $Q \in \mathscr{H}_2 \Rightarrow \overline{PQ} \cap \mathscr{L} = \phi$

Los puntos que no pertenecen a $\mathscr{L}$ forman dos conjuntos tales que :

* Cada Uno de ellos es convexo

* Si P pertenece a uno de ellos y P pertenece al otro, entonces el segmento $\overline{PQ}$ no interseca a la recta de separación $\mathcal{L}$.

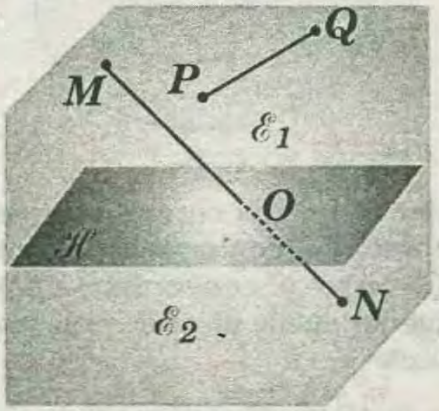
Cada uno de los dos conjuntos $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ se llama ***semiplano*** .

Sólo cuando la recta $\mathcal{L}$ se separa , o se omite, o se excluye de un plano, entonces la recta $\mathcal{L}$ no es la arista ni origen de cada uno de los semiplanos .

$\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ se llaman semiplanos ***opuestos***.

POSTULADO DE SEPARACIÓN DE PUNTOS DEL ESPACIO

Un plano $\mathcal{H}$ del espacio tridimensional separa este espacio en dos conjuntos de puntos $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ (semiespacios) tales que:



1) $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \phi$

2) $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son convexos

3) $M \in \mathcal{E}_1 ; N \in \mathcal{E}_2 \Rightarrow \overline{MN} \cap \mathcal{H} = \phi$

Los puntos que no pertenecen a $\mathcal{H}$ forman dos conjuntos, tales que :

* Cada uno de ellos es convexo.

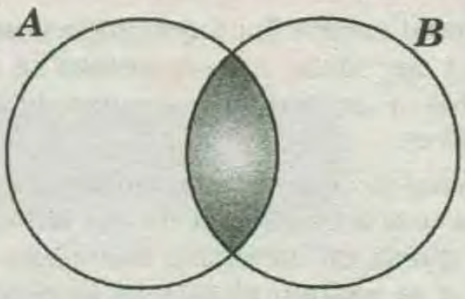
* Si A pertenece a uno de ellos y B pertenece al otro, entonces el segmento AB no interseca al plano de separación $\mathcal{H}$.

Cada uno de los dos conjuntos $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ Se llaman ***semiespacio*** .

Sólo cuando el plano $\mathcal{H}$ se separa, se omite o se excluye del espacio , entonces el plano $\mathcal{H}$ no es la cara de cada uno de los semiespacios .

TEOREMA DE LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS CONVEXOS

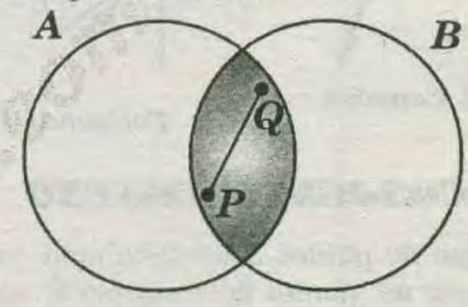
Si dos conjuntos A y B son convexos , entonces la intersección de estos conjuntos es un conjunto convexo.



$A \wedge B$ convexos. $\Rightarrow A \cap B$ es convexo

DEMOSTRACIÓN :

Sean P y Q dos puntos cualesquiera de $A \cap B$ y $\overline{PQ}$ el segmento que los une .



* Como A es convexo y $P \wedge Q$ pertenecen a A, entonces: $\overline{PQ} \subset A$

* Como B es convexo y $P \wedge Q$ pertenecen a B, entonces: $\overline{PQ} \subset B$

* Por teoría de conjuntos, se concluye que:

$\overline{PQ} \subset A \cap B$

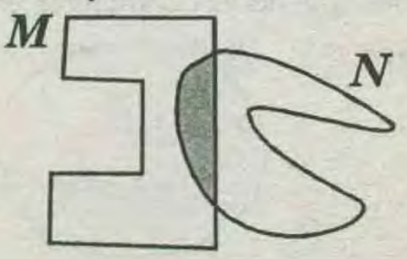
* Por lo tanto, por definición de conjunto convexo:

Si $\forall P \wedge Q \in A \cap B ; \overline{PQ} \subset A \cap B ; A \cap B$ es convexo.

Debe entenderse que es suficiente pero no necesario que dos conjuntos sean convexos , para que su intersección también lo sea .

EJEMPLO :

M y N no son conjuntos convexos.



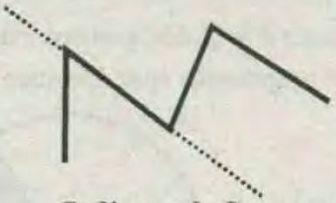
Pero la intersección de M y N es un conjunto convexo.

POLIGONALES CÓNCAVAS y CONVEXAS

Una poligonal es una línea quebrada formada por segmentos de recta; los segmentos se conocen como lados y los puntos comunes de los lados como vértices.

Una poligonal es convexa si al prolongar en los dos sentidos a uno o cualquiera de sus lados, toda la poligonal queda en un mismo semiplano. Se dice cóncava a la poligonal que al prolongar uno cualquiera de sus lados, parte de la poligonal queda en un semiplano y parte en el otro semiplano.

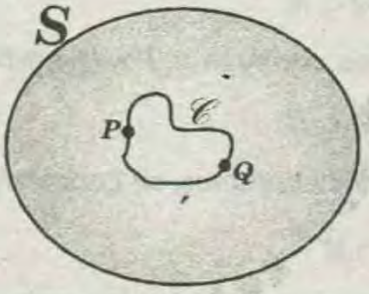
Poligonal Convexa



Poligonal Concava

CONJUNTO CONEXO

Un conjunto de puntos S se denomina conexo, si para todo par de puntos del conjunto S, existe una línea curva continua contenida en dicho conjunto que contiene a dichos puntos.



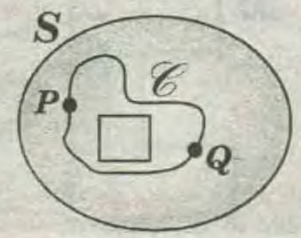
$\mathscr{C} \subset S$

Una idea intuitiva de un conjunto conexo es que está «hecho de una pieza».

CONJUNTO MULTIPLEMENTE CONEXO

Esta categoría se establece a todo conjunto de puntos del plano en el cual existe por lo menos una curva simple cerrada que no es contractible en un punto

EJEMPLO :



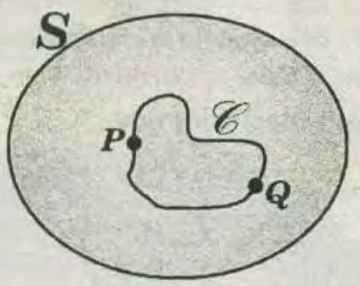
Del conjunto S es una curva simple cerrada, que puede deformarse, contrayéndose continuamente, menos en un punto. Obviamente no puede dejar de estar contenido en el conjunto S.

Luego se dice que S es no simplemente conexo. La categoría de conjunto no simplemente conexo, doblemente conexo, triplemente conexo se establece por la cantidad de agujeros que tiene el conjunto (uno, dos, tres, agujeros respectivamente).

ORDEN DE CONEXIÓN

CONJUNTO SIMPLEMENTE CONEXO

Esta categoría se establece a todo conjunto de puntos del plano, en el cual todas las curvas cerradas contenidas existentes son contráctiles(Facultad de contraerse y dilatarse que poseen ciertas partes de los cuerpos)en un punto.



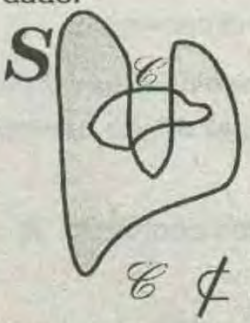
$\mathscr{C} \subset S$

De la figura $\mathscr{C}$ es una curva simple cerrada que puede deformarse, contrayéndose continuamente hasta reducirse y convertirse en un punto. Obviamente no puede dejar de estar contenido en el conjunto S.

Luego, se dice que el conjunto S es simplemente conexo.

CONJUNTO NO CONEXO O INCONEXO

Un conjunto de puntos del plano es no conexo, si existe por lo menos una curva continua no contenida en el conjunto dado.



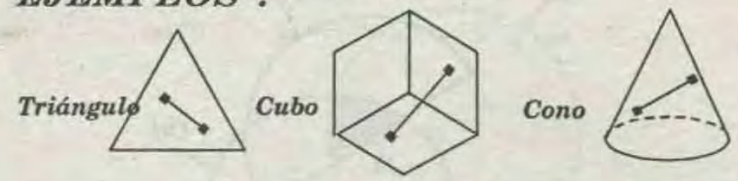
$\mathscr{C} \not\subset S$

Si $\mathscr{C}$ es una curva del conjunto S, observamos que la curva $\mathscr{C}$ no se encuentra contenida en S. Luego, el conjunto H es no conexo o inconexo.

¡RECUERDA!

Un conjunto de puntos se llama convexo , si el segmento que une dos puntos cualesquiera del conjunto , está contenido en él .

EJEMPLOS :



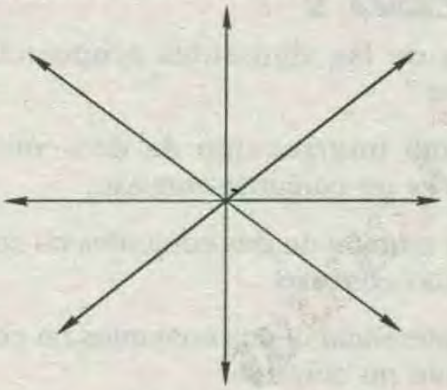
II) Un conjunto de puntos se llama no convexo , si al menos existen dos puntos distintos de dicho conjunto , que determinan un segmento con algunos puntos no comunes al conjunto .

EJEMPLOS :

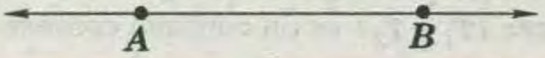
POSTULADOS DE LA RECTA

I) La recta es una línea indefinida.

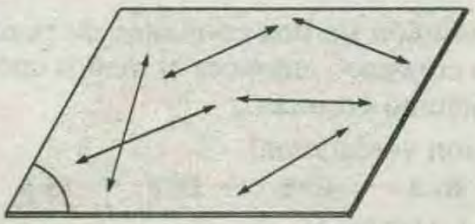
II) Por un punto cualquiera pasan infinitas rectas.



III) Dos puntos cualesquiera definen una recta.

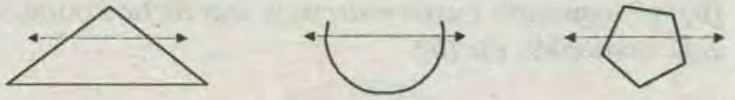


IV) En un plano cualquiera existen infinitas rectas.

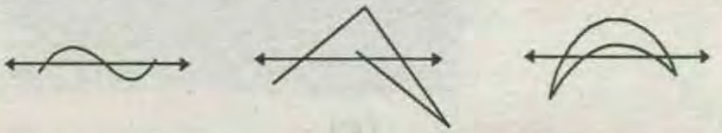


INTERSECCIÓN DE FIGURAS PLANAS

* Una línea es convexa si al intersectarse con cualquier recta , lo hace en un máximo de dos puntos.



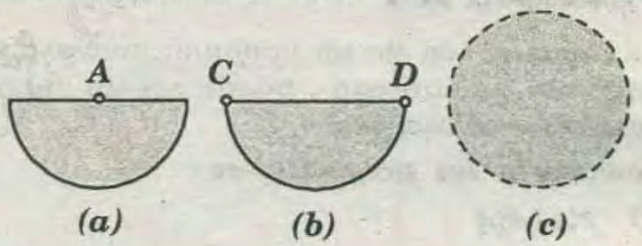
* Una línea es no convexa si alguna recta determina sobre ella más de dos puntos . Se les llama cóncavas.



PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

A la región plana representada en *(a)* le falta el punto *A;* a la de *(b)* le faltan los puntos *C* y *D* y a la de *(c)* le falta su circunferencia frontera. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son correctas?



I) La intersección de los conjuntos en *(a)* y *(b)* es un conjunto no convexo.

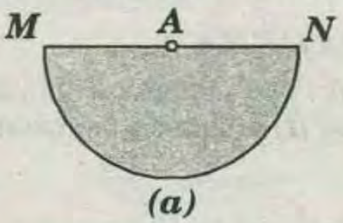
*II)*La intersección de los conjuntos en *(b)* y *(c)* es un conjunto convexo.

III) La intersección de los conjuntos en *(a)*, *(b)* y *(c)* es un conjunto convexo.

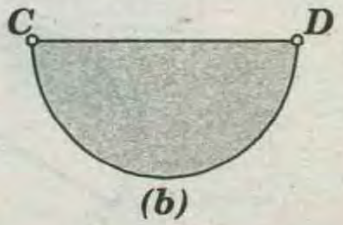
A)I y III ***B)II y III*** ***C)solo III***
D)solo I ***E) solo II***

RESOLUCIÓN :

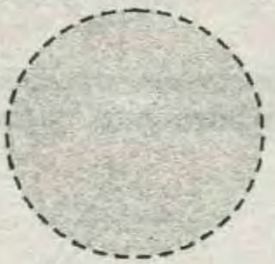
* Piden analizar las proposiciones indicadas :



* Se observa que *(a)* es un conjunto no convexo : porque $A \notin \overline{MN}$



Se observa que *(b)* es un conjunto convexo: porque para todo par de puntos diferentes que pertenecen a *(b)*, el segmento cuyos extremos son dichos puntos está contenido en *(b)*.



(c)

Se observa que *(c)* es un conjunto convexo:

Por teorema , un conjunto convexo sin frontera es convexo.

TEOREMA I :

La intersección de dos conjuntos convexos, es un conjunto ***convexo***.

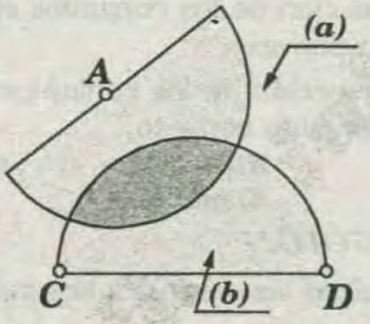
TEOREMA II :

La intersección de un conjunto convexo y un conjunto no convexo , puede ser un conjunto ***convexo*** o no ***convexo***.

Analizando las proposiciones :

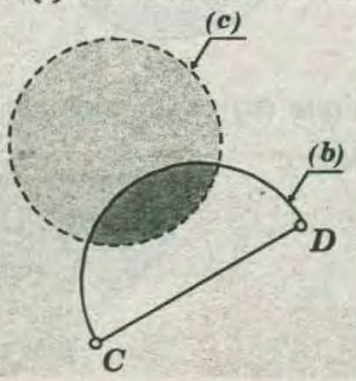
I) FALSA :

Como *(a)* es no convexo y *(b)* es convexo , entonces, por el teorema *(II)* la intersección puede ser convexa o no convexa.



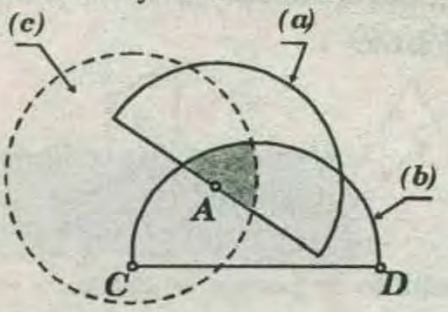
II) VERDADERA :

Como *(b)* y *(c)* son conjuntos convexos, entonces por el teorema *(I)* la intersección convexa.

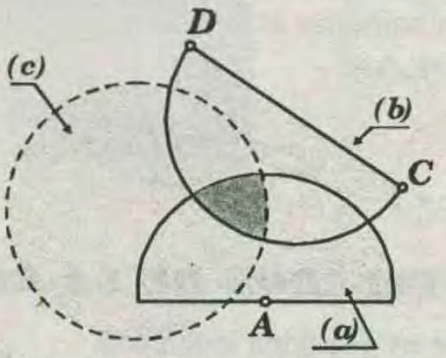


III) FALSA :

Como *(a)* es conjunto no convexo , *(b)* y *(c)* son conjuntos convexos ; entonces , su intersección puede ser ***convexa*** y no ***convexa***.



la intersección es no convexa



la intersección es convexa

RPTA : "E"

PROBLEMA 2 :

¿Cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas ?

1) Ninguna intersección de dos conjuntos no convexos es un conjunto convexo.

2) Alguna reunión de dos conjuntos no convexos es un conjunto convexo.

3) Toda diferencia dedos conjuntos no convexos es un conjunto no convexo.

4) Sean T_1 y T_2 las regiones triangulares ***ABC*** y ***ABD***; entonces $(T_1 \cup T_2)$ es un conjunto convexo.

5) La intersección de un círculo y un cuadrado, siempre es un conjunto convexo.

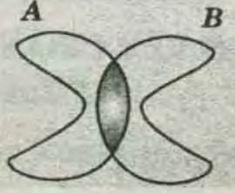
6) Si la reunión de dos conjuntos de puntos es un conjunto convexo , entonces al menos uno de éstos es un conjunto convexo .

¿Cuáles son verdaderas?

A) 2 B) 3 C) 1 D) 5 E) 6

RESOLUCIÓN :

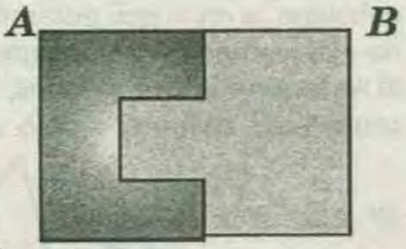
1) FALSA :



A : conjunto no convexo. ; B : conjunto no convexo.

$A \cap B$ = conjunto convexo

2) VERDADERA :

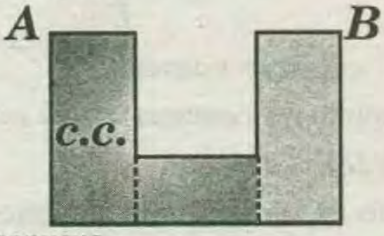


A : conjunto no convexo.

B : conjunto no convexo.

$A - B$ = conjunto convexo .

3) FALSA :

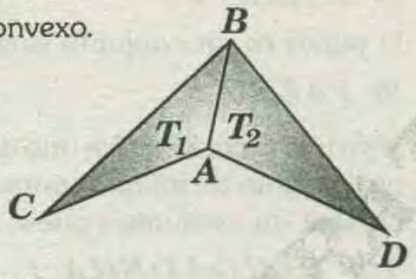


A : Conjunto no convexo .

B : conjunto no convexo .

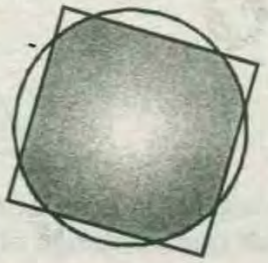
$A - B$ = conjunto no convexo.

4) FALSA :



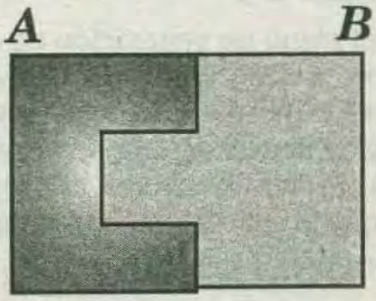
$T_1 \cup T_2$ = conjunto no convexo.

5) VERDADERA :



La intersección siempre es un conjunto convexo.

6) FALSA :



A : conjunto no convexo.

B : conjunto no convexo.

$A \cup B$ = conjunto convexo

Ninguno de los dos conjuntos es convexo.

RPTA : "A"

PROBLEMA 3 :

Dadas las siguientes proposiciones :

I) El conjunto convexo más pequeño que contiene a tres puntos no colineales del plano es la región triangular cuyos vértices son dichos puntos.

II) Elconjunto $S = \{x \in \mathbb{R} / |x| > 1\}$ es convexo.

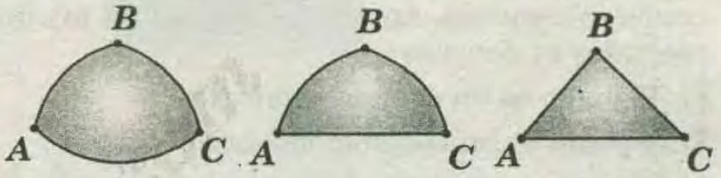
III) Si al borde de un círculo se le quita un sólo punto , el conjunto resultante ya no es convexo.

Son correctas :

A) I y III *B) Solo II* *C) I y II*
D) II y III *E) Solo I*

RESOLUCIÓN :

I) VERDADERO :



Se muestran tres conjuntos convexos que al compararlos, el más pequeño es la región triangular (entendiendo como ***región triangular*** a la porción de plano que está limitada por tres segmentos de recta).

II) FALSO:

El conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} / |x| > 1\}$

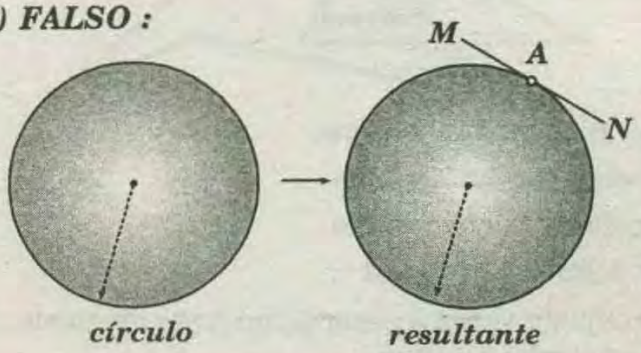
$\rightarrow x > 1 \cup x < -1$

Para sustentar dicha proposición :

ubicamos un punto A que pertenece a $x > 1$ y un punto B que pertenece a $x < -1$

$\rightarrow \overline{AB} \notin S$, por lo cual el conjunto S no es convexo.

III) FALSO :



Se traza $\overline{MN}$ que contiene a A, pero dicho segmento es exterior al círculo sin el punto A; entonces, la resultante sigue siendo conjunto convexo.

RPTA : "E"

PROBLEMA 4 :

Determinar la veracidad de las siguientes proposiciones:

1) Si la intersección de dos conjuntos es convexa. entonces ninguno de los dos conjuntos es no convexo.

2) El vacío es un conjunto convexo.

3) Si A,B son 2 conjuntos convexos. $A \cap B$ es un conjunto convexo.

4) Un círculo sin el borde es un conjunto convexo.

5) En un plano, la intersección de los dos semiplanos determinados por una recta contenida en el plano es un conjunto no vacío.

6) Si la intersección de dos conjuntos no es un conjunto convexo. entonces ninguno de los dos conjuntos es convexo .

7) El punto es un conjunto convexo.

8) El punto es un conjunto inconexo.

9) Infinitos puntos consecutivos forman un conjunto conexo.

10) Una región triangular de la que se han omitido los tres vértices es un conjunto convexo.

11) La reunión de los dos semi espacios, determinados por un plano de separación contenido en el espacio tridimensional, es una región convexa.

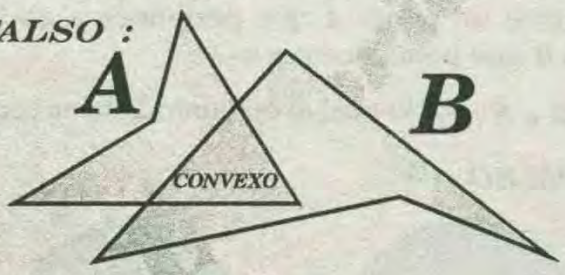
*12)*Una región poligonal convexa de la que se han excluido sus vértices es un conjunto convexo.

E indicar cuantas de ellas son falsas .

A) 7 B) 3 C) 9 D) 6 E) 2

RESOLUCIÓN :

1) FALSO :



$A \cap B$: conjunto convexo

A : conjunto no convexo

B : conjunto no convexo

2) VERDADERA :

El conjunto vacío, a pesar de no tener elementos, es un conjunto convexo.

3) VERDADERA :

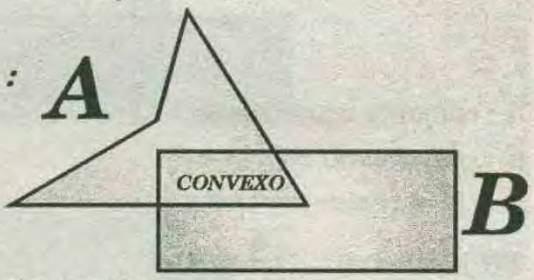
4) VERDADERA :

En un círculo al suprimir su circunferencia , la región interior es un conjunto convexo.

5) FALSO :

Según el postulado de la separación de los puntos del plano, la recta que determina a los dos semiplanos no está contenida en ninguno de ellos y por lo tanto al no tener puntos comunes, la intersección de estos semiplanos es un conjunto vacío.

6) FALSO :



$A \cap B$: conjunto convexo

A : conjunto no convexo ; *B :* conjunto convexo

7) VERDADERA :

El punto es un conjunto unitario considerado un conjunto convexo.

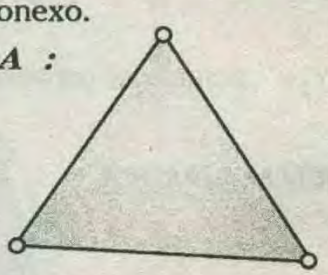
8) FALSO :

El punto es un conjunto simplemente conexo.

9) FALSO :

Si en una recta se omite uno de sus puntos, se obtiene un conjunto de infinitos puntos consecutivos, *el* cual no será un conjunto conexo.

10) VERDADERA :



Ningún segmento puede unir dos puntos de la región triangular que contenga algún punto que no sea de la región.

11) FALSO :

Como el plano de separación de dos semi espacios no tiene puntos comunes con ninguno de ellos, entonces la reunión de estos semi espacios no es una región convexa, pues un segmento que una dos puntos de semiespacios diferentes contiene un punto que no pertenece a la reunión.

12) VERDADERA :

Al excluirse los vértices de una región poligonal convexa, no existe un segmento que uniendo dos puntos de la región puede contener el punto excluido. Por lo tanto, la región permanece como región convexa.

RPTA : "D"

PROBLEMA 5 :

¿Cuántas de las siguientes proposiciones son falsas ?

1) Si *A, B,* son *2* conjuntos convexos, $A \cap B$ es un conjunto convexo .

2) Todo punto separa a la recta en dos conjuntos no vacíos, llamados semirrectas .

3) Si la intersección de dos conjuntos no es un conjunto convexo, entonces ninguno de los dos conjuntos es convexo.

4) Alguna diferencia de dos conjuntos no convexos es un conjunto convexo.

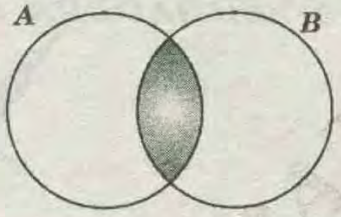
5) Si la intersección de dos conjuntos es convexa, entonces ninguno de los dos conjuntos es no convexo.

6) El conjunto de los puntos interiores de un polígono equilátero $(n \geq 3)$ es siempre un conjunto convexo.

A)5 B)2 C) 3 D)6 E)4

RESOLUCIÓN :

1)VERDADERA :

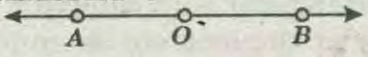


A : conjunto convexo

B : conjunto convexo

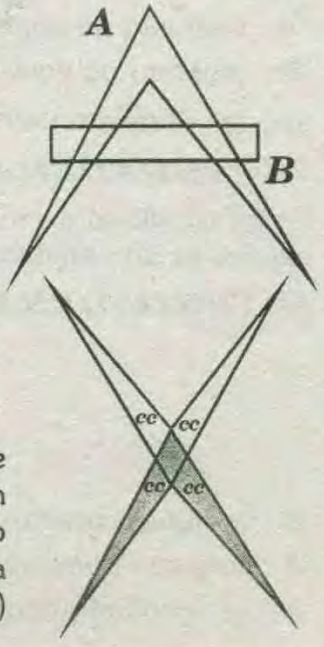
Por teorema, $A \cap B$ es un conjunto convexo.

2)VERDADERA :



El punto *"O"*, separa a la recta en dos conjuntos no vacíos, los cuales son: $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$

3)FALSA :



A : conjunto no convexo

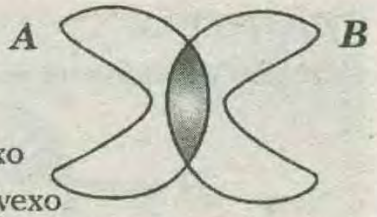
B : conjunto convexo

$A \cap B$: conjunto no convexo

4)VERDADERA :

Es verdad, alguna diferencia de dos conjuntos no convexos es un conjunto convexo, como podemos apreciar en la figura adjunta. (cc: conjunto convexo)

5) FALSA :

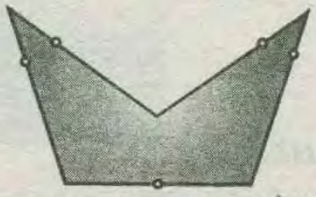


$A \cap B$: conjunto convexo

A : conjunto no convexo

B : conjunto no convexo

6) FALSA :



En la figura observamos un conjunto no convexo equilátero.

RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) La unión de dos conjuntos no convexos puede ser un conjunto convexo.

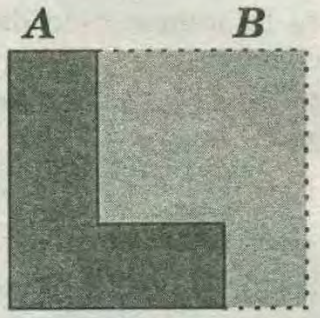
b) La unión de dos regiones triangulares con un lado común es un conjunto convexo .

c) Si un segmento $\overline{AB}$ gira *180°* respecto de un punto $P(P \in A\overline{B})$, entonces la región generada es un conjunto convexo .

A) VFV D) FFV B)FFF C)VFF E)VVF

RESOLUCIÓN :

A)VERDADERA :

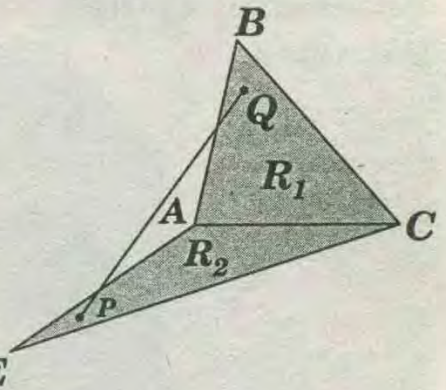


A: Conjunto no convexo

B: Conjunto no convexo

$\Rightarrow A \cup B$ es un conjunto convexo

B) FALSA :

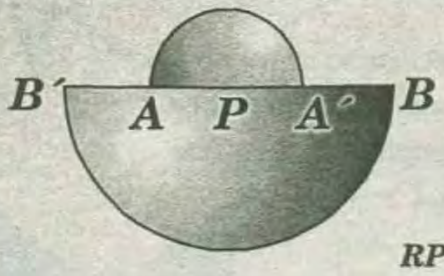


$\overline{AC}$ es el lado común.

* Luego : $R_1 \cup R_2$ no es un conjunto convexo.

C) FALSA :

La región generada no es un conjunto convexo.



RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

¿Cuántas de las siguientes proposiciones son falsas ?

1) El exterior de un plano es un conjunto convexo.

2) Una recta L de un plano $\mathscr{H}$ separa a este plano en dos conjuntos $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ tales que $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2 \neq \phi$.

3) Una región cuadrada, sin dos vértices es un conjunto convexo .

4) Una región poligonal limitado por un polígono convexo, donde se ha excluido su perímetro es un conjunto convexo.

5) Alguna región triangular donde se ha excluido el circuncentro es un conjunto convexo.

6) Ningún conjunto convexo resulta de la reunión de dos conjuntos no convexos.

7) Un círculo sin el borde es un conjunto convexo.

8) La intersección de *2* círculos es un conjunto convexo.

9) Un cuadrilátero siempre es un conjunto convexo.

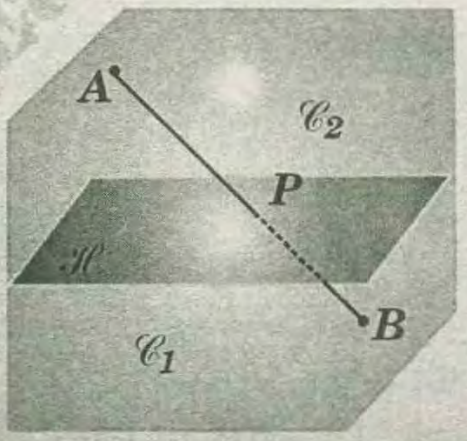
A) 7 B) 8 C)2 D)4 E) 5

RESOLUCIÓN :

1)FALSA :

Según el postulado de la separación de los puntos del espacio: Un plano $\mathscr{H}$ contenido en el espacio $\mathscr{E}$ separa a éste en dos conjuntos $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ (semiespacios) tales que :

a) $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \phi$

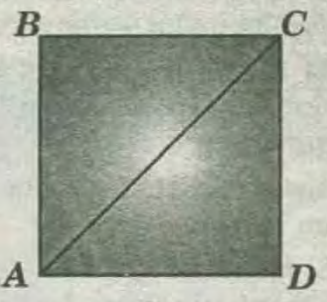


b) $\overline{AB} \cap \mathscr{H} = \phi$

2)FALSA :

Según el postulado de la separación de los puntos del plano: Una recta L contenida en un plano $\mathscr{H}$, separa a éste plano en dos conjuntos $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ (semiplanos) tales que : $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2 \neq \phi$

3)VERDADERA :

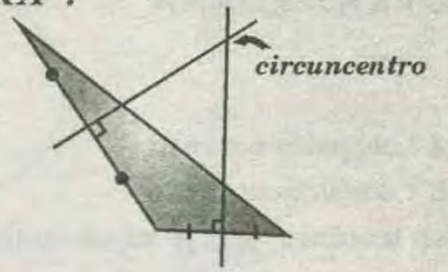


$\overline{AC}$ está contenido en la región cuadrada *ABCD*.

4)VERDADERA :

En una región poligonal convexa, al excluir su perímetro, o su contorno, o al polígono que limita a dicha región poligonal convexa, sigue siendo un conjunto convexo.

5)VERDADERA :



La región triangular que muestra la figura, es obtusángulo, su circuncentro es un punto exterior, al omitir o excluir, el conjunto es convexo.

6) FALSA :

A : conjunto no convexo.

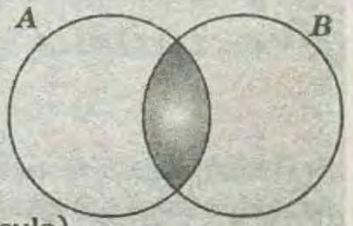
B : conjunto no convexo.

$A \cup B$: conjunto convexo .

7) VERDADERA :

En un círculo al excluir su circunferencia, la región interior es un conjunto convexo.

8) VERDADERA :



A : conjunto convexo. (círculo)

B : conjunto convexo. (círculo)

$A \cap B$: conjunto convexo .

9) FALSA :

Ningún polígono es un conjunto convexo.

RPTA : "D"

PROBLEMA 8 :

¿Cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas ?

1) La reunión de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo.

2) La intersección de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo.

3) En todo región triangular al extraer un punto notable del triángulo se determina un conjunto convexo.

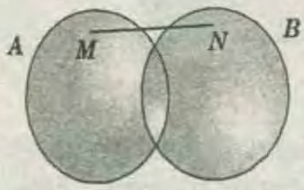
4) Una región triangular, dos de cuyos lados se han omitido es un conjunto convexo .

5) Todos los ángulos son conjuntos no convexos.

A) 5 B) 4 C) 6 D) 3 E) 1

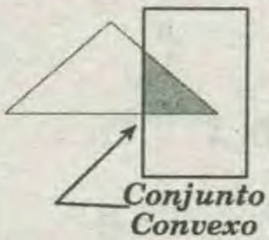
RESOLUCIÓN:

1) FALSA :



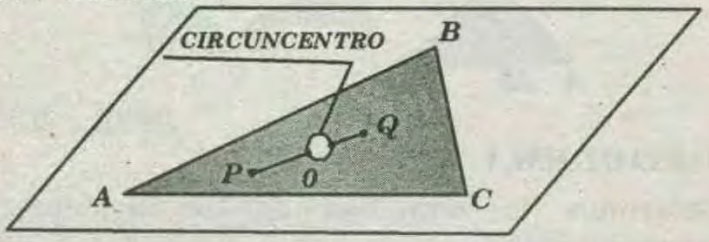
Siendo *"A"* y *"B"* conjuntos convexos, se aprecia que no necesariamente *"A* U *B"* es un conjunto convexo, ya que *MN* no esta contenido en la reunión de *A* y *B*.

2) VERDADERA :



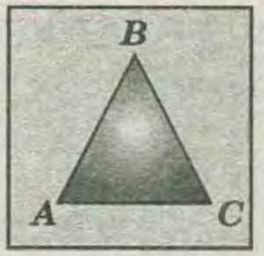
"La intersección de *2* conjuntos convexos, necesariamente es un conjunto convexo".

3) FALSA :



"En el siguiente contraejemplo,el lugar del, circuncentro queda vació, luego *PQ* no esta contenido totalmente en la región triangular *ABC*".

4) VERDADERA :



T : región triangular *ABC*

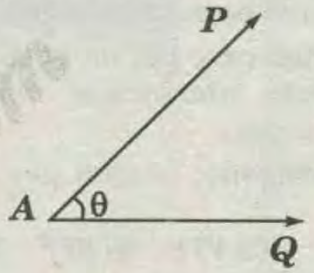
$\Rightarrow T-(\overline{AB}\cup\overline{AC})=c$. convexo .

5) VERDADERA :

Recordemos: Se llama ángulo a la reunión de dos rayos que tienen el mismo origen.

POSTULADO DE LA MEDIDA DE ÁNGULOS

A cada ángulo *PAQ* le corresponde un número real entre *0* y *180*, que es su medida .



$m\sphericalangle PAQ=\theta$

Luego todos los ángulos son conjuntos no convexos.

RPTA : " D"

PROBLEMA 9 :

Indique el valor de verdad:

a) Todos los polígonos son conjuntos no convexos.

b) Alguna diferencia de dos regiones cuadrangulares no convexas es un conjunto convexo.

c) Algunas regiones triangulares en las que se omite el circuncentro son conjuntos convexos.

A) VFV B)VVF C) FVF D) VVV E) FFV

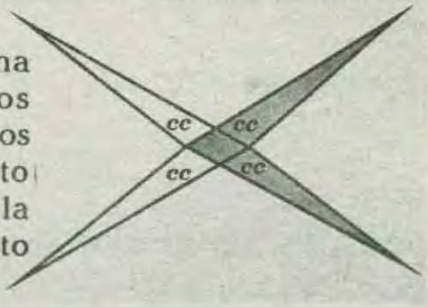
RESOLUCIÓN :

A) VERDADERA :

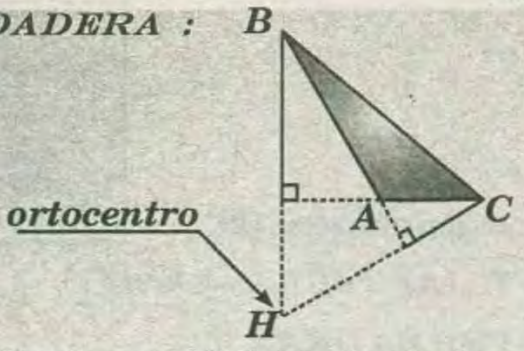
Un polígono puede ser convexo o no convexo, pero no conjuntos convexos.

II) VERDADERA :

Es verdad, alguna diferencia de dos conjuntos no convexos es un conjunto convexo, según la figura. *cc*: conjunto convexo.



III) VERDADERA :



Si ***T*** es la región triangular ***ABC*** obtusángulo. Luego; ***(T– H)*** es un conjunto convexo.

RPTA : "D"

PROBLEMA 10 :

De las siguientes proposiciones. Cuáles son verdaderas y falsas.

I) En todo polígono, ningún par de lados se intersecan excepto en sus extremos.

II) Toda recta que pase por un punto interior a un polígono convexo interseca al contorno en dos puntos y solo en dos.

III) En todo polígono; ningún par de lados son colineales.

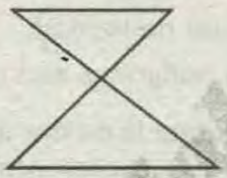
A) VVV B) VFF C) VVF D) FFF E) FFV

RESOLUCIÓN :

I) VERDADERA :

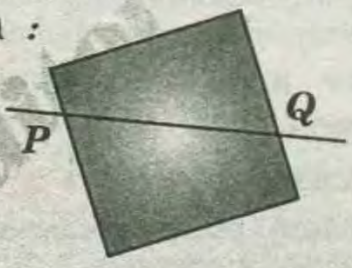
Por definición de polígonos, ningún par de lados se intersecan excepto en sus extremos.

Veamos un ejemplo :



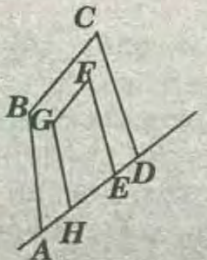
Ésta figura, no es un polígono, por definición.

II) VERDADERA :



Por definición de polígono convexo, la recta secante interseca al contorno en solo dos puntos.

III) FALSA :



Lados $\overline{AH}$ y $\overline{ED}$ son colineales.

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I) El borde de un polígono convexo es una región convexa.

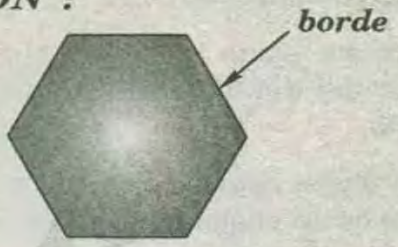
II) El complemento de un plano en el espacio es una region convexa.

III) La diferencia de dos regiones no convexas es una región no convexa

A) VVV B) VFF C) FFF D) VVF E) FFV

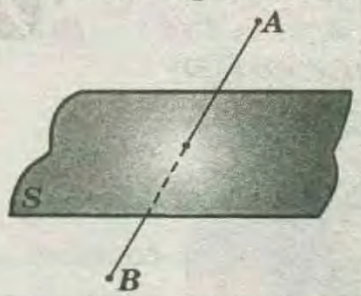
RESOLUCIÓN :

I) FALSA :



El borde del polígono es una región no convexa.

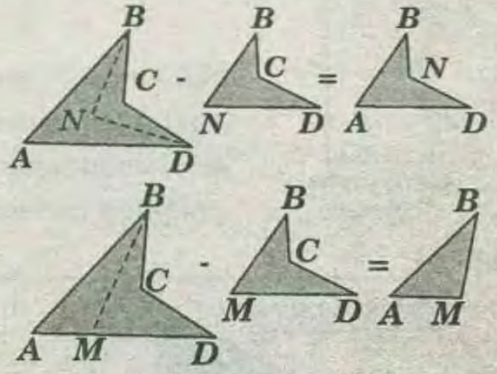
II) FALSA :



En el espacio excluimos el plano ***S***, nos queda el complemento que son dos semiespacios , que constituyen una región no convexa.

III) FALSA :

Hay dos posibilidades , por ejemplo



RPTA : "C"

PROBLEMA 12 :

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones:

I) La región que se obtiene al quitar ***2*** lados a una región cuadrangular regular es un conjunto convexo.

II) La semirrecta es un conjunto convexo.

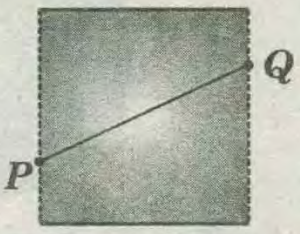
III) Una región triangular cuyos vértices se han

omitido es un conjunto convexo.

A)VFV B)FVF C) FVV D)VVV E)VFF

RESOLUCIÓN:

I) ***VERDADERA :***

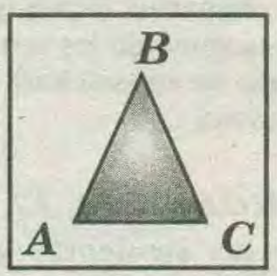


Según la figura, el conjunto es convexo .

II) VERDADERA :

El rayo sin su origen es la semirrecta, la semirrecta no incluye al punto de origen, la semirrecta es un conjunto convexo .

III)VERDADERA :



Se han omitido o excluido los vértices del triángulo, pero los puntos restantes forman un conjunto convexo.

RPTA : "D"

PROBLEMA 13 :

Indique la veracidad de las siguientes proposiciones:

I) Las particiones de un conjunto, incluidas sus fronteras siempre son conjuntos convexos.

II) Si C_1 y C_2 son conjuntos convexos, entonces $C_1 \cap C_2$ es un conjunto convexo.

III) Si C_1 y C_2 son conjuntos no convexos, entonces $C_1 \cap C_2$ es siempre un conjunto no convexo.

A) VVF B) VVV C) FVF D) FFF E)FFV

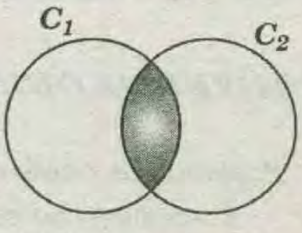
RESOLUCIÓN :

I) FALSA :

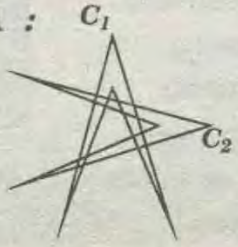
II)VERDADERA :

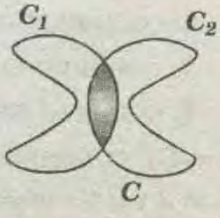
Por el teorema de la intersección de conjuntos convexos .

$C_1 \cap C_2$: conjunto convexo



III)FALSA :





$C_1 \cap C_2 \rightarrow$ *no convexo* $C_1 \cap C_2 \rightarrow$ *convexo*

Luego: $C_1 \cap C_2$ puede ser un conjunto convexo.

RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

Dadas las siguientes proposiciones. Cuáles son verdaderas y falsas.

I) Sea *C* : un polígono regular de *5* lados con su región interior.

L: una diagonal del polígono regular anterior, entonces: $C - L$ es un conjunto convexo .

II) La diagonal de un rombo divide a esta en *2* conjuntos convexos .

III) Sea *Q* : un triángulo con su región interior.

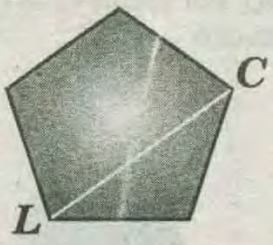
T : *2* cevianas del triángulo anterior.

Entonces *T* divide a *Q* en un máximo de *3* regiones convexas .

A) VVV B) FFF C) VFF D) FVF E) FFV

RESOLUCIÓN :

I)FALSA :

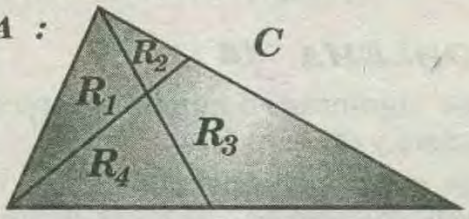


$C - L$: es un conjunto no convexo.

II) FALSA :

Un rombo no es un conjunto convexo.

III)FALSA :



T: divide a *Q* en un máximo de *4* regiones convexas.

RPTA : "B"

PROBLEMA 15 :

Indique el valor de verdad :

I) Una recta y un ángulo contenidos en un plano, pueden determinar una partición de *5* elementos.

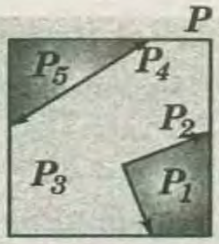
II) Todo plano separa el espacio en dos semiespacios E_1 y E_2 tal que $E_1 \cup E_2$ es un conjunto convexo.

III) Sea *C* : Conjunto de puntos de un cono sólido.
T : Conjunto de puntos de una de las generatrices.
$(C - T)$ es un conjunto convexo

A) VFV B) VVV C) FFV D) FFF E) VVF

RESOLUCIÓN :

I)VERDADERA :



Recordemos que una partición de un conjunto P es una colección de subconjuntos de P, ninguno de los cuales es vacío, y tales que cada elemento de P pertenece a solamente uno de los subconjuntos de P.

II)FALSA :

Si $P \in E_1$ y $Q \in E_2$ entonces $\overline{PQ}$ no está contenido en el conjunto respectivo.

Luego $E_1 \cup E_2$ no es un conjunto convexo.

III) VERDADERA :

Como en el caso de una región triangular ABC, al excluir el lado $\overline{BC}$ por ejemplo, la región restante es un conjunto convexo .

El segmento, $\overline{PQ}$, está contenido en el conjunto respectivo .

RPTA : "A"

PROBLEMA 16 :

En los siguientes enunciados poner *(V)* si es verdadero y *(F)* si es falso .

I) Una región poligonal convexa de la que se han excluido sus vértices , es un conjunto convexo .

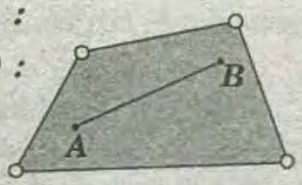
II) Ninguna región convexa resulta de la reunión de dos regiones no convexas .

III) La reunión de los dos semiespacios determinados por un plano de separación contenido en el espacio tridimensional , es una región convexa .

A)VVF B)VVV C) VFF D)VFV E) FFF

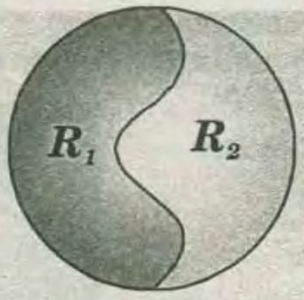
RESOLUCIÓN :

I) VERDADERO :



En el gráfico se observa que para cada par de puntos de la región , el segmento que los une está contenido en dicha región , por lo tanto es una región convexa.

II) FALSO :



En el gráfico se observa que la reunión de las regiones R_1 y R_2 (no convexas) es una región convexa.

III) FALSO :

El segmento que une dos puntos de diferentes semiespacios tienen un punto que no está ubicado en ninguno de los semiespacios (está ubicado en el plano de separación), por lo tanto es una región no convexa .

RPTA : "C"

PROBLEMA 17 :

De las siguientes proposiciones. Cuáles son verdaderas y falsas.

Datos: L es una recta y C una circunferencia (considerar a P como el plano que los contiene).

I) $P-(L \cup C)$ resulta un máximo de dos regiones convexas y *2* regiones no convexas .

II) $(L \cap C)$ puede ser una región no vacía y convexas.

III) Existe *5* elementos en partición .

A)VFV B)VVF C)VFF D)FFF E) VVV

RESOLUCIÓN:

RNC

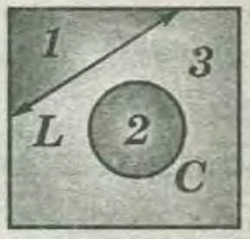
I)VERDADERA :

1: conjunto convexo.

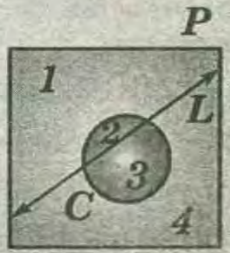
2: conjunto convexo.

3: conjunto no convexo.

4: $P-(L \cup C)$: *RNC*



II)VERDADERA :



P: plano que contiene a *L* y *C*.

1: conjunto no convexo.

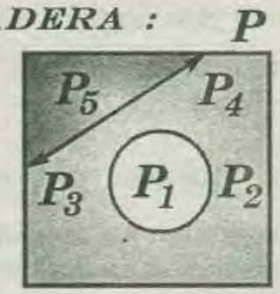
2: conjunto convexo.

3: conjunto convexo.

4: conjunto no convexo.

$(L \cap C)$ contenido en el plano P, es una región no vacía *2* y *3* y convexas.

III) VERDADERA :



Los subconjuntos P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 determinan una partición de *5* elementos:

$\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ del conjunto *P*, o sea del plano.

RPTA : "E"

PROBLEMA 18 :

Si una recta *L* de un plano *P*, la cuál separa a éste plano en *2* conjuntos de punto L_1 y L_2, indique la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

I) L_1 y L_2 no incluyen a *L*.

II) L_1 y L_2 son convexos.

III) L_1 y L_2 se llaman planos.

A)VVV B)VFF C)VFV D)FVF E)VVF

RESOLUCIÓN :

I) VERDADERA :

Según el postulado de la separación de los puntos del plano, L_1 y L_2 no incluyen a *L*.

II) VERDADERA , porque :

L_1 y L_2 son convexos .

III) FALSA , dado que :

L_1 y L_2 se llaman semiplanos

RPTA : "E"

PROBLEMA 19 :

El valor de verdad de las siguientes proposiciones

I) Toda líneas recta sépara al plano que la contiene en dos conjuntos convexos.

II) Si le quitamos un punto a un plano, el conjunto resultante es convexo.

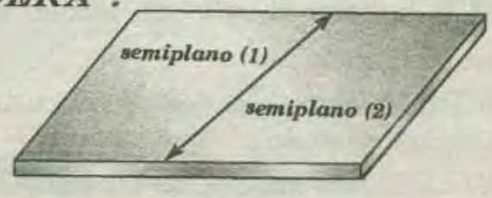
III) Toda poligonal no convexa que gira *360°* alrededor de uno de sus extremos y en el plano que la contiene, determina siempre una región convexa.

es :

A)VVV B)VFV C)FVV D)VVF E)VFF

RESOLUCIÓN :

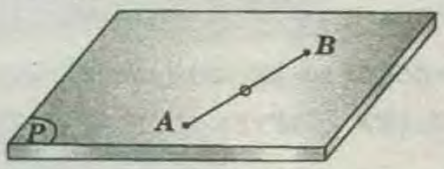
I) VERDADERA :



Toda recta contenida en un plano separa al plano en dos semiplanos , los cuales son conjuntos convexos.

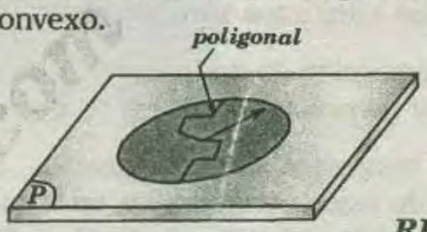
II) FALSA :

Si quitamos un punto a un plano , el conjunto resultante es un conjunto no convexo , porque existe por lo menos un segmento de recta ($\overline{AB}$ en la figura) que une dos puntos de dicho conjunto que no está contenido completamente en dicho conjunto.



III) VERDADERA :

Toda poligonal coplanar , que gira en dicho plano alrededor de uno de sus extremos , genera un círculo y este es convexo.



RPTA : "B"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Un punto es un conjunto convexo.

II) Ninguno de los dos semiplanos determinados por una recta de un plano contiene a dicha recta.

III) Si *A* y *C* son un ángulo y un círculo contenidos en un plano *P*, entonces en $P-\{A \cup C\}$ se determinan *3* conjuntos convexos como máximo .

A)VVF B) VVV C)VFV D)FVV E)FVF

02 Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Sea *C* la unión del polígono convexo *ABCDE* con su interior y *Q* es el segmento $\overline{DE}$. Entonces $C - Q$ es un conjunto convexo .

II) Sea *R* un conjunto no convexo y *L* una recta. Entonces *L* puede separar a *R* en dos conjuntos convexos .

III) Sean L_1, L_2 y *A* dos rectas y un ángulo contenidos

en el plano P , entonces se determinan en P un mínimo de 3 conjuntos convexos .

A) VVF B) VFV C)FVV D) FVF E)VVV

03 Señalar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) La unión de dos semirrectas opuestas es un conjunto convexo .

II) Un polígono convexo es un conjunto no convexo.

III) El exterior de un plano es un conjunto convexo.

A) FFV B) FFF C)FVF D) FVV E)VVV

04 Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I) Si la reunión de dos conjuntos es convexa, entonces los conjuntos son convexos.

II) Si la intersección de dos conjuntos no es convexa, entonces al menos un conjunto no es convexo.

III) Si dos conjuntos son no convexos, entonces la diferencia de estos conjuntos es no convexa .

A) FVF B) FVV C)VVF D) VVV E)FFF

05 Sea R un círculo y T un triángulo, ¿Cuál es el valor de verdad de las siguientes proposiciones? .

I) $R - T$ es siempre un conjunto no convexo .

II) Si $T \subset R$, entonces T determina con R una partición de 3 elementos .

III) Si $T \cap R \neq \phi$, entonces T determina en R un máximo de 4 conjuntos convexos .

A) VVV B) VFF C)VVF D) VFV E)FVV

06 Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Una región triangular de la que se han omitado los puntos medios de sus lados, es un conjunto convexo.

II) Una región circular (círculo) de cuyo contorno se han excluido dos puntos diametralmente opuestos, es un conjunto convexo .

III) Dos rectas paralelas al ser intersectado por una secante determinan en un plano 6 conjuntos convexos.

IV) A y B son conjuntos convexos si sólo y si $A \cap B$ es un conjunto convexo .

A)FFFV B)FVVF C)VFFV D)VFVF E)VVVF

07 Al intersectar dos ángulos se obtiene como máximo.....conjunto convexos.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

08 Analice las siguientes proposiciones :

I) Si regiones que limitan los polígonos es convexa, entonces, su intersección es también convexa.

II) La proyección ortogonal de una región convexa sobre un plano siempre es convexa .

III) En una región poligonal, si una de las diagonales del polígono que limita dicha región está contenida en la región anterior, entonces la región poligonal es no convexa .

A)VFV B)VFF C)VVF D)VVV E)FFV

09 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Dos regiones triángulares coplanares tienen en común solamente un lado entonces la unión de ellas es un conjunto convexo .

II) Si a un segmento circular le quitamos un punto de la frontera, la región resultante es un conjunto convexos .

III) Si a un círcular le quitamos un punto de su frontera, la región resultante es un conjunto convexo.

IV) Si a una región romboidal le quitamos una diagonal, entonces se determinan dos conjuntos convexos .

A)VVFF B) FVFV C) FFVF D) VFVV E) FFVV

10 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiónes.

I) Una región cuadrangular equilatero siempre es un conjunto convexo .

II) Los polígonos son conjuntos convexos .

III) Si a una región cuadrada se le omiten sus vértices, la región restante es convexa .

IV) Si la unión de dos conjuntos A y B es un conjunto convexo , entonces los conjuntos A y B son convexos.

A)FVFF B)VFFV C)FFVF D)VFVF E)FFFV

11 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones .

I) Toda diferencia de dos conjuntos no convexos es un conjunto convexo .

II) La región interior de un polígono equilátero es

convexo.

III) La intersección de dos conjuntos no convexos es siempre un conjunto no convexo .

IV) El punto es un conjunto convexo .

A) FVVF B) VVFF C) FVFV D) FVVV E) FFFV

12 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones .

I) Una elipse es un conjunto convexo.

II) La región interior de una párabola es un un conjunto convexo.

III) Una pirámide es convexa si la base es convexa.

IV) Una recta es tangente a un arco si es coplanar e interseca a dicho arco en un punto .

A) FVVV B) FVVF C) FVFV D) VVVV E) VVVF

13 Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones .

I) La intersección de dos conjuntos convexos que puede ser un conjutno no vonvexo.

II) Un rayo en el cual se ha omitido su origen será un conjunto convexo.

III) Una línea mixta puede ser conjunto convexo .

IV) Un punto es un conjunto convexo .

A)VVFV B)FVFV C)FVVF D)FFFV E)VFVV

14 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I) Un polígono equilátero limita región convexa .

II) Tres circunferencias pueden determinar tres conjuntos convexos al intersectarse.

III) Una recta y un ángulo al intersectarse determinar *3* regiones convexas .

A)FFV B)FVV C)VVF D)VFF E)VFV

15 Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I) Sea *C* una región no convexa y *L* una recta , ambas contenidas en un mismo plano, entonces *L* puede dividir a *C* en dos conjutnos convexos.

II) El triángulo sus puntos interiores y sus puntos exteriores son *3* conjuntos puntos donde uno de ellos es un conjunto convexo .

III) Todo polígono convexo es un conjunto convexo

A)VVV B)VVF C)VFF D)FFF E)FFV

16 Diga el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Si *A* y *B* son dos conjuntos convexos, entonces alguna unión de dichos conjuntos es no convexo .

II) Si *P* es un conjunto convexo y *Q* es un conjunto no convexo entonces *P – Q* es siempre un conjunto no convexo .

III) Si a cualquier región triangular *ABC* se le resta el ortocentro *H*, esta diferencia resulta siempre un conjunto no convexo .

A)VFV B)FVV C)FVF D)VFF E)FFF

17 Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones .

I) La semirrecta es un conjunto convexo .

II) Una región triángular cuyos vértices se han omitido es un conjunto convexo.

III) Dos rectas paralelas al ser intersectadas por una recta secante determinan *4* conjuntos convexos y *2* conjuntos no convexos .

A) VVV B) VVF C) VFF D) FFF E) FFV

18 Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I) El borde de un polígono convexo es una región convexa.

II) El complemento de un plano en el espacio es una region convexa.

III) La diferencia de dos regiones no convexas es una región no convexa

A)VVV B)VFF C)FFF D)VVF E)FFV

19 En los siguientes enunciados poner *(V)* si es verdadero y *(F)* si es falso .

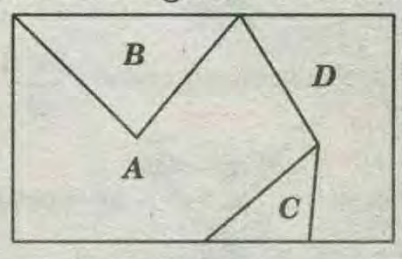
I) Una región poligonal convexa de la que se han excluido sus vértices , es un conjunto convexo .

II) Ninguna región convexa resulta de la reunión de dos regiones no convexas .

III) La reunión de los dos semiespacios determinados por un plano de separación contenido en el espacio tridimensional , es una región convexa

A)VVF B)VVV C) VFF D)VFV E) FFF

20 En la figura , las regiones están marcadas con letras mayúsculas ¿Cual de los siguientes enunciados es verdadero?.



A) AUC es convexo
B) BUC es convexo
C) CUD es convexo
D) AUB es convexo
E)AUD es convexo

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)A	2)E	3)C	4)C	5)E	6)B	7)A	8)D	9)E	10)D
11)E	12)A	13)B	14)B	15)B	16)D	17)B	18)C	19)C	20)D

INTERSECCION DE FIGURAS

CAPITULO 03

OBJETIVOS :

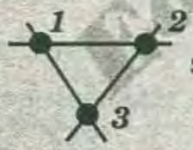
Conocer en forma cuantitativa y cualitativa las diferentes intersecciones que se pueden dar entre figuras geométricas.

INTRODUCCIÓN :

En un día de paseo al campo, los alumnos del primer año de un colegio , observaron una gran cantidad de fibras rectas y delgadas de hilo de una telaraña, uno de ellos exclamó: "¡Averigüemos la cantidad de fibras!" y todos con gran entusiasmo y cuidado empezaron a contarlos, uno, dos, tres, ... ***499, 500*** (quinientas) fibras. Luego de un breve silencio, Jaimito , el más inquieto del grupo, hace la siguiente pregunta: "Si la araña cruza todas las fibras, ¿cuántos puntos de cruce como mínimo y cuántos como máximo se obtendrá?" ..... Al instante respondieron todos, como mínimo se obtendrá un punto de cruce y como máximo, la respuesta fue variada, unos decían ***500***, otros ***800***, otros ***1000*** y hubo más números diferentes como respuesta. Al no ponerse de acuerdo acudieron al profesor de geometría y le plantearon el problema. El profesor pidió silencio para resolver el dilema y dijo lo siguiente: Si cada fibra nos representa una recta, entonces tendremos ***500*** rectas secantes. Resolvamos el problema de manera gradual.

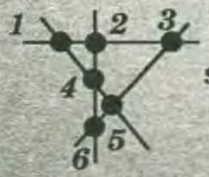
2 rectas

se cortan en ***1*** punto $\Rightarrow$ Podemos escribirlo como $\frac{2\times 1}{2}=1$

3 rectas 

se cortan en ***3*** puntos $\Rightarrow$

Podemos escribirlo como $\frac{3\times 2}{2}=3$

4 rectas 

se cortan en ***6*** puntos $\Rightarrow$

Podemos escribirlo como $\frac{4\times 3}{2}=6$

500 ***rectas*** $\frac{500\times 499}{2}=124\,750$

¡Qué cantidad tan grande! Exclamaron contentos los alumnos por la acertada respuesta de su profesor, y siguieron indagando más cosas. Veamos uno de ellos.

Si se tiene ***3*** rectas secantes y ***4*** rectas paralelas, ¿cuántos puntos de corte como máximo se obtendrán? Sin mayores esfuerzos los alumnos dicen:

* ***1*** recta secante corta a las ***4*** paralelas en ***4*** puntos, esto quiere decir que:

* ***3*** rectas secantes cortarán a las ***4*** paralelas en $3\times 4 = 12$ puntos.

Las ***3*** rectas secantes se cortarán entre sí en:

$\frac{3\times 2}{2}=3$ puntos

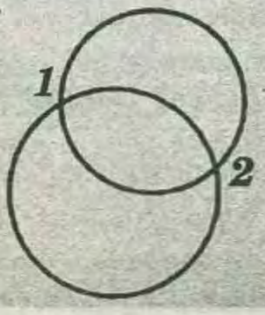
$\Rightarrow$ El número de puntos de corte será: $12 + 3 = 15$

Las ***3*** rectas secantes se cortarán entre sí en: $\frac{3\times 2}{2}=3$

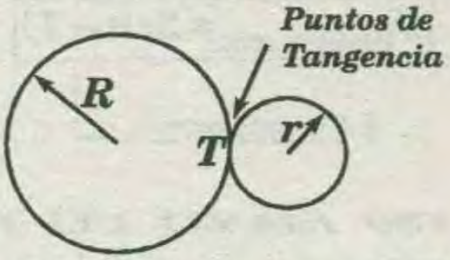
$\Rightarrow$ El número de puntos de corte será : $12+3=15$

INTERSECCIÓN DE FIGURAS

Dos figuras se interceptan cuando comparten uno o más puntos perimétricos por cuestiones prácticas , únicamente consideraremos los puntos pertenecientes al contorno de la figura más no los puntos que pertenecen a la porción del plano limitada por los lados de dicha figura. Por ejemplo el mínimo número de puntos de intersección de dos circunferencias Secantes es ***2***, como se muestra en la figura adjunta.



Es importante aclarar que si dos figuras se interceptan ,no necesariamente se deben estar cortando. Por ejemplo las dos circunferencias mostradas se llaman tangentes porque se están interceptando (no cortando) en un punto *"T"* llamado punto de tangencia o de contacto. y cuando *2* o más se cortan, se les denomina *"Secante"*.



En éste capítulo de intersecciones calcularemos el ***máximo*** y el ***mínimo*** de puntos de intersección de *2* ó más figuras geométricas.

MÁXIMO NÚMERO DE PUNTOS DE INTERSECCIÓN

Analizaremos los siguientes casos :

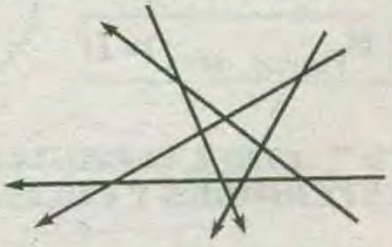
- Máximo número de puntos de intersecciones de " *n* " rectas secantes.
- Máximo número de puntos de intersecciones de " *n* " circunferencias secantes .
- Máximo número de puntos de intersecciones de" *n* " polígonos de igual número de lados.
- Máximo número de puntos de intersecciones de *2* polígonos de diferente número de lados.
- Máximo número de puntos de intersecciones de más de *2* polígonos de diferente número de lados.

Para cada uno de éstos casos , daremos las fórmulas correspondientes :

MÁXIMO NÚMERO DE PUNTOS DE INTERSECCIÓN DE "n" RECTAS SECANTES :

Este número lo obtenemos con la siguiente fórmula:

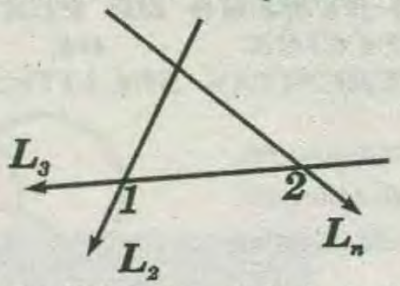
$$\#_{Max}=\frac{n(n-1)}{2}$$



DEMOSTRACIÓN :

* Cuando son *3* rectas secantes, una de ellas (L_1) origina sobre las otras 2 rectas , *2* puntos de corte.

Es decir , si son *"n"* rectas secantes , una cualquiera, origina sobre las otras *"n – 1"* puntos de corte.



* Luego , si son *"n"* rectas , habrán : $n(n-1)$ puntos de corte , o sea :

$$\#_{Total\ Puntos\ de\ corte}=\overbrace{(n-1)+(n-1)+.....+(n-1)}^{n}$$
$$=n(n-1)$$

* Ahora, nótese que cada punto de corte , por ejemplo el *(1)* se cuenta *2* veces , una para la recta (L_1) y luego por *2°* vez, cuando *se* analiza la recta (L_2), en consecuencia el *# TOTAL* de puntos de corte, dado en *(3)* es en realidad el doble del buscado.

* Finalmente, el máximo número será :

$$\#max=\frac{n(n-1)}{2}$$

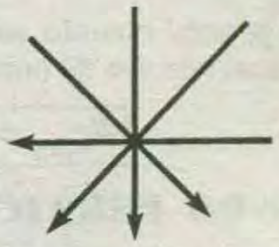
CASOS PARTICULARES :

En la intersección de rectas ,existen los siguientes casos particulares :

◆RECTAS CONCURRENTES :

Son las que pasan por un mismo punto.
Entonces , será :

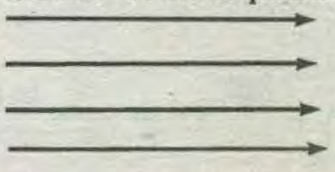
$$\#_{Puntos\ de\ corte}=1$$



◆RECTAS PARALELAS :

Las que no se cortan, pero están en el mismo plano.

$$\#_{\text{Puntos de corte}}=0$$



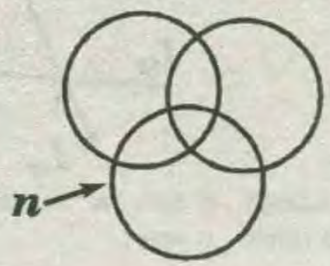
OBSERVACIÓN :

Nótese que para que se obtenga un máximo número de corte , todas las rectas deben cortarse entre sí , osea deben ser secantes , no concurrentes (cuando pasan por un mismo punto) , ni paralelas (cuando

no se cortan)

MÁXIMO NÚMERO DE PUNTOS DE INTERSECCIÓN DE "n" CIRCUNFERENCIAS SECANTES :

El número máximo en éste caso , se obtendrá con la fórmula siguiente :



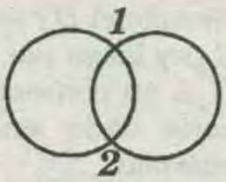
$$\#_{Max} = n(n-1)$$

Siendo : $n \Rightarrow$ el número de circunferencias.

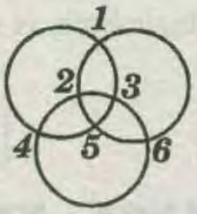
DEMOSTRACIÓN :

* Utilizando un razonamiento inductivo-deductivo :

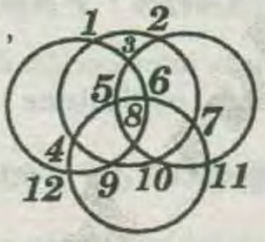
* Cuando son *2* circunferencias , el máximo número de puntos de corte es : $\#_{Max}\ 2 = 2(2-1)$



*Cuando son *3* circunferencias el máximo número de puntos de corte es : $\#_{Máx}\ 6 = 3(3-1)$



* Cuando son *4* circunferencias , el máximo número de puntos de corte : $\#_{Máx} = 12 = 4(4-1)$



*En general cuando son "*n*" circunferencias , el máximo número de puntos de corte , será :

$$\#_{Máx} = n(n-1)$$

CASOS PARTICULARES :

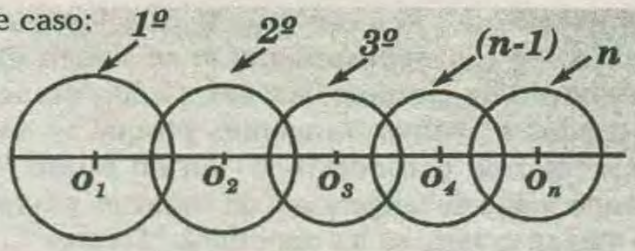
◆ CUANDO SON CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS:

Osea que tiene el mismo centro , es éste caso será :

$$\#_{Ptos.de\ corte} = 0$$

◆ CUANDO SON CIRCUNFERENCIAS COLINEALES :

Osea que sus centros de hallan en línea recta , en éste caso:

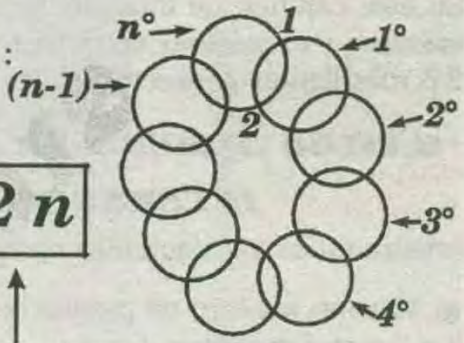


$$\#_{Puntos\ de\ corte} = 2(n-1)$$

Circunferencias

◆ CUANDO FORMAN UNA FIGURA CERRADA :

En este caso , será :



$$\#_{Total} = 2n$$

Circunferencias

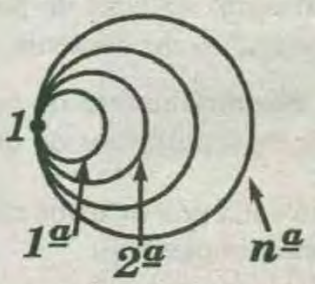
◆ CUANDO SON CIRCUNFERENCIAS TANGENTES:

Se obtienen *3* casos :

"n" CIRCUNFERENCIAS TANGENTES INTERIORES

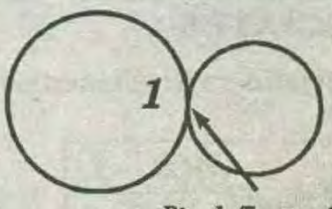
* En éste caso :

$$\#_{Puntos\ de\ \cap} = 1$$



"2" CIRCUNFERENCIAS TANGENTES EXTERIORES

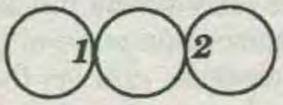
$$\#_{Puntos\ de\ \cap} = 1$$



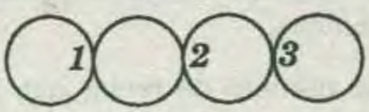
"n" CIRCUNFERENCIAS TANGENTES EXTERIORES Y COLINEALES

* Para *2* circunferencias : $\#_{Ptos.\cap} = 1 = 2-1$

* Para 3 circunferencias : $\#_{Ptos.\cap} = 2 = 3 - 1$



* Para 4 cincunferencias : $\#_{Ptos.\cap} = 3 = 4 - 1$



* Para "n" circunferecias : $\#_{Ptos.\cap} = n - 1$

MÁXIMO NÚMERO DE PUNTOS DE INTERSECCIÓN DE "n" POLIGONOS DE IGUAL NUMERO DE LADOS :

Este número máximo se obtiene con la fórmula siguiente :

$$\#_{Máx} = Ln(n-1)$$

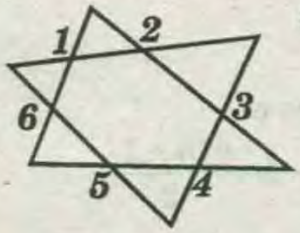
Siendo :

L : Número de lados de uno de los polígonos.

n : Número de polígonos a interceptar.

DEMOSTRACIÓN :

* Dos triángulos se cortan en 6 puntos , o sea :

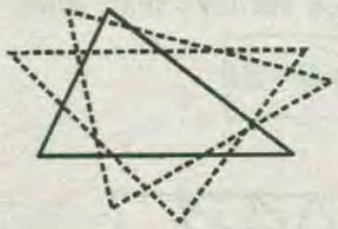


$$\#_{Máx} = 3(2)(2-1)$$

Polígonos

Lados

Tres triángulos se cortan en 18 puntos , O sea :



$$\#_{Máx} = 3(3)(3-1)$$

Polígonos

Lados

* Entonces , en general "n" polígonos convexos cada uno de "L" lados , el máximo número de puntos de corte será :

$$\#_{Máx} = Ln(n-1)$$

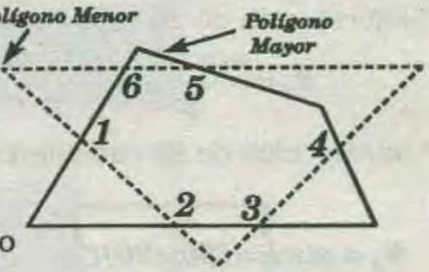
INTERSECCION DE SOLO DOS POLIGONOS DE DIFERENTE NUMERO DE LADOS :

Para interceptar sólo dos figuras diferentes se debe tener en cuenta que el máximo número de puntos de corte , es igual al doble del número de lados del polígono menor.

EJEMPLO :

Determinar el máximo número de puntos de corte de un cuadrilátero y un triángulo.

RESOLUCIÓN :



Polígono menor : Triángulo

Polígono mayor : Cuadrilátero

* Entonces :

$$\#_{Máx} = 2 \times 3$$ # lados del menor

$$\#_{Máx} = 6 \text{ puntos}$$

INTERSECCION DE MAS DE DOS POLIGONOS DE DIFERENTE NUMERO DE LADOS :

Para interceptar "n" figuras de la misma naturaleza con "m" figuras de otra especie se aplica la relación:

$$\#_{Máx} = m \times n \times k$$

Donde "k" es el máximo número de puntos de corte de solo dos de las figuras diferentes.

DEMOSTRACIÓN :

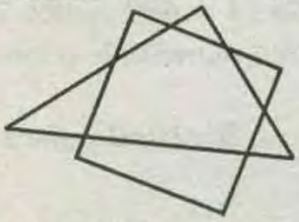
* Mediante una regla de 3 compuesta , tendremos que:

El polígono de los "n" lados corta a un polígono de los "m" en "k" puntos "n" polígonos cortarán a los "m" polígonos en $\#_{Máx}$. Despejando el máximo número de puntos de corte :

$$\#_{Máx} = mnk$$

EJEMPLO :

El número de puntos de intersección de un triángulo y un cuadrado es :



$$\# = 2(3)$$

$$\# = 6$$

EJERCICIO :

Determinar el máximo número de puntos de corte de 30 circunferencias secantes con 20 rectas

secantes.

RESOLUCIÓN:

Nótese que el problema consiste en analizar tres pasos

* Intersección de ***30*** circunferencias secantes :

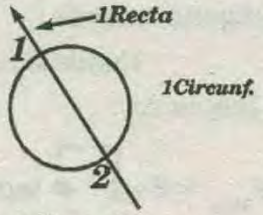
$$\#_1 = n(n-1) = 30(29) = 870 \text{ puntos}$$

* Intersección de ***20*** rectas secantes :

$$\#_2 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190 \text{ puntos}$$

* Intersección de ***30*** circunferencias y ***20*** rectas :

$$\#_2 = mnk = (30)(20)(2) = 1200 \text{ puntos}$$



* En consecuencia , el número total será :

$$\#_{Total} = 870 + 190 + 1200 = 2260 \text{ puntos}$$

NOTA :

Para ***"m"*** polígonos convexos de ***"x"*** lados con ***"n"*** polígonos convexos de ***"y"*** lados cada uno, donde $y<x$, se cumple : $(2y)mm$

EJEMPLO :

Calcular el máximo número de puntos de intersección, entre ***10*** triángulos y ***11*** circunferencias secantes.

RESOLUCIÓN :

* El método de resolución consiste en encontrar los puntos de intersección entre el grupo de figuras de la misma naturaleza , con las fórmulas dadas y luego combinar dos grupos distintos , veamos :

* Los ***10*** triángulos :

$$3n(n-1) \Rightarrow 3 \times 10(10-1) = 270 \text{ puntos}$$

* Las ***11*** circunferencias :

$$n(n-1) \Rightarrow 11(11-1) = 110 \text{ puntos}$$

* Los ***10*** triángulos y las ***11*** circunferencias :

$$(2y)mn \Rightarrow 2(3) \times 10 \times 11 = 660 \text{ puntos}$$

* La suma nos dá el máximo número de puntos de intersección :

$$S = 270 + 110 + 660 \Rightarrow S = 1040 \text{ puntos}$$

OBSERVACIONES :

Es frecuente encontrar problemas en los que los puntos de intersección lo generan varios conjuntos distintos de figuras geométricas.

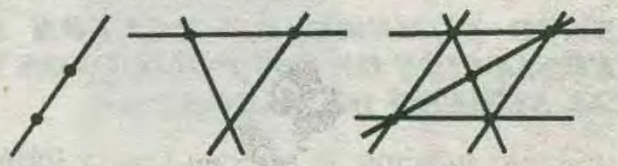
Cuadrados + Elipses + pentágonos

En estos casos se recomienda proceder a encontrar los puntos de intersección entre el grupo de figuras de la misma naturaleza, con las fórmulas dadas y luego encontrar los puntos de intersección por parejas, para luego proceder a una adición entre todas las obtenidas.

✱ El máximo número de rectas que pasan por ***N*** puntos, sabiendo que no hay ***3*** puntos alineados y que cada recta debe pasar por ***2*** puntos , esto es :

$$\frac{N(N-1)}{2}$$

DEMOSTRACIÓN :



Número de puntos	Número de rectas
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4
⋮	⋮
N	(N − 1)

La suma nos dá el máximo número de rectas

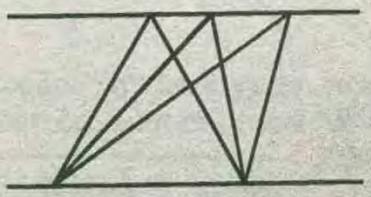
$\Rightarrow$ El máximo número de rectas es :

$$1+2+3+4+.....+n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

✱ En una recta se han tomado ***P*** puntos y en una paralela a ella , otro ***Q*** puntos. El número de triángulos que existen cuyos vértices sean éstos puntos es :

$$\boxed{N = \frac{PQ}{2}(P+Q-2)}$$

DEMOSTRACIÓN :



3+6=9 triángulos

Se pueden tomar dos vértices sobre una misma recta o sea C_2^P modos y el tercero sobre la otra C_1^Q modos. Por esto se obtienen :

$$N=C_2^P C_1^Q+C_2^Q C_1^P=\frac{P(P-1)}{1\times2}\times Q+\frac{Q(Q-1)}{1\times2}\times P$$

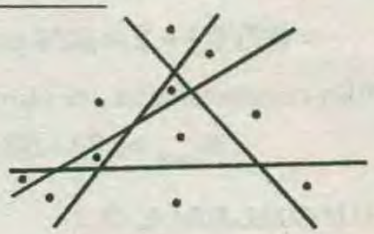
$$\Rightarrow N=\frac{PQ}{2}(P-1+Q-1)\Rightarrow N=\frac{PQ}{2}(P+Q-2)$$

✱ En un plano se trazan ℓ rectas secantes. El máximo número de partes en que queda dividido el plano es :

$$\boxed{N=\frac{\ell^2+\ell+2}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :

Número de rectas	Número de partes en que queda dividido el plano
1	1+1
2	1+1+2
3	1+1+2+3
4	1+1+2+3+4
⋮	⋮
ℓ	$1+1+2+3+4+.....+\ell$



La suma nos dá el máximo número de partes en que queda dividido el plano.

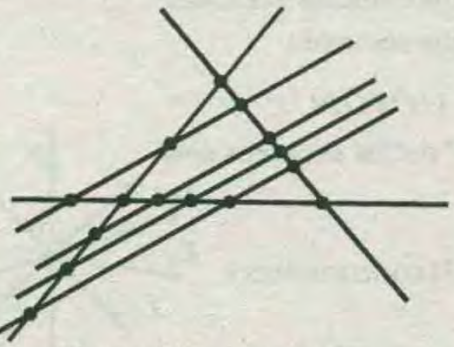
$$N=1+\underbrace{1+2+3+4+....+n}_{\ell(\ell-1)/2}$$

$$\Rightarrow N=1+\frac{\ell(\ell-1)}{2}\Rightarrow \boxed{N=\frac{\ell^2+\ell+2}{2}}$$

✱ El máximo número de puntos de intersección entre L rectas secantes y M rectas paralelas es :

$$\left[\frac{L(L-1)}{2}+LM\right]\text{puntos}$$

DEMOSTRACIÓN :



El gráfico nos dá una idea , luego :

* L rectas secantes se intersecan en $\frac{L(L-1)}{2}$ puntos

* N rectas paralelas se intersecan en 0 puntos

* L rectas secantes y M rectas paralelas se intersecan en LM puntos

⇒ El máximo número de puntos de intersección será:

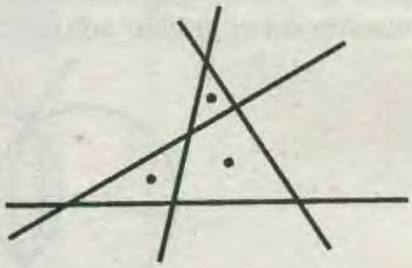
$$\left[\frac{L(L-1)}{2}+LM\right]\text{puntos}$$

✱ En un plano se dibujan ℓ rectas secantes. El máximo número de regiones poligonales consecutivos en que queda dividido dicho plano por las ℓ rectas secantes es :

$$N=\frac{(\ell-2)(\ell-1)}{2}$$

DEMOSTRACIÓN :

Rectas	Regiones
1	0
2	0
3	1
4	1+2
5	1+2+3
⋮	⋮
ℓ	$1+2+3+.....+(\ell-2)$



* La suma nos dá el máximo número de regiones que divide al plano.

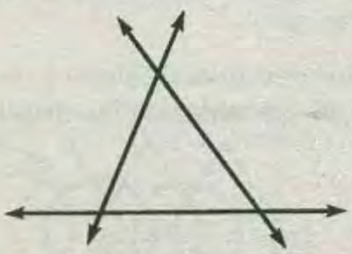
$$N=1+2+3+4+.....+(\ell-2)$$

$$\Rightarrow N=\frac{(\ell-2)(\ell-1)}{2}$$

✱ El máximo número de triángulos que se pueden determinar con ℓ rectas secantes , en los que no hay rectas concurrentes , está dado por :

$$\#\triangle=\frac{\ell(\ell-1)(\ell-2)}{6}$$

DEMOSTRACIÓN :

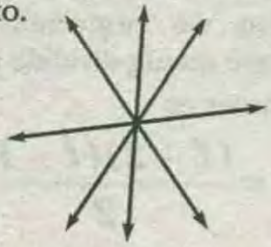


* Para determinar un triángulo es necesario que existan 3 rectas secantes. Es decir , si existen ℓ

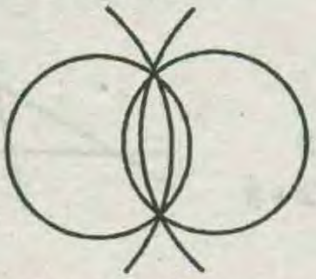
rectas secantes, el máximo número de triángulos formados será :

$$C_3^{\ell}=\frac{\ell(\ell-1)(\ell-2)}{1\times2\times3}\Rightarrow\boxed{\#\triangle=\frac{\ell(\ell-1)(\ell-2)}{6}}$$

✱ El mínimo número de puntos de intersección entre ℓ rectas secantes es **1** y esto ocurre cuando las rectas son concurrentes tal como se muestra en el gráfico adjunto.



✱ El mínimo número de puntos de intersección entre $\mathscr{C}$ circunferencias secantes es **2**, tal como se muestra en el gráfico adjunto.



✱ Si se agregan $\mathscr{L}$ rectas secantes a un grupo de ℓ rectas secantes, se puede probar que el máximo número de puntos de intersección aumentará en :

$$\boxed{\mathscr{A}=\frac{\mathscr{L}(\mathscr{L}-1)}{2}+\mathscr{L}\ell}$$

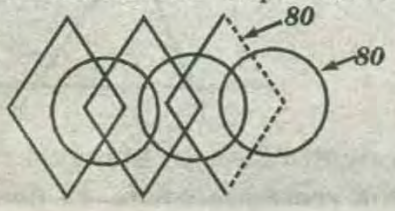
✱ Si se quitan $\mathscr{L}$ rectas secantes a un grupo de ℓ rectas secantes , entonces el máximo número de puntos de intersección disminuirá , de tal forma que el nuevo máximo número de puntos de intersección , estará dado por :

$$\boxed{\mathscr{N}=\mathscr{L}\ell-\frac{\mathscr{L}(\mathscr{L}+1)}{2}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Determinar el número total de puntos de corte de **80** cuadriláteros y **80** circunferencias dispuestas como las mostradas :



A) 698 B) 594 C) 692 D) 794

RESOLUCIÓN :

* Intersección de **80** circunferencias secantes colineales :

$$\#_1=2(n-1)=2(87)=174 \text{ puntos}$$

* Ahora , nótese que cada circunferencia encierra **6** puntos de corte con cada **2** cuadriláteros , a excepción de la última de la derecha , que sólo encierra **"2"** puntos.

* Entonces :

$$\#_2=\underbrace{6+6+.....+6}_{87}+2 \quad \text{(En la última circunferencia)}$$

$$=87(6)+2=524 \text{ puntos}$$

* En consecuencia , el número total será :

$$\#_{Total}=174+524=698 \text{ puntos}$$

RPTA :"A"

PROBLEMA 2 :

Determinar el máximo número de puntos de corte de un icoságono y una circunferencia.

A) 10 B)40 C)60 D)30

RESOLUCIÓN :

* De acuerdo a lo anterior , deducimos que el :

* Polígono menor es el icoságono (**20** lados).

* Polígono mayor es la circunferencia (∞ lados).

En consecuencia será :

$$\#_{Máx}=2\#_{Lado\ menor}=2(20)=40 \text{ puntos}$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 3 :

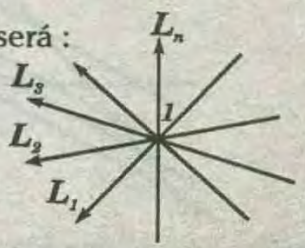
Determinar el mínimo número de puntos de intersección de :

- **"n"** rectas secantes
- **"n"** circunferencias secantes
- **"3"** planos secantes

RESOLUCIÓN :

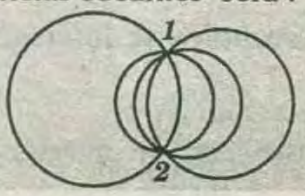
- Para **"n"** rectas secantes será :

$$\#_{Mínimo}=1 \text{ (concurrentes)}$$



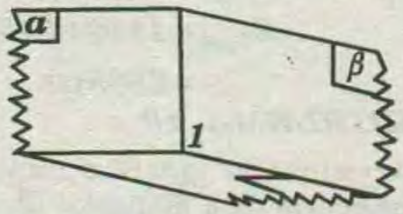
- Para **"n"** circunferencias secantes será :

$$\#_{Mínimo}=2 \text{ pts.}$$



• Para 3 planos secantes será :

$\#_{Mínimo} = 1$ pto.



PROBLEMA 4 :

Determinar el mínimo número de puntos de intersección de una circunferencia y 11 rectas secantes.

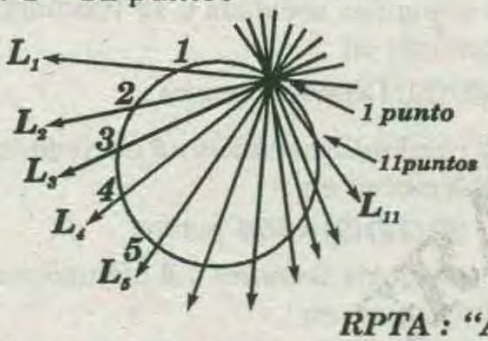
A)12 B)7 C)9 D)11 E) 13

RESOLUCIÓN :

*Como en todo problema de números mínimos se trata de obtener el menor número de puntos posible.

*Grafiquemos las 11 rectas como concurrentes (secantes) y que pasan por un mismo punto de la circunferencia. En consecuencia ,el número total será:

$\#_{Total} = 11 + 1 = 12$ puntos



RPTA : "A"

PROBLEMA 5 :

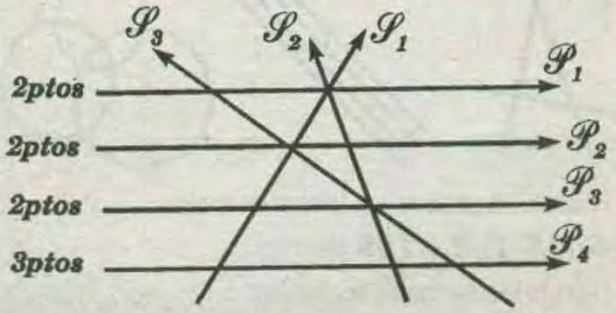
Determinar el mínimo número de puntos de corte de 4 rectas paralelas que son cortadas por 3 rectas secantes

A) 3 B) 6 C) 8 D)9

RESOLUCIÓN :

* Como se debe obtener el menor número posible, grafiquemos de modo que las rectas secantes se ubiquen de la siguiente manera , En consecuencia, el número total es :

$\#_{Mínimo} = 2+2+2+3 = 9$ pts.



RPTA :"D"

PROBLEMA 6 :

Determinar el máximo número de puntos de corte para "n" cuadriláteros cóncavos y "n" triángulos.

RESOLUCIÓN :

* Intersección de "n" cuadriláteros cóncavos :

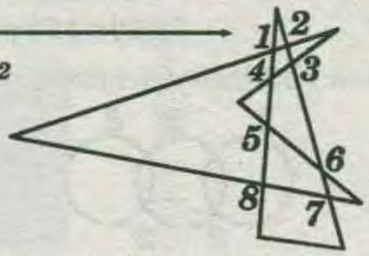
$$\#_1 = 8n(n-1)$$

* Intersección de "n" triángulos :

$$\#_2 = 3.n(n-1)$$

* Intersección de "n" cuadriláteros y "n" triángulos :

$(n)(n)(8) = 8n^2$



En consecuencia será :

$$\#_{Total} = 8n(n-1)+3n(n-1)+8n^2 = n(19n-11)$$

PROBLEMA 7 :

Determinar el máximo número de puntos de intersección entre 3 cuadrados , 5 circunferencias y 6 triángulos secantes.

RESOLUCIÓN :

* $3\square : 4n(n-1)$

$\Rightarrow 4(3)(3-1) = 12(2) = 24$ puntos

* $5\odot : n(n-1)$

$\Rightarrow 5(5-1) = 5(4) = 20$ puntos

* $6\triangle : 3n(n-1)$

$\Rightarrow 3(6)(6-1) = 18(5) = 90$ puntos

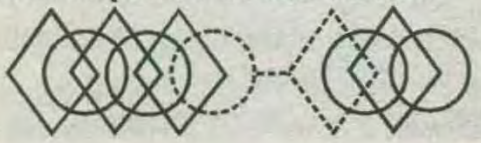
* $3\square$ y $5\odot$: $8(3)(5) = 120$ puntos
* $3\square$ y $6\triangle$: $6(3)(6) = 108$ puntos
* $3\square$ y $6\triangle$: $6(5)(6) = 180$ puntos

* La suma nos da el máximo número de puntos de intersección :

$S = 24+20+90+120+108+180 = 542$ puntos

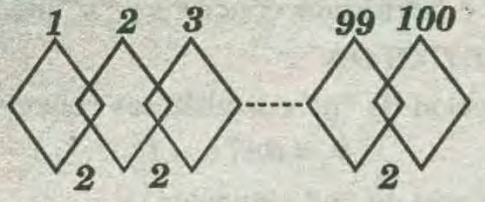
PROBLEMA 8 :

Se tienen 100 circunferencias y 100 rombos dispuestos como se muestra en la figura. Hallar el número total de puntos de intersección.



RESOLUCIÓN :

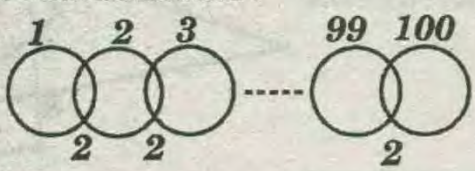
* Para **100** rombos :



$$\underbrace{2+2+2+.....+2+2}_{99 \text{ sumandos}}$$

$$2(99)=198 \text{ puntos}$$

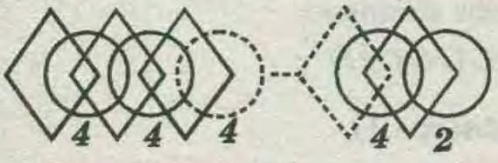
* Para **100** circunferencias :



$$\underbrace{2+2+2+.....+2}_{99 \text{ sumandos}}$$

$$2(99)=198 \text{ puntos}$$

* Para **100** rombos y **100** circunferencias :



$$\underbrace{4+4+4+.....+4+2}_{99 \text{ sumandos}}$$

$$4(99)+2=396+2=398 \text{ puntos}$$

* La suma nos dá el máximo número de puntos de intersección.

$$S=198+198+398 \Rightarrow S=794 \text{ puntos.}$$

PROBLEMA 9 :

Determinar el máximo número de puntos de corte de **20** triángulos y **10** exágonos convexos.

A) 1880 B) 2880 C) 3880
D) 4880 E) 5880

RESOLUCIÓN :

* Intersección de **20** triángulos :

$$\#_1=3(20)(19)=1140 \text{ pts}$$

* Intersección de **10** exágonos :

$$\#_2=6(10)(9)=540 \text{ pts}$$

* Intersección de **20** triángulos y **10** exágonos :

$$\#_3=m.n.k=(20)(10)(6)$$

Doble del número de lados del menor

$$=1200 \text{ pts}$$

* En consecuencia :

$$\#_{Total}=1140+540+1200$$

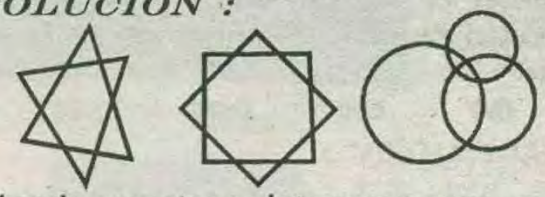
$$=2880 \text{ pts.}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

Determinar el máximo número de puntos de intersección de **6** triángulos secantes, **12** cuadrados y **9** circunferencias secantes.

RESOLUCIÓN :



* **6** triángulo secantes se intersecan en :

$$(3)(6)(6-1)=90 \text{ puntos}$$

* **12** cuadrados secantes se intersecan en :

$$(4)(12)(12-1)=528 \text{ puntos}$$

* **9** circunferencias secantes se intersecan en :

$$(9)(9-1)=72 \text{ puntos}$$

* **6** triángulos secantes y **12** cuadrados secantes se intersecan en :

$$(6)(6)(12)=432 \text{ puntos}$$

* **12** cuadrados secantes y **9** circunferencias secantes se intersecan en :

$$(8)(12)(9)=864 \text{ puntos}$$

* **6** triángulos secantes y **9** circunferencias secantes se intersecan en :

$$(6)(6)(9)=324 \text{ puntos}$$

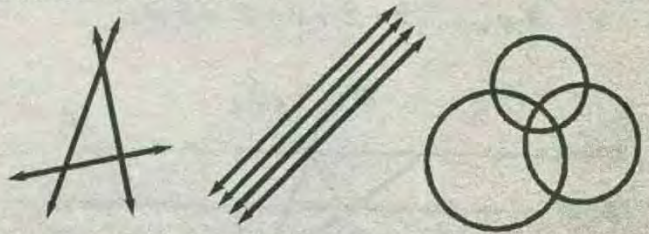
*El máximo número de puntos de intersección será : $N=90+528+72+432+864+324$

$$\Rightarrow N=2310 \text{ puntos}$$

PROBLEMA 11 :

Determinar el máximo número de puntos de intersección entre **15** rectas secantes ,**13** paralelas y **45** circunferencias secantes.

RESOLUCIÓN :



* **15** rectas secantes se intersecan en :

$$(15)(15-1)/2=105 \text{ puntos}$$

* **13** paralelas se intersecan en :

$$0 \text{ puntos}$$

* 45 circunferencias secantes se intersecan en :
$(45)(45-1)=1980$ puntos

* 15 rectas secantes y 13 rectas paralelas se intersecan en : $15)(13)=195$ puntos

* 13 rectas paralelas y 45 circunferencias secantes se intersecan en : $2(13)(45)=1\,170$ puntos

* 15 rectas secantes y 45 circunferenciás secantes se intersecan en: $2(15)(45)=1\,350$ puntos

* El máximo número de puntos de intersección será :

$$N=105+1980+195+1\,170+1350$$
$$\Rightarrow N=4\,800 \text{ puntos}$$

PROBLEMA 12 :

Determinar el máximo número de puntos de corte de 30 icoságonos (30 lados) convexos.

A) 270600 puntos B) 26100 C)76001 D)90001

RESOLUCIÓN :

* Como son polígonos , aplicamos : $\#_{Máx}=Ln(n-1)$

* Como : $L=30$ tendremos que : $\#_{Máx}=(30)(30)(30-1)$
$=26100$

RPTA : "B"

PROBLEMA 13 :

Al interceptar 30 polígonos se obtienen 4350 puntos como máximo. ¿Qué polígonos se interceptaron?

A)Triángulos B)Cuadriláteros C)Pentágonos D) Exágonos

RESOLUCIÓN :

*Como son polígonos , aplicamos : $\#_{Máx}=Ln(n-1)$

* Donde, debemos hallar "L", siendo : $n=30$

* Entonces : $4350=L(30)(3-1)$

* De donde : $L=5$(Pentágono)

RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

Al interceptar "2n" polígonos de 12 lados se obtiene un máximo número de puntos de corte igual a 9 veces el número que se obtendría al interceptar "n" polígonos de 6 lados. Calcular "n" .

A)7 B)5 C)5 D)9

RESOLUCIÓN :

* Intersección de los "2n" polígonos de 12 lados :

$$\mathscr{C}_1=(12)(2n)(2n-1)$$

* Intersección de los "n" polígonos de 6 lados :

$$\mathscr{C}_2=(6)(n)(n-1)$$

* Luego , por condición sabemos que : $\mathscr{C}_1=9\mathscr{C}_2$

$$\Rightarrow 12(2n)(2n-1)=9\,[(6)(n)(n-1)]$$

* De donde, se obtiene : $n=5$

RPTA : "C"

PROBLEMA 15 :

Al interceptar 10 polígonos de igual número de lados, se obtienen 450 puntos de corte como máximo. ¿Qué polígonos son?

RESOLUCIÓN :

* En este caso conocemos : $n=10$ polígonos

* Luego : $\#_{Máx}=450$ puntos

$$450=L(10)(10-1)$$
$$L=5\,(\text{Pentágono})$$

PROBLEMA 16 :

¿Qué polígonos debemos interceptar, si queremos que con 40 de ellos se obtengan 4800 puntos de corte como máximo considerando los vértices?

A)Exágonos B)Cuadriláteros C)Pentágono D)Triángulo

RESOLUCIÓN :

* Sin considerar los vértices , el máximo número de puntos de corte es : $\mathscr{C}_1=L\,(40)\,(40-1)$

* Considerando los vértices , el máximo número de puntos de corte será :

$$\mathscr{C}_2=L\,(40)\,(40-1)+\overbrace{\underbrace{L+L+.....+L}}^{\#\text{ de vertices}}$$
$$\text{40 de veces}$$

* Osea : $\mathscr{C}_2=L(40)(40-1)+40L$

* Luego : $4800=L\,(40)(40-1)+40L$

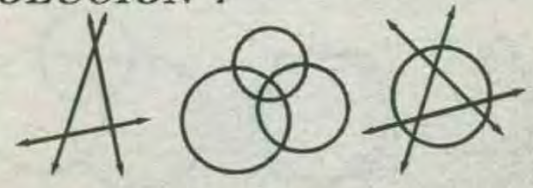
* De donde : $L=3$

RPTA : "D"

PROBLEMA 17 :

Si el máximo número de puntos de intersección entre "n" rectas secantes más el máximo número de puntos de intersección . entre "n" circunferencias secantes es igual a 1 890. Calcular el máximo número de puntos de intersección entre "n" cuadriláteros convexos secantes.

RESOLUCIÓN :



* n rectas secantes se intersecan en : $n(n-1)/2$
* n circunferencias secantes se intersecan en : $n(n-1)$
* Por dato : $\frac{n(n-1)}{2}+n(n-1)=1890$

$$\Rightarrow n(n-1)=36(36-1)\Rightarrow n=36$$

* n cuadriláteros convexos secantes se intersecan en : $4n(n-1)$
* El máximo número de puntos de intersección será : $5\,040$ puntos

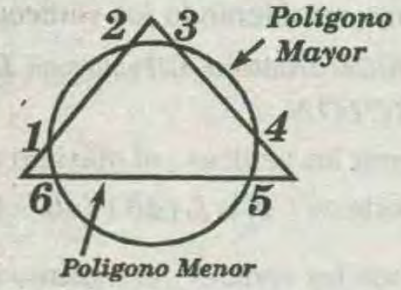
PROBLEMA 18 :

Determinar el máximo número de puntos de corte de una circunferencia y un triángulo.

A)3 B)6 C)9 D) ∞

RESOLUCIÓN :

* Siempre se considera a la circunferencia como el polígono de máximo número de lados : ∞
* En consecuencia , el polígono menor siempre será el otro, en éste caso el triángulo.



* Luego el máximo número de puntos de corte será :

$$\#_{\text{Máx}}=2\#_{\text{Lados del menor}}=2(3)=6 \text{ puntos}$$

RPTA :"B"

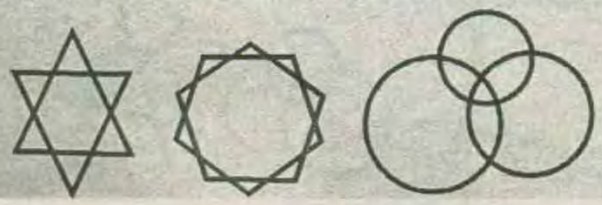
PROBLEMA 19 :

Si la suma al cuadrado del máximo número de puntos de intersección entre "t" triángulos secantes , "t" pentágonos convexos secantes y "t" circunferencias secantes es igual a 21384 veces el máximo número de puntos de intersección de "t" rectas secantes. Calcule "t".

A) 100 B) 10 C) 12 D) 22

RESOLUCIÓN :

* t triángulos secantes se intersecan en : $3t(t-1)$
* t pentágonos secantes se intersecan en : $5t(t-1)$
* t circunferencias secantes se intersecan en : $t(t-1)$



* Por dato :

$$(3t(t-1)+5t(t-1)+t(t-1))^2=21384\,t(t-1)/2$$
$$\Rightarrow (9t^2-9t)^2=10692\,t(t-1)\Rightarrow 81t^2(t-1)^2=10292\,t(t-1)$$
$$\Rightarrow 81t(t-1)=10692\Rightarrow t(t-1)=132\Rightarrow t(t-1)=12(12-1)$$
$$\Rightarrow t=12$$

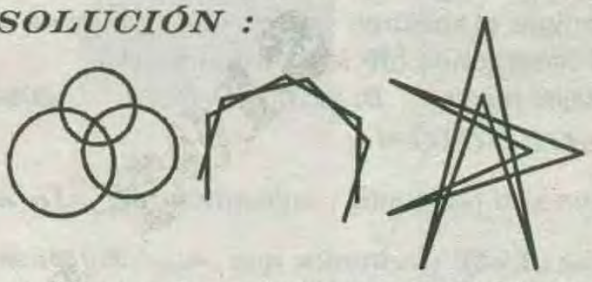
RPTA : "C"

PROBLEMA 20 :

Si el máximo número de puntos de intersección entre n polígonos de n lados secantes es igual a 3 veces el máximo número de puntos de intersección de n circunferencias secantes. Calcular el máximo número de puntos de intersección de n cuadriláteros secantes no convexos.

A) 62 B) 48 C) 71 D) 80

RESOLUCIÓN :



* n polígonos de n lados secantes se intersecan en : $n\,n(n-1)=n^2(n-1)$
* n circunferencias secantes se intersecan en :

$$n(n-1)$$

* n cuadriláteros secantes no convexos se intersecan en : $8\,n(n-1)$
* Por dato :

$$n^2(n-1)=3n(n-1)\Rightarrow n(n-1)=3(n-1)\Rightarrow n=3$$

* El máximo número de puntos de intersección de n cuadriláteros secantes no convexos será :

$$8\times 3(3-1)=48 \text{ puntos}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 21 :

Determinar el máximo número de puntos de corte de 10 dodecágonos (12 lados) y 20 nonágonos (9 lados).

A) 8100 B) 9100 C) 8200 D) 6100

RESOLUCIÓN:

* Intersección de 10 dodecágonos secantes :

$$\mathscr{C}_1=Ln(n-1)=(12)(10)(9)=1080$$

* Intersección de 20 nonágonos secantes :

$$\mathscr{C}_2=Ln(n-1)=(9)(20)(19)=3420$$

* Intersección de 10 dodecágonos y 20 nonágonos:

$$\mathscr{C}_3=mnk=(10)(20)(18)=3600$$

En consecuencia , el número total será :

$\mathscr{C}_{Total} = 8100$ puntos

RPTA : "A"

PROBLEMA 22 :

Determinar el máximo número de corte de **20** triángulos secantes con **10** cuadriláteros secantes.

RESOLUCIÓN :

* Para **20** triángulos secantes :

$\mathscr{C}_1 = Ln\,(n-1) = 3\times 20\times 19 = 1140$ puntos

* Para **10** cuadriláteros secantes :

$\mathscr{C}_2 = Ln\,(n-1) = 4\times 10\times 9 = 360$ puntos

* Para **20** triángulos y **10** cuadriláteros :

$\mathscr{C}_3 = mnk = 20\times 10\times 6 = 1200$ puntos

$\Rightarrow \mathscr{C}_{Total} = 2700$ puntos

PROBLEMA 23 :

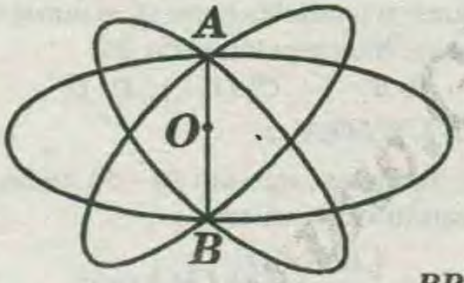
El mínimo número de puntos de intersección **"n"** circunferencias secantes no coplanares es :

A)0 B) 1 C)2 D) ∞

RESOLUCIÓN :

* No coplanares , significa en diferentes planos.

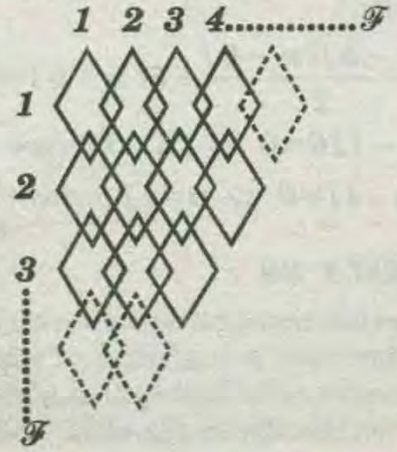
* Como se puede observar las **"n"** circunferencias sólo tendrán **2** puntos en común :



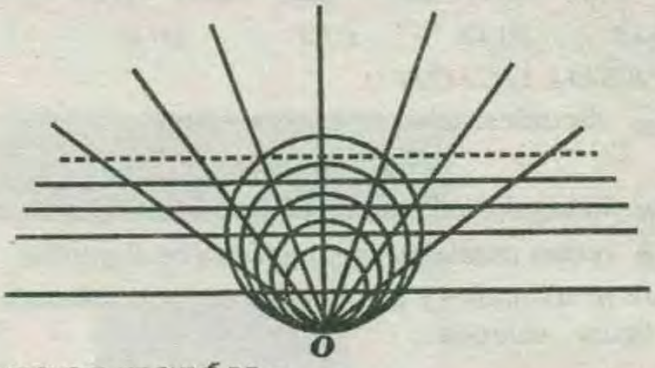
RPTA :"C"

PROBLEMA 24 :

I) En el gráfico mostrado se tiene $\mathscr{F}$ filas y $\mathscr{F}$ columnas de rombos tal como indica el gráfico . Determinar el número total de puntos de intersección.



II) En la figura mostrada , calcular el número total de puntos de intersección , sabiendo que existe $\mathscr{C}$ circunferencias tangentes interiormente , o rectas paralelas y $\mathscr{C}$ rectas divergentes en el punto **O**.



RESOLUCIÓN :

I) Sabemos que :

n rombos se intersecan en : $2(n-1)$ puntos

* Ahora analizamos el gráfico :

$\mathscr{F}$ rombos (primera fila) multiplicado por $2(\mathscr{F}-1)$ puntos de intersección (última columna) será :

$$2\mathscr{F}(\mathscr{F}-1) \text{ puntos}$$

$\mathscr{F}$ rombos (primera columna) multiplicado por $2(\mathscr{F}-1)$ puntos de intersección (última fila) será :

$$2\mathscr{F}(\mathscr{F}-1) \text{ puntos}$$

$\Rightarrow$ El número total de puntos de intersección será :

$$2\mathscr{F}(\mathscr{F}-1) + 2\mathscr{F}(\mathscr{F}-1) = 4\mathscr{F}(\mathscr{F}-1)$$

II) $\mathscr{C}$ circunferencias se intersecan en : **1** punto

$\mathscr{C}$ rectas paralelas se intersecan en : **0** puntos

$\mathscr{C}$ rectas divergentes se intersecan en : **1** punto

$\mathscr{C}$ circunferencias tangentes interiores y $\mathscr{C}$ rectas paralelas se intersecan en : $\mathscr{C}(\mathscr{C}+1)$ puntos

$\mathscr{C}$ rectas paralelas y $\mathscr{C}$ rectas divergentes se intersecan en : $\mathscr{C}\times\mathscr{C} = \mathscr{C}^2$ puntos

$\mathscr{C}$ circunferencias tangentes interiores y $\mathscr{C}$ rectas divergentes se intersecan en : $\mathscr{C}\times\mathscr{C} = \mathscr{C}^2$ puntos

Número total de puntos de intersección será :

$$N = 1 + \mathscr{C}(\mathscr{C}+1) + \mathscr{C}^2 + \mathscr{C}^2 \Rightarrow N = 3\mathscr{C}^2 + \mathscr{C} + 1$$

PROBLEMA 25 :

En la figura mostrada existen u triángulos u circunferencias y u rectas paralelas dispuestas tal como indica la figura , si el número total de puntos de intersección es $(55u+6)$. Determinar u .

A) 12 B) 18 C) 7 D) 8

RESOLUCIÓN :

* u circunferencias se intersecan en :

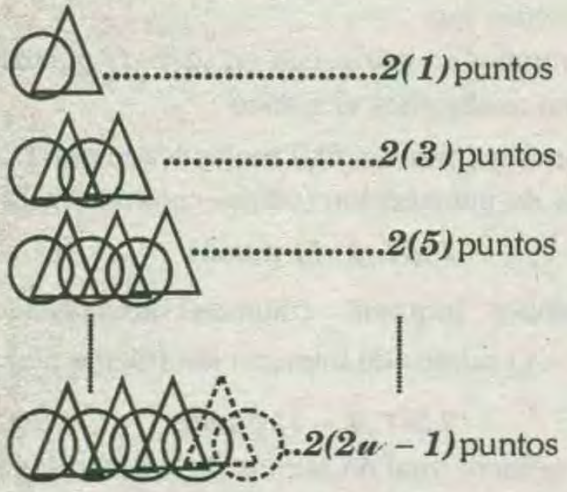
$2(u-1)$ puntos

* u triángulos se intersecan en : $2(u-1)$ puntos

* u rectas paralelas se intersecan en 0 puntos.

Para u triángulos y u circunferencias analizaremos la figura , veamos :

* Entonces :



* u triángulos y u circunferencias se intersecan en : $2(2u-1)$ puntos

* u triángulos y u rectas paralelas se intersecan en : $2u^2$ puntos

* u circunferencias y u rectas paralelas se intersecan en : $2u^2$ puntos

* El máximo número de puntos de intersección será :

$$2(u-1)+2(u-1)+2(2u-1)+2u^2+2u^2$$
$$=4u^2+8u-6$$

* Por dato : $4u^2+8u-6=55u+6$

$$4u^2-47u-12=0$$

$4u \rightarrow +1$

$u \rightarrow -12$

$$(4u+1)(u-12)=0 \Rightarrow (u-12)=0 \Rightarrow u=12$$

RPTA : "A"

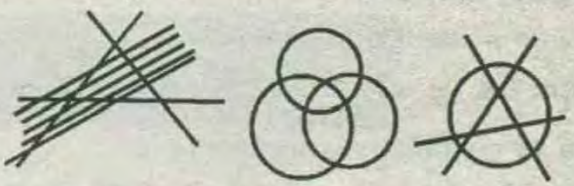
PROBLEMA 26 :

Determinar el máximo número de puntos de intersección entre 7 rectas secantes , 9 rectas paralelas y 11 circunferencias secantes.

RESOLUCIÓN :

* El máximo número de puntos de intersección entre 7 rectas secantes y 9 rectas paralelas es :

$$\frac{7(7-1)}{2}+7(9)=84 \text{ puntos}$$



* 11 circunferencias secantes se intersecan en $(11)(10)=110$ puntos

* 7 rectas secantes y 11 circunferencias secantes se intersecan en : $2(7)(11)=154$ puntos

* 9 rectas paralelas y 11 circunferencias secantes se intersecan en : $2(9)(11)=198$ puntos

* La suma nos da el máximo número de puntos de intersección.

$$S=84+110+154+198 \Rightarrow S=546 \text{ puntos}$$

PROBLEMA 27 :

En un plano hay n rectas que se intersecan entre sí, decir el valor de n sabiendo que si de éste grupo de rectas 5 fuesen paralelas entre sí, el número máximo de puntos de intersección sería 45.

A) 75 B) 5 C) 11 D) 15

RESOLUCIÓN :

* Si 5 son paralelas , quedan $(n-5)$ rectas secantes, reemplazando estos valores :

$$\left[\frac{L(L-1)}{2}+LM\right] \text{puntos}$$

* Donde : $L=n-5$ y $M=5$

$$\frac{(n-5)(n-6)}{2}+5(n-5)$$

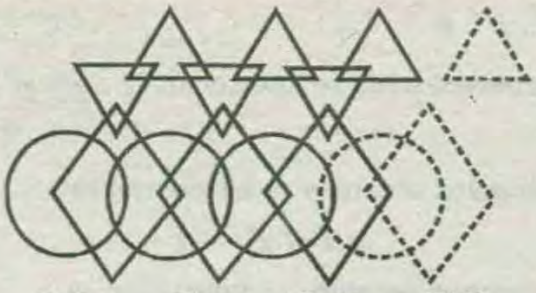
* Por condición :

$$\frac{(n-5)(n-6)}{2}+5(n-5)=45$$
$$n^2-n-110=0 \Rightarrow (n-11)(n+10)=0$$
$$\Rightarrow n-11=0 \Rightarrow n=11 \text{ rectas}$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 28 :

Determinar el número total de puntos de intersección de p circunferencias, p cuadriláteros y $2p$ triángulos, como se muestra en la figura , si el número total de puntos de intersección es $(4p+92)$. Calcular p.



A)6 B)8 C)10 D)11 E)12

RESOLUCIÓN :

* p circunferencias de intersecan en : $2(p-1)$ puntos

* p cuadriláteros se intersecan en : $2(p-1)$ puntos

* $2p$ triángulos se intersecan en : $2(2p-1)$ puntos

* n circunferencias y n cuadriláteros se intersecan en : $2(2p-1)$ puntos

* p cuadriláteros y p triángulos se intersecan en :

$$2(2p-1)+2 \text{ puntos}$$

* p cirunferencias y p triángulos se intersecan en:

0 puntos

El número total de puntos de intersección será :

$$2(p-1)+2(p-1)+2(2p-1)+2(2p-1)+2(p-1)+2=14p-8$$

* Por dato :

$$14p-8=4p+92 \Rightarrow 10p=100 \Rightarrow p=10$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 29 :

Determinar el máximo número de puntos de corte de 10 rectas secantes con 15 circunferencias secantes y 5 exágonos secantes.

A) 1375 B)1475 C) 1675 D) 1615

RESOLUCIÓN :

* Intersección de 10 rectas secantes :

$$\mathscr{C}_1=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{10(9)}{2}=45$$

* Intersección de 15 circunferencias secantes :

$$\mathscr{C}_2=n(n-1)=15(14)=210$$

* Intersección de 5 exágenos secantes :

$$\mathscr{C}_3=L(n)(n-1)=(6)(5)(4)=120$$

* Intersección de 10 rectas y 15 circunferencias :

$$\mathscr{C}_1=mnk=(10)(15)(2)=300$$

* Intersección de 10 rectas y 5 exágonos :

$$\mathscr{C}_5=m\times n\times k=(10)(5)(2)=100$$

* Intersección de 15 circunferencias y 5 exágonos:

$$\mathscr{C}_6=mnk=(15)(5)(12)=900$$

* En consecuencia , el número total será :

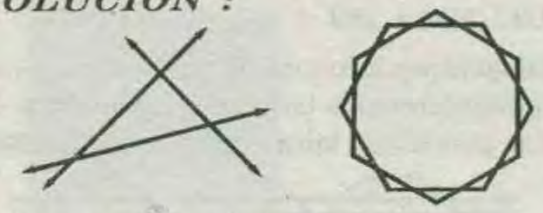
$$\mathscr{C}_{Total}=45+210+120+300+100+900=1675 \text{ pts}$$

PROBLEMA 30 :

Si el máximo número de puntos de intersección entre n rectas secantes se le aumenta 16 puntos , equivale al número de rectas elevado al cuadrado aumentándole uno Determinar el máximo número de puntos de intersección de n hexágonos convexos secantes.

A)50 B) 120 C) 152 D)20

RESOLUCIÓN :



* n rectas secantes se intersecan en :

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

* n hexágonos secantes se intersecan en : $6n(n-1)$

* Por Dato : $\frac{n(n-1)}{2}+16+n^2+1$

$$n(n-1)+30=2n^2 \Rightarrow 30=n(n+1)$$

$$\Rightarrow 5(5+1)=n(n+1) \Rightarrow n=5$$

* El máximo número de puntos de intersección de n hexágonos secantes será :

$$6\times 5(5-1)=120 \text{ puntos}$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 31 :

¿Cuántas circunferencias debemos interceptar para obtener 90 puntos de intersección?

A)10 B) 12 C) 15 D)20

RESOLUCIÓN :

* En este caso :

$\#_{Máx}=90$ puntos, entonces : $90=n(n-1)$

* Descomponiendo el 1° miembro : $10\times 9=n(n-1)$

* Identificando , se deduce que: $n=10$

RPTA : "A"

PROBLEMA 32 :

Si a "c" circunferencias secantes, le restamos una, el máximo número de puntos de corte disminuye en 18. Determinar "c":

A)5 B) 30 C) 15 D)10

RESOLUCIÓN :

* Cuando varía el número de figuras, se utiliza el siguiente cuadro :

#Cirunf.	#Máx. Ptos. corte
c	$c(c-1)$
$(c-1)$	$(c-1)(c-1-1)$

DISMINUYE

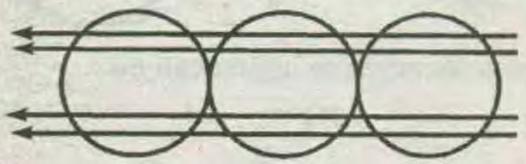
* Luego , por condición : $(c-1)(c-1-1)=c(c-1)-18$

$$\Rightarrow (n-1)(n-2)=n(n-1)-18$$
$$\Rightarrow 18=(c-1)[c-(c-2)]$$
$$\Rightarrow c=10$$

RPTA :"D"

PROBLEMA 33 :

Determinar el número total de puntos de intersección de *20* circunferencias tangentes exteriores *2* a *2* y *15* rectas paralelas , tales como las mostradas.



A)619 B)219 C)919 D)719

RESOLUCIÓN :

* Intersección de *20* circunferencias tangentes :

$$\mathscr{C}_1=n-1=20-1=19$$

* Intersección de *20* circunferencias y *15* rectas paralelas :

1 paralela corta a *20* circunferencias en *40* puntos.

15 paralelas cortarán a *20* circunf. en $\mathscr{C}_2$ pts .

* Entonces :

$$\mathscr{C}_2=\frac{(15)(20)(40)}{1\times 20}=600 \text{ puntos}$$

* En consecuencia :

$$\mathscr{C}_{Total}=19+600=619 \text{ puntos}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 34 :

Si el máximo número de puntos de intersección de p polígonos convexos secantes de ℓ lados es igual al número de vértices de dicho polígono aumentado en *20* ; además la suma del número de lados y el número de vértices es igual a los ocho tercios del máximo número de puntos de intersección de p rectas secantes.Calcular el máximo número de puntos de intersección de ℓ triángulos secantes más p pentágonos convexos secantes.

A)66 B)99 C)92 D)71

RESOLUCIÓN :

* p polígonos secantes de ℓ lados se intersecan en : $\ell\ p(p-1)$

* p rectas secantes se intersecan en : $\frac{p(p-1)}{2}$

ℓ triángulos secantes se intersecan en:

$$3\ell\ (\ell-1)$$

p pentágonos secantes se intersecan en :

$$5\,p(p-1)$$

Por dato :

$$\ell\,p(p-1)=\ell+20 \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$
$$\ell+\ell=\frac{8}{3}\times\frac{p(p-1)}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

* Se pide : $3\ell(\ell-1)+5\,p(p-1)$ .....*(iii)*

* De *(i)* y *(ii)* : $\ell=4$ y $p=3$

* Luego reemplazando en *(iii)* :

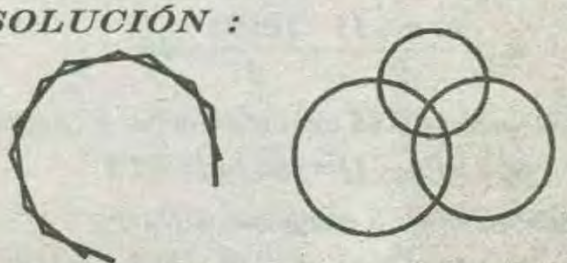
$$3\times 4(4-1)+5\times 3(3-1)=66 \text{ puntos}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 35 :

Si el máximo número de puntos de intersección de p polígonos convexos secantes de n lados es igual al máximo número de puntos de intersección de p circunferencias secantes aumentado en k. Calcular el máximo número de puntos de intersección de n polígonos convexos secantes de p lados, si $p+n=24$ y k es el máximo número de puntos de intersección de *11* dodecágonos convexos secantes.

RESOLUCIÓN :



* p polígonos secantes de n lados se intersecan en :

$$np(p-1)$$

* p circunferencias secantes se intersecan en :

$$p(p-1)$$

* n polígonos secantes de p lados de intersecan en :

$$pn(n-1)$$

* *11* dodecágonos secantes se intersecan en :

$$k=12\times11(11-1) \Rightarrow k=1320$$

* Por dato :

$$np(p-1)=p(p-1)+k \quad .....(i)$$

* Además : $p+n=24$ .....*(ii)*

* Resolviendo el sistema de ecuaciones *(i)* y *(ii)* tenemos : $p=11$ y $n=13$

* Nos piden calcular : $pn(n-1)=11\times13(13-1)$

* El máximo número de puntos de intersección de *n* polígonos secantes de *p* lados será :

$$11\times13(13-1)=1\,716 \text{ puntos}$$

PROBLEMA 36 :

Determinar el número total de puntos de intersección de *100* circunferencias concéntricas y *10* secantes que pasan por el centro.

A)1701 B)2001 C)19001 D)2002

RESOLUCIÓN :

* Intersección de *100* circunferencias :

$$\mathscr{C}_1=0 \text{ (concéntricas)}$$

* Intersección de *10* rectas secantes : $\mathscr{C}_2=1$ pto.

* Intersección de *100* circunferencias y *10* rectas :

1 recta corta a *1* circunf. en *2* pts .

10 rectas cortarán a *100* circunf. en $\mathscr{C}_3$ pts .

* De donde :

$$\mathscr{C}_3=10\times100\times2=2000$$

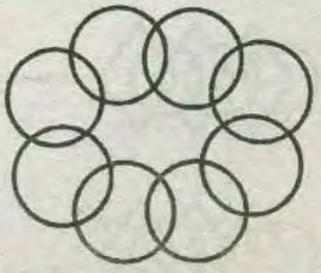
* En consecuencia , el número total será :

$$\mathscr{C}_{Total}=0+1+2000=2001 \text{ pts}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 37 :

Hallar el número total de puntos de intersección de $\mathscr{C}$ circunferencia ubicada como las mostradas :



A) $\mathscr{C}$ *B)2* $\mathscr{C}$ *C)* $\mathscr{C}^2$ *D)2* $\mathscr{C}^2$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando la fórmula adecuada : $2\,\mathscr{C}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 38 :

Determinar el mínimo número de puntos de intersección de : *1* circunferencia , *4* rectas secantes ,*4* rectas paralelas.

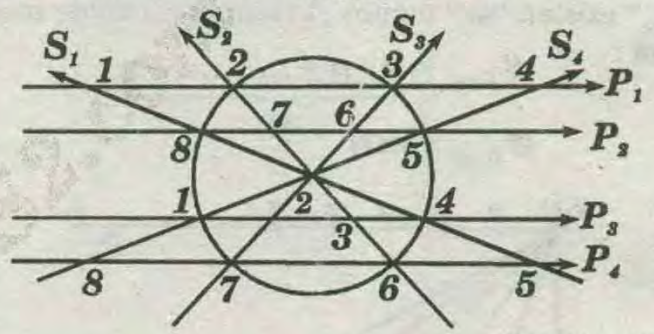
A)12 B) 13 C)15 D)17

RESOLUCIÓN :

*En todo problema de números mínimos, se trata de obtener el menor número de puntos de corte.

*Respetando las condiciones del problema, gráficamos entonces las *4* secantes $(S_1; S_2; S_3 \text{ y } S_4)$ con las *4* paralelas $(P_1, P_2, P_3 \text{ y } P_4)$.

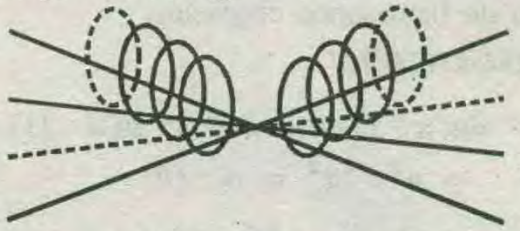
* Se obtienen entonces : $\mathscr{C}_{Mínimo}=8+1+8=17$ pts.



RPTA : "D"

PROBLEMA 39 :

En la figura mostrada se tiene $\mathscr{L}$ rectas concurrentes, $\mathscr{L}$ elipses en el lado izquierdo y $\mathscr{L}$ elipses en el lado derecho tal como indica la figura, si el número total de puntos de intersección es $(35\,\mathscr{L}+12)$. Calcular $\mathscr{L}$.



A)12 B) 13 C)15 D)17

RESOLUCIÓN :

* $\mathscr{L}$ elipses se intersecan en : $2(\mathscr{L}-1)$ puntos

$\mathscr{L}$ rectas concurrentes se intersecan en : *(1)* punto

* De la figura :

1 recta interseca a $(\mathscr{L}+1)$ elipses.

Entonces : $\mathscr{L}$ rectas intersecan a $(\mathscr{L}+1)$ elipses en $\mathscr{L}(\mathscr{L}+1)$ puntos.

* Luego por dato :

$$1+4(\mathscr{S}-1)+2\mathscr{S}(\mathscr{S}+1)=35\mathscr{S}+12$$

$$2\mathscr{S}^2-29\mathscr{S}-15=0$$

$2\mathscr{S}$ — 1

$\mathscr{S}$ — -15

$$(2\mathscr{S}+1)(\mathscr{S}-15)=0 \Rightarrow \mathscr{S}=15$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 40 :

Sobre las rectas paralelas L_1 y L_2, tomamos **"m"** y **"n"** puntos respectivamente, determinar el máximo número de rectas que pasan por los **"m"** y **"n"** puntos simultáneamente.

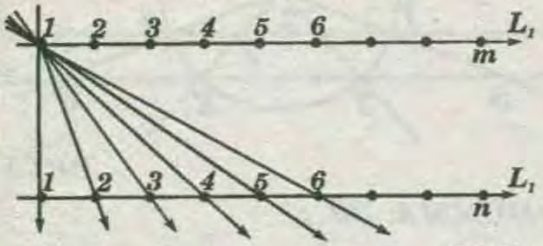
A) mn **B) 2 mn** **C) 8mn** **D)** $\frac{mn}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Si combinamos el punto **"I"** de L_1 con los **"n"** puntos de L_2 obtendremos : **"n"** o rectas . como en **"L_2"** existen **"m"** puntos , el número total de rectas será :

$$\#_{Total}=\underbrace{n+n+.....+n}_{m}$$

$$\#_{Total}=mn$$



RPTA : "A"

PROBLEMA 41 :

Si el máximo número de puntos de intersección que existe entre n hexágonos convexos secantes, considerando sus vértices es 600 puntos. Calcular el número de hexágonos convexos.

RESOLUCIÓN :

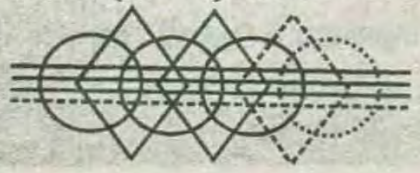
Del dato : $6n(n-1)+6n=600 \Rightarrow n(n-1)+n=100$

$$\Rightarrow n^2=10^2 \Rightarrow n=10$$

$\Rightarrow$ Existen 10 hexágonos

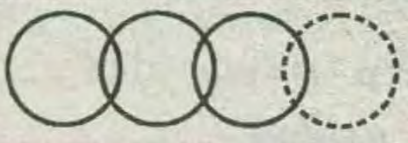
PROBLEMA 42 :

En la siguiente figura mostrada se tiene c cuadriláteros, c circunferencias y c rectas paralelas tal como indica la figura, si el número total de puntos de intersección es $(67c+9)$. Calcule c.



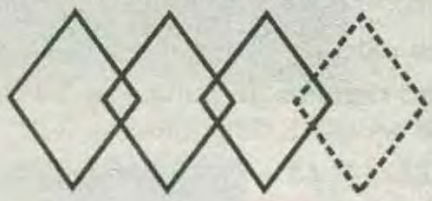
RESOLUCIÓN :

* c circunferencias , formando eslabones :



c circunferencias se intersecan en : $2\,(c-1)$ puntos

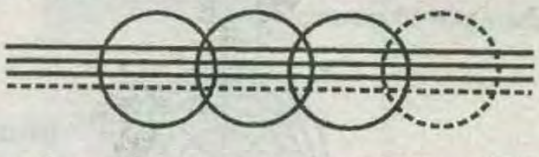
* c cuadriláteros, formando eslabones :



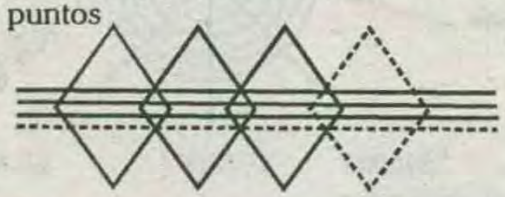
c cuadriláteros se intersecan en : $2\,(c-1)$ puntos

* c rectas paralelas se intersecan en : 0 puntos

*

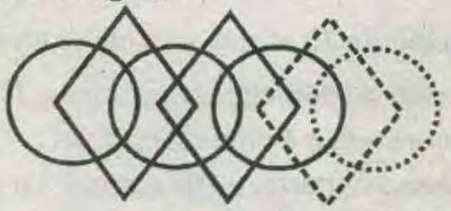


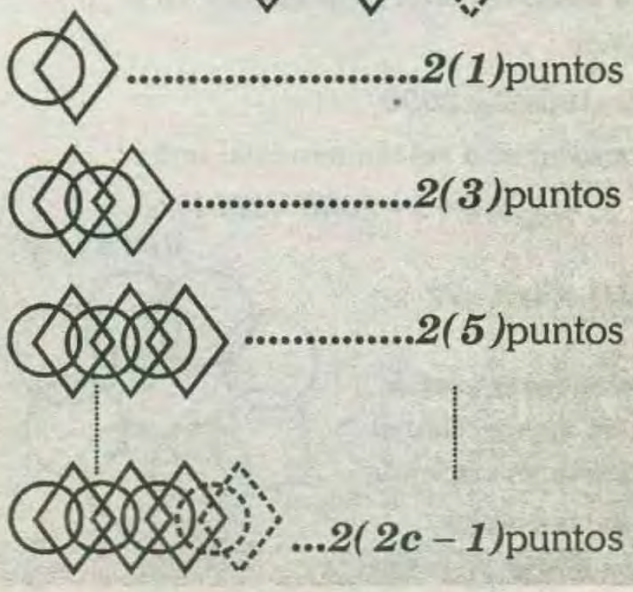
* c circunferencias y c rectas paralelas se intersecan en : $2c^2$ puntos



* c cuadriláteros y c rectas paralelas se intersecan en : $2c^2$ puntos .

* Analizando la figura :





* El número total de puntos de intersección será :

$$2(c-1)+2(c-1)+2c^2+2c^2+2(2c-1)$$
$$=4c^2+8c-6$$

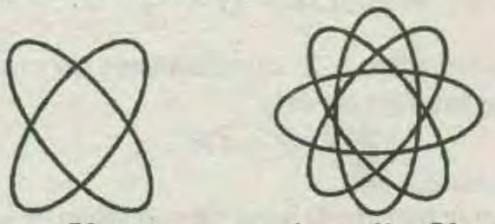
* Por dato :

$$4c^2+8c-6=67c+9 \Rightarrow 4c^2-59c-15=0 \Rightarrow c=15$$

PROBLEMA 43 :

Si al número de elipses secantes se le aumentan cuatro , el número de puntos de intersección se incrementa en *184*. Determinar cuántas elipses existen.

RESOLUCIÓN :



n elipses **(n+4) elipses**

$2n(n-1)$.....(I) $2(n+4)(n+3)$.....(II)

* Planteamos la ecuación :

$$2n(n-1)+184=2(n+4)(n+3)$$
$$\Rightarrow n=10$$

Existen *10* elipses

PROBLEMA 44 :

En un plano el máximo número de puntos de intersección (incluyendo los vértices) entre *2p* polígonos convexos de *p* lados y *p* polígonos convexos de *2p* lado es *360p*. Calcular el máximo número de puntos de intersección entre *p/2* polígonos convexos de *2p/3* lados.

A)12 *B) 24* *C)15* *D)17*

RESOLUCIÓN :

* *2p* polígonos convexos de *p* lados se intersecan en : $(p)2p(2p-1)$

* *p* polígonos convexos de *2p* lados se intersecan en: $(2k)\,k\,(k-1)$

* *2p* polígonos convexos de *p* lados y *p* polígonos convexos de *2p* lados se intersecan en :

$$(2p)\ 2p \times p$$

Doble de menor número de lados del polígono convexo

* El máximo número de puntos de intersección será :

$$2p^2(2p-1)+2p^2(p-1)+4p^3=10p^3-4p^2$$

* Sabemos que el número de vértices es igual al número de lados , entonces incluyendo será :

$$10p^3-4p^2+2p(p)+p(2p)=10p^3$$

* Luego por dato :

$$10p^3=360p \Rightarrow p=6 \ .....(i)$$

* Nos piden calcular :

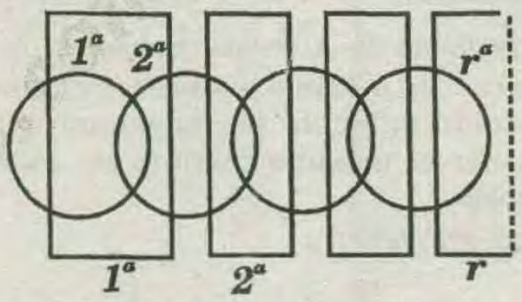
$$\left(\frac{2p}{3}\right)\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right) .....(ii)$$

* Reemplazando *(i)* en *(ii)*, el máximo número de puntos de intersección entre *p/2* polígonos convexos de *2p/3* lados es : *24*

RPTA : "B"

PROBLEMA 45 :

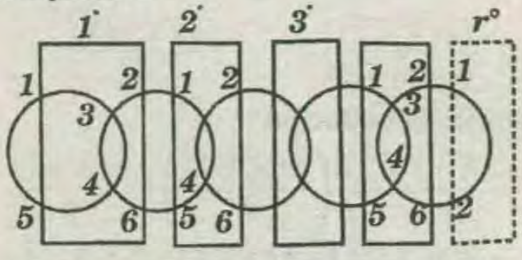
Determinar el número total de puntos de corte de " *r* " rectángulo e igual número de circunferencias ubicados como se indica.



A)(3r+2) *B)2(3r+2)* *C)(3r–2)* *D)2(3r–2)*

RESOLUCIÓN :

* Nótese que cada cuadrilátero encierra *6* puntos de corte a excepción del último de la derecha, que sólo encierra *2* puntos.



* En consecuencia , el número total será :

$$\#_{total}=\underbrace{6+6+.....+6}_{(r-1)}+2$$

(último Cuadrilátero)

$$=6(r-1)+2=2(3r-2)$$

PROBLEMA 46 :

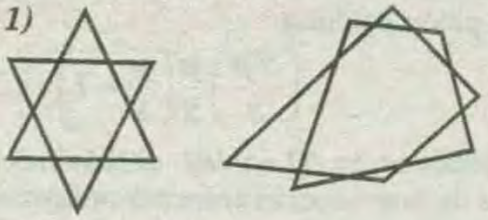
Se tienen η triángulos secantes y η cuadriláteros convexos secantes. Si el máximo número de puntos de intersección de los triángulos se aumenta el número total de lados de los triángulos, más el máximo número de puntos de intersección de los

cuadriláteros , más el número total de los ángulos de los cuadriláteros se obtiene *1 008*. Calcule η .

RESOLUCIÓN :

* η triángulos secantes se intersecan en : $3\eta(\eta-1)$

* η cuadriláteros convexos secantes se intersecan en : $4\eta(\eta-1)$



* Por dato :

$$3\eta(\eta-1)+3\eta+4\eta(\eta-1)+4\eta=1\,008$$

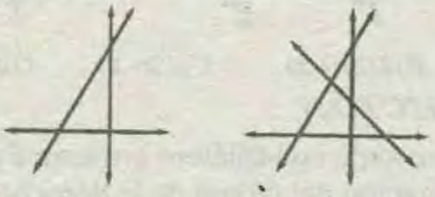
$$7\eta^2=7\times16\times9 \Rightarrow \eta^2=16\times9 \Rightarrow \eta=43$$

$$\Rightarrow \eta=12$$

PROBLEMA 47 :

Si a un conjunto de λ rectas secantes se le agrega una recta , el máximo número de puntos de intersección aumenta en un quinto del total. Determinar el máximo número de puntos de intersección.

RESOLUCIÓN :



λ ***rectas*** $(\lambda+1)$ ***rectas***

$\frac{\lambda(\lambda-1)}{1}$ $\frac{(\lambda+1)\lambda}{2}$

* Planteamos la ecuación :

$$\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}+\frac{1}{5}\left(\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}\right)=\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$$

$$\Rightarrow 5\lambda(\lambda-1)+\lambda(\lambda+1)=5\lambda(\lambda+1)$$

$$\Rightarrow 5\lambda^2-5\lambda+\lambda^2+\lambda=5\lambda^2+5\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda^2+\lambda=10\lambda \Rightarrow \lambda+1=10$$

$$\Rightarrow \lambda=9 \text{ rectas}$$

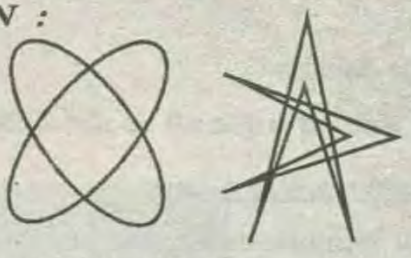
* Luego el máximo número de puntos de intersección de las $(\lambda+1)$ rectas secantes es :

$$\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}=\frac{9(10)}{2}=45 \text{ puntos}$$

PROBLEMA 48 :

En un plano se dibujan p elipses secantes y $2p$ cuadriláteros no convexos secantes . Si el máximo número de puntos de intersección es $182p$. Calcule p .

RESOLUCIÓN :



* p elipses secantes se intersecan en :

$$2p\,(p-1)$$

* $2p$ cuadriláteros no convexos secantes se intersecan en : $8(2p)(2p-1)$

* p elipses secantes y 2 cuadriláteros no convexos secantes se intersecan en :

$$\underbrace{2(4)}_{\text{Doble de}}\,p\times 2p$$

menor número de lados del cudrilátero no convexo

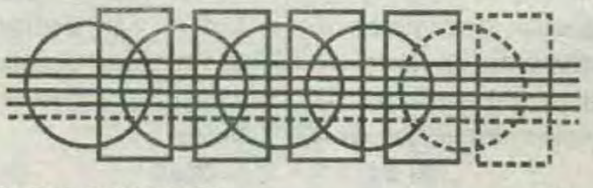
* El máximo número de puntos de intersección será :

$$2p(p-1)+16p(2p-1)+16p^2=50p^2-18p$$

* Por dato : $50p^2-18p=182p \Rightarrow p=4$

PROBLEMA 49 :

Se tienen κ circunferencias , κ rectángulos y κ rectas paralelas dispuestas como se indica el número de total de puntos de intersección.



RESOLUCION :

* κ circunferencias se intersecan en : $2(\kappa-1)$ puntos

κ rectángulos se intersecan en : 0 puntos

κ circunferencias y κ rentángulos de intersecan en : $2(2\kappa-1)$ puntos

κ rectángulos y κ rectas paralelas se intersecan en : $2\kappa^2$ puntos

κ circunferencias y κ rectas paralelas se intersecan en : $2\kappa^2$ puntos

* Luego en número total de puntos de intersección será :

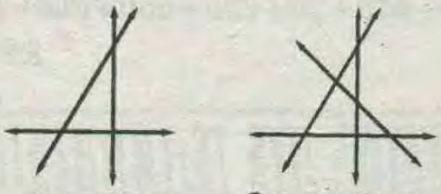
$$N=2(\kappa-1)+2(2\kappa-1)+2\kappa^2+2\kappa^2$$

$$\Rightarrow N=4\kappa^2+6\kappa-4 \Rightarrow N=2(\kappa+2)(2\kappa-1)$$

PROBLEMA 50 :

En un plano se tienen μ rectas , al duplicar el número de ellas, el máximo número de puntos de intersección aumenta en **145** . Calcular el número de rectas.

RESOLUCIÓN :



μ **rectas** 2μ **rectas**

$\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ $\frac{2\mu(2\mu-1)}{2}$

* Planteamos la ecuación :

$$\frac{\mu(\mu-1)}{2}+145=\frac{2\mu(2\mu-1)}{2}$$

$$\mu^2-\mu+290=4\mu^2-2\mu \Rightarrow 290=3\mu^2-\mu$$

$$\Rightarrow 290=\mu(3\mu-1) \Rightarrow 10(3\times10-1)\mu(3\mu-1)$$

$$\Rightarrow \mu=10$$

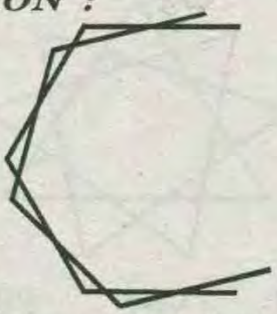
* Luego , el número de rectas es **10**.

PROBLEMA 51 :

Si **n** polígonos convexos de igual número de lados determinan un máximo número de puntos de intersección igual a **6 240**, y si quitamos un polígono el máximo número de puntos de intersección disminuye en **312** puntos. Calcular el número de polígonos inicial y el número de lados de cada polígono.

A)4 B)6 C)8 D)10 E)12

RESOLUCIÓN :



* **n** polígonos convexos de **L** lados determinan un máximo número de puntos de intersección igual a :

Ln (n–1) puntos

* Por condición del problema :

$$Ln(n-1)=6240$$

* Si quitamos un polígono , el máximo número de puntos de intersección será :

L(n–1)(n–2) puntos

* Por condición del problema :

$$Ln(n-1)-312=L(n-1)(n-2)$$

$$Ln(n-1)-L(n-1)(n-2)=312$$

$$L(n-1)(n-n+2)=312 \Rightarrow 2L(n-1)=312$$

$$\Rightarrow L(n-1)=156$$

* Relacionando lo anterior :

$$156n=6\,240 \Rightarrow n=40$$

$$\Rightarrow L(40-1)=156 \Rightarrow L=4$$

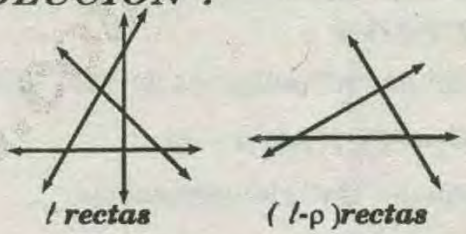
Entonces el número de polígonos inicial es **40**. El número de lados del polígono es **4**.

RPTA : "A"

PROBLEMA 52 :

Si a un conjunto de ℓ rectas secantes se le quitan ρ rectas, el número de puntos de intersección disminuye en **k**. Determinar el número de rectas.

RESOLUCIÓN :



ℓ **rectas** $(\ell-\rho)$ **rectas**

$\frac{\ell(\ell-1)}{2}$ .....(I) $\frac{(\ell-\rho)(\ell-\rho-1)}{2}$ .....(II)

* Planteamos la ecuación :

$$\Rightarrow \frac{\ell(\ell-1)}{2}-k=\frac{(\ell-\rho)(\ell-\rho-1)}{2}$$

$$\Rightarrow \ell(\ell-1)-2k=(\ell-\rho)(\ell-\rho-1)$$

$$\Rightarrow \ell^2-\ell-2k=\ell^2-2\rho\ell-\ell+\rho^2+\rho$$

$$\Rightarrow 2\rho n=\rho(\rho+1)+2k$$

* El número de rectas es :

$$\ell=\frac{\rho(\rho+1)+2k}{2\rho}$$

PROBLEMA 53 :

Hallar el máximo número de puntos de corte entre **20** circunferencias **10** rectas y **6** octógonos convexos.

A)1105 B)2105 C)3105 D)4105 E)5105

RESOLUCIÓN :

* Intersección de **20** circunferencias :

$$\#_1=n(n-1)=20\,(19)=380 \text{ pts}$$

* Intersección de **10** rectas :

$$\#_2=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{10\times9}{2} \text{ pts.}$$

* Intersección de **6** octógonos :

$\#_3 = L.n(n-1) = 8(6)(5) = 240$ pts.

* Intersección de **20** circunferencias y **6** octógonos :

$\#_4 = m.n.k = (20)\ (6)\ (16) = 1920$ pts.

* Intersección de **20** circunferencias y **10** rectas :

$\#_5 = m.n.k = (20)\ (10)\ (2) = 400$ pts.

* Intersección de **10** rectas y **6** octógonos :

$\#_6 = m.n.k = (10)\ (6)(2) = 120$ pts.

* En consecuencia, el número total será :

$\#_{Total} = 380 + 45 + 240 + 1920 + 400 + 120 = 3105$ pts.

RPTA : "C"

PROBLEMA 54 :

Hallar el máximo número de puntos de corte para "**n**" polígonos convexos de "**2n**" lados y "**3n**" circunferencias.

A) $14n^3 + 7n^2 + 3n$ B) $14n^3 - 7n^2 - 3n$ C) $(14n^3 + 7n^2 - 3n)$

RESOLUCIÓN :

* Intersección de "**n**" polígonos de "**2n**" lados :

$$\#_1 = (2n)(n)(n-1)$$

* Intersección de "**3n**" circunferencias :

$$\#_2 = 3n(3n-1)$$

* Intersección de "**n**" polígonos y "**3n**" circunferencias

$\#_3 = (n)(3n)(4n)$ — doble del número de lados del polígono menor

* En consecuencia , será :

$\#_{Total} = (2n)(n)\ (n-1) + (3n)(3n-1) + (n)\ (3n)\ (4n)$

$= 14n^3 + 7n^2 - 3n = n(14n^2 + 7n - 3)$

RPTA : "C"

PROBLEMA 55 :

Hallar el máximo número de puntos de corte entre **10** triángulos que no se cortan entre sí, **12** pentágonos convexos y **5** circunferencias.

A) 300 B) 600 C)900 D)1880 E) 2300

RESOLUCIÓN :

* Intersección de **10** triángulos no secantes : $\#_1 = 0$

* Intersección de **12** pentágonos :

$\#_2 = (5)\ (12)\ (11) = 660$ pts.

* Intersección de **5** cirunferencias :

$\#_3 = 5\ (4) = 20$

* Intersección de **10** triángulos y **12** pentágonos :

$\#_4 = (10)\ (12)\ (6) = 720$ pts.

* Intersección de **10** triángulos y **5** circunferencias :

$\#_5 = (10)\ (5)\ (6) = 300$ pts.

* Intersección de **5** circunferencias y **12** pentágonos:

$\#_6 = (5)\ (12)\ (10) = 600$ pts.

* En consecuencia , el número total es :

$\#_{Total} = 0 + 650 + 20 + 720 + 300 + 600 = 2300$ pts.

RPTA : "D"

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 Hallar el número máximo de puntos de corte de seis rectas secantes.

A)12 B)13 C)15 D)17 E)6

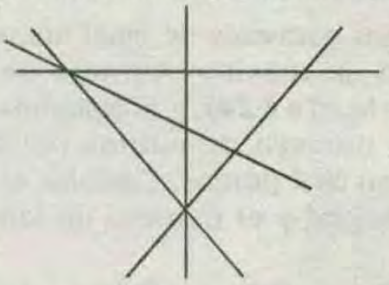
02 Hallar el número máximo de puntos de corte de siete rectas secantes.

A)19 B)21 C)23 D)25 E)17

03 Halle el máximo número de puntos de corte de 8 rectas secantes.

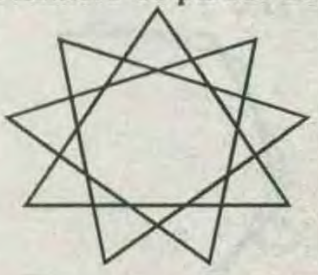
A) 4 B) 28 C) 82 D) 27 E) 64

04 Indicar el número de puntos de corte.



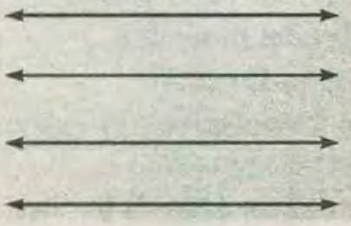
A)4
B)6
C)8
D)10
E)11

05 Indicar el número de puntos de corte.



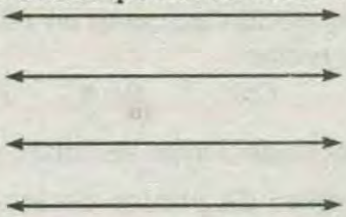
A) 26 B)27 C)28 D)20 E) 29

06 ¿En cuántos puntos de corte cortará una recta secante a las cuatro paralelas mostradas?



A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 1

07 ¿En cuántos puntos de corte cortarán dos rectas secantes a las cuatro paralelas mostradas?

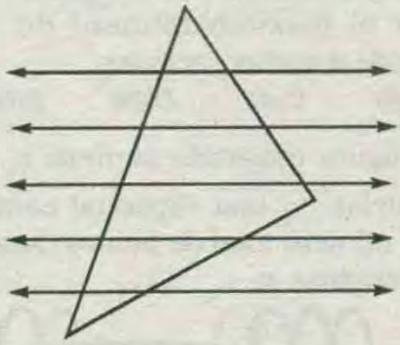


A) 8
B) 6
C) 4
D) 3
E) 10

08 ¿En cuántos puntos de corte cortarán cuatro rectas paralelas a tres rectas secantes?

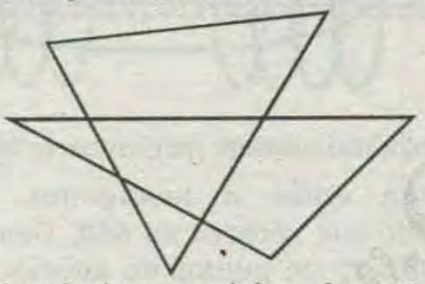
A) 10 B)12 C) 14 D)16 E) 18

09 En la figura, indique el número de puntos de corte.



A) 10
B) 11
C) 20
D) 13
E) 15

10 ¿Cuántos puntos de corte hay?



A) 8
B) 10
C) 12
D) 13
E) 15

11 Calcular el número máximo de puntos de corte entre 2 rectas paralelas y 3 rectas secantes.

A) 6 B) 7 C) 5 D) 4 E) 9

12 Hallar el máximo número de puntos de corte entre 3 rectas secantes y dos rectas paralelas.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

13 Hallar el máximo número de puntos de corte entre 3 rectas secantes y 3 rectas paralelas.

A) 10 B) 12 C) 9 D)15 E) 18

14 ¿En cuántos puntos cortará una secante a diez rectas paralelas?

A) 8 B) 10 C) 11 D)12 E) 13

15 Hallar el mínimo número de puntos de corte entre seis rectas secantes.

A) 6 B) 5 C) 3 D) 2 E) 1

16 Hallar el número máximo de puntos de corte de 3 rectas secantes.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 2

17 Hallar el número máximo de puntos de corte de 4 rectas secantes.

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 3

18 Hallar el número máximo de puntos de corte de 5 rectas secantes.

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

19 Hallar el máximo número de puntos de corte de 20 rectas secantes.

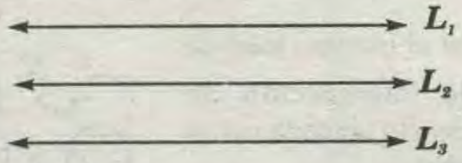
A) 170 B)19 C)190 D) 17 E)180

20 Hallar el máximo número de puntos de corte de "n" rectas secantes.

A) $\frac{n}{2}$ B) $\frac{n(n+1)}{2}$ C) $\frac{n(n-1)}{2}$ D) $\frac{n^2}{2^2}$ E) $\frac{n-1}{2}$

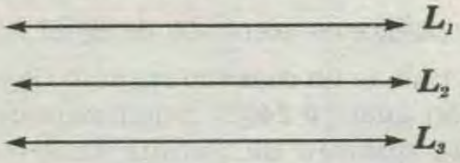
21 ¿ En cuántos puntos cortará una recta secante a las 3 paralelas mostradas?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



22 En cuántos puntos cortarán dos rectas secantes a las 3 paralelas mostradas?

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E)10



23 Hallar el máximo número de puntos de corte entre seis rectas secantes y dos paralelas.

A) 19 B) 21 C) 23 D) 25 E)27

24 Hallar el máximo número de puntos de corte entre 5 rectas secantes y 5 paralelas.

A) 35 B) 37 C) 33 D) 39 E)31

25 ¿En cuántos puntos cortará una recta secante a "p" rectas paralelas?

A) p B) p–1 C) p+1 D)p/2 E)p+2

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Determinar el máximo número de puntos de

corte de una circunferencia y un triángulo.

A)3 B)6 C)9 D)∞

02 Determinar el máximo número de puntos de corte de un icoságono y una circunferencia.

A) 10 B)20 C)40 D)32

03 El mínimo número de puntos de intersección "*n*" circunferencias secantes no coplanares es :

A)0 B) 1 C)2 D)∞

04 Determinar el mínimo número de puntos de intersección de una circunferencia y *10* rectas secantes.

A)5 B)7 C)9 D)11 E) 13

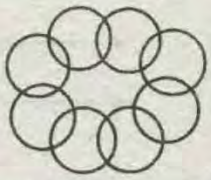
05 Determinar el máximo número de corte de *20* triángulos secantes con *10* cuadriláteros secantes.

A)1000 B) 2700 C)60230 D)∞

06 ¿Cuántas circunferencias debemos interceptar para obtener *90* puntos de intersección?

A)5 B) 10 C) 15 D)20

07 Hallar el número total de puntos de intersección de '*n*'circunferencia ubicada como las mostradas :



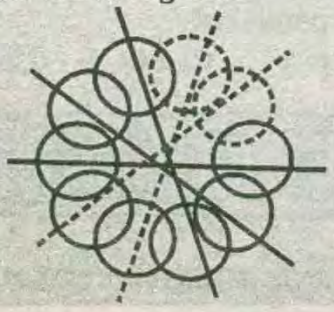
A)n B)2n C)n^2 D)$2n^2$

08 Si *n* polígonos convexos de igual número de lados determinan un máximo número de puntos de intersección igual a *6 240*, y si quitamos un polígono el máximo número de puntos de intersección disminuye en *312* puntos. Determinar el número de polígonos inicial y el número de lados de cada polígono.

A)40;4 B)30;6 C)60;6 D)80;8 E)90;9

09 En la figura mostrada se tienen *2n* circunferencias, o rectas secantes tal como indica la figura ; dichas figuras dividen al plano en *(17n+1)* partes. Determinar el número total de puntos de intersección entre dichas figuras.

A)140
B)170
C)272
D)140
E)300



10 En un plano se tienen *n* rectas secantes , al duplicar el número de ellas , el máximo número de puntos de intersección aumenta en *145*. Determinar en número de rectas .

A)4 B)6 C)8 D)10 E)12

11 Si al número de elipse secantes se le aumenta cuatro el número de puntos de intersección se incrementa en *184*. Calcular cuántas elipses existen.

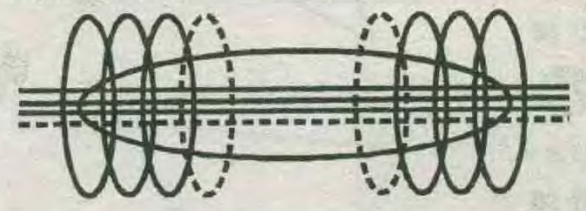
A)6 B)8 C)15 D)10 E)5

12 Si a un conjunto de *k* rectás secantes se le agrega una recta, el máximo número de puntos ,de intersección aumenta en un quinto de total. Determinar el máximo número de puntos de intersección de *k* rectas secantes.

A)30 B)40 C)45 D)50 E)60

13 En la figura mostrada se tiene *n* elipses, *3n* rectas paralelas y una elipse tal como indica la figura . si el número total de puntos de intersección en *204* . Determinar *n*.

A)5
B)6
C)7
D)8
E)9



14 Si el máximo número de puntos de intersección que existen entre *n* hexágonos secantes, considerando sus vértices es *600*. Determinar el máximo número de puntos de intersección de *n* parábolas secantes.

A)180 B)100 C)80 D)50 E)60

15 Si el máximo número de puntos de intersección entre *m* polígonos secantes de *n* lados es igual al máximo número de puntos de intersección de *m* circunferencias secantes aumentando en *k*. Determinar el máximo número de puntos de intesección de *n* polígonos secantes de *m* lados , si : $m+n=24$ y *k* es el máximo número de puntos de intersección de once dodecágonos secantes.

A)120 B)840 C)1546 D)1700 E)1716

16 El máximo número de puntos de intesección de *n* polígonos secantes de *m* lados es igual al número de vértices de dicho polígono aumentado en *20* ; además la suma del número de lados y el número de vértices es igual a los ocho tercios del máximo número de puntos de intersección de *n* rectas secantes . Determinar el máximo número de puntos de intersección de *m* triángulos secantes más

n pentágonos secantes.

A)30 B)44 C)50 D)68 E)66

17 En la figura mostrada se tienen n circunferencias concéntricas , n circunferencias formado eslabones y n rectas concurrentes . Si el número total de puntos de intersección entre dichas figuras geométricas es 204 . calcule n.

A)7
B)9
C)11
D)13
E)16

18 Si el máximo número de puntos de intersección entre n rectas secantes se le aumenta 16 puntos , equivale al número de rectas elevado al cuadrado aumentándo uno. Determinar el máximo número de puntos de intersección de n hexágonos secantes.

A)60 B)80 C)100 D)110 E)120

19 Si el máximo número de puntos de intersección entre k polígonos secantes de k lados es igual a 3 veces el máximo número de puntos de intersección de k circunferencias secantes. Determinar el máximo número de puntos de intersección de k cuadriláteros no convexos secantes.

A)16 B)26 C)35 D)48 E)60

20 Si la suma al cuadrado del máximo número de puntos de intersección entre k triángulos secantes , k pentágonos secantes y k circunferencias secantes es igual a 21384 veces el máximo número de puntos de intesercción entre k rectas secantes . Calcular k .

A)8 B)10 C)12 D)14 E)16

21 El máximo número de puntos de intersección entre k rectas secantes , más el máximo número de puntos de intersección entre k circunferencias secantes es igual a 1890. Determinar el máximo número de puntos de intersección entre k cuadriláteros convexos secantes.

A)5040 B)3040 C)5060 D)1890 E)1986

22 En un plano existen k polígonos convexos de k lados si el máximo número de puntos de intersección es $132k$. Determinar el máximo número de segmentos determinados al intersectarse los k polígonos convexos.

A)38746 B)39478 C)39744 D)40656 E)31064

23 En un plano se tiene k polígonos convexos secantes de k lados y $2k$ polígonos convexos secantes de $2k$ lados , si el máximo número de puntos de intersección entre dichos polígonos es $300k$ puntos. Determinar el máximo número de segmentos determinados al intersectar los $2k$ polígonos convexos secantes.

A)17456 B) 9000 C) 7496 D) 19000 E)20000

24 Se dan 4 puntos entre los cuales no hay cuatro sobre una misma circunferencia se traza una circunferencia por cada tres de ellos. Cuál es el máximo número de puntos de intersección de estas circunferencias.

A)1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

25 Cada lado de un cuadrado se ha dividido en 5 partes ¿Cuántos triángulos de pueden construir,cuyos vértices sean los puntos de división?

A)540 B)500 C)530 D)400 E)544

26 En un plano se intersecan n rectas secantes , si el máximo número de triángulos que se determinan es $(18n+4)$.Determinar el máximo número de puntos de intersección de las n rectas secantes.

A)60 B)20 C)54 D)44 E)66

27 En un plano se traza k rectas que se intersecan entre sí , si de éste grupo de rectas $k/3$ fuesen paralelas entre sí , el máximo número de puntos de intersección sería $13k$. Determinar k.

A)15 B)20 C)25 D)30 E)35

28 Determinar el mínimo número de puntos de intersección entre 3 rectas secantes y una circunferencia (las rectas deben ser secantes a la circunferencias).

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

29 Determinar el máximo número de puntos de intersección entre 7 rectas secantes 9 rectas paralelas y 11 circunferencias secantes .

A)340 B)560 C)450 D)447 E)536

30 Determinar el mínimo número de puntos de intersección entre k circunferencias secantes y k rectas secantes, estando todas en un mismo plano.

A) (k^2-k+1) B) (k^2+k-1) C) (k^2-2k+1)
D) (k^2-k+2)

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)B	2)C	3)C	4)D	5)B	6)B	7)B	8)A	9)C	10)D
11)D	12)C	13)A	14)A	15)E	16)E	17)B	18)E	19)D	20)C
21)A	22)C	23)D	24)D	25)E	26)E	27)D	28)C	29)E	30)D

SEGMENTOS I

CAPITULO 04

OBJETIVOS :

El estudiante , al terminar el presente capítulo será capaz de:

* Diferenciar las formas geométricas fundamentales. (Punto, recta y segmento) .

* Reconocer la definición de segmento.

* Efectuar operaciones de adición y sustracción mediante la ayuda de gráficas.

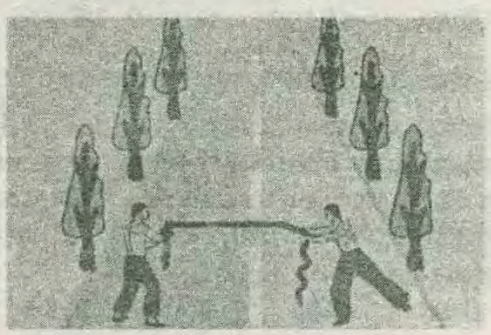
* Reforzar los métodos que usan los estudiantes para realizar operaciones elementales.

INTRODUCCIÓN :

Etimológicamente, el término Geometría significa «medir la tierra». En efecto, una antigua opinión, Transmitida por Herodoto, atribuía el origen de la Geometría a la necesidad de medir las tierras de la labranza después de cada crecida del Nilo, la cual podía modificar su extensión; con el objeto de fijar equitativamente el impuesto a pagar al rey. Pero, no fue solamente la medida de la Tierra el origen de los conocimientos geométricos: la necesidad de comparar áreas y volúmenes , las construcciones de canales y edificaciones, las figuras decorativas , los conocimientos de los astros, han contribuido también al nacimiento de reglas y propiedades geométricas que se encuentran en los documentos de las antiguas civilizaciones egipcia y mesopotámica.

Si nos remontamos a la prehistoria, es posible que el hombre con sus conceptos primitivos número y medida haya contado con sus dedos u otro objeto que lo rodeaban. Respecto a las ***medidas longitudinales*** de ciertas líneas, pudo conseguirla al compararla con ciertas partes de cuerpo: codos, pies, palmas, etc. (medición antropométricas).

Todo esto nos indica que ya se tenía la idea de línea, la cual fue perfeccionada hasta lograr una mayor precisión en el desarrollo de la humanidad. Podemos comprobar lo mencionado no solo en la construcción de las pirámides, templos, palacios efectuada por los egipcios; sino también en lo hecho por los incas (andenes, templos y canales de irrigación).



UNA SOGA BIEN TENSADA NOS DA LA IDEA DE UNA PORCIÓN DE LÍNEA RECTA

GEOMETRÍA

Es la ciencia que trata de las propiedades de las figuras geométricas del plano, del espacio y de sus relaciones empleadas para la medición de extensiones.

OBJETO DE LA GEOMETRÍA

Es el estudio de las propiedades, medida y construcción de las figuras, desde el punto de vista de su forma, extensión, magnitud, posición en el espacio y sus relaciones.

La palabra geometría se deriva de las palabras

***GEO**: tierra*

***METRÍA**: medida*

Debido a que en Egipto se registraron inundaciones de sus tierras y parcelas , y las divisiones que había eran arrasadas. Entonces era necesario volver a medir sus tierras para reconstruir sus parcelas con las formas y dimensiones originales.

DIVISIÓN DE LA GEOMETRÍA

Para un mejor tratamiento se divide en:

A) GEOMETRÍA PLANA (PLANIMETRÍA) :

Estudia todas las líneas y figuras que se puedan trazar sobre un mismo plano , es decir aquellos puntos que se encuentran en un mismo plano.

B) GEOMETRÍA DEL ESPACIO (ESTEREOMETRÍA)

Estudia todas las líneas figuras y objetos que se pueden trazar o construir en el espacio, sin limitarse a un plano, se dice que son cuerpos sólidos.

FIGURAS GEOMÉTRICAS

Son cualquier conjunto de puntos. En toda figura, distinguimos su tamaño, su forma y su posición.

CLASIFICACIÓN LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

A) FIGURAS CONGRUENTES (≅)

Cuando tienen igual forma y tamaño (medidas respectivamentes iguales)

B) FIGURAS SEMEJANTES (~)

Cuando tienen igual forma , pero diferente tamaño (medidas respectivamente proporcionales)

C) FIGURAS EQUIVALENTES (<>)

Cuando tienen igual tamaño, pero distinta forma.

ELEMENTOS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRÍA

PUNTO:

No se puede definir un punto, sólo se tiene la idea de punto, la marca de un lápiz al presionar en el papel, la punta de un alfiler expresa tan solo una idea y no un objeto real.

LÍNEA :

Se puede considerar a la línea recta como un conjunto de, puntos dispuestos de tal modo que siguen una misma dirección.

CLASIFICACIÓN DE LAS LÍNEAS

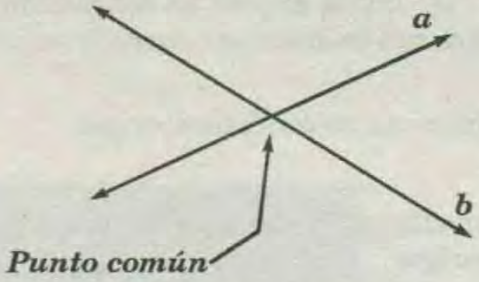
Las líneas se clasifican en:

I) LÍNEA RECTA :

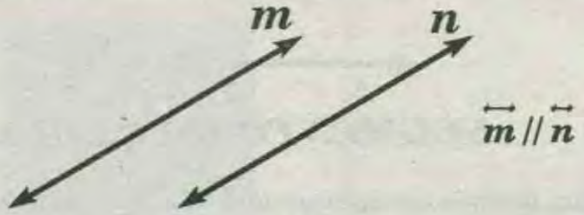
Es el conjunto de puntos que tiene la misma dirección y es limitada en sentidos opuestos.

Notación: Recta $L: \overleftrightarrow{L}$

LÍNEAS RECTAS SECANTES:



LÍNEAS RECTAS PARALELAS:



II) LÍNEA CURVA:

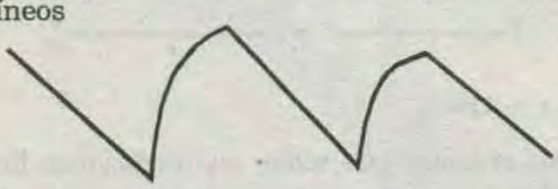
Es aquella línea que cambia de dirección constante.

III) LÍNEA QUEBRADA:

Es aquella que esta constituida por dos o más porciones directas , que siguen direcciones diferentes teniendo entre si un punto común.

IV) LÍNEA MIXTA:

Es aquella que esta constituida por de una o más segmentos rectilíneos y de uno o más segmentos curvilíneos

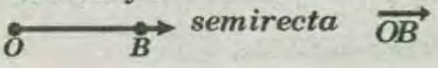


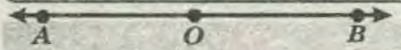
PLANO:

Nos da la idea de plano la superficie de una mesa, la pizarra, las paredes del aula, no existe una definición de plano sólo se tiene la idea.

SEMIRECTA:

Sea una recta cualquiera $\overleftrightarrow{AB}$ y sobre ella tomamos un punto *"O"* entre *A* y *B*





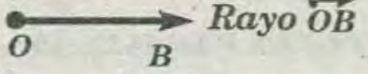
semirecta $\overrightarrow{OA}$

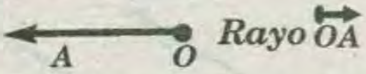
El punto *"O"* divide al recta en dos Subconjuntos de puntos, cada sub conjunto es una semirrecta de origen *"O"*

* Una semirrecta no contiene al origen.

RAYO:

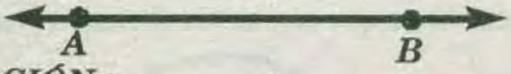
Rayo es una figura formada por una semirrecta y su punto de origen.





SEGMENTO DE RECTA

Para dos puntos cualesquiera *A* y *B*, el segmento $\overline{AB}$ el conjunto de los puntos *A* y *B*, se llaman los extremos de $\overline{AB}$



NOTACIÓN :

A todo segmento suele representarse escribiendo los dos puntos asignados a sus extremos con una pequeña rayita sobre ellos, así:

$\overline{AB}$ se lee: segmento $\overline{AB}$

AB se lee: longitud de $\overline{AB}$

La longitud de un segmento es un número positivo que representa a su medida y suele representarse de dos maneras.

• Si un segmento mide *"x"*, se podrá realizar lo siguiente:

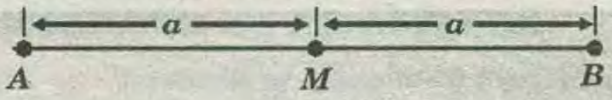
$m\overline{AB}=x$ ó $AB=x$

Debemos recalcar que todas las mediciones lineales que se dan en nuestra vida cotidiana no son más que una operación de medir segmentos. Así por ejemplo, si queremos medir el borde de una pizarra rectangular, la altura de una casa o el ancho de una puerta,...,etc.

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Es el punto que divide al segmento en dos segmentos parciales de igual longitud o medida. Veamos la figura:

Sea *"M"* Punto medio del $\overline{AB}$



$\Rightarrow AM=MB=a$ ó $AM=\frac{AB}{2} \Rightarrow AB=2AM=2MB$

Se dice también que el punto *«M»* biseca al segmento $\overline{AB}$.

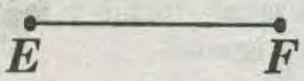
NOTA:

El segmento $\overline{PQ}$ es perpendicular al segmento $\overline{AB}$. a toda recta que pase por $\overline{PQ}$ se le llama *MEDIATRIZ* del segmento $\overline{AB}$.

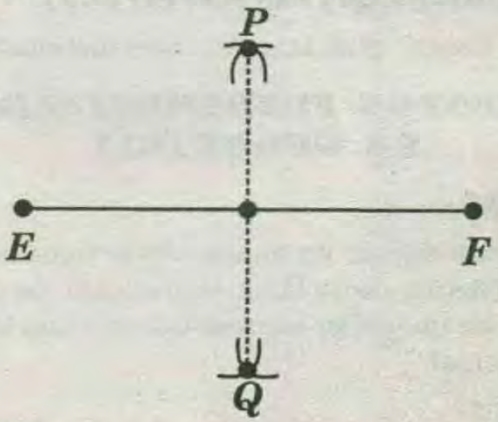
UBICACIÓN DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO MEDIANTE LA REGLA NO GRADUADA Y EL COMPÁS

Si queremos ubicar el punto medio de un segmento mediante este método, sigamos los siguientes pasos:

I) Con una regla no graduada se dibuja un segmento de una longitud cualquiera, tal como muestra la figura.



II) Haciendo centro con un compás en el punto *«E»* y con cualquier longitud (*) dibujamos una pequeña curva sobre y debajo del segmento. Luego se sigue el mismo procedimiento tomando como centro el punto *F.*



III) Se construye el segmento $\overline{PQ}$, siendo el punto de intersección de éste con $\overline{EF}$ el punto medio buscado.

(*) La longitud a tomar debe ser algo mayor que la mitad del segmento $\overline{EF}$

NOTA:

Se traslada longitudes de segmentos midiendo con el compás el segmento dado, luego dibujando en el lugar deseado.

SEGMENTOS CONSECUTIVOS:

Dos o más segmentos son consecutivos , cuando cada uno tiene con el siguiente un extremo común. Si los segmentos consecutivos están contenidos en una

misma recta, se llaman ***segmentos Colíneales,*** y si no están contenidos en una misma recta, se llama poligonal.

SEGMENTOS CONGRUENTES:

Dos segmentos son congruentes , cuando tienen la misma longitud.

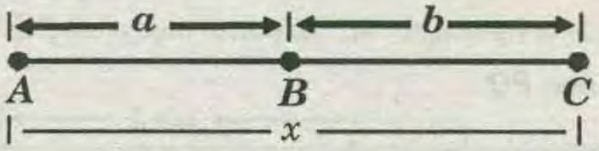
EJEMPLO:

Si: $\left.\begin{matrix} AB=10cm \\ CD=10cm \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB=CD$

Y se representa $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

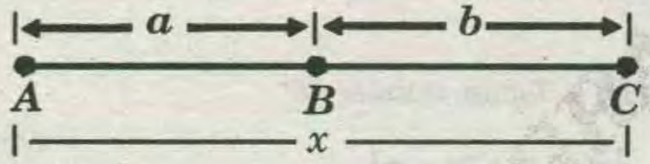
OPERACIONES CON LONGITUDES DE SEGMENTOS

I) ADICIÓN:



Entonces : $AC=AB+BC$ ó $x=a+b$

II) SUSTRACIÓN:

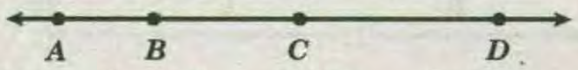


Entonces : $BC=AC-AB$ ó $b=x-a$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 01 :

En la figura , $AB=2cm$, $BC=3cm$, $CD=5cm$. Calcular: AD



A) 8cm B) 7 C) 9 D)10 E) 11

RESOLUCIÓN :

Lo que se pide es AD, que es igual a la suma de las longitudes del segmento $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, es decir:

$$AD=AB+BC+CD \Rightarrow AD=2+3+5=10$$

RPTA : "D"

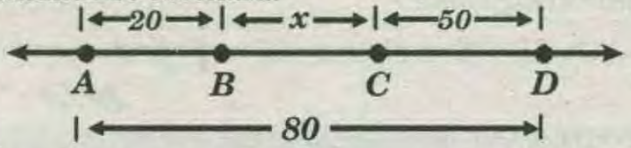
PROBLEMA 02:

Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C, D de modo que $AD=80$, $AB=20$, $CD=50$. Calcular: BC

A) 5 B) 15 C) 10 D) 30 E) 20

RESOLUCIÓN :

Graficando se obtendrá:



De la figura, se obtendrá:

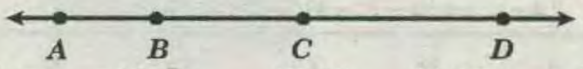
$$20+x+50=80 \Rightarrow x=10$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 03:

En la figura C es punto medio de $\overline{BD}$

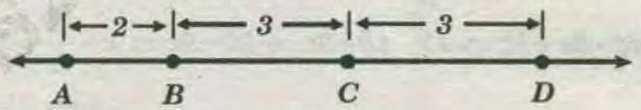
$AB=2cm$, $CD=3\ cm$. Calcular: AD



A) 14cm B) 12 C) 10 D) 13 E) 8

RESOLUCIÓN :

Colocando los datos en la figura, considerando que C es un punto medio de $\overline{BD}$ tendremos que:



Luego, lo que se pide será:

$$AD=2+3+3=8$$

RPTA : "E"

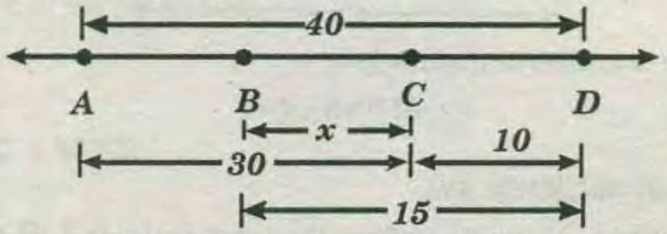
PROBLEMA 04:

Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C, D de modo que $AD=40$, $AC=30$, $BD=15$. Calcular: BC

A) 8 B) 18 C) 5 D) 9 E) 13

RESOLUCIÓN :

Graficando adecuadamente:



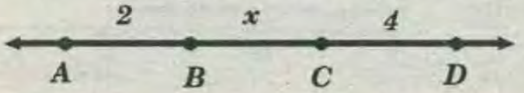
De la figura, se deduce que:

$$x=15-10=5$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 05:

Calcular "x" en la figura, si $AC \times CD=20$



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 7

RESOLUCIÓN :

De la figura: $AC=2+x$; $CD=4$

Ahora del otro dato:

$$AC \times CD=20 \Rightarrow (2+x)4=20 \Rightarrow 2+x=5 \Rightarrow x=3$$

RPTA : "C"

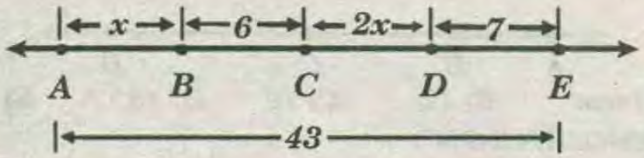
PROBLEMA 06:

Sobre una recta se toman los puntos consecutivos **A, B, C, D, E** de modo que $AB=x$, $BC=6$, $CD=2x$, $DE=7$, $AE=43$. Calcular: *"x"*

A) 10 B) 15 C) 36 D) 18 E) 19

RESOLUCIÓN :

Graficando adecuadamente:



De la figura, se deduce que:

$$43=x+6+2x+7 \Rightarrow 43=x+2x+6+7$$

$$\Rightarrow 43=3x+13 \Rightarrow 43-13=3x \Rightarrow 30=3x \Rightarrow x=\frac{30}{3}=10$$

RPTA : "A"

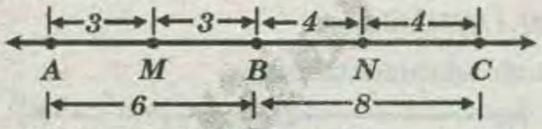
PROBLEMA 07:

Sobre una recta se toman los puntos consecutivos **A, B, C** de modo que $AB=6$, $BC=8$, se toman los puntos medios **M** de $\overline{AB}$ y **N** de $\overline{BC}$: Calcular: MN

A) 8 B) 9 C) 18 D) 7 E) 5

RESOLUCIÓN :

Graficando, colocando los datos adecuadamente, se obtendrá:



De la gráfica se deduce que:

$$MN=3+4=7$$

RPTA : "D"

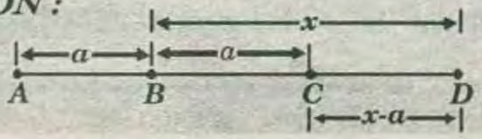
PROBLEMA 08:

Se tienen los puntos colíneales y consecutivos **A, B, C,** y **D** tal que *"B"* es un punto medio $\overline{AC}$ de manera que $AD+CD=18$. Calcular: BD

A) 9 B) 10 C) 11 D) 127 E) 13

RESOLUCIÓN :

Graficando:



Ahora utilizamos:

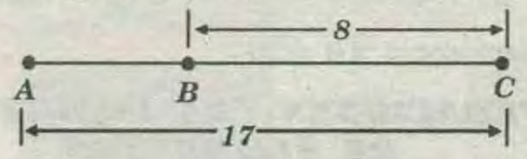
$$AD + CD = 18$$

$$\overline{a+x} + \overline{x-a} = 18 \Rightarrow 2x=18 \Rightarrow x=9$$

RPTA : "A"

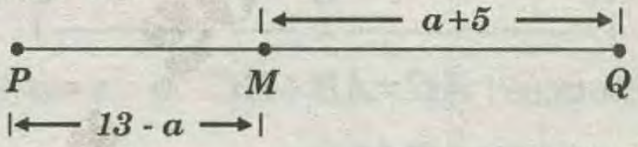
PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 Del gráfico, calcular AB.



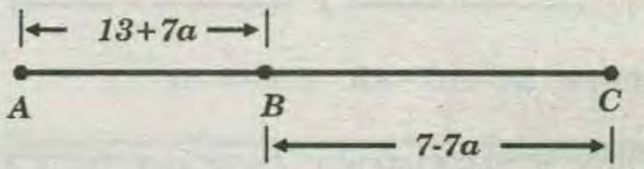
A) 7 B) 9 C) 16 D) 8 E) 5

02 De la figura, si *"M"* es punto medio de PQ. Calcular PQ.



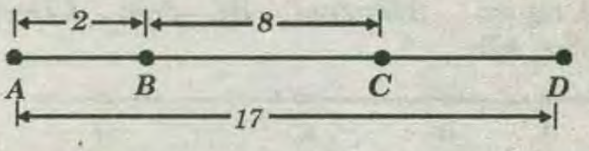
A) 10 B) 26 C) 18 D) 13 E) 17

03 De la figura, calcular AC



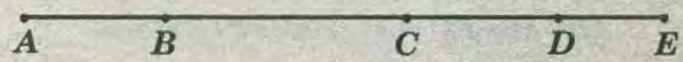
A) 14 B) 17 C) 18 D) 16 E) 20

04 De la figura, calcular CD



A) 5 B) 6 C) 9 D) 7 E) 8

05 De la figura *"C"* es punto medio de $\overline{AE}$, y *"B"* es punto medio del $\overline{AC}$, $AE=20$, calcular BC.



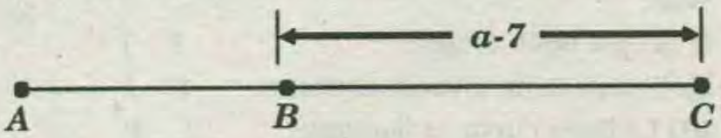
A) 4 B) 5 C) 8 D) 9 E) 7

06 Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos **A, C, D, F** y **K** tal que: $AK=40$ y $AD+CF+DK=80$,

calcular CF.

A) 10 B) 45 C) 20 D) 30 E) 40

07 Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos A; B y C; tal que $AB=BC$; $AC=a$; calcule "a".



A) 17 B) 7 C) 14 D) 13 E) 20

08 Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C, de tal modo que $AB=12$ y $AC=25$. Calcular: BC

A) 15 B) 12 C)10 D) 13 E) 14

09 En una recta se marcan los puntos consecutivos A, B, C tal que $AB=x$, y $BC=2x$, $AC=18$. Calcular: x

A) 4 B) 6 C) 8 D) 3 E) 9

10 Los puntos consecutivos A, B, C, D se encuentran en una línea recta de modo que $AB=6$, $BC=5$, $CD=8$; se toman los puntos medios M del segmento $\overline{AB}$, y N del segmento $\overline{CD}$. Calcular: MN.

A) 10 B) 9 C) 12 D)8 E)11

11 Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C, D de modo que C es el punto medio del segmento, además $AB=4$, $CD=14$. Calcular: BC

A) 10 B) 8 C) 12 D) 6 E) 5

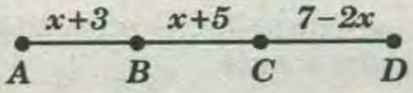
12 Los puntos A, B, C, D se encuentran sobre una línea recta, de modo que $BC=5$, $AC+BD=20$. Calcular: AD

A) 14 B) 10 C) 15 D) 12 E) 13

13 P, Q, R y S son puntos consecutivos de una recta, tal que $PR=16$; $QS=18$ y $PS=25$. Calcular: QR

A) 9 B) 11 C) 13 D) 8 E) 14

14 De acuerdo a la figura, halle el valor de: $AB+BD$

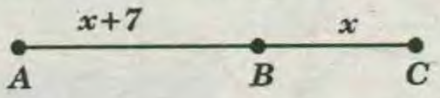


A) 10 B) 15 C) 5 D) 20 E) 12

15 Del problema anterior, indique si es verdadero (V) o falso (F) lo que a continuación se menciona:

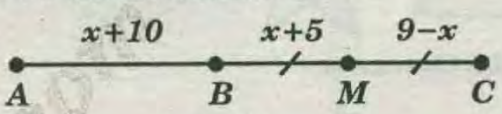
* $AB = BC$ ..... ( )
* $BC - AB = 2$ ..... ( )
* $AD = 15$ ..... ( )
* $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \overline{BC}$ ..... ( )

16 Encuentre el valor de: $AB - BC$



A) 0 B) 5 C) 7 D) 2 E) F.D.

17 De acuerdo a la figura, relacione correctamente los datos de ambas columnas.



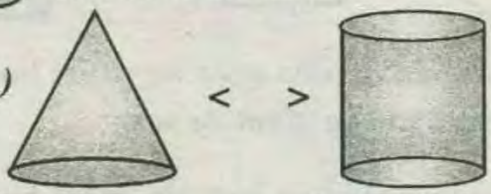
A) x ( ) 12
B) $AB - BM$ ( ) 5
C) AB ( ) 2
D) $\overline{BM} \cup \overline{MC}$ ( ) $\overline{BC}$

18 Calcular BC, si $AB = 10$, $BD = 16$ y C es punto medio de AD.

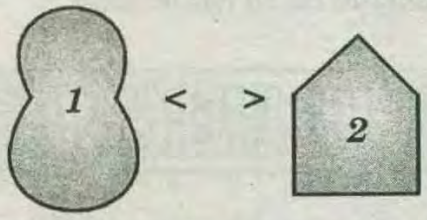
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19 Indica lo correcto

A)

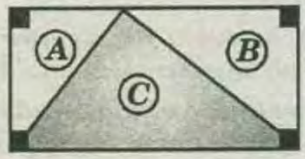


B)



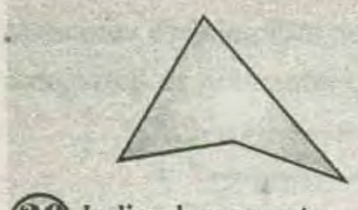
⇒ Area 1 = Area 2

C)



⇒ $A+B \neq C$

D) Región Convexa



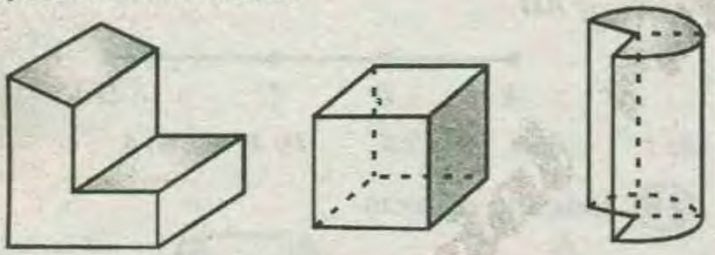
20 Indica lo correcto

A) Figuras no convexas

B) figuras convexas

C) Sólidos Convexos:

D) Sólidos no convexos



21 Con la ayuda de una hoja de papel bond, construir un cuadrado de ***6 cm*** de lado.

22 Con la ayuda de una hoja de papel bond, construir un cuadrado de ***10 cm*** de lado.

PRACTICA DE EJERCICIOS #2

01 Completa de manera adecuada lo que a continuación se menciona:

A) Una línea recta es aquella en la que todos sus.....siguen una misma ..... .

B) Una línea .....es el conjunto de dos o más líneas rectas (segmentos) consecutivos de diferentes direcciones.

C) Una línea curva es la ..... de infinitos puntos en cualquier dirección.

D) A la combinación de alguna línea curva y una línea recta se le conoce como .....

02 Indique si es verdadero *(V)* o falso *(F)*:

I) El rayo tiene origen. ( )

II) El rayo tiene un solo extremo. ( )

III) La línea curva es ilimitada. ( )

IV) La línea mixta, se puede medir. ( )

A)VFVV B)FFFF C)VFVV D)VVVF E)VVVV

03 Indicar si es verdadero *(V)* o falso *(F)*:

I) Una línea puede ser mixta. ( )

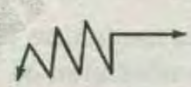
*II)*Un segmento de línea curva, se puede medir.( )

III) La línea quebrada es la unión de varias porciones de líneas rectas. ( )

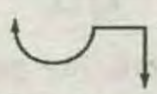
A)VVF D)FFV B)VVV C)FVV E) Ninguna

04 Relacione correctamente ambas columnas:

A) ( ) ***Línea mixta***

B)  ( ) ***Línea quebrada***

C) ( ) ***Línea recta***

D)  ( ) ***Línea curva***

05 Relacione correctamente ambas columnas:

A) ( ) ***Línea recta***

B) ( ) ***Segmento***

C) ( ) ***Rayo***

D) ( ) ***Semirrecta***

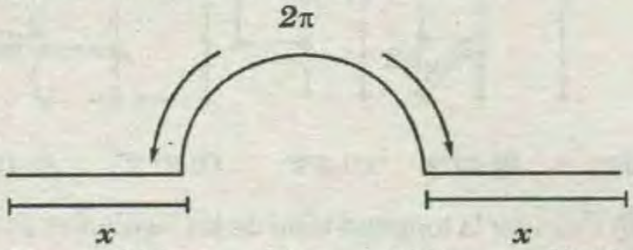
06 Mencione la longitud de una línea quebrada, si con ésta podemos formar un cuadrado de lado igual a ***2 m***.

A) 2m² B) 2cm C) 2m D) 2km E) 8m

07 Mencione la longitud de una línea quebrada, si con ésta se puede formar un pentágono regular de lados iguales a ***3 cm***.

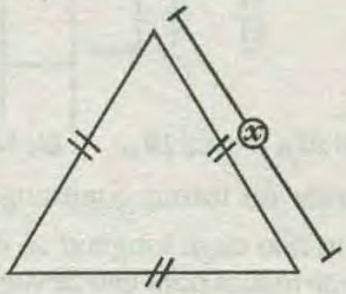
A) 3cm B) 6cm C) 12cm D) 5cm E) 25cm

08 Del gráfico, calcular x, si la línea tiene una longitud igual a $(40 + 2\pi)$ cm.



A) 10cm B) 2cm C) 2π D) 5cm E) 20 cm

09 Del gráfico, calcular x, si el perímetro del triángulo equilátero es 18 m



A) 6 m
B) 18
C) 9 m
D) 18 cm
E) 6 cm

10 Con una cuerda de 12 m se puede construir un triángulo de.....de perímetro.

A) 12cm B) 24m C) 7m D) 24cm E) 12 m

11 Con una cuerda de 60cm se puede construir un hexágono de lados iguales. ¿Cuánto mide un lado?

A) 10cm B) 60cm C) 15cm D) 10m E) 20cm

12 Escriba el nombre que corresponde a las siguientes líneas:

A).....

B).....

C).....

D).....

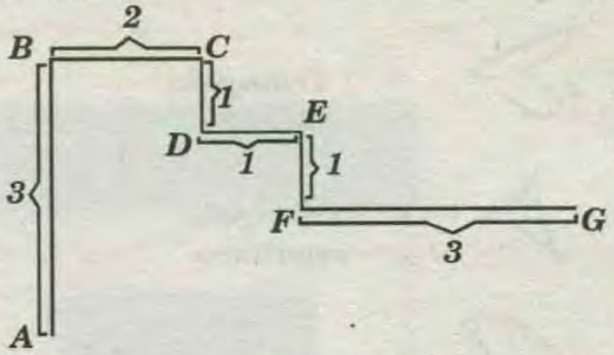
13 Si la línea horizontal $\overline{PQ}$ mide 36 cm, calcular el lado del triángulo equilátero que se puede formar.

A) 3cm B) 6cm C) 36cm D) 12cm E) 18cm

14 Si la línea horizontal $\overline{PQ}$ mide 64 cm, calcular el lado de cuadrado formado con dicha línea.

A) 64cm B) 32 cm C) 16 cm D) 8cm E) 4cm

15 Calcular la longitud total de la línea quebrada A B C D E F G.



A)3 B)11 C) 12 D)14 E) 13

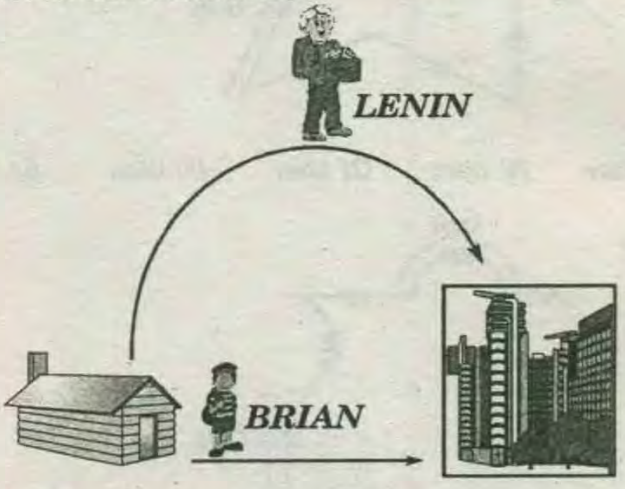
16 Si LENIN y BRIAN parten al mismo tiempo de su casa y llegan al mismo tiempo al colegio siguiendo caminos diferentes, entonces podemos decir:

I) LENIN es más veloz que BRIAN.

II) BRIAN escogió el camino más corto.

III) LENIN y BRIAN tienen la misma velocidad.

IV) El camino de LENIN es una línea recta y el de BRIAN es una línea mixta.



17 Relacione correctamente ambas columnas

I) O P ( ) Recta

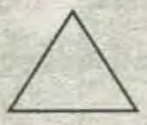
II) R S ( ) Rayo

III) A B ( ) Semirrecta

IV) ( ) Línea quebrada

V) M N ( ) Segmento

18 Relacione correctamente ambas columnas

I)  ( ) Triángulo curvilíneo

II) ( ) Triángulo esférico

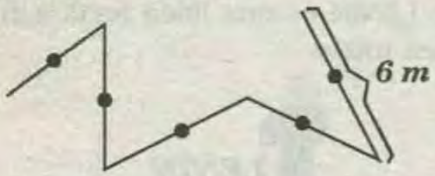
III) ( ) Triángulo rectilíneo

IV) ( ) Triángulo mixtilíneo

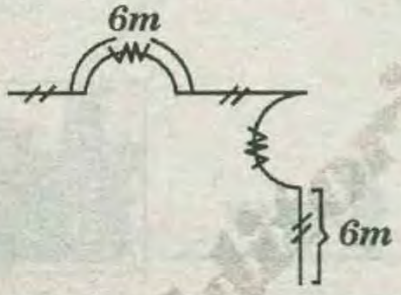
19 Mencione Ud. la longitud de una línea mixta, si ésta es formada a partir de una circunferencia de *12 m* de longitud.

A) 6m B) 12 C) 24m D)12m E) 12 km

20 Calcule la longitud de las siguientes líneas, quebrada y mixta:

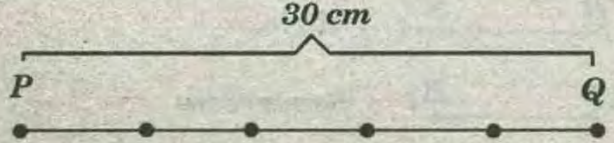
I) 

A) 6m B) 30m C) 15m D) 25m E) 60m

II) 

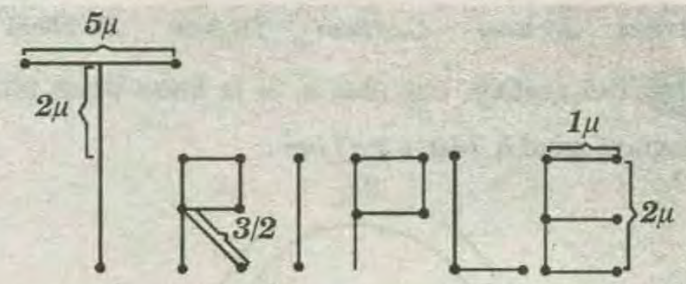
A) 6m B)12m C) 18m D) 24m E) 30m

21 Calcular el lado del pentágono regular si éste tiene todos sus lados iguales.



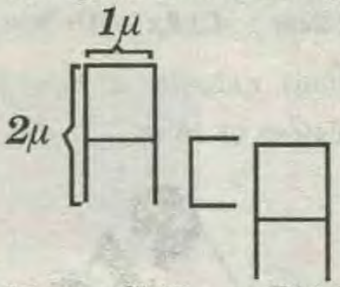
A)3cm B)6cm C)5 cm D)50cm E) 15 cm

22 Calcular la longitud total de las siguientes líneas quebradas.



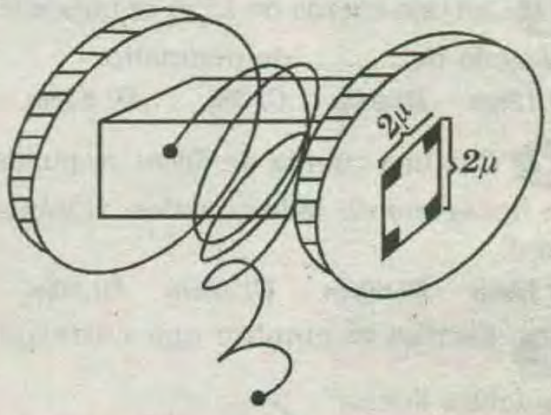
A) 60 B) 61/2 C) 5/2 D) 31/2 E) 15

23 Calcular la longitud total de las siguientes líneas quebradas:



A)18μ B)21μ C)15μ D)14μ E)30μ

24 Un carrete de forma cuadrangular se puede enrollar por un hilo cuya longitud se desea conocer, sabiendo que se realiza para ello *20* vueltas y el carrete tiene la siguiente forma:



A)8u

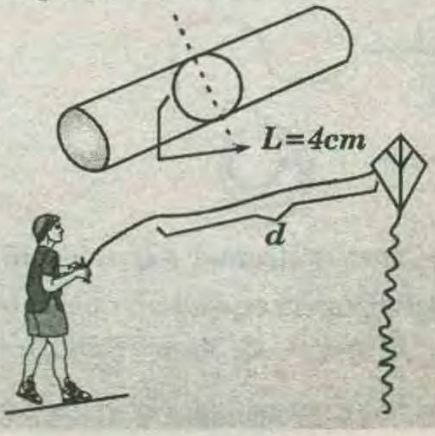
B)2u

C)20u

D)16u

E)160u

25 Repollin debe saber a qué distancia está su cometa. Para ello debe enrollarlo y contar cuantas vueltas daría todo el hilo de su cometa, sabiendo que cuando lo echó a volar dio *2400* vueltas y lo enrolla en el siguiente listón:



A) 96m

B) 32 m

C) 48m

D) 162m

E) 192m

PRACTICA DE EJERCICIOS #3

01 Complete de manera adecuada las siguientes oraciones:

A) El segmento es una_____ de recta limitada por_____ puntos llamados_____

B) La longitud de un_____es un_____positivo.

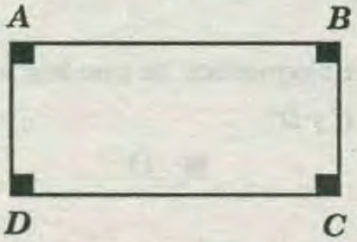
C) El_____medio divide al segmento en ____iguales

02 Relacione correctamente los datos de ambas columnas.

A) Segmento AB *B) Medida de segmento AB*
C) RectaAB *D) Semirrecta AB*

( ) $\overleftrightarrow{AB}$ *( ) $\overrightarrow{AB}$*
( ) $\overline{AB}$ *( ) AB*

03 Indique el número de segmentos que hay en la figura.



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

04 De acuerdo a la figura anterior, indique si es verdadero *(V)* o falso *(F)* lo que a continuación se enuncia.

A) $m\overline{AB} = m\overline{CD}$ ( )
B) BC es la notación del segmento BC ( )
C) $\overline{BC}$ indica la medida del segmento BC. ( )
D) La longitud de un segmento es un número mayor que cero. ( )

05 Mencione el número de segmentos que se pueden formar con los puntos *A, B* y *C*.

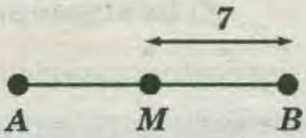
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

06 ¿ Cuántos segmentos se pueden formar con los puntos *A, B, C* y *D*?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 5* *E) 6*

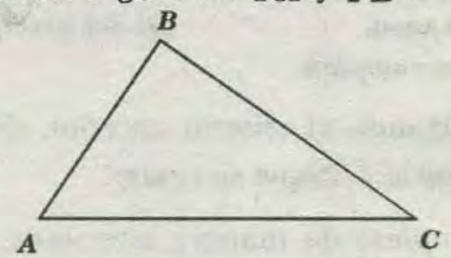
07 Si *"M"* es el punto medio del segmento *AB*, entonces las medidas de *AB* y *AM*, respectivamente son:

A) 7 y 1
B) 7 y 7
C) 14 y 7
D) 7 y –14
E) –7 y –14



08 Mediante el método de la regla y el compás ubique el punto medio de un segmento y compruebe la certeza haciendo uso del compás como instrumento de comparación.

09 Por el método de la regla y el compás construya la mediatriz del segmento *AB* y ubique al azar un punto *"P"* de ella.
Haciendo uso del compás, ¿qué puede decir de las medidas de los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$?

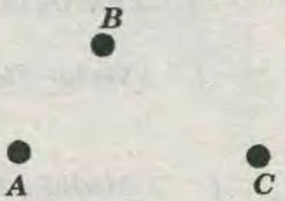


A) PA<PB *B) PA >PB* *C) PA=PB*
D) PA=2PB *E) PB=2PA*

10 Del problema anterior, ubique al azar otro punto *Q* de la mediatriz, e indique la relación correcta.

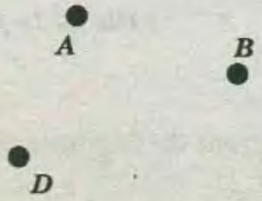
A) QA<QB *B) QB < PB* *C) QA=2QB*
D) QA=QB *E) 2QA = QB*

11 Indique el número máximo de segmentos que se pueden formar con los tres puntos de la figura.



A) 1
B) 2
C) 3
D) 0

12 Indique el número máximo de segmentos que se obtiene al unir los cuatro puntos mostrados



A) 2
B) 4
C) 6
D) 3
E) 7

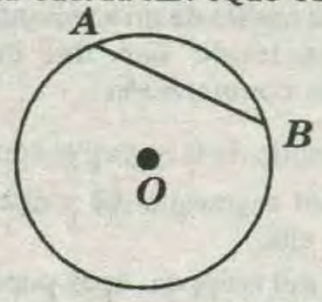
13 Por el método de la regla y el compás construya un triángulo y trace las mediatrices de sus lados. Indique en cuántos puntos se cortan.

A) En uno. *B) En tres.* *C) En cuatro.*
D) En dos. *E) En ningún punto.*

14 Cuántos segmentos se pueden obtener con tres puntos no colineales?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

15 Por el método de la regla y el compás trace la mediatriz de la cuerda *AB*. ¿Qué observa de esta recta?



A) No pasa por el centro. *B) Pasa por el centro.*
C) A veces pasa. *D) Sin precisar.*
E) Todas se cumplen

16 Utilizando el criterio anterior, dibuje una circunferencia y ubique su centro.

17 Complete de manera adecuada lo que a continuación se menciona.

A) Si "M" es un punto que biseca al segmento, entonces lo_____en partes iguales.

B) Con tres puntos colineales se puede obtener _____ segmentos.

C) Dos puntos cualesquiera determinan un_____

18 Relacione correctamente las informaciones de ambas columnas.

A) $\overrightarrow{PQ}$ *( ) Pie de la oblicua*

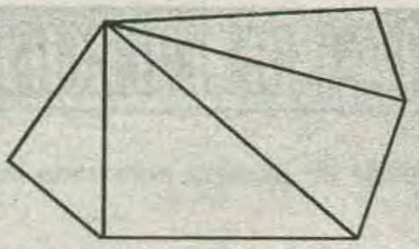
B) $m\overline{PQ}$ *( ) Vector PQ*

C) *( ) Medida del segmento PQ*

D) *( ) Pie de la perpendicular*

19 Indique el número de segmentos que hay en la figura

A) 3
B) 6
C) 9
D) 12
E) 13



20 Indique verdadero *(V)* o falso *(F)* lo que a continuación se menciona:

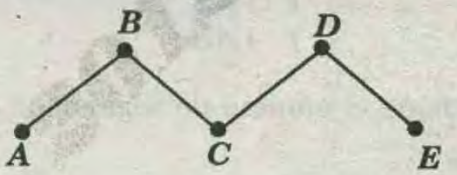
* $\overline{PQ}$ es la notación del segmento *PQ*. ( )

* $m\overline{PQ}$ indica la medida del segmento *PQ*. ( )

* El segmento tiene un número limitado de puntos. ( )

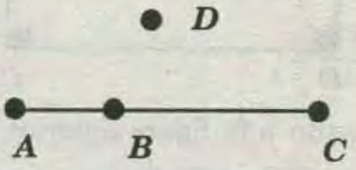
21 Indique el número de segmentos en la figura.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



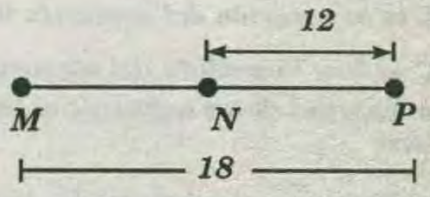
22 Cuántos segmentos se pueden formar con los puntos *A, B, C* y *D*?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

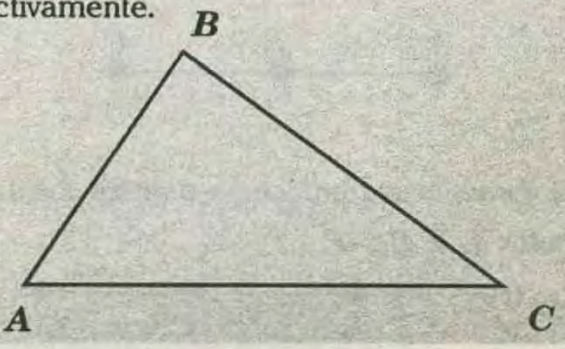


23 Hallar las medidas de $\overline{MN}$ y $\overline{NP}$, de acuerdo a la figura

A) 12 y 24
B) 12 y 12
C) 24 y 24
D) 6 y 12
E) F.D.



24 Mediante el método de la regla y el compás, ubique *"M"* y *"N"*. los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. respectivamente.

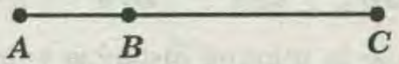


25 De acuerdo al problema anterior, usando solamente el compás como instrumento de comparación, ¿qué puede decir de las medidas de $\overline{MN}$ y $\overline{AC}$?

A) $MN=AC$ B) $MN=\frac{1}{3}AC$ C) $MN=\frac{1}{2}AC$
D) $MN=2AC$ E) $MN=3AC$

PRACTICA DE EJERCICIOS #4

01 De acuerdo a la figura, indicar si es verdadero *(V)* o falso *(F)* lo que a continuación se menciona.

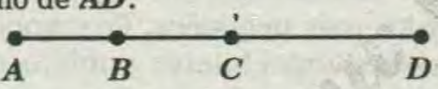


A) $AB \cup BC = AC$ .....( )
B) $AB \cap BC = AC$ .....( )
C) $AB \cap BC = B$ .....( )
D) $AB + BC = AC$ .....( )

02 De acuerdo a la figura, calcule *BC*, si $AD=10$, $AC=8$ y $BD=6$.

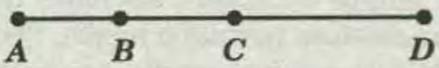
A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

03 Hallar $m\overline{BC}$, si: $AB=10$, $BD=24$ y *"C"* es punto medio de *AD*.



A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 8

04 Halle el valor de $m\overline{BC}$, si: $AB=14$, $BD=18$ y *"C"* es punto medio de *AD*.



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

05 Relacione de manera adecuada lo que a continuación se menciona.

* El postulado de la reunión, indica que el ..... es igual a la suma de las .....
* Dos segmentos son ..... si tienen la misma longitud.
* Si: $AB>PQ$, entonces la expresión $AB \div PQ$ es mayor que .....

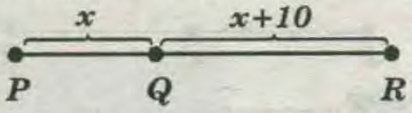
06 Si: *A*, *B*, *C* y *D* son puntos colineales y consecutivos, halle el valor de *"BC"* cuando $AC=BD=3$ y $AD=5$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0,5 E) 1,5

07 Halle el valor de *"BC"*, si $AD=12$, $AC=10$ y $BD=9$.

A) 5 B) 4 C) 6 D) 8 E) 7

08 Halle el valor de *"x"*, si $PR=30$.

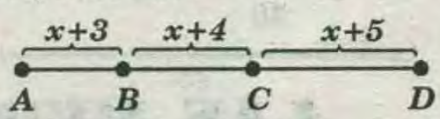


A) 8 B) 20 C) 10 D) 15 E) 6

09 Calcule el valor de "ω" en la siguiente figura, si $AB=12$.

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

10 Halle el valor del menor segmento determinado, si $AD=21$.

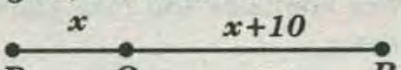


A) 12 B) 2 C) 6 D) 3 E) 4

11 Del problema anterior, halle el valor de: *CD–BC*.

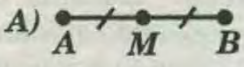
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

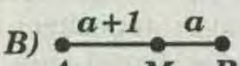
12 De la figura, encuentre el valor de: *QR–PQ*.

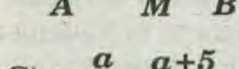


A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) F.D.

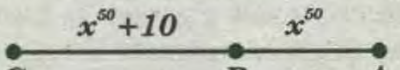
13 Relacione de manera adecuada los datos de ambas columnas.

A)  ( ) $MB-MA=5$

B)  ( ) $AM=MB$

C)  ( ) $AM>MB$

14 De acuerdo a la figura, halle el valor de: *BC–AB*.

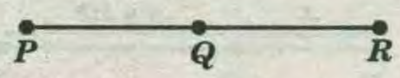


A) 5 B) 10 C) x^{50} D) 0 E) F.D.

15 Del problema anterior, indique si es verdadero *(V)* o falso *(F)* lo que se menciona:

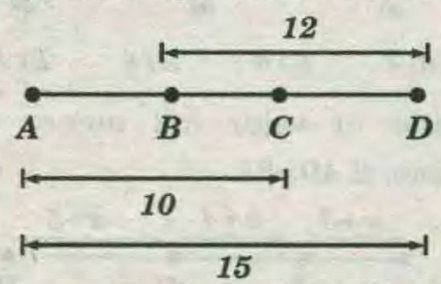
* $CB < BA$ .....( )
* $CB > BA$ .....( )
* $CB - BA = 10$ .....( )
* $CB = BA$ .....( )

16 De acuerdo a la figura indicar, si es verdadero *(V)* o falso *(F)* lo que a continuación se menciona.



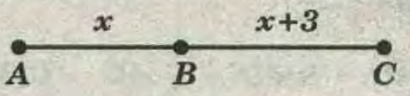
* $PQ + QR = PR$ ..... ( )
* $PR - QR = PQ$ ..... ( )
* $PQ \cup QR = PR$ ..... ( )
* $PR \cap PQ = PQ$ ..... ( )

17 De la figura, indique el valor de *"BC"*.



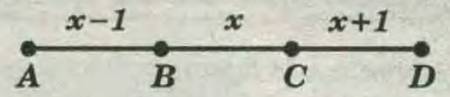
A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 4

18 De la figura, halle la longitud del menor segmento, si: $AC = 10$.



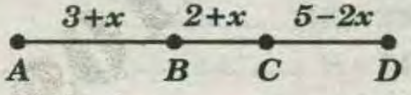
A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

19 Halle el valor de la longitud del menor segmento, si $AD = 27$.



A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

20 Calcule la mínima distancia entre los puntos *"A"* y *"D"*.



A) 5 B) 10 C) 7 D) 8 E) Imposible

LAS MEDIDAS DEL CUERPO

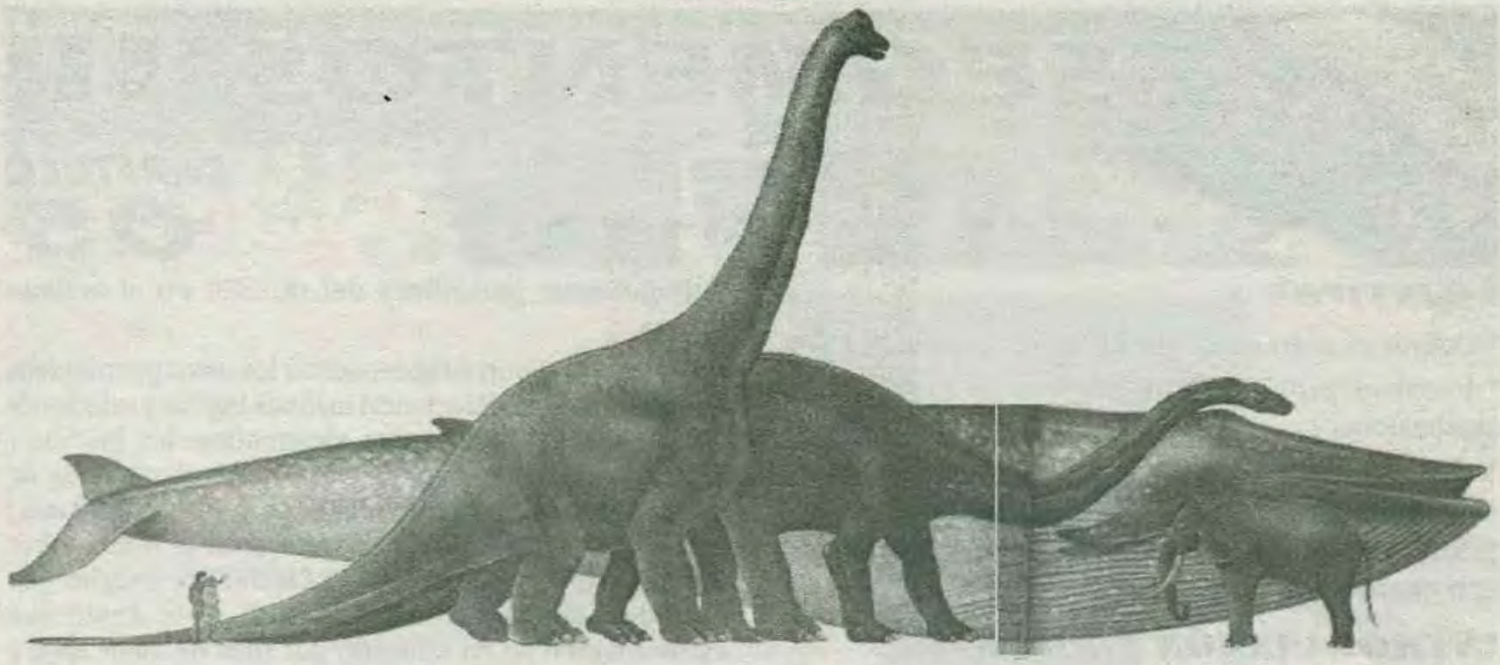
DESDE SU APARICIÓN sobre la Tierra en tiempos prehistóricos, los humanos han conseguido establecerse en multitud de hábitats diferentes. Su éxito no obedece a su tamaño o su fuerza. ya que otros muchos animales son más grandes y mucho más poderosos.

Los grandes dinosaurios fueron los animales más pesados y de mayor tamaño que jamás pisaran la tierra. Un dinosaurio, llamado *diplodocus,* medía casi *27m* de cabeza a cola. Otro dinosaurio. el *braquiosaurio,* era más corto, pero pesaba más de *70* toneladas. En comparación , el animal de mayor tamaño de nuestros días , el elefante africano, puede medir hasta *4 m* de altura, y puede pesar más de *12* toneladas. En el mar , donde son posibles los pesos mayores gracias a la sustentación del agua, el animal más grande de nuestros días es la ballena azul. Este gigantesco mamífero ha llegado a alcanzar longitudes de más de *33 m* y a pesar casi *200* toneladas.

Comparada con estos gigantes la especie humana es pequeña. Si contemplamos la totalidad del reino animal, comprobamos que las medidas de nuestra especie se encuentran entre los animales muy grandes y los más pequeños. En comparación con los protozoos, unicelulares y microscópicos , o incluso los insectos más grandes ,somos gigantes.

Si midiéramos un centenar de niños de exactamente diez años, comprobaríamos que algunos son muy altos para su edad. y otros más bajos. Al igual que todos los grupos de edad , los niños de diez años tienen una estatura normal o media. Para encontrar el valor de esta estatura media, necesitamos sumar las estaturas de los cien niños y dividir el total entre cien. Confirmaríamos que esta estatura media se correspondería con la de la mayor parte de los niños del grupo. Si repitiéramos los cálculos para un grupo de niñas de la misma edad, su estatura media sería dos centímetros menor. Esto obedece a que en los humanos , los niños son siempre más altos que las niñas por término medio. Tal vez conozcáis a alguna niña de diez años que sea más alta que un niño de la misma edad , pero esto no es típico.

Resulta muy interesante el ritmo de crecimiento de los humanos. Al nacer, los bebés miden unos *50* centímetros por término medio, y crecen hasta una



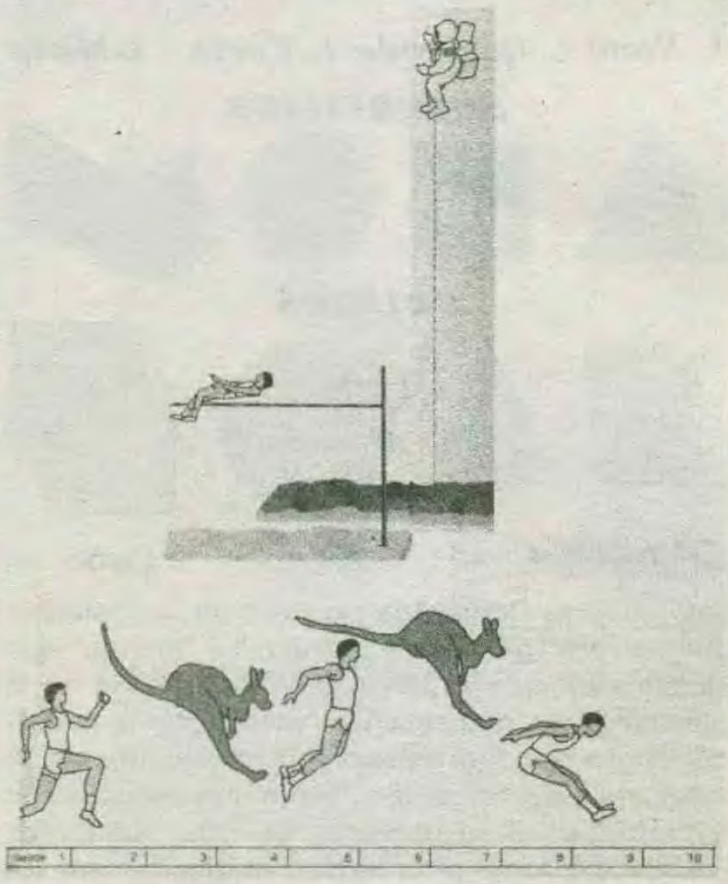
media de ***86*** centímetros a los dos años. A partir de esta edad, y hasta los cinco años, crecemos a un ritmo más lento de ***5*** centímetros por año. Cuando nos hacemos adolescentes, nuestro crecimiento disminuye hasta que, alrededor de los veintiún años, dejamos de crecer. Por término medio, los niños son más altos que las niñas pero las niñas alcanzan su estatura máxima con menos años. También la época del año afecta a nuestro crecimiento. En invierno crecemos muy despacio, pero compensamos esto creciendo más deprisa en primavera y comienzos del verano.

El patrón de crecimiento en peso es muy similar al del incremento en estatura. Por término medio el niño de diez años pesa más que una niña de la misma edad. Si pesáramos a grupos similares de niños en varios países del mundo, comprobaríamos que cada grupo tiene un peso medio diferente. El peso que alcanzamos a una edad determinada depende de muchas cosas. En primer lugar heredamos de nuestros padres nuestro aspecto general y nuestra capacidad de crecer. En segundo lugar, la cantidad de ejercicio que hagamos influirá en el desarrollo de nuestros músculos y huesos. Finalmente, la cantidad y calidad de la comida afectará el ritmo de nuestro crecimiento, así como nuestro tamaño definitivo. En los últimos ochenta años, la altura y peso medios de los niños del mundo ha aumentado en todos los grupos de edad. Un niño de trece años mide trece centímetros y pesa veintiún kilos más, que un niño de su misma edad a comiensos de siglo.

El corazón humano late unas ***72*** veces por minuto, por término medio y en condiciones normales. Si hacemos ejercicio, esta cifra aumenta. Nuestra tensión sanguínea es también bastante constante, a menos que nos excitemos. Cuando esto ocurre, aumenta.

Una de las medidas más interesantes de la fuerza humana y del desarrollo muscular se da en el campo del atletismo. Al saltar tenemos que vencer la atracción de la Tierra, o gravedad. Por esto, ni siquiera los mejores atletas han podido superar los ***2,36*** metros de altura, ni los ***9*** metros de longitud. Si el mejor saltador de altura efectuara su salto sobre la Luna, podría saltar más de ***14*** metros debido a que la atracción de la gravedad es la sexta parte que en la Tierra. El tamaño, el peso y la potencia muscular influyen en el rendimiento. La diminuta pulga es capaz de saltar hasta ***19,7*** centímetros: más de ***130*** veces su peso. Un atleta humano, si fuera igual de eficaz, debería saltar ***260*** metros de altura.

No todas las medidas corporales varían tanto en los humanos. Nuestra temperatura corporal, por ejemplo, permanece normalmente constante, a ***37°*** C. Si nuestra temperatura aumenta o disminuye nos ponemos enfermos, y podemos incluso morir si esa variación es superior a un cierto número de grados.



SEGMENTOS II

CAPITULO 05

OBJETIVOS :

* Definir el segmento, operaciones con segmentos.
* Resolver problemas de segmentos numéricos y algebraicos.
* Conocer la división de un segmento en media y extrema razón.
* Conocer la división armónica y resolver problemas tipo examen de admisión.

INTRODUCCIÓN :

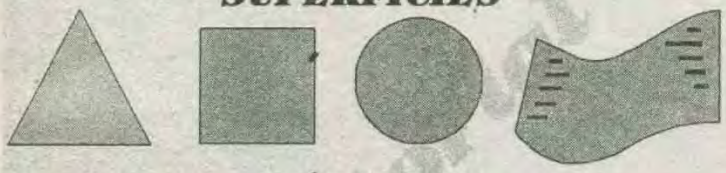
La geometría es la ciencia que estudia las propiedades de la figuras geométricas , y relación entre ellas.

Una figura geométrica es un conjunto no vacío de puntos, representadas por la líneas , superficies y sólidos. Toda figura se distingue de otra , por su tamaño y forma.

LINEAS

L. Recta L. Quebrada L. Curva L.Mixta

SUPERFICIES



SÓLIDOS

Cilindro Cono Esfera Cubo

Las palabras Geometría procede de las palabras griegas "geo" que significa "Tierra" y "metron" que significa medida es decir geometría deriva de la palabra griega que significa "medida de la tierra", concepto que no estuvo muy desligado de la realidad en sus comienzos, como una necesidad de solucionar el problema de los deslindes (delimitaciones) de la tierra , originadas por las inundaciones periódicas del río Nilo en el antiguo Egipto.

Los griegos tralaron de sistematizar los datos geométricos que conocían, estableciendo razones lógicas y relaciones entre ellos. El trabajo para sistematizar los hechos y principios geométricos por hombres, como Tales de Mileto (***600 a.c.***) Pitágoras (***570 a.c.***), Platón (***390 a.c.***) y Aristóteles (***350 a.c.***), culminó con el texto sobre GEOMETRÍA titulado : *ELEMENTOS,* escrito por Euclides alrededor de ***325 a.C.*** Este texto tan extraordinario se ha utilizado por más de ***2000*** años y por su magnitud e importancia con el transcurrir del tiempo a la fecha se le considera como el ***Padre de la Geometría***.

> Ptolomeo le preguntó una vez a Euclides si habia algún camino más corto para el conocimiento de la geometria por el estudio de los elementos. a lo que Euclides respondió que no habia ningún camino real a la geometria.

DEFINICIÓN :

La geometría es la ciencia que estudia las propiedades de las figuras geométricas.

OBJETO DE LA GEOMETRÍA

El objeto original de la Geometría Euclideana es el estudio de las figuras geométricas desde el punto de vista de su forma, extensión y relaciones que guardan entre sí.

EXTENSIÓN :

Es la porción de espacio que ocupa una figura geométrica, llamándose extensión volumétrica para un sólido, extensión superficial para una superficie, y extensión lineal a la que ocupa una línea.

FORMA :

Es la manera de estar limitada la figura.

TAMAÑO :

De un sólido se mide por su volumen, el de una superficie por su área, y el de una línea por su longitud.

ELEMENTOS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRÍA

Son ***el punto , la recta*** y ***el plano*** , no tienen

definición, sólo se pueden representar mediante ideas.

EL PUNTO :

Es un concepto imaginario, tiene posición. No tiene dimensión.

* Tiene ubicación, no tiene longitud : Anchura o grosor.

* Lo idealizamos al cortarse dos rectas

* Un punto dibujado a diferencia de un punto conceptual , tiene tamaño.

La idea física de posición nos sugiere la idea matemática de punto; así un vértice de una caja rectangular o el centro de la Tierra, nos da la noción de punto. También la idea de punto está gráficamente asociada con la marca que en una hoja de papel hace la punta de un lápiz muy afilado.

Un punto se representa por medio de una marquita redonda o un aspa, indicado generalmente por una letra mayúscula.

EJEMPLOS:

$\cdot A \quad \cdot B \quad \times C \quad \times D$

LA RECTA :

Es un concepto imaginario. Tiene dirección. Tiene una dimensión. No se puede medir. Es ilimitada con ambos sentidos. La idea de línea recta está relacionada físicamente con la imagen de un único rayo de luz que se propaga en el aire, con la imagen de un hilo muy delgado, perfectamente tenso y extendido indefinidamente en ambos sentidos.

Una recta se representa por medio de dos letras mayúsculas con el símbolo $\leftrightarrow$ encima o con una letra.

EJEMPLO: $\overleftrightarrow{AB}$ *ó* $\mathscr{L}$

$A \in \mathscr{L}$

$B \in \mathscr{L}$

LA LÍNEA :

* Es un concepto imaginario.

* Tiene longitud pero no anchura o grosor .

* No se puede medir .

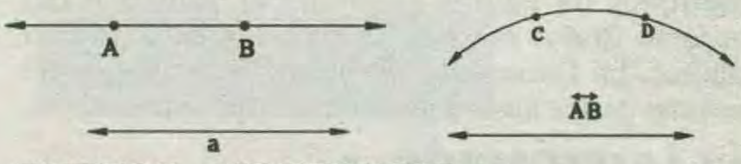
* Es ilimitada en ambos sentidos .

* Puede ser recta , curva o una combinación de ambas.

* La línea recta tiene dirección.

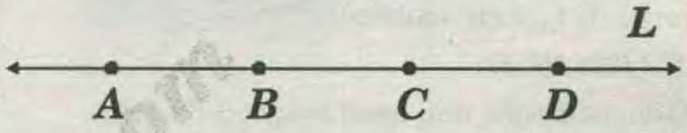
Una línea se designa con letra mayúsculas en dos puntos cualesquiera sobre ella o con una letra minúscula. La doble flecha , pone de manifiesto que la línea se extiende indefinidamente en ambos sentidos.

EJEMPLO :



PUNTOS COLINEALES :

Se llama puntos colineales a aquellos que pertenecen a una misma recta . Si se indica en un orden determinado , se dirá que son consecutivos.



A , B , C y *D* son puntos colineales (están en *L*) y son consecutivos .

PUNTOS NO COLINEALES :

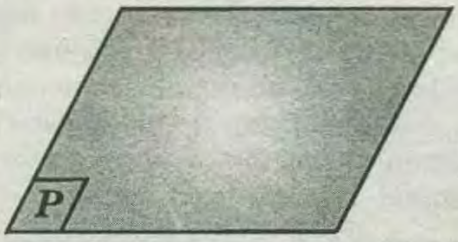
Son aquellos que no están ubicados en una misma línea recta.

EL PLANO

Es un concepto imaginario. Tiene dos dimensiones. No se puede medir. No tiene espesor. Superficie plana ilimitada en todo sentido.

La idea de plano nos da la superficie de una mesa, de la pizarra, de las paredes, que se extienden indefinidamente en todas las direcciones.

Lo representamos como un paralelogramo.



POSTULADOS SOBRE PLANOS

* Existen infinitos planos.

* Por tres puntos no colineales pasa un plano y solamente uno.

* En cualquier plano existen infinitos puntos y rectas.

FIGURAS GEOMÉTRICAS

Una figura geométrica es un conjunto no vacío de puntos.

Ejemplos de figuras geométricas planas (todos sus puntos están en el mismo plano). La Geometría Plana estudia las figuras planas .

Ejemplos de figuras geométricas sólidas o del espacio (todos sus puntos no están en el mismo plano). La Geometría del Espacio se ocupa del estudio de las figuras geométricas del espacio.

CLASIFICACIÓN :

Las figuras geométricas se clasifican en:

A) FIGURAS CONGRUENTES :

Si tienen igual forma e igual tamaño (medidas respectivamente iguales).

EJEMPLO:

Dos cuadrados con igual longitud de lado.

B) FIGURAS SEMEJANTES :

Si tienen igual forma, pero distinto tamaño (medidas respectivamente proporcionales).

EJEMPLO:

Dos circunferencias cuyos radios tienen diferente longitud.

C) FIGURAS EQUIVALENTES :

Si tienen igual área (figuras planas) e igual volumen (figuras sólidas).

EJEMPLO:

Un cuadrado y un círculo de igual área. Un cilindro y una esfera de igual volumen.

ESPACIO GEOMÉTRICO

Las figuras geométricas ocupan cierto lugar. Es de admitir que existe un conjunto universo (una caja infinitamente grande) en donde se encuentra todos los puntos, todas las figuras geométricas cualquiera sea orientación , ubicación , tamaño. *A* este conjunto se le denomina ***espacio geométrico.***

TERMINOS MATEMÁTICOS

PROPOSICIÓN :

Es un enunciado que tiene valor de verdad.

AXIOMA :

Es una proposición evidente que no necesita demostración.

EJEMPLOS:

* El todo es igual a la suma de sus partes.

* El todo es mayor que cada una de sus partes.

* « Dos puntos cualesquiera , determinan una única línea recta »

POSTULADO :

Es una proposición que se admite sin demostración. aunque no tiene la evidencia del axioma.

EJEMPLO:

El Postulado de Euclides: *«Por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una paralela a dicha recta».*

Las geometrías no-euclideanas negaron este postulado.

TEOREMA :

Es una proposición que para ser evidente, necesita una demostración.

EJEMPLO:

«La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos».

COROLARIO :

Es un teorema, es una secuencia de un teorema ya demostrado.

EJEMPLO:

«La suma de las medidas de los ángulos internos agudos de un triángulo rectángulo es igual a un ángulo recto».

LEMA :

Es un teorema preliminar que sirve de base para la demostración de otras proposiciones.

ESCOLIO :

Es una advertencia u observación que se hace a un teorema. con el fin de aclarar o restringir proposiciones anteriores.

PROBLEMA :

Enunciado en el cual se plantea hallar una cantidad desconocida o construir alguna figura, según las condiciones dadas (datos).

NOTACIÓN :

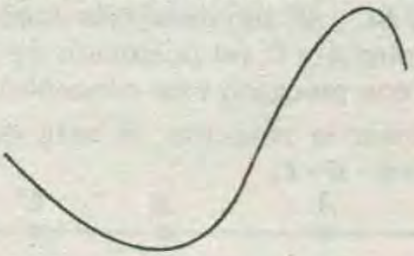
Es la presentación o simbolización de una figura o elemento geométrico.

LÍNEA RECTA :

Todos sus puntos siguen una misma dirección.

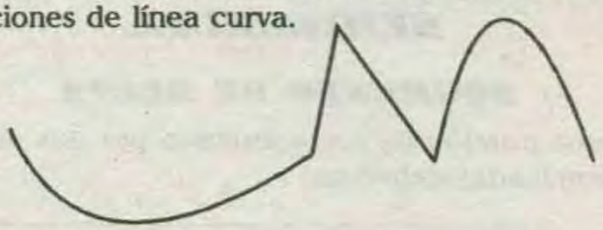
LÍNEA CURVA :

Es una sucesión de puntos en la que no tiene *3* puntos consecutivos que sigan la misma dirección.



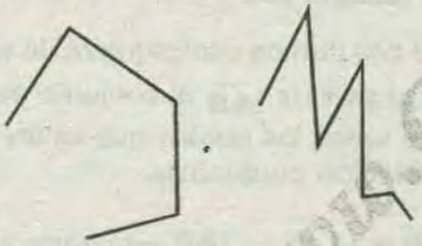
LÍNEA MIXTA :

Está formada por porciones de línea recta y porciones de línea curva.



LÍNEA QUEBRADA :

Está formada por porciones de línea recta no alineados que se encuentran unos a continuación de otros.



La Línea recta se define el camino más corto entre dos puntos. Es poco frecuente en la naturaleza, donde predominan las líneas curvas (el universo en su totalidad es curvo), pero muy abundante en el entorno humano, que necesita de ellas para dar estabilidad a sus creaciones.

La línea recta horizontal expresa equilibrio, calma, equilibrio estable. No hay estabilidad sin una línea recta horizontal de referencia, una línea de horizonte, ya que nos movemos en un plano horizontal.

La Línea curva Es la línea más libre y la más dinámica de todas, pudiendo sugerir desde un movimiento perfectamente definido hasta un movimiento caótico, sin reglas.

AXIOMAS PARA LA RECTA

- Toda recta contiene por lo menos dos puntos.
- Existen por lo menos tres puntos no colineales.
- Por dos puntos distintos pasa una sola recta.

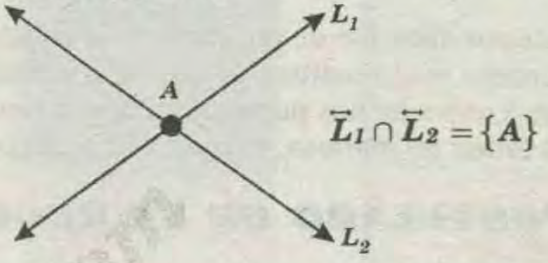
PRIMEROS TEOREMAS

- Si dos rectas diferentes se intersecan, entonces su intersección es exactamente un punto.
- Existen por lo menos tres rectas en un plano.

POSICIONES DE DOS RECTAS EN EL PLANO

RECTAS SECANTES :

Dos rectas que tienen un solo punto común se denominan rectas secantes; el punto común es el punto de intersección.



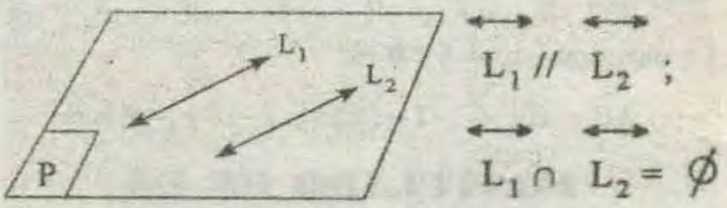
Las rectas L_1 y L_2 son rectas secantes y se intersecan en *A*.

RECTAS PARALELAS :

Dos rectas son paralelas, si :

i) son coplanares.

ii) no tienen ningún punto común.



POSTULADO DE LA PARALELA :

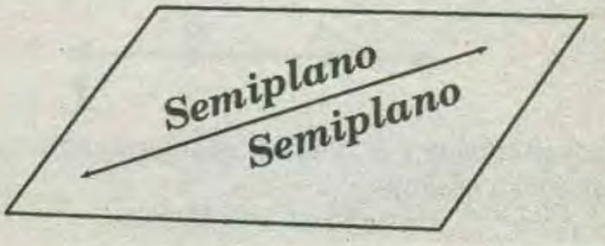
(Postulado de Euclides),«Por un punto exterior a una recta, pasa solamente una recta paralela a la recta dada».

RECTAS COINCIDENTES :

Si tienen dos puntos comunes.

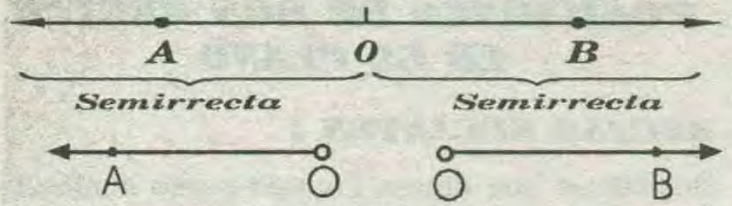
SEPARACIÓN DEL PLANO

El plano es separado por una Recta en dos diferentes subconjuntos de puntos llamados Semiplanos.



SEPARACIÓN DE LA RECTA

La recta es separado por un punto O en dos diferentes subconjuntos de puntos llamados ***Semirrectas*** y se simboliza $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{AB}$. La semirrecta no contiene el punto de origen O.



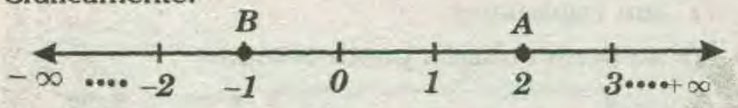
POSTULADO DE LA DISTANCIA

«A cada par diferente de puntos A y B le corresponde un número real positivo, al que denominaremos distancia entre dichos puntos y lo denotaremos por AB (el orden no interesa, esto es, $AB = BA$)».

POSTULADO DE LA REGLA

«Para una recta dada existe una correspondencia biunívoca entre ella y los números reales, de manera que la distancia entre dos puntos cualesquiera, es igual al valor absoluto de la diferencia entre sus números correspondientes» .

Gráficamente:

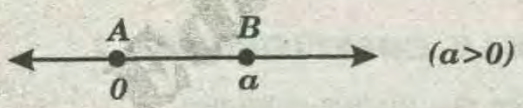


La distancia entre A y B es:

$$AB = BA = |-1-(2)| = |-1-2| = |-3| = 3$$

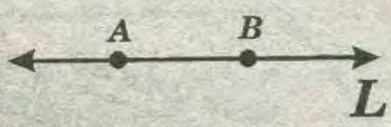
POSTULADO DE LA COLOCACIÓN DE LA REGLA

«Dados dos puntos A y B de una recta, es posible escoger un sistema de coordenadas, de manera que la coordenada de A sea cero y la de B sea positiva».



POSTULADO DE LA REGLA

Dos puntos distintos determinan una única recta que los contiene.



Los puntos A y B definen exactamente a la recta L que los contiene .

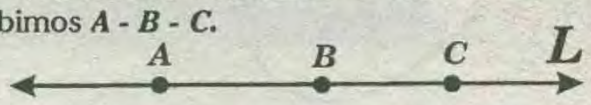
$$A \in L \wedge B \in L$$

LA RELACIÓN ENTRE PUNTOS DE UNA RECTA

Sean A, B y C tres puntos distintos de la misma recta, diremos que B está entre A y C sí y sólo sí $AB + BC = AC$.

Donde AB, BC y AC son distancias entre A y B, entre B y C y entre A y C (el postulado de la distancia establece con precisión este concepto).

Para denotar la relación: B está entre A y C, escribimos $A - B - C$.



$$AB+BC=AC$$

SEGMENTO , RAYO Y SEMIRRECTA

SEGMENTO DE RECTA

Es una porción de recta limitado por dos puntos denominados extremos.

Se denota por $\overline{AB}$ y se lee segmento AB. La medida de un Segmento AB denota por $m\,\overline{AB}$ o AB , es un número positivo que compara la longitud del segmento unitario (u).

Sean A y B dos puntos cualesquiera de una recta. Se denomina segmento $\overline{AB}$ al conjunto de los puntos: A y B y de todos los puntos que están entre A y B. Usando notación conjuntista:

$$\overline{AB} = \{A,B\} \cup (P/P \text{ está entre } A \text{ y } B)$$

A y B son los extremos del segmento.

La longitud del segmento $\overline{AB}$ es el número AB, que especifica la distancia entre A y B.

La distancia de A a B es lo mismo que decir , la medida del segmento AB.

LONGITUD DE UN SEGMENTO

Expresa el tamaño o medida de un segmento y resulta de la comparación del segmento con otro , que es tomado como unidad (metro) ; por ejemplo: si un segmento contiene 4 veces la unidad (metro) entonces dicho segmento tiene una longitud de 4 m.

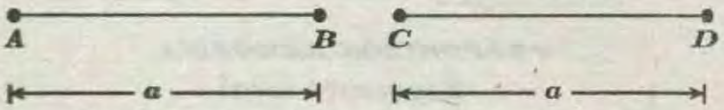
Si la longitud de un segmento no se conoce , ésta convencionalmente se indicará con una letra latina minúscula. Así , por ejemplo si a es la longitud del segmento AB ; entonces $AB=a$

AB: se lee "longitud del segmento *AB*"

SEGMENTOS CONGRUENTES

Dos segmentos son congruentes , si tiene la misma longitud.

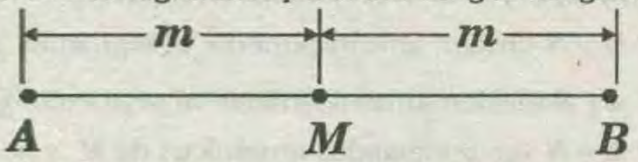
Si: $AB=CD$, entonces dichos segmentos son congruentes y se escribe : $\overline{AB} \cong \overline{CD}$



La relación de congruencia para segmentos es una relación de equivalencia.

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

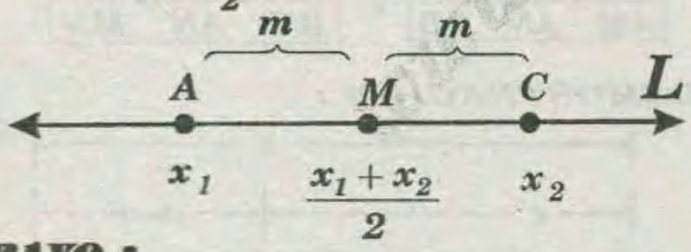
Es aquel punto que pertenece al segmento y que lo divide en dos segmentos parciales de igual longitud.



Si: $M \in AB$ y $AM=MB$; entonces *M* es el punto medio de *AB*.

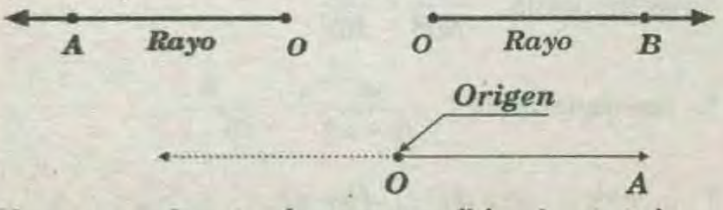
El punto medio de un segmento se dice que biseca ***(punto bisector)*** al segmento. Todo segmento tiene exactamente un punto medio.

Si los puntos extremos de $\overline{AB}$ tienen coordenadas «x_1» y «x_2» entonces su punto medio tiene coordenada $\frac{x_1+x_2}{2}$



RAYO :

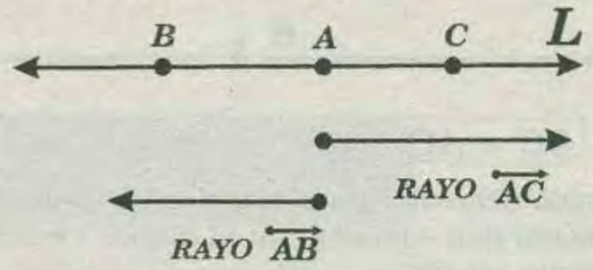
La unión del conjunto que contiene al punto *O* y una semirrecta se llama ***RAYO*** , y se simboliza por $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{AB}$. El punto *O* se llama punto de origen del rayo.



Un rayo se denota siempre escribiendo en primer lugar el origen y luego otro punto de él.

RAYOS OPUESTOS :

Si un punto *A* está entre *B* y *C* se dice que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son dos rayos opuestos.



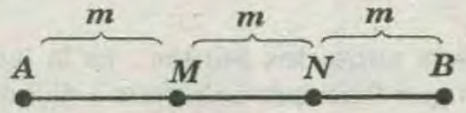
SEMIRRECTA :

Una semirrecta es un rayo sin su origen; es decir, el conjunto $\overrightarrow{AB} - \{A\}$ que denotaremos por $\overrightarrow{AB}$.

PUNTOS DE TRISECCIÓN DE UN SEGMENTO

Son dos puntos que pertenecen al segmento y los divide en tres segmentos de igual longitud.

EJEMPLO :



M y *N* son puntos de trisección de $\overline{AB}$.

Si : $AM = MN = NB$

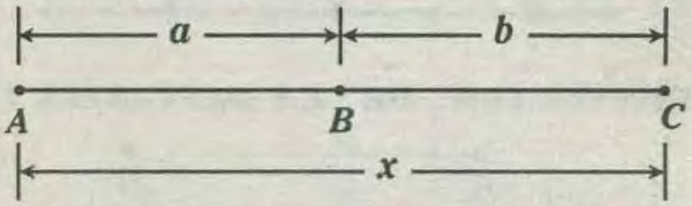
PUNTOS COLINEALES : Son puntos por los cuales se puede trazar una línea recta que los contienen.

PUNTOS COPLANARES : Son puntos que están ubicados en un mismo plano.

OPERACIONES CON LAS LONGITUDES DE SEGMENTOS

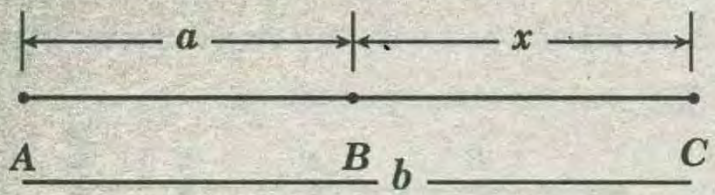
ADICIÓN DE SEGMENTOS :

Para sumar dos segmentos cualesquiera, se toman en una recta dos segmentos consecutivos cualesquiera y congruentes respectivamente a los segmentos que se quiera sumar.



$\boxed{AC = AB + BC}$ ó $\boxed{x = a + b}$

SUSTRACCIÓN DE SEGMENTOS :



$$\boxed{BC = AC - AB} \quad \text{ó} \quad \boxed{x = b - a}$$

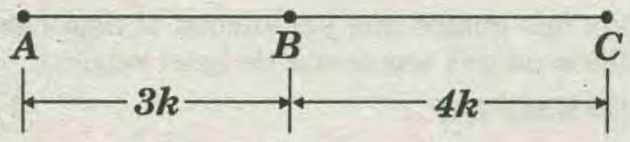
Se llama diferencia de dos segmentos a un tercer segmento que sumado con el menor , resulta el segmento mayor.

RELACIÓN DE SEGMENTOS :

Si se cumple que :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} AB = 3k \\ BC = 4k \end{cases}$$

Gráficamente :

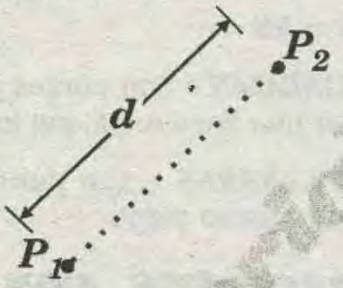


NOTA :

La distancia entre dos puntos , es la longitud de segmento que tiene por extremos a dichos puntos.

Sean P_1 y P_2 dos puntos dados :

* Si : $P_1P_2 = d$
* Luego:



d: distancia entre P_1 y P_2

AXIOMA DE ORDEN EN LA LÍNEA RECTA

Si los puntos A , B , C son colineales y $AB+BC = AC$, entonces se dice que B está entre A y C ó B está entre C y A .

POSTULADO DE LA DISTANCIA :

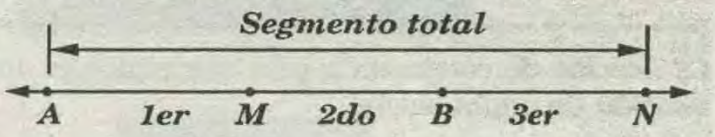
La distancia más corta entre dos puntos viene a ser el segmento de recta que los une.

DIVISIÓN ARMÓNICA

Se dice que los puntos colineales y consecutivos A, M, N y B constituyen una «cuaterna armónica», si cumple la siguiente relación:

$$\boxed{\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{BN}} \qquad \boxed{\frac{1er}{2do} = \frac{Segmento\ total}{3er}}$$

PROPORCIÓN ARMÓNICA



Los puntos A y B son los conjugados armónicos de M y N. También suele decirse que M y N dividen armónicamente al segmento $\overline{AB}$.

* A, M, B y N es una cuaterna armónica.
* M y N dividen armónicamente al segmento $\overline{AB}$.
* A y B dividen armónicamente al segmento $\overline{MN}$.
* M y N son conjugados armónicos de M y N.

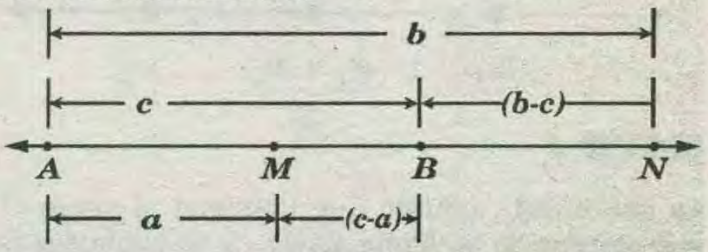
De la proporción armónica se deduce que: $BN > MB$ porque $AN > AM$, y también se deduce que $AM > MB$ porque $AN > BN$.

En toda división armónica , se cumple las siguiente relaciones :

RELACIÓN DE RENE DESCARTES

$$\boxed{\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{2}{AB}} \quad \text{ó} \quad \boxed{\frac{1}{BN} + \frac{1}{AN} = \frac{2}{MN}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Haciendo $AM = a$, $AN = b$, $AB = c$
* Por Hipótesis : $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{BN}$
* Reemplazando : $\frac{a}{(c-a)} = \frac{b}{(b-c)}$
* Invertir: $\frac{(c-a)}{a} = \frac{(b-c)}{b}$

* Desdoblando:

$$\frac{c}{a}-\frac{a}{a}=\frac{b}{b}-\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{c}{a}-1=1-\frac{c}{b}$$

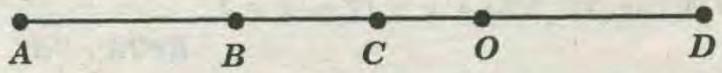
$$\Rightarrow\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=2\Rightarrow c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2$$

* Relación De René Descartes:

$$\rightarrow\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c}}\Rightarrow\boxed{\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{2}{AB}}$$

RELACIÓN DE ISAAC NEWTON

Si *A, B, C* y *D* constituyen una «cuaterna armónica»,

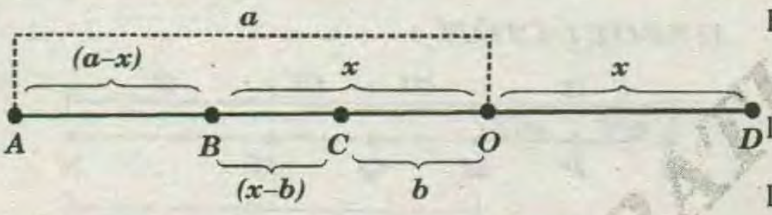


y *"O"* punto medio de *BD*.

Se cumple la siguiente relación :

$$\boxed{OB^2=(OA)\times(OC)}$$

DEMOSTRACIÓN:



Haciendo: $OB = OD = x$, $OA = a$, $OC = b$.

Por hipótesis: $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}$

Reemplazando: $\frac{a-x}{x-b}=\frac{a+x}{b+x}$

$\Rightarrow (x-b)(a+x)=(a-x)(b+x).$

$\Rightarrow ax+x^2-ab-bx=ab+ax-bx-x^2\Rightarrow 2x^2=2ab$

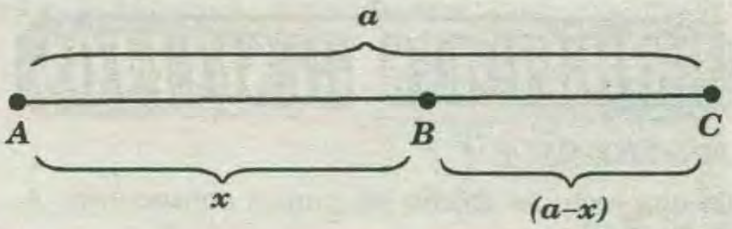
$\boxed{x^2=ab}$, x es media geométrica de «a» y «b».

$\boxed{OB^2=OA\times OC}$ .....Relación de Newton.

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN

Dividir un segmento en dos segmentos, de tal manera que la longitud del segmento mayor sea media proporcional entre las longitudes de la parte menor y el total.

Si dividimos al segmento $AC = a$ en dos partes AB y BC, tal que $AB^2 = BC\times AC$.



$$\boxed{\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{AB}}\ \text{ó}\ \boxed{\frac{a-x}{x}=\frac{x}{a}}$$

Al segmento mayor $\overline{AB}$ se le llama porción áurea del segmento total $\overline{AC}$.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

Apl icanda las proplcdadcs de las proporciones a la relación: $\frac{a-x}{x}=\frac{x}{a}$

Tenemos: $\frac{a-x+x}{x}=\frac{x+a}{a}$

Es decir: $\frac{a}{x}=\frac{x+a}{a}$

Invirtiendo: $\frac{x}{a}=\frac{a}{x+a}$

De donde se deduce el teorema siguiente:

«Si a un segmento dado le sumamos su porción áurea, se obtiene otro segmento cuya porción áurea es el segmento dado».

CÁLCULO DE LA PORCIÓN ÁUREA DE UN SEGMENTO

De la relación : $\frac{a-x}{x}=\frac{x}{a}$

Multiplicando en aspa: $x^2 = a(a-x)$

$$x^2+ax-a^2=0\ \ ;a>0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-a+\sqrt{a^2-4(1)(-a^2)}}{2(1)}=\frac{-a+a\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{x=\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}\text{.....Porción áurea}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0{,}6180\ldots\ \text{Número áureo}$$

WWW.GRATIS.COM

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

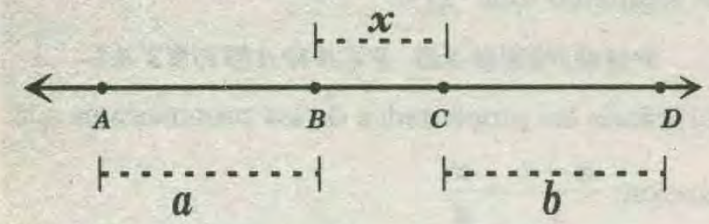
En una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C* y *D* tal que :

$$AB + CD = 2(BC) \text{ y } AC + CD = 21$$

Calcule *BC*.

A) 3,5 D) 6 B) 5 C) 4 E)7

RESOLUCIÓN :



* Por dato :

$$a + b = 2x \quad \ldots\ldots (I)$$

$$x + a + b = 21 \quad \ldots\ldots (II)$$

* *(I)* en *(II)*:

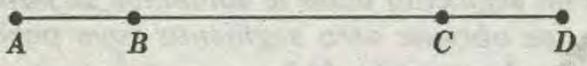
$$x + 2x = 21 \Rightarrow 3x = 21 \rightarrow x = 7$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 2 :

Calcular *"BC"*

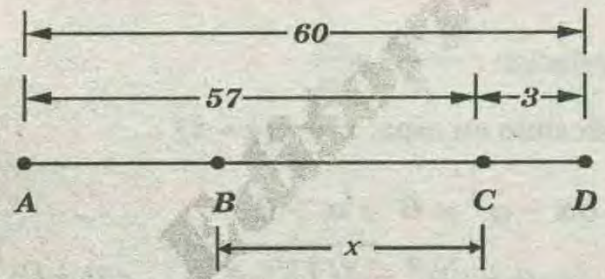
Si : $AD = 60$; $AC = 57$ y $BD = 36$



A)43 B) 33 C) 44 D) 36 E) 22

RESOLUCIÓN

* Colocando datos :



* De La figura :

$$x + 3 = BD \Rightarrow x + 3 = 36$$

$$\Rightarrow x = 33$$

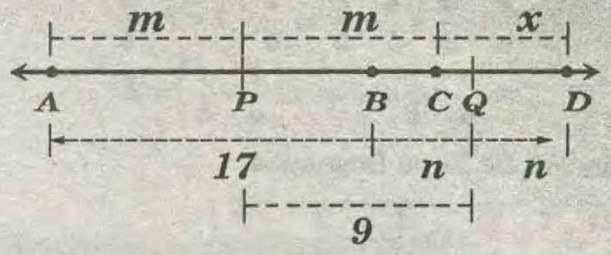
RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C* y *D*. Si *P* y *Q* son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente ; $PQ = 9$ y $AB = 17$, calcule *CD*.

A) 0,5 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN :



* De la figura : $2m + x = 2n + 17$

$$\Rightarrow 2(m - n) + x = 17 \quad \ldots\ldots (I)$$

* También : $m + 9 = n + 17$

$$\Rightarrow m - n = 8 \quad \ldots\ldots (II)$$

* *(II)* en *(I)*: $2(8) + x = 17 \Rightarrow x = 1$

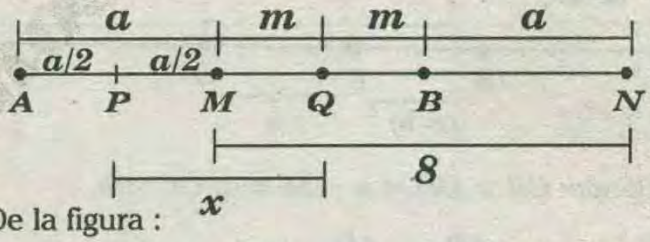
RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

En una recta se ubican los puntos consecutivos *A, M, B* y *N*, tal que $AM = BN$. Si $MN = 8$, calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{MB}$ y $\overline{AM}$.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) $4\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :



* De la figura :

$$2m + a = 8 \quad \ldots\ldots (I)$$

$$m + \frac{a}{2} = x \rightarrow 2m + a = 2x \quad \ldots\ldots (II)$$

* De *(I)* y *(I)*: $2x = 8 \Rightarrow x = 4$

RPTA : "B"

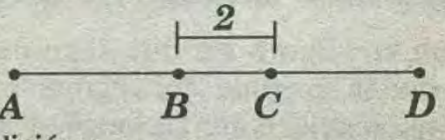
PROBLEMA 5 :

En una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B,* C y *D*. Si $(AC)^2 = (AB)(AD)$ y $BC = 2$.

Calcule : $\frac{1}{AC} + \frac{1}{CD}$

A) 1 B) 1/2 C) 1/3 D) 1/4 E) 2/3

RESOLUCIÓN :



* Por la condición :

$$AC^2 = AB \times AD \quad \ldots\ldots (I)$$

* De la figura :

$$AB = AC - 2 \quad \ldots\ldots (II)$$

$$AD = AC + CD \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (III)$$

* *(II)* y *(III)* en *(I)*:

$$AC^2 = (AC - 2)(AC + CD)$$

$$AC^2 = AC^2 - 2AC + AC \times CD - 2\,CD$$

$$\Rightarrow AC \times CD = 2(CD + AC)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\cancel{CD}}{AC \times \cancel{CD}} + \frac{\cancel{AC}}{\cancel{AC} \times CD} \Rightarrow \frac{1}{AC} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{2}$$

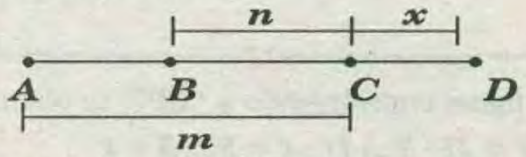
RPTA : "B"

PROBLEMA 6 :

Sobre una línea recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C* y *D* ; además $AC = m$ y $BC = n$. Si $(AC+BC)^2 - 4(AC)(BC) = (CD)^2$, calcule *CD* .

A) $m+n$ *B)* $\sqrt{nm}$ *C)* $n/2$ *D)* $m-n$ *E)* $m/2$

RESOLUCIÓN :



* Por condiciones :

$$(m + n)^2 - 4mn = x^2$$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 + 2mn - 4mn = x^2$$

$$\Rightarrow m^2 - 2mn + n^2 = x^2 \rightarrow x^2 = (m - n)^2$$

$$\Rightarrow x = m - n$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 7 :

El punto *P* divide una recta dada en dos semirectas. Sobre una de ellas están los puntos *A* y *B* y sobre la otra los puntos *C* y *D*. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es cierta?

A) El segmento $\overline{AB}$ *contiene a P*

B) El segmento $\overline{AC}$ *no contiene P*

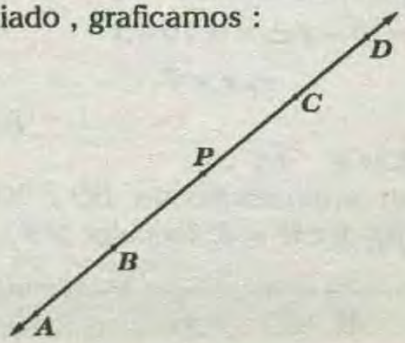
C) El segmento $\overline{BD}$ *no contiene P*

D) El segmento $\overline{BC}$ *no contiene P*

E) El segmento $\overline{CD}$ *no contiene P*

RESOLUCIÓN :

* Del enunciado , graficamos :



* Analizamos las proposiciones:

A) El segmento $\overline{AB}$ *contiene a P.....* *(FALSA)*

B) El segmento $\overline{AC}$ *no contiene a P .....* *(FALSA)*

C)El segmento $\overline{BD}$ *no contiene a P.....* *(FALSA)*

D)El segmento $\overline{BC}$ *no contiene a P.....* *(FALSA)*

E)El segmento $\overline{CD}$ *no contiene a P.....(VERDADERA)*

* Como se pide la verdadera :

RPTA : "E"

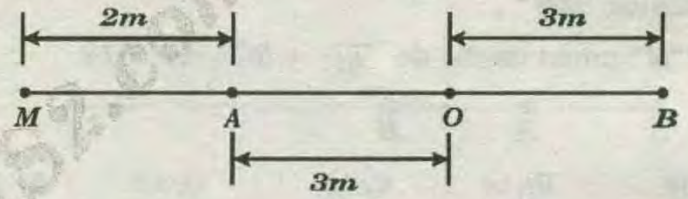
PROBLEMA 8 :

Sobre una recta se da los puntos consecutivos *M, A, B* ; siendo *"O"* el punto medio $\overline{AB}$. Calcular MO^2, sabiendo que : $MA = 2m$ y $AB = 6m$

A) $25m^2$ *B)* $28m^2$ *C)* $32m^2$
D) $21m^2$ *E)ninguna anterior*

RESOLUCIÓN :

* Graficando:



* De la figura observamos : $MO = MA + AO$

$$\Rightarrow MO = 2m + 3m = 5m$$

* Pero se pide : $MO^2 = 25m^2$

RPTA :"A"

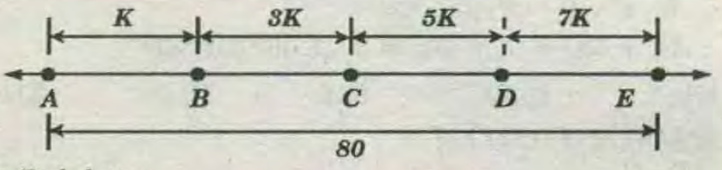
PROBLEMA 9 :

En una recta se ubica los puntos consecutivos *"A", "B", "C" , "D"* y *"E"* si se cumple que :

$$AB = \frac{BC}{3} = \frac{CD}{5} = \frac{DE}{7}; AE = 80. \text{Hallar "}BD\text{"}$$

A) 20 *B) 30* *C) 40* *D) 25* *E)24*

RESOLUCIÓN :



* Del dato :

$$AB = \frac{BC}{3} = \frac{CD}{5} = \frac{DE}{7} = K \rightarrow AB = K$$

$$BC = 3K$$
$$CD = 5K$$
$$DE = 7K$$

* Luego : $K+3K+5K+7K = 80 \rightarrow K = 5$

* Se pide : $BD = 8K = 40$

RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

Calcular "MN" , si $AC + BD = 10$

A)2 B) 5 C) 10 D)1 E) 1,5

RESOLUCIÓN :

* Del dato y figura , se deduce que :

$$AC + BD = 10$$

$$\overbrace{2p + BC} + \overbrace{BC + 2q} = 10$$

$$\rightarrow 2p + 2BC + 2q = 10$$

$$\rightarrow \overbrace{p + BC + q} = 5$$

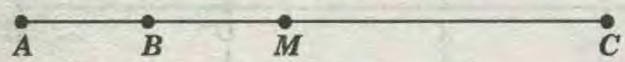
* Entonces : $MN = 5$

RPTA :"B"

PROBLEMA 11 :

Calcular "BM" .

Si "M" punto medio de $\overline{AC}$ y $BC - AB = 14$



A)6 B) 14 C)4,5 D)3,5 E) 7

RESOLUCIÓN :

* De la figura y datos , plantearemos :

$$BC - AB = 14$$

$$\overbrace{BM + MC} + \overbrace{(AM - BM)} = 14 \; ; \; AM = MC$$

* Luego : $BM + \underbrace{MC - AM} + BM = 14$

Se anulan por ser iguales

$$\rightarrow 2BM = 14 \rightarrow BM = 7$$

RPTA : "E"

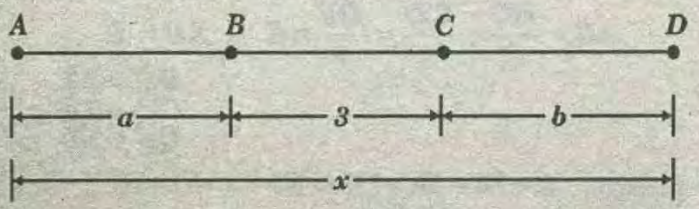
PROBLEMA 12 :

Sobre una recta se toman los puntos consecutivos : A , B , C y D ; tal que :
$AC + BD = 7$ y $BC = 3$. Calcular "AD"

A)2 B)10 C)4 D) 5 E)1

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Por Datos : $AC + BD = 7$

$$\rightarrow a + 3 + 3 + b = 7 \Rightarrow a + b = 1$$

* Se pide : $x = a + b + 3$

$$\Rightarrow x = 1 + 3 = 4$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 13 :

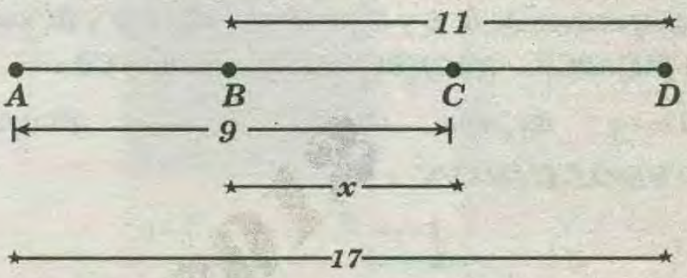
Calcular "BC"

Si : $AD = 17$; $AC = 9$ y $BD = 11$

A) 1 B)2 C)3 D)4 E)5

RESOLUCIÓN :

* Colocando datos :



* De la figura considerando a "CD", se obtendrá :

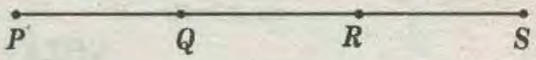
$$11 - x = 17 - 9 \Rightarrow 11 - x = 8 \Rightarrow 3 = x$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

Calcular "QR"

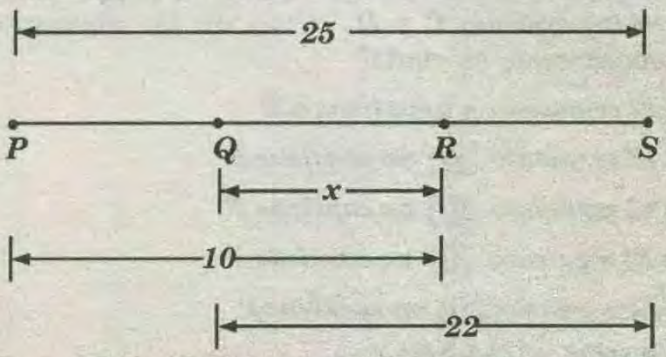
Si : $PS = 25$; $PR = 10$ y $QS = 22$



A)13 B)14 C) 17 D)9 E)7

RESOLUCIÓN :

* Colocando los datos :



* De la figura considerando "PQ"

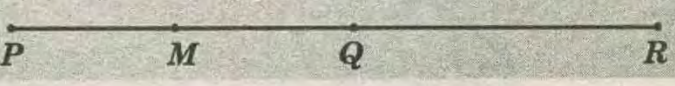
$$25 - 22 = 10 - x \Rightarrow x = 10 - 3$$

$$\Rightarrow x = 7$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 15 :

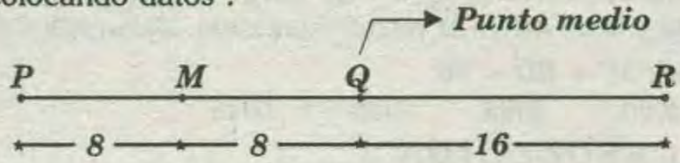
Si "M" es un punto medio de PQ ; "Q" es punto medio de $\overline{PR}$ y $PM = 8$. Calcular "PR"



A)12 B)24 C)32 D)48 E)16

RESOLUCIÓN :

* Colocando datos :



* Luego: $PR = 8+8+16 = 32$

RPTA : "C"

PROBLEMA 16 :

Sean "A" , "B" , "C" y "D" puntos consecutivos de una recta ; se sabe que :

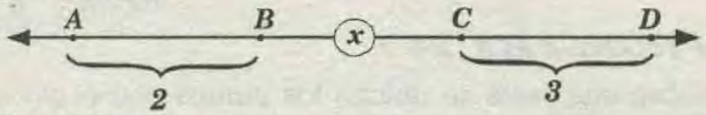
$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AC}$$

Tal que : $AB = 2u$ y $CD = 3u$. Calcular "BC".

A)7 B)13 C)1 D)2 E)4

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Del dato :

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AC} \rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{5+x}=\frac{2}{(2+x)}$$

$$\rightarrow \frac{5+x+2}{2(5+x)}=\frac{2}{2+x} \rightarrow \frac{(7+x)}{2(5+x)}=\frac{2}{(2+x)}$$

$$\rightarrow (7+x)(2+x)=(5+x)4$$

$$\rightarrow 14+9x+x^2=20+4x$$

$$\rightarrow x^2+5x-6=0$$

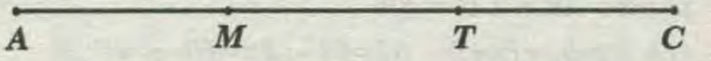
$$\rightarrow (x+6)(x-1)=0 \rightarrow x=1u$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 17 :

Calcular "TM"

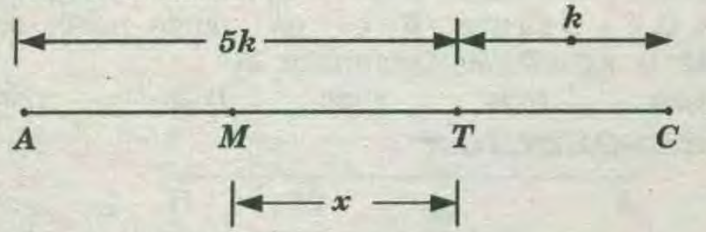
Si : $AT = 5(TC)$, $5MC - AM = 48$



A)8 B)6 C)12 D)14 E)24

RESOLUCIÓN :

* Colocando datos :



* Del segundo dato , y del gráfico :

$$5MC - AM = 48$$

$$\rightarrow 5(x+k)-(5k-x)=48$$

$$\rightarrow 5x+5k-5k+x=48 \rightarrow 6x=48 \rightarrow x=8$$

RPTA : "A"

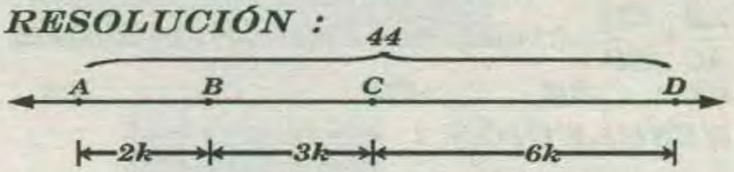
PROBLEMA 18 :

Sobre una recta se ubica los puntos consecutivos "A" , "B" , "C" y "D". Si se cumple :

$\frac{AB}{2}=\frac{BC}{3}=\frac{CD}{6}$. Hallar "CD", si: $AD = 44u$.

A)22 B)24 C)12 D)16

RESOLUCIÓN :



* Del dato:

$$\frac{AB}{2}=\frac{BC}{3}=\frac{CD}{6}=k$$

$$\rightarrow AB = 2k$$

$$BC = 3k$$

$$CD = 6k$$

* Luego : $2k + 3k + 6k = 44$

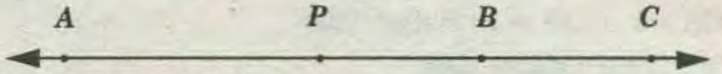
$$\rightarrow 11k = 44 \rightarrow k = 4 \Rightarrow CD = 6(4) = 24$$

RPTA : "B"

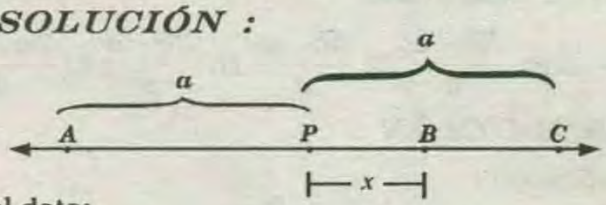
PROBLEMA 19 :

Hallar "PB", Si : $AB - BC = 18\ u$ y "P" es un punto medio de $\overline{AC}$.

A)6u B)7 C)9 D)10 E)12



RESOLUCIÓN :



* Del dato:

$$\underbrace{AB} - \underbrace{BC} = 18$$

$$\rightarrow a+x-(a-x)=18$$

$$\rightarrow a+x-a+x=18$$

$$\rightarrow 2x = 18u \rightarrow x = 9u$$

RPTA :"C"

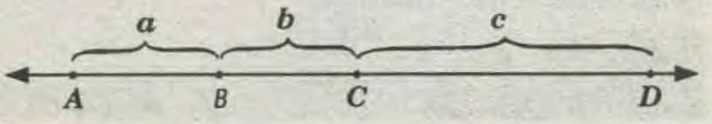
PROBLEMA 20 :

En una línea se considera los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D".

Si : $AC + BD = 20u$, hallar "AD + BC".

A)1u B)20 C)1 D)8 E)16

RESOLUCIÓN :



www.GRATIS.com

* Del dato:

$$AC + BD = 20$$
$$\rightarrow a + b + b + c = 20$$
$$\rightarrow \underbrace{a+b+c+b}_{AD} + BC = 20u$$

RPTA : "B"

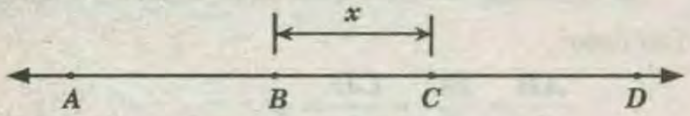
PROBLEMA 21 :

Sobre una recta se toman los puntos consecutivos "A" , "B" , "C" y "D" de tal manera que:

$\frac{AB}{AC}+\frac{CD}{BD}=1$; Hallar «BC» si además : $(AB)(CD)=36$

A)1 B)3 C)5 D)6 E)8

RESOLUCIÓN :



* Del dato:

$$\frac{AB}{AB+x}+\frac{CD}{x+CD}=1$$
$$\rightarrow AB(x+CD)+CD(AB+x)=(AB+x)(x+CD)$$

* Operando y resolviendo :

$$x^2 = AB \times CD \rightarrow x^2 = 36$$
$$\rightarrow x = 6$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 22 :

Sobre una recta se ubica los puntos consecutivos "O" "A","B" y "M" tal que :

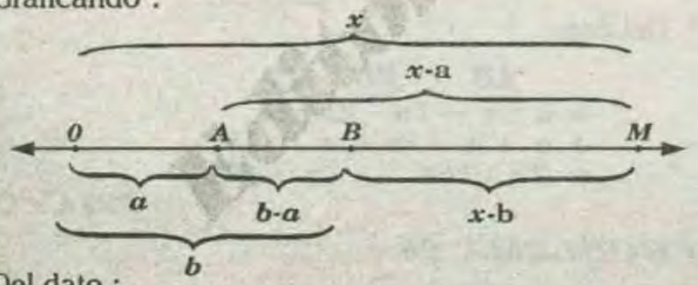
$OA = a$ y $OB = b$. Hallar "OM",

Si : $2(AM+MB)= 3AB$

A)3b – a B) $\frac{5b-a}{2}$ C) $\frac{5b-a}{4}$ D) $\frac{3b-a}{2}$ E) $\frac{2a-3b}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Del dato :

$$2(AM + MB) = 3AB$$
$$\rightarrow 2(\underbrace{x-a}+\underbrace{x-b}) = 3(b-a)$$
$$\rightarrow 2(2x-a-b) = 3b-3a$$
$$\rightarrow 4x-2a-2b = 3b-3a$$
$$\rightarrow 4x = 3b+2b-3a+2a$$
$$\rightarrow 4x = 5b-a \Rightarrow x=\frac{5b-a}{4}$$

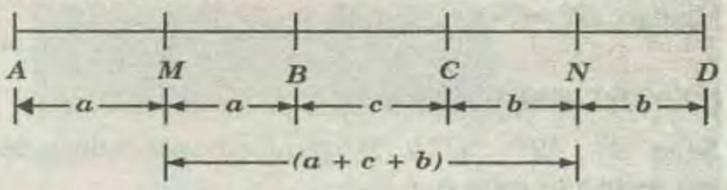
RPTA :"C"

PROBLEMA 23 :

Sobre una línea recta se considera los puntos consecutivos A, B, C y D. Luego los puntos medios M y N de AB y CD respectivamente. Hallar MN si : $AC + BD = 50$

A)20 B)25 C)30 D)40

RESOLUCIÓN :



* Dato : M y N son puntos medios de AB y CD

$$AM = MB = a \ , CN = ND = b$$

* Datos : $AC + BD = 50$

$$\Rightarrow (2a + c) + (c + 2b) = 50$$
$$\rightarrow 2a + 2c + 2b = 50 \rightarrow 2(a + c + b) = 50$$
$$\rightarrow 2MN = 50 \Rightarrow MN = 25$$

RPTA : "B"

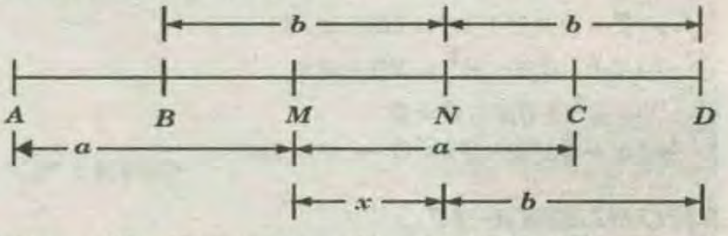
PROBLEMA 24 :

Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B , C y D. Luego los puntos medios M y N de AC y BD respectivamente ; Hallar MN .

Si : $AB + CD = 60$

A)20 B)25 C)30 D)40 E)60

RESOLUCIÓN :



* Dato : M y N puntos medios de AC y BD

$$AM = NC = a \ , BN = ND = b$$

* Datos : $AB + CD = 60$

$$\rightarrow (a + x - b) + (x + b - a) = 60 \rightarrow 2x = 60 \Rightarrow x = 30$$

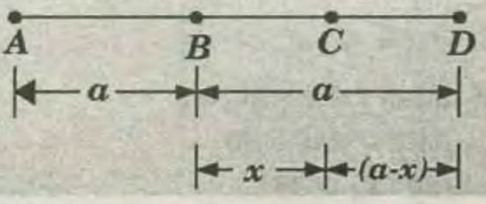
RPTA : "C"

PROBLEMA 25 :

Sobre una recta se ubica los puntos consecutivos A, B, C y D tal que B es un punto medio de AD y $AC–CD=50$. Determinar BC.

A)20 B)25 C)30 D)40 E)50

RESOLUCIÓN :



* Dato : B es punto medio de AD

$\rightarrow AB = BD = a$

* Dato : $AC - CD = 50$

$\rightarrow (a + x) - (a - x) = 50 \rightarrow 2x = 50 \Rightarrow x = 25$

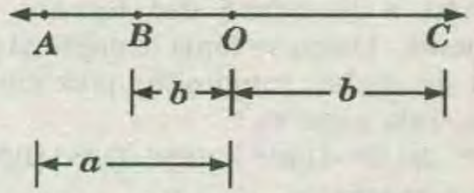
RPTA : "B"

PROBELAMA 26 :

Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos de A ; B y C siendo "O" puntos medio de BC, $AB^2 + AC^2 = 100$. Determinar $AO^2 + BO^2$

A)10 B)25 C)50 D)100 E)20

RESOLUCIÓN :



* Como se pide : $AO^2 + BO^2 = a^2 + b^2$

* Ponemos : $AO = a$ y $BO = b$

* Dato: O punto medio de $\overline{BC}$

$BO = OC = b$

* Dato : $AB^2 + AC^2 = 100$

$\rightarrow (a - b)^2 + (a + b)^2 = 100$

$\Rightarrow 2(a^2 + b^2) = 100$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 50$

RPTA : "C"

PROBELAMA 27 :

A, M, B y N son puntos situados en una recta tal que se cumple : $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{BN}$; $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{5}$

La longitud de AB es :

A)10,25 B)10 C)0,25 D)8 E)6

RESOLUCIÓN :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{BN} ; \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* En toda División armónica se cumple :

Relación de René Descartes.

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{2}{AB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* (I) en (II) : $\frac{1}{5} = \frac{2}{AB} \rightarrow AB = 10$

RPTA : "B"

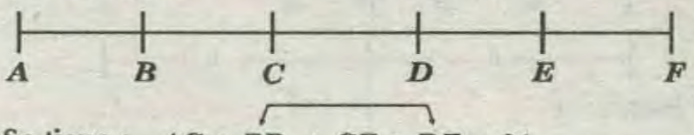
PROBLEMA 28 :

Sobre una recta se ubica seis puntos consecutivos A, B, C, D, E, y F. Sabiendo que se cumple : $AC + BD + CE + DF = 91$ y $BE = (5/8)\,AF$.

¿Cuál es la longitud de $\overline{AF}$?

RESOLUCIÓN :

* Graficando:



* Se tiene : $AC + BD + CE + DF = 91$

* Con el gráfico : $AC + CE + BD + DF + = 91$

$$\underbrace{AC + CE}_{AE} + \underbrace{BD + DF}_{BF} + = 91$$

$$\underbrace{AE}_{} + \underbrace{BF}_{BE + EF} = 91$$

$$\underbrace{AF + BE}_{} = 91$$

* Luego : $AF + \frac{5}{8}\,AF = 91 \rightarrow \frac{13}{8}\,AF = 91$

* De donde : $AF = 56$

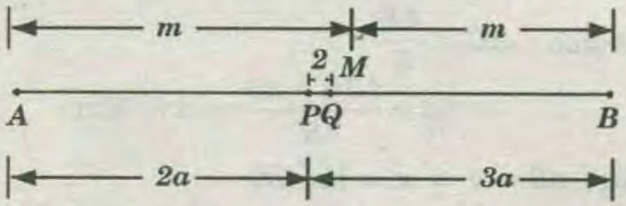
PROBLEMA 29 :

Los puntos P y Q situados en el segmento AB, ambos del mismo lado del punto medio M de $\overline{AB}$, con el orden indicado y de manera que $AP/PB = 2/3$; si : $AQ/QB = 3/4$ y $PQ = 2$, entonces la longitud del segmento $\overline{AB}$ sería :

A)75 B)80 C)85 D)90 E)70

RESOLUCIÓN :

* Del enunciado , se tiene el siguiente gráfico :



* Del dato : $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3} \rightarrow \begin{matrix} AP = 2a \\ PB = 3a \end{matrix}$

* Luego , piden : $AB = 5a$

* Del dato : $\frac{AQ}{QB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{2a + 2}{3a - 2} = \frac{3}{4}$

* Luego : $a = 14 \rightarrow AB = 5a = 70$

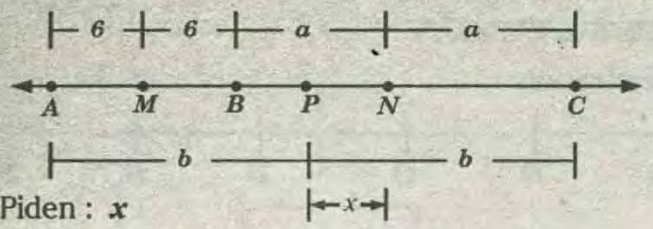
RPTA : "E"

PROBLEMA 30 :

Sobre una recta se toman los puntos A, B, y C, luego M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si P es punto medio de $\overline{AC}$, y $\overline{AB} = 12$. Hallar el valor de PN.

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Piden : x

* De la figura : $PC = PN + NC$

$\rightarrow b = x+a$

$\rightarrow x = b - a$

* También : $2b = 12 + 2a$

$\rightarrow b - a = 6 \rightarrow x = 6$

PROBLEMA 31 :

Sobre una recta se tiene los puntos consecutivos A, B, C, D y E.

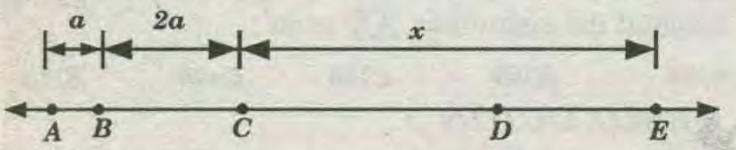
Sabiendo que : $2(AB) = BC, AC = \dfrac{AE}{5}$

Calcular CE en función de AB.

A)13 AB B)12AB C)15AB D)3AB E)AB

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Piden : x

* Del dato : $AC = \dfrac{AE}{5}$

$\rightarrow 3a = \dfrac{(3a+x)}{5} \Rightarrow x = 12a$

* Pero : $AB = a \rightarrow x = 12(AB)$

RPTA : "B"

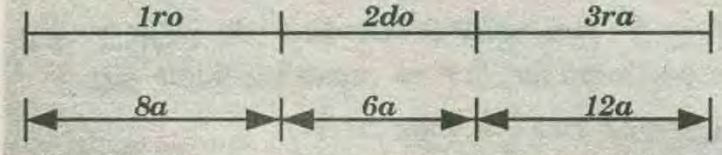
PROBLEMA 32 :

Al dividir un cierto segmento en partes directamente proporcionales a $1/3$, $1/4$ y $1/2$ se obtienen tres segmentos el segundo de los cuales mide 12cm. La suma en centímetros de los segmentos $2do$ y $3ro$ es :

A)24 B)30 C)36 D)42 E)48

RESOLUCIÓN :

* Sea la medida del segmento : 24a.....(suposición)



* Por dato : $6a = 12 \Rightarrow a = 2$

* Entonces : el $3ro = 12(2) = 24$

* Se pide : Suma del $2do + 3ro$

* Es decir : $12 + 24 = 36$

RPTA : "C"

PROBLEMA 33 :

Se tiene un segmento AB de longitud "n".

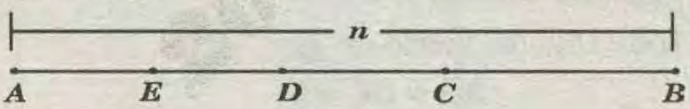
A partir de éste se obtienen segmentos de la siguiente manera :

El primero es AB de longitud n unidades , el segundo de longitud igual a la mitad del primero , el tercero de la longitud igual a la mitad del segundo , el cuarto de longitud a la mitad del tercero , y así sucesivamente. Luego se toma la enésima parte de cada una de dicha longitudes y se suman los resultados . Esta suma es :

A)$(2^{n-1}-1)/2^n$ B) $(2^n-1)/2^{n-1}$ C)$(2^{n+1}-1)/2^{n-1}$ D)$2^n/(2^{n-1}-1)$

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Del enunciado :

$$AB = n; AC = \frac{n}{2}; AD = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2^2}; AE = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2^2}\right) - \frac{n}{2^3}; \ldots\ldots; \underbrace{\frac{n}{2^{n-1}}}_{\text{último}}$$

* La suma pedida , es :

$$s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

* Esto es el desarrollo del cociente notable :

$$s = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2^n-1}{2^{n-1}}$$

RPTA :"B"

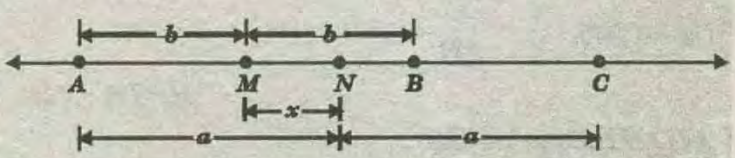
PROBLEMA 34 :

En una recta se ubican los puntos consecutivos A , B y C . Si , $AB = 24$ y $BC = 12$, Calcular la medida de la longitud del segmento determinado por lo puntos medios de los segmentos AB y AC .

A) 5 B) 6 C) 11 D) 13 E) 16

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Datos : $\begin{cases} * \ 2a = 24 + 12 \rightarrow 2a = 36 \rightarrow a = 18 \\ * \ 2b = 24 \rightarrow b = 12 \end{cases}$

* Del esquema se puede apreciar que :

$x = a - b = 18 - 12 = 6$

RPTA : "B"

PROBLEMA 35:

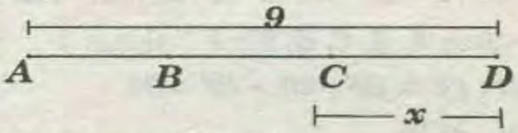
Los puntos **A, B, C** y **D** son consecutivos sobre una línea y forman una cuaterna armónica que cumple la siguiente relación :

$$\frac{1}{\overline{AB}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{1}{4}$$

Si $\overline{AD} = 9$, entonces el segmento **CD** mide :

A)5 B)4 C)3 D)2 E)1

RESOLUCIÓN :



* Por cuaterna armónica :

* Datos : $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$ .....(I)

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{4} \text{.....(II)}$$

* En *(I)* reemplazamos :

$BC=(AC - AB)$ y $CD=(AD-AC)$

$AB\ (AD - AC) = AD(AC-AB)$

* Resolviendo :

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AC} \text{.....(III)}$$

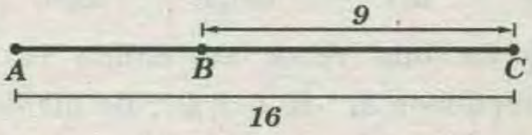
* De *(III)* y *(II)*: $AC=8$

* Luego : $x=9-8 \rightarrow x=1$

RPTA :"E"

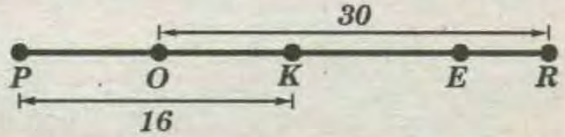
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 De la figura , calcule **AB.**



A)2 B)4 C)7 D)8 E)9

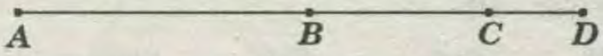
02 De la figura , calcule **PO** tal que $PO = KE = ER$



A)13 B)8 C)16 D)5 E)14

03 De la figura , calcular **AD**. Si :

$AB = 2BC = 3CD = 60$

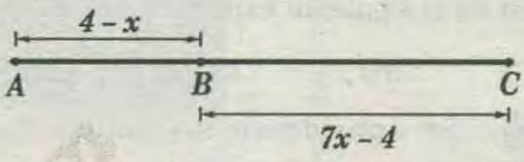


A)90 B)100 C)150 D)110 E)80

04 Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos **A , B , C** y **D** tal que $AB = 5$, $CD = 6$ y $AD = 17$, calcule **BC**.

A)4 B)6 C)8 D)10 E)5

05 Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos **A, B** y **C** tal que «**B**» es punto medio del $\overline{AC}$, calcule **x**.

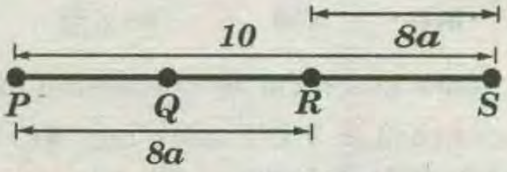


A)2 B)3 C)1 D)4 E)5

06 Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos **A, B, C** y **D** ; tal que $AC=16$, $CD=BC-3$ y $AB=BC$, halle **BD**.

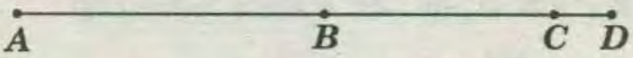
A)12 B)14 C)13 D)16 E)15

07 De la figura , calcular **PQ** ; si $PQ = QR$.



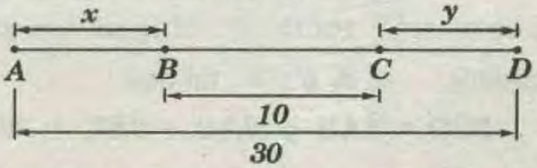
A)4 B)9 C)3 D)6 E)5

08 De la figura , calcular **AB** , si $AC=29$, $CD=1$ y $BD=19$.



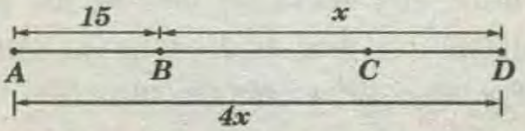
A)11 B)12 C)13 D)14 E)15

09 De la figura , calcular : $x + y$.



A)10 B)15 C)20 D)25 E)30

10 De la figura, calcular **x**.



(11) *A, B, C* y *D* son puntos colineales y consecutivos tal que : $AB + CD = 40$ y $AD = 6BC$ Calcular «*AD*»

A)42 B)46 C)48 D)52 E)56

(12) Se tienen los puntos *A, B, C* y *D* colineales y consecutivos tal que : $AB = 8$ y $AB \times BD = AC \times CD$.

Calcular : «*CD*»

A) $4\sqrt{2}$ *B)8 C)6 D)12 E)16*

(13) Se tienen los puntos colineales y consecutivos *A, O, M* y *B* ; de modo que $AO = OB$. Calcular el valor de la siguiente expresión : $E = \dfrac{AM - MB}{OM}$

A)1/2 B)1 C)3/2 D)2 E)5/2

(14) Se consideran los puntos colineales y consecutivos *A , B, C* y *D* tal que «*B*» es punto medio de $\overline{AC}$ y $AD=5BC$. Si : $CD= 12$; calcular : «*AB*»

A)2,5 B)3 C)4 D)6 E)5

(15) En una recta se ubican los puntos *A, B* y *C*, tal que *M* es el punto medio de $\overline{BC}$. Calcular *AM*, si $AB+AC=12$.

A)3 B)4 C)6 D) $3\sqrt{2}$ *E)* $4\sqrt{3}$

(16) Sobre una recta se consideran los puntos consecutivos *A,B* y *C* ; tales que $AC=6$ y $AC \cdot AB=2(AB^2-BC^2)$. Calcular : «*AB*»

A)1 B)2 C)3 D)4 E) $2\sqrt{2}$

(17) En una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C* y *D* tal que : $AC + BD = 5(AB+CD)$

Calcular : $\dfrac{AD}{BC}$

A)1,5 B)2,5 C)2 D)3,5 E)3

(18) Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C* y *D* ; tal que :

$$4CD = 3AB \text{ y } 4AD + 3BC = 70$$

Calcular : «*AC*»

A)7 B)5 C)4 D)10 E)8

(19) Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C, D , E* y *F*; tal que : $AB = DE$; $BC = EF$ y $AD + CF = 148$. Calcular «*BE*»

A)37 B)46 C)74 D)23 E)64

(20) Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos *A,B,C,D* y *E*, tal que : $AB = 3BE$; $AC=80$ Calcular «*BD*» ; si : $BC + 3DE = 20$

A)16 B)20 C)40 D)10 E)15

TAREA DOMICILIARIA

(01) Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C, D, E* y *F* ; tal que :

$AC = BD$; $CE = DF$; $AB + EF = 96$

Calcular : «*CD*»

A)96 B)24 C)68 D)64 E)48

(02) Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos *A ,B , C , D* y *E* ; tal que : $AD+BC=70$;

$$\frac{AB}{3} = \frac{BC}{5} = \frac{CD}{7} = \frac{DE}{8}$$

Calcular : «*BC*»

A)6 B)12 C)18 D)10 E)28

(03) En una recta se ubican los puntos consecutivos *A,B, O* y *C* de modo que «*O*» sea punto medio de $\overline{BC}$. Calcular : $AO^2 - BO^2$

A) $AC^2 - AB^2$ *B)* $2AB \times AC$
C) $AB \times AC$ *D)* $AB \times AC$

(04) Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, O* y *C* tal que «*O*» es el punto medio del segmento *BC*.

Calcular: $E = \dfrac{AB^2 + AC^2}{AO^2 + BO^2}$

A)0,5 B)1 C)1,5 D)2 E)2,5

(05) En una recta se toman los puntos consecutivos *A, B, C* y *D* ; de manera que : $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AC}{BD}$. Calcular «*CD*» , si $AB = 2$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 En una recta se ubican los puntos A, B, C y D, tal que C es punto medio del $\overline{BD}$, $AD = 30$ y $BC = 8$. Calcule AB.

A)7 B)14 C)18 D) 21 E) 15

02 En una recta se consideran los puntos A, B y C. Calcular AC, si $AB = 3(BC)$ y $AC = (BC)^2$

A)8 B)9 C)16 D)25 E)64

03 En una recta se consideran los puntos A, B, C y D, tal que: $AB = 3(BC)$ y $CD = 4(AB)$. Calcular BC, si $AD = 80$.

A)9 B)5 C)6 D)7 E)8

04 En una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D, tal que: $AB = 6$ y $BC = 4$. Calcular CD, si: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$

A) 15 B)20 C) 25 D) 24 E)28

05 En una recta se consideran los puntos A, B, C y D tal que: $AB = BD = 3(CD)$. Calcular CD, si $AD = 18$.

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

06 En una recta se consideran los puntos A, B, C y D. Calcular AC, si: $CD = 2(BC)$ y $2(AB) + AD = 21$.

A)6 B)7 C)8 D)9 E)10

07 En una recta se ubican los puntos A, B, C y D, tal que: $2(AC) = 3(CD)$ y $3(BD) - 2(AB) = 15$. Calcular BC.

A) 1 B) 2 C) 3 D)4 E)5

08 En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D. Calcular BC, si: $AD = 4(AB)$ y $6(AC) - 2(CD) = 64$.

A)4 B)5 C)6 D)7 E)8

09 Se tiene los puntos colineales y consecutivos A, B y C. Si M es punto medio del $\overline{AB}$ y $(AB)(MC) = (AC)(BC)$, calcular BC, además $AB = 8$.

A)4 B)8 C)$4\sqrt{2}$ D)$8\sqrt{2}$ E)$8(\sqrt{2}-1)$

10 En una recta se tiene los puntos consecutivos A, B, C y D, tal que C es punto medio del $\overline{BD}$. Calcular AC, si: $4(AD)(AB) + (AD - AB)^2 = 100$.

A)2 B)4 C)5 D) 10 E) 2,5

11 En una recta se tiene los puntos consecutivos A, B, C, D y E, tal que: $CD = DE$, $BC = 2(AB)$ y $AE = 18$. Calcular la distancia del punto medio del $\overline{AC}$ hacia D.

A)10 B)12 C)9 D)8 E)6

12 En una recta se ubica los puntos consecutivos A, B, C, D y E de modo que :

$$BD+AC+BE+AD+CE = (AE)(BD)$$

Calcule $\frac{1}{AE}+\frac{1}{BD}$.

A)$\frac{1}{3}$ B)3 C)$\frac{1}{2}$ D)2 E)$\frac{1}{6}$

13 Dados los puntos colineales y consecutivos A, B, C, D, E y F, ; si $\frac{AC}{BC}+\frac{BD}{CD}+\frac{CE}{DE}+\frac{DF}{EF} = m$, calcule : $\frac{AB}{BC}+\frac{BC}{CD}+\frac{CD}{DE}+\frac{DE}{EF}$

A)$m-4$ B)m C) $m-1$ D) $m+2$ E) $m-3$

14 En un recta se ubica los puntos consecutivos A, B, C y D de modo que B es punto medio de AD, Calcule CD, si se cumple que $(AC)(AD)=16$ y $\frac{2}{AC} = \frac{1}{AB}+\frac{1}{2(CD)}$

A) 2 B)3 C) 4,5 D)5 E) 6

15 En una recta se ubica los puntos A, B, C, D, E y F tal que $AC=CE=EF$ y $2(BC) = 3(DE)$, calcule $\frac{(BE)^2-(AB)^2}{(DF)^2-(CD)^2}$

A)$\frac{3}{2}$ B)$\frac{2}{3}$ C)$\frac{9}{4}$ D)$\frac{4}{9}$ E)$\frac{\sqrt{6}}{2}$

16 En una recta se ubica los puntos consecutivos A, B, C, D, E, F, G y H de modo que B, E y F son los puntos medios de $\overline{AD}$, $\overline{CG}$ y $\overline{DH}$ respectivamente y $\frac{BE}{EF} = k$, calcule $\frac{AC+DG}{CD+GH}$.

A)k B)$\frac{k}{2}$ C)$\frac{1}{k}$ D)$\frac{k}{3}$ E)$\frac{2}{k}$

17 En una recta están situados en forma

consecutiva los puntos P, Q, R y S de modo que $\frac{PQ}{PS}=\frac{QR}{RS}$. Luego se ubica los puntos medios M y N de $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$ respectivamente. Calcule MN si $PM=a$ y $NS=b$.

$A)\sqrt{ab}$ $B)\frac{ab}{a+b}$ $C)\sqrt{a^2+b^2}$ $D)\frac{2ab}{a+b}$ $E)\frac{a+b}{2}$

18 En una recta se ubica los puntos consecutivos A, B, C, D y E de modo que $\frac{AC}{2}=\frac{BD}{3}=\frac{CE}{5}$ además la suma de las longitudes del segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ con el segmento que une los puntos medios de $\overline{CE}$ y $\overline{CD}$ es k. Calcule $\frac{k}{AE}$.

$A)\frac{3}{7}$ $B)\frac{2}{3}$ $C)\frac{2}{5}$ $D)\frac{3}{5}$ $E)\frac{2}{7}$

19 En una recta se ubica los puntos A, B, C, D, E y F de modo que $(AB)(CD)=(BC)(AD)$; $(CD)(EF)=(DE)(CF)$ y $\frac{m}{BD}+\frac{n}{AD}=\frac{s}{CE}+\frac{t}{CF}$, calcule $m^3+n^3+s^3+t^3$.

A) 12 B) -14 C)10 D) 14 E) 18

20 En una recta se ubica los puntos consecutivos A, B, C, D, E, F, G, ... , y así sucesivamente; tal que $AB=\frac{1}{3}, BC=\frac{1}{15}, CD=\frac{1}{35}, DE=\frac{1}{63}, EF=\frac{1}{99}, ...$ Calcule la suma límite de las longitudes de los segmentos dados.

$A)\frac{1}{3}$ $B)\frac{1}{2}$ $C)\frac{1}{10}$ $D)\frac{1}{5}$ $E)1$

21 Se tiene un segmento AB de longitud n unidades. A partir de éste se obtiene n segmentos de la siguiente manera: el primero es $\overline{AB}$ de longitud n unidades, el segundo de longitud igual la mitad del primero, el tercero de longitud igual a la mitad del segundo, el cuarto de longitud igual a la mitad del tercero y así sucesivamente. Luego se toma la enésima parte de cada una de dichas longitudes y se suma sus resultados. ¿Cuál es la suma?

$A)\frac{2^{n+1}}{2^n-1}$ $B)\frac{2^n-1}{2^{n-1}}$ $C)\frac{2^{n+1}}{2^{n-1}}$ $D)\frac{2^n}{2^{-1}-1}$ $E)\frac{2^{n-1}}{2^{n+1}}$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)E	3)D	4)B	5)C	6)D	7)A	8)A	9)C	10)E
11)C	12)B	13)D	14)C	15)C	16)D	17)A	18)D	19)C	20)B
01) E	02) D	03) C	04)D	05) B					

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)B	2)C	3)B	4)B	5)C	6)B	7)C	8)E	9)C	10)C
11)C	12)C	13)A	14)A	15)A	16)A	17)C	18)E	19)D	20)B
21)B									

EL PENSAMIENTO MÉTRICO

Ya en el *siglo* XIX había grandes problemas con las unidades de medida en Europa. ya que multitud de ellas no encajaban en ningún sistema. En Gran Bretaña algunas de las unidades habían sido introducidas por comerciantes o invasores. Por ejemplo, la *milla* romana, que media mil pasos. se ha convertido en la milla. Posteriormente , tras la caída del imperio romano, los anglos y los sajones invadieron Gran Bretaña. Una de sus unidades de medida era una pértiga. Originalmente era una pértiga utilizada para azuzar los bueyes. Media unas tres veces la altura de un hombre. Los primitivos agricultores ingleses hacían surcos de cuarenta pértigas de largo llamados *furlongs*.

Muchas unidades seguían basándose en partes del cuerpo. La pulgada era el ancho de un pulgar. Los comerciantes de telas introdujeron la yarda. Esta era la distancia de le barbilla a la punta de los dedos con el brazo estirado. El problema era que la longitud de los brazos de las personas varía mucho. Una yarda de tela de un comerciante podía ser mucho menor que una yarda de otro comerciante. Al ir desarrollándose el comercio se hizo esencial que todo el mundo utilizara las mismas unidades. Algunos reyes intentaron conseguirlo. El rey Enrique *I* de Inglaterra. por ejemplo, dijo que la yarda sería equivalente a la distancia entre su barbilla y la punta de *sus* dedos. A lo largo de los años, una serie de leyes fijaron unas longitudes estandarizadas para muchas unidades. Estas unidades determinadas por ley son llamadas Unidades Imperiales. Tales unidades imperiales como la yarda y la pulgada habrían de ser utilizadas en Inglaterra durante varios siglos.

La confusión en torno a las unidades continuó durante largo tiempo. Finalmente. se inventó un sistema más sencillo; tuvo su origen en Francia. 1670. cuando Gabriel Mouton , un sacerdote de Lyon, sugirió un nuevo sistema. según el cual todas las unidades de longitud debían basarse en una unidad estándar. Tal fue el origen del sistema métrico y la unidad de longitud fue el metro.

Tuvo que transcurrir más de un siglo para que el sistema métrico fuera realmente adoptado en Francia. Esto ocurrió tras la Revolución Francesa. que comenzó en 1789 con la toma de la Bastilla. una famosa cárcel de París. Los líderes de la Revolución Francesa decidieron eliminar todo lo que tuviera que ver con la vieja monarquía francesa. Esto incluía a sus viejas unidades de medida. El sistema métrico se convirtió en ley en Francia en 1795. El sistema se popularizó rápidamente en la mayor parte de los países europeos. Gran Bretaña no obstante. no la aceptó. Uno de los motivos fue que Gran Bretaña estaba en guerra con Francia y no quería adoptar el sistema francés.

El sistema métrico estaba basado en unidades de diez. Esto obedecía a que un sistema decimal hacía que los cálculos fueran sencillos. La unidad básica de longitud era el metro.

ANGULOS I

CAPITULO 06

OBJETIVOS:

Con este capítulo se pretende que el estudiante esté en la capacidad de:

* Definir el ángulo y conocer los tipos de ángulos que existen.

* Reconocer las principales variedades de ángulos y sus clasificaciones.

* Reconocer la diferencia entre la figura geométrica denominada ángulo y su medida

* Desarrollar problemas sobre ángulos, de acuerdo a las condiciones del problema.

* Identificar y diferenciar el complemento y suplemento.

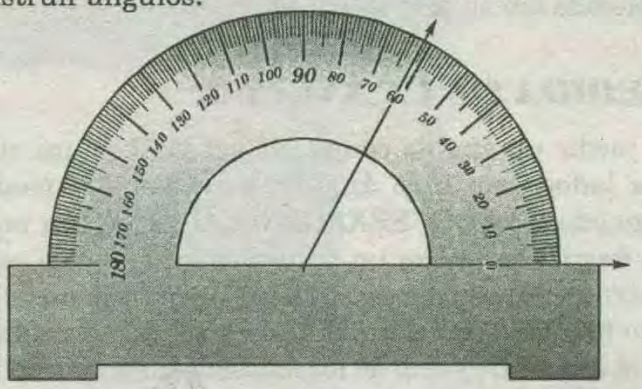
* Desarrollar problemas sobre complemento y suplemento.

INTRODUCCIÓN:

Cada vez que hacemos girar un objeto estamos generando un ángulo. Así, por ejemplo, cuando abrimos o cerramos una puerta, el movimiento de las agujas de un reloj, el movimiento de nuestros brazos, etc. Así mismo encontramos ángulos prácticamente en todo lo que nos rodea: los marcos de las ventanas, nuestra posición al sentarnos, las esquinas de una habitación, etc. El descubrimiento de los ángulos y su importancia data ya de miles de años y nos permite hasta el día de hoy resolver problemas técnicos como la localización de aviones con el radar o estudiar fenómenos naturales como el movimiento de los astros.

También podremos encontrar una gran variedad de ángulos en cada movimiento de las agujas de un reloj .

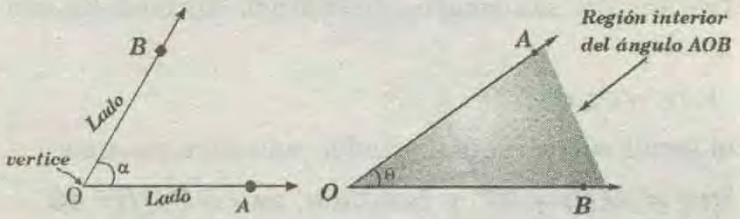
El transportador de ángulos permite medir y también construir ángulos.



A continuación, identifiquemos sus elementos.

ÁNGULO

Es aquella figura geométrica formada por dos rayos que tienen el mismo origen. A dichos rayos se les denomina lados y al origen común vértice del ángulo.



La principal característica de un ángulo es su ***abertura,*** es decir, la forma cómo se encuentran separados sus lados.

En adelante, la abertura de un ángulo se constituye en el objeto de medición.

Se define la medida de un ángulo como la medida de su abertura. Medir un ángulo es establecer una comparación entre su abertura con la de otro tornado corno unidad.

Todas las unidades de medición angular se han establecido dividiendo a la circunferencia en partes iguales.

* ***ELEMENTOS:***

* Lados $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$

* Vértice: O

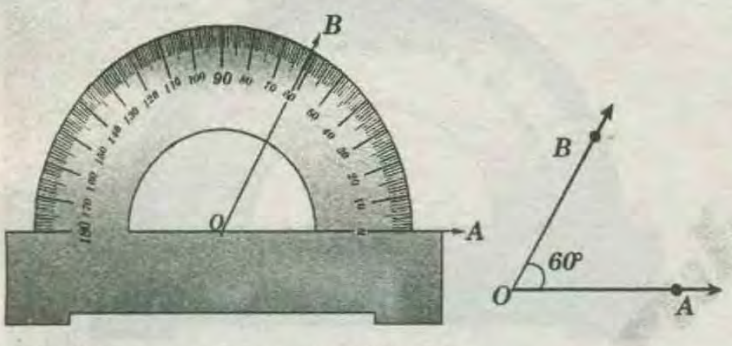
* Notación: Ángulo AOB: $\sphericalangle AOB$

* Medida del ángulo AOB: $m\sphericalangle AOB$

$m\sphericalangle AOB=\theta$

MEDIDA DE UN ÁNGULO:

Al medir un ángulo comparamos la abertura entre sus lados, con otro ángulo o unidad de medida Llamado GRADO SEXAGESIMAL (°). Para medir un ángulo se utiliza un transportador, el cual es un instrumento con el que se puede medir ángulos. Para esto hacemos coincidir el vértice del ángulo a medir en el centro O, y uno de los lados del ángulo con uno de los lados de este centro; El otro lado del ángulo señala en el transportador el valor buscado.



60°: Sesenta grados sexagesimales

$m\sphericalangle AOB=60°$

$m\sphericalangle AOB=60°$: Se lee medida del ángulo AOB.

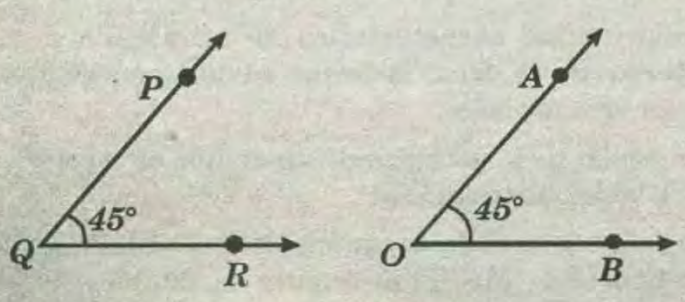
CONGRUENCIA DE ÁNGULOS :

Dos ángulos son congruentes cuando sus medidas son iguales.

EJEMPLO:

al medir con un transportador encontramos que:

$m\sphericalangle=AOB=45°$ y también $m\sphericalangle=PQR=45°$

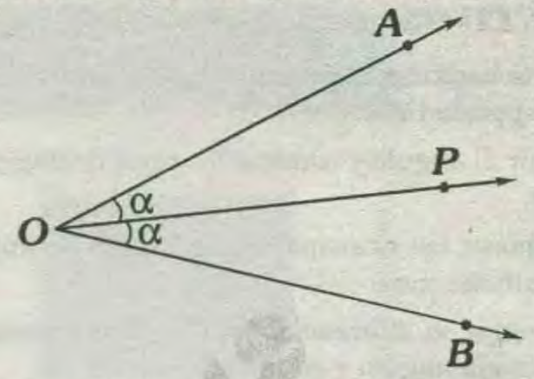


Luego: $\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle PQR$

$\Rightarrow$ Se lee: «ángulo AOB es congruente con el ángulo PQR»

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Es aquel rayo ubicado en la región interior del ángulo cuyo origen es el vértice de dicho ángulo y que forma con sus lados, ángulos de igual medida.

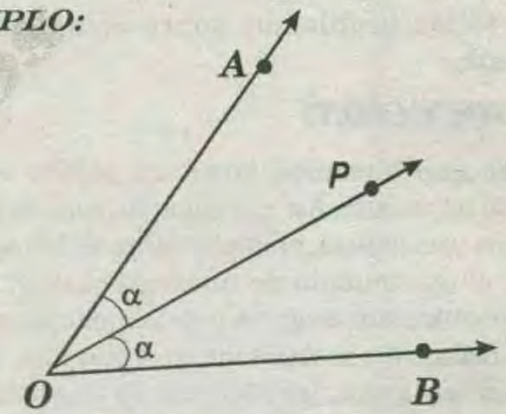


* En la figura $\overline{OP}$ es la Bisectriz del ángulo AOB

* Entonces $m\sphericalangle AOP=m\sphericalangle POB$

ó $m\sphericalangle AOP=m\sphericalangle POB=\frac{m\sphericalangle AOB}{2}$

EJEMPLO:



$\overline{OP}$ Divide al $\sphericalangle AOB$ en dos ángulos AOP y POB que son congruentes por tener la misma medida "α".

*Luego: $\overline{OP}$ Es bisectriz del $\sphericalangle AOB$

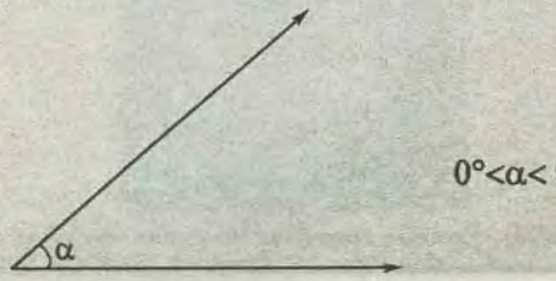
$\Rightarrow$ $m\sphericalangle AOP=m\sphericalangle POB$

CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

SEGÚN SU MEDIDA :

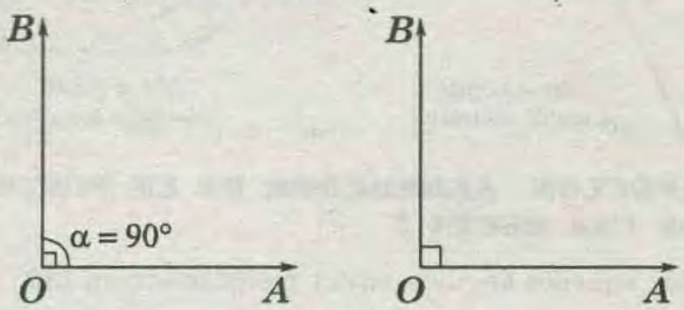
ÁNGULO AGUDO:

Es aquel cuya medida es mayor que *"0"* y menor que *90°*.



ÁNGULO RECTO :

Es aquel cuya medida es $90°$

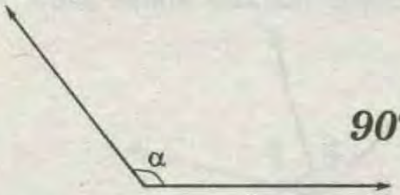


$m\sphericalangle AOB = 90°$

* Decimos que $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son perpendiculares y escribimos $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

ÁNGULO OBTUSO :

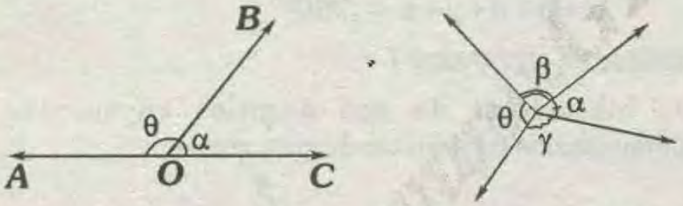
Es aquel cuya medida es mayor que $90°$ y menor que $180°$



$90° < \alpha < 180°$

"PAR LINEAL"

Dos ángulos forman un par lineal si son como la figura inferior izquierda :

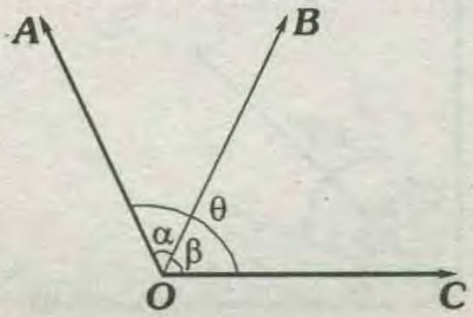


$\theta + \alpha = 180°$ $\alpha + \beta + \theta + \gamma = 360°$

SEGÚN LA POSICIÓN DE SUS LADOS

ÁNGULOS ADYACENTES :

Son dos ángulos que tienen el mismo vértice y además están situados a distinto lado de un lado común.

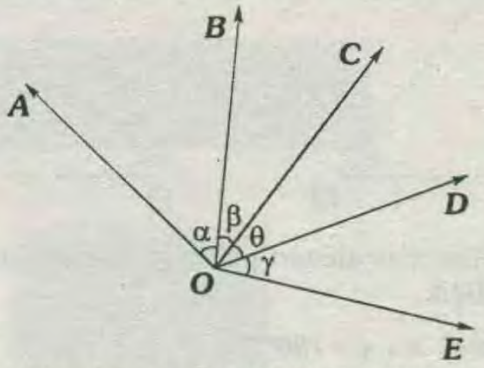


En el gráfico, los ángulos AOB y BOC son adyacentes.

Se cumple : $\theta = \alpha + \beta$

ÁNGULOS CONSECUTIVOS :

Se denominan así a dos o más ángulos que son adyacentes con su inmediato.

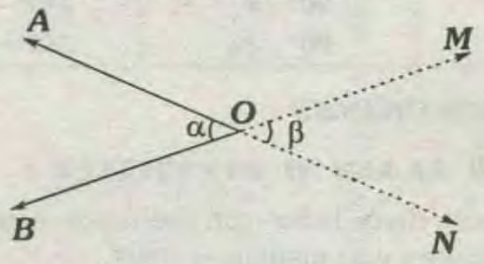


En la figura los ángulos AOB, BOC, COD y DOE son consecutivos.

Entonces : $m\sphericalangle AOE = \alpha + \beta + \theta + \gamma$

ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE :

Son dos ángulos que tienen el mismo vértice y además los lados de uno de ellos son las prolongaciones de los lados del otro en sentido contrario.



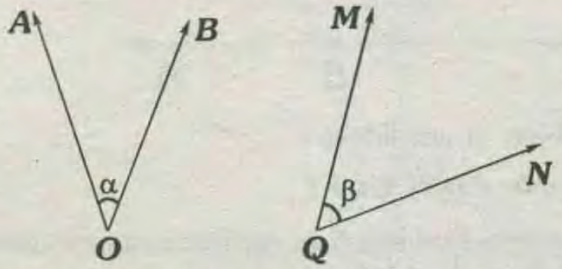
* En la figura los ángulos AOB y MON son opuestos por el vértice.

* Se cumple : $m\sphericalangle AOB = m\sphericalangle MON$

* Es decir : $\alpha = \beta$

ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS :

Son dos ángulos cuya suma de sus medidas es igual a $90°$



* En la figura se tienen los ángulos complementarios AOB y MQN

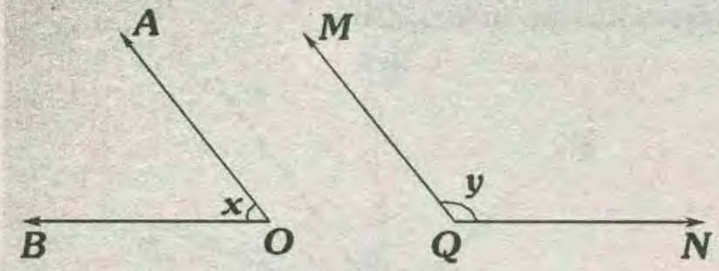
* Entonces : $\alpha + \beta = 90°$

* Sea $C(\alpha)$: complemento de α

* Entonces : $C(\alpha) = 90° - \alpha$

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS :

Son dos ángulos cuya suma de sus medidas es igual a *180°*



* En la figura se tienen los ángulos suplementarios *AOB* y *MQN*

Entonces : $x + y = 180°$

* Sea $S(x)$: suplemento de x

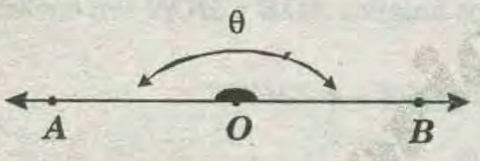
Entonces : $S(x) = 180° - x$

Ángulo(α)	*Complemento(S_α)*	*Suplemento(S_α)*
50°	*40°*	*130°*
48°	*42°*	*132°*
72°	*18°*	*108°*
x	*90° – x*	*180° – x*
2α	*90° – 2α*	*180° – 2α*

OBSERVACIONES :

ÁNGULO LLANO O RECTILÍNEO :

Es el ángulo cuyos lados son dos rayos opuestos es decir colíneales y su medida es *180°*.



$\theta = 180°$

ÁNGULO NULO O PERÍGONIO :

Es aquel ángulo cuya medida es *0°*

$m\sphericalangle AOB = 0°$

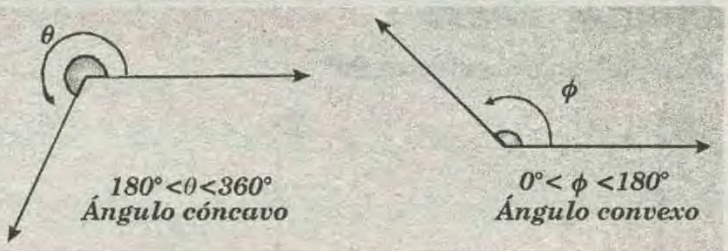
• También se considera :

ÁNGULO CONVEXO :

Un ángulo es convexo si su medida es mayor que cero, pero menor que *180°*

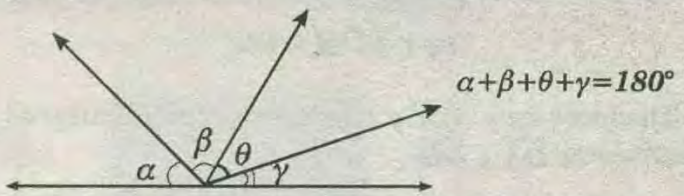
ÁNGULO CÓNCAVO :

Un ángulo es cóncavo si su medida es mayor que *180°* pero menor que *360°*



ÁNGULOS ALREDEDOR DE UN PUNTO DE UNA RECTA :

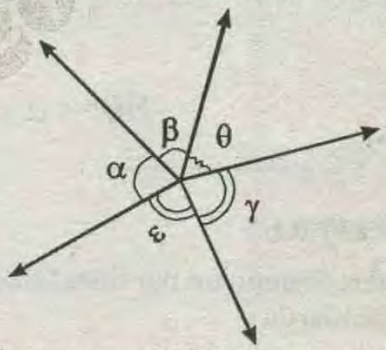
Son aquellos ángulos cuyas medidas suman *180°*.



$\alpha+\beta+\theta+\gamma=180°$

ÁNGULOS ALREDEDOR DE UN PUNTO DEL PLANO :

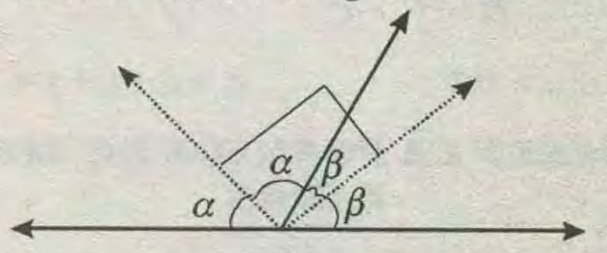
Son aquellos ángulos cuyas medidas suman *360°*.



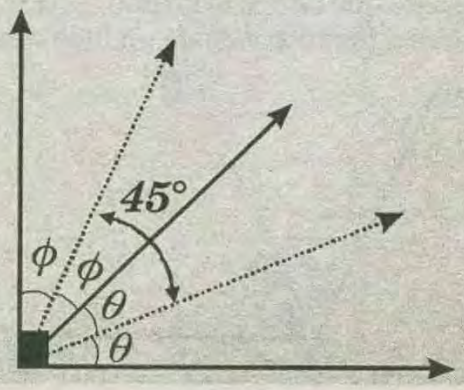
$\alpha+\beta+\theta+\gamma+\varepsilon = 360°$

OBSERVACIONES :

«Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios forman un ángulo recto»



«La bisectriz de dos ángulos adyacentes complementarios , forman un ángulo de *45°*»



Medición de los ángulos en grados sexagesimales :

Se toma como unidad principal el ángulo de un grado *(1°)* sexagesimal, el ángulo de *1°* es igual a $\frac{1}{360}$ de la medida de la circunferencia.

* El ángulo igual a $\frac{1}{60}$ parte de *1°* , es el ángulo de un minuto *(1')*

* El ángulo igual a $\frac{1}{60}$ parte de *1'* , es el ángulo de un segundo *(1")*

1°= 60' (se lee: un grado equivale a 60 minutos)

1'=60"(se lee: un minuto equivale a 60 segundos)

EJEMPLO 1:

Si un ángulo mide *60°*. Deseamos expresar dicha medida en grados minutos y segundos.

RESOLUCIÓN:

* Repartiendo *60°*, Así:

$60° = 59° + 1° \Rightarrow 60° = 59° + 60'$

$\Rightarrow 60° = 59° + 59' + 1' \Rightarrow 60° = 59° + 59' + 60"$

$\Rightarrow 60° = 59° 59' 60"$

EJEMPLO 2:

Expresar *6596"* en grados , minutos y segundos.

RESOLUCIÓN:

* Repartiendo a *6596"* en grupos de *60*, para obtener los segundos (ya que *1' = 60"*).

* Luego :

$$\begin{array}{r|l} 6596" & 60' \\ \underline{60} & 109' \\ 596 & \\ \underline{540} & \\ 56' & \end{array}$$

* Entonces :

$6596" = 109' 56" = (60' + 49') 56"$

$6596" = 1° 49' 56"$

EJEMPLO 3:

Sumar : $42° 30' + 53° 12' + 33°10'$

RESOLUCIÓN:

$$\begin{array}{l} 42° 30' + \\ 53° 12' \\ \underline{33° 10'} \\ 128°52° \end{array}$$

** Se suman unidades a parte, es decir grado con grado, minuto con minuto, y segundo con segundo.*

EJEMPLO 4:

Sumar: $120° 20' 30" + 38° 12' 22" + 53°50' 54"$

RESOLUCIÓN:

$$\begin{array}{l} 120° 20' 3" + \\ 38° 12' 22" \\ \underline{53° 50' 54"} \\ 211° 82' 106" \end{array}$$

** En caso que al sumar los segundos esta suma pasa de 60, entonces tantas veces este contiene 60 se agrega a los minutos y el resto queda.*

46" queda

83' 60" <> 1' se agrega

23' queda

60' <> 1° se agrega

212°

** se realiza la misma operación para los minutos.*

* Luego :

$120°20'30"+38°12'22"+53°50'54"=212°23'46"$

EJEMPLO 5 :

Si : $\alpha = 22°56'34"$

$\beta = 85°43'36"$

Calcular: $\alpha + \beta$

RESOLUCIÓN:

$$\begin{array}{l} 22° 56' 34" + \\ \underline{85° 43' 36"} \\ 107° 99' 70" \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1° & 1' \\ \hline 108° & 100' \\ & 40' \end{array} \quad 10"$$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 108° 40' 10"$

EJEMPLO 6 :

Restar: $120° 12' 30" - 48° 9' 22"$

RESOLUCIÓN:

$$\begin{array}{lll} 120° & 12' & 30" \\ \underline{48°} & \underline{9'} & \underline{22"} \\ 72° & 3' & 8" \end{array}$$

se restan separadamente los grados, minutos y segundos

EJEMPLO 7 :

Si : $\alpha = 150° 10' 20"$

$\beta = 122° 45' 32"$

Calcular : $\alpha - \beta$

* Se observa que los minutos y segundos del ángulo α son menores que los minutos del ángulo β

RESOLUCIÓN:

$$\begin{array}{l} 150° 10' 20" \\ \underline{122° 45' 32"} \\ \\ 149° 70' 20" \\ \underline{122° 45' 32"} \\ \\ 149° 69' 80" \\ \underline{122° 45' 32"} \\ 27° 24' 48" \end{array}$$

En estos casos a 150° lo convertimos en 149° + 1° como 1° <> 60'; Entonces agregamos 60' a la columna de minutos, quedando la columna de grados en 149°

Lo mismo se hace en la columna de segundos.

EJEMPLO 8:

Multiplicar : $25°30'20''$ por 5

RESOLUCIÓN:

$25°\ 30'\ 20'' \times 5$

$120°\ 150'\ 100''$

$40''$

$60'' \langle\rangle 1'$

$151'$

$31'$

$127°$

$\Rightarrow 25°30'20'' \times 5 = 127°31'40''$

* se multiplican separadamente las columnas de los grados, minutos y segundos
* se realizan las conversiones y equivalencias necesarias para agregarlas a la siguiente columna.

EJEMPLO 9:

Dividir : $137°$ entre 5

RESOLUCIÓN:

Se realizan los siguientes pasos:

A) Se dividen los grados entre el número dado

$$\begin{array}{r|l} 137° & 5 \\ \hline 35° & 27°24' \\ \hline 2° & \\ 120° & \\ \hline 20° & \end{array}$$

B) El residuo se convierte a minutos

C) Los minutos los dividimos entre el número dado

D) En caso de quedar residuo , los minutos sobrantes se convierten a segundos y luego se divide entre el número dado.

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 ¿Cuál es el doble del ángulo $30°\ 30'$?

A) 60° *B) 61°* *C) 62°* *D) 63°* *E) 60°59'*

02 ¿A que es igual el doble del ángulo $28°10'\ 20''$?

A) 56° *B)56° 20' 30"* *C) 56°20'35"* *D) 56°20'40"* *E)57°*

03 Si : $\alpha = 145°\ 30'$

$\beta = 48°\ 45'\ 30''$

Calcular : $\alpha - \beta$

A) 96° 30' 44" *B) 96°34' 44"* *C) 96° 43' 30"*
D) 96° 44' 30" *E) 69° 44' 30"*

04 ¿La quinta parte de $132°$ es?

A) 26°30' *B) 26° 42'* *C) 26°46'* *D) 26° 24'* *E) 26°12'*

05 ¿Cuánto le falta a la suma de $\alpha + \beta$ Para ser igual a $120°$?

Si: $\alpha = 72,\ 48°$

$\beta = 18°\ 38'\ 36''$

A) 72° 28' 48" *B) 91°17 24"* *C) 28° 52' 36"*
D) 42° 28' 36" *E) 90° 66' 84"*

06 Al dividir $245°$ en 4 partes, entonces cada parte medirá :

A) 60° 15' *B) 61° 15'* *C) 50° 16*
D) 60° 20' *E) 69° 15'*

07 Si : $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ y

$\alpha = x,\ \beta = 2x,\ \gamma = 3x$

¿Cual es al valor de $5x$?

A) 30° *B) 90°* *C) 60°* *D) 20°* *E) 150°*

08 ¿Cuánto le falta a $36°52'$, Para ser igual a $90°$?

A) 53°8' *B) 53° 3'* *C) 85°3'* *D) 35° 8'* *E) 83° 5'*

09 El triple de $23°30'12''$ más el doble de $120°\ 32'\ 45''$ es:

A) 275° 6' 36" *B) 276°36' 6"* *C) 275°36' 6"*
D) 277' 6'36" E) 270' 36'6"

10 Si: $\alpha = 32,\ 3°$ y $\beta = 45,\ 23°$

Calcular : $5\alpha - 2\beta$

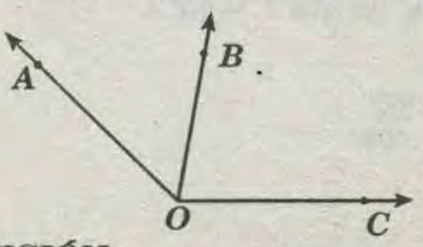
A) 70° 2' 24" *B) 71° 24' 4"* *C) 71° 2' 24"*
D) 74° 4' 41" *E) 69° 2' 24"*

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Determinar la medida del ángulo AOB, si $m\sphericalangle AOC = 140°$, $m\,BOC = 80°$.

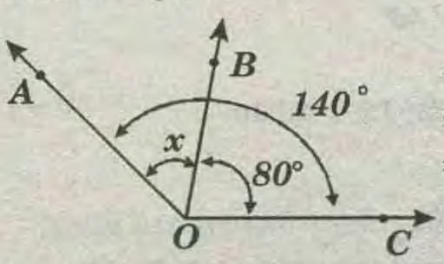
A) 30
B) 60
C) 40
D) 50
E) 20



RESOLUCIÓN:

* Colocando, datos en la figura

* Se deduce que :



$\Rightarrow x + 80° = 140°$

$\Rightarrow x = 140° - 80°$

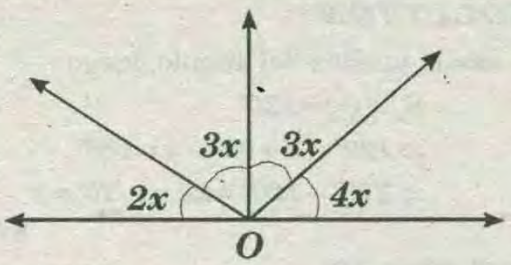
$\Rightarrow x = 60°$

RPTA : "B"

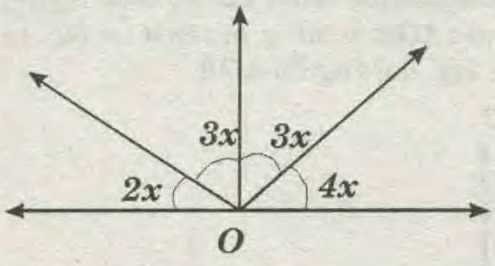
PROBLEMA 2:

En la siguiente figura encontrar el valor de x.

A) 15°
B) 20°
C) 18°
D) 10°
E) 12°



RESOLUCIÓN:



* Los ángulos consecutivos de la figura forman un ángulo llano, entonces su suma es igual a $180°$.

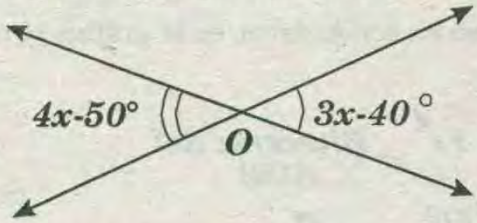
$2x+3x+3x+4x=180°$

$\Rightarrow 12x=180° \Rightarrow x=15°$

PROBLEMA 3:

En la figura, encontrar el valor de «x».

A) 35°
B) 25°
C) 5°
D) 15°
E) 10°



RESOLUCIÓN:

* Como se trata de ángulos opuestos por el vértice, entonces serán iguales, es decir:

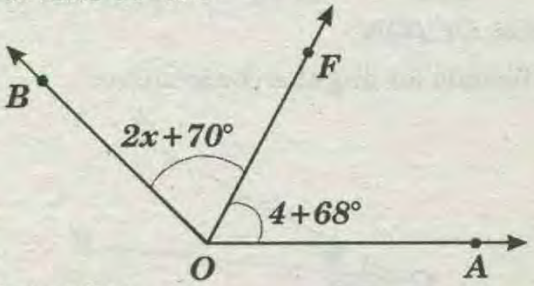
$$4x-50°=3x-40°$$
$$\Rightarrow 4x-3x=50°-40° \Rightarrow x=10°$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 4:

El rayo $\overline{OF}$ es bisectriz del ángulo AOB de la figura. Calcular el valor de «x».

A) 15°
B) 1°
C) 5°
D) 2°
E) 25°



RESOLUCIÓN:

* Como es bisectriz, entonces:

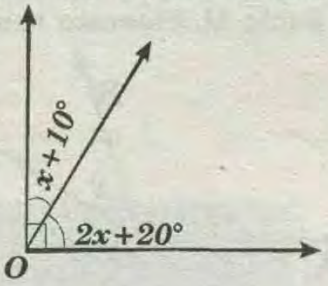
$$\Rightarrow 2x+70°=4x+68°$$
$$\Rightarrow 70°-68°=4x-2x$$
$$\Rightarrow 2°=2x \Rightarrow 1°=x$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 5:

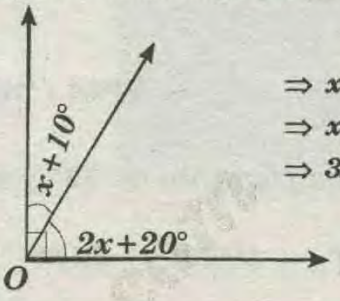
En la figura encontrar el valor de «x».

A) 25°
B) 15°
C) 10°
D) 30°
E) 20°



RESOLUCIÓN:

* Los ángulos consecutivos de la figura forman un ángulo recto, Luego sumarán $90°$.



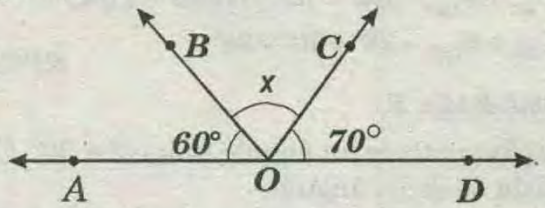
$\Rightarrow x+10°+2x+20°=90°$
$\Rightarrow x+2x+10°+20°=90°$
$\Rightarrow 3x+30=90° \Rightarrow x=20°$

RPTA : "E"

PROBLEMA 6:

En la figura, calcular : «x»

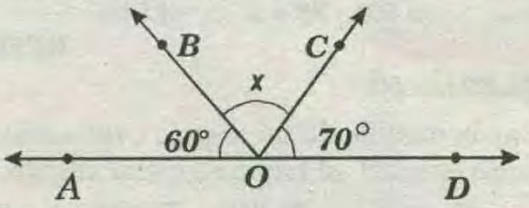
A) 40°
B) 80°
C) 90°
D) 50°
E) 30°



RESOLUCIÓN:

* En la figura los tres ángulos consecutivos forman un ángulo llano, entonces sumaran $180°$, luego:

* Se deduce que :



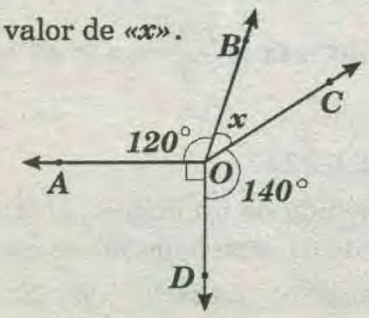
$60°+x+70°=180° \Rightarrow 130°+x=180°$
$\Rightarrow x=180°-130° \Rightarrow x=50°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 7:

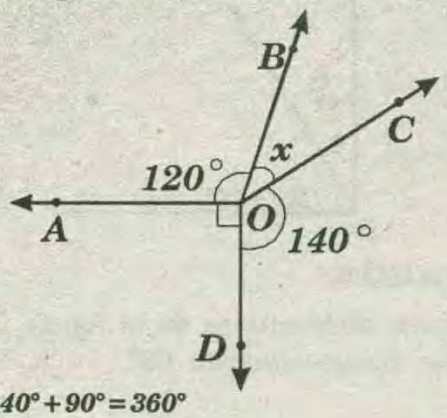
Encontrar el valor de «x».

A) 10°
B) 40°
C) 30°
D) 50°
E) 60°



RESOLUCIÓN:

* Los cuatro ángulos de la figura se encuentran alrededor del punto O, entonces sumarán $360°$; es decir:



$120° + x + 140° + 90° = 360°$

$\Rightarrow x + 350° = 360° \Rightarrow x = 10°$

RPTA : "A"

PROBLEMA 8:

Encontrar la suma del complemento de $52°$ y el suplemento de $120°$.

A) 92° B) 102° C) 98° D) 108° E) 88°

RESOLUCIÓN:

* Se pide :

$\Rightarrow C_{52} + S_{120} = (90° - 52°) + (180° - 120°)$

$\Rightarrow C_{52} + S_{120} = 38° + 60° = 98°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 9:

El complemento de un ángulo es igual a $38°$. Calcular la medida de dicho ángulo.

A) 52° B) 30° C) 42° D) 46° E) 48°

RESOLUCIÓN:

* Sea «x» la medida de un ángulo, luego :

$C_x = 38° \Rightarrow 90° - x = 38°$

$\Rightarrow 90° - 38 = x \Rightarrow 52° = x$

RPTA : "A"

PROBLEMA 10:

Encontrar la medida de un ángulo , sabiendo que su suplemento es igual al triple de dicho ángulo.

A) 25° B) 30° C) 35° D) 45° E) 40°

RESOLUCIÓN:

* Sea «x» la medida de un ángulo, luego plantearemos:

$S_x = 3x \Rightarrow 180° - x = 3x$

$\Rightarrow 180° = 4x \Rightarrow \dfrac{180°}{4} = x \Rightarrow 45° = x$

RPTA : "D"

PROBLEMA 11:

Calcular La medida de un ángulo, si la suma de su suplemento y de su complemento es igual a $120°$.

A) 75° B) 45° C) 60° D) 70° E) 65°

RESOLUCIÓN:

* Sea «x» la medida del ángulo, luego :

$S_x + C_x = 120°$

$\Rightarrow 180° - x + 90° - x = 120°$

$\Rightarrow 270° - 120° = 2x \Rightarrow 75° = x$

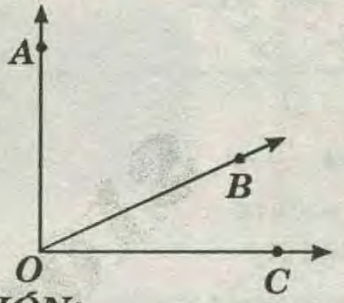
RPTA : "A"

PROBLEMA 12:

En los ángulos consecutivos AOB y BOC de la figura, se cumple que $m\sphericalangle AOB = 50°$ y $m\sphericalangle BOC = 30°$ se traza la bisectriz $\overrightarrow{OF}$ del ángulo AOB.

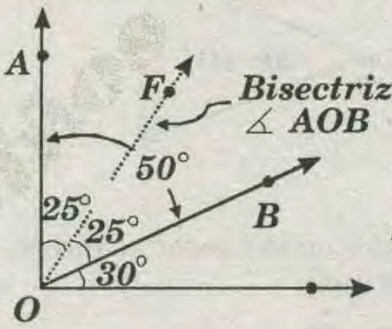
Calcular $m\sphericalangle FOC$.

A) 25°
B) 35°
C) 50°
D) 45°
E) 55°



RESOLUCIÓN:

* Colocando los demás datos, en la gráfica, se obtendrá:



* Se pide:

$m\sphericalangle FOC = 25° + 30° = 55°$

RPTA : "E"

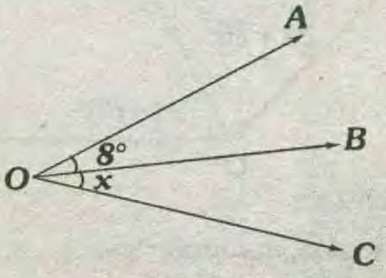
PROBLEMA 13:

Dados los ángulos consecutivos AOB y BOC, se sabe que AOC mide el triple que AOB y que éste mide $8°$. ¿Cuánto mide BOC?

A)6° B) 8° C) 16° D) 20° E) 10°

RESOLUCIÓN:

* Graficando los ángulos consecutivos :



* Del dato :

$m\sphericalangle AOC = 3(m\sphericalangle AOB)$

$\Rightarrow x + 8° = 3(8°)$

$\Rightarrow x + 8 = 24° \Rightarrow x = 16°$

RPTA : "C"

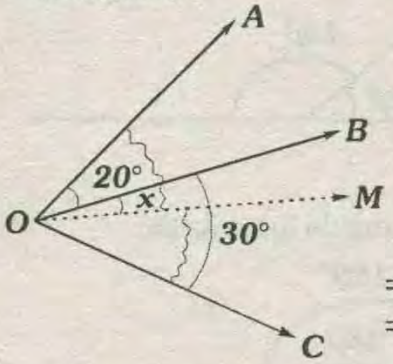
PROBLEMA 14:

Se tienen dos ángulos consecutivos ***AOB*** y ***BOC*** que miden ***20°*** y ***30°***, respectivamente. Se traza ***OM***, bisectriz del ángulo ***AOC***, determinar la medida del ángulo ***BOM***.

A) 5° B) 6° C) 10° D) 12° E) 20°

RESOLUCIÓN:

* Graficando :



* Como $\overrightarrow{OM}$, es bisectriz de $\sphericalangle AOC$, entonces:

$m\sphericalangle AOM = m\sphericalangle MOC$

$\Rightarrow 20° + x = 30° - x$

$\Rightarrow 2x = 10° \Rightarrow x = 5°$

RPTA : "A"

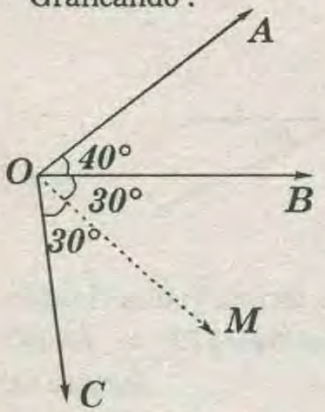
PROBLEMA 15:

Dados los ángulos consecutivos ***AOB*** y ***BOC*** que miden ***40°*** y ***60°***, respectivamente, se traza ***OM***, bisectriz del mayor. Calcular la medida del ángulo ***AOM***.

A) 20° B) 40° C) 50° D) 60° E) 70°

RESOLUCIÓN:

* Graficando :



* Debido a que $\overrightarrow{OM}$, es bisectriz del ángulo ***BOC***, luego : $m\sphericalangle BOM = 30°$

* Entonces :

$m\sphericalangle AOM = 40° + 30° = 70°$

RPTA : "E"

PROBLEMA 16:

Calcular el suplemento de ***127°*** más el complemento de ***79°***.

A) 62° B) 72° C) 61° D) 64° E) 53°

RESOLUCIÓN:

* Se pide : $S(127°) + C(79°)$

* Es decir : $(180° - 127°) + (90° - 79°)$

$= 53° + 11° = 64°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 17:

Al restar el suplemento de ***80°*** con el complemento de ***60°***, se obtiene :

A) 70° B) 62° C) 50° D) 30° E) 60°

RESOLUCIÓN:

* Se desea : $S(80°) - C(60°) = (180° - 80°) - (90° - 60°)$

$= 100° - 30° = 70°$

RPTA : "A"

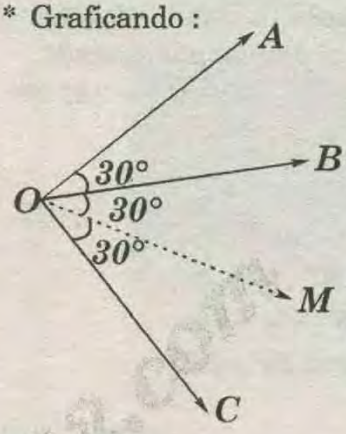
PROBLEMA 18:

Dibujar los ángulos ***AOB*** y ***BOC*** que midan ***30°*** y ***60°***, respectivamente, y $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz de ***BOC***. Calcular el complemento del ángulo ***AOM***.

A) 60° B) 45° C) 30° D) 15° E) 20°

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Se aprecia que:

$m\sphericalangle AOM = 60°$

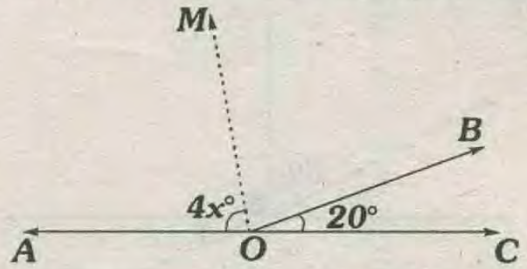
* Entonces:

$C(m\sphericalangle AOM) = C(60°) = 30°$

RPTA : "C"

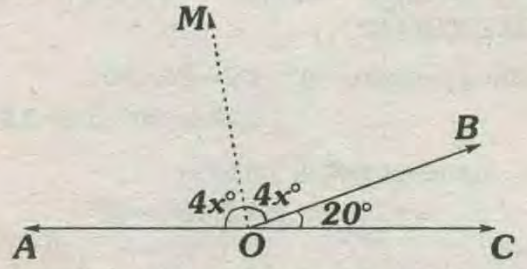
PROBLEMA 19:

Calcular ***"x"***, si ***OM*** es bisectriz del ángulo ***AOB***.



A) 30° B) 20° C) 10° D) 15° E)12°

RESOLUCIÓN:



* Como $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del $\sphericalangle AOB$

$\Rightarrow \sphericalangle AOB = \sphericalangle MOB = 4x$

* Luego: $4x + 4x + 20 = 180° \Rightarrow x = 20°$

RPTA : "B"

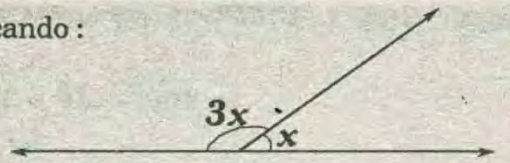
PROBLEMA 20 :

En un par lineal uno de los ángulos es el triple del otro calcular la medida del menor.

A) 30° B) 45° C) 36° D) 53° E) 38°

RESOLUCIÓN:

* Graficando :



* Se aprecia que :

$$3x + x = 180°$$
$$\Rightarrow 4x = 180° \Rightarrow x = 45°$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 21:

El suplemento de un ángulo más el doble del complemento de dicho ángulo es igual al doble el ángulo mencionado. Hallar el ángulo mencionado.

A) 20° B) 15° C) 12° D) 10° E) 72°

RESOLUCIÓN:

* Sea **"x"** el ángulo pedido.

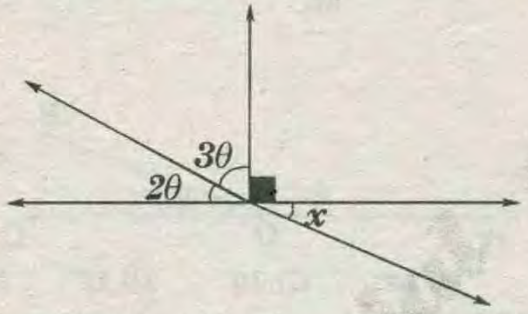
* Del dato :

$$180° - x + 2(90° - x) = 2x$$
$$\Rightarrow 180° - x + 180° - 2x = 2x$$
$$\Rightarrow 360° - 3x = 2x \Rightarrow 5x° = 360°$$
$$\Rightarrow x = 72°$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 22:

En la figura, calcular **"x"**



A) 24° B) 26° C) 36° D) 18° E) 20°

RESOLUCIÓN:

* Hallamos primero "θ": $2\theta + 3\theta = 90°$

$$\Rightarrow 5\theta = 90° \Rightarrow \theta = 18°$$

* Por $\sphericalangle$ opuestos por el vértice :

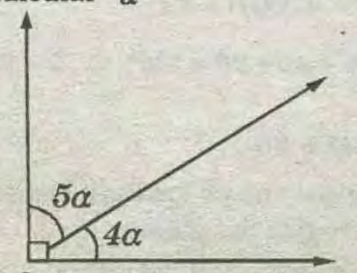
$$x = 2\theta \Rightarrow x = 2(18°) = 36°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 23 :

Según figura , calcular "α"

A) 8°
B) 9°
C) 10°
D) 12°
E) 5°



RESOLUCIÓN:

* Como se trata de un ángulo recto , luego:

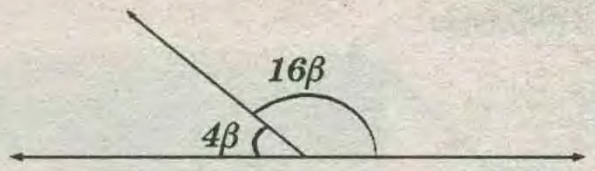
$$5\alpha + 4\alpha = 90° \Rightarrow 9\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 10°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 24 :

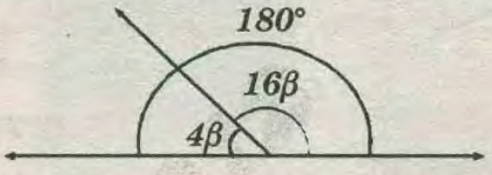
Según la figura calcular "β"

A) 8°
B) 6°
C) 15°
D) 18°
E) 9°



RESOLUCIÓN:

* Como se trata de un ángulo llano luego:



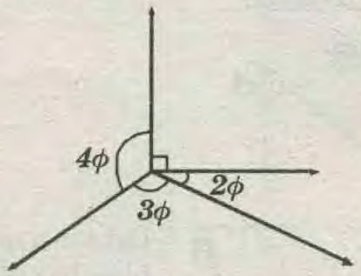
$$4\beta + 16\beta = 180° \Rightarrow 20\beta = 180° \Rightarrow \beta = 9°$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 25 :

Según la figura calcular "ϕ"

A) 30°
B) 20
C) 15°
D) 12°
E) 25°



RESOLUCIÓN:

* Como se trata de un ángulo de una vuelta , luego :

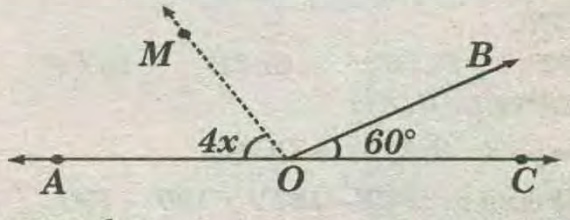
$$4\phi + 3\phi + 2\phi + 90° = 360° \Rightarrow 9\phi = 270° \Rightarrow \phi = 30°$$

RPTA : "A"

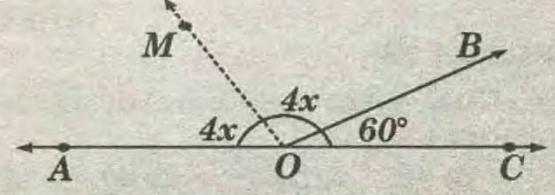
PROBLEMA 26 :

Calcular **"x"**, si **OM** bisectriz del ángulo **AOB**.

A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 12°
E) 19°



RESOLUCIÓN:



* Como $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del $\sphericalangle AOB$

$\Rightarrow \sphericalangle AOM = \sphericalangle MOB \Rightarrow 4x + 4x + 60° = 180°$

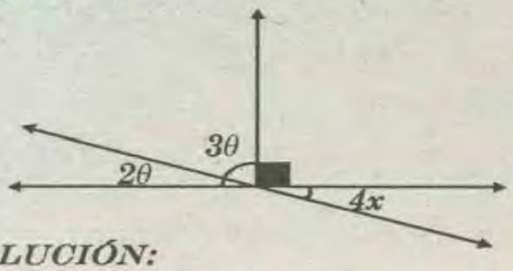
$\Rightarrow x = 15°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

En la figura , calcular *"x"*

A) 8°
B) 9°
C) 18°
D) 12°
E) 27°



RESOLUCIÓN:

* Hallamos primero "θ":

$$2\theta + 3\theta = 90° \Rightarrow 5\theta = 90° \Rightarrow \theta = 18°$$

* Por $\sphericalangle_S$ opuestos por el vértice:

$$4x = 2\theta \Rightarrow 4x = 2(18°) \Rightarrow x = 9°$$

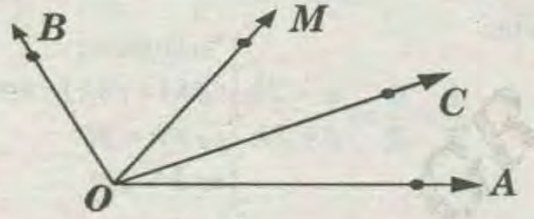
RPTA : "B"

PROBLEMA 28 :

En la figura, hallar "$m\sphericalangle MOC$"; Si:

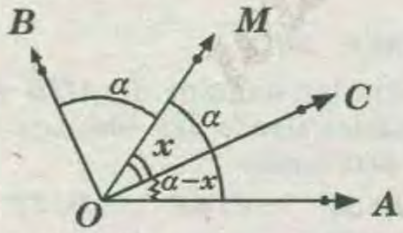
$m\sphericalangle BOC - m\sphericalangle AOC = 70°$, además $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ángulo AOB.

A) 20°
B) 25°
C) 35°
D) 15°
E) 45°



RESOLUCIÓN:

* Graficando los datos :



* Operando condición :

$$m\sphericalangle BOC - m\sphericalangle AOC = 70°$$

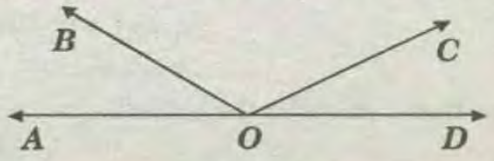
$$(\alpha + x) - (\alpha - x) = 70° \Rightarrow 2x = 70° \Rightarrow x = 35°$$

RPTA : "C"

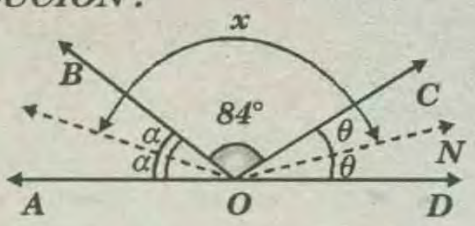
PROBLEMA 29 :

Del gráfico: $m\sphericalangle BOC = 84°$. Calcular la medida del ángulo formado por las bisectrices de $A\hat{O}B$ y $C\hat{O}D$

A) 46°
B) 112°
C) 124°
D) 132°
E) 140°



RESOLUCIÓN :



* Del gráfico : $2\alpha + 84° + 2\theta = 180°$

$$2\alpha + 2\theta = 96° \Rightarrow \alpha + \theta = 48°$$

* Luego : $x = 84° + 48° = 132°$

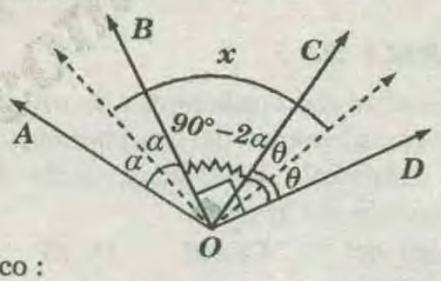
RPTA : "D"

PROBLEMA 30 :

Se tiene los ángulos consecutivos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ y $C\hat{O}D$ tal que : $m\sphericalangle AOC = m\sphericalangle BOD = 90°$. Halla la medida del ángulo formado por la bisectrices de $A\hat{O}C$, $B\hat{O}D$.

A) 45° B) 90° C) 100° D) 120° E) 130°

RESOLUCIÓN:



* Del gráfico :

$$m\sphericalangle BOC = 90° - 2\theta = 90° - 2\alpha \Rightarrow \alpha = \theta$$

* Luego : $x = \alpha + 90° - 2\alpha + \theta \Rightarrow x = 90°$

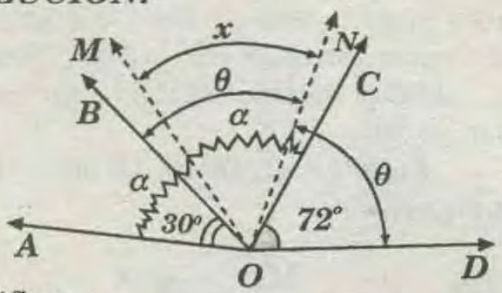
RPTA : "B"

PROBLEMA 31 :

Se tiene los ángulos consecutivos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ y $C\hat{O}D$ tal que : $m\sphericalangle AOB = 30°$ y $m\sphericalangle COD = 72°$. Hallar del ángulo formado por las bicectrices de $A\hat{O}C$ y $B\hat{O}D$.

A) 32° B) 941° C) 51° D) 61° E) 94°

RESOLUCIÓN:



* Del gráfico

$$\left.\begin{aligned} m\sphericalangle AON &= 30° + \theta = \alpha + x \\ m\sphericalangle MOD &= \underline{\alpha + 72 = x + \theta} \end{aligned}\right\}(+)$$

$$102° = 2x \Rightarrow x = 51°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 32 :

Si el suplemento de la medida de un ángulo es los 5/2 de su complemento. Calcular la medida de dicho

ángulo.

A) 20° B) 30° C) 45° D) 25° E) 42°

RESOLUCIÓN:

Sea "α" el ángulo ⇒ por dato :

$$180° - \alpha = \frac{5}{2}(90° - \alpha)$$

$$\Rightarrow 360° - 2\alpha = 450° - 5\alpha \Rightarrow \alpha = 30°$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 33 :

Si a un ángulo se le resta su complemento, es igual a *1/4* de su suplemento. Hallar la medida del ángulo .

A)30° B)45° C)60° D)75° E)55°

RESOLUCIÓN:

* Sea "α" el ángulo

$$\alpha - (90° - \alpha) = 1/4(180° - \alpha)$$

$$\Rightarrow 4(2\alpha - 90°) = (180° - \alpha)$$

$$\Rightarrow 8\alpha - 360° = 180° - \alpha \Rightarrow \alpha = 60°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 34 :

Si al suplemento del suplemento de un ángulo se le aumenta el complemento del complemento del ángulo, resulta el cuádruple del complemento del mismo. Hallar la medida del ángulo.

A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) 55°

RESOLUCIÓN:

* Sea "β" el ángulo

$$SS_\beta + CC_\beta = 4(C_\beta)$$

* Si : $SS_\beta = \beta \wedge CC_\beta = \beta$

$$\Rightarrow (\beta) + (\beta) = 4(90° - \beta)$$

$$\Rightarrow 6\beta = 360° \Rightarrow \beta = 60°$$

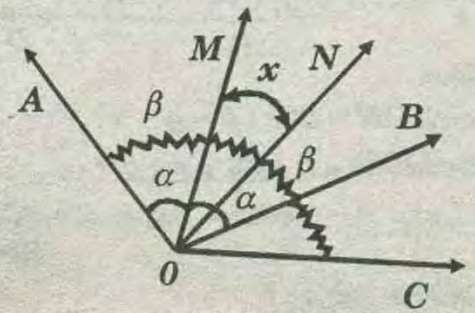
RPTA : "C"

PROBLEMA 35 :

Se tiene los ángulos consecutivos $\sphericalangle AOB$ y $\sphericalangle BOC$. Hallar el ángulo formado por la bisectrices de los ángulos $\sphericalangle AOC$ y $\sphericalangle AOB$ sabiendo que estos se diferencian en *50°*.

A) 25° B) 30° C) 15° D) 35° E) 100°

RESOLUCIÓN :



* De : $m\sphericalangle AOC - m\sphericalangle AOB = 50°$

$$\Rightarrow 2\beta - 2\alpha = 50° \Rightarrow \beta - \alpha = 25°$$

* Del gráfico: $x = \beta - \alpha \Rightarrow x = 25°$

RPTA : "A"

PROBLEMA 36 :

Si al suplemento de un ángulo se le disminuye el séxtuplo de su complemento. Resulta la mitad del valor del ángulo. Hallar el suplemento del ángulo.

A) 100° B) 150° C) 160° D) 140° E) 135°

RESOLUCIÓN:

* Sea "θ" el ángulo.

$$S_\theta - 6\,C_\theta = \frac{\theta}{2} \Rightarrow (180° - \theta) - 6(90° - \theta) = \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow 5\theta - 360° = \frac{\theta}{2} \Rightarrow 5\theta - \frac{\theta}{2} = 360°$$

$$\Rightarrow \frac{9\theta}{2} = 360° \Rightarrow \theta = 80°$$

$$\Rightarrow S_\theta = S_{80°} = 180° - 80° = 100°$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 37 :

Dos ángulos complementarios son entre sí como *2* es a *3*. La diferencia de estos ángulos es :

A)18° B) 36° C) 24° D) 27° E)30°

RESOLUCIÓN:

* Si α y θ Son complementarios $\Rightarrow \alpha + \theta = 90°$

* Datos:

$$\frac{\alpha}{\theta} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 2k \\ \theta = 3k \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} *\text{además:} \\ (2k) + (3k) = 90° \\ \Rightarrow 5k = 90° \\ \Rightarrow k = 18° \end{matrix} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 36° \\ \theta = 54° \end{matrix} \left\{ \theta - \alpha = 54° - 36° = 18° \right.$$

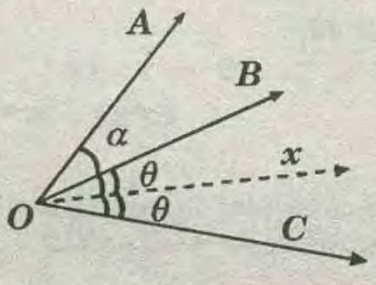
RPTA : "A"

PROBLEMA 38 :

Sabiendo que los ángulos de *AOB* y *AOC* son complementarios siendo $\overrightarrow{OX}$ bisectriz del $\sphericalangle BOC$ Entonces $\sphericalangle AOX$ mide:

A) 45° B) 36° C) 54° D) 27° E) 50°

RESOLUCIÓN:



* $m\sphericalangle AOB = \alpha$

* $m\sphericalangle AOC = \alpha + 2\theta$

*Por dato:

$$m\sphericalangle AOB + m\sphericalangle AOC = 90°$$

$$\Rightarrow (\alpha) + (\alpha + 2\theta) = 90°$$

$$\Rightarrow \alpha + \theta = 45°$$

* Del gráfico : $m\sphericalangle AOx = \alpha + \theta = 45°$

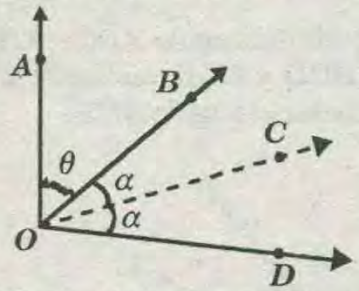
RPTA : "A"

PROBLEMA 39 :

Se tiene los ángulos consecutivos $\sphericalangle AOB$ y $\sphericalangle BOC$; si $\overline{OC}$ es bisectriz $\sphericalangle BOD$ y la suma de los $\sphericalangle AOB$ y $\sphericalangle AOD = 66°$ ¿Cuánto mide el $\sphericalangle AOC$?.

A) 33° B) 44° C) 55° D) 22° E) 66°

RESOLUCIÓN:



* Dato:

$m\sphericalangle AOB + m\sphericalangle AOD = 66°$

$\theta + (\theta + 2\alpha) = 66°$

$\Rightarrow 2\theta + 2\alpha = 66°$

$\Rightarrow \theta + \alpha = 33°$

* Del gráfico : $m\sphericalangle AOC = \theta + \alpha = 33°$

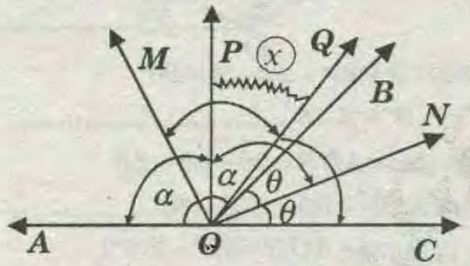
RPTA : "A"

PROBLEMA 40 :

Se tiene los ángulos adyacentes suplementarios $\sphericalangle AOB$ y $\sphericalangle BOC$ cuyas bisectrices son $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$ respectivamente. Hallar del ángulo formado por la bisectrices de los $\sphericalangle AON$ y $\sphericalangle MOC$.

A) 50° B) 55° C) 45° D) 27° E) 36°

RESOLUCIÓN:



* Del gráfico : $\alpha + \beta = 90°$

$$* \; m\sphericalangle AOP = m\sphericalangle PON = \frac{2\alpha + \theta}{2}$$

$$* \; m\sphericalangle MOQ = M\sphericalangle MOQ = \frac{\alpha + 2\theta}{2}$$

$$* \; m\sphericalangle AOP + m\sphericalangle POQ + m\sphericalangle QOC = 2\alpha + 2\theta$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\alpha + \theta}{2}\right) + \frac{2x}{2} + \left(\frac{\alpha + 2\theta}{2}\right) = 2\alpha + 2\theta$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\alpha + \theta + 2x + \alpha + 2\theta}{2}\right) = 2\alpha + 2\theta$$

$$3\alpha + 3\theta + 2x = 4\alpha + 4\alpha \Rightarrow x = \frac{\alpha + \theta}{2} \Rightarrow x = 45°$$

RPTA : "C

PROBLEMA 41 :

Si a la medida de unos de los ángulos suplementarios se les disminuye *35°* para agregarle a la medida del otro , este resulta ser *8* veces lo que queda de la medida del primero ¿Cuánto vale el complemento del menor ángulo?.

A) 45° B) 35° C) 36° D) 40° E) 27°

RESOLUCIÓN:

* De α y β: $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \beta = 180° - \alpha$.....*(I)*

* Si a "α" disminuimos *35°* quedaría $(\alpha - 35)$, a "β" agregamos *35°* quedaría $(\beta + 35)$

Luego : $(\beta + 35°) = 8(\alpha - 35°)$.....*(II)*

* *(I)* en *(II)*:

$((180° - \alpha) + 35°) = 8\alpha - 280°$

$\Rightarrow 215° + 280° = 9\alpha \Rightarrow 495° = 9\alpha \Rightarrow \alpha = 55°$

$\Rightarrow$ El menor es *55°*

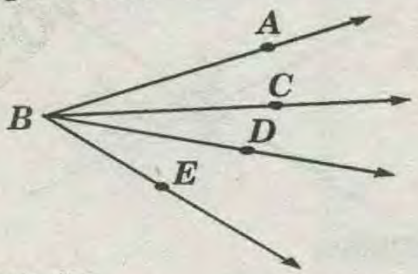
* Y su complemento de $55° = (90° - 55°) = 35°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 42 :

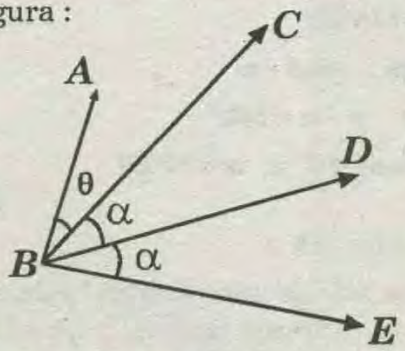
En la figura $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo ***CBE*** y la suma de los ángulos ***ABC*** y ***ABE*** vale *52°*. Calcular el valor del ángulo ***ABD***.

A) 52°
B) 39°
C) 26°
D) 34°
E) 28°



RESOLUCIÓN:

* Dada la figura :



* Por dato : $2\alpha + 2\theta = 52° \Rightarrow \alpha + \theta = 26$

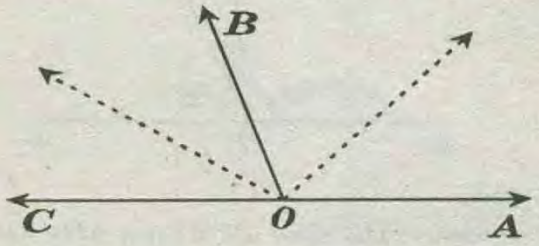
* Se pide : $m\sphericalangle ABD = \alpha + \theta = 26°$

RPTA : "C"

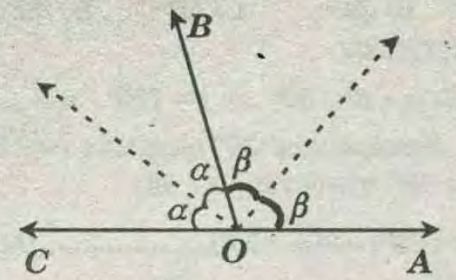
PROBLEMA 43 :

La diferencia de los ángulos formados por las bisectrices de dos ángulos adyacentes y el lado común es *18°*. El doble del complemento del ángulo ***BOC*** es:

A) 34°
B) 36°
C) 38°
D) 32°
E) 30°



RESOLUCIÓN:



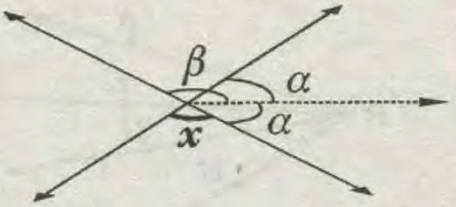
* Piden : $2C_{(2\alpha)} = 2(90° - 2\alpha) = 180° - 4\alpha$ .....(I)
* Datos : $\beta - \alpha = 18°$.....(II)
* De la figura : $2\beta + 2\alpha = 180° \Rightarrow \beta + \alpha = 90°$ .....(III)
* De (II) y (III): $\alpha = 36°$
* Reemplazando en (I): $2C_{(2\alpha)} = 36°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 44 :

Hallar la medida del ángulo x en la siguiente figura , sabiendo que $\beta = 118°40'$

A) 57°
B) 57°10'
C) 57°20'
D) 57°30'
E) 57°40'



RESOLUCIÓN:

* Piden : x
* Dato : $\beta = 118°40'$
* De la figura : $x = \beta - \alpha$
* Se observa : $\beta + \alpha = 180°$
* Luego : $\alpha = 61°20' \Rightarrow x = 57°20'$

RPTA : "C"

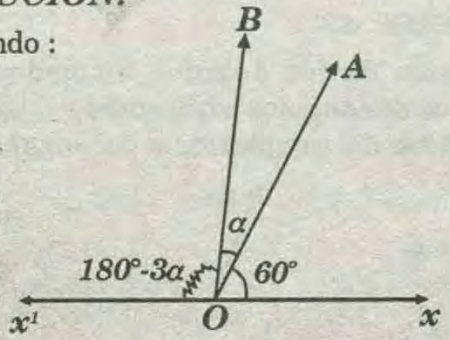
PROBLEMA 45 :

En un mismo lado de una recta xx' y desde un punto O de la misma, se trazan las semirrectas OA y OB, tal que los ángulos formados son : $A\hat{O}X = 60°$ y $X'\hat{O}B$ es el suplemento del triple de BOA. Hallar $A\hat{O}B$

A) 50° B) 20° C) 10° D) 30° E) 150°

RESOLUCIÓN:

* Gráficando :



* Se sabe:

$$m\sphericalangle x'OB + m\sphericalangle BOA + m\sphericalangle AOx = 180°$$

* Reemplazando de la figura :

$$180° - 3\alpha + \alpha + 60° = 180°$$
$$\Rightarrow 60° = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 30°$$

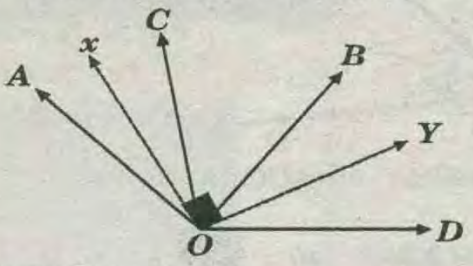
* Pero : $m\sphericalangle AOB = \alpha = 30°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 46 :

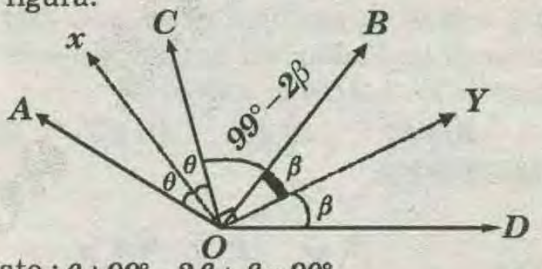
En la figura $\overline{OX}$ es la bisectriz del ángulo $A\hat{O}C$, y OY es la bisectriz del ángulo BOD y COD mide 99°. El ángulo XOY mide 90°. Calcular el ángulo AOB.

A) 98°
B) 81°
C) 99°
D) 100°
E) 70°



RESOLUCIÓN:

* Da la figura:



* Por dato : $\theta + 99° - 2\beta + \beta = 90°$

$$\Rightarrow 9° = \beta - \theta \text{ .....(I)}$$

* Se pide : $m\sphericalangle AOB = 2\theta + 99 - 2\beta$

$$\Rightarrow m\sphericalangle AOB = 99 - 2(\beta - \theta) \text{.....(II)}$$

* (I) en (II) : $m\sphericalangle AOB = 99° - 2(9°)$

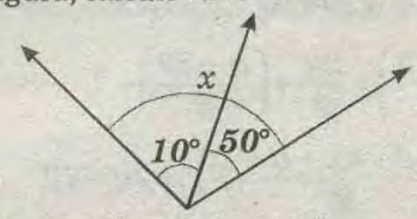
$$\Rightarrow m\sphericalangle AOB = 81°$$

RPTA :"B"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

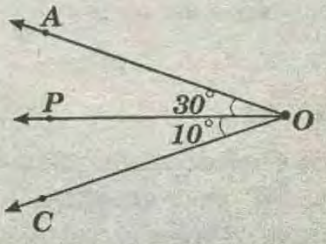
(01) En la figura, calcule «x».

A) 60°
B) 40°
C) 70°
D) 30°
E) 50°

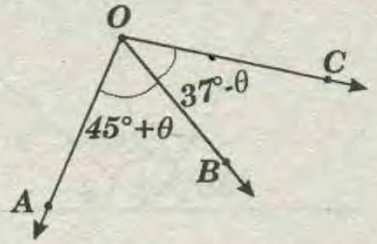


(02) En la figura, calcular $m\sphericalangle AOC$

A) 20°
B) 45°
C) 40°
D) 10°
E) 50°

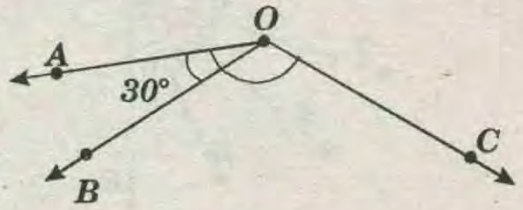


03 En la figura, calcular: $m\sphericalangle AOC$



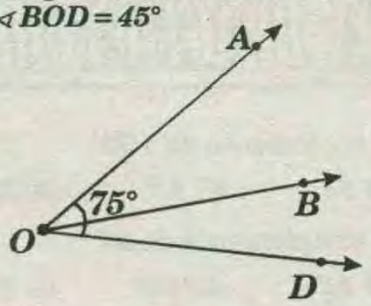
A) 80°
B) 82°
C) 70°
D) 39°
E) 92°

04 En la figura, calcular $m\sphericalangle BOC$, si $m\sphericalangle AOC + m\sphericalangle AOB = 130°$



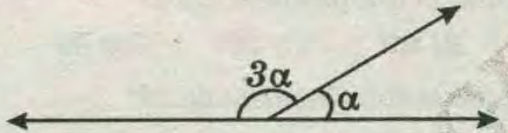
A) 30°
B) 70°
C) 40°
D) 50°
E) 60°

05 En la figura, calcular $m\sphericalangle AOB$ si $m\sphericalangle AOB - m\sphericalangle BOD = 45°$



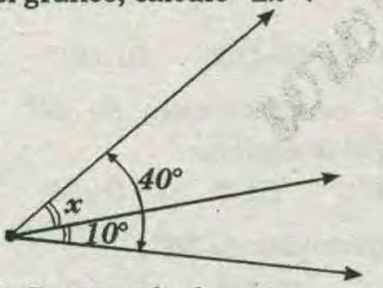
A) 37°
B) 53°
C) 60°
D) 45°

06 Calcule «α».



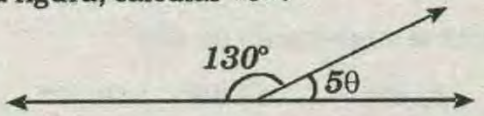
A) 18°
B) 45°
C) 60°
D) 37°
E) 53°

07 En el grafico, calcule «$2x$».



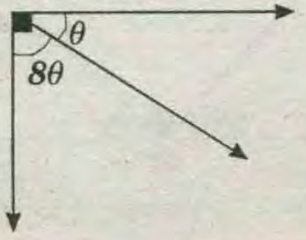
A) 15°
B) 20°
C) 10°
D) 60°
E) 30°

08 En la figura, calcular «θ».



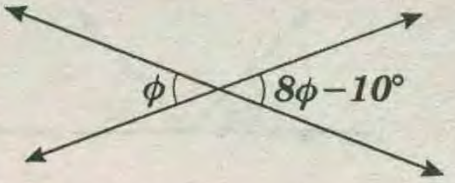
A) 15° B) 25° C) 30° D) 40° E) 10°

09 En el grafico, calcule «2θ».



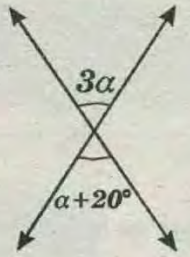
A) 16°
B) 18°
C) 10°
D) 15°
E) 20°

10 En la figura, calcular "ϕ"



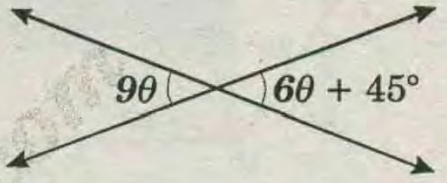
A) 5°
B) 10°
C) 15°
D) 20°
E) 25°

11 En la figura, calcular «α».



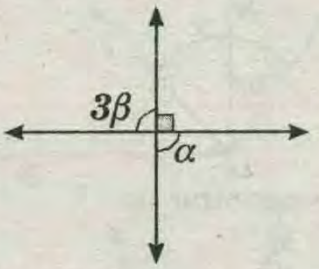
A) 5°
B) 10°
C) 15°
D) 20°
E) 25°

12 Según la figura, calcular «θ».



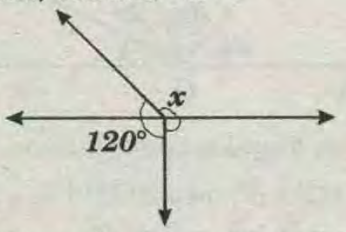
A) 5°
B) 10°
C) 15°
D) 20°
E) 25

13 En la figura, calcular: $\beta + \alpha$



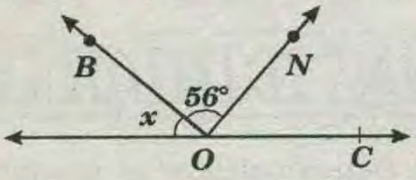
A) 120°
B) 150°
C) 115°
D) 140°
E) 160°

14 En el grafico, calcular «x».



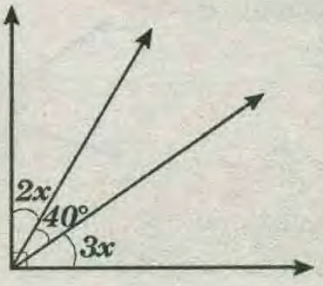
A) 100°
B) 120°
C) 150°
D) 130°
E) 140°

15 Si $\overline{ON}$ es bisectriz del $\sphericalangle BOC$. Calcule «x»



A) 64°
B) 68°
C) 66°
D) 70°
E) 72°

16 Calcular «x» en:

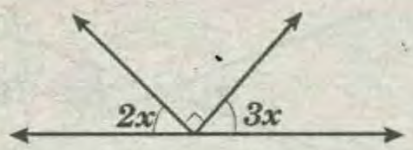


A) 10°
B) 12°
C) 8°
D) 9°
E) 15°

RUNIÑOS CRAFT

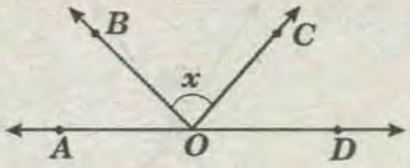
(17) Encontrar «x» en:

A) 20°
B) 16°
C) 12°
D) 15°
E) 18°



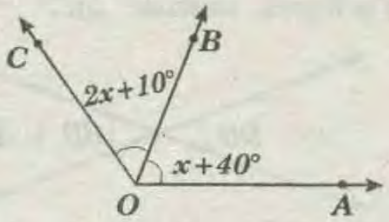
(18) Encontrar «x» si $m\sphericalangle AOC + m\sphericalangle BOD = 265°$

A) 60°
B) 70°
C) 75°
D) 80°
E) 85°



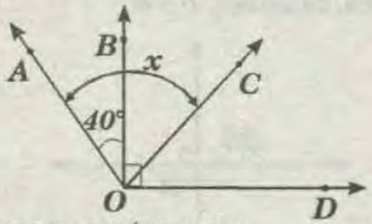
(19) En la figura, $\overline{OB}$ es la bisectriz del ángulo AOC, encontrar «x»

A) 5°
B) 15°
C) 20°
D) 30°
E) 45°



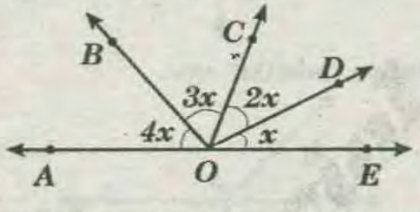
(20) Encontrar «x», $\overline{OC}$ es bisectriz del ángulo BOD.

A) 50°
B) 55°
C) 70°
D) 85°
E) 60°



(21) En la figura encontrar «x».

A) 10°
B) 18°
C) 15°
D) 20°
E) 12°



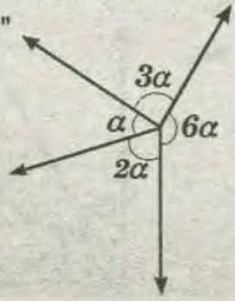
(22) Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD; si $m\sphericalangle AOB = 5°$; $m\sphericalangle AOD + m\sphericalangle BOC = 80°$ y $m\sphericalangle COD = 15°$; calcular: $m\sphericalangle AOD$.

A) 50° B) 90° C) 10° D) 70° E) 60°

TAREA DOMICILIARIA

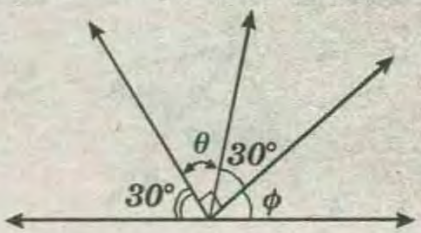
(01) En la figura calcular el complemento del complemento de "α"

A) 20°
B) 25°
C) 30°
D) 35°
E) 40°



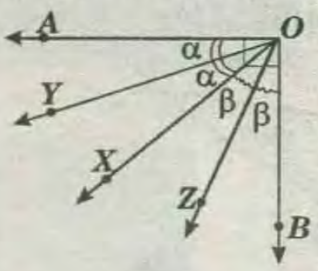
(02) En la figura, calcular $\phi + \theta$.

A) 90°
B) 100°
C) 110°
D) 115°
E) 120°



(03) Si $\overline{OX}$ es bisectriz del $\sphericalangle AOB$, calcular: $m\sphericalangle YOZ$

A) 15°
B) 30°
C) 50°
D) 48°
E) 45°



SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

(01) Hallar el suplemento de 126°

A) 44° B) 54° C) 64° D) 58° E) 48°

(02) Hallar el complemento de 49°

A) 51° B) 41° C) 61° D) 57° E) 47°

(03) Calcular el complemento de 37°

A) 63° B) 53° C) 72° D) 80° E) 37°

(04) Calcular el complemento de 78°

A) 12° B) 22° C) 24° D) 87° E) 102°

(05) Al sumar 75° con el complemento de 14°, se obtiene:

A) 150° B) 161° C) 178° D) 151° E) 162°

(06) Al restar el complemento de 38° con el complemento de 72° se obtiene:

A) 36° B) 34° C) 7° D) 36° E) 24°

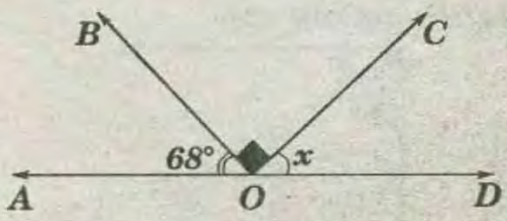
(07) Calcular el suplemento de 96°

A) 72° B) – 6° C) 84° D) 94° E) 4°

(08) Calcular el suplemento de 124°

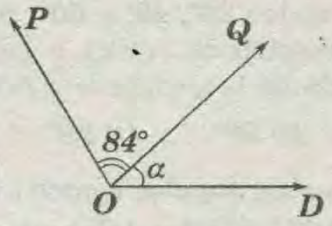
A) 72° B) 66° C) 56° D) 72° E) 46°

(09) Calcular "x"



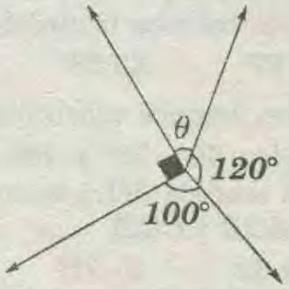
A) 32° B) 22° C) 28° D) 20° E)18°

(10) Calcular "α". Siendo: $m\sphericalangle POD = 128°$



A) 44°
B) 56°
C) 46°
D) 48°
E) 50°

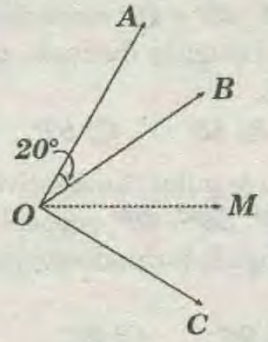
(11) Calcular "θ"



A) 50°
B) 60°
C) 45°
D) 40°
E) 93°

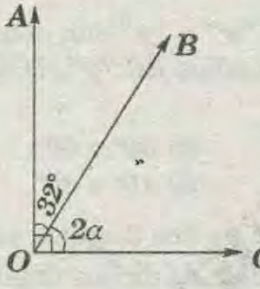
(12) Si $\overline{OM}$ es bisectriz del $\sphericalangle BOC$, $m\sphericalangle BOC = 48°$.

Hallar $m\sphericalangle AOM$



A) 34°
B) 42°
C) 44°
D) 38°
E) 46°

(13) Calcular "α"



A) 29°
B) 30°
C) 18°
D) 32°
E) 42°

(14) Si los ángulos consecutivos ***AOB*** y ***BOC*** miden 35° y 40°, respectivamente, ¿cuánto mide el ángulo ***AOC***?

A) 72° B) 75° C) 77° D) 79° E) 80°

(15) Si los ángulos consecutivos ***AOB*** y ***BOC*** miden 36° y 42°, respectivamente ¿cuánto mide el ángulo ***AOC***?

A) 59° B) 58° C) 49° D) 69° E) 78°

(16) Se tiene los ángulos consecutivos ***AOB*** y ***BOC***. Si ***AOB*** y ***AOC*** miden 42° y 70°, respectivamente, ¿cuánto mide el ángulo ***BOC***?

A) 28° B) 24° C) 22° D) 19° E) 18°

(17) Se tienen los ángulos consecutivos ***POQ*** y ***QOR***. Si ***QOR*** y ***POR*** miden 36° y 80°, respectivamente, ¿cuánto mide el ángulo ***POQ***?

A) 59° B) 40° C) 44° D) 45° E) 48°

(18) Se tiene los ángulos consecutivos ***AOB*** y ***BOC*** que miden 40° y 70°, respectivamente. Si ***OM*** es la bisectriz de ***BOC***, calcular la medida del ángulo ***AOM***.

A) 75° B) 77° C) 79° D) 80° E) 82°

(19) Dados los ángulos consecutivos ***AOB*** y ***BOC*** que miden 30° y 45°, respetivamente, se traza ***OM***, bisectriz de ***AOB***. Calcular la medida de ***MOC***.

A) 35° B) 38° C) 48° D) 59° E) 60°

(20) Se tiene los ángulos consecutivos ***AOB*** y ***BOC*** que miden 24° y 48°, respetivamente. Si ***OM*** es la bisectriz de ***AOC***, calcular la medida del ángulo ***BOM***.

A) 1° B) 4° C) 8° D 12° E) 3°

TAREA DOMICILIARIA

(01) Al sumar 105° con el suplemento de 96° se obtiene:

A) 200° B) 189° C) 199° D) 72° E) 204°

(02) Al restar el suplemento de 54° con el suplemento de 172° se obtiene:

A) 114° B) 116° C) 180° D) 118° E) 108°

(03) Dibujar los ángulos adyacentes ***AOB*** y ***BOC*** que midan 50° y 36° respectivamente, y que ***OM*** sea bisectriz de ***AOC***. Calcular el complemento del ángulo ***MOB***.

A) 83° B) 63° C) 72° D) 8° E) 27°

(04) Se tiene los ángulos consecutivos ***AOB*** y ***BOC*** que miden 56° y 44°, respectivamente. Sea ***OM*** la bisectriz de ***AOC***, calcular la medida de ***BOM***.

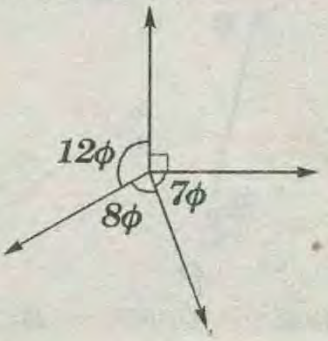
A) 2° B) 6° C) 8° D) 10° E) 12°

(05) Se tiene los ángulos consecutivos ***AOB***, ***BOC*** y ***COD***. Si ***AOC***, ***BOD*** y ***AOD*** miden 50°, 60° y 80°, respectivamente, calcular la medida de ***BOC***.

A) 28° B) 29° C) 30° D) 32° E) 33°

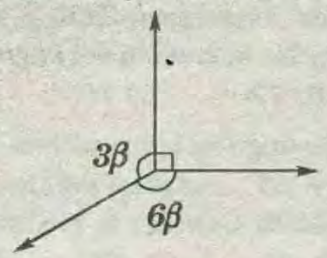
TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

(01) En la figura, calcular ϕ.



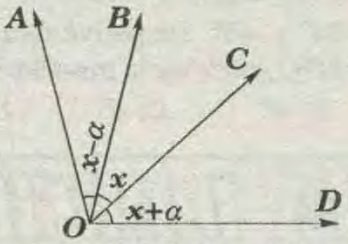
A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°

02 En la figura, calcular β.



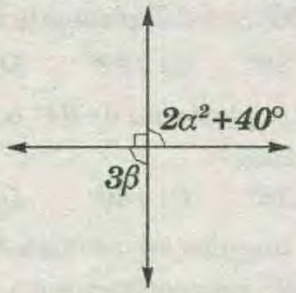
A) 30°
B) 40°
C) 35°
D) 36°
E) 20°

03 Calcular "x"; si $m\sphericalangle AOD = 102°$



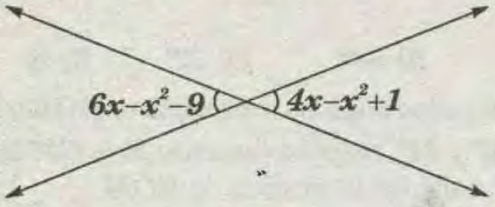
A) 28°
B) 30°
C) 34°
D) 38°
E) 36°

04 Según la figura, calcular el complemento de $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$



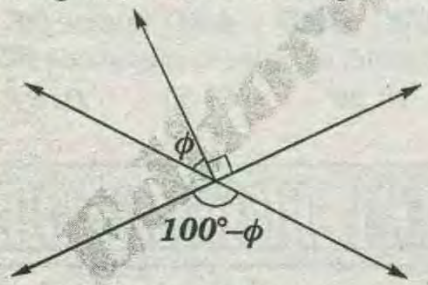
A) 72°
B) 82°
C) 84°
D) 68°
E) 60°

05 De la figura, calcular el suplemento de "$32x$"



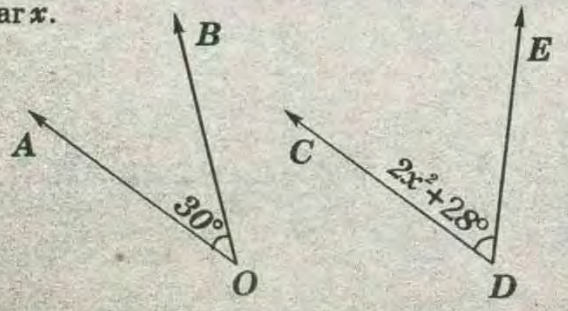
A) 10° B) 20° C) 30° D) 40° E) 8°

06 Según la figura, calcular el complemento de ϕ



A) 85°
B) 65°
C) 50°
D) 45°
E) 30°

07 Si los ángulos AOB y CDE son complementarios, calcular x.



A) 2° B) 4° C) 8° D) 6° E) 12°

08 Se tiene los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD que miden $20°$, $40°$ y $60°$, respectivamente. Si $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz de $\sphericalangle COD$ y $\overrightarrow{OQ}$ es la bisectriz de $\sphericalangle AOB$, calcular la medida de $\sphericalangle POQ$

A) 80° B) 82° C) 90° D) 91° E) 95°

09 Se tiene los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD. Si AOC, BOD y AOD miden $60°$, $80°$ y $110°$ respectivamente, calcular la medida de BOC.

A) 25° B) 27° C) 28° D) 29° E) 30°

10 Se tiene los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD que miden $50°$, $30°$ y $40°$ respectivamente; determinar la medida del ángulo formado por las bisectrices de AOB y COD.

A) 58° B) 62° C) 71° D) 75° E) 76°

11 Dados los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD que miden $30°$, $45°$ y $40°$ respectivamente, determinar la medida del ángulo formado por las bisectrices de AOB y COD.

A) 79° B) 85° C) 87° D) 89° E) 91°

12 Dados los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD que miden $50°$, $36°$ y $70°$, respectivamente, calcular la medida del ángulo formado por las bisectrices de AOB y COD.

A) 92° B) 96° C) 98° D) 99° E) 100°

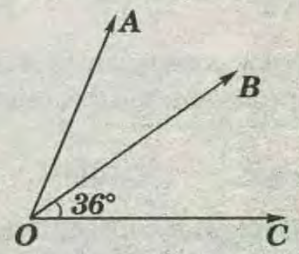
13 Dos ángulos "x" e "y" son complementarios, si "x" es los tres medios de "y". ¿Cuánto mide cada ángulo?

A) 35° y 54° B) 30° y 60° C) 45° y 45°
D) 20° y 70° E) 10° y 80°

14 La diferencia de dos ángulos suplementarios es $36°$. Hallar la medida de dichos ángulos.

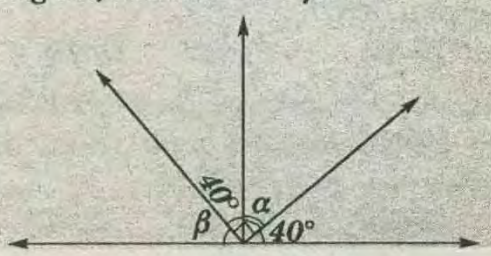
A) 108° y 72° B) 110° y 70° C) 100° y 80°
D) 120° y 60° E) 130° y 150°

15 Si: $m\sphericalangle AOC = 4(m\sphericalangle AOB)$, hallar m: $\sphericalangle AOB$



A) 25°
B) 20°
C) 15°
D) 10°
E) 12°

16 De la figura, calcular: "$\alpha + \beta$"



A) 80° B) 100° C) 120° D) 90° E) 105°

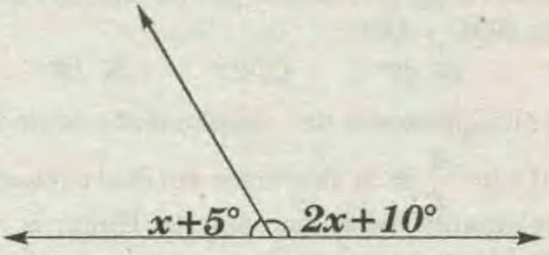
17 Se tiene los ángulos adyacentes *AOB* y *BOC* tales que: $m\sphericalangle BOC = m\sphericalangle BOA + 40°$; se trazá luego las bisectrices $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$ y $\overrightarrow{OT}$ de los ángulos *AOB*, *BOC* y *XOY* respectivamente. Calcular $m\sphericalangle BOT$.

A) 10° B) 8° C) 12° D) 18° E) 20°

18 Se tiene los ángulos adyacentes *AOB* y *BOC* tales que: $m\sphericalangle COB = m\sphericalangle AOB + 48°$; luego se trazan las bisectrices $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ y $\overrightarrow{OP}$ de los ángulos *AOB*, *BOC* y *MON*, respectivamente. Calcular $m\sphericalangle BOP$

A) 12° B) 8° C) 16° D) 25° E) 30°

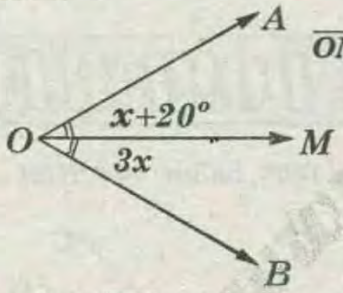
19 Calcular "*x*", en:



A) 55° B) 60° C) 65° D) 75° E) 70°

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

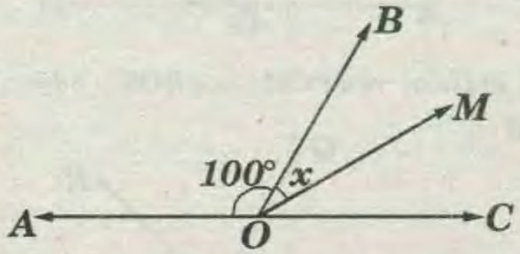
01 Calcular "*x*".



$\overline{OM}$ = Bisectriz

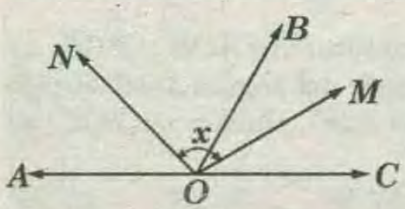
A) 5°
B) 10°
C) 15°
D) 20°
E) 25°

02 Calcular "*x*". $\overline{OM}$ = Bisectriz de $\angle BOC$



A) 10°
B) 15°
C) 25°
D) 30°
E) 40°

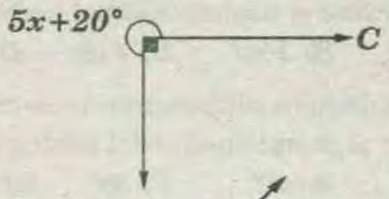
03 Calcular "*x*".



$\overline{OM}$ = Bisectriz de $\angle BOC$
$\overline{ON}$ = Bisectriz de $\angle AOB$

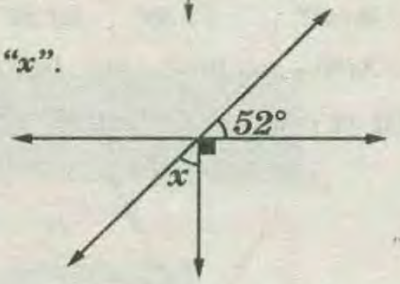
A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) 90°

04 Calcular "*x*".



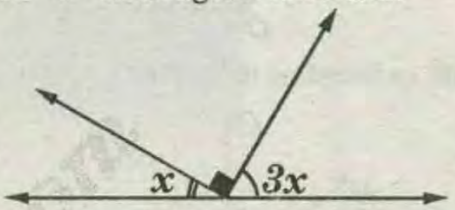
A) 50°
B) 40°
C) 30°
D) 60°
E) 70°

05 Calcular "*x*".



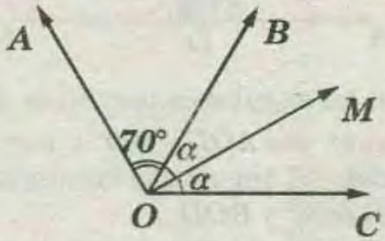
A) 30°
B) 34°
C) 38°
D) 42°
E) 48°

06 Calcular "*x*" de la figura mostrada.



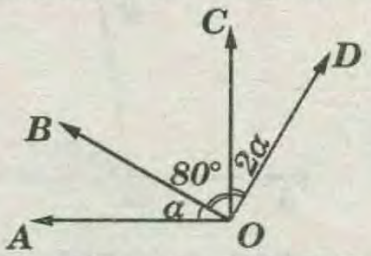
A) 20°
B) 24°
C) 22°30'
D) 26°30'
E) 30°

07 Si: $m\sphericalangle AOC = 150°$, hallar: $m\sphericalangle AOM$.



A) 100°
B) 110°
C) 105°
D) 125°
E) 135°

08 Si: $m\sphericalangle AOD = 140°$, hallar la medida del ángulo que forman las bisectrices de *AOB* y *COD*.



A) 96
B) 100°
C) 108°
D) 110°
E) 112°

09 Dos ángulos complementarios se diferencian en 50°. Hallar la medida del mayor.

A) 70° B) 80° C) 60° D) 48° E) 84°

10 El complemento más el suplemento de un mismo ángulo suman 230°. Hallar la medida de dicho ángulo.

A) 20° B) 30° C) 40° D) 50° E) 60°

11 Calcular la suma entre el complemento de 36° y el suplemento de 128°.

A) 100° B) 102° C) 104° D) 106° E) 108°

12 Si el complemento más el suplemento de un mismo ángulos suman 140°. Calcular el suplemento del ángulo.

A) 45° B) 50° C) 60° D) 65° E) 115°

13 Dos ángulos complementarios se diferencian en $14°$. Calcular el suplemento del mayor de los ángulos.

A) $128°$ B) $108°$ C) $118°$ D) $132°$ E) $115°$

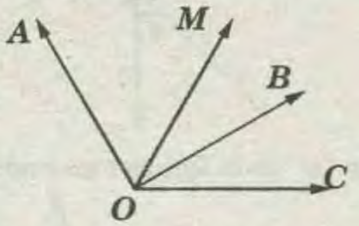
14 Dos ángulos suplementarios se diferencian en $80°$. Calcular el complemento del menor de los ángulos.

A) $30°$ B) $40°$ C) $35°$ D) $32°$ E) $48°$

15 Si: $m\sphericalangle AOB - m\sphericalangle BOC = 80°$. Hallar: $m\sphericalangle MOB$

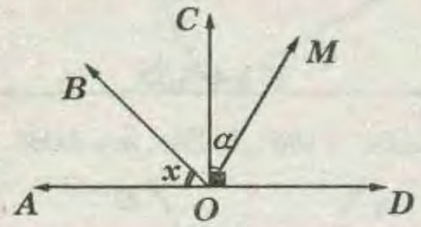
Además $\overline{OM}$ es bisectriz del $\sphericalangle AOC$.

A) $30°$
B) $32°$
C) $36°$
D) $42°$
E) $40°$



16 Si: $\overline{OM}$ es bisectriz del $\sphericalangle BOD$, hallar: $m\sphericalangle AOB$.

A) $90° - \alpha$
B) $45° + \alpha$
C) α
D) 2α
E) $\frac{\alpha}{2}$

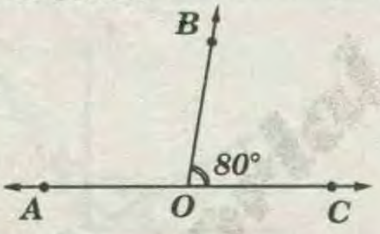


17 Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, tal que: $m\sphericalangle AOD = 160°$ y $m\sphericalangle BOC = 100°$. Hallar la medida del ángulo que forman las bisectirces de los ángulos AOC y BOD.

A) $20°$ B) $30°$ C) $36°$ D) $45°$ E) $60°$

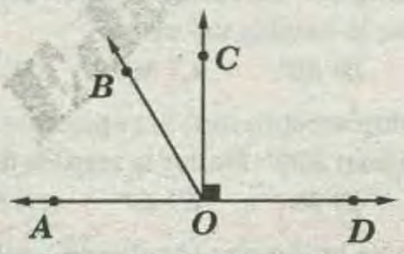
18 *Hallar la* $m\sphericalangle AOB$.

A) $80°$
B) $40°$
C) $100°$
D) $140°$
E) $160°$



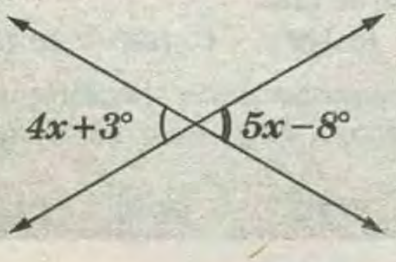
19 Hallar: $m\sphericalangle BOC$, si: $m\sphericalangle BOD = 155°$.

A) $25°$
B) $65°$
C) $75°$
D) $85°$
E) $55°$



20 Calcular "x".

A) $7°$
B) $11°$
C) $13°$
D) $15°$
E) $16°$



21 La suma del complemento más el suplemento de la medida de cierto ángulo es igual a $140°$. Hallar la medida del ángulo.

A) $50°$ B) $65°$ C) $70°$ D) $80°$ E) $90°$

22 Si el suplemento de la medida de un ángulo es los $\frac{5}{2}$ de su complemento, hallar la medida de dicho ángulo.

A) $50°$ B) $40°$ C) $30°$ D) $20°$ E) $10°$

23 Se tiene los ángulos consecutivos AOB y BOC de tal manera que el ángulo AOB mide $42°$. Hallar la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos BOC y AOC.

A) $84°$ B) $42°$ C) $21°$ D) $18°$ E) $7°$

24 Si el suplemento del complemento de un ángulo es igual a los $\frac{3}{2}$ de la diferencia entre el suplemento y el complemento del mismo ángulo. Hallar la medida del ángulo.

A) $75°$ B) $60°$ C) $30°$ D) $45°$ E) $15°$

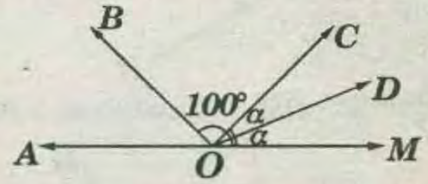
25 Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD tal que $m\sphericalangle AOD = 180°$ y $m\sphericalangle BOC = 80°$, hallar la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos AOC y BOD.

A) $60°$ B) $36°$ C) $45°$ D) $30°$ E) $50°$

TAREA DOMICILIARIA

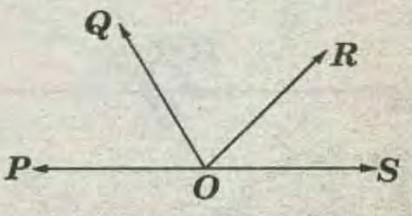
01 Si: $m\sphericalangle AOC = 150°$, hallar: $m\sphericalangle BOM$.

A $98°$
B) $95°$
C) $105°$
D) $112°$
E) $115°$



02 Del gráfico: $m\sphericalangle POR + m\sphericalangle QOS = 240°$. Hallar: $m\sphericalangle QOR$.

A) $80°$
B) $60°$
C) $40°$
D) $50°$
E) $65°$



03 Sean los ángulos consecutivos AOB y BOC, se traza el rayo $\overrightarrow{OX}$ bisectriz del ángulo AOB, el rayo $\overrightarrow{OY}$ bisectriz del ángulo AOC. Hallar: $m\sphericalangle BOC$, si: $m\sphericalangle XOY = 32°$.

A) $60°$ B) $64°$ C) $32°$ D) $16°$ E) $96°$

04 La diferencia de las medida de los ángulos

consecutivos AOB y BOC es $30°$. Hallar la medida del ángulo que forma la bisectriz del ángulo AOC y el rayo $\overrightarrow{OB}$.

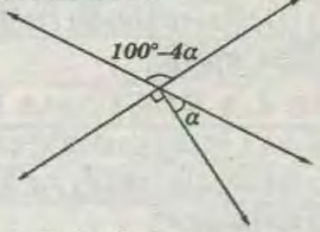
A) $25°$ B) $5°$ C) $20°$ D) $18°$ E) $15°$

04 La diferencia entre el suplemento de un ángulo y el cuádruple de su complemento es igual al doble de su complemento. Hallar la medida del ángulo.

A) $62°$ B) $52°$ C) $32°$ D) $72°$ E) $42°$

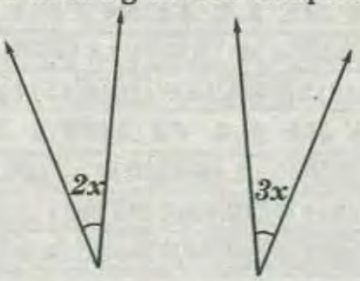
QUINTA PRACTICA DIRIGIDA

01 En la figura, calcular "α".



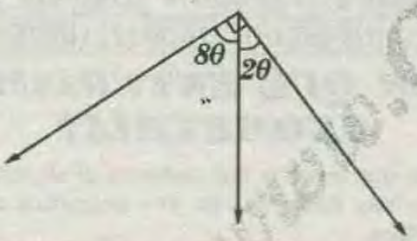
A) $1°$
B) $2°$
C) $3°$
D) $4°$
E) $5°$

02 Si los ángulos de la figura son complementarios, calcular x.



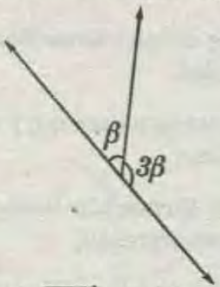
A) $18°$
B) $20°$
C) $25°$
D) $30°$
E) $32°$

03 En la figura, calcular "θ".



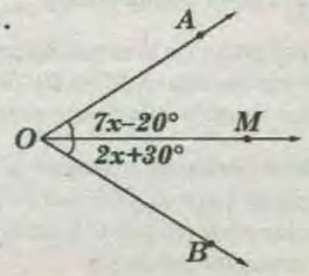
A) $10°$
B) $8°$
C) $12°$
D) $9°$
E) $13°$

04 Según la figura, calcular el complemento de "β".



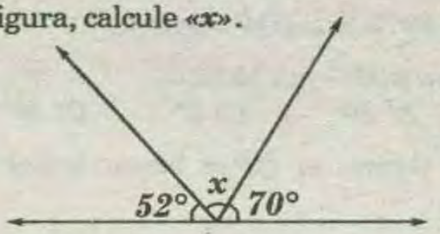
A) $30°$
B) $35°$
C) $40°$
D) $45°$
E) $50°$

05 En el gráfico, si $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del $\sphericalangle AOB$, calcular $m\sphericalangle AOB$.



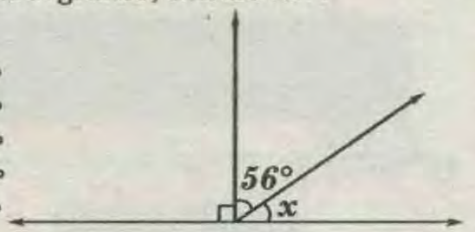
A) $40°$
B) $10°$
C) $80°$
D) $100°$
E) $50°$

06 En la figura, calcule «x».



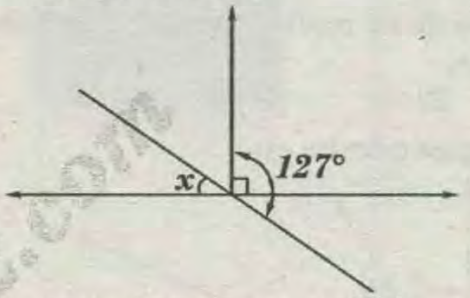
A) $52°$
B) $70°$
C) $58°$
D) $60°$
E) $62°$

07 En el gráfico, calcule «x».



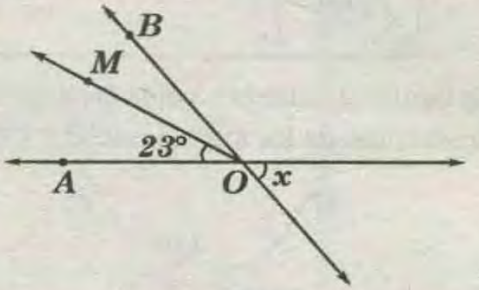
A) $18°$
B) $34°$
C) $36°$
D) $28°$
E) $37°$

08 En la figura, calcule «x».



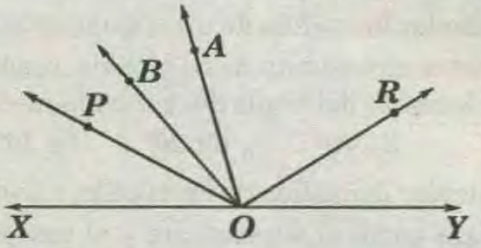
A) $45°$
B) $53°$
C) $48°$
D) $63°$
E) $37°$

09 En la figura, calcule «x», si: $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del $\sphericalangle AOB$.



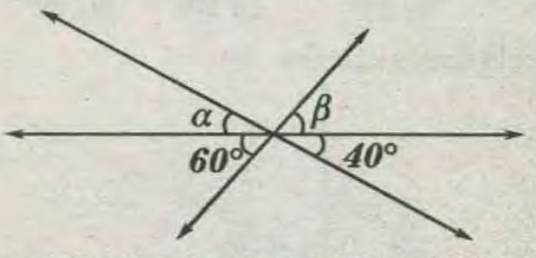
A) $46°$
B) $48°$
C) $30°$
D) $28°$
E) $23°$

10 En la figura, $m\sphericalangle PQR = 100°$; $\overrightarrow{OP}$, es bisectriz del $\sphericalangle XOB$; $\overrightarrow{OR}$ es bisectriz del $\sphericalangle AOY$. Calcular: $m\sphericalangle AOB$.



A) $30°$
B) $78°$
C) $40°$
D) $20°$
E) $100°$

11 En el gráfico, calcular "$\alpha + \beta$".



A) $100°$
B) $110°$
C) $150°$
D) $60°$
E) $40°$

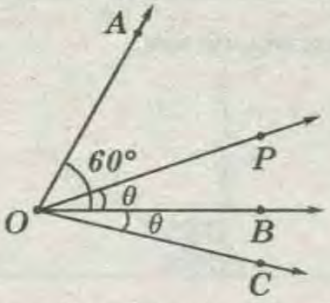
12 Se tienen los ángulos consecutivos AOB y BOF se traza $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del $\sphericalangle AOB$; tal que

$m\sphericalangle AOB = 70°$ y $m\sphericalangle AOF = 110°$.

Calcular $m\sphericalangle BOF - m\sphericalangle MOB$.

A) 10° B) 30° C) 5° D) 20° E) 50°

(13) En la figura, si $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz del $\sphericalangle AOC$; calcular "θ".

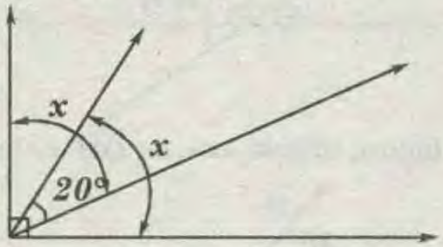


A) 50°
B) 20°
C) 10°
D) 25°
E) 30°

(14) Calcular la medida de un ángulo, si se sabe que: el complemento de su medida es igual a un quinto de dicha medida.

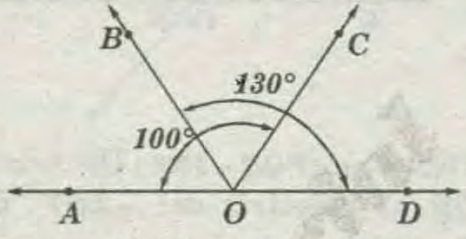
A) 60° B) 75° C) 80° D) 45° E) 30°

(15) En la figura calcular «x»



A) 45°
B) 50°
C) 55°
D) 60°
E) 65°

(16) En la figura calcular la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos AOB y COD.



A) 150°
B) 115°
C) 105°
D) 125°
E) 135°

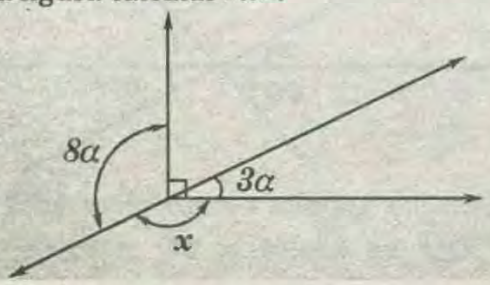
(17) Calcular la medida de un ángulo, sabiendo que; el triple del complemento de su medida, es igual al doble del suplemento del triple de la misma medida.

A) 30° B) 40° C) 36° D) 18° E) 60°

(18) Calcular la medida de un ángulo, sabiendo que: la diferencia entre el suplemento y el complemento de su medida, es igual al séxtuplo de la misma medida.

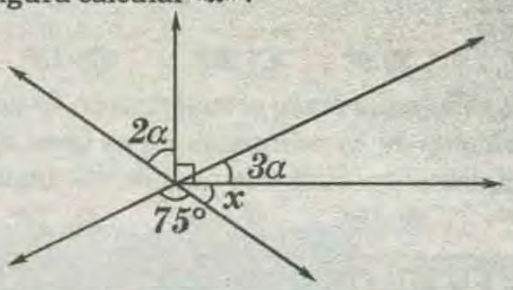
A) 10° B) 12° C) 20° D) 18° E) 15°

(19) En la figura calcular «x».



A) 144°
B) 120°
C) 108°
D) 126°
E) 132°

(20) En la figura calcular «x».



A) 75°
B) 60°
C) 45°
D) 30°
E) 80°

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)A	2)C	3)B	4)B	5)C	6)B	7)D	8)C	9)E	10)B
11)B	12)C	13)A	14)C	15)B	16)A	17)E	18)E	19)D	20)D
21)B	22)A	01)C	02)E	03)E					

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)B	2)B	3)B	4)A	5)D	6)B	7)C	8)C	9)B	10)A
11)A	12)C	13)A	14)B	15)E	16)A	17)C	18)A	19)E	20)D
01)B	02)D	03)A	04)B	05)C					

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1)A	2)A	3)C	4)C	5)B	6)A	7)B	8)A	9)E	10)D
11)B	12)B	13)A	14)A	15)E	16)B	17)A	18)A	19)*	

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA

1)B	2)E	3)E	4)A	5)C	6)C	7)B	8)D	9)A	10)A
11)D	12)E	13)A	14)B	15)E	16)D	17)B	18)C	19)B	20)B
21)B	22)C	23)C	24)D	25)E	01)E	02)B	03)B		

CLAVES DE LA QUINTA PRACTICA

1)B	2)A	3)D	4)D	5)D	6)C	7)B	8)E	9)A	10)D
11)A	12)C	13)B	14)B	15)C	16)B	17)A	18)D	19)D	20)B

¿POR QUÉ ESTUDIAMOS GEOMETRÍA?

Es la pregunta que muchos nos hacemos al empezar a estudiar geometría, no hay duda que es una pregunta objetiva y de sensibilidad crítica.

A continuación veremos el por qué y beneficios de esta asignatura:

* La geometría surge de una necesidad del hombre para su desarrollo en la sociedad.

* La geometría nos enseña a razonar, y el hábito adquirido en su estudio es provechoso .

* Su estudio nos da formación lógica y permite realizar lecturas con mayor comprensión

* Estaremos más aptos para apreciar trabajos humanos y lo que nos ofrece con mayor comprensión.

* Nuestra visión del arte y de la arquitectura resultará amplia, con el dominio de los teoremas de las figuras geométricas que guardan diferentes tipos de relaciones entre ellas.

* En la naturaleza podemos apreciar infinidad de figuras geométricas. Admirar el prodigio de las celdas de una colmena en hexágono regular perfecto o la telaraña, con sus millares de finos hilos rigurosamente paralelos.

ANGULOS ENTRE PARALELAS

CAPITULO 07

OBJETIVOS:

* Comprender que son rectas paralelas .

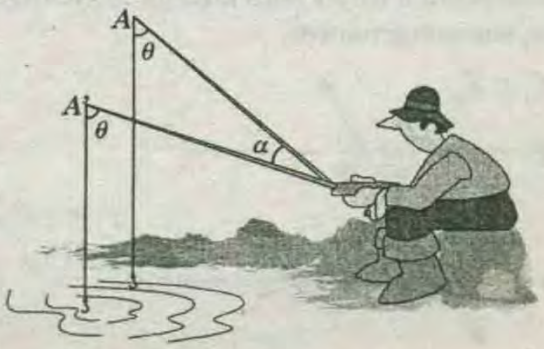
* Aprender que relación tienen algunos ángulos entre dos rectas paralelas .

* Estudiar las propiedades de los ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal.

* Aprender a resolver los problemas acerca del tema de manera correcta

INTRODUCCIÓN :

Antiguamente la distribución de los terrenos o la tarea de dar forma a los bloques de piedra para la construcción de templos o pirámides exigieron a los egipcios el trazado de líneas rectas, ángulos y en consecuencia tuvieron la necesidad de trabajar con sus respectivas medidas. Actualmente con la medida de las líneas y de los ángulos se sigue trabajando como por ejemplo: los topógrafos al realizar levantamientos topográficos utilizan un instrumento para medir ángulos (teodolito): así mismo realizan el trazado de líneas y trabajan con su medida.



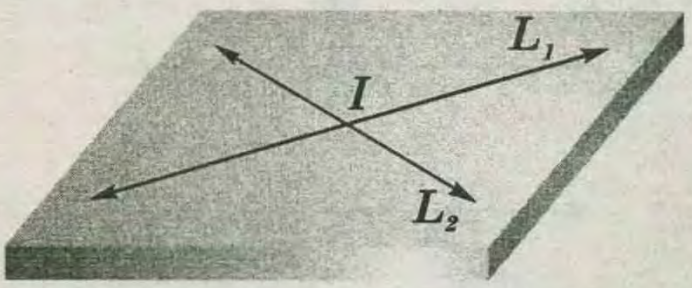
La idea de paralelismo se utiliza en la vida cotidiana en varios aspectos para eso podemos citar varios ejemplos uno de los cuales es cuando al preguntar sobre la dirección de una calle nos contestan: !Ah es en la otra cuadra PARALELA a estai También podemos encontrar líneas paralelas en tu cuaderno rayado, así como tambien el paralelismo se utiliza para hacer algunos objetos:

POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS EN EL PLANO

En un plano 2 rectas pueden presentarse, así:

I) SECANTES :

Si su intersección en un punto

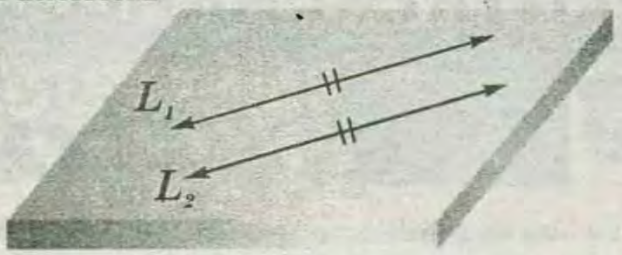


* Si $\overleftrightarrow{L_1} \cap \overleftrightarrow{L_2} = \{I\}$

* Entonces $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son secantes

II) PARALELAS :

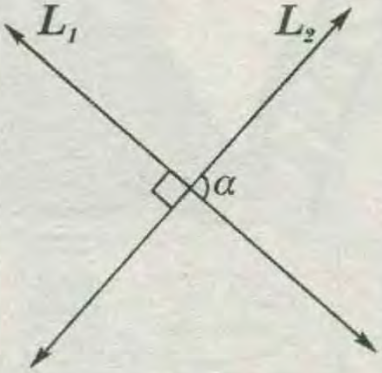
Si no se intersecan



* Si: $\overleftrightarrow{L_1} \cap \overleftrightarrow{L_2} = \{\ \}$
* Entonces $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$
* $\parallel$ se lee es paralela

RECTAS PERPENDICULARES

Son aquellas que determinan ángulos cuyas medidas son **90°**.

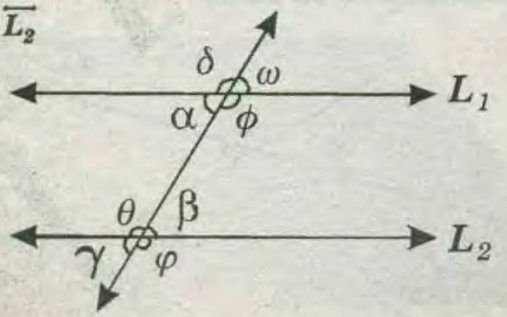


* Si $\alpha = 90°$
* Entonces: $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2}$
* $\perp$: se lee es perpendicular

ÁNGULOS DETERMINADOS POR UNA TRANSVERSAL SOBRE DOS RECTAS PARALELAS

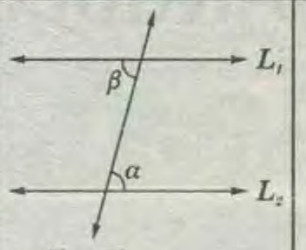
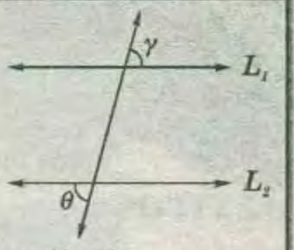
Toda recta secante a dos rectas paralelas determina con ellas ocho ángulos que según su posición (consideradas de dos en dos) reciben los nombres de: alternos, correspondientes y conjugados.

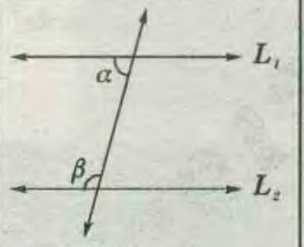
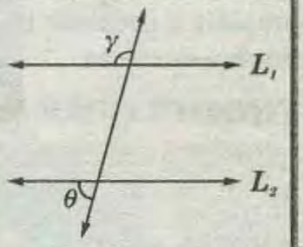
Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$



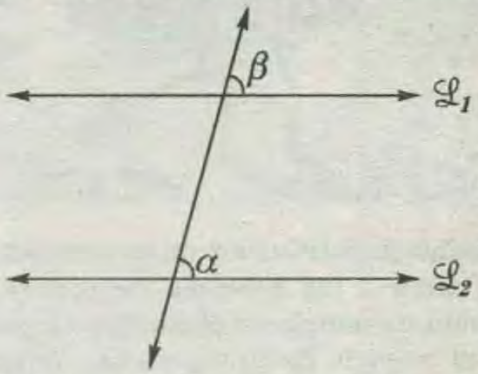
* Estos *8* ángulos se agrupan en pares, que reciben diversos nombres.

Así: tenemos:

ÁNGULOS ALTERNOS	
Internos	**Externos**
 Si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ Entonces: $\boxed{\alpha = \beta}$	 Si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ Entonces: $\boxed{\theta = \gamma}$

ÁNGULOS CONJUGADOS	
Internos	**Externos**
 Si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ Entonces: $\boxed{\alpha + \beta = 180°}$	 Si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ Entonces: $\boxed{\theta + \gamma = 180°}$

ÁNGULOS CORRESPONDIENTES

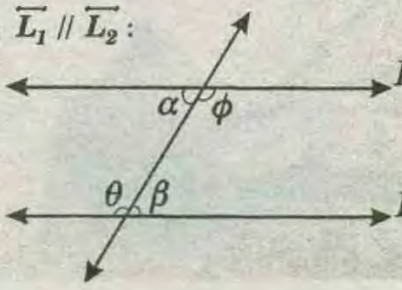


* Sea: $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$, entonces α y β son las medidas de dos ángulos correspondientes.
* Se cumple: $\boxed{\alpha = \beta}$

I) ÁNGULOS ALTERNOS INTERNOS :

Son los pares de ángulos internos no adyacentes cuyos interiores están a uno y otro lado de la secante. Tales ángulos, son congruentes.

* Si : $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$:



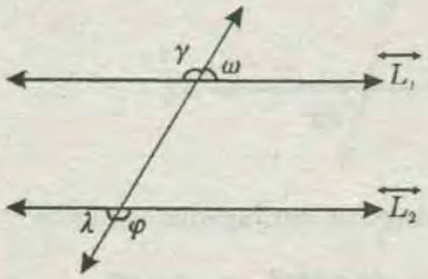
$\Rightarrow \alpha = \beta$ *Alternos internos*

$\theta = \phi$

II) ÁNGULOS ALTERNOS EXTERNOS :

Son los pares de ángulos externos no adyacentes, cuyo exterior están a uno y otro lado de la secante. Tales ángulos son congruentes.

* Si : $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$:

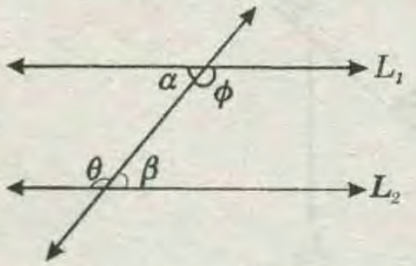


$\Rightarrow \begin{cases} \gamma = \varphi \\ \lambda = \omega \end{cases}$

III) ÁNGULOS CONJUGADOS INTERNOS:

Son los pares de ángulos internos que están a un mismo lado de la recta secante tal como se muestra .

* Si : $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$:



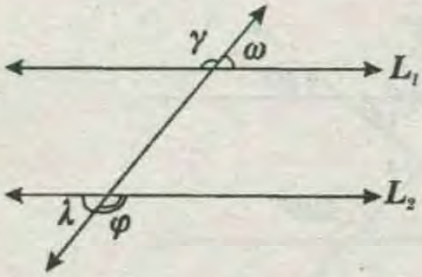
$\Rightarrow$ $\beta + \phi = 180°$ *conjugados internos*

$\wedge$ $\theta + \alpha = 180°$

IV) ÁNGULOS CONJUGADOS EXTERNOS:

Son los pares de ángulos exteriores cuyos exteriores están a un mismo lado de la secante.

* Si : $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$:



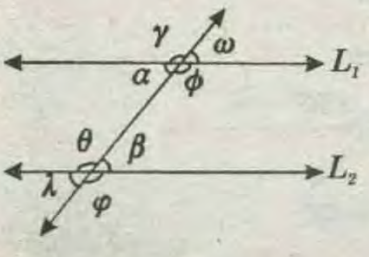
$\Rightarrow$ $\omega + \varphi = 180°$ *conjugados externos*

$\wedge$ $\lambda + \gamma = 180°$

V) ÁNGULOS CORRESPONDIENTES:

Son los pares de ángulos exteriores cuyos interiores están a un mismo lado de la secante.

* Si : $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$:

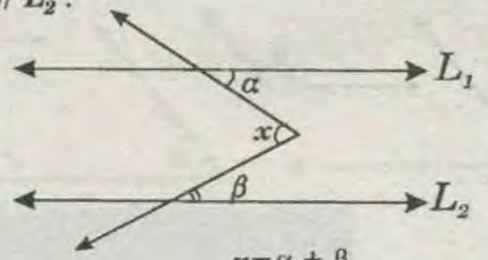


$\Rightarrow$ $\beta = \omega \wedge \lambda = \alpha$ *"Ángulos correspondientes"*

* *También* $\theta = \gamma \wedge \varphi = \phi$

PROPIEDADES :

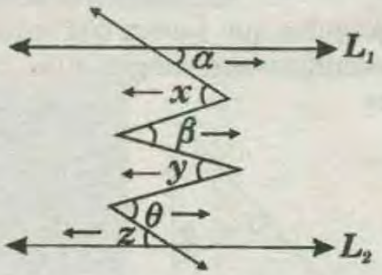
1) Si : $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$:



$x = \alpha + \beta$

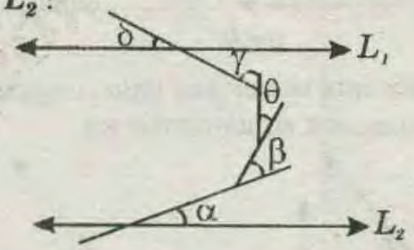
2) Si : $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$:

" Regla del serrucho"



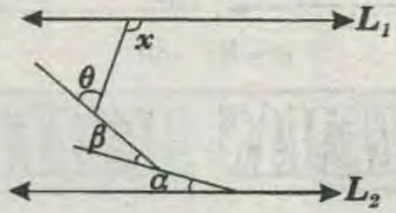
$\alpha + \beta + \theta = x + y + z$

3) Si : $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$:



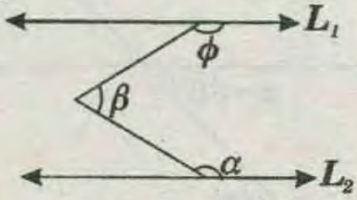
$\alpha + \beta + \theta + \gamma + \delta = 180°$

4) Si : $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$:



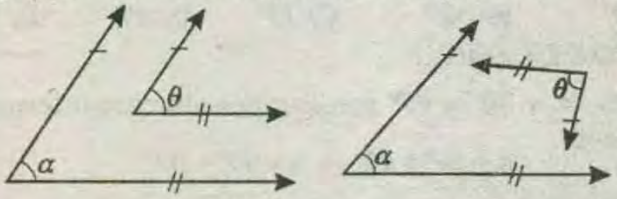
$x = \alpha + \beta + \theta$

5) Si : $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$:



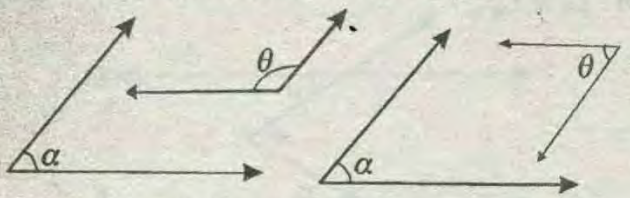
$\alpha + \beta + \phi = 360°$

a) Dos ángulos que tienen sus lados paralelos, son congruentes,como se observa en la figura:



$\alpha = \theta$

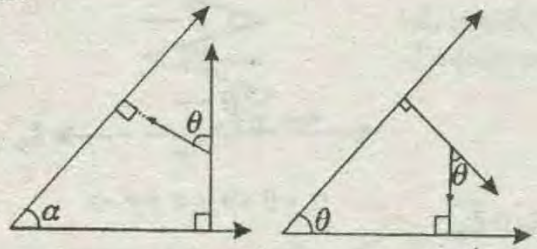
b) Dos ángulos que tienen sus lados paralelos, son suplementos como se observa en la figura.



$\alpha+\theta=180°$

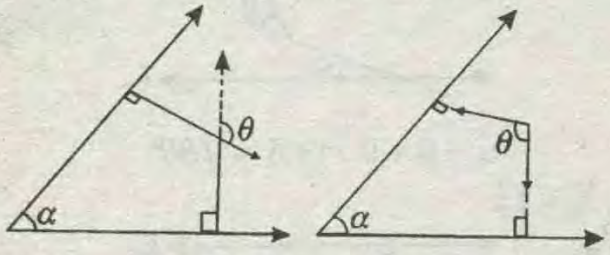
ÁNGULO DE LADOS PERPENDICULARES

i) Los ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son congruentes, como se observa en la figura.



$\alpha=\theta$

ii) Los ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son suplementarios.

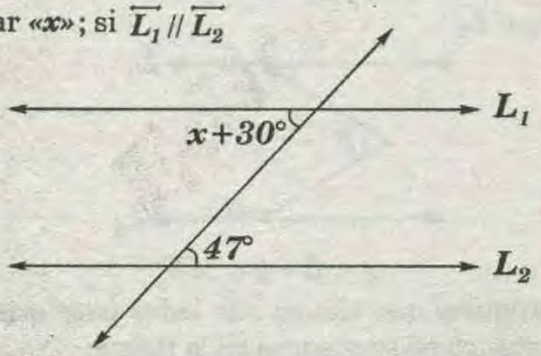


$\alpha+\theta=180°$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Calcular «*x*»; si $\overline{L_1} // \overline{L_2}$



A) 12° *B) 30°* *C) 17°* *D) 47°* *E) 8°*

RESOLUCIÓN :

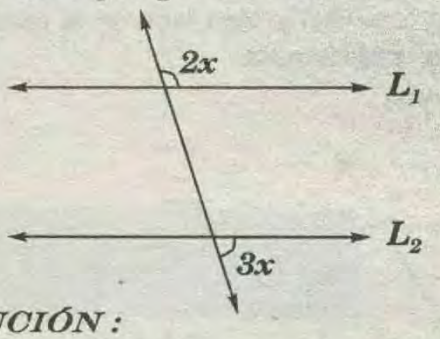
* Como *"x + 30"* y *47°* son ángulos alternos internos, entonces:

$$x+30°=47° \Rightarrow x=47°-30°$$
$$\Rightarrow x=17°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

Calcular *"x"*, si $\overline{L_1} // \overline{L_2}$



A) 36°
B) 18°
C) 30°
D) 24°
E) 45°

RESOLUCIÓN :

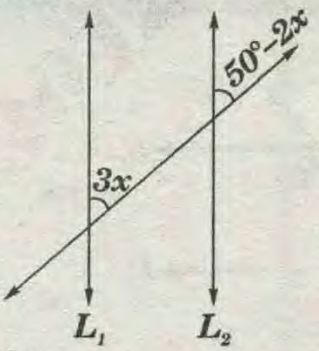
* Como se trata de "ángulos conjugados externos", luego:

$$2x+3x=180° \Rightarrow 5x=180° \Rightarrow x=36°$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 3 :

Si: $\overline{L_1} // \overline{L_2}$, calcular *"x"*



A) 5°
B) 7°
C) 10°
D) 15°
E) 20°

RESOLUCIÓN :

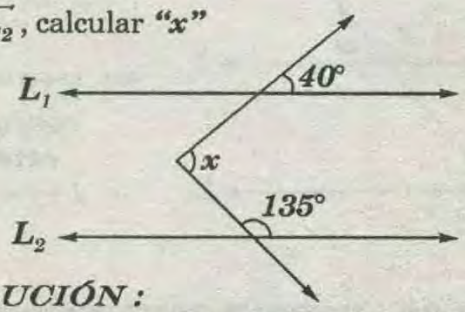
* Como se trata de ángulos correspondientes, entonces:

$$3x=50°-2x \Rightarrow 5x=50° \Rightarrow x=10°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

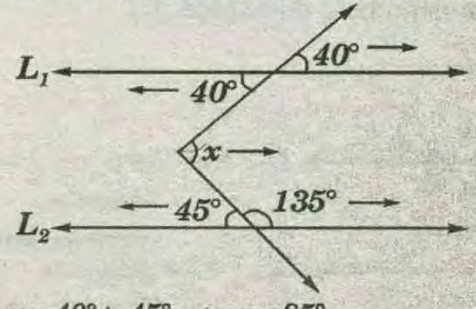
Si: $\overline{L_1} // \overline{L_2}$, calcular *"x"*



A) 30°
B) 75°
C) 65°
D) 80°
E) 85°

RESOLUCIÓN :

* Note que para poder aplicar la regla del "serrucho" necesitamos el suplemento de *135°*.

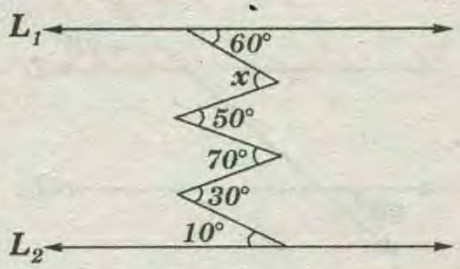


* Luego: $x=40°+45° \Rightarrow x=85°$

RPTA : "E"

PROBLEMA 5 :

Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, calcular "$x$"



A) 30°
B) 40°
C) 60°
D) 50°
E) 45°

RESOLUCIÓN :

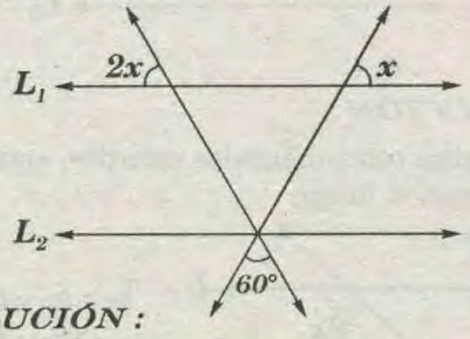
* Por la propiedad del serrucho:

$$60°+50°+30°=x+70°+10°$$
$$\Rightarrow 140°=x+80° \Rightarrow 60°=x$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

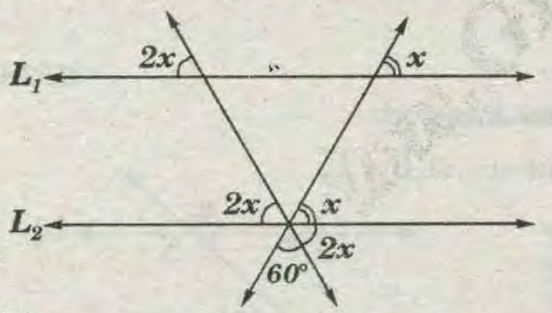
Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, calcular "$x$"



A) 20°
B) 40°
C) 50°
D) 30°
E) 32°

RESOLUCIÓN :

* Usando ángulos correspondientes colocamos los ángulos de tal manera que los tres están alineados:



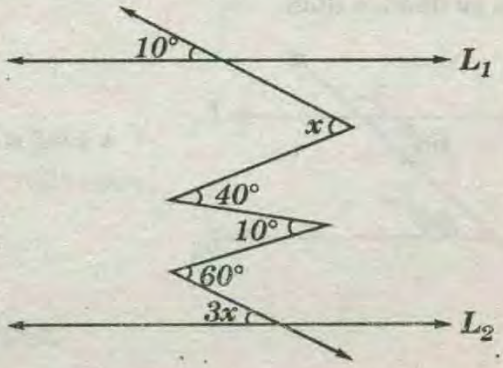
* Luego:

$$x+2x+60=180° \Rightarrow 3x=120° \Rightarrow x=40°$$

RPTA : "B"

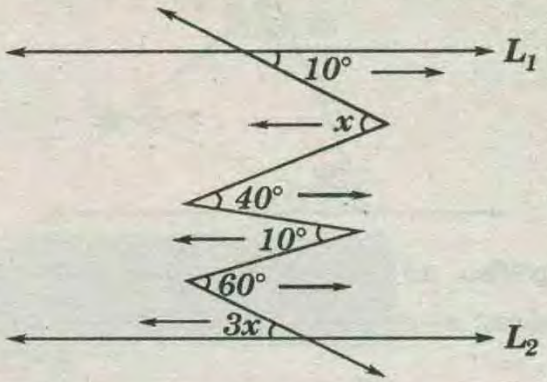
PROBLEMA 7 :

En la figura, calcule x, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



A) 35°
B) 15°
C) 25°
D) 10°
E) 12°

RESOLUCIÓN :



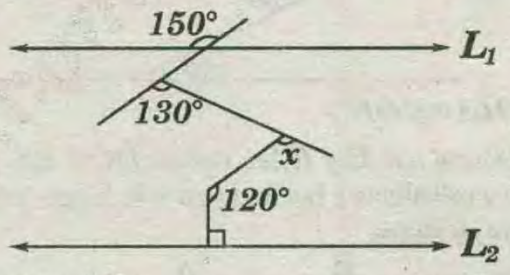
* Aplicando la propiedad del serrucho:

$$x+10°+3x=10°+40°+60°$$
$$\Rightarrow 4x=100° \Rightarrow x=25°$$

RPTA : "C"

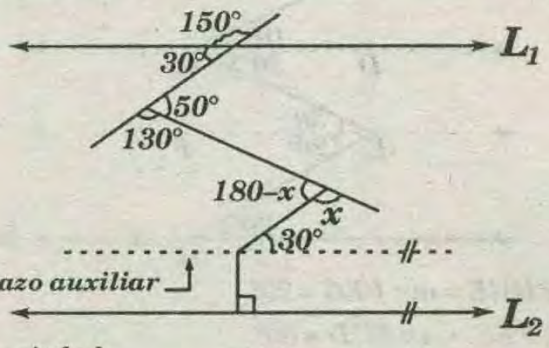
PROBLEMA 8 :

Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, hallar "$x$"



A) 20°
B) 240°
C) 40°
D) 125°
E) 130°

RESOLUCIÓN :



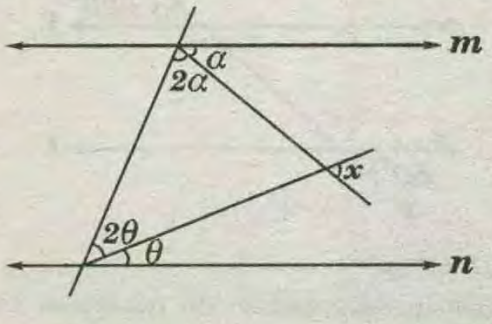
* Por propiedad:

$$30°+180°-x=50°+30°$$
$$\Rightarrow 180°-50°=x \Rightarrow 130°=x$$

RPTA : "E"

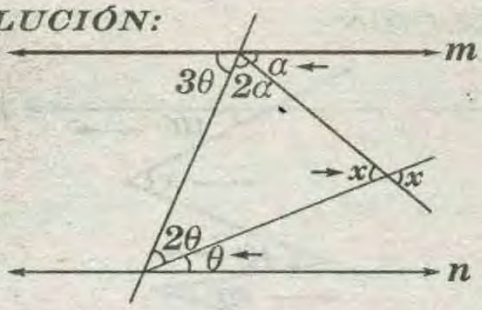
PROBLEMA 9:

Si: $\overleftrightarrow{m} // \overleftrightarrow{n}$, hallar "$x$"



A) 40°
B) 50°
C) 32°
D) 30°
E) 60°

RESOLUCIÓN:

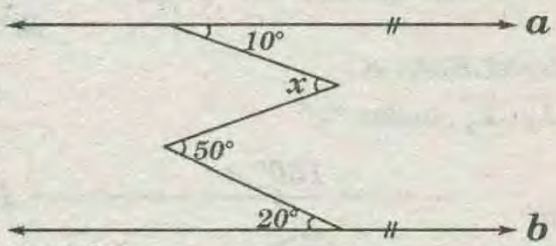


* Del gráfico: $3\theta+3\alpha=180° \Rightarrow \theta+\alpha=60°$
* Entonces: $x=\theta+\alpha=60°$

RPTA : "E"

PROBLEMA 10 :

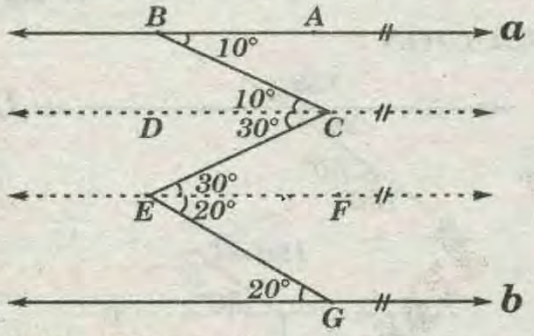
A partir de la figura adjunta se pide calcular el valor de x, sabiendo que las rectas a y b son paralelas.



A) 70°
B) 50°
C) 60°
D) 30°
E) 40°

RESOLUCIÓN :

* Trazamos por C y E las rectas DC y EF, paralelas entre sí y paralelas a las rectas a y b, luego: por ángulos alternos se tiene:

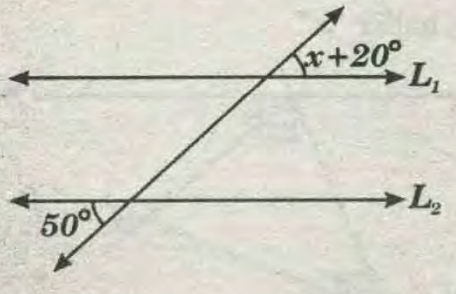


* $m\sphericalangle HGE=m\sphericalangle FEG=20°$
* $m\sphericalangle FEC=m\sphericalangle ECD=30°$
* $m\sphericalangle ABC=m\sphericalangle BCD=10°$
* ya que : $x=10°+30°=40°$

RPTA : "E"

PROBLEMA 11 :

Si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, hallar el valor de «x»

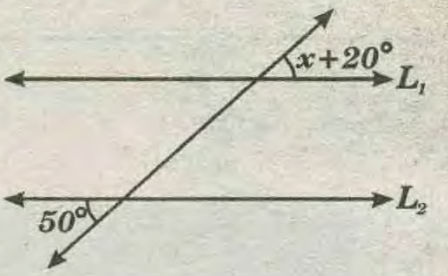


A) 25°
B) 20°
C) 15°
D) 30°
E) 8°

RESOLUCIÓN :

* Como los ángulos dados son ***alternos externos***, entonces tiene ***igual*** medida.

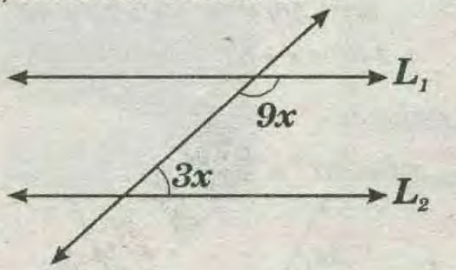
$x+20=50° \Rightarrow x=50°-20°=30°$



RPTA : "D"

PROBLEMA 12 :

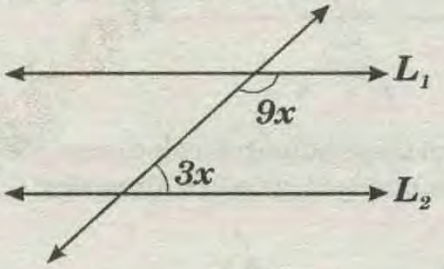
Si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, encontrar el valor de «x»



A) 20°
B) 50°
C) 30°
D) 40°
E) 15°

RESOLUCIÓN :

* Los ángulos son conjugados internos, entonces son suplementarios, luego:

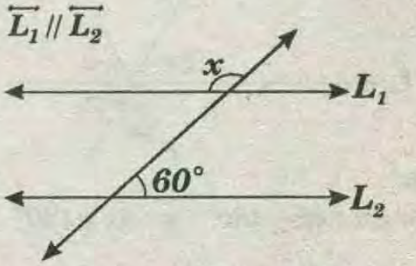


$9x+3x=180°$
$\Rightarrow 12x=180°$
$\Rightarrow x=15°$

RPTA : "E"

PROBLEMA 13:

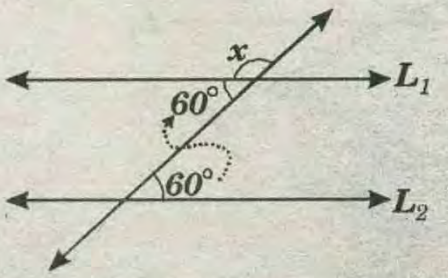
Calcular «x», si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



A) 130°
B) 100°
C) 110°
D) 120°
E) 105°

RESOLUCIÓN:

* Por ángulos alternos internos, se obtendrá:
* Luego se deduce que:

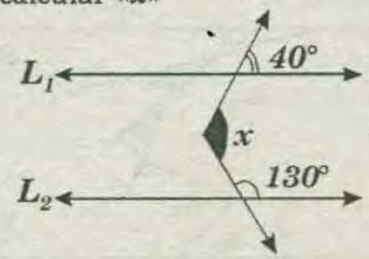


$x+60°=180°$
$\Rightarrow x=120°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 14 :

Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$ calcular «x»

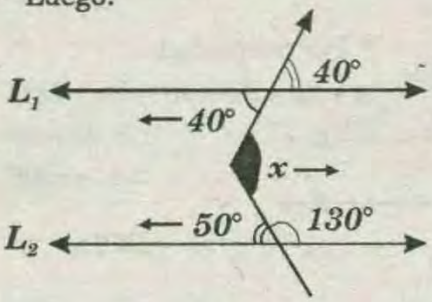


A) 60°
B) 75°
C) 85°
D) 50°
E) 90°

RESOLUCIÓN :

* Note que para poder aplicar la regla del «Serrucho» necesitamos el suplemento de 130°.

* Luego:



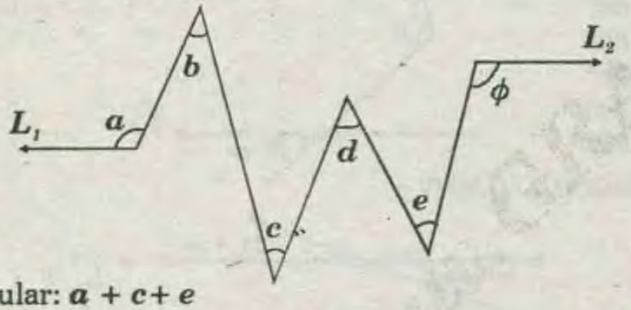
$x = 40° + 50°$

$\Rightarrow x = 90°$

RPTA : "E"

PROBLEMA 15 :

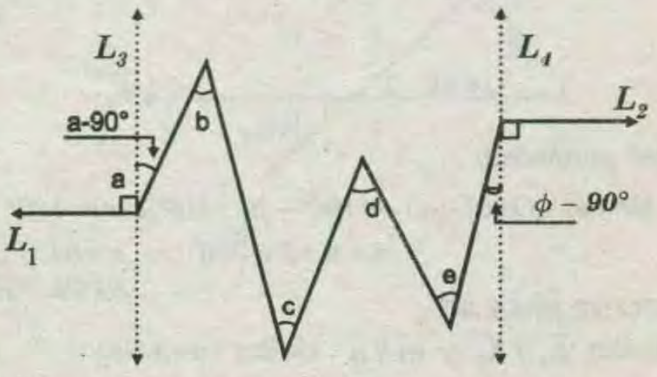
Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, y $b + d + \phi = 270°$



Calcular: $a + c + e$

A) 330° B) 160° C) 210° D) 270° E) 95°

RESOLUCIÓN :



* Trazando $\overrightarrow{L_3}$ y $\overrightarrow{L_4}$ perpendiculares a $\overrightarrow{L_1}$ y $\overrightarrow{L_2}$ y aplicando propiedad se obtendrá:

$$a - 90° + c + e = \underbrace{b + d + \phi}_{270°} - 90°$$

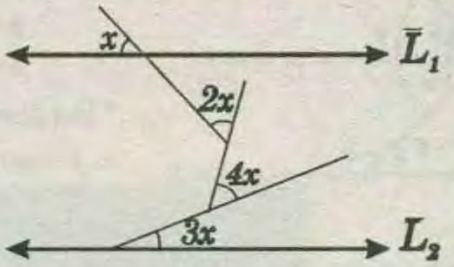
$$\therefore a + c + e = 270°$$

RPTA "D"

PROBLEMA 16 :

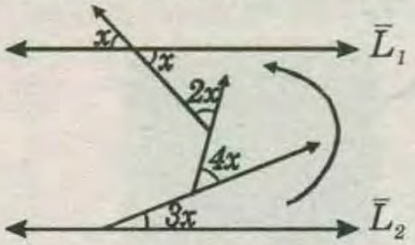
En la figura; calcular el valor de «x»

Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



A) 10°
B) 12°
C) 18°
D) 25°
E) 30°

RESOLUCIÓN :



*Por propiedad:

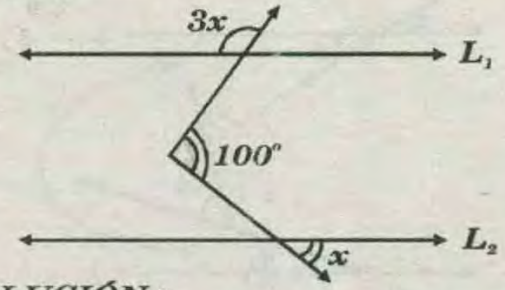
$3x + 4x + 2x + x = 180°$

$10x = 180° \Rightarrow x = 18°$

RPTA : "C"

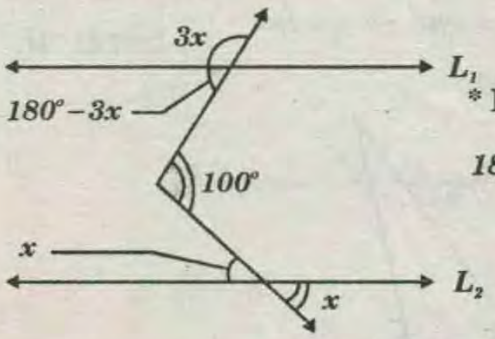
PROBLEMA 17 :

Si: $L_1 // L_2$ hallar "x".



A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 60°
E) 45°

RESOLUCIÓN :



* Por propiedad:

$180° - 3x + x = 100°$

$\Rightarrow 80° = 2x$

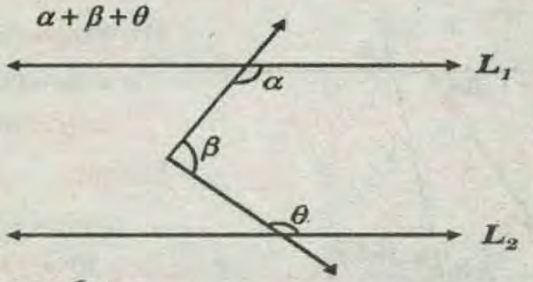
$\Rightarrow x = 40°$

RPTA: "C"

PROBLEMA 18 :

En la figura: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$

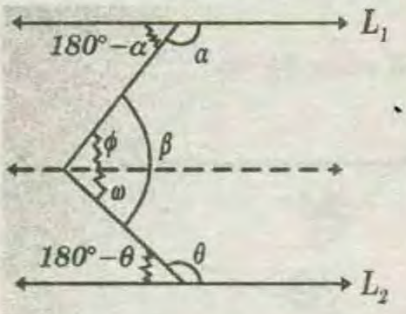
Hallar: $\alpha + \beta + \theta$



A) 120°
B) 360°
C) 180°
D) 200°
E) 135°

RESOLUCIÓN :

* Se traza $\overline{L} // \overrightarrow{L_2}$ $\overline{L} // \overrightarrow{L_2}$



* Por Alternos Internos:

$\phi = 180° - \alpha$

$\omega = 180° - \theta$

* Del gráfico: $\beta = \phi + \omega$

$\Rightarrow \beta = (180° - \alpha) + (180° - \theta)$

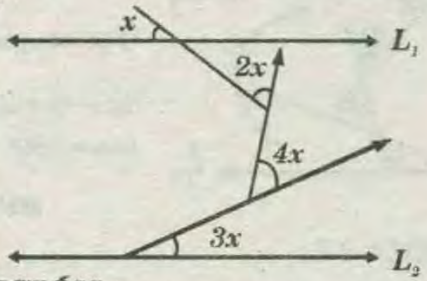
$\Rightarrow \beta + \alpha + \theta = 360°$

RPTA: "B"

PROBLEMA 19 :

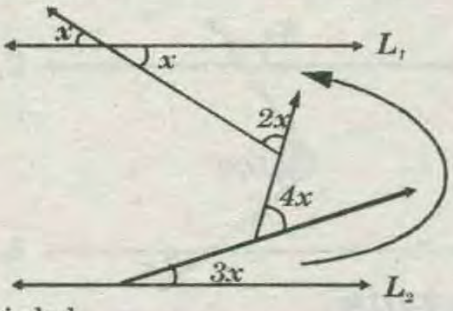
En la figura calcular el valor de *"x"*

Si: $L_1 // L_2$



A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°

RESOLUCIÓN :



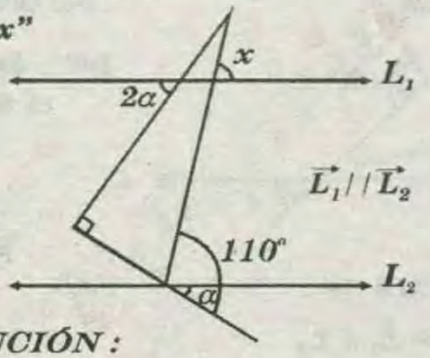
* Por propiedad:

$3x + 4x + 2x + x = 180° \Rightarrow x = 18°$

RPTA: "D"

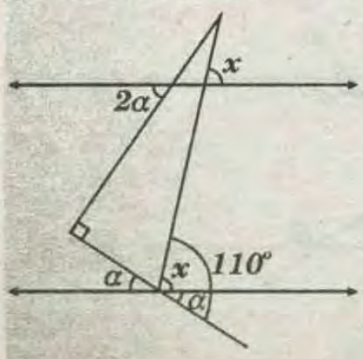
PROBLEMA 20 :

Calcular *"x"*



A) 60°
B) 70°
C) 80°
D) 90°
E) 100°

RESOLUCIÓN :



* Por propiedad:

$\alpha + 2\alpha = 90°$

$\Rightarrow \alpha = 30°$

* Luego:

$x + \alpha = 110°$

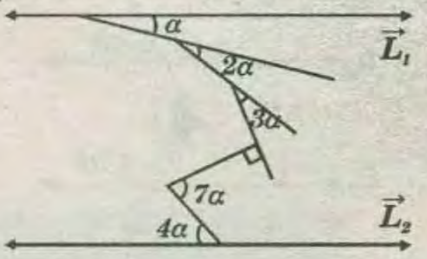
$\Rightarrow x + 30° = 110°$

$\Rightarrow x = 80°$

RPTA:"C"

PROBLEMA 21 :

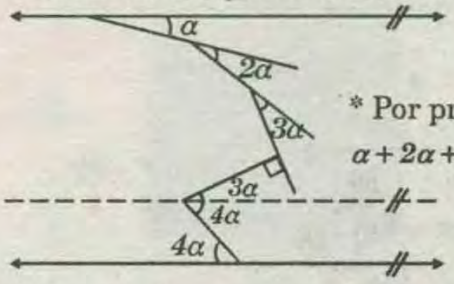
Si: $\vec{L_1} // \vec{L_2}$, hallar "α"



A) 20°
B) 30°
C) 15°
D) 35°
E) 10°

RESOLUCIÓN :

* Trazando una paralela auxiliar:



* Por propiedad:

$\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 90° + 3\alpha = 180°$

$\Rightarrow 9\alpha = 90°$

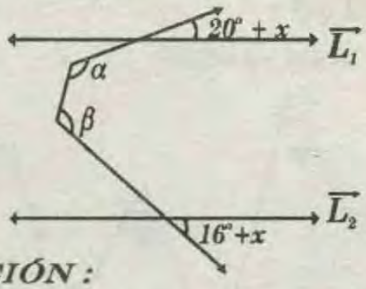
$\Rightarrow \alpha = 10°$

RPTA: "E"

PROBLEMA 22 :

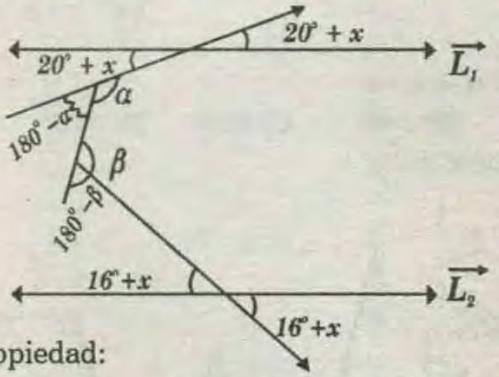
En la figura $\vec{L_1} // \vec{L_2}$ y $\alpha + \beta = 300°$

Calcular *"x"*



A) 86°
B) 80°
C) 74°
D) 84°
E) 90°

RESOLUCIÓN :



* Por propiedad:

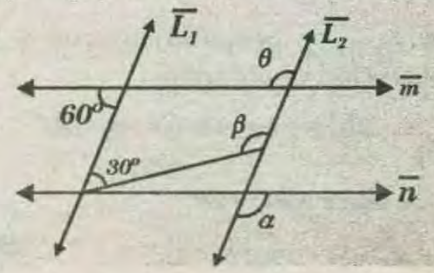
$(20° + x) + (180° - \alpha) + (180° - \beta) + (16° + x) = 180°$

$x = \alpha + \beta - 216° \Rightarrow x = 84°$

RPTA: "D"

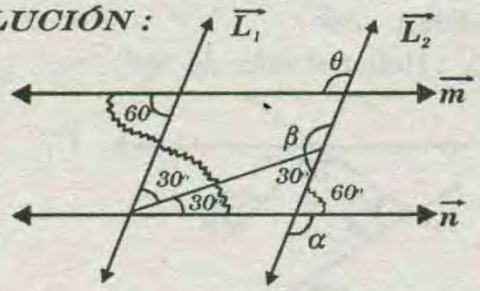
PROBLEMA 23 :

Si hallar $\vec{L_1} // \vec{L_2}$ y $\vec{m} // \vec{n}$. Hallar $(\alpha + \beta + \theta)$



A) 450°
B) 360°
C) 470°
D) 390°
E) 400°

RESOLUCIÓN :



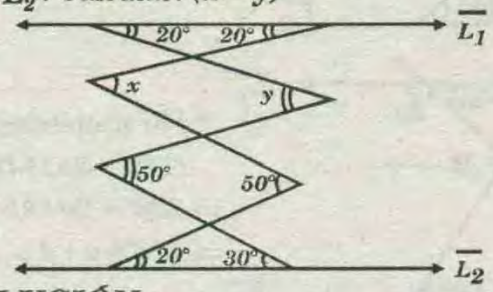
* Por alternos internos: $\theta = \alpha$
* $\beta + 30° = 180° \Rightarrow \beta = 150°$
* $60° + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 120° \Rightarrow \theta = 120°$

$\Rightarrow (\alpha + \beta + \theta) = 120° + 150° + 120° = 390°$

RPTA: "D"

PROBLEMA 24:

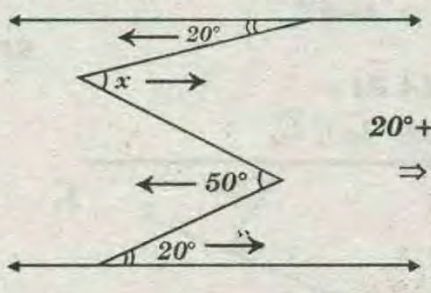
Si: $\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2}$. Calcular: $(x - y)$



A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°

RESOLUCIÓN :

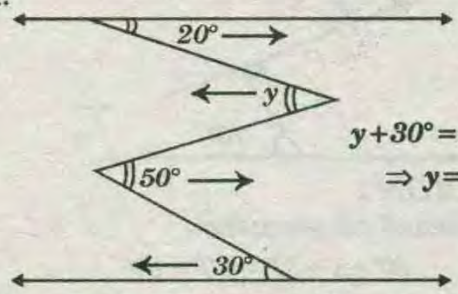
* Desdoblamos los gráficos: **(Zig Zag)**



$20° + 50° = x + 20°$

$\Rightarrow 50° = x$

* Ahora:



$y + 30° = 20° + 50°$

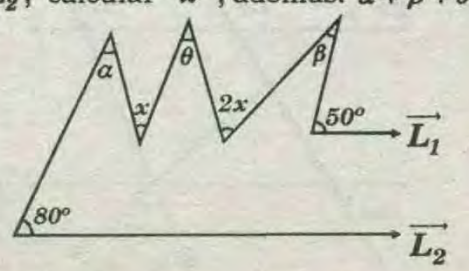
$\Rightarrow y = 40°$

* Luego: $\Rightarrow (x - y) = 10°$

RPTA: "A"

PROBLEMA 25 :

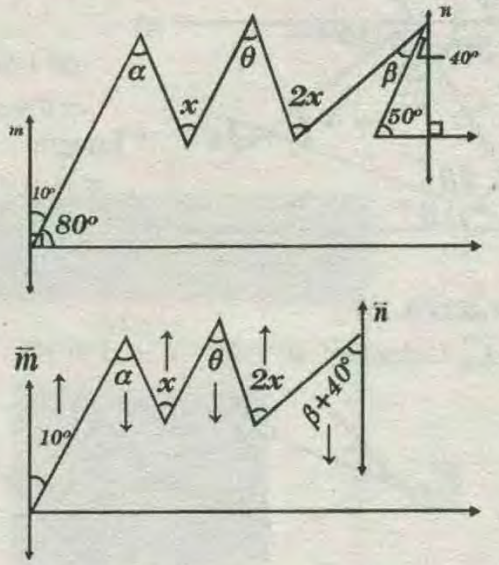
Si: $\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2}$, calcular **"x"**, además: $\alpha + \beta + \theta = 120°$



A) 20°
B) 30°
C) 50°
D) 80°
E) 75°

RESOLUCIÓN :

* Trazando $\overrightarrow{m}$ y $\overrightarrow{n}$ perpendiculares $\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2}$



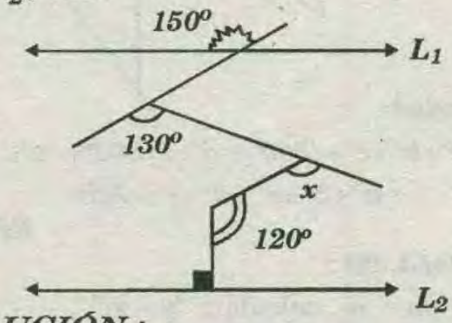
* Luego por propiedad:

$10° + x + 2x = \underbrace{\alpha + \theta + \beta}_{120°} + 40° \Rightarrow x = 50°$

RPTA: "C"

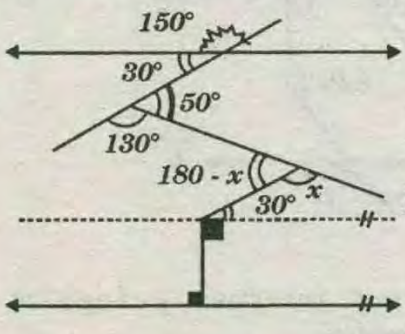
PROBLEMA 26 :

Si: $L_1 \parallel L_2$, hallar **"x"**



A) 120°
B) 130°
C) 135°
D) 150°
E) 140°

RESOLUCIÓN :



* Por propiedad :

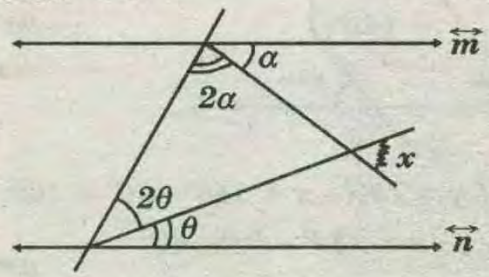
$30° + 180° - x = 50° + 30°$

$\Rightarrow x = 130°$

RPTA: "B"

PROBLEMA 27 :

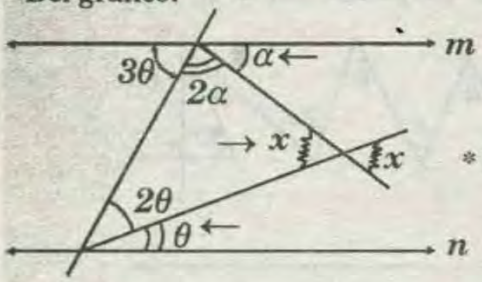
$\overrightarrow{m} \parallel \overrightarrow{n}$, hallar **"x"**.



A) 40°
B) 50°
C) 45°
D) 60°
E) 70°

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico:



$3\theta + 3\alpha = 180°$

$\Rightarrow \theta + \alpha = 60°$

* Luego:

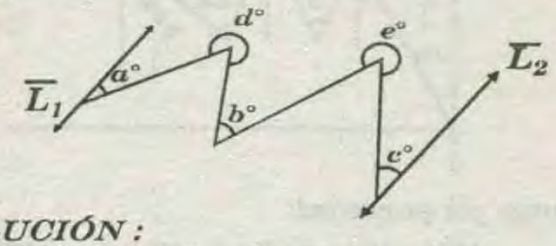
$x = \alpha + \theta = 60°$

RPTA: "D"

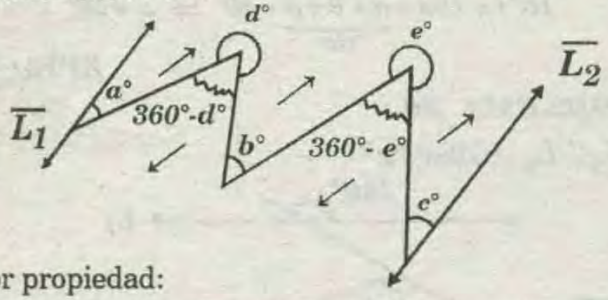
PROBLEMA 28 :

Si: $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2}$ Calcular: $a° + b° + c° + d° + e°$

A) 360°
B) 450°
C) 540°
D) 600°
E) 720°



RESOLUCIÓN :



* Por propiedad:

$a° + b° + c° = (360° - d°) + (360° - e°)$

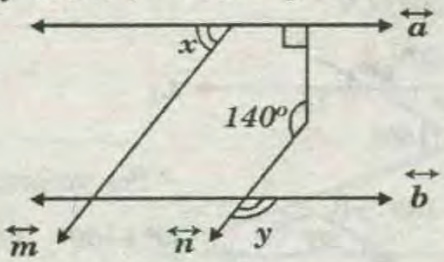
$\Rightarrow a° + b° + c° + d° + e° = 720°$

RPTA: "E"

PROBLEMA 29 :

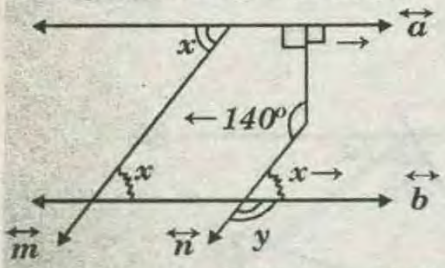
Si: $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b}$ y $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$, calcular: "$y - x$"

A) 80°
B) 50°
C) 70°
D) 100°
E) 150°



RESOLUCIÓN :

* Por ángulos alternos internos y ángulos correspondientes, se obtendrá:



* Por propiedad :

$x + 90° = 140°$

$\Rightarrow x = 50°$

* Además: $y = 180° - x = 180° - 50° = 130°$

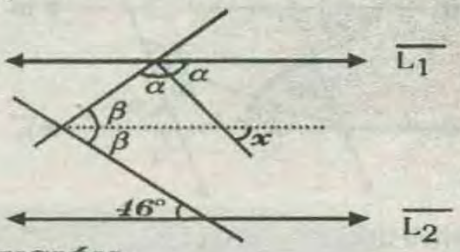
* Se pide: $y - x = 130° - 50° = 80°$

RPTA: "A"

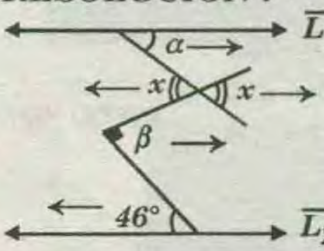
PROBLEMA 30 :

Si: $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2}$; Hallar el valor de "x"

A) 60°
B) 64°
C) 66°
D) 65°
E) 67°



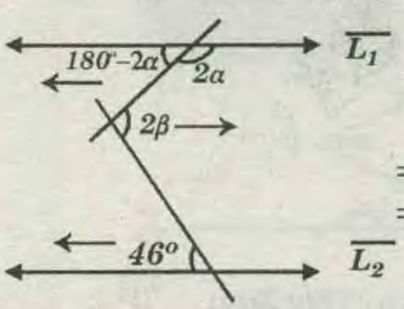
RESOLUCIÓN :



* Por propiedad: ***(Zig–Zag)***

$\alpha + \beta = x + 46°$

$\Rightarrow \alpha + \beta - 46° = x$ .....(I)



* Por propiedad:

$(180° - 2\alpha) + 46° = 2\beta$

$\Rightarrow 226° = 2\alpha + 2\beta$

$\Rightarrow 113° = \alpha + \beta$;.....(II)

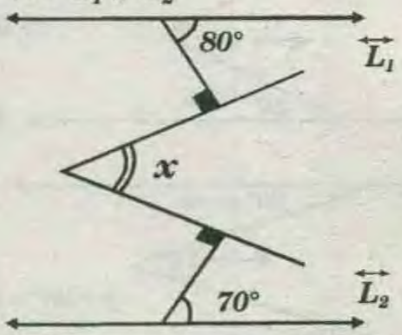
* *(II)* en *(I)*: $\Rightarrow x = 67°$

RPTA: "E"

PROBLEMA 31 :

Calcular "x", si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

A) 20°
B) 10°
C) 30°
D) 40°
E) 50°



RESOLUCIÓN :

* Por la propiedad del serrucho:

$80° + x + 70° = 90° + 90°$

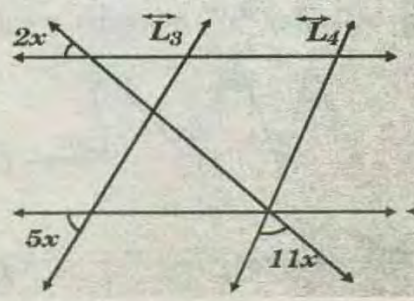
$\Rightarrow x = 30°$

RPTA: "C"

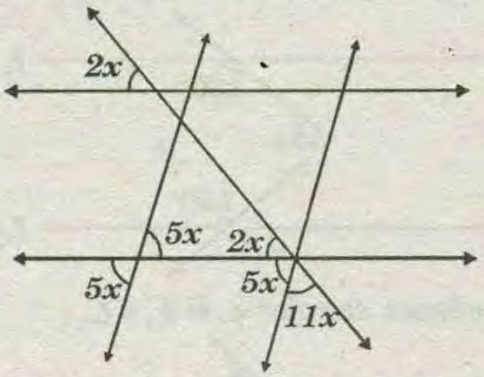
PROBLEMA 32 :

En la figura $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{L_3} \parallel \overleftrightarrow{L_4}$, el valor numérico de $3x - 12°$, es:

A) 15°
B) 16°
C) 17°
D) 18°
E) 19°



RESOLUCIÓN :



* Por los ángulos correspondientes, se obtendrá:

$$2x+5x+11x=180^\circ$$

$$\Rightarrow 18x=180^\circ \Rightarrow x=10^\circ$$

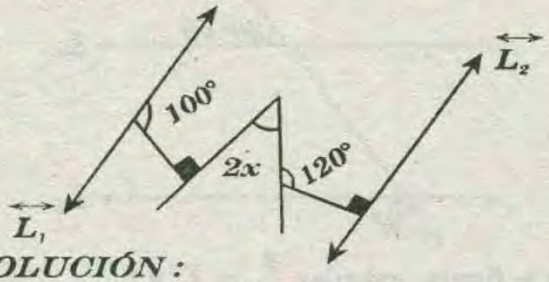
* Se pide: $3(10^\circ)-12^\circ=18^\circ$

RPTA : "D"

PROBLEMA 33 :

Calcular *"x"* si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

A) 20°
B) 10°
C) 40°
D) 8°
E) 6°



RESOLUCIÓN :

* Aplicamos la regla de Zig-Zag:

$$80^\circ+2x+90^\circ=90^\circ+120^\circ$$

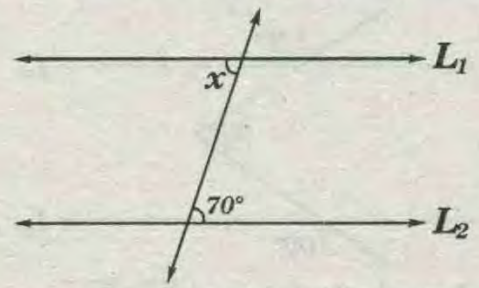
$$\Rightarrow x=20^\circ$$

RPTA: "A"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

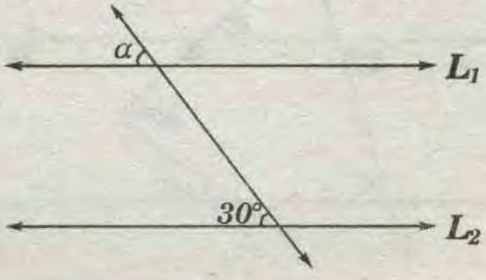
01 En la figura, calcular x, si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

A) 70°
B) 40°
C) 80°
D) 110°
E) 95°



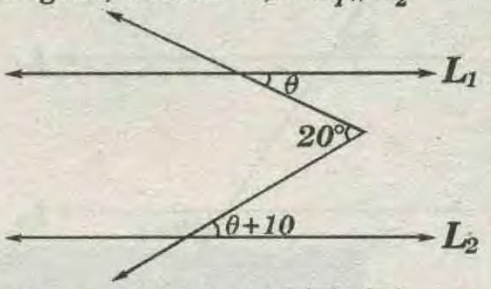
02 En la figura, calcular α, si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

A) 40°
B) 30°
C) 60°
D) 150°
E) 95°



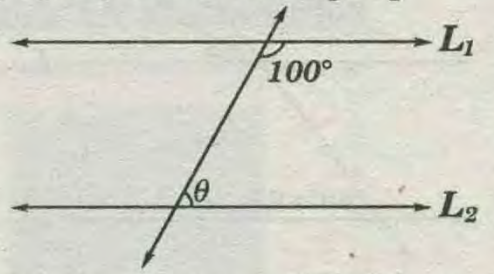
03 En la figura, calcular θ, si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

A) 20°
B) 30°
C) 5°
D) 25°
E) 35°

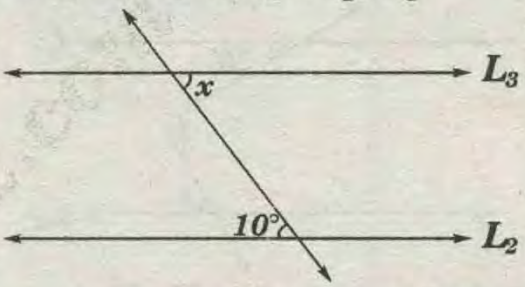


04 En la figura, calcular θ, si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

A) 80°
B) 70°
C) 100°
D) 40°
E) 90°



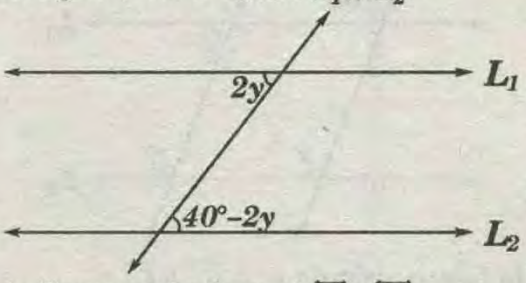
05 En la figura, calcule x; si $\overleftrightarrow{L_2} \parallel \overleftrightarrow{L_3}$



A) 20° *B) 10°* *C) 5°* *D) 90°* *E) 80°*

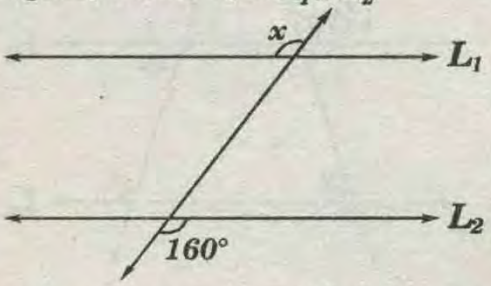
06 En la figura, calcule y; si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

A) 16°
B) 12°
C) 10°
D) 5°
E) 8°



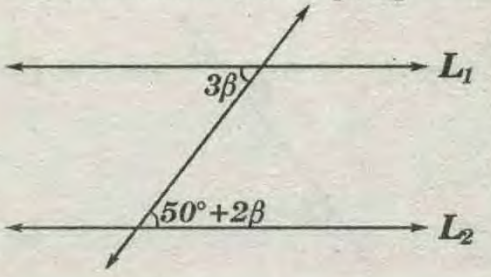
07 En la figura, calcule x; si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

A) 120°
B) 130°
C) 140°
D) 160°
E) 200°

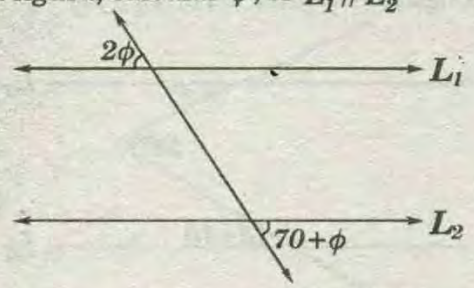


08 En la figura, calcular β, si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 80°

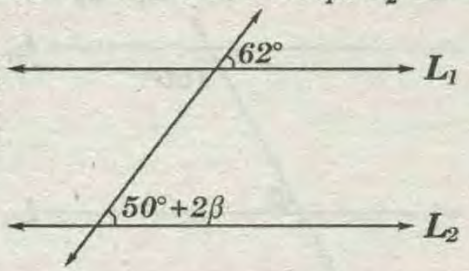


09 En la figura, calcular ϕ, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



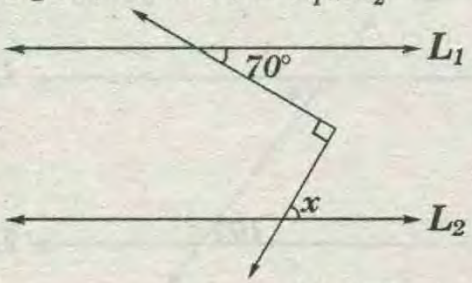
A) 30°
B) 40°
C) 70°
D) 50°
E) 60°

10 En la figura, calcular β, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



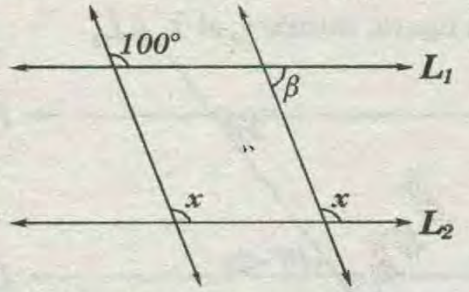
A) 8°
B) 36°
C) 6°
D) 18°
E) 20°

11 En la figura, calcule x, si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



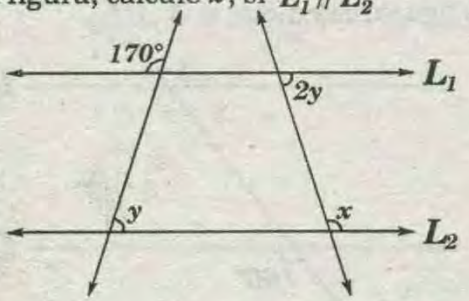
A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 8°
E) 12°

12 En la figura, calcule β, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



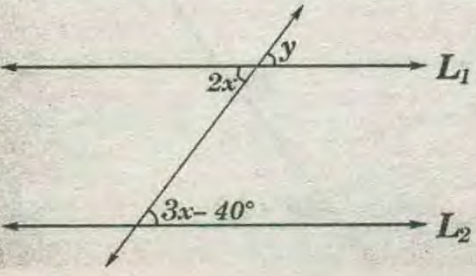
A) 60°
B) 80°
C) 70°
D) 60°
E) 120°

13 En la figura, calcule x; si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



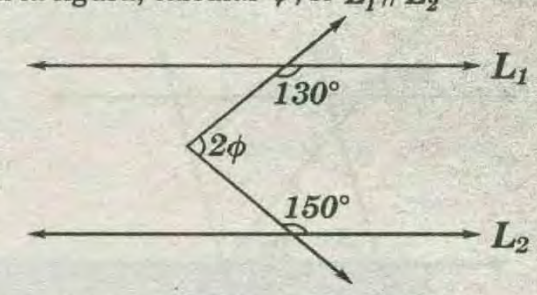
A) 80°
B) 60°
C) 70°
D) 30°
E) 160°

14 En la figura, calcule "y", si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



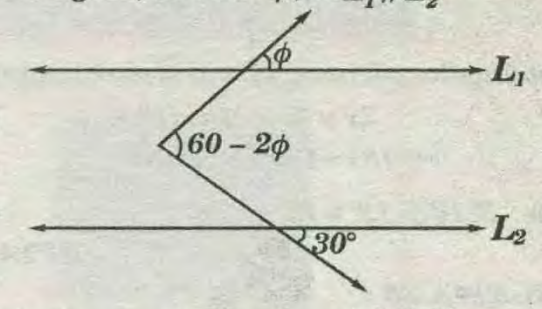
A) 80°
B) 100°
C) 90°
D) 75°
E) 85°

15 En la figura, calcular ϕ, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



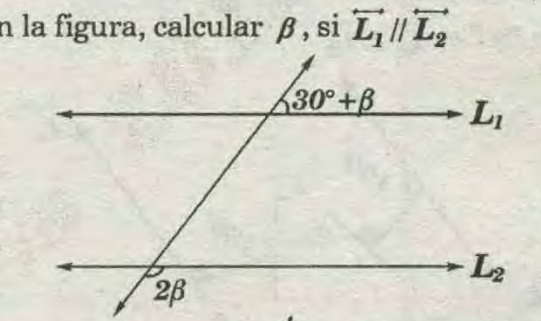
A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°

16 En la figura, calcular ϕ, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



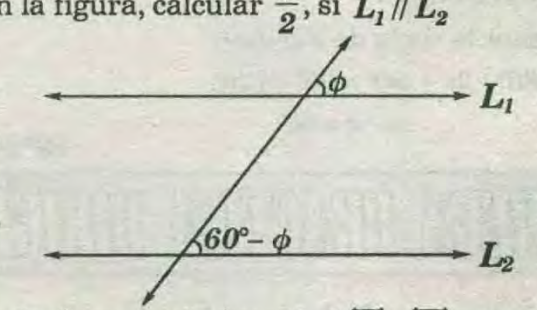
A) 10°
B) 15°
C) 30°
D) 20°
E) 25°

17 En la figura, calcular β, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



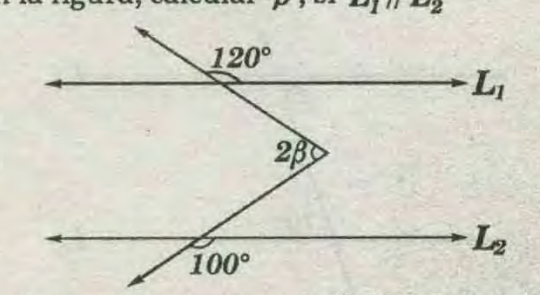
A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 60°

18 En la figura, calcular $\frac{\phi}{2}$, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



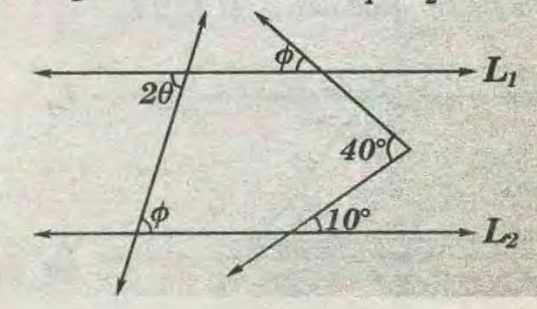
A) 30°
B) 45°
C) 15°
D) 20°
E) 25°

19 En la figura, calcular β, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 70°

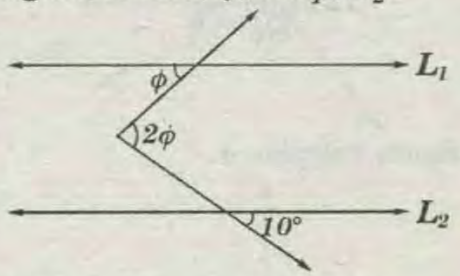
20 En la figura, calcular θ, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



A) 30°
B) 15°
C) 40°
D) 60°
E) 45°

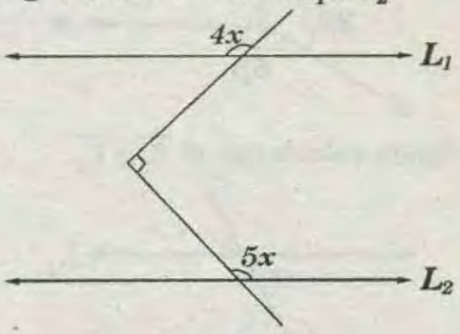
TAREA DOMICILIARIA

01 En la figura, calcular ϕ, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



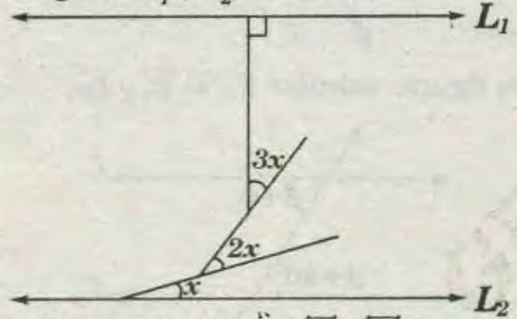
A) 10°
B) 40°
C) 50°
D) 30°
E) 20°

02 En la figura, hallar «x», si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



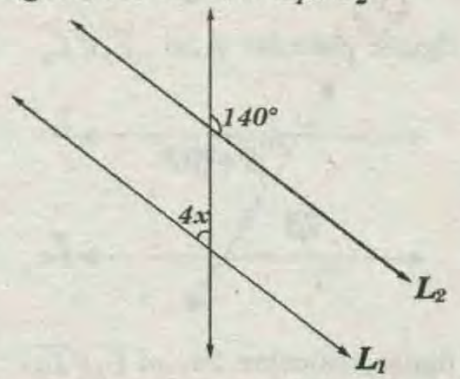
A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 25°
E) 15°

03 En la figura: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$; hallar «$x$»



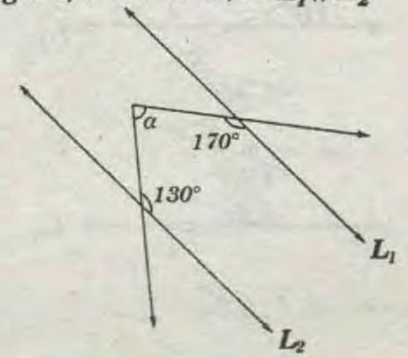
A) 15°
B) 12°
C) 10°
D) 20°
E) 35°

04 En la figura, calcule x, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



A) 15°
B) 14°
C) 11°
D) 10°
E) 9°

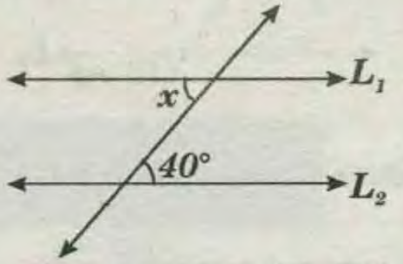
05 En la figura, calcular α, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



A) 60°
B) 40°
C) 37°
D) 50°
E) 36°

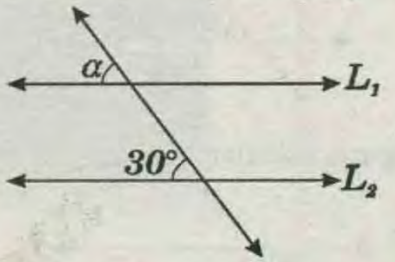
SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 En la figura, calcular x, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



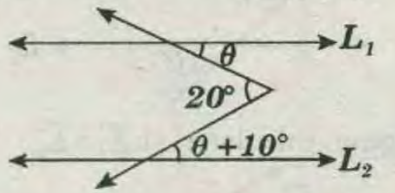
A) 70°
B) 40°
C) 80°
D) 110°
E) 95°

02 En la figura, calcular α, si. $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



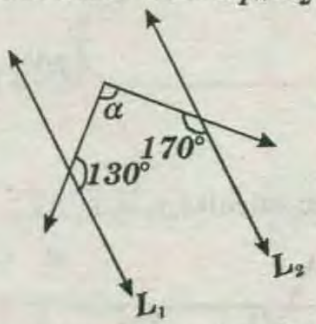
A) 40°
B) 30°
C) 60°
D) 150°
E) 95°

03 En la figura, calcular θ, si. $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



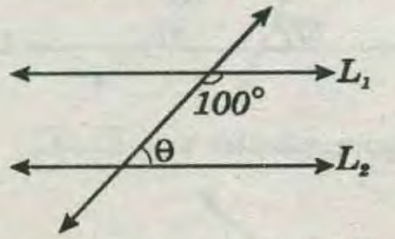
A) 20°
B) 30°
C) 5°
D) 25°
E) 35°

04 En la figura calcular α, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



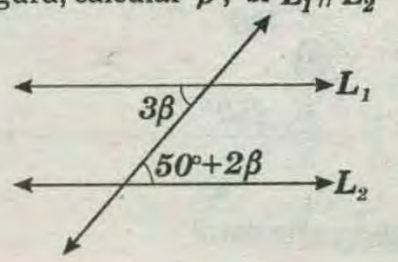
A) 60°
B) 40°
C) 37°
D) 50°
E) 36°

05 En la figura calcular θ, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.



A) 80°
B) 70°
C) 100°
D) 40°
E) 90°

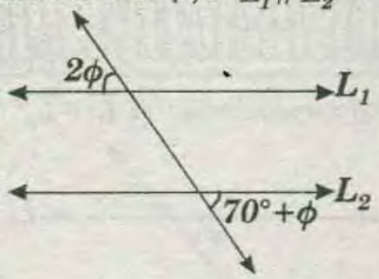
06 En la figura, calcular β, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 80°

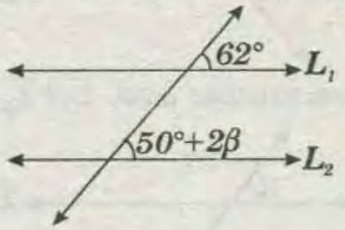
07 En la figura calcular ϕ, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$

A) 30°
B) 40°
C) 70°
D) 50°
E) 60°



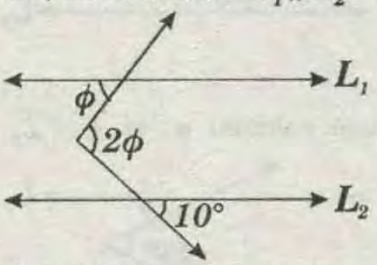
08 En la figura calcular β, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$

A) 8°
B) 36°
C) 6°
D) 18°
E) 20°



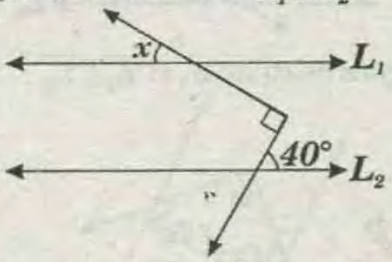
09 En la figura, calcular ϕ, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$

A) 10°
B) 40°
C) 50°
D) 30°
E) 20°



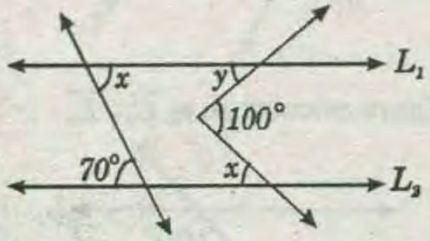
10 En la figura, calcular x, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$

A) 10°
B) 60°
C) 50°
D) 70°
E) 85°



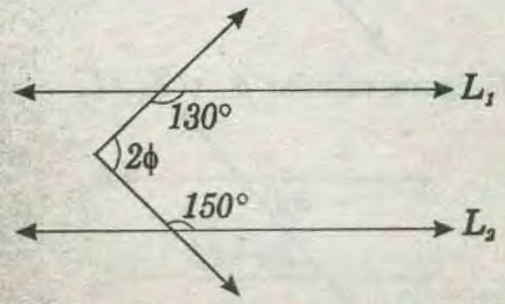
11 En la figura, calcular y, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 25°
E) 36°



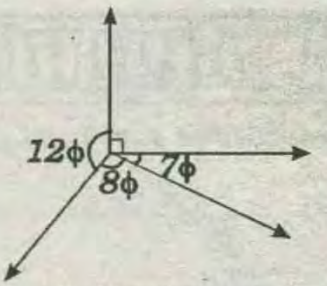
12 En al figura, calcular ϕ, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°



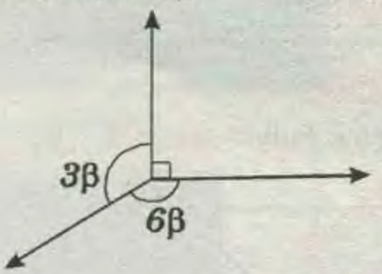
13 En la figura, calcular ϕ.

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°



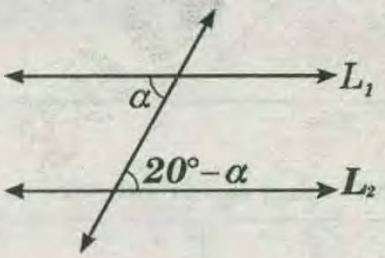
14 En la figura, calcular β.

A) 30°
B) 40°
C) 35°
D) 36°
E) 20°



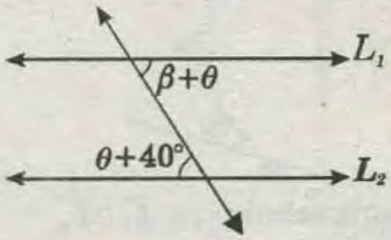
15 En la figura calcular α, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$

A) 10°
B) 20°
C) 15°
D) 36°
E) 30°



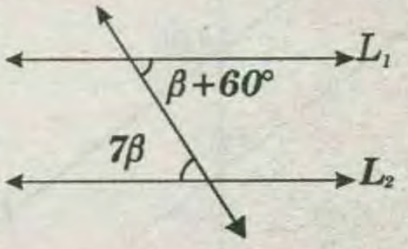
16 En la figura, calcular β, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°



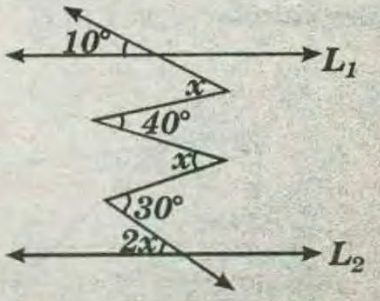
17 En al figura, calcular β, si . $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$

A) 10°
B) 20°
C) 15°
D) 25°
E) 18°



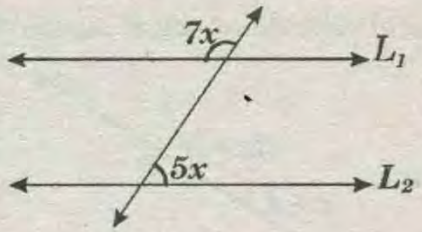
18 En la figura, calcular $2x$, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.

A) 10°
B) 40°
C) 50°
D) 60°
E) 36°



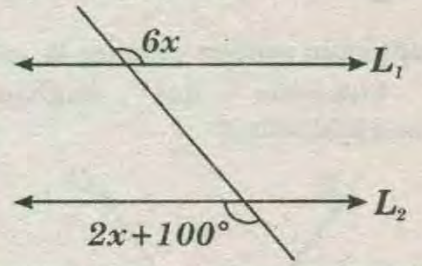
19 Calcular «x», si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



20 Calcular «x», si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$

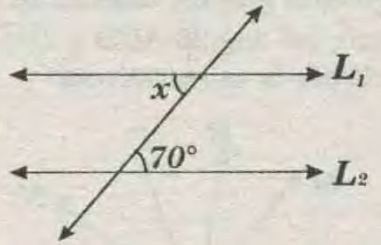
A) 15°
B) 20°
C) 18°
D) 25°
E) 24°



TAREA DOMICILIARIA

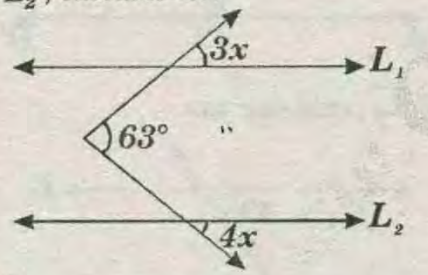
01 Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, Calcular x.

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°



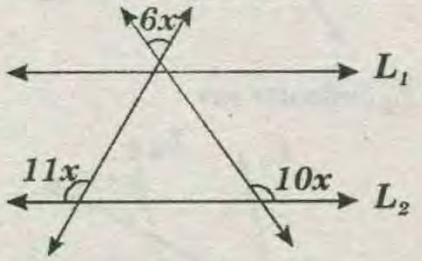
02 Si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, calcular «x»

A) 7°
B) 8°
C) 9°
D) 10°
E) 11°



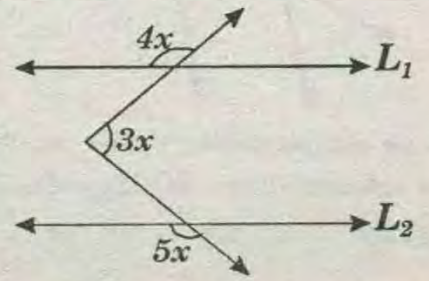
03 Calcular «x», si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$

A) 15°
B) 9°
C) 10°
D) 12°
E) 18°



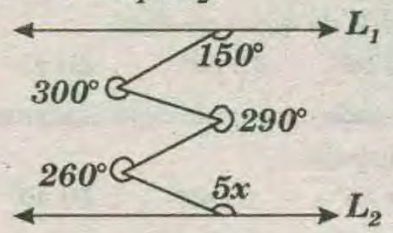
04 Calcular «x», si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$

A) 30°
B) 20°
C) 15°
D) 18°
E) 24°



05 Calcular «x», si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.

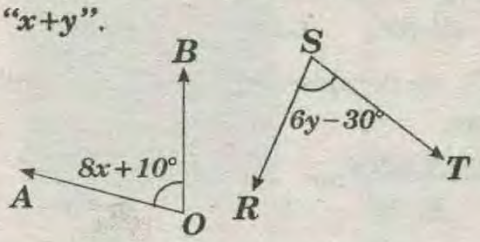
A) 20°
B) 24°
C) 22°
D) 21°
E) 30°



TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Se tiene los siguientes ángulos rectos, *AOB* y *RST*. Calcular *"x+y"*.

A) 20
B) 10
C) 30
D) 40
E) 50



02 Se tienen los siguientes ángulos rectos:

$(2x + 50°)$, $(5y - 20°)$ y $(7z + 20°)$

Calcular: $x^2 + z - 10y$

A) 202° B) 200° C) 220° D) 120° E) 190°

03 Dadas las siguientes afirmaciones responde *(V)* si es verdadero y con *(F)* si es falso.

( ) Un ángulo obtuso es aquel cuya medida esta comprendida entre *0°* y *90°*.

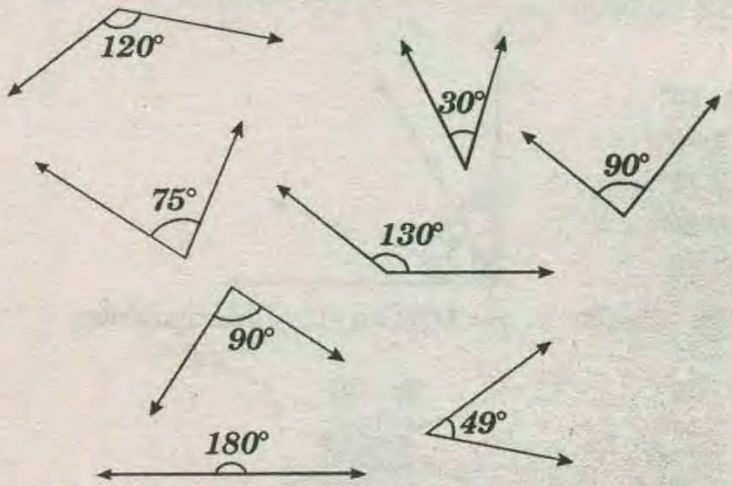
( ) Un ángulo llano es aquel cuya medida es *180°*.

( ) Un ángulo agudo esta comprendido entre *90°* y *180°*.

( ) Los ángulos suplementarios son aquellos cuyas medidas suman *90°*.

A) VVFV B) FVFV C) FVFF D) VVVF E) FFFV

04 De los siguientes gráficos, ¿Cuántos ángulos son en este orden agudos y obtusos?



A) 5 y 3 B) 3 y 5 C) 2 y 1 D) 3 y 2 E) 3 y 4

05 Calcular la medida de un ángulo si su complemento es igual al doble de dicha medida.

A) 15° B) 30° C) 60° D) 45° E) 20°

06 ¿Cuánto mide un ángulo cuyo suplemento es igual al triple del ángulo.

A) 30° B) 35° C) 40° D) 45° E) 50°

07 Si un ángulo se le disminuye su complemento resulta 80° ¿Cuánto mide dicho ángulo?

A) 70° B) 80° C) 85° D) 60° E) 75°

08 ¿Cuánto mide el ángulo que al desminuirle su complemento se obtiene 10° ?

A) 50° B) 40° C) 45° D) 60° E) 30°

09 Si «C» es complemento y «S» es suplemento, calcular «x»

Si: $x = SSCCSSS_{100^\circ}$

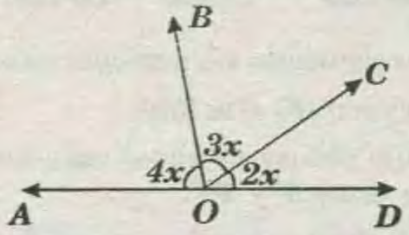
A) 130° B) 70° C) 60° D) 90° E) 80°

10 El complemento de «a» más el complemento de «3a» es igual a 5a. Calcular «a»

A) 20° B 30° C) 50° D) 40° E) 60°

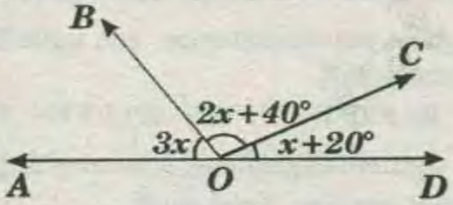
11 En el gráfico, calcular la $m\sphericalangle AOC$:

A) 20°
B) 40°
C) 80°
D) 120°
E) 140°



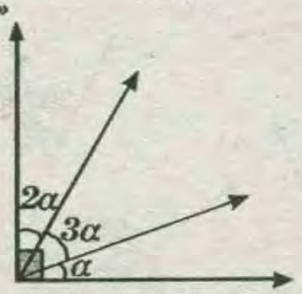
12 En el gráfico calcular la $m\sphericalangle AOB$:

A) 60°
B) 20°
C) 80°
D) 40°
E) 100°



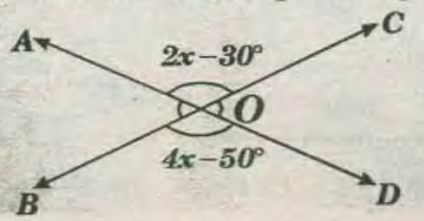
13 Calcular «α»

A) 16°
B) 30°
C) 18°
D) 20°
E) 19°



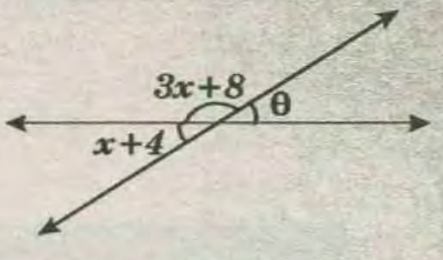
14 Calcular la $m\sphericalangle AOB$ en el gráfico siguiente:

A) 40°
B) 120°
C) 110°
D) 80°
E) 20°



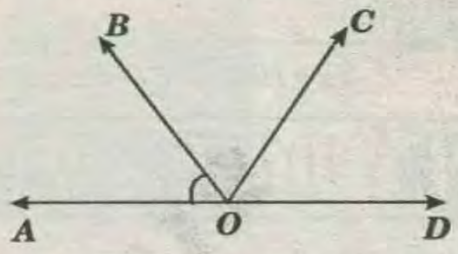
15 Calcular el valor de «θ» en el siguiente gráfico:

A) 46°
B) 42°
C) 168°
D) 124°
E) 134°



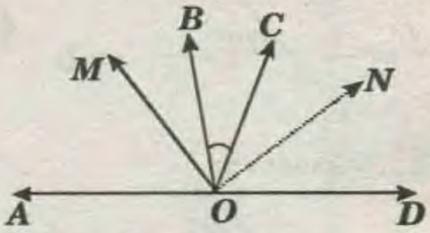
16 En el siguiente gráfico calcular la $m\sphericalangle AOB$, si $\overline{OC}$ es bisectriz del ángulo BOD, $m\sphericalangle AOC + m\sphericalangle BOD = 254^\circ$

A) 32°
B) 74°
C) 148°
D) 36°
E) 68°



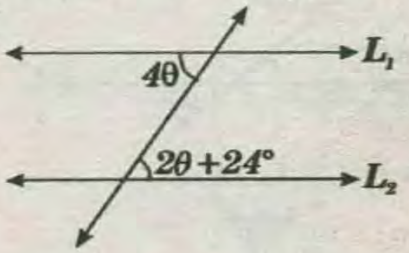
17 En el siguiente gráfico, calcular la $m\sphericalangle BOC$, si $\overline{OM}$ es bisectriz del ángulo AOB y $\overline{ON}$ es bisectriz del $\sphericalangle COD$, además la $m\sphericalangle MON = 96^\circ$

A) 84°
B) 16°
C) 16°
D) 12°
E) 30°



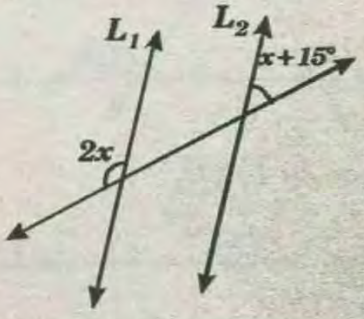
18 Si: $\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2}$, calcular «θ»

A) 10°
B) 20°
C) 12°
D) 22°
E) 14°



19 Si $\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2}$, calcular «x»

A) 55°
B) 65°
C) 35°
D) 45°
E) 25°



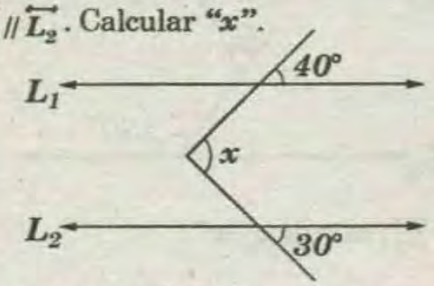
20 Si «C» es complemento y «S» es suplemento, calcular «β» sabiendo que: $SCCS_{3\beta} = SCSCSC_{\beta}$

A) 60° B) 30° C) 90° D) 70° E) 45°

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

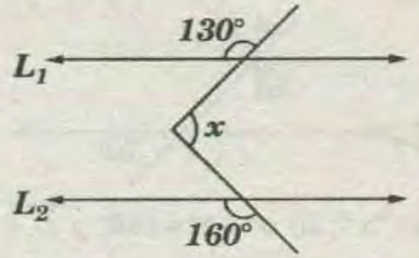
01 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$. Calcular "x".

A) 50°
B) 60°
C) 70°
D) 80°
E) 100°



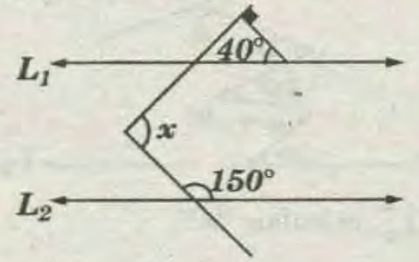
02 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$. Calcular "x".

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 80°



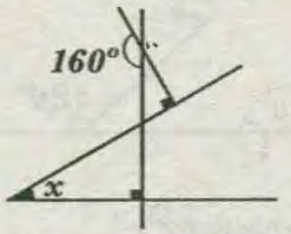
03 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$. Calcular "x".

A) 70°
B) 80°
C) 60°
D) 30°
E) 40°



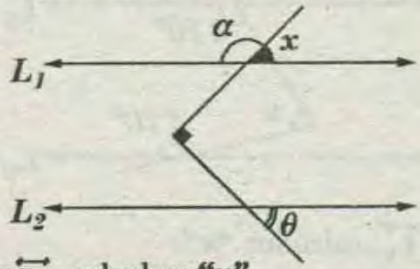
04 Calcular: "x".

A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 30°
E) 40°



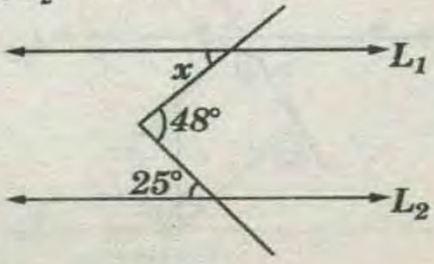
05 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$; $\alpha+\theta=140°$. Calcular "x".

A) 30°
B) 45°
C) 55°
D) 65°
E) 70°



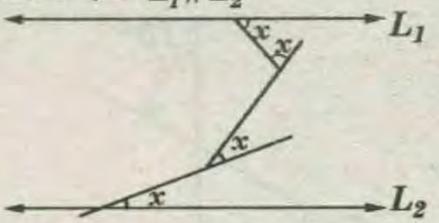
06 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcular: "x".

A) 25°
B) 20°
C) 23°
D) 18°
E) 19°



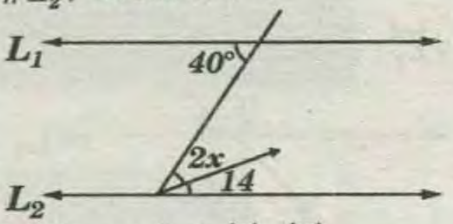
07 Calcular: "x", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.

A) 37°
B) 18°
C) 38°
D) 60°
E) 45°



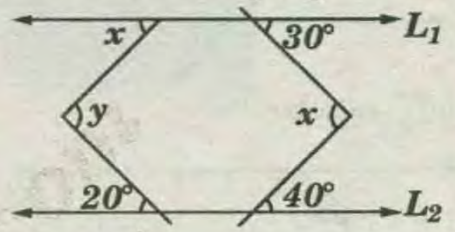
08 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcular: "x".

A) 10°
B) 12°
C) 13°
D) 15°
E) 14°



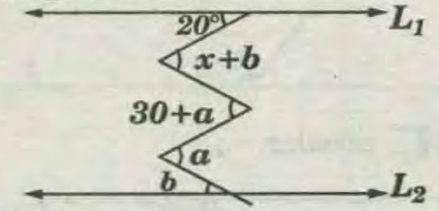
09 Calcular: "x + y", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$

A) 130°
B) 120°
C) 100°
D) 160°
E) 90°



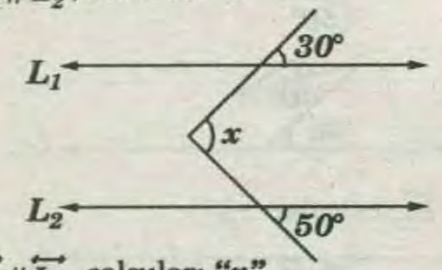
10 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcular: "x".

A) 40°
B) 50°
C) 30°
D) 20°
E) 60°



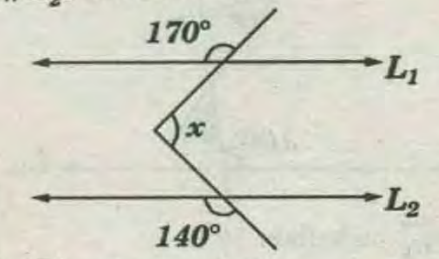
11 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcular: "x".

A) 50°
B) 60°
C) 70°
D) 80°
E) 90°



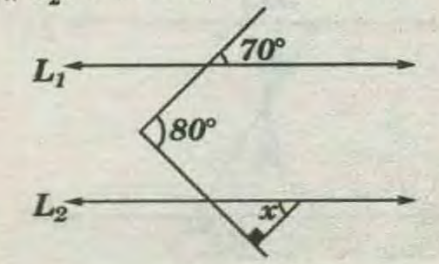
12 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcular: "x".

A) 30°
B) 40°
C) 50°
D) 60°
E) 70°



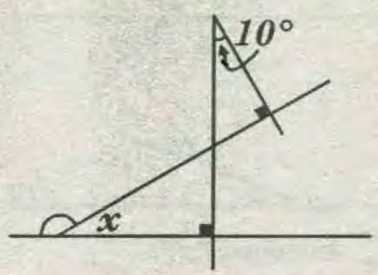
13 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcular: "x".

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 80°
E) 85°



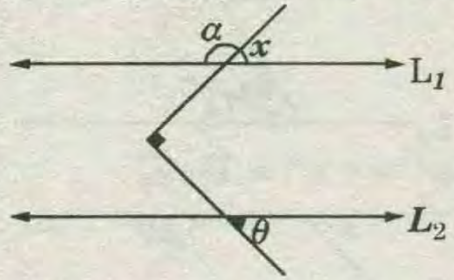
14 Calcular "x".

A) 170°
B) 160°
C) 150°
D) 140°
E) 130°



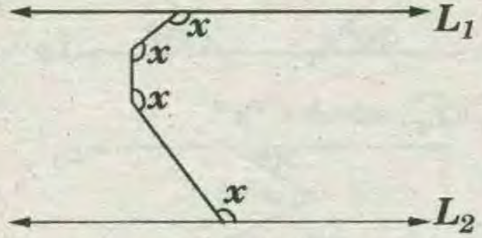
15 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$; $\alpha+\theta=142°$, calcular: "x".

A) 64°
B) 74°
C) 84°
D) 71°
E) 19°



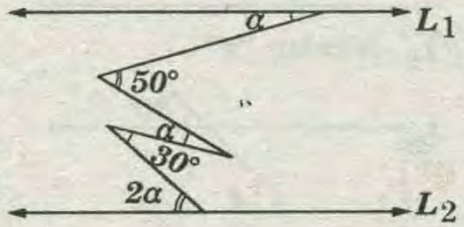
16 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcular: "$x$".

A) 120°
B) 124°
C) 135°
D) 132°
E) 136°



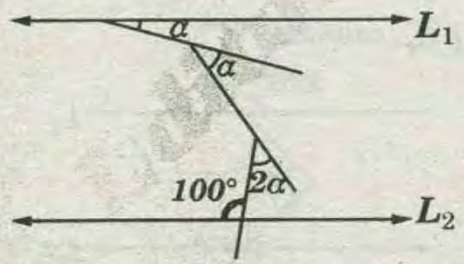
17 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcular: "$\alpha$".

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



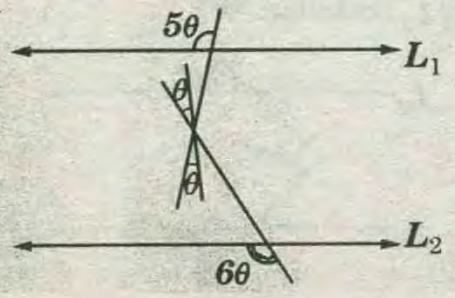
18 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcular: "$\alpha$".

A) 30°
B) 20°
C) 35°
D) 25°
E) 32°



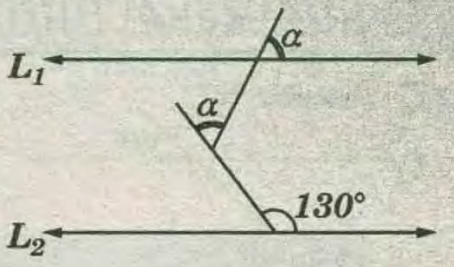
19 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcular: "$\theta$".

A) 30°
B) 20°
C) 24°
D) 25°
E) 18°



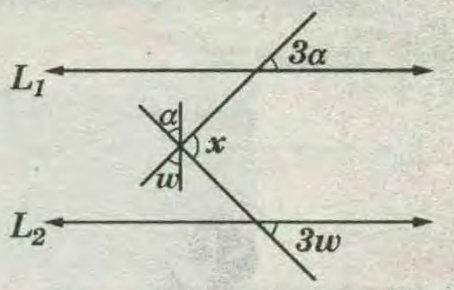
20 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcular: "$\alpha$".

A) 50°
B) 65°
C) 55°
D) 60°
E) 75°



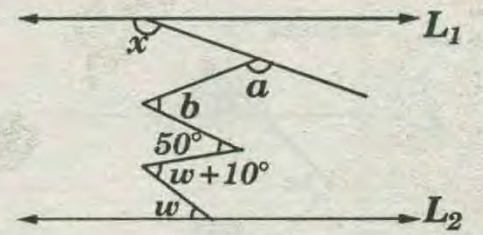
21 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcular: "$x$".

A) 45°
B) 90°
C) 135°
D) 120°
E) 150°



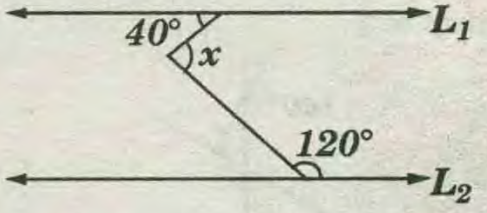
22 Calcular: "x", si: $a°+b°=160°$ y $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$

A) 100°
B) 105°
C) 110°
D) 115°
E) 120°



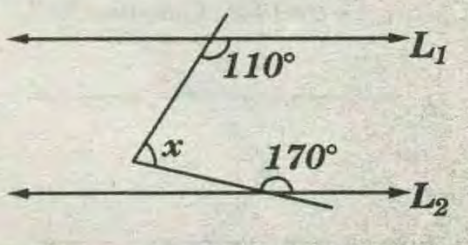
23 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcular: "$x$".

A) 80°
B) 100°
C) 120°
D) 130°
E) 140°



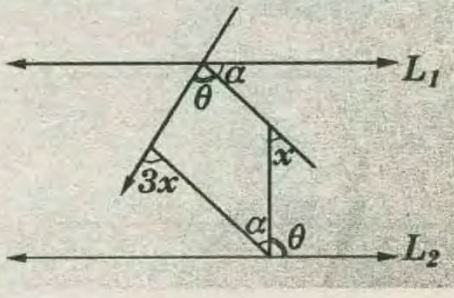
24 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcular: "$x$".

A) 270°
B) 90°
C) 80°
D) 60°
E) 40°



25 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcular: "$x$".

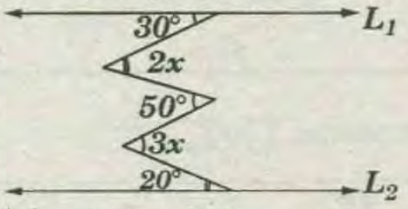
A) 30°
B) 40°
C) 45°
D) 50°
E) 36°



TAREA DOMICILIARIA

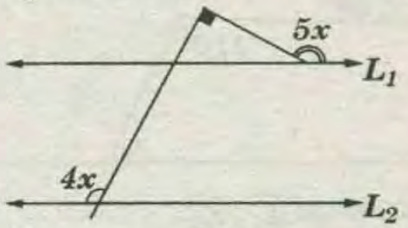
01 Calcular: "α", si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.

A) 10°
B) 12°
C) 18°
D) 24°
E) 20°



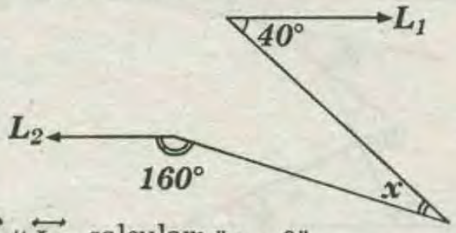
02 Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, calcular: "x".

A) 30°
B) 40°
C) 20°
D) 30°
E) 25°



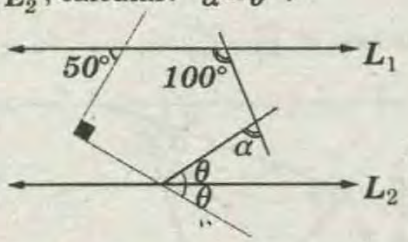
03 Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, calcular: "x".

A) 10°
B) 40°
C) 20°
D) 30°
E) 25°



04 Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, calcular: "$\alpha - \theta$".

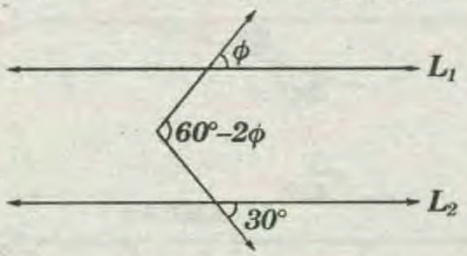
A) 40°
B) 60°
C) 20°
D) 50°
E) 10°



QUINTA PRACTICA DIRIGIDA

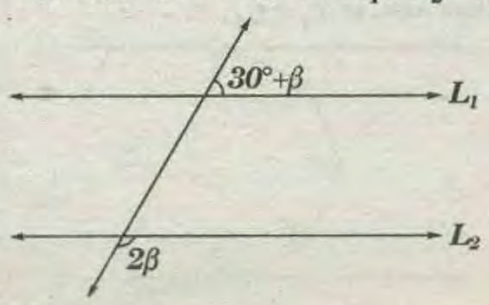
01 En la figura, calcular "ϕ", si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.

A) 10°
B) 15°
C) 30°
D) 20°
E) 25°



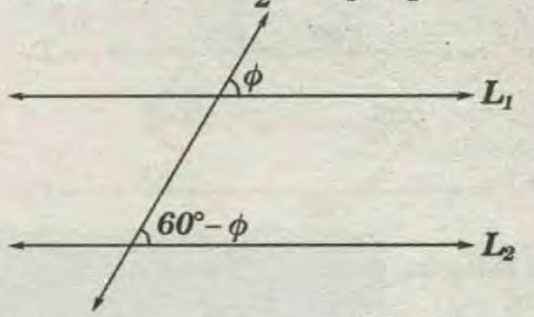
02 En la figura, calcular "β", si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 60°



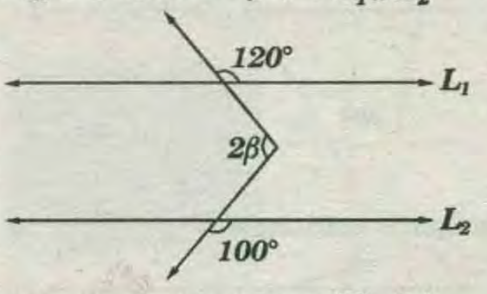
03 En la figura, calcular $\frac{\phi}{2}$, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.

A) 30°
B) 45°
C) 15°
D) 20°
E) 25°



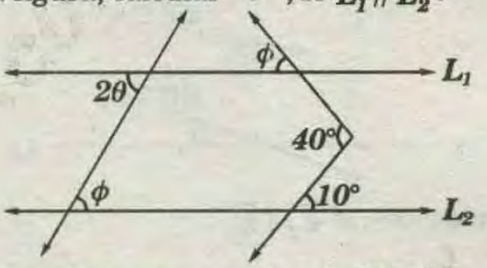
04 En la figura, calcular "β", si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 70°



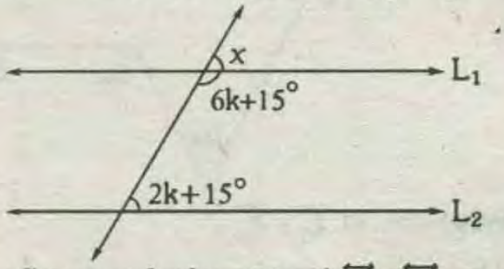
05 En la figura, calcular "θ", si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.

A) 30°
B) 15°
C) 40°
D) 60°
E) 45°



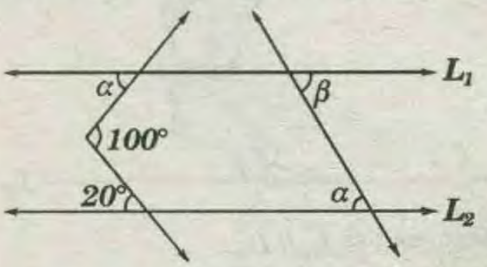
06 Calcular el ángulo «x», siendo $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.

A) 45°
B) 30°
C) 28°
D) 37°
E) 32°



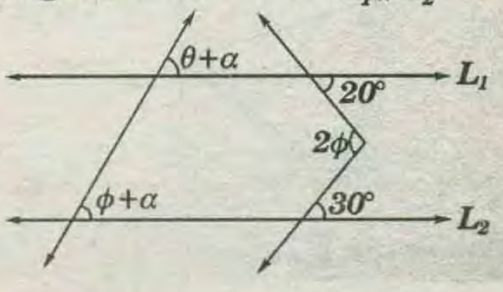
07 En la figura, calcular 2β, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.

A) 80°
B) 160°
C) 70°
D) 90°
E) 100°



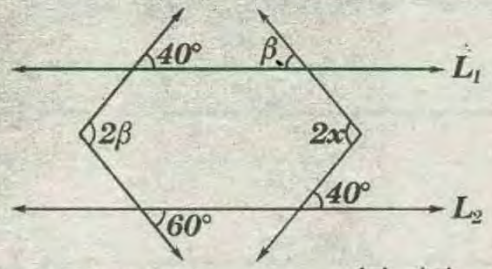
08 En la figura, calcular "θ", si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.

A) 20°
B) 22°
C) 25°
D) 30°
E) 36°



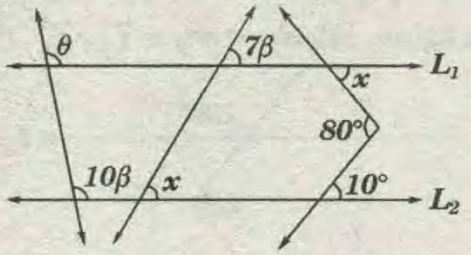
09 En la figura, calcular «x», si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.

A) 45°
B) 90°
C) 37°
D) 53°
E) 16°



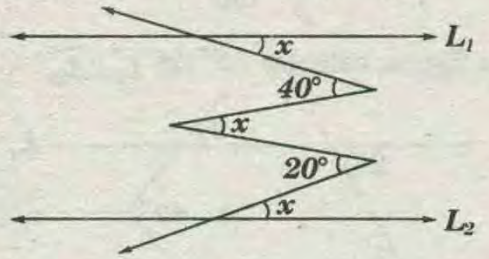
10 En la figura, calcular "θ", si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.

A) 70°
B) 10°
C) 78°
D) 100°
E) 80°



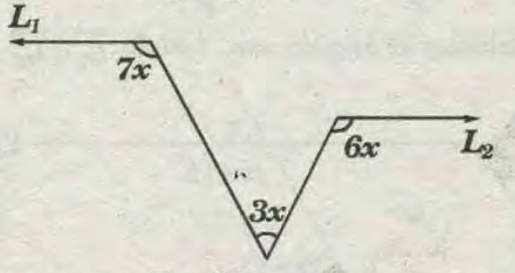
11 En la figura, calcular x, si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.

A) 20°
B) 30°
C) 45°
D) 36°
E) 49°



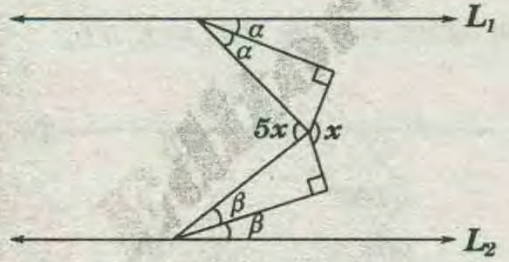
12 Calcular «x», si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



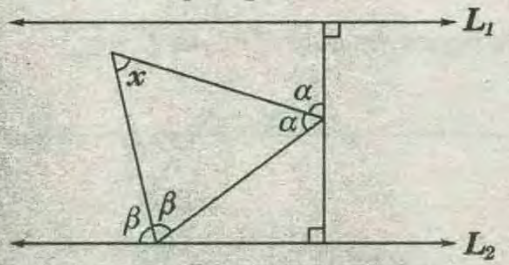
13 Calcular «x», si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.

A) 30°
B) 32°
C) 24°
D) 20°
E) 18°



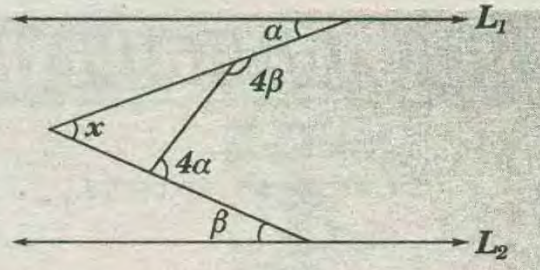
14 Calcular «x», si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.

A) 50°
B) 36°
C) 60°
D) 30°
E) 45°



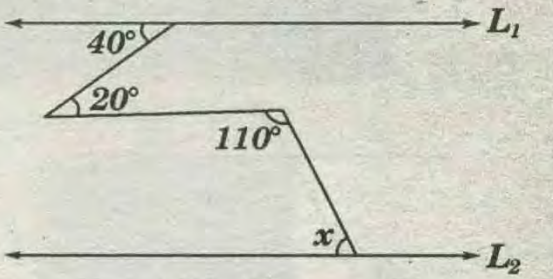
15 Calcular «x», si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.

A) 30°
B) 60°
C) 45°
D) 36°
E) 27°



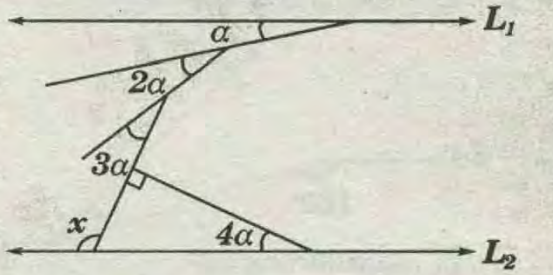
16 Calcular «x», si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 30°



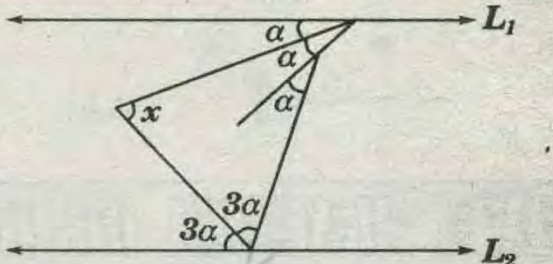
17 Calcular «x», si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.

A) 120°
B) 130°
C) 126°
D) 144°
E) 108°



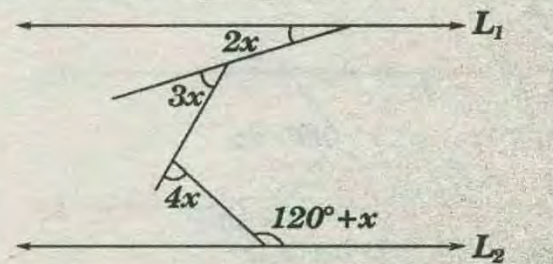
18 Calcular «x», si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.

A) 80°
B) 70°
C) 100°
D) 60°
E) 40°



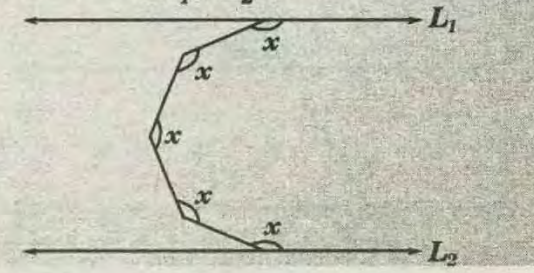
19 Calcular «x», si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.

A) 20°
B) 18°
C) 10°
D) 12°
E) 15°



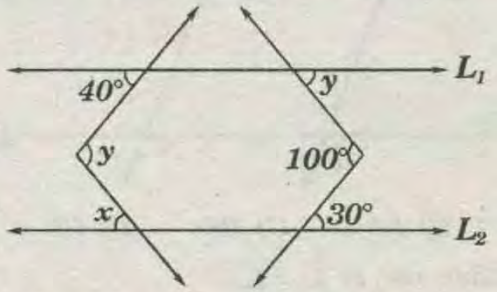
20 Calcular «x», si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.

A) 135°
B) 120°
C) 144°
D) 150°
E) 165°



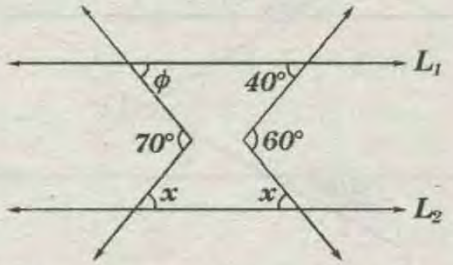
TAREA DOMICILIARIA

(01) En la figura, calcular "x", si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



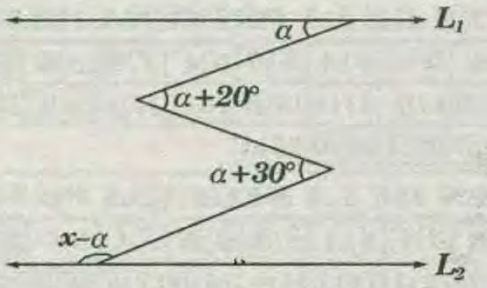
A) 36°
B) 18°
C) 54°
D) 10°
E) 30°

(02) En la figura, calcular ϕ, si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



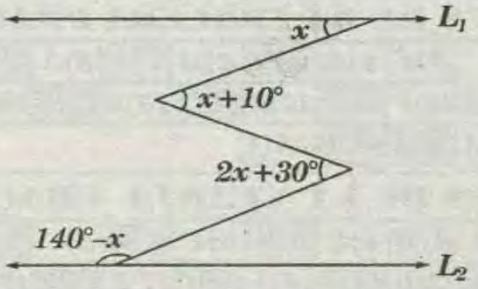
A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 60°

(03) Calcular «x», si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



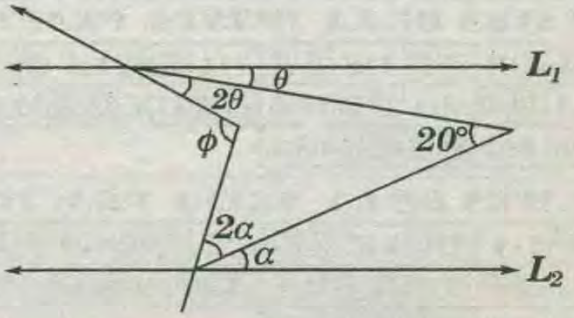
A) 40°
B) 150°
C) 110°
D) 170°
E) 160°

(04) Calcular «x», si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



A) 40°
B) 30°
C) 20°
D) 50°
E) 10°

(05) En la figura, calcular ϕ, si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



A) 10°
B) 20°
C) 30°
D)
E) 60°

SEXTA PRACTICA DIRIGIDA

(01) Calcula la medida del ángulo que es igual a la mitad de su complemento.

A) 20° B) 25° C) 30° D) 52° E) 50°

(02) ¿Cuál es la mitad del ángulo que es igual a *1/3* de su complemento?

A) 36° B) 61° C) 25° D) 28° E) 18°

(03) La suma del complemento más el suplemento de cierto ángulo es igual a *130°*. Hallar la medida de dicho ángulo.

A) 50° B) 60° C) 70° D) 80° E) 90°

(04) Calcular el suplemento del complemeto de *70°*.

A) 140° B) 150° C) 160° D) 170 E) 110°

(05) Calcula el complemento de la medida de un ángulo si dicho ángulo es igual al suplemento de *160°*.

A) 65° B) 60° C) 70° D) 80° E) 75°

(06) Si la medida de un ángulo es igual a un octavo de su suplemento, calcula la medida de dicho ángulo.

A) 20° B) 30° C) 40° D) 10° E) 25°

(07) El suplemento del complemento de la medida de un ángulo es igual a *100°*. Calcula dicha medida.

A) 20° B) 10° C) 30° D) 40° E) 50°

(08) La diferencia entre el suplemento y el complemento de «x» es igual a «$6x$». Calcular «x».

A) 18° B) 12° C) 10° D) 15° E) 5°

(09) Sean *AOB*, *BOC* y *COD* ángulos consecutivos, si $m\sphericalangle AOD=100°$, $m\sphericalangle AOC=72°$ y $m\sphericalangle BOD=83°$.

Calcular $m\sphericalangle BOC$

A) 50° B) 55° C) 30° D) 60° E) 45°

(10) Los ángulos *AOB*, *BOC* y *COD* son consecutivos si $m\sphericalangle AOC=45°$, $m\sphericalangle BOD=53°$ y $m\sphericalangle AOD=82°$.

Calcular $m\sphericalangle BOC$

A) 30° B) 29° C) 16° D) 45° E) 50°

(11) Dados los ángulos consecutivos *AOB* y *BOC*; se traza la bisectriz $\overline{OM}$ del $\sphericalangle BOC$ que es perpendicular a $\overline{OA}$ y $2(m\sphericalangle AOB)+3(m\sphericalangle MOC)=198°$. Calcular la $m\sphericalangle AOC$.

A) 108° B) 120° C) 118° D)125° E)115°

(12) Se tienen los ángulos consecutivos *AOB* y *BOC* se trazan sus bisectrices *OM* y *ON* respectivamente. Calcular $m\sphericalangle AOC$ sabiendo que:

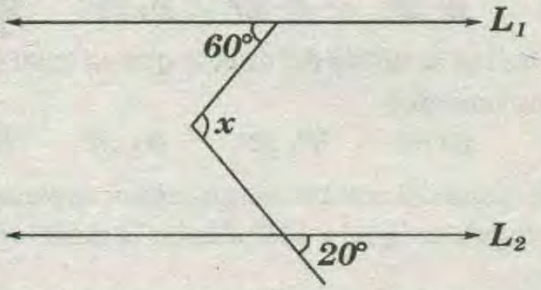
$$m\sphericalangle AON + m\sphericalangle MOC = 96°.$$

A) 60° B) 63° C) 64° D) 68° E) 69°

13 Si el suplemento de un ángulo, se le aumenta el complemento del complemento del ángulo, resulta el triple del mismo. Calcular la medida del ángulo.

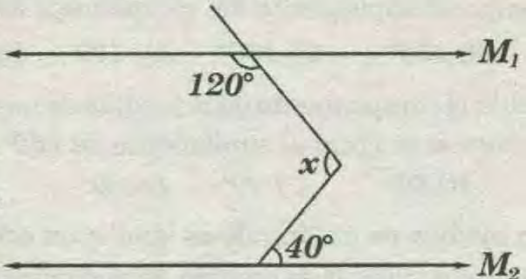
A) 20° B) 30° C) 40° D) 50° E) 60°

14 Si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, calcular «3x».



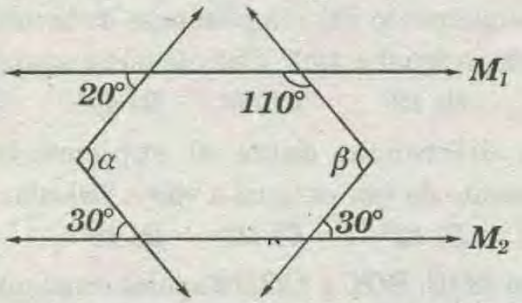
A) 80°
B) 200°
C) 240°
D) 120°
E) 150°

15 Si $\overrightarrow{M_1} // \overrightarrow{M_2}$, calcular "$\frac{x}{2}$"



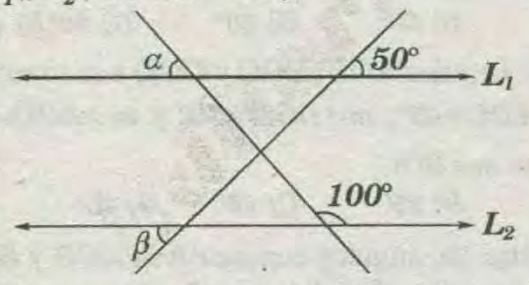
A) 50°
B) 60°
C) 100°
D) 160°
E) 80°

16 Si $\overrightarrow{M_1} // \overrightarrow{M_2}$, calcular "$\alpha + \frac{\beta}{2}$"



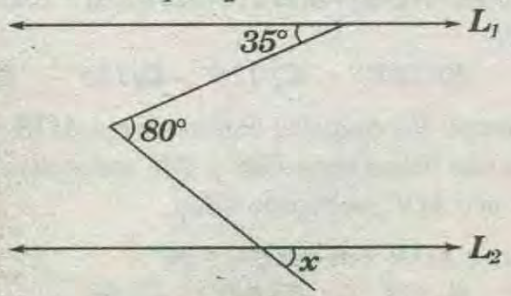
A) 150° B) 120° C) 130° D) 100° E) 200°

17 Si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, calcular "$\alpha + \beta$".



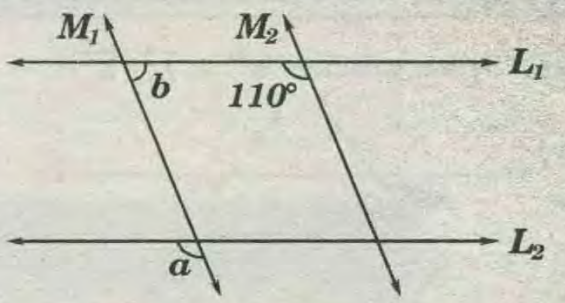
A) 100°
B) 110°
C) 120°
D) 130°
E) 140°

18 En el gráfico, $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$. Calcular «x»



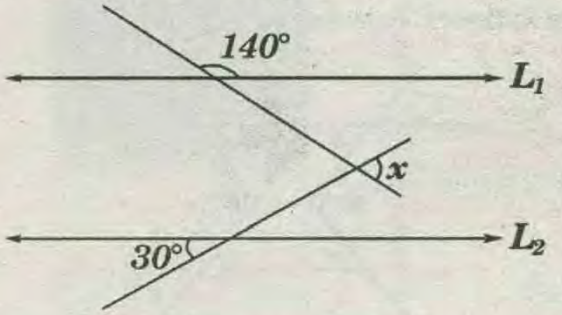
A) 50° B) 45° C) 40° D) 60° E) 80°

19 Si $\overrightarrow{M_1} // \overrightarrow{M_2}$ y $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, calcular «a – b»



A) 70° B) 40° C) 30° D) 45° E) 60°

20 Calcular «x», si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.



A) 170° B) 80° C) 70° D) 40° E) 50°

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)A	2)B	3)C	4)A	5)B	6)C	7)D	8)B	9)C	10)C
11)C	12)B	13)E	14)A	15)D	16)A	17)D	18)C	19)E	20)B
01)A	02)B	03)A	04)D	05)A					

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)B	2)B	3)C	4)A	5)A	6)B	7)C	8)C	9)A	10)C
11)B	12)D	13)A	14)A	15)A	16)D	17)C	18)B	19)C	20)D
01)C	02)C	03)A	04)D	05)B					

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1)C	2)*	3)C	4)D	5)B	6)D	7)C	8)A	9)E	10)A
11)E	12)A	13)C	14)C	15)B	16)A	17)D	18)C	19)A	20)E
01)B	02)A	03)A	04)D	05)A					

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA

1)C	2)D	3)B	4)C	5)D	6)C	7)E	8)C	9)D	10)B
11)D	12)C	13)D	14)A	15)A	16)C	17)E	18)D	19)B	20)B
21)C	22)E	23)B	24)C	25)E	01)E	02)A	03)C	04)C	05)*

CLAVES DE LA QUINTA PRACTICA

1)A	2)D	3)C	4)E	5)B	6)A	7)B	8)C	9)A	10)D
11)A	12)D	13)A	14)E	15)B	16)C	17)C	18)A	19)E	20)C
01)E	02)A	03)D	04)C	05)E					

CLAVES DE LA SEXTA PRACTICA

1)C	2)A	3)C	4)C	5)C	6)A	7)B	8)D	9)B	10)C
11)A	12)C	13)E	14)C	15)A	16)D	17)D	18)B	19)B	20)C
01)C	02)E	03)D	04)D	05)B					

ANGULOS (REPASO)

CAPITULO 08

OBJETIVOS :

* Definir correctamente un ángulo plano, clasificación de dichos ángulos, sus postulados y teoremas.

* Conocer los teoremas de los ángulos determinados por dos rectas paralelas y una secante.

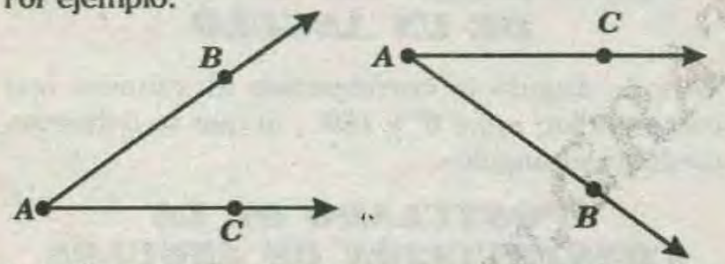
* Tener conocimiento de la recta vertical, horizontal e inclinada.

* Teoremas de ángulos cuyos lados son paralelos o perpendiculares.

* Reconocer e interpretar problemas que relacionan ángulos entre paralelas y rectas secantes.

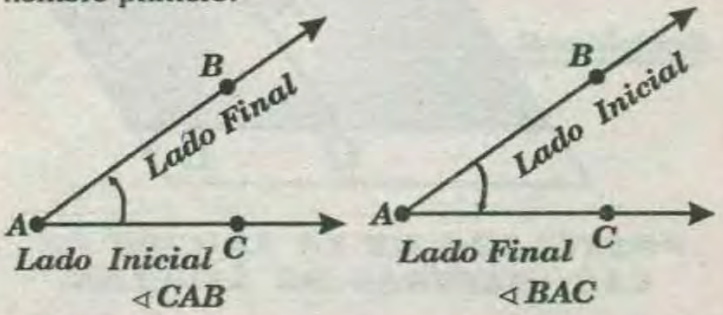
INTRODUCCIÓN :

Según los hemos definido en capítulos anteriores, los ángulos son simplemente conjuntos de puntos. Por ejemplo:



Es indiferente el orden en que se nombran los lados de un ángulo.

Ésta es la forma más sencilla de la definición de un ángulo. Es la idea que necesitamos para los propósitos de este curso. Más adelante, sin embargo, en el estudio de la ***trigonometría,*** la definición de ángulo aparecerá en una forma diferente. En la trigonometría, importa qué lado del ángulo se nombre primero:

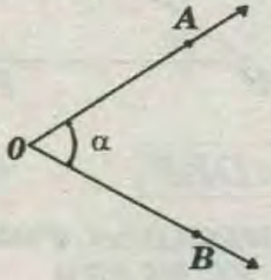


Esto es , en la trigonometría , distinguimos entre el $\sphericalangle CAB$ y el $\sphericalangle BAC$. En el $\sphericalangle CAB$, $\overrightarrow{AC}$ es *el lado inicial* y $\overrightarrow{AB}$ es el *lado terminal.* En el $\sphericalangle BAC$, $\overrightarrow{AB}$ es el lado inicial y $\overrightarrow{AC}$ es el lado terminal. Angulos como éstos se llaman ángulos ***orientados***. Cuando utilizamos ángulos orientados, permitimos los **«ángulos cero»** y los **«ángulos llanos».**

Pero en este curso, los ángulos orientados no se emplearán, porque no se necesitan en la Geometría elemental. Por ejemplo, los ángulos de un triángulo jamás son ángulos cero ni ángulos llanos y no hay modo razonable alguno de decidir qué orientación deben tener. Para asignarles orientación, tendríamos que proceder al azar, y estas orientaciones de los ángulos no tendrían utilidad para nosotros, porque no estarían relacionadas con los problemas que tratásemos.

ÁNGULO

Un ángulo es la reunión de dos rayos mediante su origen. Su medida está dado por la abertura entre sus lados y se expresa en grados sexagesimales.



Elementos :

* Vértices : O
* Lados : $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$
* Medida : α

Notación :

* *Ángulo* $A\hat{O}B$
  - $\sphericalangle AOB$; $\sphericalangle BOA$
  - $A\hat{O}B$, $B\hat{O}A$
  - $\sphericalangle O$; $\hat{O}$

* Medida del ángulo $A\hat{O}B = m\sphericalangle AOB = \alpha$

El sistema a utilizar en la medición del ángulo es el Sistema Sexagesimal.

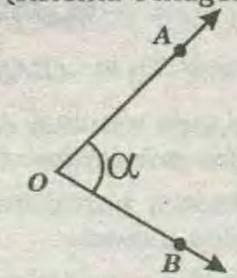
MEDIDA DE UN ÁNGULO

Con el fin de conocer mejor a esta figura geométrica (sus propiedades, sus relaciones), pretendemos tener alguna manera de medirla.

El instrumento conocido como transportador nos permite medir los ángulos y construir ángulos de medidas prefijadas.

Usualmente llamamos medida de un ángulo a la medida de la amplitud de un ángulo(Se llama amplitud de un ángulo a la separación existente entre sus lados).

A la amplitud de un ángulo se le asigna un número real entre $0°$ y $180°$ al que llamaremos medida del ángulo (sistema sexagesimal).



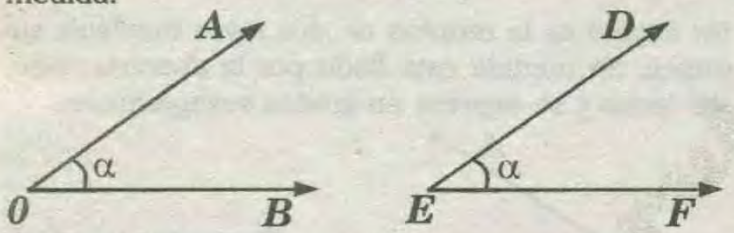
$$0° < \alpha < 180°$$

Si la medida del $\sphericalangle AOB$ es denotada por $m\sphericalangle AOB$, entonces $m\sphericalangle AOB = \alpha$

α : Es un número que indica cuántas veces el $\sphericalangle AOB$ contiene al ángulo unitario (ángulo cuya medida es $1°$ y que convencionalmente se mide en su interior).

ÁNGULOS CONGRUENTES

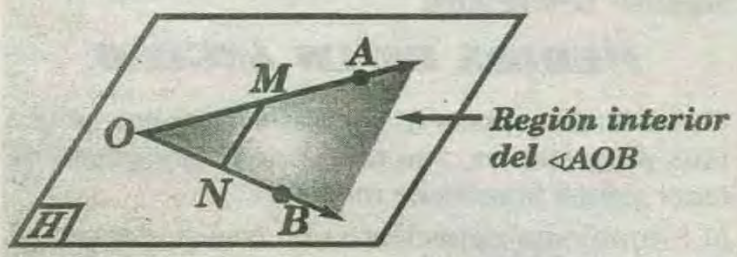
Dos o más ángulo son congruentes si tiene igual medida.



$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle DEF$$

REGIONES DETÉRMINADAS POR UN ÁNGULO EN EL PLANO

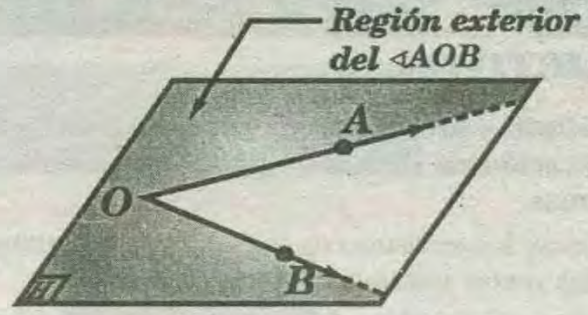
Sea un ángulo $A\hat{O}B$ que está contenido en un plano H, si luego en $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ se ubican los puntos M y N respectivamente $(M \neq O$ y $N \neq O)$; la porción del plano H en la que está contenido el segmento de recta MN, excepto sus extremos , es la región interior del $\sphericalangle AOB$.



$\sphericalangle AOB \subset \square H$

REGIÓN EXTERIOR DE UN ÁNGULO

Es el conjunto de todos los puntos del plano que contienen a un ángulo y que no están en el ángulo ni en su interior.



$\sphericalangle AOB \subset \square H$

A la región exterior de un ángulo se le conoce por cuestiones prácticas como exterior de un ángulo.

NOTA :

El ángulo divide al plano H en tres subconjuntos de puntos:

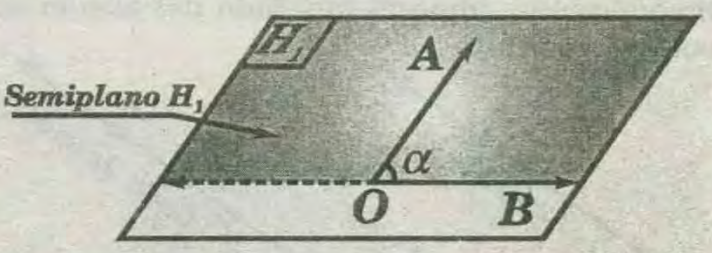
Puntos interiores, puntos exteriores y puntos que pertenecen al ángulo.

POSTULADO DE LA MEDIDA DE UN ÁNGULO

«A todo ángulo le corresponde un número real comprendido entre $0°$ y $180°$, al que se denomina medida del ángulo».

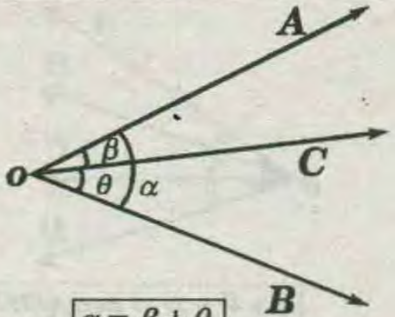
POSTULADO DE LA CONSTRUCCIÓN DE ÁNGULOS

Sea $\overrightarrow{OB}$ un rayo y H_1 uno de los semiplanos determinados por la $\overrightarrow{OB}$ Para cada número real α entre $0°$ y $180°$, hay exactamente un rayo $\overrightarrow{OA}$ con A en H_1, tal que $m\sphericalangle AOB = \alpha$



POSTULADO DE LA ADICIÓN DE LAS MEDIDAS DE ÁNGULOS

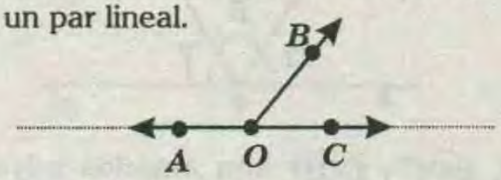
Si C está en el interior del $\sphericalangle AOB$, entonces $m\sphericalangle AOB = m\sphericalangle AOC + m\sphericalangle COB$



$\boxed{\alpha = \beta + \theta}$

PAR LINEAL :

Si $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{OB}$ un *rayo* arbitrario, entonces los ángulos $\sphericalangle AOB$ y $\sphericalangle BOC$ forman un par lineal.

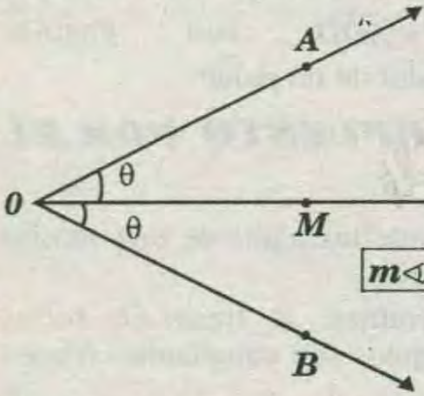


POSTULADO DEL PAR LINEAL (SUPLEMENTO)

Si dos ángulos forman un par lineal, entonces la suma de sus medidas es *180°*. Así en la figura anterior , $m\sphericalangle AOB + m\sphericalangle BOC = 180°$.

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Es el rayo cuyo origen es el vértice de un ángulo y divide a dicho ángulo en medidas iguales.



$\boxed{m\sphericalangle AOM = m\sphericalangle MOB}$

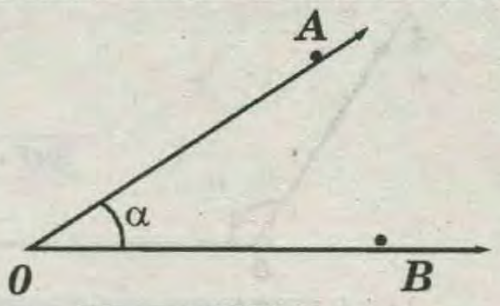
CLASIFICACION DE LOS ÁNGULOS

Lo ángulos se clasifican según su medida , de acuerdo a su posición y según su características.

A) DE ACUERDO A SUS MEDIDAS :

I-1) ÁNGULO AGUDO :

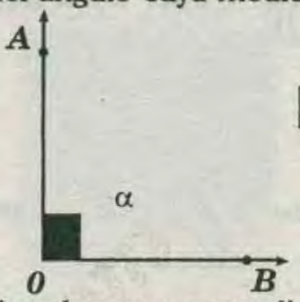
Es aquel ángulo cuya medida es menor que *90°* pero mayor que *0°*



$\boxed{0° < \alpha < 90°}$

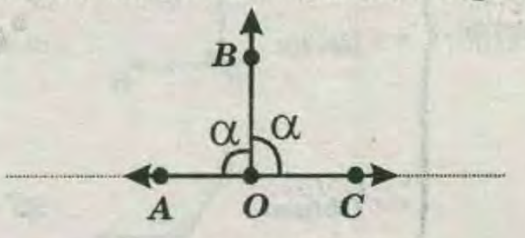
I-2) ÁNGULO RECTO :

Es aquel ángulo cuya medida es igual a *90°*.



$\boxed{\alpha = 90°}$

Si los ángulos en un par lineal son congruentes, entonces cada uno de ellos es llamado ángulo recto.

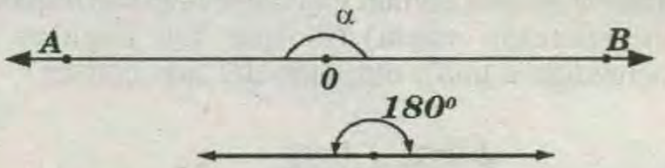


$\alpha + \alpha = 180° \Rightarrow \boxed{\alpha = 90°}$

I-3) ÁNGULO LLANO :

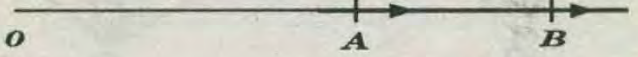
Llamado también ángulo rectilíneo , es aquel ángulo cuyo lado son dos rayos opuestos , es decir una recta. Su medida en:

* ***Sistema Sexagesimal : $\alpha = 180°$***



I-4) ÁNGULO NULO :

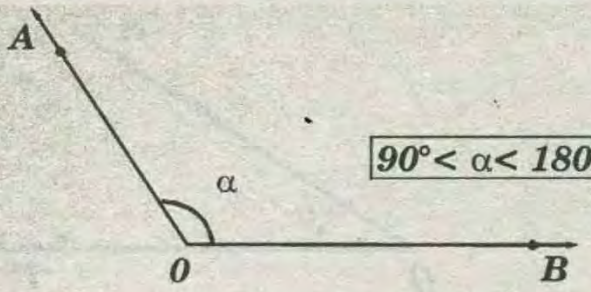
Es aquel ángulo cuya medida es igual a *0°*



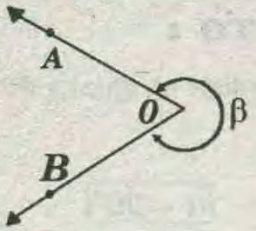
$\boxed{m\widehat{AOB} = 0°}$

II) ÁNGULO OBTUSO :

Es aquel ángulo cuya medida es menor que *180°* pero mayor que *90°*

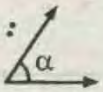


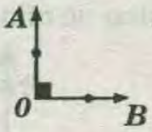
III) ◁NO CONVEXO :

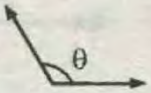


; $180° < \beta < 36°$

◁ CONVEXOS :

* ◁Agudo :  ; $0° < \alpha < 90°$

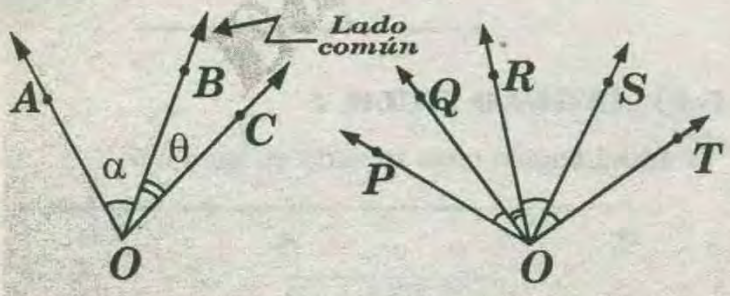
* ◁ Recto:  ; $m\sphericalangle AOB = 90°$

* ◁ Obtuso :  ; $90° < \theta < 180°$

B) SEGÚN LA POSICIÓN DE SUS LADOS :

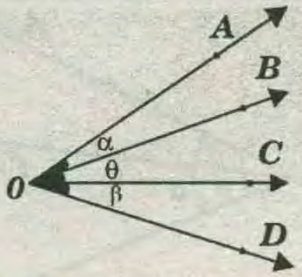
I)ÁNGULOS ADYACENTES :

Dos ángulos son adyacentes cuando tiene el mismo vértice y un lado común y sus interiores son disjuntos (intersección vacía).Tal que los ángulos se encuentran a uno y otro lado del lado común.



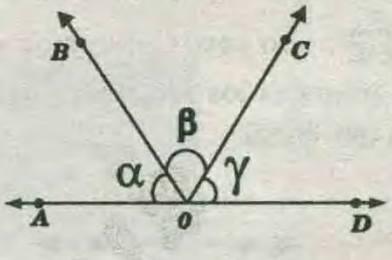
* $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ son ángulos adyacentes , llamados también ángulos consecutivos.

* Dos o más ángulos serán adyacentes cuando cada uno de ellos es adyacente con su inmediato.

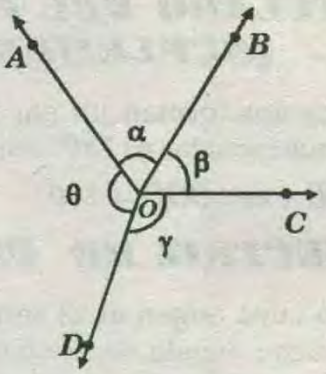


$\alpha + \theta + \beta = m\sphericalangle AOD$

* $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ y $\widehat{COD}$ son ángulos adyacentes.



* $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ y $\widehat{COD}$ son ángulos adyacentes sobre una recta.

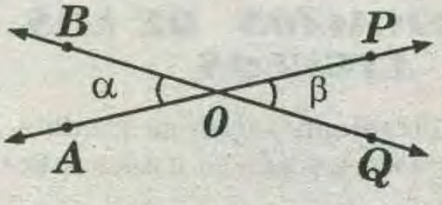


* $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$ y $\widehat{AOD}$ son ángulos adyacentes alrededor de un punto.

II) ÁNGULO OPUESTO POR EL VÉRTICE :

Son dos ángulos donde los lados de uno son los rayos opuestos del otro.

Es decir , se determinan al trazar dos rectas secantes , dichos ángulos son congruentes (tienen la misma medida).

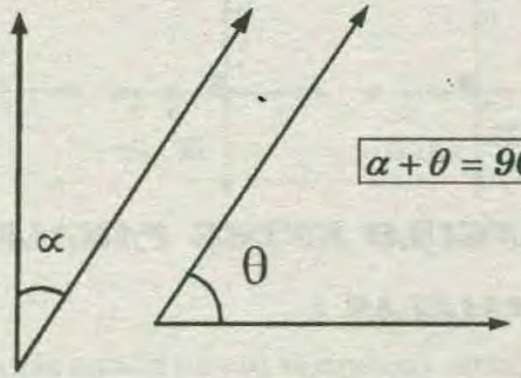


$\alpha = \beta$

C) SEGÚN SUS CARACTERÍSTICAS :

I) ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS :

Son dos ángulos cuyas medidas suman *90°*



$\alpha + \theta = 90°$

Complemento de un ángulo es lo que falta a este ángulo para medir *90°*

COMPLEMENTO DE $\alpha = \theta = 90° - \alpha$

NOTA :

$1° <> 60'$, $1' <> 60''$

$90° <> 89°60' <> 89°59'60''$

EJEMPLO 1:

Hallar el complemento de *36°*.

RESOLUCIÓN:

$90° - 36° = 54°$

EJEMPLO 2 :

Hallar el complemento del suplemento de *100°*.

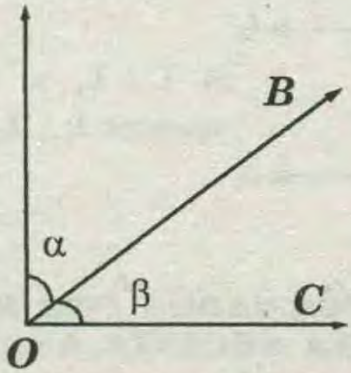
RESOLUCIÓN:

$90° - (180° - 100°) = 90° - 80° = 10°$

II) ÁNGULOS ADYACENTES COMPLEMENTARIOS :

Son dos ángulos adyacentes , cuyas medidas suman *90°*.

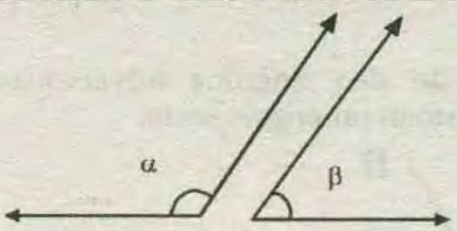
* $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ son ángulos adyacentes complementarios.



$\alpha + \beta = 90°$

III) ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS :

Son dos ángulos cuyas medidas suman *180°*



$\alpha + \beta = 180°$

Cada uno de ellos es el suplemento del otro.

Suplemento de $\alpha = \beta = 180° - \alpha$

Suplemento de $\beta = \alpha = 180° - \beta$

Suplemento de la medida de un ángulo es lo que le falta para medir *180°*

SUPLEMENTO DE $\alpha = 180° - \alpha = \beta$

NOTA :

$180° <> 179°60' < > 179° 59'60''$

EJEMPLO 1:

Hallar el suplemento de *48°*

RESOLUCIÓN:

$180° - 48° = 132°$

EJEMPLO 2 :

Hallar el suplemento del complemento de *40°*

RESOLUCIÓN:

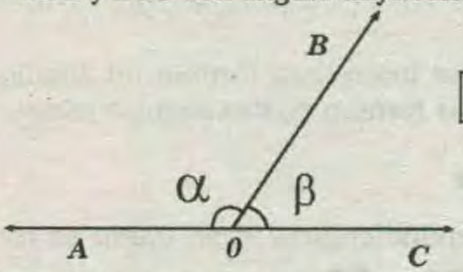
$180° - (90° - 40°)$

$= 180° - 50° = 130°$

IV) ÁNGULOS ADYACENTES SUPLEMENTARIOS (Ó PAR LÍNEAL)

Son dos ángulos adyacentes cuyas medidas suman *180°*

* *AOB* y *BOC* son ángulo adyacentes suplementarios.



$\alpha + \beta = 180°$

OBSERVACIONES :

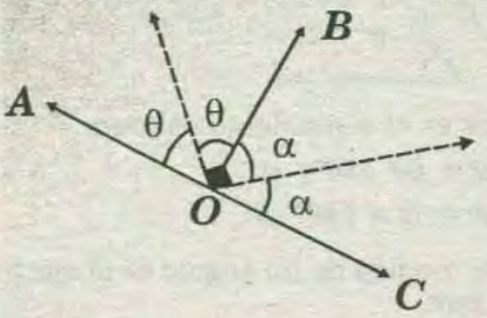
Cuando la palabra suplemento se repite un número par de veces , el resultado es el mismo valor del ángulo y si el número es impar , el resultado es su suplemento.

$\underbrace{Sup\ del\ Sup.....Sup\ de\ \alpha}_{\text{"Número par de veces"}} = \alpha$

$\underbrace{Sup\ del\ Sup\ .....\ Sup\ de\ \alpha}_{\text{"Número Impar de veces"}} = 180° - \alpha$

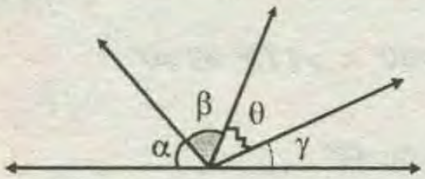
TEOREMA :

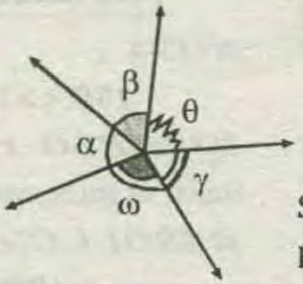
Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios forman un ángulo recto.



$\alpha + \theta = 90°$

OBSERVACIONES :





$\alpha + \beta + \theta + \gamma = 180°$

$\alpha + \beta + \theta + \gamma + \omega = 360°$

POSICIONES DE LAS RECTAS

RECTA VERTICAL : Que es perpendicular a otra recta o plano horizontal.

RECTA HORIZONTAL : Perpendicular a la vertical.

RECTA INCLINADA : No es vertical, ni horizontal.

PERPENDICULARIDAD

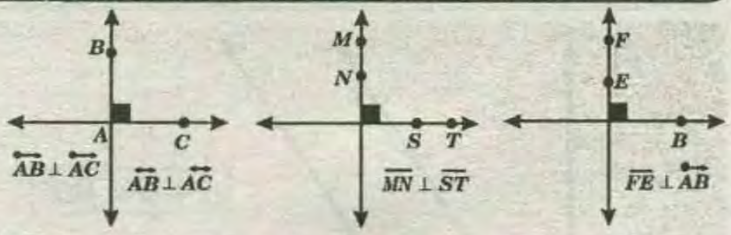
TEOREMA :

Si dos rectas que se intersecan forman un ángulo recto, entonces ellas forman cuatro ángulos rectos.

DEFINICIÓN :

Dos rayos son perpendiculares si su unión es un ángulo recto. Si: $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ son perpendiculares, escribimos $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$. En este caso también se dice que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ son perpendiculares y escribimos $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$.

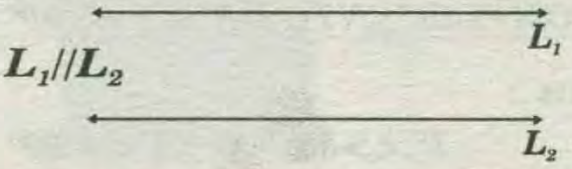
Dos segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{ST}$ son perpendiculares, si las rectas en las que están contenidos son perpendiculares. Análogamente se definen y denotan las perpendicularidad es de un segmento y una recta, un rayo y una recta, un segmento y un rayo.



ÁNGULO ENTRE PARALELAS

PARALELAS :

Dos rectas coplanares (en un mismo plano) que no se intersecan, son llamadas paralelas. Usaremos la notación $L_1 \,//\, L_2$ para indicar que las rectas L_1 y L_2 son paralelas.

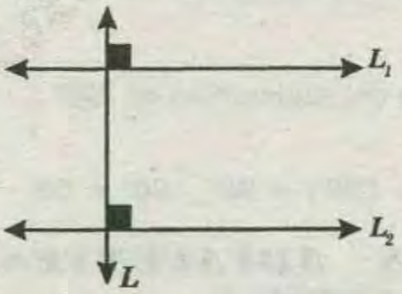


Si: $L_1 \,//\, L_2$ entonces: $L_1 \cap L_2 = \varnothing$.....*vacío*

El símbolo // se lee: «es paralelo con».

TEOREMA :

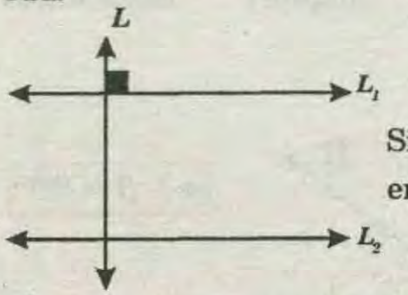
Si dos rectas son perpendiculares a una tercera, entonces las dos rectas son paralelas.



Si $L_1 \perp L$ y $L_2 \perp L$ entonces $L_1 \,//\, L_2$

TEOREMA:

Si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas, entonces también es perpendicular a la otra.

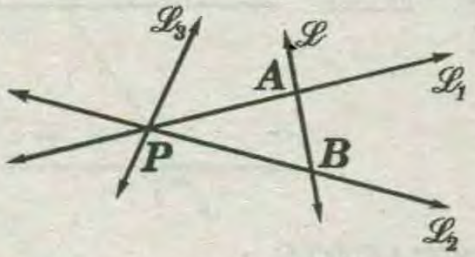


Si $L \perp L_1$ y $L_1 \,//\, L_2$ entonces $L \perp L_2$

ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS Y UNA SECANTE A ELLAS

Dadas las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, se dice que la recta , $\mathscr{L}$ es una secante a ellas cuando la recta , $\mathscr{L}$ tiene un

punto en común con cada una de las rectas.

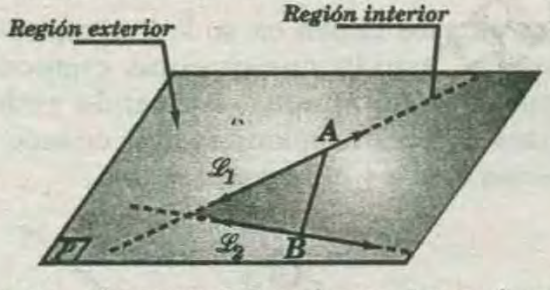


En la figura , las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son intersecadas por la recta $\mathscr{L}$ en los puntos A y B y por la recta $\mathscr{L}_3$ en el punto P.

Cuando una recta es secante a dos rectas cualesquiera , dicha recta forma con cada una de ellas cuatro ángulos .

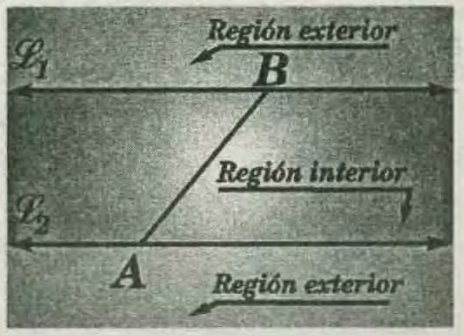
REGIONES DETERMINADAS POR DOS RECTAS EN UN PLANO

Se tienen las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ contenidas en un plano P, tal que $A \in \overrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $B \in \overrightarrow{\mathscr{L}_2}$ la porción del plano P que contiene al segmento AB, excepto los extremos, se le denomina región interior entre las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, con respecto al $\overline{AB}$, mientras que a la porción del plano restante , excepto las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ se le denominará región exterior.



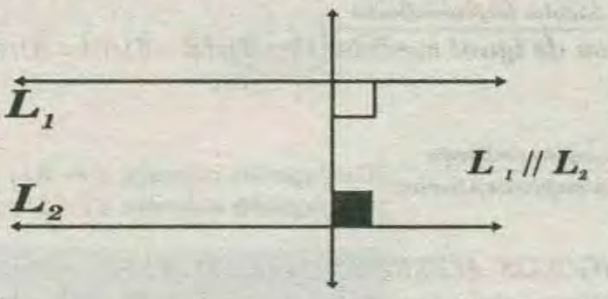
En la figura se , observan las regiones determinadas por dos rectas secantes con respecto al segmento AB.

Si las rectas fuesen paralelas , se obtendrían las mismas regiones con respecto a un segmento dado. En la figura , se muestran dichas regiones.

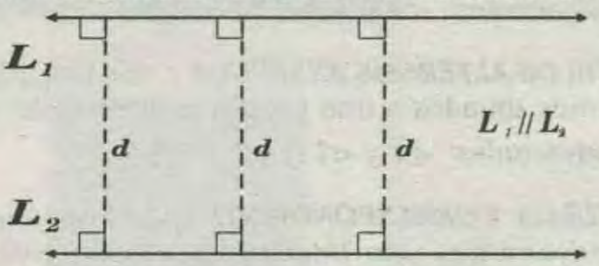


PROPIEDADES :

* Dos rectas perpendiculares a una recta son paralelas entre sí , Suponiendo que está en el mismo plano.



* Dos rectas paralelas conservan la misma distancia.



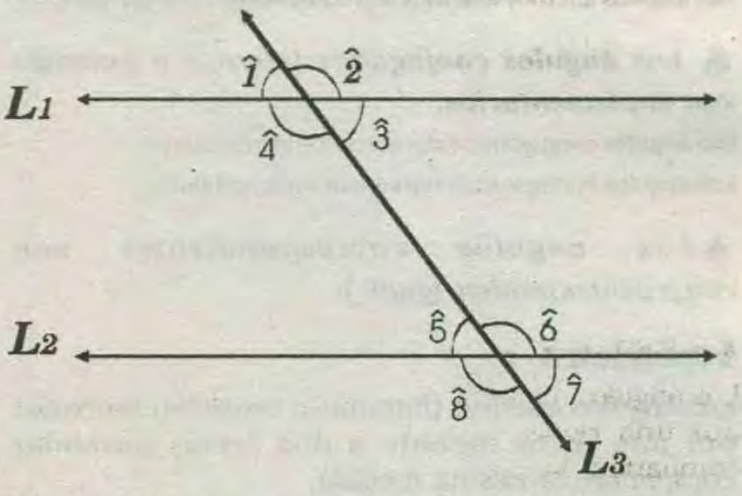
POSTULADO DE EUCLIDES

Por un punto exterior a una recta; no se puede trazar mas que una paralela a esta recta.

Todas las geometrías que no admiten el postulado de Euclides se conocen con el nombre de Geometrías no Euclidianas.

ÁNGULO FORMADO POR DOS RECTAS AL SER CORTADOS POR UNA SECANTE

Si la recla L_3 es secante de las rectas L_1 y L_2 en cada punto de intersección se forman cuatro ángulos, como se observa en la figura:



$\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$; $\overrightarrow{L_3}$ es secante con $\overrightarrow{L_1}$ y $\overrightarrow{L_2}$

I) ÁNGULOS INTERNOS : $\hat{3};\hat{4};\hat{5};\hat{6}$

II) ÁNGULOS EXTERNOS : $\hat{1};\hat{2};\hat{7};\hat{8}$

III) Ángulos alternos son igual medida
- *Alternos internos* : $(\hat{4}=\hat{6})$; $(\hat{3}=\hat{5})$
- *Alternos externos* : $(\hat{1}=\hat{7})$; $(\hat{2}=\hat{8})$

VI)

$$\overbrace{\text{Ángulos correspondientes son de igual medida}}\left\{(\hat{1}=\hat{5});(\hat{2}=\hat{6});(\hat{4}=\hat{8});(\hat{3}=\hat{7})\right.$$

V)

$$\overbrace{\text{Ángulos conjugados son suplementarios}}\left\{\begin{array}{l}\text{Conjugados internos :}(\hat{4}=\hat{5})\ ;\ (\hat{3}=\hat{6})\\ \text{Conjugados externos :}(\hat{1}=\hat{8})\ ;\ (\hat{2}=\hat{7})\end{array}\right.$$

ÁNGULOS ALTERNOS INTERNOS : Son dos ángulos internos situados a uno y a otro lado de la secante, no adyacentes: $\sphericalangle 3$ y $\sphericalangle 5$; $\sphericalangle 4$ y $\sphericalangle 6$

ÁNGULOS ALTERNOS EXTERNOS : Son dos ,ángulos externos situados a uno ya otro lado de la secante, no adyacentes: $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 7$; $\sphericalangle 2$ y $\sphericalangle 8$

ÁNGULOS CORRESPONDIENTES : Son dos ángulos no adyacentes uno interno y el otro externo, situados a un mismo lado de la secante:

$\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 5$; $\sphericalangle 2$ y $\sphericalangle 6$; $\sphericalangle 3$ y $\sphericalangle 7$; $\sphericalangle 4$ y $\sphericalangle 8$

ÁNGULOS CONJUGADOS INTERNOS : Son dos ángulos interno situados a un mismo lado de la secante: $\sphericalangle 3$ y $\sphericalangle 6$; $\sphericalangle 4$ y $\sphericalangle 5$

ÁNGULOS CONJUGADOS EXTERNOS : Son dos ángulos externos situados a un mismo lado de la secante: $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 8$; $\sphericalangle 2$ y $\sphericalangle 7$

♠ ***Los ángulos alternos internos o externos son congruentes (miden igual).***

Los ángulos alternos internos son congruentes (miden igual).

Los ángulos alternos externos son congruentes (miden igual) .

♠ ***Los ángulos conjugados internos o externos son suplementarios.***

Los ángulos conjugados externos son suplementarios.

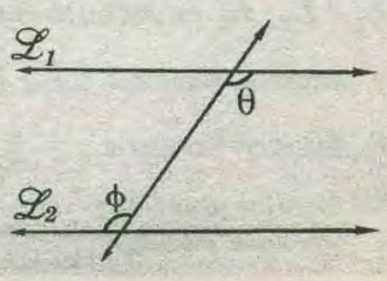
Los ángulos conjugados internos son suplementarios.

♠ ***Los ángulos correspondientes son congruentes(miden igual).***

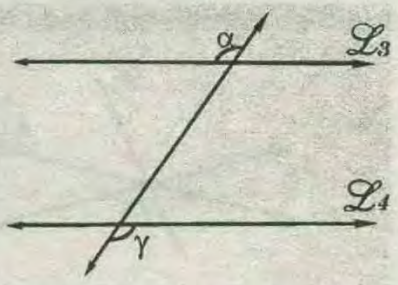
TEOREMA :

Los ángulos alternos (internos o externos) formados por una recta secante a dos rectas paralelas comparten la misma medida,

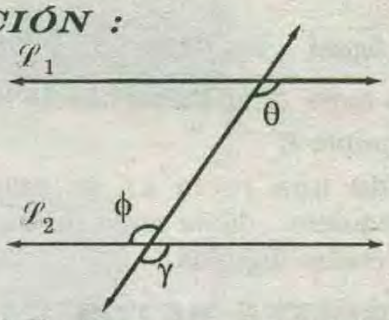
Si $\overrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overrightarrow{\mathscr{L}_2} \Rightarrow \boxed{\theta=\phi}$



Si $\overrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overrightarrow{\mathscr{L}_4} \Rightarrow \boxed{\alpha=\gamma}$



DEMOSTRACIÓN :

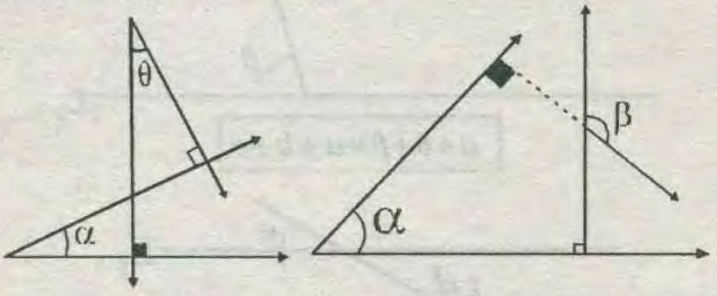


* En la figura $\overrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\phi=\gamma$ son las medidas de dos ángulos opuestos por el vértice,

$$\Rightarrow \phi=\gamma \ \ldots\ldots\ldots\

ÁNGULOS DE LADOS PERPENDICULARES

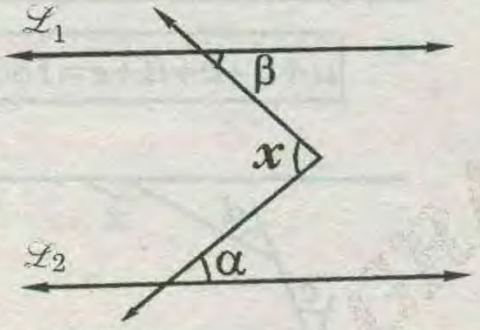
Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente perpendiculares serán congruentes cuando ambos sean agudos o cuando ambos sean obtusos y serán suplementarios cuando uno de ellos sea agudo y el otro obtuso.



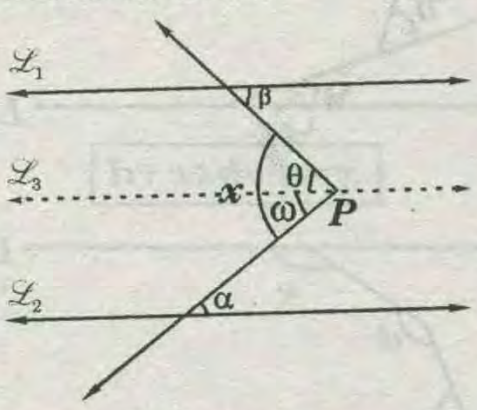
$\boxed{\alpha = \theta}$ $\boxed{\alpha + \beta = 180°}$

PROPIEDADES

I) Si $\mathscr{L}_1 // \mathscr{L}_2 \Rightarrow \boxed{x = \alpha + \beta}$



DEMOSTRACIÓN :



* Por *P* trazamos $\overrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overrightarrow{\mathscr{L}_2}$ se observa que :

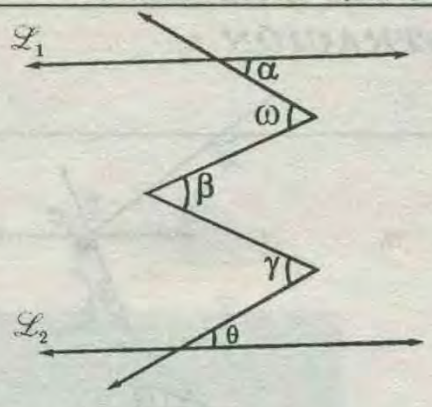
$$x = \theta + \omega$$

* Por el teorema de los ángulos alternos :

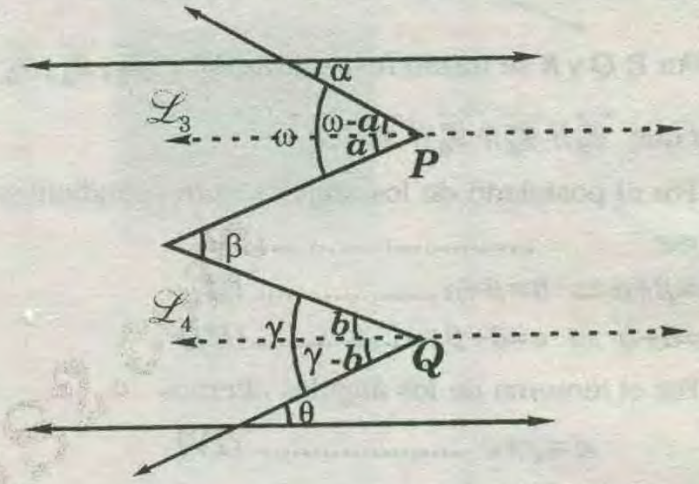
$\boxed{\beta = \theta} \wedge \boxed{\alpha = \omega}$

* Remplazando *(II)* en *(I)* : $x = \alpha + \beta$

II) Si $\overrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overrightarrow{\mathscr{L}_2} \Rightarrow \boxed{\alpha+\beta+\theta = \omega+\gamma}$



DEMOSTRACIÓN :



* Por *P* y *Q* trazamos respectivamente $\overrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overrightarrow{\mathscr{L}_4}$ tal que $\overrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overrightarrow{\mathscr{L}_4} // \overrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overrightarrow{\mathscr{L}_2}$

* Por la propiedad anterior : $\beta = a + b$ .....*(I)*

* Por el teorema respecto a los ángulos alternos :

$$\alpha = \omega - a \text{.....(II)}$$

$$\theta = \gamma - b \text{ .....(III)}$$

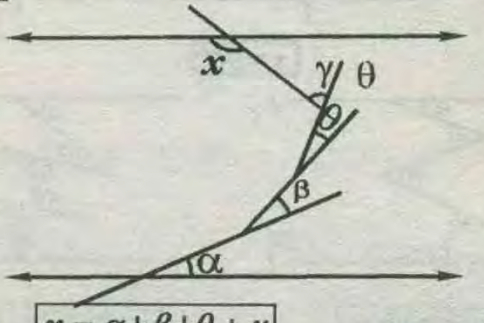
* de *(II)* + *(III)* :

$$\alpha + \theta = \omega + \gamma - (a + b) \text{ ..... (IV)}$$

* de *(I)* en *(IV)* :

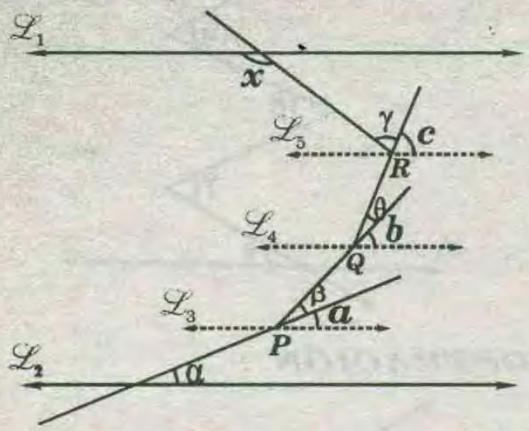
$$\alpha+\theta=\omega+\gamma-\beta \Rightarrow \boxed{\alpha+\beta+\theta=\omega+\gamma}$$

III) $\overrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overrightarrow{\mathscr{L}_2}$



$\boxed{x = \alpha+\beta+\theta+\gamma}$

DEMOSTRACIÓN :



* Por ***P, Q*** y ***R*** se trazan respectivamente $\overrightarrow{\mathscr{L}_3}, \overrightarrow{\mathscr{L}_4}, \overrightarrow{\mathscr{L}_5}$ tal que $\overrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overrightarrow{\mathscr{L}_4} // \overrightarrow{\mathscr{L}_5} // \overrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

* Por el postulado de los ángulos correspondientes

$\alpha=a$ .....*(I)*

$b=\beta+\alpha \Rightarrow b=\beta+\alpha$ .....*(II)*

$c=\theta+b \Rightarrow c=\theta+\beta+\alpha$.....*(III)*

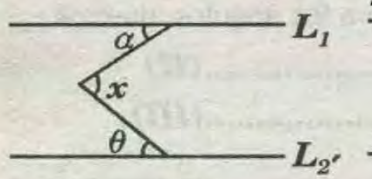
* Por el teorema de los ángulos alternos

$x=\gamma+c$ ..... *(IV)*

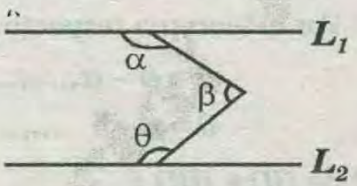
* de *(III)* en *(IV)* : $x=\gamma+\theta+\beta+\alpha$

TEOREMAS AUXILIARES

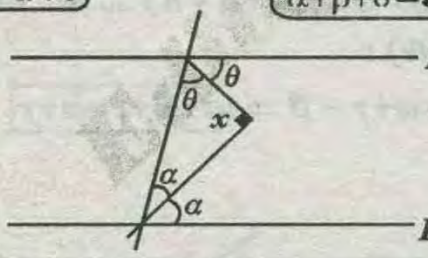
$(L_1 // L_2)$



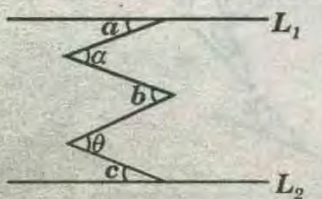
$x=\alpha+\theta$



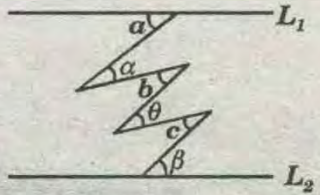
$\alpha+\beta+\theta=360°$



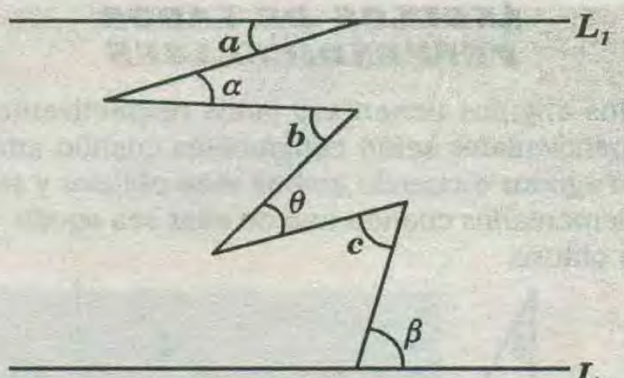
$x=90°$



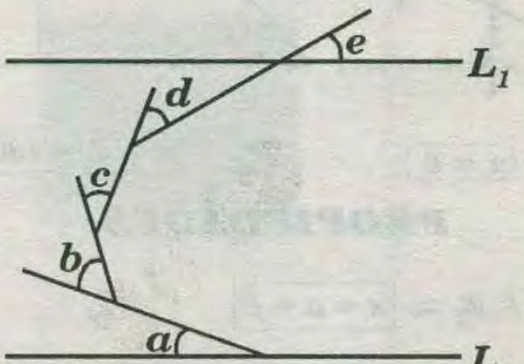
$a+\theta=a+b+c$



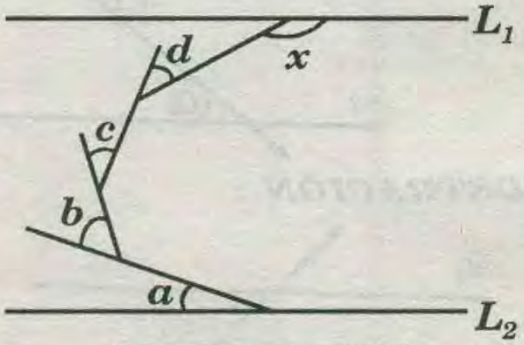
$a+\theta+\beta=a+b+c$



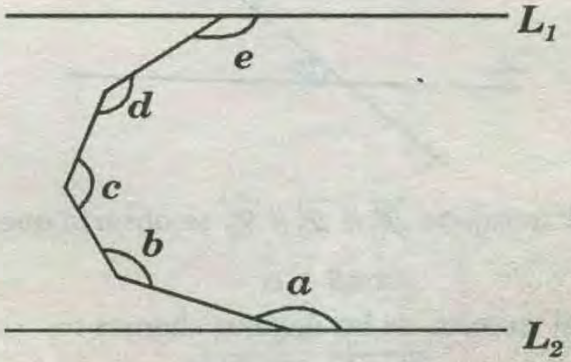
$a+\theta+\beta=a+b+c$



$a+b+c+d+e=180°$

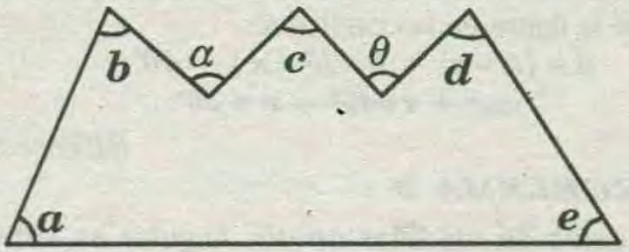


$x=a+b+c+d$

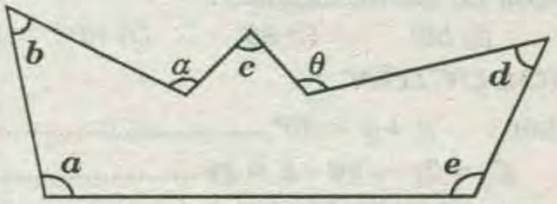


$a+b+c+d+e=180° N$

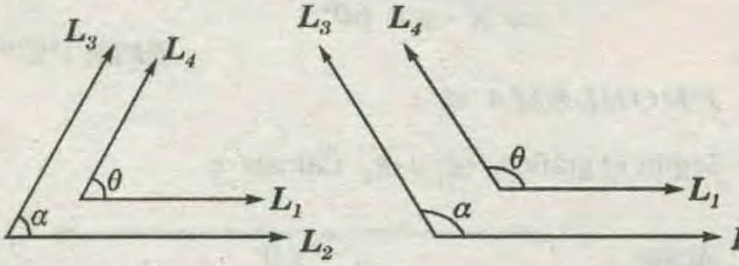
N: número de segmentos.



$$a+b+c+d+e=\alpha+\theta+180°$$



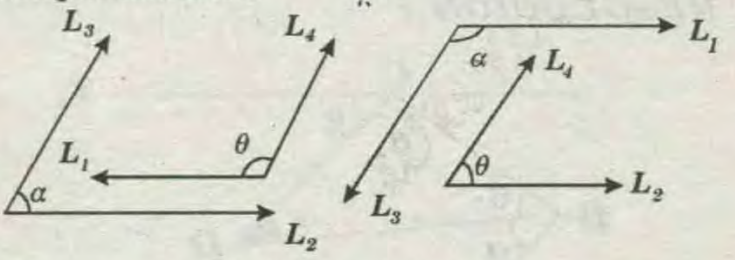
$$a+b+c+d+e=\alpha+\theta+180°$$



Si: $\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2}$ y $\overrightarrow{L_3} \parallel \overrightarrow{L_4}$

entonces $\alpha = \theta$

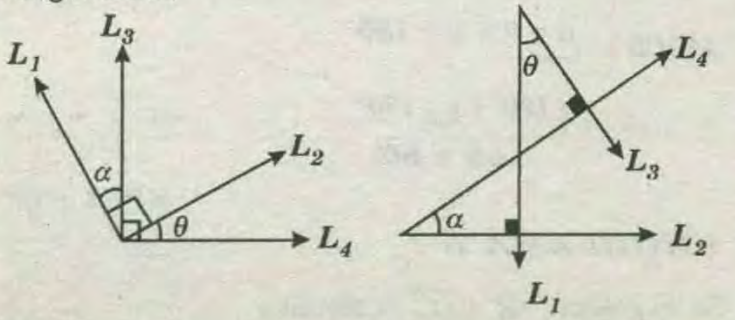
• Si dos ángulos, uno agudo y el otro obtuso, tienen sus lados paralelos, entonces son complementarios:

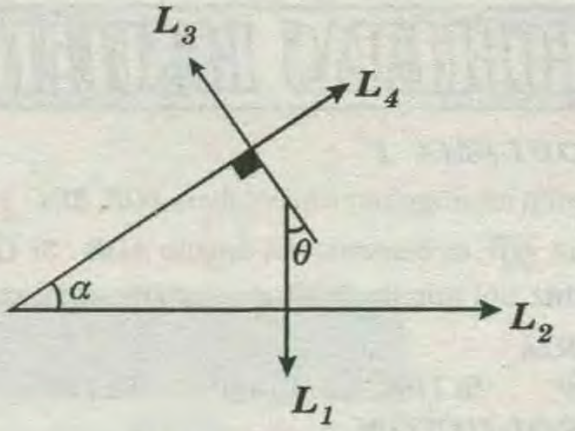


Si: $\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2}$ y $\overrightarrow{L_3} \parallel \overrightarrow{L_4}$

entonces $\alpha + \theta = 180°$

• Si dos ángulos, ambos agudos o ambos obtusos, tienen sus lados perpendiculares, entonces son congruentes.

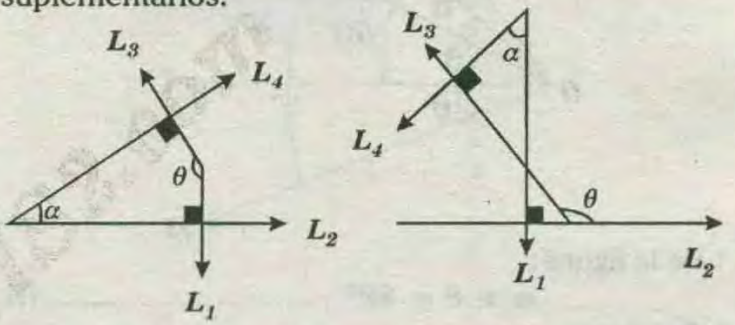




Si: $\overrightarrow{L_1} \perp \overrightarrow{L_2}$ y $\overrightarrow{L_3} \perp \overrightarrow{L_4}$

entonces $\alpha = \theta$

• Si dos ángulos, uno agudo y el otro obtuso, tienen sus lados perpendiculares, entonces son suplementarios.

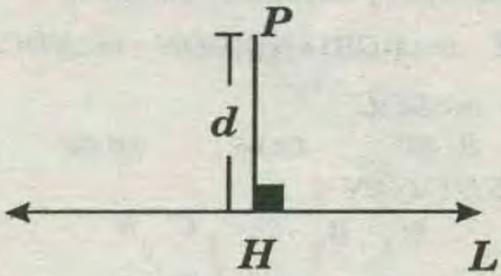


Si: $\overrightarrow{L_1} \perp \overrightarrow{L_2}$ y $\overrightarrow{L_3} \perp \overrightarrow{L_4}$

entonces $\alpha + \theta = 180°$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

La distancia de un punto a una recta, es la longitud del segmento perpendicular a dicha recta, trazado desde dicho punto .



Sea $\overline{PH} \perp \overrightarrow{L}$ $(H \in \overrightarrow{L})$; $PH = d$

$\Rightarrow$ d : distancia de P a $\overrightarrow{L}$

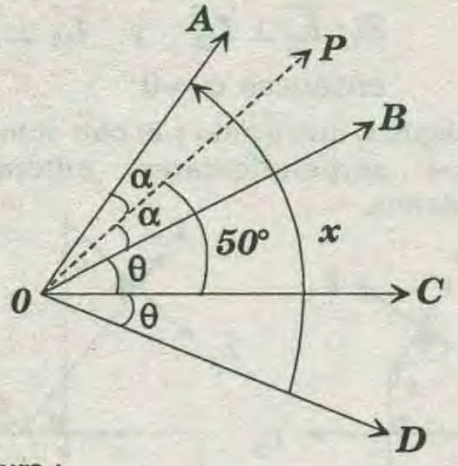
PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Se tienen los ángulos consecutivos *AOB*, *BOC* y *COD* tal que $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz del ángulo *AOB* . Si $\overrightarrow{OC}$ es bisectriz del ángulo *BOD* y $m\sphericalangle COP=50°$, calcule $m\sphericalangle DOA$.

A) 100° B) 110° C) 120° D) 130° E) 80°

RESOLUCIÓN :



* De la figura :

$$\alpha + \theta = 50° \quad \text{..... (I)}$$

* También:

$$x = 2(\alpha + \theta) \quad \text{..... (II)}$$

* *(I)* en *(II)*: $x = 100°$

RPTA : "A"

PROBLEMA 2 :

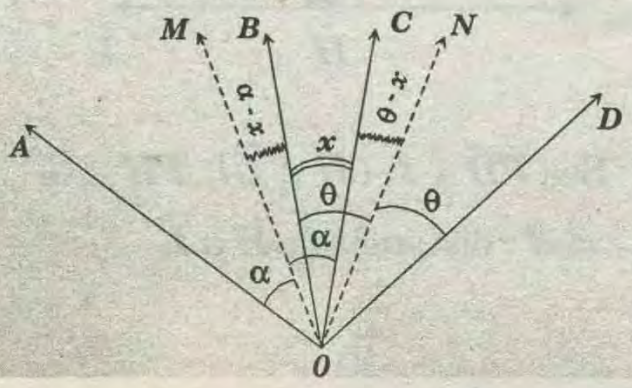
Se tienen los ángulos consecutivos *AOB*, *BOC* y *COD*. Si $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$ son bisectrices de los ángulos *AOC* y *BOD* respectivamente ($\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$ en la región interior de los ángulos *AOB* y *COD* respectivamente) y además se cumple :

$(m\sphericalangle AOM - m\sphericalangle MOB)+(m\sphericalangle DON - m\sphericalangle NOC)=40°$,

calcule la $m\sphericalangle BOC$.

A) 30° B) 50° C) 25 D) 40° E) 20°

RESOLUCIÓN :



* De la figura en la condición :

$$\alpha - (\alpha - x) + \theta - (\theta - x) = 40°$$

$$\Rightarrow x + x = 40° \rightarrow x = 20°$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 3 :

La suma de medidas de dos ángulos es *80°* y el complemento de la medida del primer es el doble de la medida del segundo . Calcule la diferencia de la medida de dichos ángulos .

A) 40° B) 50° C) 60° D) 70° E) 80°

RESOLUCIÓN :

* Por dato : $x + y = 80°$ ..... *(I)*

$C_x = 2y \rightarrow 90 - x = 2y$ ..... *(II)*

* Sumando *(I)* y *(II)*:

$$y = 10° \Rightarrow x = 70°$$

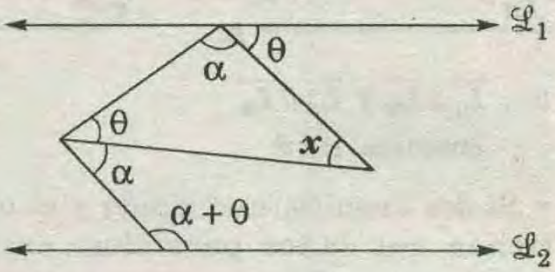
$$\Rightarrow x - y = 60°$$

RPTA :"C"

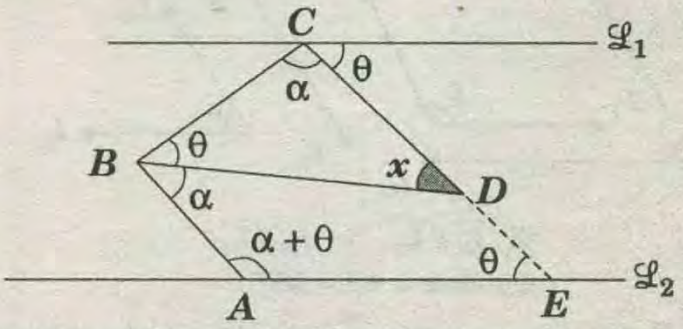
PROBLEMA 4 :

Según el gráfico, $\overrightarrow{\mathcal{L}_1} // \overrightarrow{\mathcal{L}_2}$ Calcule x

A) 58°
B) 70°
C) 60°
D) 50°
E) 75°



RESOLUCIÓN :



* En el cuadrilátero *ABCE* :

$$3(\alpha + \theta) = 360° \rightarrow \alpha + \theta = 120°$$

$\Delta ABCD$: $\underbrace{\alpha+\theta}$ $+ x = 180°$

$$\Rightarrow 120° + x = 180°$$

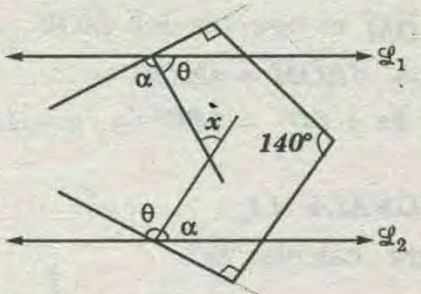
$$\Rightarrow x = 60°$$

RPTA :"C"

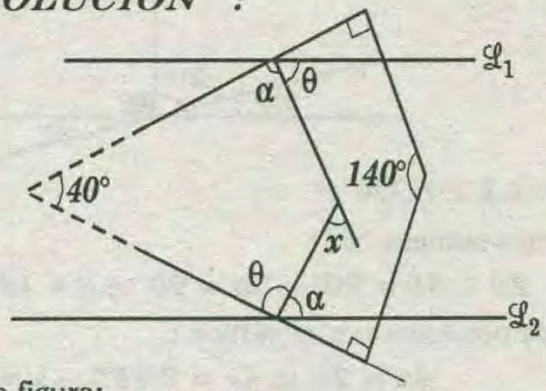
PROBLEMA 5 :

En el gráfico, $\overrightarrow{\mathcal{L}_1} // \overrightarrow{\mathcal{L}_2}$. Calcule x

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



RESOLUCIÓN :



* De la figura:

$$\alpha + \theta = 180° - x \quad .....(I)$$

* También:

$$40° + \alpha + \theta + 180° - x = 360° \quad .....(II)$$

* *(I)* en *(II)*: $2(180° - x) = 320°$

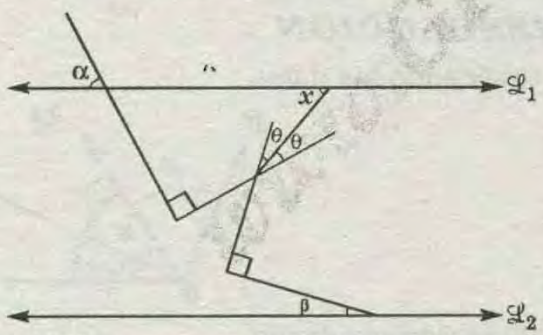
$$\Rightarrow 180° - x = 160° \Rightarrow x = 20°$$

RPTA : "E"

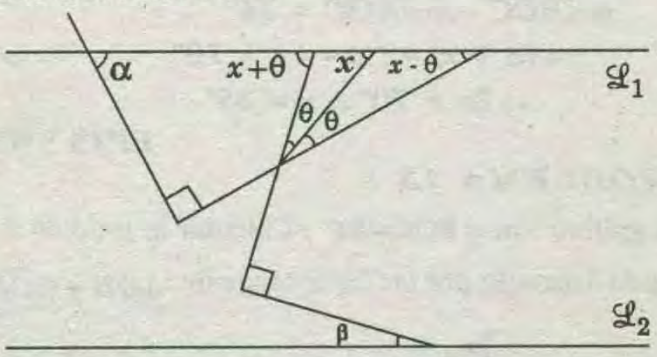
PROBLEMA 6 :

En el gráfico $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ y $\alpha + \beta = 120°$. Calcule x.

A) 15°
B) 20°
C) 25°
D) 30°
E) 45°



RESOLUCIÓN :



* Dato :

$$\alpha + \beta = 120° \quad .....(I)$$

* De la figura:

$$x + \theta + \beta = 90° \quad .....(II)$$

$$\alpha + x - \theta = 90° \quad .....(III)$$

* Sumando *(II)* y *(III)*:

$$2x + \alpha + \beta = 180° \quad .....(IV)$$

* *(I)* en *(IV)*: $2x + 120° = 180°$

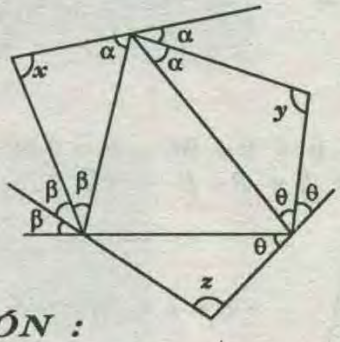
$$\Rightarrow 2x = 60° \Rightarrow x = 30°$$

RPTA : "D"

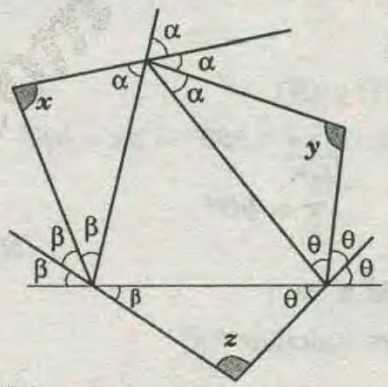
PROBLEMA 7 :

Según el gráfico , calcule $x+y+z$.

A) 300°
B) 240°
C) 380°
D) 320°
E) 450°



RESOLUCIÓN :



* De la figura :

$$3(\alpha + \beta + \theta) = 360°$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \theta = 120° \quad ..... (I)$$

* También :

$$x = 180° - (\alpha + \beta) \quad .....(II)$$

$$y = 180° - (\alpha + \theta) \quad .....(III)$$

$$z = 180° - (\beta + \theta) \quad .....(IV)$$

* Sumando *(II)* ; *(III)* y *(IV)*:

$$x + y + z = 540° - 2(\alpha + \beta + \theta) \quad ..... (V)$$

* *(I)* en *(V)*:

$$x + y + z = 540° - 2(120°)$$

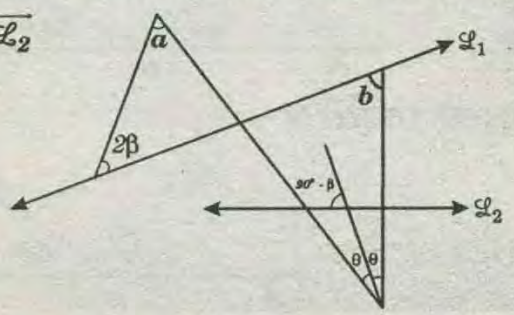
$$\Rightarrow x + y + z = 300°$$

RPTA :"A"

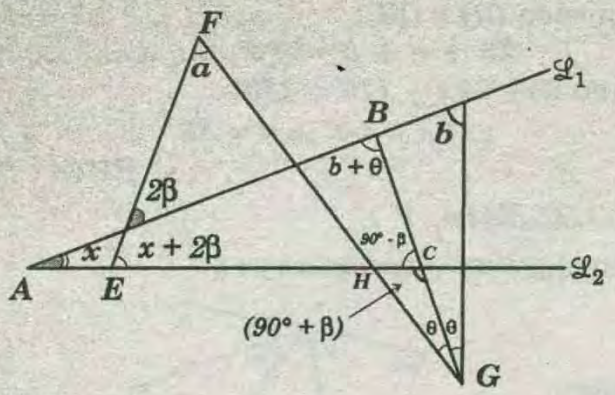
PROBLEMA 8 :

En el gráfico $a+b=80°$. Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$

A) 30°
B) 40°
C) 50°
D) 60°
E) 55°

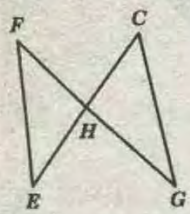


RESOLUCIÓN:



Δ ABC :

$$x + b + \theta + 90 - \beta = 180°$$
$$x + \beta + \theta - \beta = 90° \ldots\ldots\ldots (I)$$



$: a + x + 2\beta = 90° + \beta + \theta \ldots. (II)$

* Sumando *(I)* y *(II)*:

$$2x + \underbrace{a+b}_{80°} = 180° \rightarrow 2x = 100°$$
$$\Rightarrow x = 50°$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 9 :

Según la figura calcular "ϕ"

A)30°
B)20
C)15°
D)12°
E)25°

RESOLUCIÓN :

* Como se trata de un ángulo de una vuelta , luego :

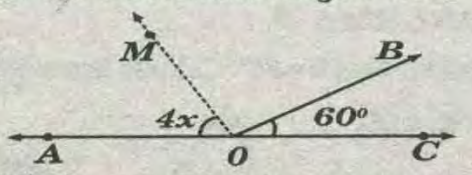
$$4\phi + 3\phi + 2\phi + 90° = 360°$$
$$\rightarrow 9\phi = 270° \Rightarrow \phi = 30°$$

RPTA : "A"

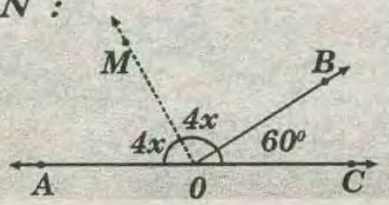
PROBLEMA 10 :

Calcular "*x*", si *OM* bisectriz del ángulo *AOB*.

A)10°
B)15°
C)20°
D)12°



RESOLUCIÓN :



* Como $\overline{OM}$ es bisectriz del $\sphericalangle AOB$

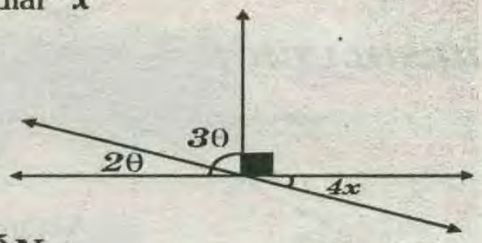
$$\rightarrow \sphericalangle AOM = \sphericalangle MOB$$
$$\rightarrow 4x + 4x + 60° = 180° \rightarrow x = 15°$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 11 :

En la figura , calcular "*x*"

A)8°
B)9°
C)18°
D)12°
E)27°



RESOLUCIÓN :

* Hallamos primero "θ":

$$2\theta + 3\theta = 90° \Rightarrow 5\theta = 90° \Rightarrow \theta = 18°$$

* Por $\sphericalangle$*s* opuestos por el vértice :

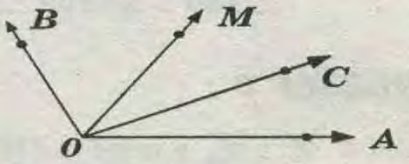
$$4x = 2\theta \Rightarrow 4x = 2(18°) \Rightarrow x = 9°$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 12 :

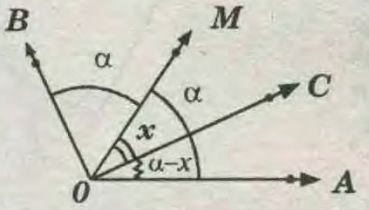
Hallar "$m \sphericalangle MOC$";Si: $m \sphericalangle BOC - m \sphericalangle AOC = 70°$, además *OM* es bisectriz del ángulo *AOB*.

A) 20°
B)25°
C)35°
D)15°
E)45°



RESOLUCIÓN :

* Graficando los datos :



* Operando condición :

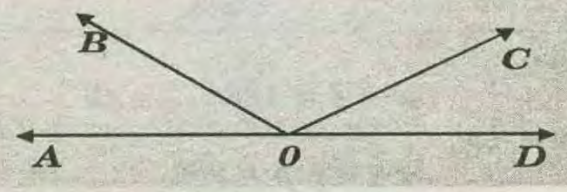
$$m\sphericalangle BOC - m\sphericalangle AOC = 70°$$
$$\rightarrow (\alpha + x) - (\alpha - x) = 70°$$
$$\rightarrow 2x = 70° \Rightarrow x = 35°$$

RPTA : "C"

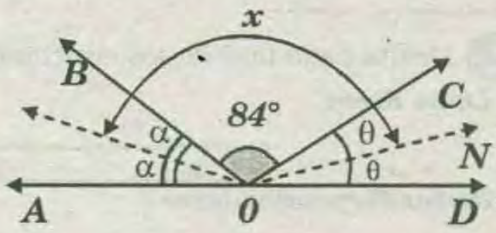
PROBLEMA 13 :

Del gráfico : $m \sphericalangle BOC = 84°$. Calcular la medida del ángulo formado por las bisectrices de $A\hat{O}B$ y $C\hat{O}D$

A)46°
B)112°
C)124°
D)132°
E)140°



RESOLUCIÓN :



* Del gráfico :

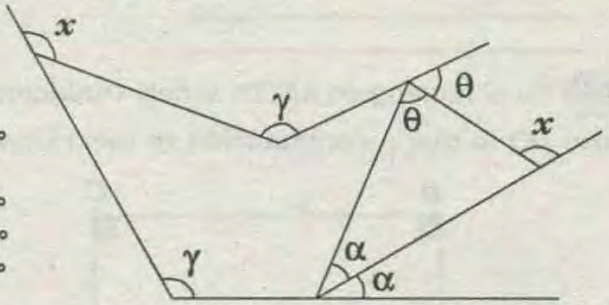
$$2\alpha + 84^\circ + 2\theta = 180^\circ$$
$$\Rightarrow 2\alpha + 2\theta = 96^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha + \theta = 48^\circ$$

* Luego : $x = 84^\circ + 48^\circ = 132^\circ$

RPTA :"D"

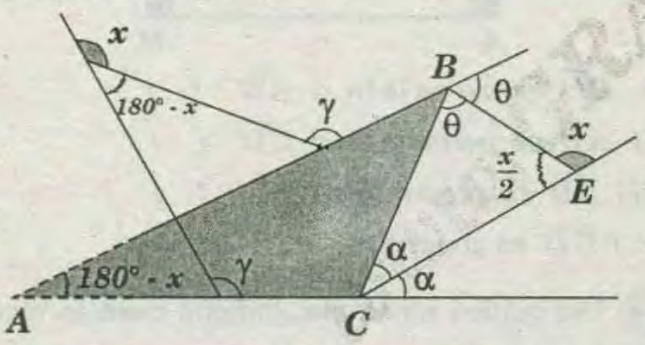
PROBLEMA 14 :

Del gráfico, calcule x .



A) 100°
B) 90°
C) 110°
D) 120°
E) 135°

RESOLUCIÓN :



ΔABC ; por propiedad :

$$m \sphericalangle BEC = 90^\circ - \frac{(180^\circ - x)}{2}$$

$$\Rightarrow m \sphericalangle BEC = 90^\circ - 90^\circ + \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow m \sphericalangle BEC = \frac{x}{2}$$

* Luego : $\frac{x}{2} + x = 180^\circ$

$$\Rightarrow 3x = 3 \times 120^\circ \Rightarrow x = 120^\circ$$

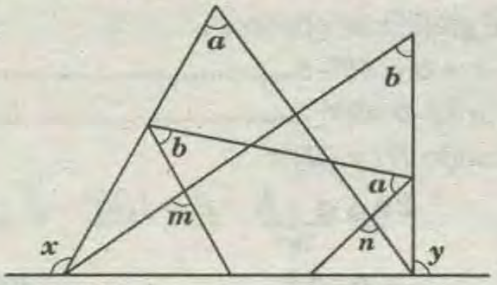
RPTA :"D"

PROBLEMA 15 :

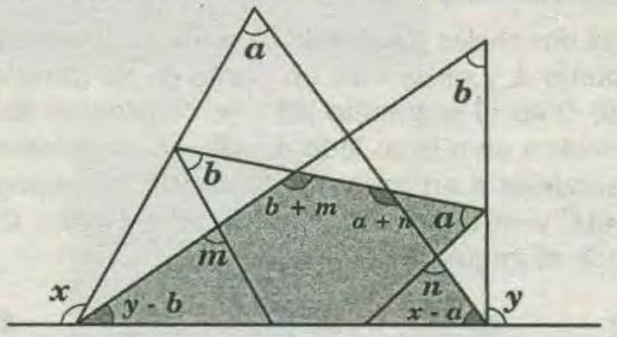
Según el gráfico , $x+y=220^\circ$.

Calcule $n+m$.

A) 140°
B) 160°
C) 120°
D) 180°
E) 150°



RESOLUCIÓN :



* En el cuadrilátero sombreado :

$$y - b + b + m + a + n + x - a = 360$$

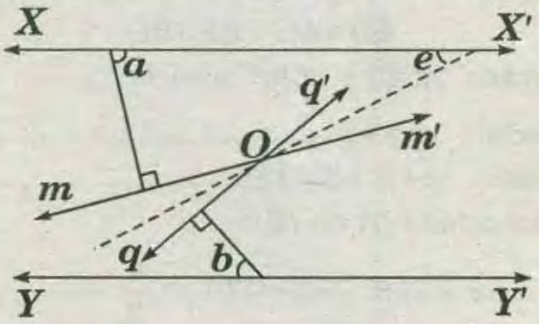
$$m + n + \underbrace{x + y}_{220^\circ} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow m + n = 140^\circ$$

RPTA : "A"

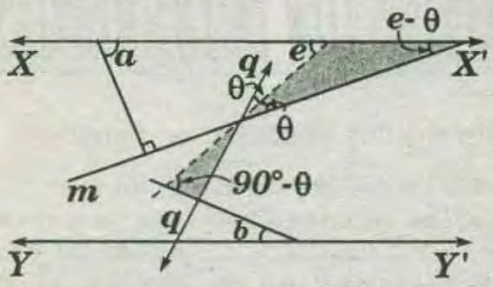
PROBLEMA 16 :

En la figura mostrada las rectas XX' e YY' son paralelas. Si la suma de los ángulos a y b es de 76°, halle la medida del ángulo e formado por xx' con la bisectriz del ángulo que determinan las rectas mm y qp.



A)28° B)42° C)36° D)52° E)14°

RESOLUCIÓN :



* Piden : e

Dato $a+b=76^\circ$

* En el gráfico se observa :

$e + b = 90° - \theta$ .....(I)

$a + e - \theta = 90°$ .....(II)

* Sumando (I) y (II) :

$$2e + \underbrace{a + b}_{76°} - \emptyset = 180° - \emptyset$$

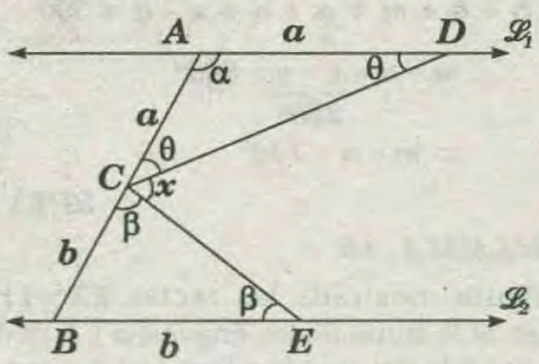
$\rightarrow e = 52$ RPTA :"D"

PROBLEMA 17 :

Dadas dos rectas paralelas , se toma en una de ellas un punto **A** y en la otra un punto **B**. Se toma otro punto **C** en el segmento **AB** ; se consideran en las paralelas a un mismo lado de **AB** ; se consideran en las paralelas a un mismo lado de **AB**, un segmento **AD=AC** y otro **BE=BC**. Siendo **a** el ángulo **CAD**, calcule el ángulo **DCE**.

A) $\frac{a}{2}$ B) $\frac{a}{3}$ C) $\frac{a}{4}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{\pi}{3}$

RESOLUCIÓN :



* Datos $\overrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $m\angle CAD = \alpha$

AD=AC y **BE=BC**

* Entonces : ΔCAD y ΔCBE isósceles

* Propiedad : $x = \beta + \theta$ .....(I)

* Además : $x + \beta + \theta = 180°$.....(II)

* Reemplazando (I) en (II) :

$$x + x = 180° \rightarrow x = 90° \diamond \frac{\pi}{2}$$

RPTA :"D"

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 Completar los enunciados: siguientes

A) Dos rectas que se intersecan se llaman..... .

B) Dos rectas perpendiculares se cortan o se interceptan en..... punto.

C) Dos rectas que no se cortan se llaman rectas..... .

D) Según el postulado de Euclides, por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una ..... .

02 Defina cada uno de los conceptos:

A) Línea Recta

_____

_____

B) Rectas Perpendiculares

_____

_____

C) Rectas Paralelas

_____

_____

D) Rectas Secantes

_____

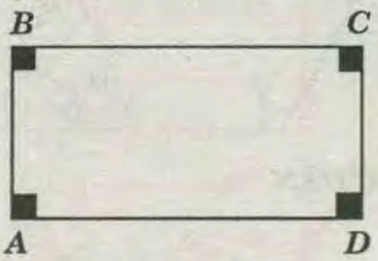
_____

E) Rectas Coplanares

_____

_____

03 En el rectángulo **ABCD**. señale verdadero **(V)** o falso **(F)** lo que a continuación se menciona.



I) $\overline{BC}$ ***es paralelo a*** $\overline{AD}$ ( )

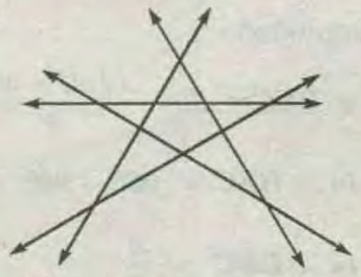
II) $\overline{AB}$ ***es paralelo a*** $\overline{CD}$ ( )

III) $\overline{AB}$ ***es secante a*** $\overline{BC}$ ( )

IV) $\overline{CD}$ ***es paralelo a*** $\overline{BC}$ ( )

04 Del gráfico mostrado, indique cuántas rectas secantes hay:

A)5
B)6
C)10
D)15
E)9



05 Del ejercicio anterior, ¿cuántos puntos de intersección existen?

A) 5 B) 6 C)10 D)15 E) 9

06 Calcular cuántas rectas paralelas se pueden trazar por un punto exterior a una recta dada.

A) 1 B) 2 C) 3 D)Infinito E) Ninguno

07 Según la Geometría No-Euclidiana, ¿cuántas

rectas paralelas se pueden trazar por un punto exterior a una recta dada?

A) 1 B) 2 C) 3 D) Infinito E) Ninguno

08 De acuerdo a la pregunta *#3*; indicar verdadero *(V)* o falso *(F)*:

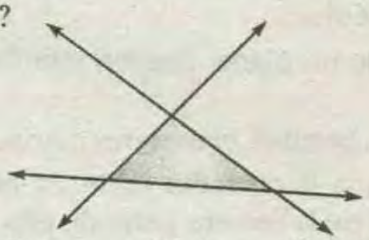
I) Existe sólo un par de segmentos paralelos ( )

II) Existen dos pares de segmentos paralelos ( )

III) $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ tienen un solo punto en común ( )

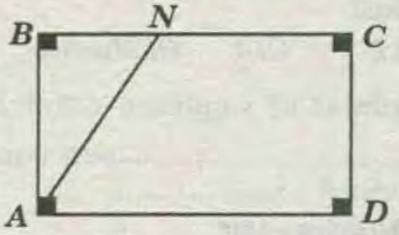
IV) "*C*" es el punto de intersección de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ ( )

09 ¿Cuántas líneas rectas son necesarias para formar un triángulo?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Infinitas

10 De acuerdo a la figura, relacionar correctamente las afirmaciones de ambas columnas:



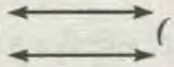
I) $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ ( ) ***rectas secantes***

II) $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ ( ) ***rectas paralelas***

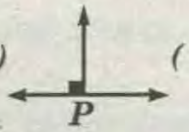
III) $\overline{AB} \cap \overline{CD}$ ( ) ***N***

IV) $\overline{BC} \cap \overline{AN}$ ( ) ***∅***

11 Relacionar correctamente los datos de ambas columnas

A)  ( ) ***Rectas perpendiculares***

B) ( ) ***"P" es el pie de la perpendicular***

C)  ( ) ***Rectas Paralelas***

D) ( ) ***Rectas Secantes***

12 Las huellas dejadas por las ruedas de un auto que viaja en línea recta, nos dan la idea de:

A) Rectas Oblicuas B) RedasCrozadas
C) Rectas Paralelas D) Rectas Secantes

13 De las siguientes notaciones, indique las correctas:

I) $\overline{AB}$***: segmento AB***

II) $\overrightarrow{OA}$***: rayo OA***

III) $\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2}$***:*** $\overrightarrow{L_1}$ ***es paralelo a*** $\overrightarrow{L_2}$

IV) $\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2}$ **:** $\overrightarrow{L_1}$ ***si es paralelo a*** $\overrightarrow{L_2}$

V) Si: $\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2}$ y $\overrightarrow{L_2} \parallel \overrightarrow{L_3} \Rightarrow \overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_3}$

A)I y II B)I y III C)I,II yIII D)Todas E)Ninguna

14 Representa con símbolos lo que se menciona a continuación:

A) Recta L_1 ***es perpendicular a la recta*** L_2
B) Recta L_3 ***es paralela a la recta*** L_4
C) Punto "B" es la intersección de las rectas L_5 y L_6

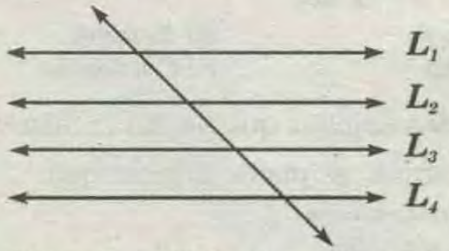
15 Escribir el significado de las siguientes representaciones:

A) $\overrightarrow{L_3} \perp \overrightarrow{L_4}$ ——— ***B)*** $\overrightarrow{L_1} \cap \overrightarrow{L_2} = \varnothing$ ———

C) $\overrightarrow{L_2} \parallel \overrightarrow{L_3}$ ——— ***D)*** $\overrightarrow{L_1} \cap \overrightarrow{L_2} = \{A\}$ ———

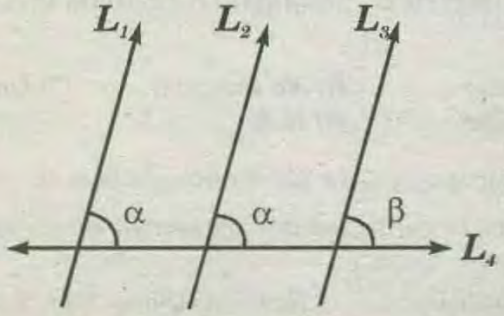
16 De la figura: $\overrightarrow{L_1} \parallel \overrightarrow{L_2} \wedge \overrightarrow{L_2} \parallel \overrightarrow{L_3} \wedge \overrightarrow{L_3} \parallel \overrightarrow{L_4}$

¿ Cuántos pares de rectas paralelas y cuántos pares de rectas secantes hay?



A) 6 y 4 B) 6 y 3 C) 6 y 2 D) 3 y 3 E)3 y 2

17 En la figura, $\alpha \neq \beta$. Indique verdadero *(V)* o falso *(F)*, lo que a continuación se menciona:



* L_1 y L_2 son paralelas
* L_1, L_2, L_3 son paralelas
* L_2 y L_3 son paralelas
* L_2 y L_3 son no paralelas

A)VVVV B)VFFV C)VFFF D)FVVF E)FFFF

18 Del problema anterior, se puede afirmar:

I) $\alpha = 45°$

II) $\alpha \neq 45° \Rightarrow L_2 \perp L_3$

III) $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2} // \overrightarrow{L_3}$

A)VVV B)VFF C)FFF D)FFV E)FVV

19 Del problema 17 , indique lo correcto:

I) Hay dos pares de rectas paralelas

II) $\beta \leq 90°$

III) $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$

A) I y II B) I y III C) Sólo II D)Sólo I E)Sólo III

20 En un plano, si dos rectas son perpendiculares a una tercera, entonces estas dos rectas son:

A) Iguales B) Perpendiculares C) Secantes
D) Paralelas C) No se sabe

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 La proposición: «Las bisectrices de dos ángulos conjugados internos, entre paralelas, forman un ángulo recto» es un:

A) Postulado B) Axioma C) Lema
D) Teorema E) Corolario.

02 De dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común, se puede afirmar que:

A)Son consecutivos
B)Son adyacentes
C)Son adyacentes suplementarios
D)Son complementarios
E)No necesariamente son adyacentes

03 El interior de un ángulo determina un conjunto que es:

A) Convexo B) No convexo C) Unitario
D) Infinito E) N.A.

04 La proposición « ***La menor distancia entre dos puntos es la longitud del segmento de recta que lo une*** » : es

A) Un postulado B) Un axioma C) Un teorema
D) Un colorario E) N.A.

05 Dados los puntos *A,B,C* y *D,* ubicados en un línea recta en ese orden, la relación: $\overline{AC} \cup \overline{BD}$ es igual:

A) $\overline{AC} - \overline{BC}$ *B)* $\overline{AD} - \overline{BC}$ *C)* $\overline{AD} \cap \overline{BC}$
D) $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD}$ *E)* $\overline{AC} \cap \overline{BD}$

06 Dadas las siguientes proposiciones responder con *(V)* si es verdadero y con *(F)* si es falso.

* La medida de un segmento es una figura geométrica.
* Dado un plano. Existen infinitos puntos exteriores a él.
* Los ángulos complementarios son agudos.
* Si una línea recta mide ***12 000 km***, entonces la mitad de la tercera parte de ella medirá ***2 000 km***.

A) FVVV B) VVVV C) FFVV D) FVVF E) VFVF

07 Dado un ángulo *AOB*, ubicado en un plano *P*, ¿Cuántos subconjuntos de puntos quedan determinados?

A) 1 B) 2 C) 3 D) Muchos E) Infinitos

08 Completar el siguiente enunciado: «Los ángulos .....son aquellos cuyas medidas suman .....«

A) Suplementarios –180°
B) Complementarios – 45°
C) Complementarios – 90°
D) Adyacentes – 90°
E) Agudos – 90°

09 ¿Cuál de los siguientes instrumentos se emplea para medir un segmento?

A) Compás B) Transportador C) Escuadra
D) Regla Graduada E) N.A.

10 Desde un punto, que está en el exterior a una recta se pueden trazar a dicha recta un número de paralelas igual a:

A) Una B) Dos C) Tres D) Muchas E) Infinitas

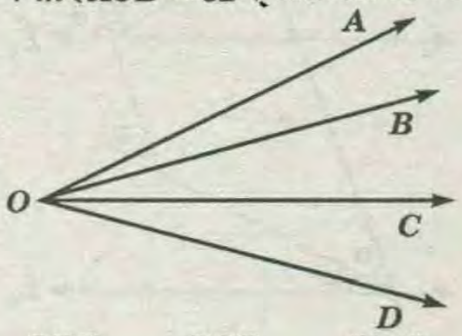
11 El ángulo geométrico es aquel cuya medida está comprendida entre:

A) 0° y 90° *B) 0° y 135°* *C) 90° y 180°*
D) 0° y 180° *E) 0° y 360°*

12 El ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos adyacentes complementarios:

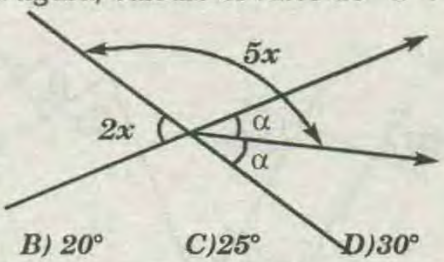
A) Es recto B) Es agudo C) Es obtuso
D) No existe E) Faltan datos

13 En la figura, si OC es bisectriz del $\sphericalangle BOD$ y $m\sphericalangle AOB + m\sphericalangle AOD = 52°$, calcular la $m\sphericalangle AOC$



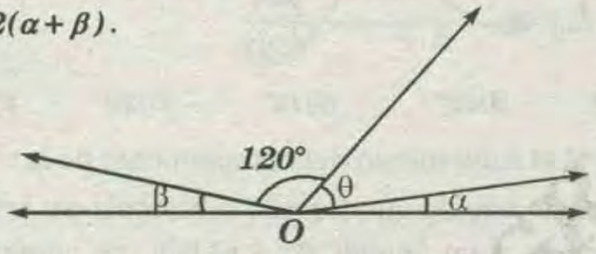
A)52° B)39° C)26° D)34° E) 28°

14 De la figura, calcule el valor de "x".



A) 15° B) 20° C)25° D)30° E) 35°

15 De la figura, calcule el valor de θ, si: $\theta = 2(\alpha + \beta)$.



A)20° B)25° C) 30° D)35° E)40°

16 Sean los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD. $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del $\sphericalangle COD$. Si $m\sphericalangle COD = 2(m\sphericalangle AOB)$ y $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA}$, calcular la $m\sphericalangle BOM$.

A)45° B)60° C) 30° D)80° E)90°

17 Se tiene los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, tal que $m\sphericalangle AOC = m\sphericalangle BOD = 90°$. Calcular $m\sphericalangle BOC$, si: $m\sphericalangle AOB + m\sphericalangle COD = 40°$.

A) 60° B) 40° C) 50° D)80° E)70°

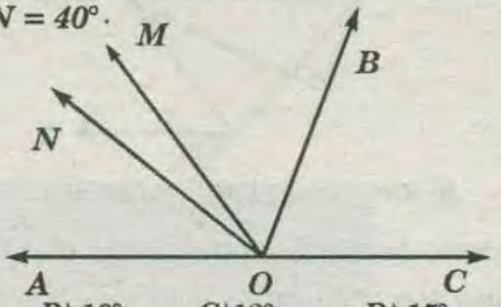
18 Se tiene los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, tal que: $m\sphericalangle AOD = 4(m\sphericalangle BOC)$. Calcular la $m\sphericalangle BOC$, si: $m\sphericalangle AOB + m\sphericalangle COD = 45°$.

A)10° B)15° C)12° D) 18° E) 20°

19 Calcular la medida de un ángulo, si se sabe que el complemento de la mitad de dicho ángulo es igual al complemento del suplemento del ángulo.

A) 100° B) 140° C)120° D) 160° E)90°

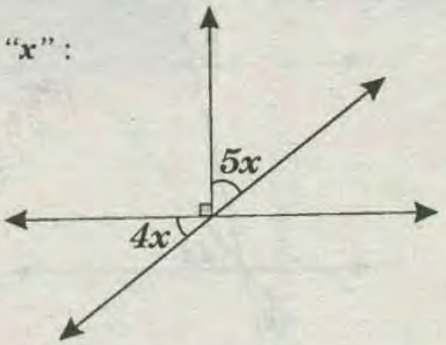
20 En la figura: $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del $\sphericalangle AOB$ y $\overrightarrow{OB}$ es bisectriz del $\sphericalangle NOC$. Calcule la $m\sphericalangle MON$, si la $m\sphericalangle AON = 40°$.



A) 7,5° B) 10° C)12° D) 15° E)20°

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcula "x":



A)15° B)12° C)18° D)10° E)16°

02 El doble del complemento de un ángulo es $120°$. ¿Cuánto mide el ángulo?

A) 30° B) 40 ° C) 50° D) 60° E) 10°

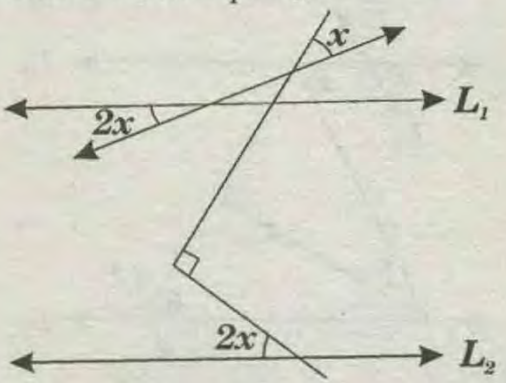
03 Se tienen los ángulos $A\hat{O}B$ y $B\hat{O}C$ consecutivos y miden $20°$ y $30°$ respectivamente. Calcular el ángulo que forman sus bisectrices.

A) 30° B) 25° C) 35° D) 15° D) 20°

04 Si un ángulo es el doble de su suplemento. ¿Cuánto mide el ángulo?

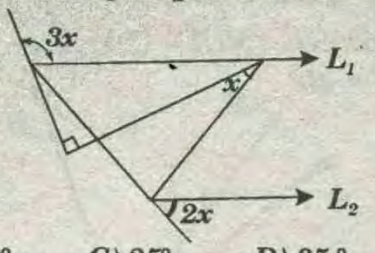
A)100° B) 150° C) 90° D) 120° E) 160°

05 Calcular "x", si: $L_1 // L_2$.



A) 80° B) 18° C)70° D) 20° E) 75°

06 Calcular "x" si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.

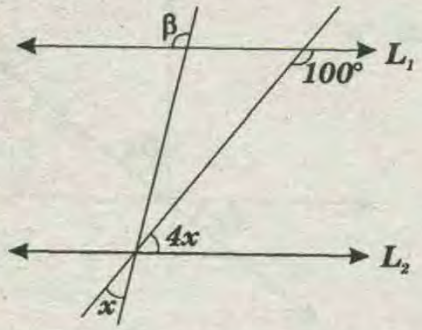


A) 36° B) 40° C) 25° D) 35° E) 30°

07 El doble de ángulo es mayor que otro en 30°. Si los ángulos son conjugados internos comprendidos entre rectas paralelas , ¿En cuánto se diferencian estos ángulos?

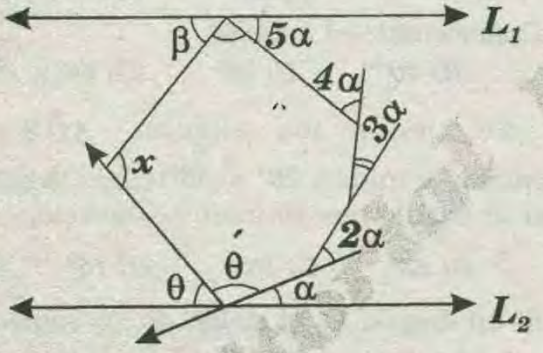
A) 40° B) 45° C) 50° D) 30° E) 35°

08 Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, calcular "$\beta$".



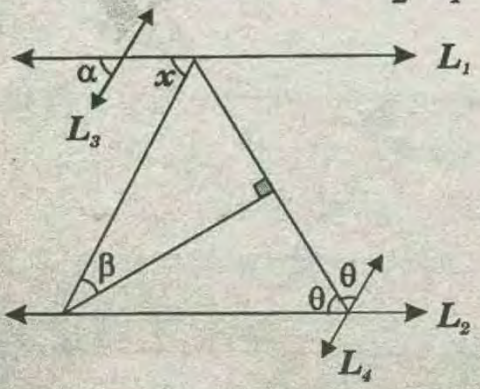
A) 80° B) 20° C) 70° D) 40° E) 75°

09 Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, calcular "$x$"



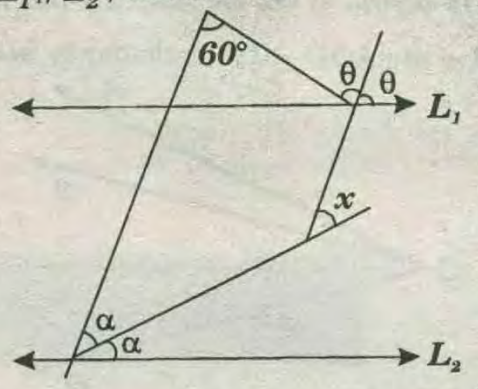
A)154° B)115° C)130° D)144° E)120°

10 Si : $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$ y $\overrightarrow{L_3} // \overrightarrow{L_4}$, $\beta = \frac{\theta}{2} = \frac{\alpha}{4}$; calcular "$x$".



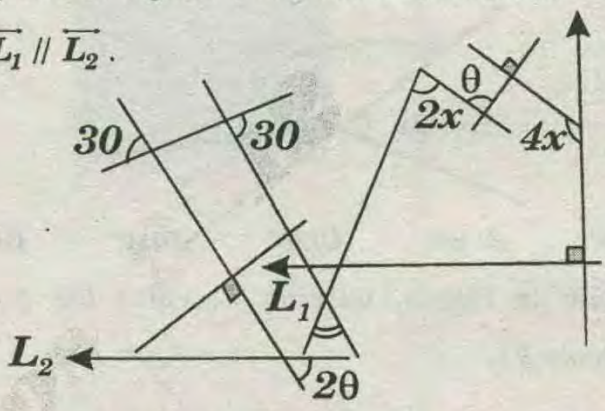
A) 45° B) 60° C) 75° D) 80° E) 67,5°

11 Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, calcular "$x$"



A) 65° B) 45° C) 15° D) 30° E) 20°

12 En la figura , calcular el valor de "x", si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.

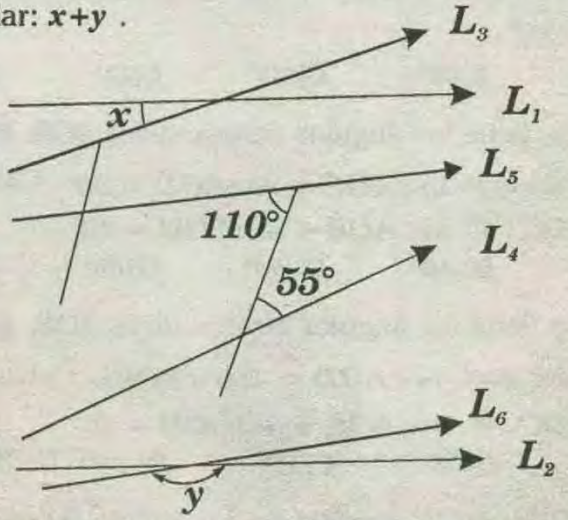


A)10° B)12° C)18° D)20° E)30°

13 Si el suplemento del complemento de la mitad del mayor ángulo que forman la bisectriz del ángulo adyacente a un ángulo "β" y el lado no común es 140°, calcular "β"

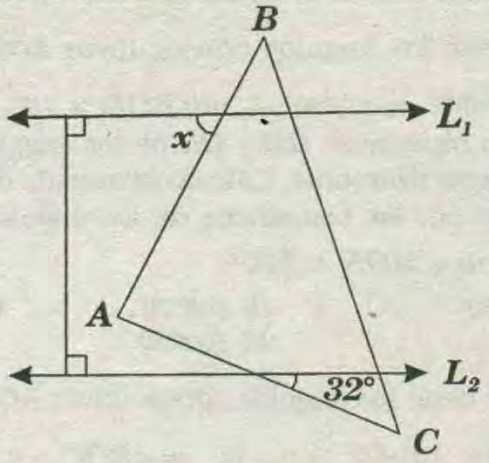
A) 10° B) 12° C) 15° D) 20° E) 30°

14 En el gráfico: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, $\overrightarrow{L_3} // \overrightarrow{L_4}$, $\overrightarrow{L_5} // \overrightarrow{L_6}$, calcular: $x+y$.



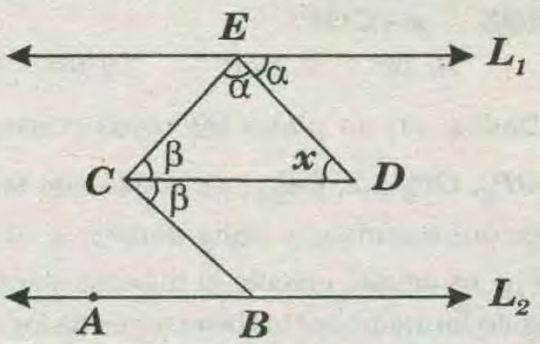
A) 170° B) 180° C) 210° D) 235° E) 245°

15 Del gráfico, calcular el mayor valor entero de "x", si el triángulo ABC es acutángulo.



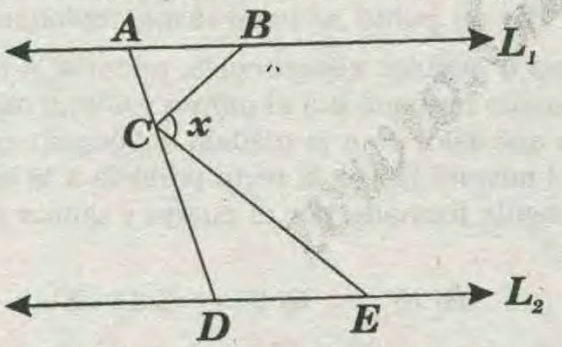
A) 50° B) 44° C) 56° D) 57° E) 58°

16 Si : $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$ y la medida del ángulo $A\hat{B}C$ es agudo, calcular el menor valor entero impar de "x"



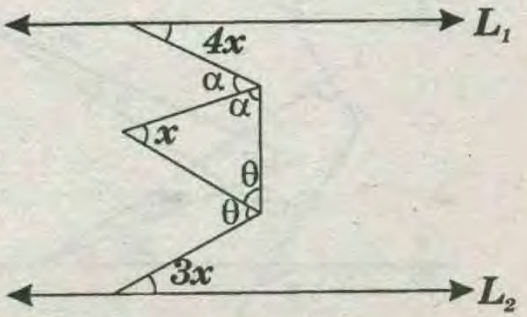
A) 46° B) 47° C) 45° D 43° E) 44°

17 Siendo $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$, AB=AC y CD=DE, calcular "x".



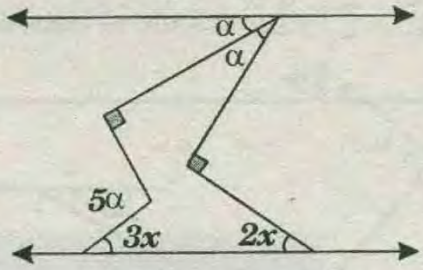
A) 45° B) 60° C) 75° D) 90° E) 80°

18 En la figura mostrada, calcular "x", siendo : $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



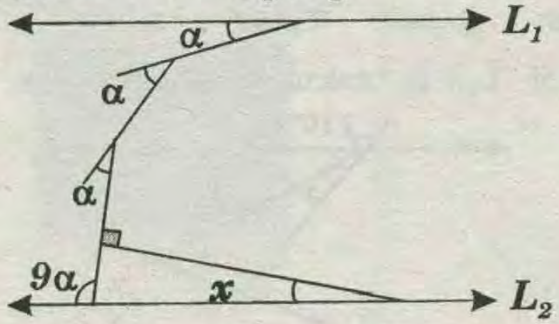
A) 35° B) 20° C) 30° D) 45° E) 37°

19 Calcular "x",si : $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.



A)30° B)25° C)10° D)15° E)20°

20 Calcular "x", si : $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$.



A) 30° B) 15° C) 20° D) 45° E) 10°

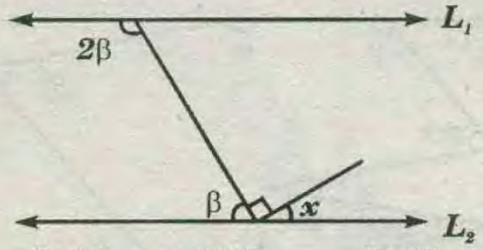
TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Se tiene los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD y DOE, tal que $\overrightarrow{OB}$ es bisectriz del $\sphericalangle AOC$ y $\overrightarrow{OD}$ es bisectriz del $\sphericalangle COE$.

Si $m\sphericalangle AOD = m\sphericalangle BOE = 60°$, calcular la $m\sphericalangle BOD$.

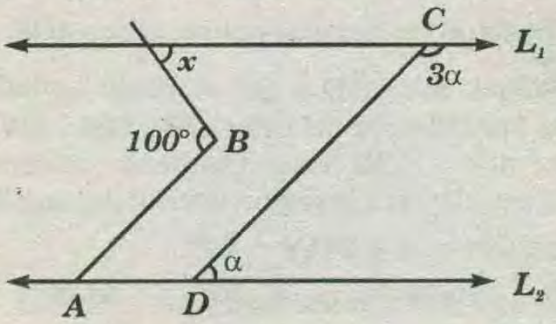
A) 60° B) 30° C)40° D)45° E)50°

02 Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$ calcule el valor de "x".



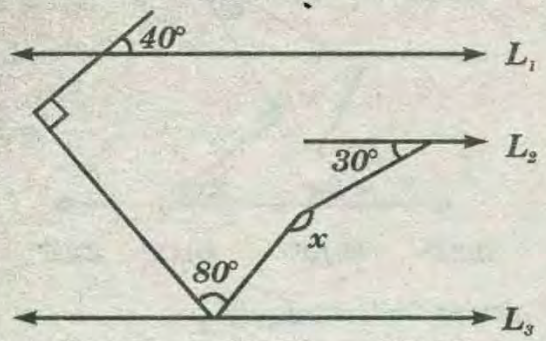
A) 30° B) 50° C)35° D)45° E)55°

03 Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$ y $\overline{AB} // \overline{CD}$, calcule el valor de "x".



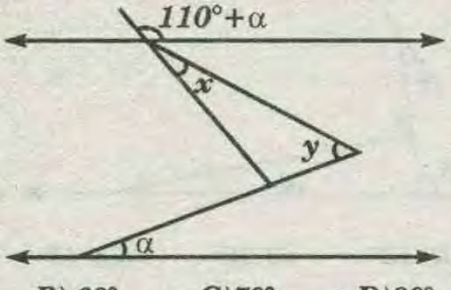
A) 45° B) 50° C)60° D)55° E)65°

04 Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2} // \overrightarrow{L_2}$ calcule el valor de "x".



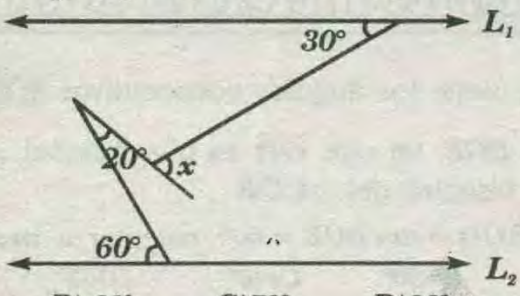
A) 100° B) 120° C)130° D)160° E)150°

05 Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$,calcule el valor de: $x + y$.



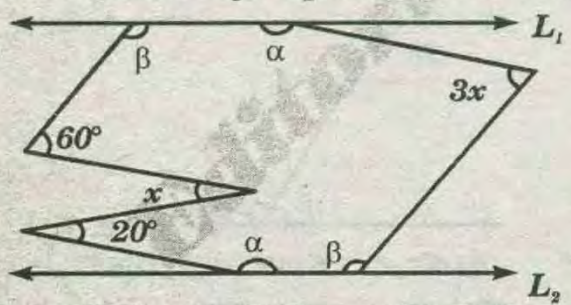
A) 50° B) 60° C)70° D)80° E)85°

06 Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$ calcule el valor de "x".



A) 50° B) 60° C)70° D)80° E)65°

07 En la figura, si $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$ calcule el valor de "x".



A) 15° B) 18° C)20° D)22° E)25°

08 Se tiene los ángulos consecutivos *AOB, BOC* y *COD* tal que $m\sphericalangle AOD = 80°$. Calcule la medida del ángulo formado por las bisectrices *OM* y *ON* de los ángulos *AOC* y *BOD* respectivamente. sabiendo que *M* y *N* pertenecen a la región interior del ángulo *BOC* y $m\sphericalangle BOM + m\sphericalangle CON = 20°$.

A) 40° B) 30 ° C) 25 ° D) 20° E) 10°

09 Sean los ángulos consecutivos *AOB, BOC* y *COD* tal que $m\sphericalangle AOC - m\sphericalangle BOD = 10°$; luego se traza las bisectrices *OM* y *ON* de los ángulos *AOB* y *COD* respectivamente. Calcule la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos *AOM* y *CON* si $m\sphericalangle MON = 100°$

A) 112°30' B) 100°30' C) 106°30'
D) 105° E) 102°30'

10 Se tiene los ángulos consecutivos *AOB, BOC* y *COD* de modo que la $m\sphericalangle BOC$ excede a la $m\sphericalangle AOB$ en 40° y la $m\sphericalangle COD$ excede a la $m\sphericalangle AOB$ en 20°. Luego se traza las bisectrices *OM, ON, OQ, OE* y *OF* de los ángulos *AOB, BOC, COD, MON* y *NOQ* respectivamente. Calcule la $m\sphericalangle BOE - m\sphericalangle COF$.

A) 10° B) 15° C)5° D) 18° E)25°

11 Dados, en un plano los rayos consecutivos $OP_1, OP_2, OP_3, ..., OP_{16}$; de modo que se forme ángulos consecutivos y congruentes; si el ángulo P_1OP_{16} es agudo, calcule el máximo valor entero del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos P_2OP_3 y $P_{11}OP_{12}$.

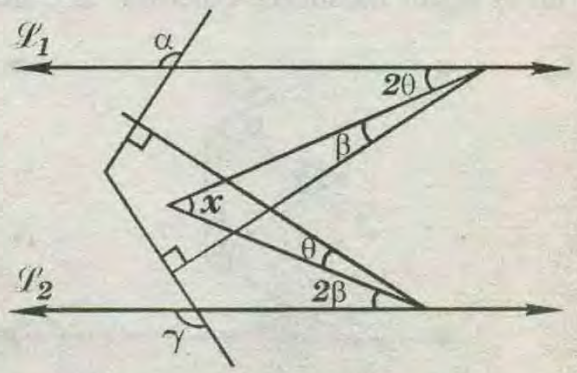
A)73° B)53° C)17° D)36 ° E)71°

12 Por un punto se traza rayos coplanares que forman *n* ángulos congruentes, además la medida del ángulo formado por el primer y último rayo es θ, ¿para qué valor de *n* la medida del ángulo formado por el noveno rayo y la recta paralela a la bisectriz del ángulo formado por el cuarto y quinto rayo es $0,3\theta$?

A) 1 B) 15 C) 9 D) 18 E) 30

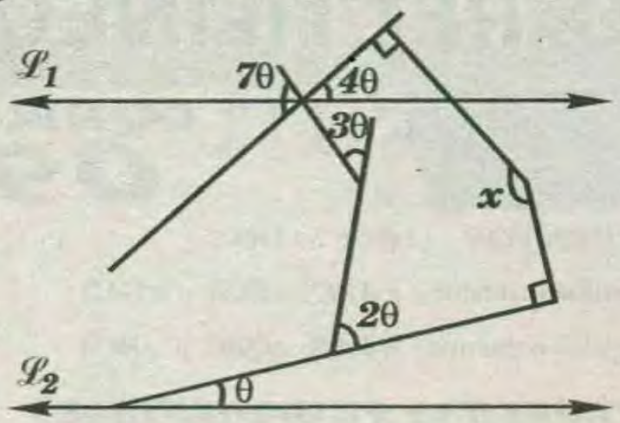
13 En la figura, $\overrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\alpha + \gamma = 252°$

Calcule *x*.



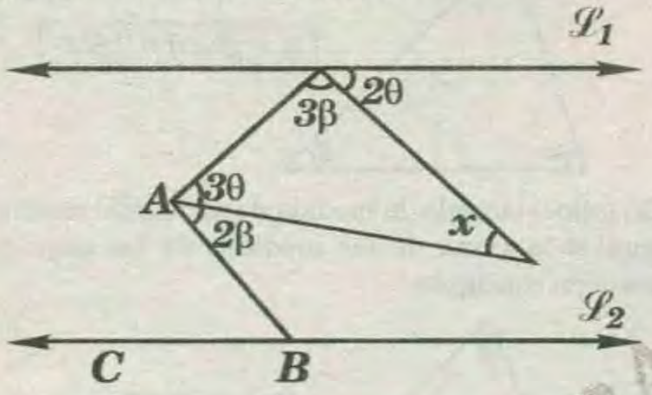
A) 52° B) 45 ° C)82° D) 48° E) 62°

14 Según el gráfico, calcule x si $\overrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overrightarrow{\mathscr{L}_2}$.



A) 100° B) 120° C) 140° D) 150° E) 135°

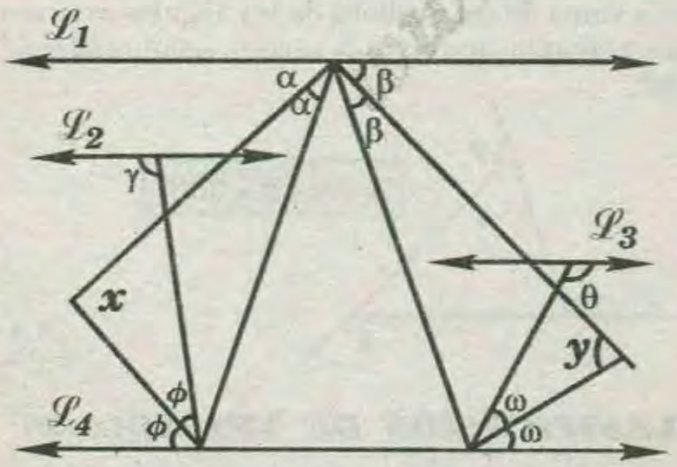
15 En el gráfico $\overrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y el ángulo ABC es agudo, calcule el mínimo valor entero de x.



A) 20° B)21° C) 22° D) 18° E) 19°

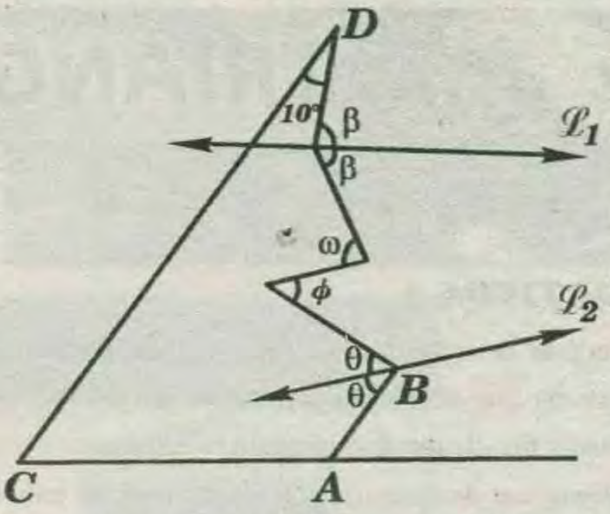
16 Según el gráfico, calcule $x-y$, si

$\alpha-\beta=\theta-\gamma=10°$ y $\overrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overrightarrow{\mathscr{L}_2} \parallel \overrightarrow{\mathscr{L}_3} \parallel \overrightarrow{\mathscr{L}_4}$.



A) 20° B) 30° C) 25° D) 15° E) 35°

17 En el gráfico $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\omega-\phi=42°$,calcule la medida del ángulo formado por $\overrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overrightarrow{\mathscr{L}_2}$.



A) 16° B) 26° C) 18° D) 8° E) 5°

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)D	2)E	3)A	4)A	5)D	6)D	7)C	8)C	9)D	10)A
11)D	12)B	13)C	14)D	15)E	16)E	17)E	18)C	19)D	20)C

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)D	2)A	3)E	4)D	5)D	6)E	7)A	8)A	9)D	10)E
11)D	12)E	13)D	14)D	15)D	16)B	17)D	18)B	19)E	20)D

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1)C	2)A	3)D	4)D	5)C	6)C	7)C	8)D	9)E	10)C
11)B	12)B	13)D	14)B	15)E	16)D	17)A			

¿DÓNDE O CÓMO NACEN LAS MATEMÁTICAS?

Es toda una discusión. Sin embargo, hay una pregunta previa: ¿qué son las matemáticas? Si no se responde ésta última, la otra no se puede contestar con rigor, porque podríamos recorrer historias diferentes según lo que creamos son las matemáticas. Hay múltiples posibilidades. Sin embargo, la respuesta a qué son las matemáticas no es fácil. Reflexione un poco: ¿tratan las matemáticas de los conocimientos obtenidos solamente por deducción lógica u otros recursos se podrían admitir? ¿Sin demostraciones no hay matemática? Y, aun más: ¿qué son demostraciones válidas? ¿Tienen las matemáticas objetos de estudio físicos o mentales? ¿Cómo son y dónde están los objetos de las matemáticas? ¿Son las matemáticas una ciencia natural? ¿Son las matemáticas un lenguaje? ¿Se descubren o construyen las matemáticas?

La reflexión y el debate sobre la naturaleza de las matemáticas son muy importantes, pero resulta más apropiado que los realicemos poco a poco a lo largo de todo nuestro libro. La realidad es que, más o menos, todos sabemos a qué se refieren las matemáticas. Y es preferible que primeramente ampliemos nuestra visión sobre estos quehaceres que en la historia se han considerado matemáticos para luego buscar mayor claridad sobre la naturaleza de éstos.

TRIANGULO RECTILINEO

CAPITULO 09

OBJETIVOS :

Al finalizar la unidad, el alumno será capaz de:

* *Aprender que es el triángulo rectilíneo .*
* *Conocer las clases de triángulo rectilíneo.*
* *Definir un triángulo e indicar cuáles son sus elementos*
* *Reconocer y ser capaz de graficar los diferentes tipos de triángulos que existen*
* *Utilizar las principales propiedades generales del triángulo .*
* *Resolver problemas sobre las propiedades generales del triángulo.*

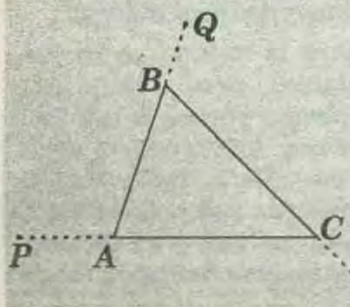
INTRODUCCIÓN :

Las propiedades y las formas de las figuras geométricas que conocemos se aplicaron y se aplican en diversos campos por ejemplo: en la arquitectura, en la ingeniería, en la topografía y en algunas actividades técnicas. Una de esas figuras es el triángulo el cual es una figura muy reconocida pero: ¿para qué sirve el triángulo?. A esta pregunta se le puede dar diversas respuestas (dependerá de quien la responda).

Por historia se sabe que el hombre primitivo a las puntas de sus herramientas de caza les daban forma triangular (mejor eficiencia al impacto).

TRIÁNGULO

Es el que se forma al unir tres puntos no colineales con segmentos de recta.



Elementos :

* Vértices A , B y C
* Lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$

Notación :

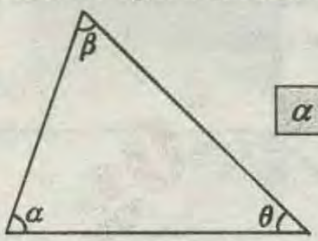
* Triángulo ABC: $\triangle ABC$

ELEMENTOS ASOCIADOS :

* Ángulos internos : $\sphericalangle ABC; \sphericalangle BCA$ y $\sphericalangle CAB$
* Ángulos externos : $\sphericalangle PAB; \sphericalangle QBC$ y $\sphericalangle RCA$

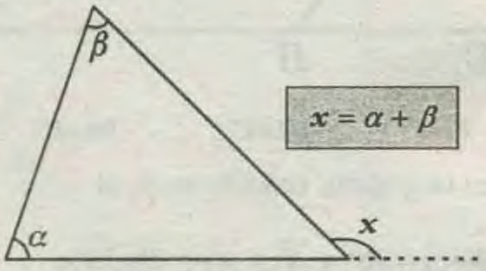
TEOREMAS FUNDAMENTALES

I) En todo triángulo se cumple que la suma de las medidas de sus ángulos internos es igual a $180°$.



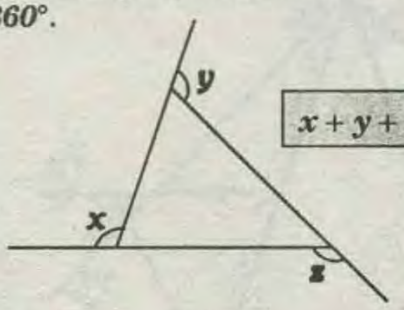
$$\alpha + \beta + \theta = 180°$$

II) En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no contiguos.



$$x = \alpha + \beta$$

III) La suma de las medidas de los ángulos externos de un triángulo, uno en cada vértice, siempre es igual a $360°$.



$$x + y + z = 360°$$

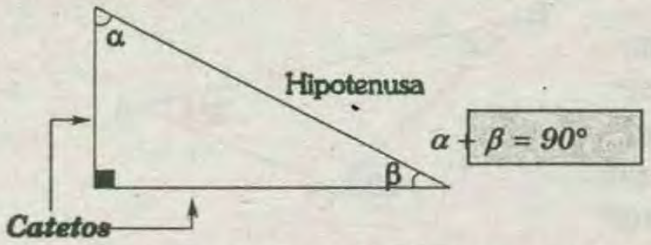
CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

A)SEGÚN LA MEDIDA DE SUS ÁNGULOS

I) TRIANGULO RECTÁNGULO :

Es aquel que tiene un ángulo recto y dos ángulos agudos.

Los lados que forman al ángulo recto se llaman catetos y el que se le opone recibe el nombre de hipotenusa.

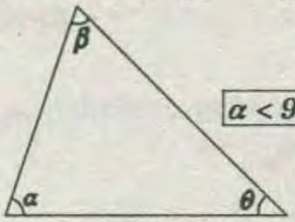


II) TRIANGULO OBLICUÁNGULO :

Es aquel que no tiene ángulo recto, puede ser:

A) TRIANGULO ACUTÁNGULO :

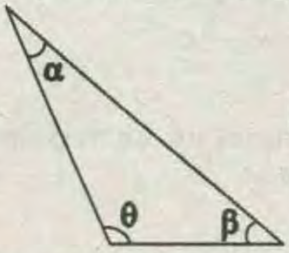
Es el que tiene *3* ángulos agudos.



$\alpha < 90°$; $\beta < 90°$ y $\theta < 90°$

B) TRIANGULO OBTUSÁNGULO :

Es el que tiene un ángulo obtuso y dos ángulos agudos.



$\alpha < 90°$, $\beta < 90°$ y $\theta > 90°$

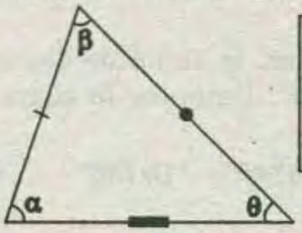
OBSERVACIÓN:

En todo triángulo obtusángulo el lado opuesto al ángulo obtuso es el lado mayor.

B) SEGÚN LA CONGRUENCIA DE SUS LADOS :

I)TRIANGULO ESCALENO :

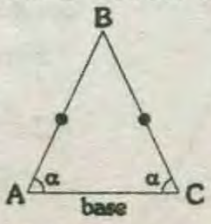
Es aquel que tiene sus lados diferentes además sus ángulos también son diferentes.



$AB \neq BC$
$BC \neq AC$
$AB \neq AC$

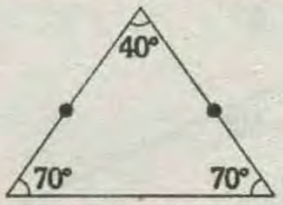
II)TRIANGULO ISÓCELES :

Es aquel que tiene dos lados iguales, en consecuencia los ángulos opuestos a dichos lados también son iguales.



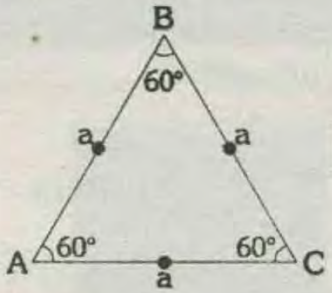
$AB = BC$

EJEMPLO:



III)TRIANGULO EQUILÁTERO :

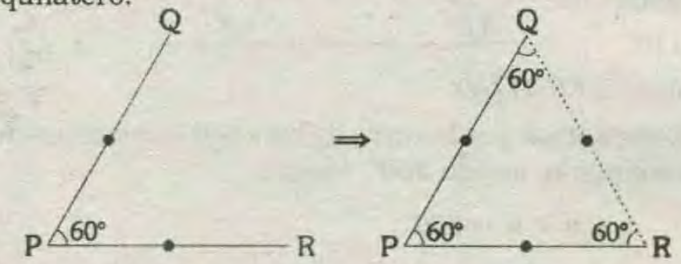
Es aquel que tiene sus tres lados congruentes, tiene también sus tres ángulos congruentes.



$AB = BC = AC$

RECOMENDACIÓN :

Si $PQ = PR$ y $m\sphericalangle QPR = 60°$, se recomienda y unir los puntos *"Q"* y *"R"* para formar un triángulo equilatero.



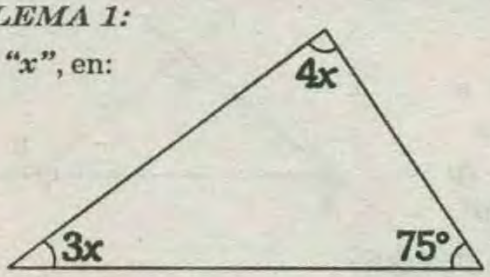
* En la figura el triángulo PQR es equilátero.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Calcular *"x"*, en:

A)5°
B)15°
C)20°
D)30°
E)18°



RESOLUCIÓN:

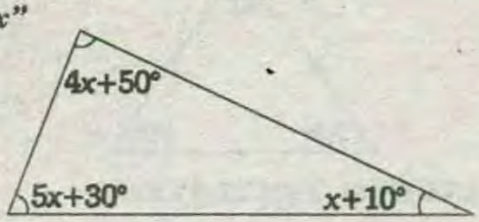
* Sabemos que la suma de las medidas de los *3* ángulos internos de un triángulo, es *180°*; entonces:

$$3x + 4x + 75° = 180°$$
$$\Rightarrow 7x = 180° - 75°$$
$$\Rightarrow 7x = 105° \Rightarrow x = \frac{105°}{7}$$
$$\Rightarrow x = 15°$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 2:

Hallar *"x"*



A)20° *B)15°* *C)18°* *D)9°* *E)40°*

RESOLUCIÓN:

* Por suma de ángulos internos se tiene:

$5x+30°+4x+50°+x+10°=180°$

$\Rightarrow 10x+90°=180°$

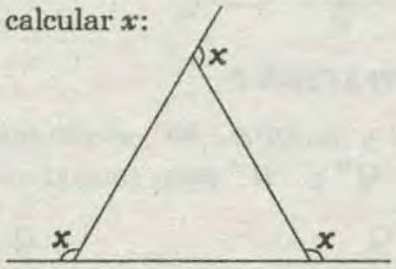
$\Rightarrow x=9°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3:

De la figura calcular x:

A)100°
B)140°
C)120°
D)105°
E)115°



RESOLUCIÓN:

* Recordemos que la suma de los ángulos externos de un triángulo, nos da *360°*, luego :

$x + x + x = 360°$

$\Rightarrow 3x = 360°$

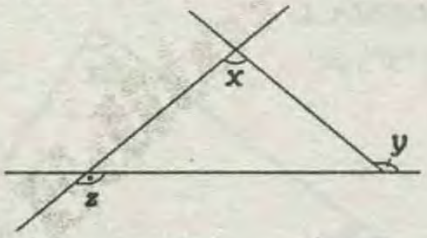
$\Rightarrow x=\frac{360°}{3}=120°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

En el siguiente gráfico, calcular *"x"*, si: $z + y = a$

A) 20°
B) 180° + a
C) 180°– a
D) 180° – 2a
E) 2a – 90°



RESOLUCIÓN:

* Por suma de ángulos externos se tiene:

$\underbrace{z+y}+180°-x=360°$

$\Rightarrow a+180°-x=360°$

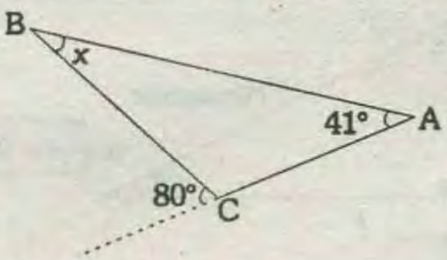
$\Rightarrow x=a-180°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

En la figura, hallar *"x"*

A) 39°
B) 52°
C) 61°
D) 121°
E) 102°



RESOLUCIÓN:

* Sabemos que la medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no contiguos, entonces:

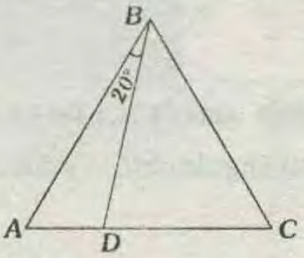
$x+41°=80° \Rightarrow x=80°-41°=39°$

RPTA : "A"

PROBLEMA 6 :

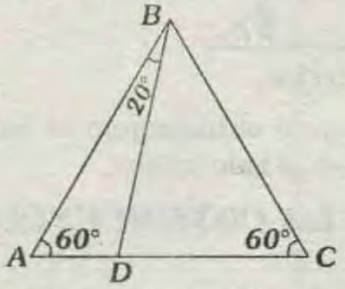
Si el triángulo *ABC* es equilátero, calcular: $m\sphericalangle BDC$

A) 70°
B) 80°
C) 90°
D) 75°
E) 66°



RESOLUCIÓN:

*Recordemos que cada ángulo en un triángulo equilátero mide *60°*, entonces :



* Luego por ángulo externo, será :

$m\sphericalangle BDC = 60° + 20° = 80°$

RPTA : "B"

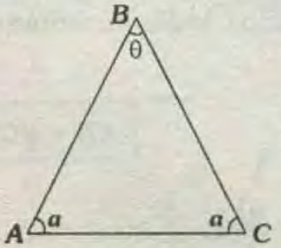
PROBLEMA 7 :

En un triángulo isósceles, la suma de dos ángulos distintos es igual a *110°*. Entonces la suma de los ángulos de la base es:

A)150° *B)146°* *C)140°* *D)136°* *E)160°*

RESOLUCIÓN:

* Sea α la medida de los ángulos iguales *A* y *C*; y θ la del ángulo desigual *B* luego por dato:



$\alpha + \theta = 110°$

* Pero :

$\underbrace{\alpha+\theta}+\alpha=180°$

$\Rightarrow 110°+\alpha=180°$

* De donde : $\alpha = 70°$

* Se pide : $\alpha + \alpha = 70° + 70° = 140°$

RPTA : "C"

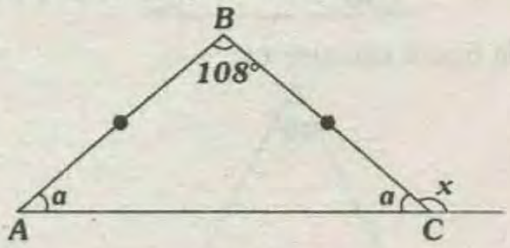
PROBLEMA 8:

En un $\triangle ABC$, $AB = BC$ y $m\sphericalangle B = 108°$, calcular la medida del ángulo exterior en el vértice **"C"**.

A)89° B)124° C)136° D)144° E)132°

RESOLUCIÓN:

* Graficando el triángulo isósceles :



* De la figura : $\alpha + \alpha + 108° = 180°$

$\Rightarrow 2\alpha = 72° \Rightarrow \alpha = 36°$

* Se pide : $x = \alpha + 108°$

$\Rightarrow x = 36° + 108° = 144°$

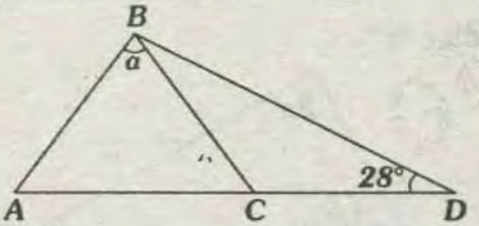
RPTA : "D"

PROBLEMA 9:

En la figura : $AB = BC = CD$

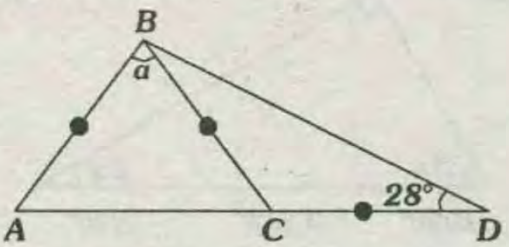
Calcular el valor de "α"

A) 32°
B) 68°
C) 44°
D) 70°
E) 72°



RESOLUCIÓN:

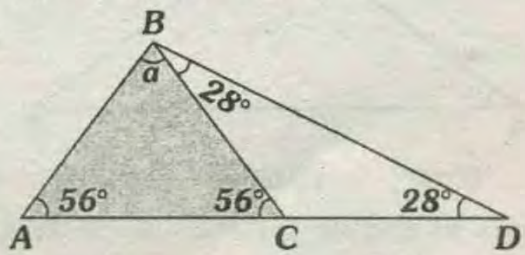
* Colocando los datos :



* De la figura : $m\sphericalangle DBC = 28°$

* Entonces : $m\sphericalangle ACB = 28° + 28° = 56°$

* Con lo que la figura, resultará :



* En el triángulo sombreado:

$56° + x + 56° = 180°$

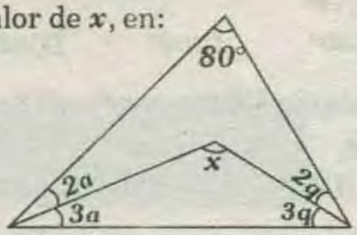
$\Rightarrow x = 68°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

Calcular el valor de x, en:

A)100°
B)120°
C)130°
D)140°
E)150°



RESOLUCIÓN:

* Del triángulo mayor :

$5\alpha + 80° + 5\theta = 180°$

$\Rightarrow 5\alpha + 5\theta = 100° \ldots\ldots (\div 5)$

$\Rightarrow \alpha + \theta = 20° \ldots\ldots (I)$

* Además en el triángulo más pequeño, se obtendrá:

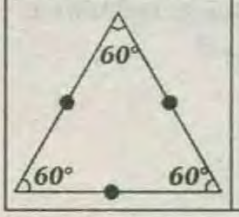
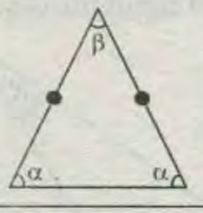
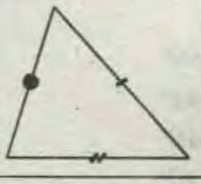
$3\alpha + x + 3\theta = 180°$

$\Rightarrow x + 3\underbrace{(\alpha + \theta)}_{20°,\,según\,(I)} = 180°$

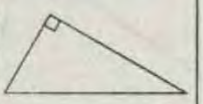
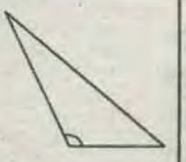
$\Rightarrow x + 3(20°) = 180° \Rightarrow x = 120°$

RPTA : "B"

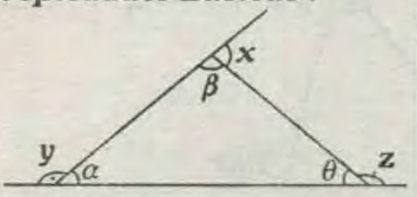
!RECUERDA ¡

Equilátero	Isósceles	Escaleno
		

* Por la medida de sus ángulos:

Equiángulo	Rectángulo	Obtusángulo
		
Sus ángulos agudos	Tiene un ángulo recto	Tiene un ángulo obtuso

Propiedades Básicas :



I	$\alpha + \beta + \theta = 180°$
II	$x + y + z = 360°$
III	$\alpha + \beta = z$ $\beta + \theta = y$ $\theta + \alpha = x$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 En un triángulo ABC: $m\sphericalangle A = 50°$ y $m\sphericalangle B = 60°$. Calcular $m\sphericalangle C$.

A)70° B)80° C)60° D)65° E)90°

02 En un triángulo PQR : $m\sphericalangle P = 47°$ y $m\sphericalangle Q = 67°$. Calcular $m\sphericalangle R$.

A)46° B)56° C)66° D)70° E)76°

03 Si los ángulos de un triángulo miden $3x$, $4x$ y $2x$, calcular x.

A)15° B)20° C)16° D)30° E)24°

04 En un triángulo ABC: $m\sphericalangle A = 65°$ y $m\sphericalangle B = 35°$; calcular $m\sphericalangle C$.

A)80° B)82° C)85° D)87° E)89°

05 En un triángulo PQR : $m\sphericalangle P = 72°$.

Calcular $m\sphericalangle Q = 48°$, calcular $m\sphericalangle C$.

A)59° B)60° C)62° D)64° E)66°

06 Si los ángulos de un triángulo miden x, $2x$ y $3x$. Calcular x.

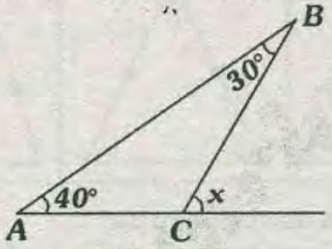
A)30° B)33° C)36° D)38° E)40°

07 Si los ángulos de un triángulo miden z, $3z$ y $5z$. Calcular z.

A)18° B)19° C)20° D)24° E)28°

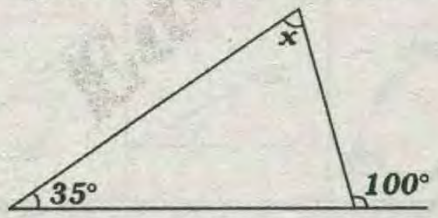
08 Con la ayuda del siguiente esquema, calcular x.

A) 59°
B) 64°
C) 68°
D) 70°
E) 72°



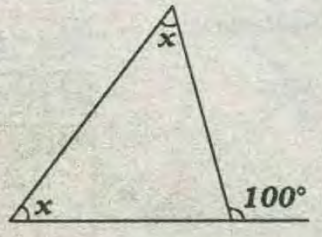
09 Con la ayuda del gráfico, calcular x.

A) 52°
B) 57°
C) 59°
D) 62°
E) 65°



10 Con la ayuda del gráfico, calcular x.

A) 48°
B) 50°
C) 55°
D) 57°
E) 59°

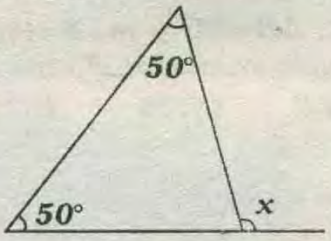


11 Si los ángulos de un triángulo miden $4x$, x y $5x$. Calcular x.

A)16° B)18° C)14° D)20° E)12°

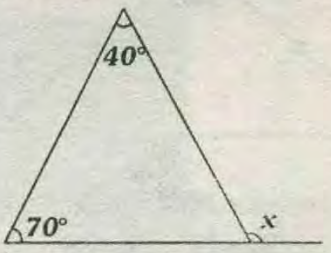
12 De la figura calcular x :

A) 80°
B) 70°
C) 120°
D) 100°
E) 160°



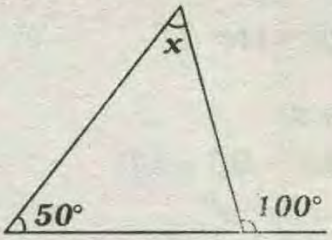
13 De la figura calcular x:

A) 140°
B) 110°
C) 100°
D) 130°
E) 120°



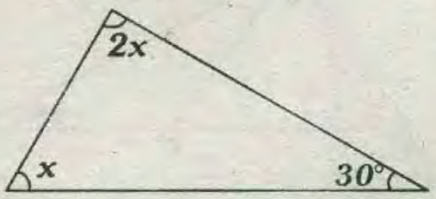
14 De la figura calcular x :

A) 40°
B) 60°
C) 30°
D) 70°
E) 50°

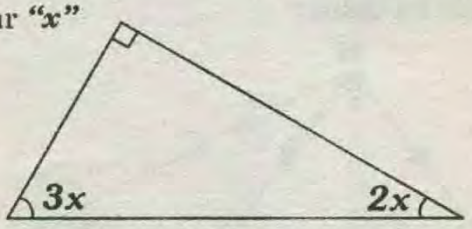


15 Hallar "x".

A) 40°
B) 20°
C) 50°
D) 60°
E) 70°

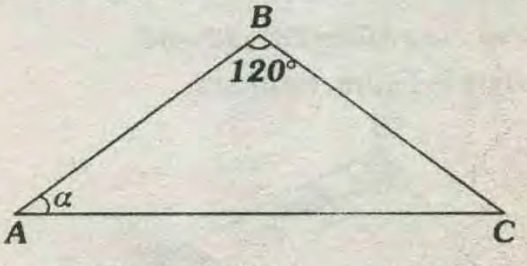


16 Hallar "x"



A)18° B)20° C)12° D)10° E)20°

17 Si : $AB=BC$, hallar "α"



A)30° B)20° C)40° D)60° E)20°

18 Calcula el ángulo faltante de un triángulo

rectángulo si un ángulo mide $50°$.

A)30° B)40° C)70° D)25° E)35°

(19) ¿Cuánto mide el ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles, si un ángulo sobre la base mide $22°$?

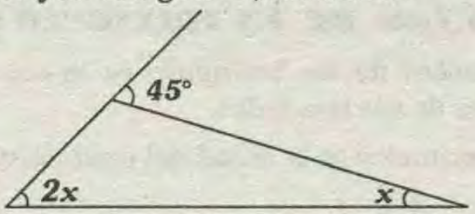
A)136° B)92° C)70° D)60° E)72°

(20) ¿Cuánto miden los ángulos sobre la base de un triángulo isósceles, si el ángulo opuesto a la base mide $10°$?

A)85° B)70° C)80° D)65° E)60°

TAREA DOMICILIARIA

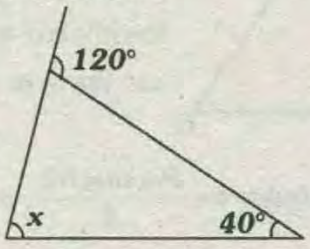
(01) Con la ayuda del gráfico, calcular x.



A)11° B)14° C)15° D)18° E)20°

(02) De la figura calcular x:

A) 60°
B) 40°
C) 70°
D) 80°
E) 90°



(03) ¿Cuánto miden los ángulos en un triángulo que es isósceles y rectángulo a la vez?

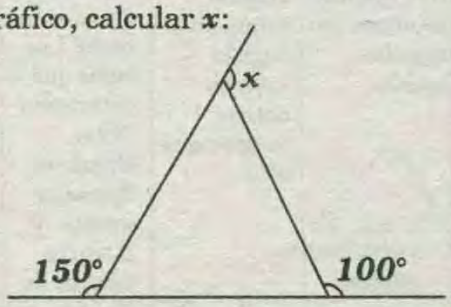
A)30° B)45° C)60° D)40° E)70°

(04) ¿Cuánto mide cada ángulo en un triángulo equilátero?

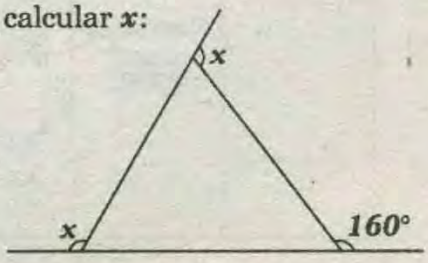
A)30° B)45° C)60° D)70° E)37°

(05) Del gráfico, calcular x:

A) 80°
B) 89°
C) 98°
D) 100°
E) 110°

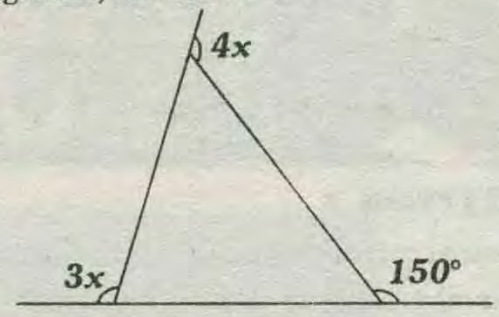


(06) Del gráfico, calcular x:



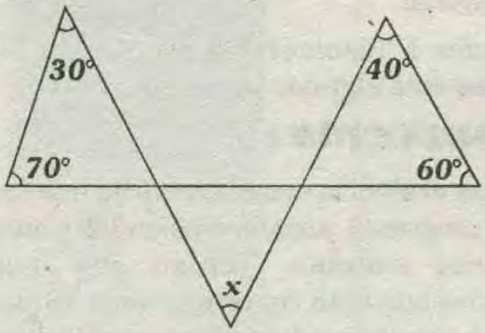
A)89° B)92° C)94° D)100° E)102°

(07) Del gráfico, calcular x:



A)25° B)29° C)30° D)32° E)35°

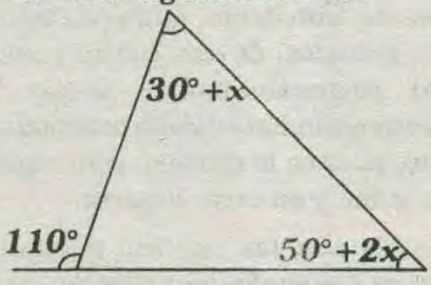
(08) De la figura, calcular x.



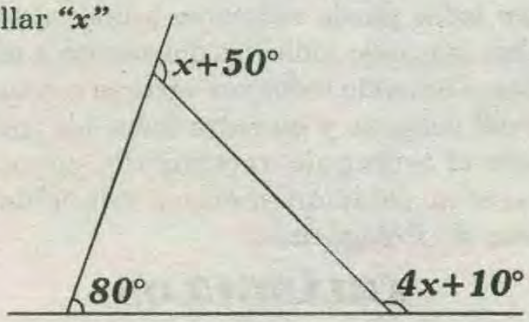
A)20° B)19° C)18° D)14° E)16°

(09) Hallar "x" de la figura mostrada.

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°



(10) Hallar "x"



A)10° B)20° C)30° D)40° E)50°

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)A	2)C	3)B	4)A	5)B	6)A	7)C	8)D	9)E	10)B
11)B	12)D	13)B	14)E	15)C	16)A	17)A	18)B	19)A	20)A
01)C	02)D	03)B	04)C	05)E	06)D	07)C	08)A	09)A	10)D

TRIANGULOS I

CAPITULO 9B

OBJETIVOS :

Al finalizar el capítulo, el alumno será capaz de:

* Definir al triángulo y familiarizamos con sus propiedades

* Conocer los tipos de triángulos y las propiedades que lo caracterizan.

* Aprender a resolver los problemas utilizando adecuadamente algunos teoremas .

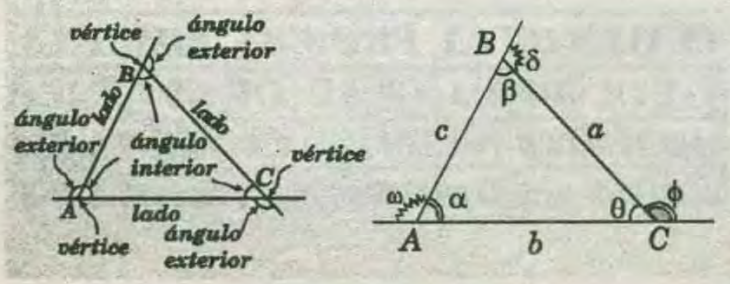
INTRODUCCIÓN :

Existe una evidencia considerable de que los egipcios hicieran progresos asombrosos en las ciencias de las mediciones exactas. Tenían sus inspectores territoriales que eran conocidos como arquedonaptas (extendedores de cuerdas)por que empleaban cuerdas con nudos o señales a intervalos iguales, para medir sus proporciones de terreno con estos simples medios eran capaces de construir ángulos rectos , por que sabían que tres nudos, de tres, cuatro y cinco unidades de longitud respectivamente, podían formar un triángulo rectángulo.Este hecho práctico no se redujo solo a Egipto, pues se le conocía con seguridad en la china, en la india y en otros lugares.

Los triángulos son las figuras geométricas más importantes, ya que cualquier polígono con un número mayor de lados puede reducirse a una sucesión de triángulos, trazando todas las diagonales a partir de un vértice, o uniendo todos sus vértices con un punto interior del polígono y de entre todos los triángulos sobresale el triángulo rectángulo, cuyos lados satisfacen la relación métrica conocida como ***«Teorema de Pitágoras»***.

TRIÁNGULOS

Se llama triángulo a la figura formada por la reunión de los segmentos determinados al unir tres puntos no colineales.



* Notación $\triangle ABC$: Triángulo "ABC"

* Elementos :

  * Vértice : A , B , C

  * Lados : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$

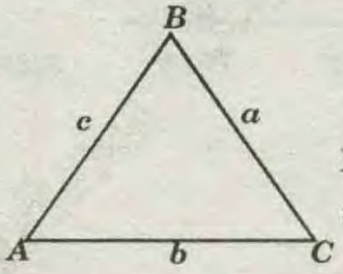
  * Ángulos interiores α, β , θ

  * Ángulos exteriores : ϕ, ω , δ

PERÍMETRO DE UN TRIANGULO :

El perímetro de un triángulo es la suma de las longitudes de sus tres lados.

El semiperímetro es la mitad del perímetro.



Perímetro $= 2p = a+b+c$

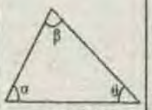
$\Rightarrow 2p = a + b + c$

$$Semiperímetro = \frac{Perímetro}{2} \Rightarrow \frac{a+b+c}{2}$$

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

I) Por la medida de los ángulos internos

Podemos encontrar **3** tipos de triángulos:

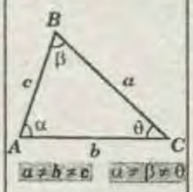
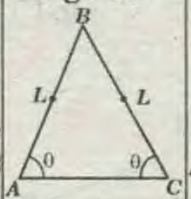
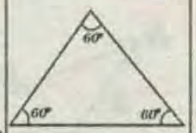
ACUTÁNGULO	OBTUSÁNGULO	RECTÁNGULO
Será, si sus tres ángulos internos son ángulos agudos  $\triangle$ACUTÁNGULO α, β y $\theta < 90°$	Será, cuando tenga un ángulo interno obtuso (mayor que 90°) $\triangle$OBSTUSÁNGULO $\alpha > 90°$ β y $\theta < 90°$	Será, si uno de sus ángulos es recto. Los lados que determina dicho ángulo se llamarán catetos, y el tercer lado, es la hipotenusa $\triangle$RECTÁNGULO $\beta = \alpha = 90°$

NOTA :

A los triangulos acutángulos y obtusángulos se les denomina triángulos oblicuángulos

II) Por la longitud de sus lados

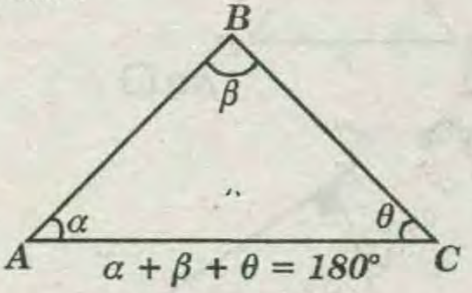
Podemos encontrar ***3*** tipos de triángulos:

ESCALENO	ISOSCELES	EQUILATERO
Es cuando no tiene lados de igual longitud	*Será, cuando tiene dos lados de igual longitud*	*Será, cuando sus tres lados tienen igual longitud*
 $a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \theta$	 AB y BC: lados laterales AC: base	

PROPIEDADES FUNDAMENTALES

I) Suma de las medidas de los ángulos internos

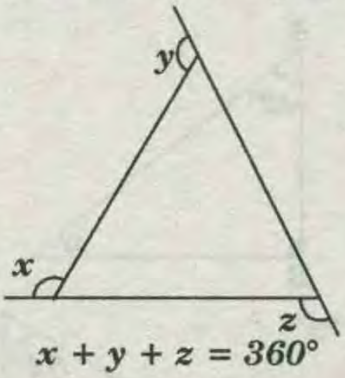
La suma de las medidas de los tres ángulos internos es igual a ***180°***.



$$\alpha + \beta + \theta = 180°$$

II) Suma de las mediads de los ángulos externos considerando uno por cada vértice

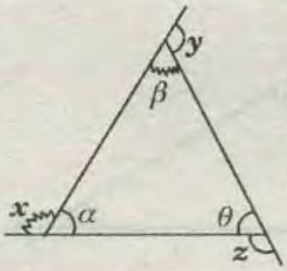
La suma de las medidas de los Ángulos exteriores es igual a ***360°***.



$$x + y + z = 360°$$

III) Cálculo de la medida de un ángulo exterior

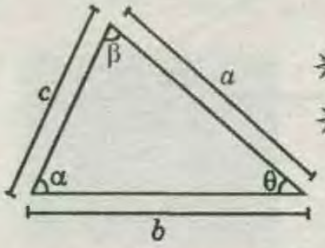
La medida de un ángulo exterior es igual la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes a él.



$x = \beta + \theta$
$y = \alpha + \theta$
$z = \alpha + \beta$

IV) Propiedades de correspondencia

Dado un triángulo , a mayor lado se opone mayor ángulo, además: a menor lado se opone menor ángulo.



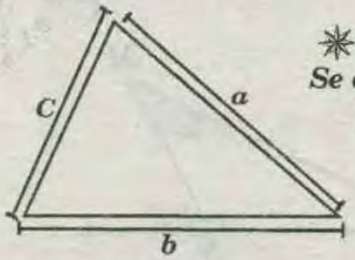
✳ *si:* $\alpha > \beta > \theta$

✳ *se cumple:*

$a > b > c$

V) Relación de correspondencia

En un triángulo cualquier lado es mayor que la diferencia de los otros dos y menor que su suma.



✳ $a \geq b \geq c$

Se cumple:

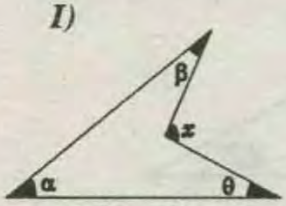
$b-c<a<b+c$

$a-c<b<a+c$

$a-b<c<a+b$

PROPIEDADES ADICIONALES

I)



* *Se cumple*

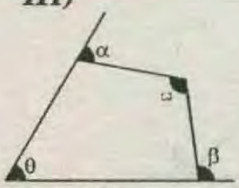
$x = \alpha + \beta + \theta$

II)

* *Se cumple*

$\alpha + \beta = \theta + \omega$

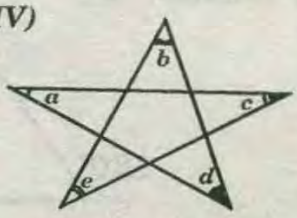
III)



*Se cumple

$\alpha + \beta = \theta + \omega$

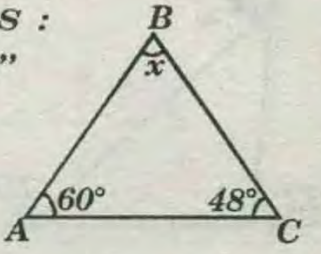
IV)



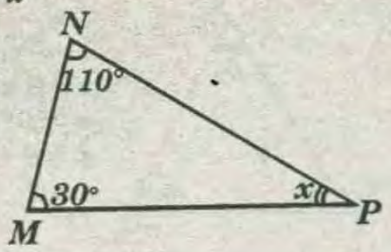
$a + b + c + d + e = 180°$

EJERCICIOS :

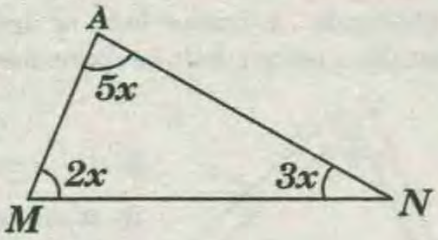
1) Calcular : ***"x"***



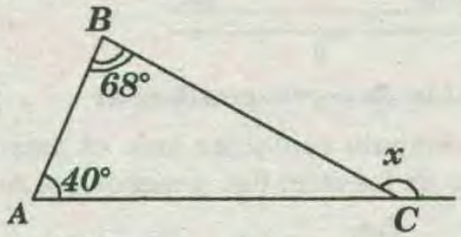
2) Calcular "x"



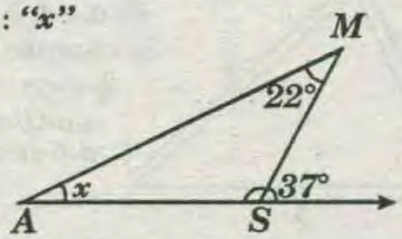
3) Calcular : "x"



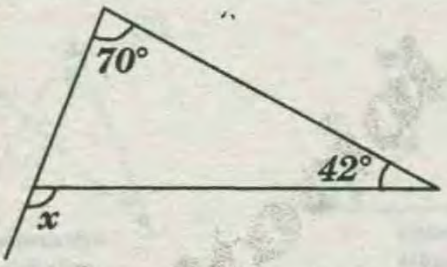
4) Calcular : "x"



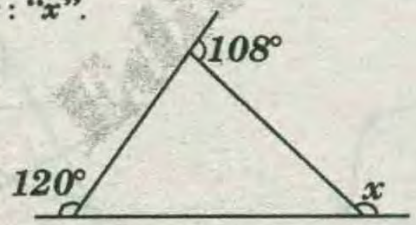
5) Calcular : "x"



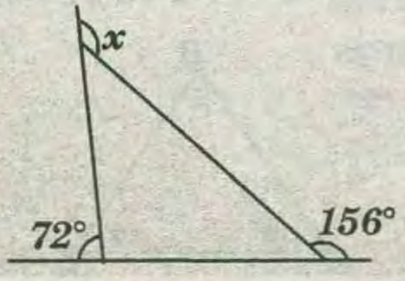
6) Calcular : "x"



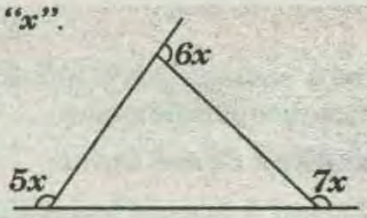
7) Calcular : "x".



8) Calcular "x"

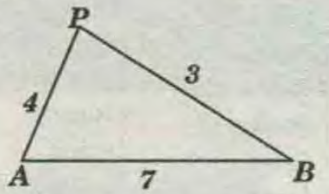


9) Calcular : "x".



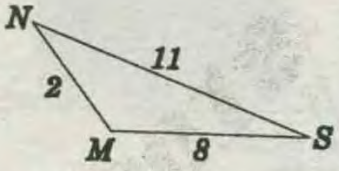
* Aplicando la condición, comprobar la existencia de los triángulos.

10)



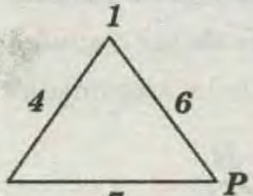
SI ☐ NO ☐

11)



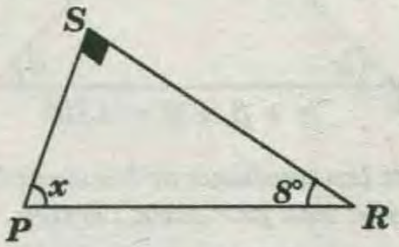
SI ☐ NO ☐

12)

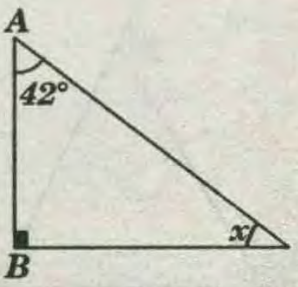


SI ☐ NO ☐

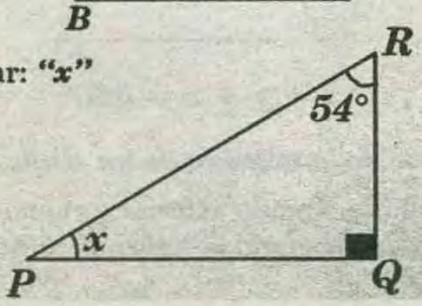
13) Calcular : "x"



14) Calcular "x"



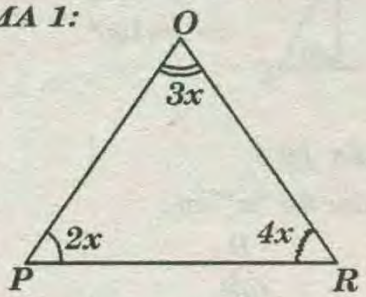
15) Calcular: "x"



PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Calcular x:



A) 20°
B) 30°
C) 35°
D) 10°
E) 40°

RESOLUCIÓN :

* Considerando la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos, se obtendrá :

$2x+3x+4x=180°$

$\Rightarrow 9x=180°$

$\Rightarrow x=20°$

RPTA : "A"

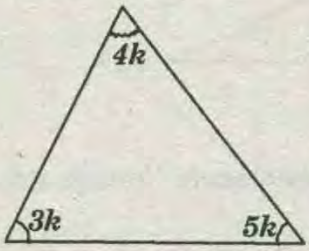
PROBLEMA 2:

Las medidas de los internos de un triángulo son proporcionales a *3* ; *4* y *5*. Calcular el mayor de ellos.

A)40° B)25° C)45° D)90° E)75°

RESOLUCIÓN :

* Graficando:



* De donde se deduce que:

$\Rightarrow 3k+4k+5k=180°$

$\Rightarrow 12k=180°$

$\Rightarrow k=\frac{180°}{12}=15°$

* Se pide el mayor , entonces será:

$\Rightarrow 5k=5(15°)=75°$

RPTA : "E"

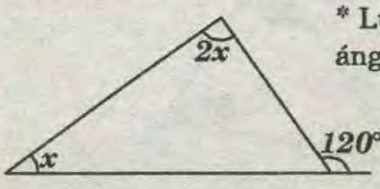
PROBLEMA 3 :

Un ángulo externo de un triángulo mide *120°*. De los ángulos externos no adyacentes, uno es el doble del otro. Entonces el mayor de estos ángulos mide:

A)20° B)90° C)100° D) 80° E)75°

RESOLUCIÓN:

* Graficando :



* Luego, por la propiedad del ángulo exterior, plantearemos

$\Rightarrow x+2x=120°$

$\Rightarrow 3x=120°$

$\Rightarrow x=40°$

*Se pide el mayor de los ángulos , es decir :

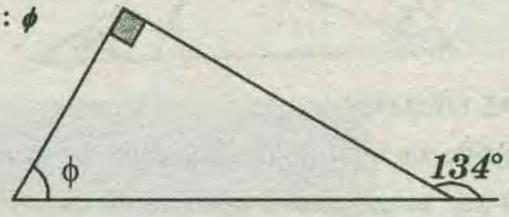
$\Rightarrow 2x=2(40°)=80°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 4:

Calcular : ϕ

A) 42°
B) 38°
C) 34°
D) 44°
E) 54°



RESOLUCIÓN:

* Por la propiedad del ángulo exterior, plantearemos:

$\Rightarrow 90°+\phi=134°$

$\Rightarrow \phi=134°-90°$

$\Rightarrow \phi=44°$

RPTA : "D"

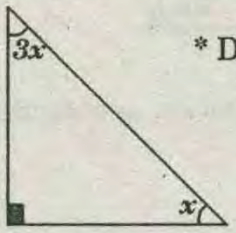
PROBLEMA 5 :

Uno de los ángulos de un triángulo rectángulo , es el triple del otro. ¿Cuánto mide cada ángulo?

A) 22° y 68° *B) 22° y 66°*
C) 10° y 30° *D) 22°30' y 67°30'*

RESOLUCIÓN:

* Graficando :



* De donde se deduce que:

$\Rightarrow 3x+x=90°$

$\Rightarrow 4x=90°$

$\Rightarrow x=\frac{90°}{4}=22°\ 30'$

*Luego los ángulos, serán:

$22°30'$ y el otro será:

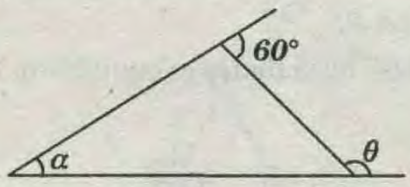
$\Rightarrow 3(22°30')=67°30'$

RPTA : "D"

PROBLEMA 6 :

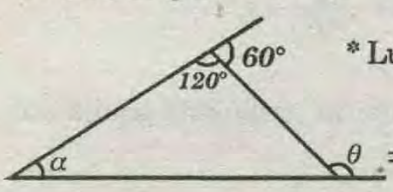
De la figura, calcular : $\theta-\alpha$

A) 20°
B) 30°
C) 60°
D) 100°
E) 120°



RESOLUCIÓN:

* Se deduce que:



* Luego por ángulo exterior:

$\alpha+120°=\theta$

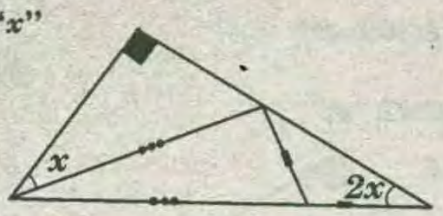
$\Rightarrow 120°=\theta-\alpha$

RPTA : "E"

PROBLEMA 7:

Calcular "x"

A) 18°
B) 20°
C) 30°
D) 25°
E) 45°

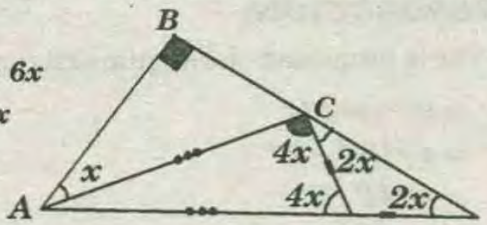


RESOLUCIÓN :

* Utilizando los triángulos isósceles, se obtendrá :

* Luego por la propiedad del ángulo exterior , en el triángulo ABC :

$x + 90° = 6x$
$\Rightarrow 90° = 5x$
$\Rightarrow 18° = x$

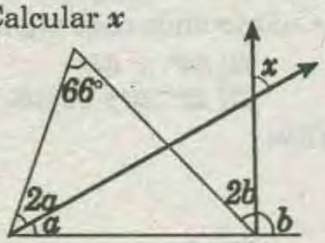


RPTA : "A"

PROBLEMA 8:

En la figura. Calcular x

A) 16°
B) 22°
C) 18°
D) 24°
E) 30°



RESOLUCIÓN:

* De la figura, por ángulo exterior, se obtendrá :

$66° + 3a = 3b$
$\Rightarrow 22° + a = b$ .....(I)

* Luego por ángulo opuesto por el vértice y ángulo exterior, plantearemos :

$a + x = b$ ..... (II)

* De (I) en (II):

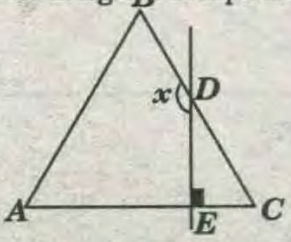
$a + x = 22° + a$
$\Rightarrow x = 22°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 9:

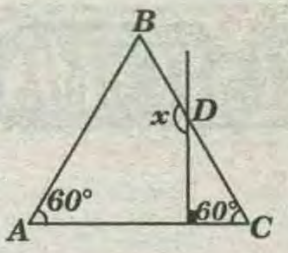
El triángulo ABC de la figura es equilátero. Hallar "x"

A) 120°
B) 150°
C) 130°
D) 140°
E) 110°



RESOLUCIÓN :

* Cada ángulo interior de un triángulo equilátero mide 60°, entonces :



* Luego por el ángulo exterior:

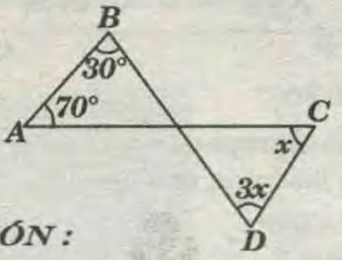
$x = 90° + 60°$
$\Rightarrow x = 150°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

Calcular el valor de "x" en :

A) 30°
B) 15°
C) 20°
D) 25°
E) 12°



RESOLUCIÓN :

* Por propiedad (considerando un ángulo exterior), Plantearemos:

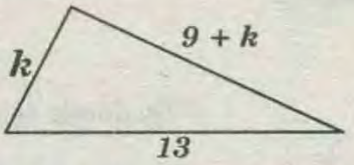
$70° + 30° = 3x + x$
$\Rightarrow 100° = 4x$
$\Rightarrow 25° = x$

RPTA : "D"

PROBLEMA 11:

Determinar el menor valor entero de "k".

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6



RESOLUCIÓN:

* Por la propiedad de la "existencia"(desigualdad triangular) , Plantearemos:

$9 + k - k < 13 < 9 + k + k$
$\rightarrow 9 < 13 < 9 + 2k$
$4 < 2k$
$\rightarrow 2 < k$
$\rightarrow k \in \{3; 4; 5; ....\}$

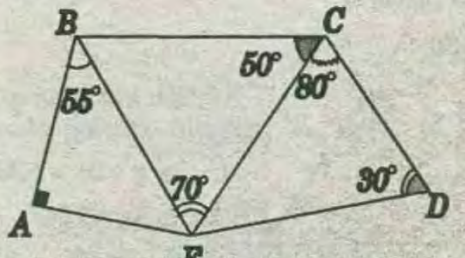
* Entonces el menor valor entero de "k",será : $k = 3$

RPTA : "B""

PROBLEMA 12:

En la figura mostrada, ¿Cuál de los segmentos es el menor de todos?

A) $\overline{AB}$
B) $\overline{BE}$
C) $\overline{AE}$
D) $\overline{BC}$
E) $\overline{CD}$



RESOLUCIÓN:

$\triangle BCE$:

$m\sphericalangle B=180°-(50°+70°)$

$\Rightarrow m\sphericalangle B=60°$

* Por relación entre lados y ángulos opuestos se tiene:

$m\sphericalangle E>m\sphericalangle B>m\sphericalangle C$

$\Rightarrow BC>EC>EB$

* $\triangle ABE$

$m\sphericalangle AEB=90°-55°$

$m\sphericalangle AEB=35°$

* Por relación entre lados y ángulos opuestos se tiene:

$m\sphericalangle A > m\sphericalangle ABE > m\sphericalangle AEB$

$\Rightarrow BE > AE > AB$

El menor de todos es $\overline{AB}$

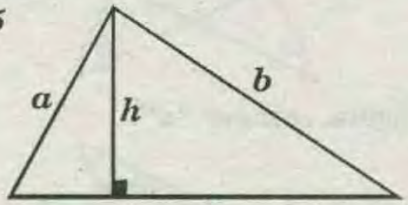
RPTA : "A"

PROBLEMA 13 :

Calcular el máximo valor entero de *"h"*

Si : $a+b=15$

A) 7
B) 5,5
C) 6,5
D) 7,5
E) 8



RESOLUCIÓN :

* De la figura, se deduce que : $a > h$ y $b > h$

* Luego :

$$\begin{array}{r} a>h \\ b>h \\ \hline a+b>2h \end{array} \oplus$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} > h \Rightarrow \frac{15}{2} > h \Rightarrow 7,5 > h$$

$$\Rightarrow h \in \{.....;5,6,7\}$$

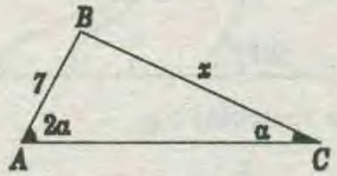
* Luego su máximo valor , será : $\Rightarrow h=7$

RPTA : "A"

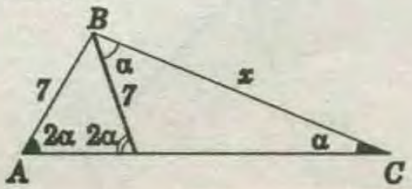
PROBLEMA 14 :

Calcular el máximo valor entero de *"x"*

A) 14
B) 13
C) 12
D) 11
E) 10



RESOLUCIÓN:



* Se traza la ceviana BP, de tal manera que $\sphericalangle PBC=a$

* Luego se forman los triángulos isósceles PBC y ABP.

* Ahora por desigualdad triangular , plantearemos:

$7-7<x<7+7$

$\Rightarrow 0< x< 14$

* Luego el máximo valor de *"x"*, será :

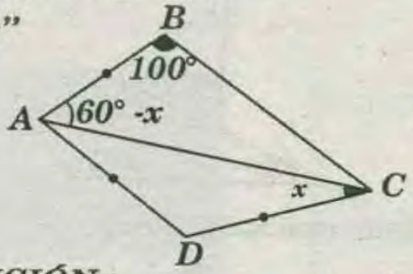
$\Rightarrow x=13$

RPTA : "B"

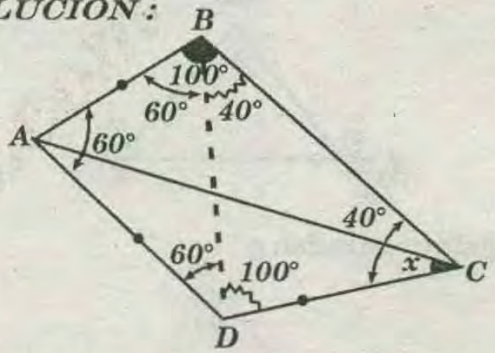
PROBLEMA 15:

Calcular *"x"*

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



RESOLUCIÓN :



* Se une BD, formándose el $\triangle$ equilátero ABD

* Luego se forma el $\triangle$ isósceles BDC $(BD = DC)$

* $\triangle ACD$ Isósceles $AD = DC$, entonces:

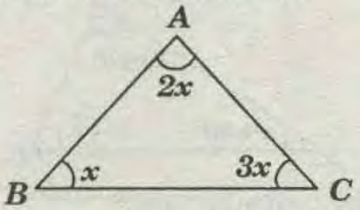
$x+x+60°+100°=180° \Rightarrow x=10°$

RPTA : "A"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

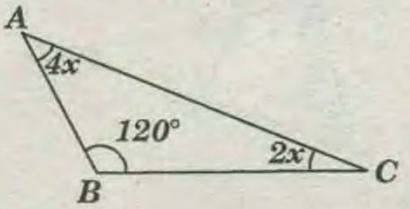
(01) Del gráfico mostrado calcular x.

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 35°



(02) Del gráfico mostrado, calcula x.

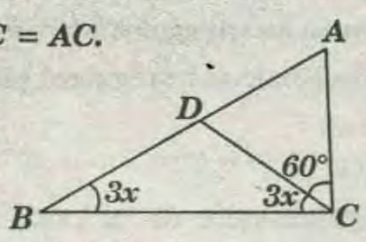
A) 10°
B) 40°
C) 20°
D) 15°
E) 35°



03 Del gráfico mostrado calcular $2x$.

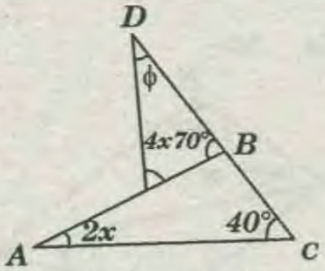
Si : $AD = DC = AC$.

A) 30°
B) 20°
C) 40°
D) 50°
E) 35°



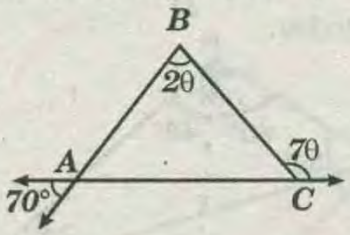
04 En el gráfico , calcular ϕ

A) 50°
B) 40°
C) 35°
D) 20°
E) 32°



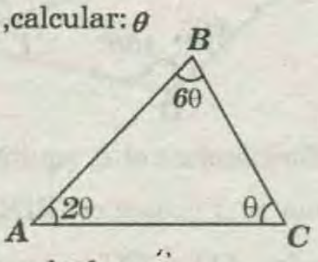
05 De la figura mostrada, calcular : θ.

A) 28°
B) 14°
C) 32°
D) 28°
E) 12°



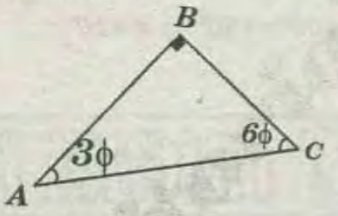
06 Del gráfico ,calcular: θ

A) 40°
B) 3°
C) 35°
D) 18°
E) 20°



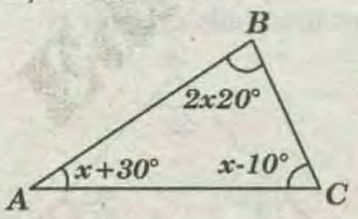
07 Del gráfico , calcular: ϕ

A) 20°
B) 10°
C) 40°
D) 42°
E) 37°



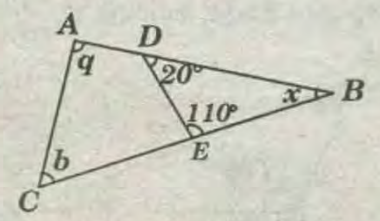
08 Del gráfico , calcular "x".

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 70°
E) 35°



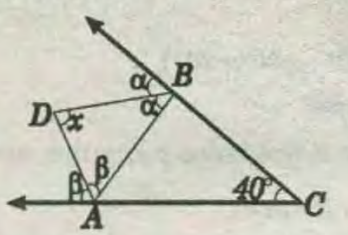
09 De la figura , calcular: $\phi + \beta$

A) 30°
B) 60°
C) 130°
D) 40°
E) 20°



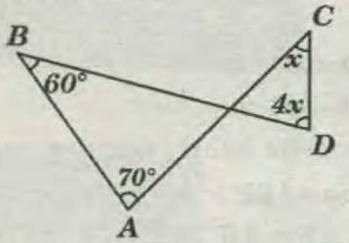
10 Del gráfico , calcular : "x".

A) 40°
B) 70°
C) 50°
D) 58°
E) 60°



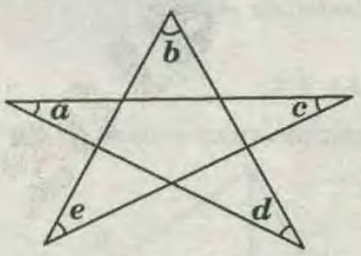
11 De la figura, calcular x.

A) 50°
B) 35°
C) 40°
D) 26°
E) 30°



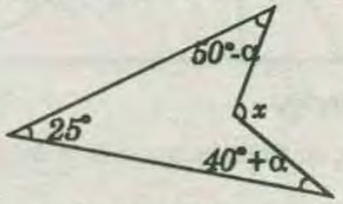
12 Calcular "$a+b+c+d+e$"

A) 180°
B) 270°
C) 360°
D) 540°
E) 135°



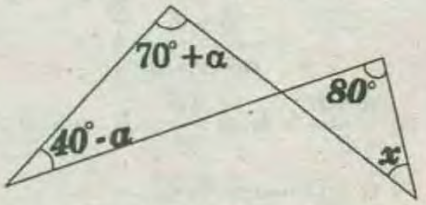
13 En la figura, calcular "x".

A) 105°
B) 125°
C) 130°
D) 115°
E) 120°



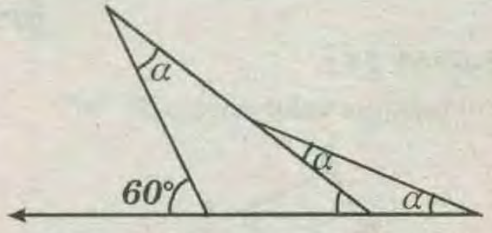
14 En la figura , calcular "x"

A) 35°
B) 40°
C) 25°
D) 20°
E) 30°



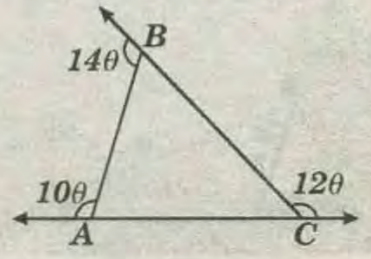
15 En la figura, calcular "α"

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 15°
E) 10°



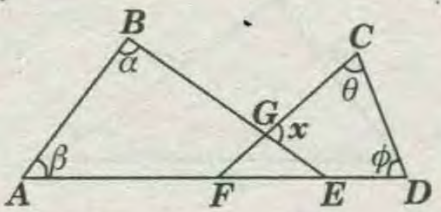
16 Del gráfico , calcular : θ

A) 20°
B) 10°
C) 50°
D) 90°
E) 65°



(17) En el gráfico , Si : $\beta+\alpha=120°$ y $\theta+\phi=160°$

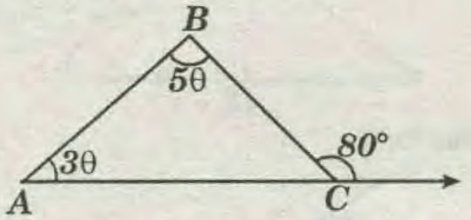
Calcular "x"



A) 90°
B) 40°
C) 80°
D) 100°
E) 95°

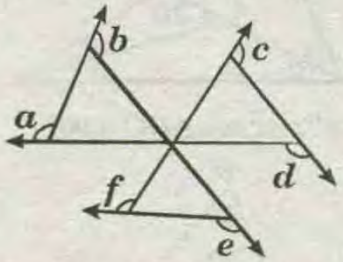
TAREA DOMICILIARIA

(01) Del gráfico , calcular 2θ.



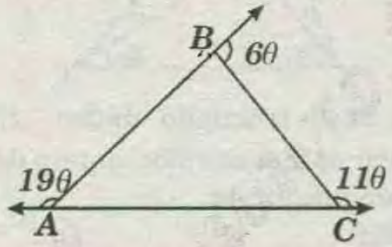
A) 10°
B) 35°
C) 20°
D) 40°
E) 60°

(02) En la figura, calcular $(a+b+c+d+e+f)$



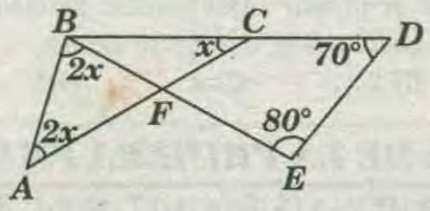
A) 180°
B) 360°
C) 540°
D) 720°
E) 900°

(03) Del gráfico mostrado, calcular: θ



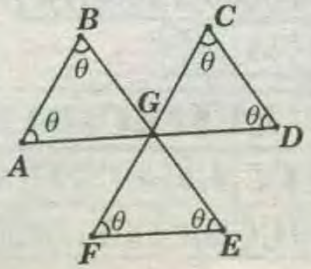
A) 20°
B) 15°
C) 18°
D) 10°
E) 40°

(04) Del gráfico mostrado , calcular : $2x$.



A) 60°
B) 24°
C) 30°
D) 40°
E) 32°

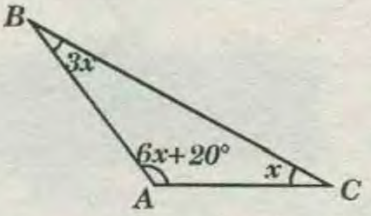
(05) De la figura mostrada , calcular: 6θ



A) 160°
B) 545°
C) 360°
D) 240°
E) 190°

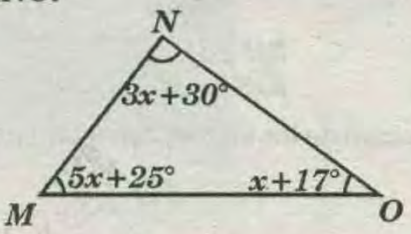
SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

(01) En la siguiente figura , calcular la medida del ángulo mayor:



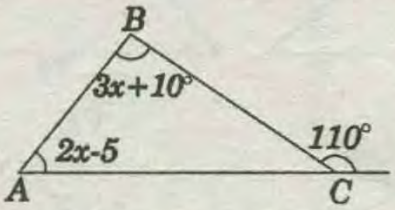
A) 10°
B) 116°
C) 117°
D) 102°
E) 110°

(02) Calcular la medida del ángulo intermedio del triángulo MNO.



A) 75°
B) 12°
C) 36°
D) 66°
E) 29°

(03) Se tiene el ΔABC , calcular la $m\sphericalangle B - m\sphericalangle A$

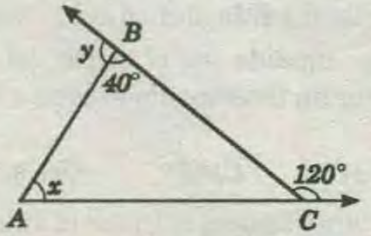


A) 73°
B) 37°
C) 66°
D) 75°
E) 76°

(04) En el triángulo RST, la $2m\sphericalangle R = 60°$ y $m\sphericalangle S = 20°$
¿Cuál es el lado de menor medida de dicho triángulo?

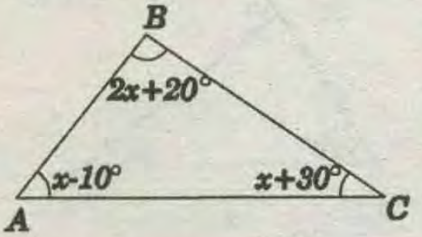
A) $\overline{RS}$ B) $\overline{ST}$ C) $\overline{RT}$ D) $\overline{QT}$ E) A y B

(05) En el siguiente gráfico, calcular "$x+y$"



A) 200°
B) 220°
C) 240°
D) 80°
E) 210°

(06) Calcular $m\sphericalangle B - m\sphericalangle C$



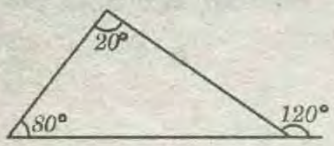
A) 35°
B) 65°
C) 25°
D) 70°
E) 45°

(07) Uno de los ángulos de un triángulo es triple del menor. Si el otro ángulo mide $60°$. Calcular la medida del menor de los ángulos del triángulo.

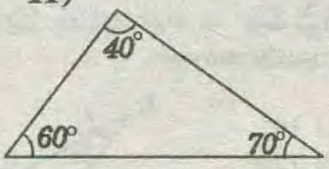
A) 30° B) 50° C) 120° D) 20° E) 100°

(08) Indica cuál de los siguientes triángulos es imposible su construcción:

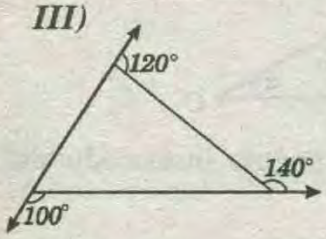
I)



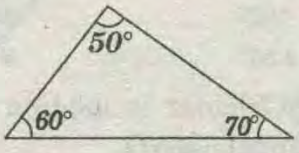
II)



III)



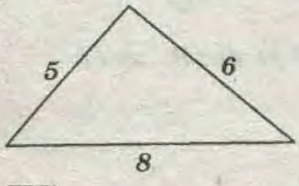
IV)



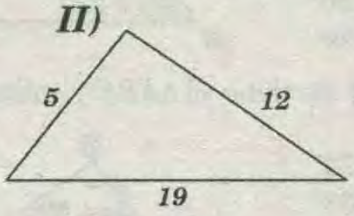
A) I y III B) I y IV C) Sólo I
D) I y II E) Sólo II

(09) Señale, ¿cual de los siguientes triángulos existen?

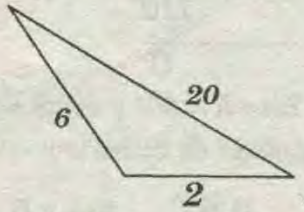
I)



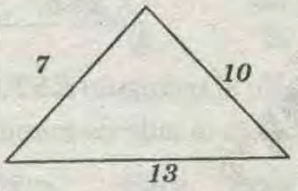
II)



III)



VI)



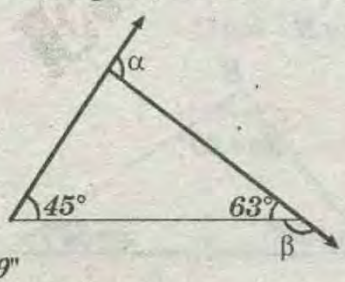
A) Sólo IV B) I y II C) Sólo III
D) I y IV E) B y C

(10) Calcular la medida del mayor ángulo de un triángulo; cuya medida es el duplo del menor y la medida del ángulo intermedio excede a la del menor ángulo en 16°.

A) 80° B) 41° C) 82° D) 100° E) 83°

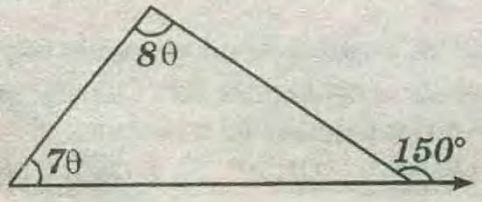
(11) En la siguiente figura, calcular el valor de "$\beta - \alpha$"

A) 19°
B) 9°
C) 10°
D) 11°
E) 10°



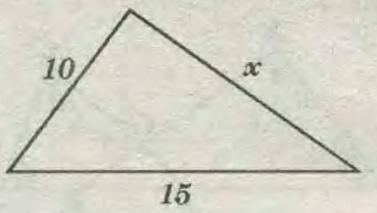
(12) Calcular "θ"

A) 20°
B) 30°
C) 15°
D) 10°
E) 25°



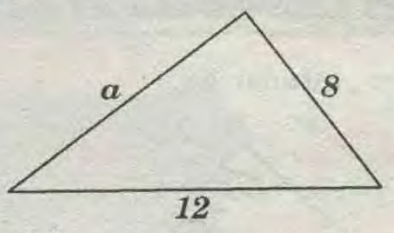
(13) Calcular el menos valor entero primo que puede tomar "x"

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 11



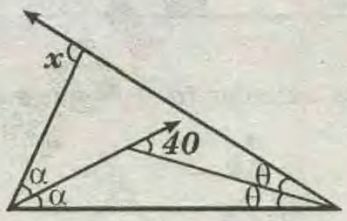
(14) Calcular la suma de los valores enteros pares que puede tomar el valor de "α"

A) 90
B) 82
C) 84
D) 86
E) 98



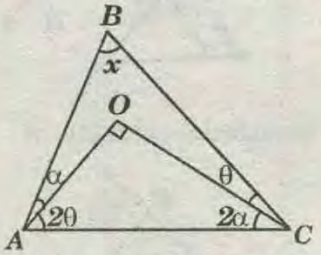
(15) Calcular "x"

A) 40°
B) 60°
C) 80°
D) 120°
E) 100°



(16) Calcular "x", si $m\sphericalangle AOC = 90°$

A) 35°
B) 45°
C) 90°
D) 135°
E) 25°



(17) Los lados de un triángulo miden 12 ; $(x+4)$; $(x+5)$ calcular al menor valor entero de "x", para que dicho triángulo exista.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(18) Los lados de un triángulo miden $(a+2)$; $(a+3)$ y 8. Calcular el menor valor entero primo que puede tomar "a" para que el triángulo exista.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)B	2)A	3)B	4)A	5)B	6)D	7)B	8)E	9)C	10)B
11)D	12)A	13)D	14)E	15)A	16)B	17)C			
1)C	2)D	3)D	4)A	5)C					

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)B	2)D	3)C	4)C	5)B	6)C	7)A	8)D	9)D	10)C
11)B	12)D	13)B	14)C	15)C	16)B	17)B	18)A		

TRIANGULOS II

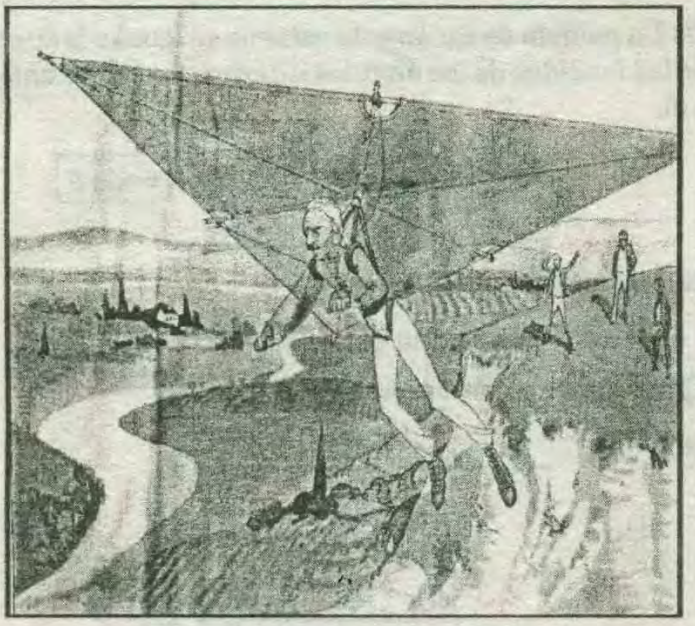
CAPITULO 9C

OBJETIVOS :

Al finalizar el capítulo, el alumno será capaz de:

* *Reconocer al triángulo, como su clasificación y propiedades.*

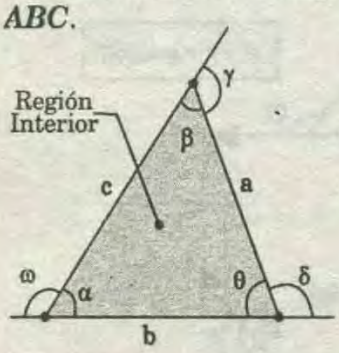
* *Aplicar , correctamente los teoremas fundamentales de los triángulos de acuerdo a los condiciones de un problema.*



TRIÁNGULO

Figura geométrica formada por tres segmentos no colíneales y de extremos comunes.

* Notación de un triángulo : $\triangle ABC$, se lee: triángulo ABC.



* Vértices: A , B ,C
* Lados: $\overline{AB};\overline{AC},\overline{BC}$
* Ángulos: Internos: α,β,θ
  Externos: ω,γ,δ
* Perímetro: $2p=a+b+c$

* Semiperímetro : $p=\dfrac{a+b+c}{2}$

NOTA I :

Las medidas de los lados se designa por letra minúscula del vértice opuesto a dicho lado.

$BC = a$; $AC = b$; $AB = c$

NOTA II:

Todo triángulo divide al plano en tres subconjuntos de puntos.

* Punto interiores al triángulo
* Puntos exteriores al triángulo y
* Puntos del triángulo.

NOTA III:

Región triangular es una figura formada por los puntos del triángulo y los puntos interiores al triángulo.

NOTA IV:

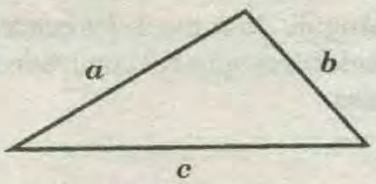
Cuando se dice área de triángulo, se refiere al área de la región triangular.

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

I) SEGÚN SUS LADOS

A) $\triangle$ ESCALENO :

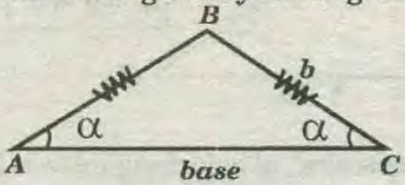
Todos sus lados son de diferente medida.



$a \neq b \neq c$

B) $\triangle$ISÓSCELES :

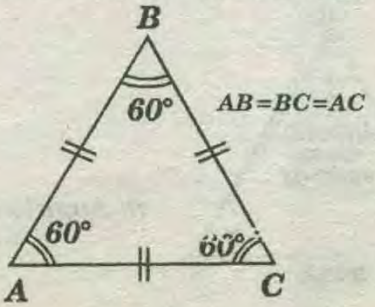
Tiene dos lados iguales y dos ángulos iguales



$AB=BC$

C) $\triangle$ EQUILÁTERO :

Todos sus lados son iguales y sus ángulos interiores miden $60°$.

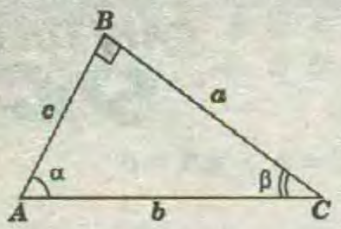


$AB=BC=AC$

II) SEGÚN SUS ÁNGULOS :

a) TRIÁNGULO RECTÁNGULO :

Un ángulo interior mide $90°$



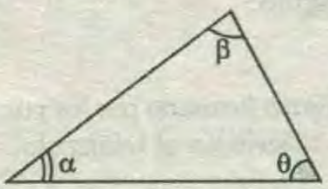
* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$: catetos
* $\overline{AC}$: Hipotenusa
* $\alpha+\beta=90°$

* Teorema de Pitágoras : $a^2 + c^2 = b^2$

b) TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS :

**** Triángulos Acutángulos:***

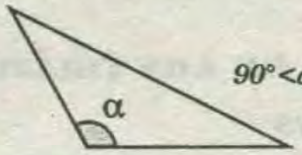
Todos sus ángulos interiores son agudos.



$0°<\alpha<90°$
$0°<\beta<90°$
$0°<\theta<90°$

**** Triángulo obtusángulo :***

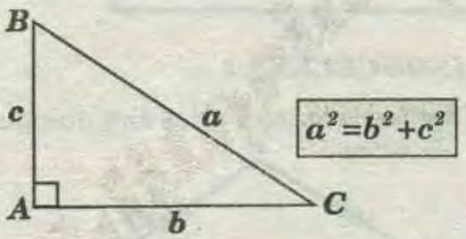
Tiene un ángulo interior obtuso



$90°<\alpha<180°$

TEOREMA DE PITÁGORAS

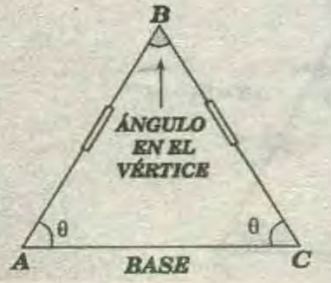
En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.



$a^2=b^2+c^2$

NOTA :

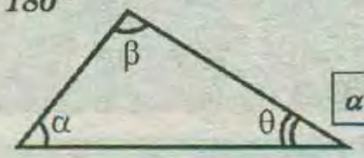
En todo triángulo isósceles , al lado desigual se le llama base y al ángulo que se opone a ella se le conoce como ángulo en el vértice o ángulo desigual. Los dos ángulos de la base son iguales.



θ: Angulo de la base

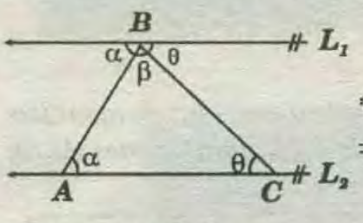
PROPIEDADES FUNDAMENTALES DEL TRIANGULO

I) La suma de la medidas de los ángulos internos es igual a $180°$



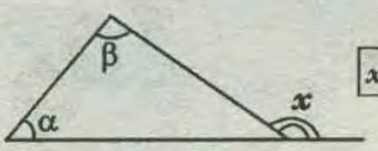
$\alpha+\beta+\theta=180°$

DEMOSTRACIÓN:



* Por "AB" una paralela de $\overline{AC}$
$\Rightarrow$ en "B": $\alpha+\beta+\theta=180°$

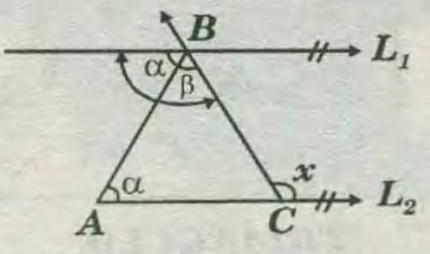
II) La medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes a él.



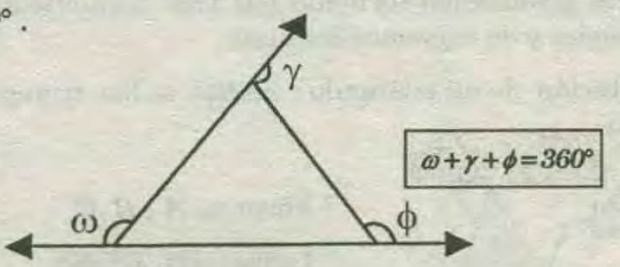
$x=\alpha+\beta$

DEMOSTRACIÓN:

* Por "B" se traza una paralela a $\overline{AC}$
$\Rightarrow$ por alternos internos : $x=\alpha+\beta$



III) La suma de las medidas de los ángulos es igual a $360°$.

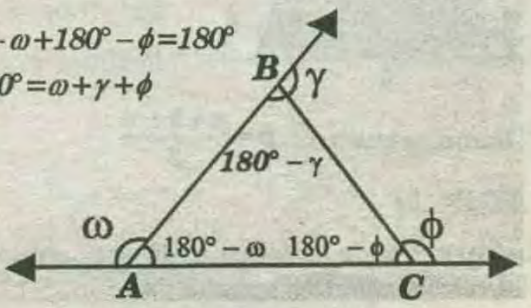


$\omega+\gamma+\phi=360°$

DEMOSTRACIÓN:

* En el $\triangle ABC$:

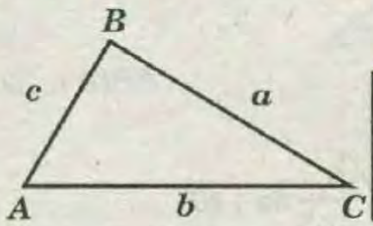
$180°-\gamma+180°-\omega+180°-\phi=180°$
$\Rightarrow 360°=\omega+\gamma+\phi$



IV) TEOREMA DE LA EXISTENCIA DEL TRIANGULO

La medida de un lado es siempre menor que la suma de las medidas de los otros dos lados, pero mayor que su diferencia.

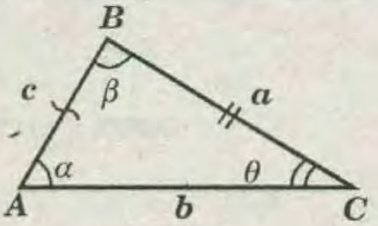
A esta propiedad se llama también ***"DESIGUALDAD TRIANGULAR"***.



$$b-c<a<b+c$$
$$a-c<b<a+c$$
$$b-a<c<b+a$$

V)REGLA DE LA CORRESPONDENCIA :

A mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa. A menor lado se opone menor ángulo y viceversa. A lado congruentes se oponen ángulos congruentes y viceversa.



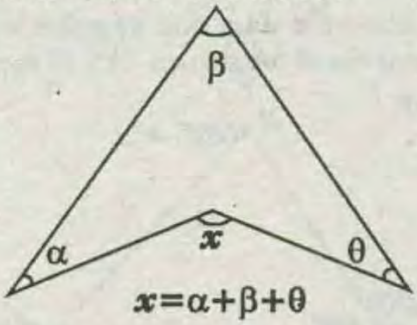
$$\begin{cases}\text{Si: } \theta<\alpha \Rightarrow c<a \\ \beta>\theta \Rightarrow b>c\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{Si: } c<b \Rightarrow \theta<\beta \\ b>a \Rightarrow \beta>\alpha\end{cases}$$

* Por consecuencia un triángulo isósceles a lados iguales se oponen ángulos iguales ; y en un triángulo equilátero si los tres lados son iguales , entonces los tres ángulos son iguales (***60°*** cada uno)

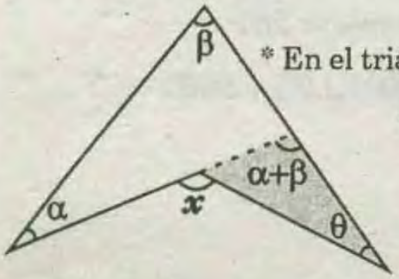
PROPIEDADES

I) CUADRILATERO CÓNCAVO:



$$x=\alpha+\beta+\theta$$

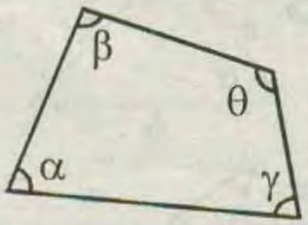
DEMOSTRACIÓN :



* En el triángulo sombreado

$$x=\alpha+\beta+\theta$$

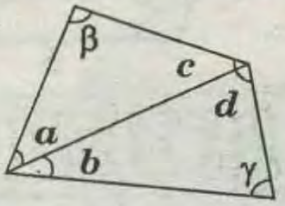
II) CUADRILÁTERO CUALQUIERA:



$$\alpha+\beta+\theta+\gamma=360°$$

DEMOSTRACIÓN:

* De la figura:

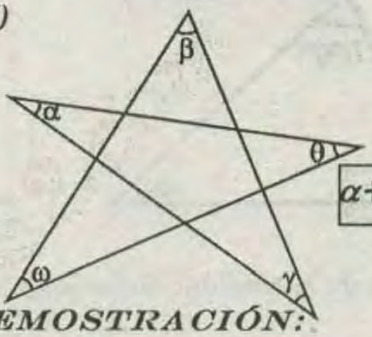


$$\left.\begin{array}{l}a+\beta+c=180° \\ b+\gamma+d=180°\end{array}\right\}(+)$$

$$\underbrace{a+b}_{\beta}+\beta+\gamma+\underbrace{c+d}_{\theta}=360°$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma+\theta=360°$$

III)



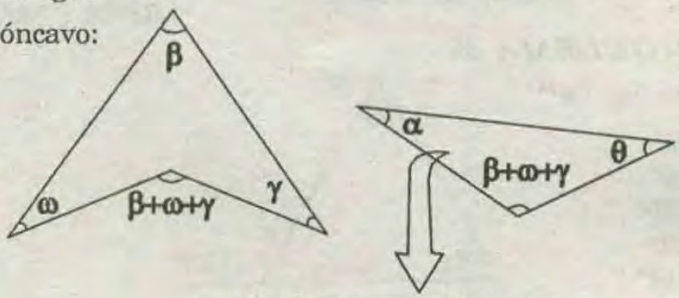
$$\alpha+\beta+\theta+\gamma+\omega=180°$$

DEMOSTRACIÓN:

* Por cuadrilátero

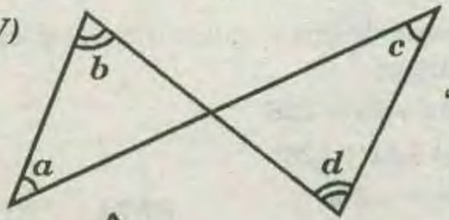
* Luego:

Cóncavo:



$$\alpha+\beta+\theta+\gamma+\omega=180°$$

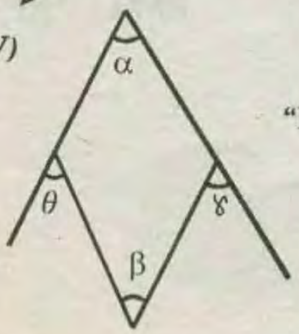
IV)



"Propiedad de la mariposa"

$$a+b=c+d$$

V)

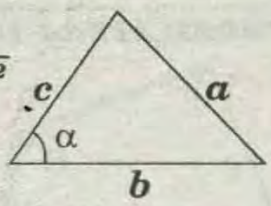


"Propiedad del pescado"

$$\alpha+\beta=\theta+\gamma$$

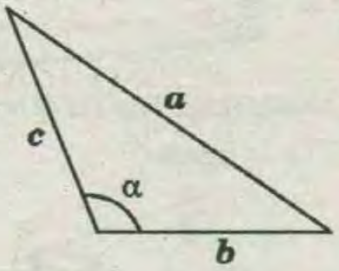
VI)

* Si: $\alpha<90° \Rightarrow a<\sqrt{b^2+c^2}$



VI)

* Si: $\alpha>90° \Rightarrow a>\sqrt{b^2+c^2}$

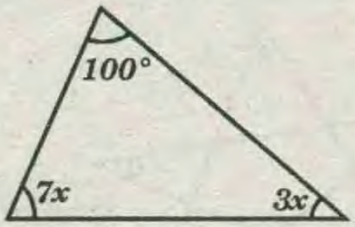


PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Calcular *"x"*

A) 6°
B) 8°
C) 10°
D) 20°
E) 62°



RESOLUCIÓN:

* Sabemos que La suma de la medidas de los ángulos interiores es *180°*,

Luego : $7x+3x+100°=180°$

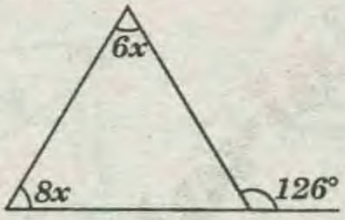
$\Rightarrow 10x=80° \Rightarrow x=8°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 2:

Calcular *"x"*

A) 6°
B) 9°
C) 10°
D) 7°
E) 14°



RESOLUCIÓN:

* Sabemos que la suma de dos ángulos interiores es igual a un exterior, luego:

$8x + 6x = 126°$

$\Rightarrow 14x = 126°$

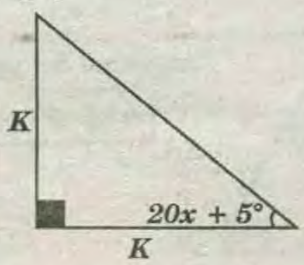
$\Rightarrow x = 9°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

Calcular *"x"*

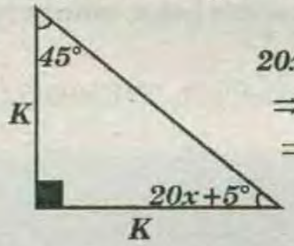
A) 1°
B) 2°
C) 3°
D) 4°
E) 20°



RESOLUCIÓN:

* Como

Es un triángulo rectángulo isósceles , Luego:



$20x+5°=45°$

$\Rightarrow 20x=40°$

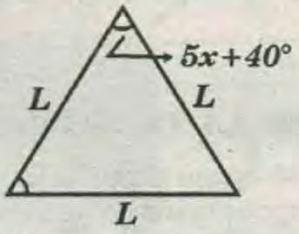
$\Rightarrow x=2°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

Calcular *"x"*

A) 10°
B) 20°
C) 2°
D) 4°
E) 5°



RESOLUCIÓN:

* Como se trata de un triángulo equilátero; luego:

$5x+40=60°$

$\Rightarrow 5x=20°$

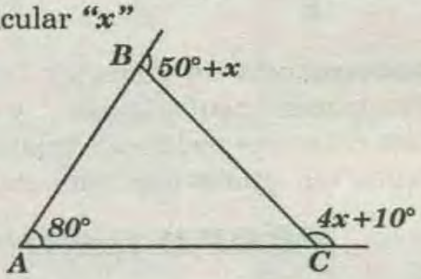
$\Rightarrow x=4$

RPTA : "D"

PROBLEMA 5 :

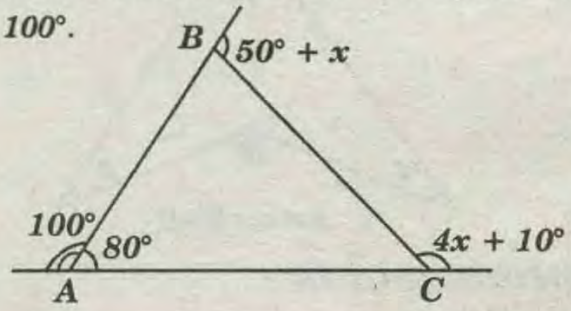
En la figura , calcular *"x"*

A) 20°
B) 10°
C) 14°
D) 12°
E) 40°



RESOLUCIÓN :

* Notemos que nos dan dos ángulos externos , buscamos entonces el tercero en *"A"*. El suplemento de *80°* es *100°*.



* Por : suma de $\sphericalangle_s$ externos = *360°*

$100°+(x + 50°)+(4x+10°)=360°$

$\Rightarrow 5x+160°=360°$

$\Rightarrow 5x=200°$

$\Rightarrow x=40°$

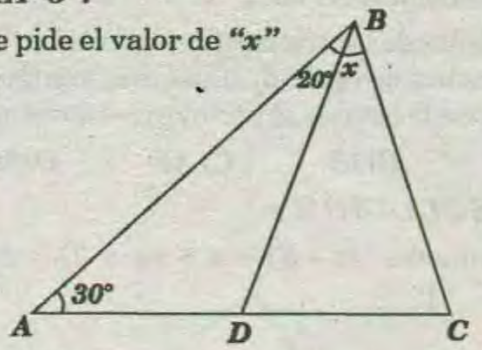
RPTA : "E"

PROBLEMA 6 :

En la figura se pide el valor de "x"

Si : $DB = BC$

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 80°
E) 12°



RESOLUCIÓN:

* Como $DB = BC$

$\triangle ABC$: Isósceles

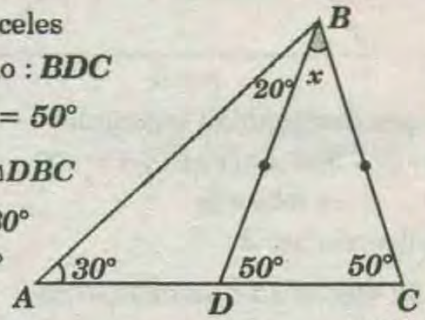
* Por $\sphericalangle$ externo : BDC

$30° + 20° = 50°$

*Finamente : $\triangle DBC$

$50°+50°+x=180°$

$\Rightarrow x=80°$

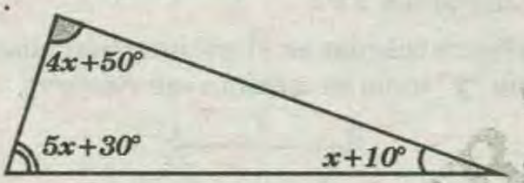


RPTA : "D"

PROBLEMA 7 :

Hallar "x".

A) 8°
B) 9°
C) 10°
D) 18°
C) 6°



RESOLUCIÓN:

* Por suma de ángulos internos se tiene :

$5x+30°+4x+50°+x+10°=180°$

$\Rightarrow 10x+90°=180°$

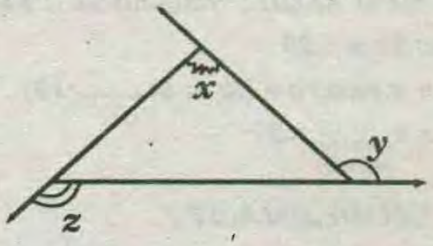
$\Rightarrow x=9°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 8 :

En el siguiente gráfico , calcular "x", si : $z + y = a$

A) $2a$
B) $a - 180°$
C) $90° + a$
D) $180° - a$
E) $45° + a$



RESOLUCIÓN:

* Por suma de ángulos externos se tiene :

$z+y+180° - x=360°$

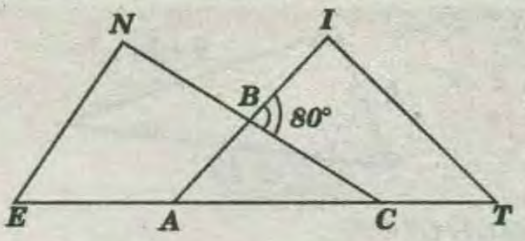
$\Rightarrow a+180° - x=360° \Rightarrow x=a - 180°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 9 :

Hallar : $m\sphericalangle E+m\sphericalangle N+m\sphericalangle I+m\sphericalangle T$

A) 20°
B) 320°
C) 280°
D) 310°
E) 225°



RESOLUCIÓN :

* ΔENC : por suma de dos ángulos internos

$m \sphericalangle NCT = m \sphericalangle E + m \sphericalangle N$

* ΔAIT : Por suma de dos ángulos internos

$\Rightarrow m\sphericalangle EAI=m\sphericalangle I+m\sphericalangle T$

* ΔABC : Por suma de ángulos externos :

$m\sphericalangle NCT+m\sphericalangle EAI+80°=360°$

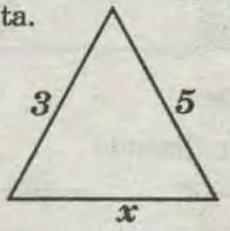
$\Rightarrow m\sphericalangle E+m\sphericalangle N+m\sphericalangle I+m\sphericalangle T=280°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

Calcular el máximo valor entero que toma "x" para que el triángulo exista.

A) 6
B) 7
C) 7,1
D) 7,9
E) 8



RESOLUCIÓN:

* Por desigualdad triangular.

$5 - 3<x<5+3$

$\Rightarrow 2<x<8 \Rightarrow x \in \{3; 4; 5; 6; 7\}$

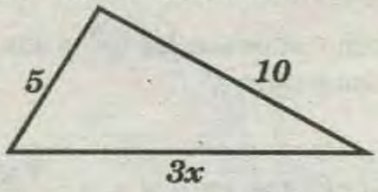
* Se desea a : $x = 7$

RPTA : "B"

PROBLEMA 11:

Hallar el máximo valor entero de "x"

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 6



RESOLUCIÓN:

* Por desigualdad triángular :

$10 - 5<3x<10+5 \qquad 5<3x<15$

* Entre 3: $\frac{5}{3}<\frac{3x}{3}<\frac{15}{3}$

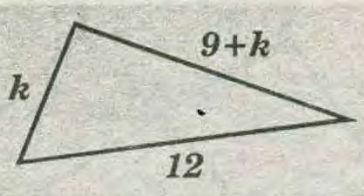
$\Rightarrow 1,66<x<5 \quad \Rightarrow x_{\substack{máximo\\entero}}=4$

RPTA : "D"

PROBLEMA 12 :

Determinar el menor valor entero de "k"

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



RESOLUCIÓN :

* Por desigualdad triangular :

$$(9+k)-k<12<(9+k)+k \Rightarrow 9<\underbrace{12<9+2k}_{\Rightarrow 3<2k}$$

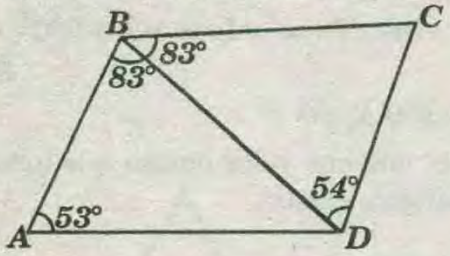
$$\Rightarrow \frac{3}{2}<k \Rightarrow 1,5<k \Rightarrow k_{\substack{mínimo\\entero}}=2$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 13 :

En la figura ¿Cuál es el segmento más pequeño?

A) AB
B) BC
C) AD
D) BD
E) CD



RESOLUCIÓN :

* Observando y analizando :

* (I) $\Delta BCD \Rightarrow \hat{C}=43^\circ \quad \Rightarrow \overline{BD}$: menor lado ΔBCD

* (II) $\Delta ABD \Rightarrow A\hat{D}B=44^\circ \quad \Rightarrow \overline{AB}$: menor lado ΔBCD

* De (I) y (II) ; AB: menor segmento.

RPTA : "A"

PROBLEMA 14 :

Los lados de un triángulo isósceles miden 4 y 18. Hallar su perímetro.

A)20 B) 30 C)40 D) 80 E)100

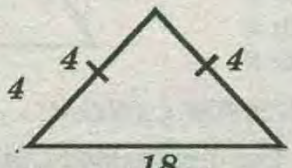
RESOLUCIÓN :

* No nos dicen cuales son los lados iguales , entonces analizamos los 2 casos :

CASO I :

* Existencia: $4-4<18<4+4$

$\underbrace{0<18<8}_{absurdo} \Rightarrow \Delta$ No existe



CASO II :

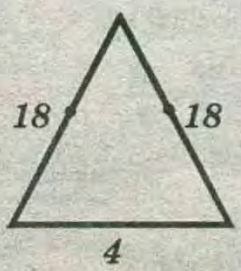
* Existencia :

$0<4<36$ (correcto)

$\Rightarrow \Delta$Si existe

* Perímetro :

$18+18+4=40$



RPTA: "C"

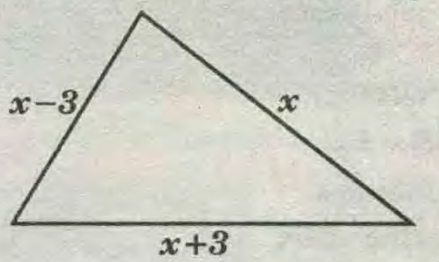
PROBLEMA 15 :

Los lados de un triángulo se encuentra en progresión aritmética de razón 3. ¿Cuál es el mínimo valor entero que puede asumir el perímetro del triángulo?

A)6 B)18 C) 19 D)20 E) 21

RESOLUCIÓN :

* Perímetro : $(x-3)+x+(x+3)=3x$



* Ahora por desigualdad triangular :

$$(x+3)-(x-3)<x<(x+3)+(x-3)$$

$$\Rightarrow 6<x<2x$$

* Multiplicando por 3 :

$$18<3x<6x \Rightarrow 18<\text{perímetro}<6x$$

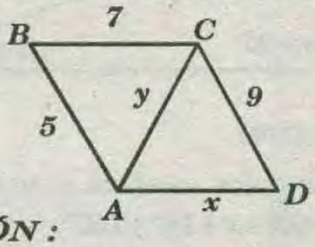
* Luego el mínimo entero del perímetro es 19.

RPTA : "C"

PROBLEMA 16 :

En la figura calcular en el mínimo valor entero de "x", cuando "y" toma su máximo valor entero.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 11



RESOLUCIÓN :

* En el ΔABC :

$$7-5<y<7+5 \Rightarrow 2<y<12$$

$$\Rightarrow y_{entero} \in \{3;\ 4;\ 5;.....;11\} \Rightarrow y_{\substack{máximo\\entero}}=11$$

* En el ΔACD: "Existencia" : $11-9<x<11+9$

$$\Rightarrow 2<x<20$$

$$\Rightarrow x\ entero \in \{3;\ 4;\ 9;\ .....;19\}$$

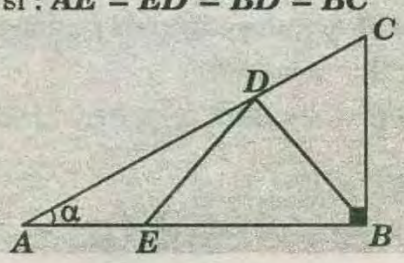
$$\Rightarrow x_{\substack{mínimo\\entero}}=3$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 17 :

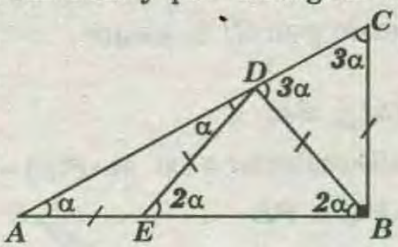
Calcular "α", si : $AE = ED = BD = BC$

A) 20°
B) 45°
C) 22°30'
D) 37°
E) 35°30'

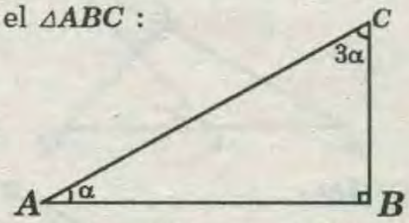


RESOLUCIÓN :

Por ángulo exterior y por triángulo isósceles, se obtendrá :



* Luego en el $\triangle ABC$:



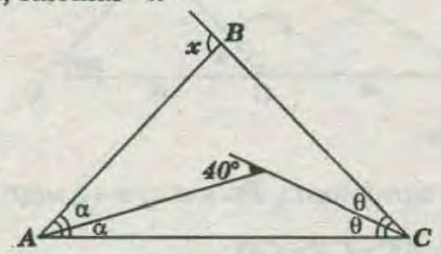
* Del triángulo : $4\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 22°30'$

RPTA: "C"

PROBLEMA 18 :

En la figura, calcular **"x"**

A) 60°
B) 80°
C) 75°
D) 120°
E) 90°



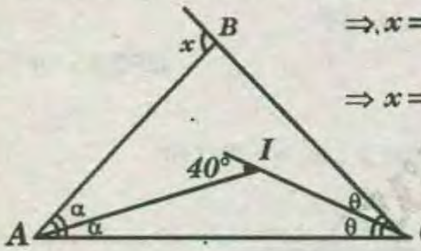
RESOLUCIÓN:

* $\triangle AIC$: $\measuredangle$ externo : $\alpha + \theta = 40°$

* $\triangle ABC$: $\measuredangle$ externo : $x = 2\alpha + 2\theta$

$\Rightarrow x = 2(\underbrace{\alpha + \theta}_{40°})$

$\Rightarrow x = 80°$

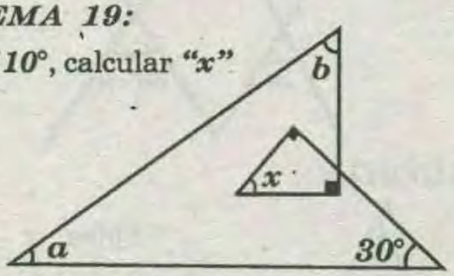


RPTA : "B"

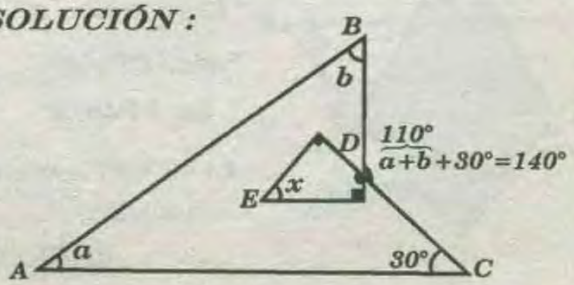
PROBLEMA 19:

Si: $a + b = 110°$, calcular **"x"**

A) 20°
B) 40°
C) 30°
D) 50°
E) 70°



RESOLUCIÓN :



* Por cuadrilátero cóncavo :

$m\measuredangle BDC = a + b + 30° = 140°$

* Ahora en el cuadrilátero pequeño :

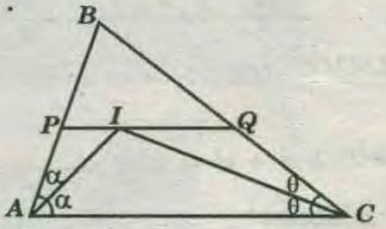
$x + 90° + 140° + 90° = 360° \Rightarrow x = 40°$

RPTA: " B"

PROBLEMA 20 :

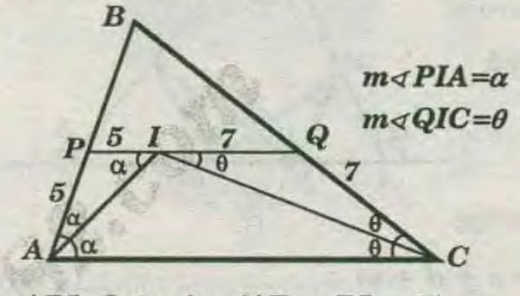
En la figura : $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AC}$ y $AP = 5$, $QC = 7$. Calcular el valor de **"PQ"**.

A) 10
B) 8
C) 12
D) 14
E) 11



RESOLUCIÓN :

* Por alternos internos :



$\Rightarrow$ API : Isósceles $(AP = PI = 5)$

$DIQC$: Isósceles $(IQ = QC = 7)$

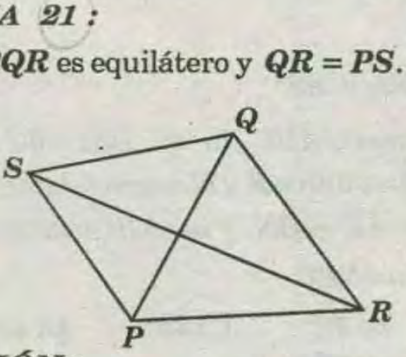
$\Rightarrow PQ = 5 + 7 = 12$

RPTA: "C"

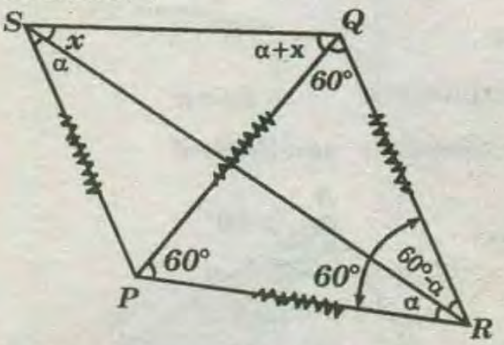
PROBLEMA 21 :

El triángulo PQR es equilátero y $QR = PS$. Calcular: $m\measuredangle QSR$.

A) 20°
B) 30°
C) 25°
D) 45°
E) 32°



RESOLUCIÓN :



* $\triangle SPQ$: Isósceles $m\measuredangle PSQ = m\measuredangle SQP = \alpha + x$

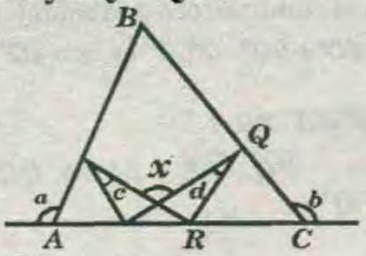
* $\triangle SQR$: $x + \cancel{\alpha} + x + 60° + 60° - \cancel{\alpha} = 180° \Rightarrow x = 30°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 22 :

Según el grafico calcular x , si $a+b+c+d=290°$. Además $AB=BC$ y $RQ=QC$:

A) 90°
B) 100°
C) 110°
D) 120°
E) 150°



RESOLUCIÓN:

* Piden: x

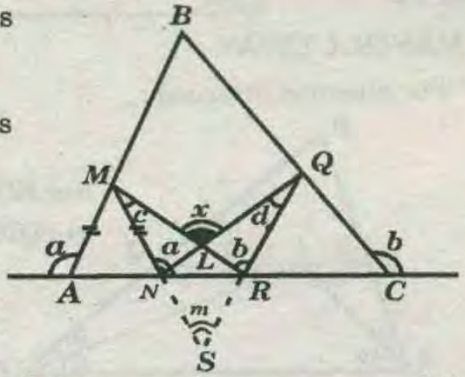
* Dato: $a+b+c+d=290°$ .....(I)

$\triangle AMN$ isósceles

$\Rightarrow m\sphericalangle MNR=a$

* $\triangle RQC$ isósceles

$\Rightarrow m\sphericalangle TRM=b$



* Del gráfico :

$\blacktriangle MSQL$: $x=c+d+m$ ..... (II)

* $\triangle NRS$

$180°=a+b-m$ .....(III)

* De (II)+(III): $x+180°=a+b+c+d$

$\Rightarrow x=110°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 23:

En un triángulo ABC , la $m\sphericalangle BAC=60°$ en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos E y N respectivamente , de modo que $AB=AE=BN$, y $m\sphericalangle ABC=m\sphericalangle ENB$.

Calcular : $m\sphericalangle NEC$

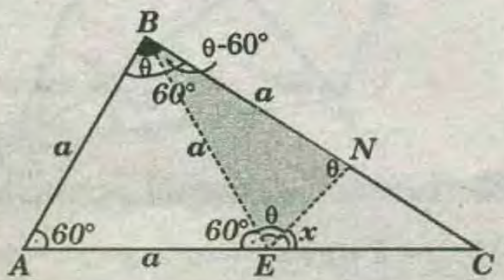
A) 20° B) 40° C) 45° D) 60° E) 50°

RESOLUCIÓN :

* Piden: x

* $\triangle ABE$ equilátero $\Rightarrow BE=a$

* $\triangle EBN$ isósceles : $m\sphericalangle BEN=\theta$



* En E :

$60°+\theta+x=180° \Rightarrow x=120°-\theta$.....(I)

* $\triangle EBN$: $(\theta-60°)+\theta+\theta=180° \Rightarrow \theta=80°$

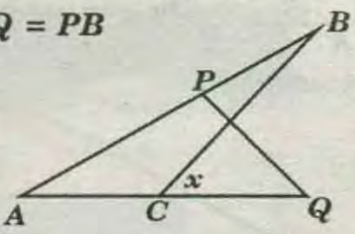
* Reemplazando θ en (I) $\Rightarrow x=40°$

RPTA: "B"

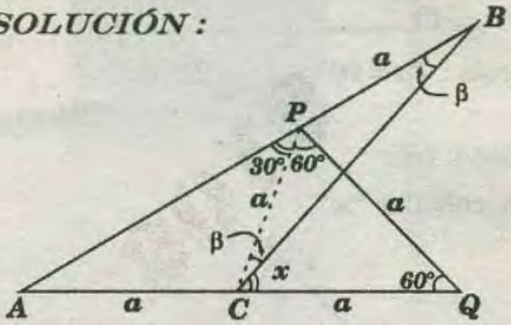
PROBLEMA 24:

Según el gráfico calcular x , si $m\sphericalangle PQA=60°$ y $AC=CQ=PQ=PB$

A) 55°
B) 45°
C) 80°
D) 70°
E) 20



RESOLUCIÓN :



* Piden : x

* $\triangle CPQ$ equilátero : $PC=a \Rightarrow x+b=60°$.....(I)

* $\triangle APQ$: $AC=CP=CQ$

$\Rightarrow \triangle APQ$: es un $\triangle$, $m\sphericalangle APQ=90°$

* $\triangle CPB$ isósceles $\Rightarrow \beta=15°$

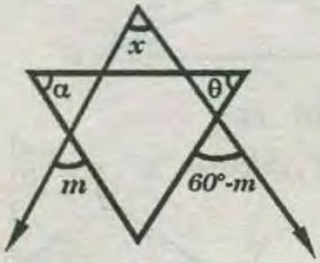
* β en (I): $x+15°=60° \Rightarrow x=45°$

RPTA : "B"

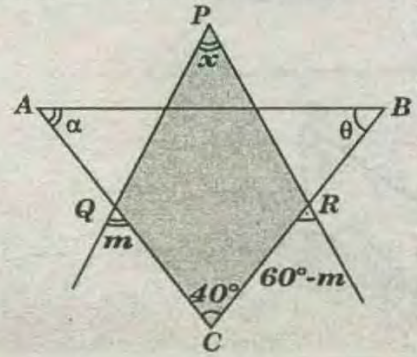
PROBLEMA 25 :

Según el gráfico , calcular x , si: $\alpha+\theta=140°$

A) 26°
B) 30°
C) 22°
D) 40°
E) 20



RESOLUCIÓN :



* Piden : x

* Dato : $\alpha+\theta=140°$

* $m\sphericalangle ACB=40°$

* En $\triangle PQCR$:

$x+40°=60°-m+m$

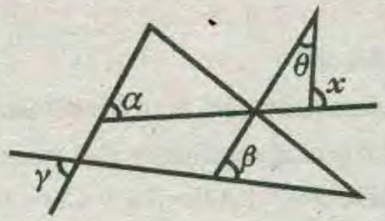
$\Rightarrow x=20°$

RPTA : "E"

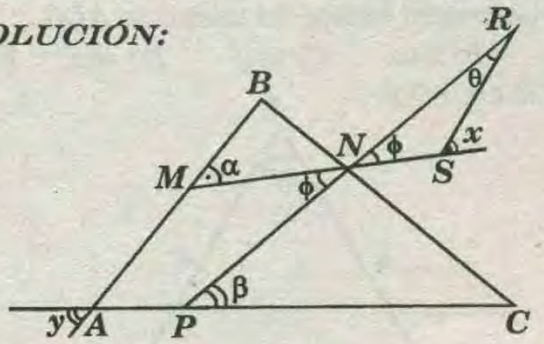
PROBLEMA 26:

Según el gráfico , calcular: $x+y$, si $\alpha+\beta+\theta=60°$

A) 20°
B) 30°
C) 45°
D) 60°
E) 75°



RESOLUCIÓN:



* Piden : $x + y$

* Dato : $\alpha+\beta+\theta=60°$

* $\triangle NRS$ (ángulo externo)

$x=\phi+\theta$ .....(I)

* $\wedge AMNP$:

$y+\phi=\alpha+\beta$ .....(II)

* De (I) + (II): $x+y=\alpha+\beta+\theta$

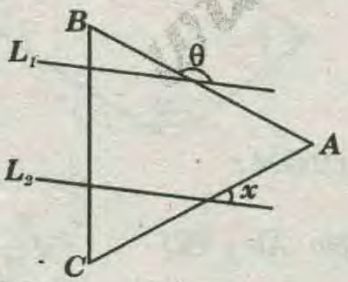
$\Rightarrow x + y = 60°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 27 :

En el triángulo equilátero ABC que se muestra en la figura adjunta , $L_1 \parallel L_2$ y se conoce θ . Entonces el valor de x es :

A) $\theta - 60°$
B) $120° - \theta$
C) $2\theta - 120°$
D) $\theta - 120°$
E) $180° - \theta$



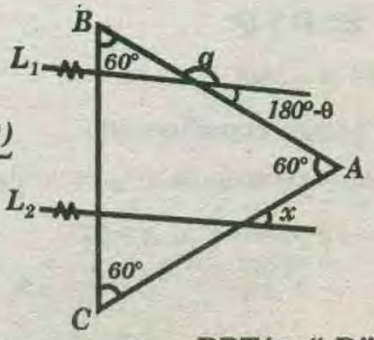
RESOLUCIÓN :

* De la figura , piden: x

* En A , como

$\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$: $\underbrace{60°=x+(180°-\theta)}_{\text{(Propiedad)}}$

$\Rightarrow x=\theta-120°$

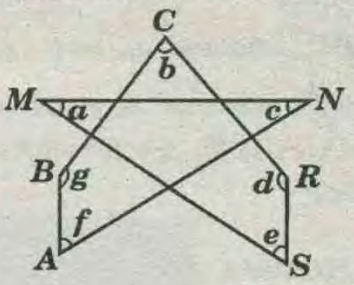


RPTA : " D"

PROBLEMA 28 :

En la figura mostrada , calcular $a+b+c+d+e+f+g$

A) 720°
B) 900°
C) 540°
D) 1800°
E) 1750°



RESOLUCIÓN:

* Piden : $a+b+c+d+e+f+g$

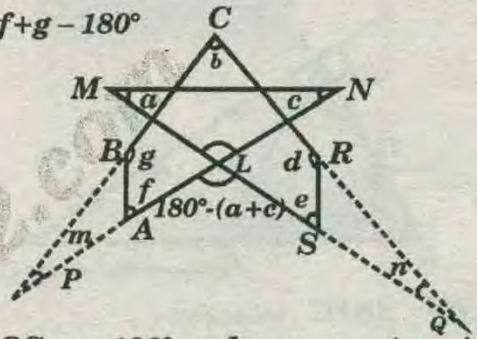
* $\triangle MNL: m\sphericalangle MLN=m\sphericalangle ALS=180°-(a+c)$

* $\wedge PCQL: m + n + b = 180°-(a + c)$

$\Rightarrow a+b+c+m+n=180°$ .....(I)

* $\triangle PBA: m+180° = f+g$ ..... (propiedad)

$\Rightarrow m=f+g-180°$



* $\triangle RQS: n+180° = d + e$ .....(propiedad)

$\Rightarrow n=d+e-180°$

* Reemplazando en (I):

$a + b + c+(f +g - 180°) + (d+e -180°) = 180°$

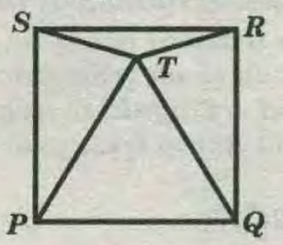
$\Rightarrow a+b+c+d+e+f+g=540°$

RPTA: "C"

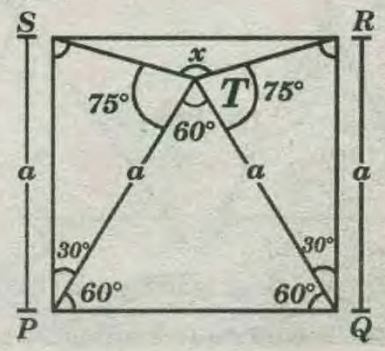
PROBLEMA 29 :

En la figura , $PSRQ$ es un cuadrado y PQT es un triángulo equilátero del ángulo STR es :

A) 110°
B) 130°
C) 120°
D) 150°
E) 95°



RESOLUCIÓN:



WWW.GRATIS2.COM

* Piden : x

* De la figura :

* $\triangle SPT$: isósceles $m\sphericalangle PST = m\sphericalangle PTS = 75°$

* $\triangle RQT$: isósceles $m\sphericalangle QRT = m\sphericalangle QTR = 75°$

* En el vértice T: $x + 75° + 60° + 75° = 360°$

$\Rightarrow x = 150°$

RPTA: "E"

PROBLEMA 30 :

En un triángulo de ABC, la medida del ángulo exterior en el vértice B es el triple de medida del ángulo C y la mediatriz de $\overline{BC}$ corta a $\overline{AC}$ en el punto F. Sabiendo que $\overline{FC} = 12\,m$, calcular AB.

A) 24 B) 16 C) 12 D) 8 E) 10

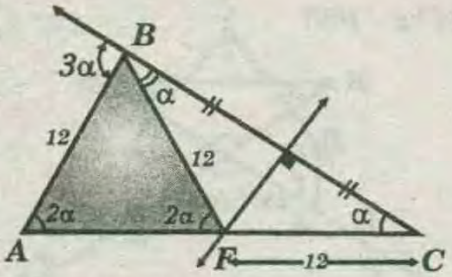
RESOLUCIÓN:

* $AB = ?$

* Si : $C = \alpha$

$\Rightarrow \widehat{B} = 3\alpha$

$\hat{A} = 2\alpha$



* Trazamos $\overline{BF}$: ΔBFC , isósceles :

$BF = FC = 12$ y $F\hat{B}C = \hat{C} = \alpha$

* Además :

$AFB = \alpha + \alpha = 2\alpha$ .....($\sphericalangle$ extremo en ΔBFC)

* Finalmente: ΔABF. isósceles , por $\hat{A} = A\hat{F}B$

$\Rightarrow AB = BF \Rightarrow AB = 12$

RPTA : "C"

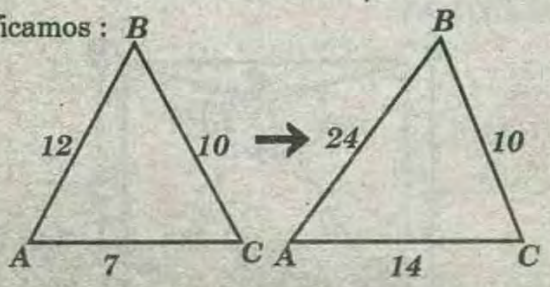
PROBLEMA 31:

En el triángulo ABC, $AB = 12$, $AC = 7$ y $BC = 10$. Si las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se duplican , mientras que $\overline{BC}$ permanece constante , entonces se cumple :

A) La altura trazada desde A , se duplica.
B) La figura no es un triángulo.
C) El área del triángulo se duplica.
D) El área del nuevo triángulo es 4 veces el área original.

RESOLUCIÓN:

* Graficamos :



* De *(II)*: Para verificar si la figura es correcta debe cumplir con la desigualdad triangular :

$24 - 14 < 10 < 24 + 14 \Rightarrow 10 < 10 < 38$

* Y vemos que no ocurre. $\Rightarrow$ no es un triángulo.

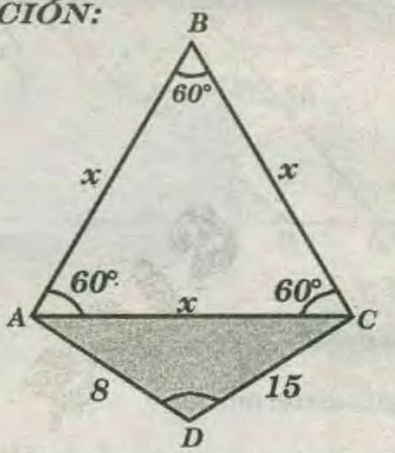
RPTA : "B"

PROBLEMA 32:

Es un triángulo equilátero, se ubica el punto D exterior al triángulo tal que el segmento $\overline{BD}$ intersecta al lado $\overline{AC}$. Si $m\sphericalangle ADC > 90°$, $AD = 8\,u$ y $CD = 15u$ Hallar el menor perímetro entero del triángulo ABC.

A) 52u B) 24u C) 22u D) 46u E) 48u

RESOLUCIÓN:



* Para que ΔADC sea obtusángulo debe verificar que:

$x^2 > 8^2 + 15^2 \Rightarrow x > 17$

* Entonces : $3x > 51$

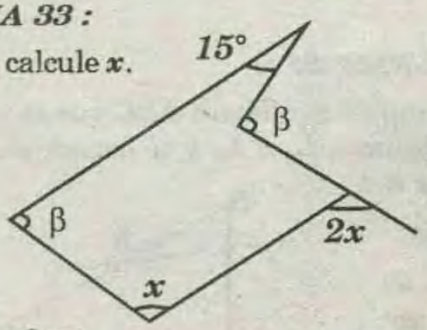
* Por lo tanto el menor perímetro entero será $52\,u$.

RPT A: "A"

PROBLEMA 33 :

En el gráfico , calcule x.

A) 15°
B) 20°
C) 35°
D) 17°
E) 40°



RESOLUCIÓN :

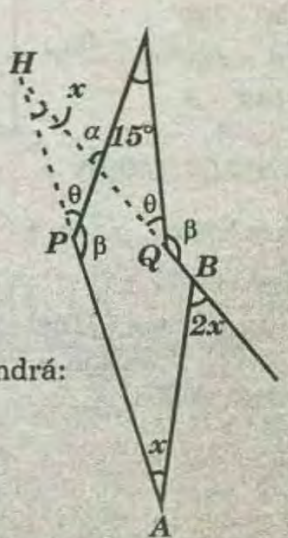
* Se prolongan $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ hasta H.

* En P y Q:

$\theta + \beta = 180°$

* Luego considerando como referencia a "α" se obtendrá:

$x + \theta = 15° + \theta \Rightarrow x = 15°$

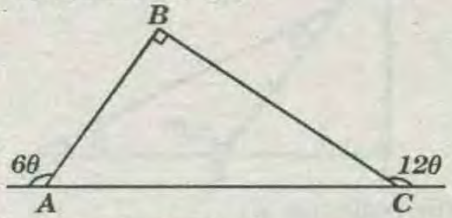


RPTA: "A"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

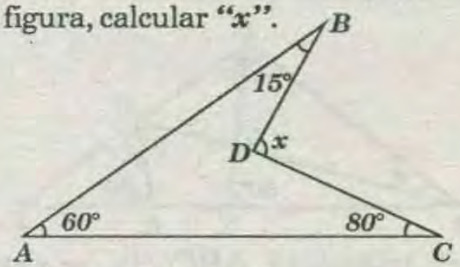
TRIÁNGULOS (PROPIEDADES)

01 Del gráfico, calcular "θ".



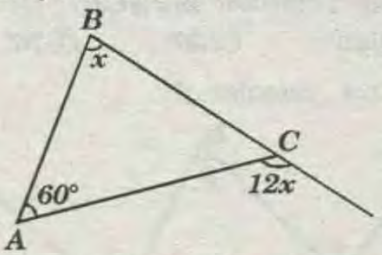
A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 20°
E) 18°

02 De la figura, calcular "x".



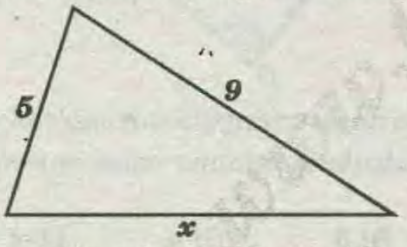
A) 130°
B) 120°
C) 150°
D) 165°
E) 155°

03 De la figura, calcular "x".



A) 20°
B) 40°
C) 10°
D) 30°
E) 15°

04 En la figura, calcular la diferencia entre el máximo y el mínimo valor entero que puede tomar "x".



A) 9
B) 8
C) 7
D) 6
E) 5

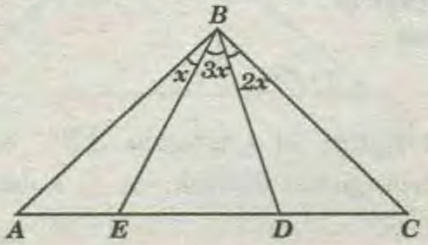
05 En un triángulo ABC ; $AB = 9 - x$; $BC = 2x - 12$; además: $m\sphericalangle A > m\sphericalangle C$, calcular "$x$". Si se sabe que es un número entero.

A)8 B)7 C)6 D)5 E)7 y 8

06 Si los lados de un triángulo miden: 12; $(x+4)$; $(x+5)$. Calcular el menor valor entero de "x", para que dicho triángulo exista.

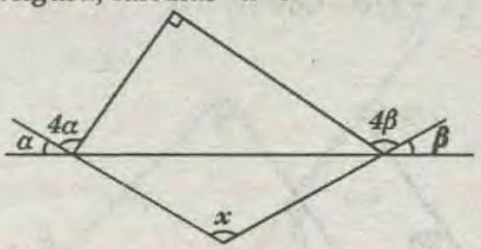
A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

07 En la figura, calcular "x", si: $AB = AD$ y $BC = EC$.



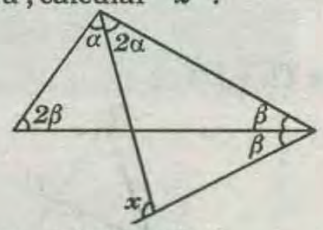
A)10°
B)12°
C)15°
D)18°
E)20°

08 En la figura, calcular "x".



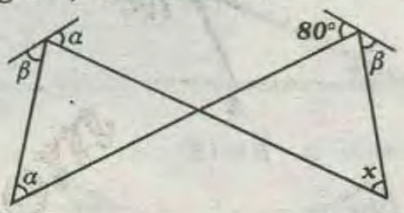
A)150°
B)118°
C)144°
D)132°
E)126°

09 En la figura , calcular "x".



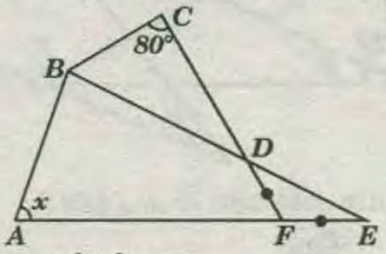
A) 120°
B) 150°
C) 144°
D) 135°
E) 105°

10 En la figura , calcular "x".



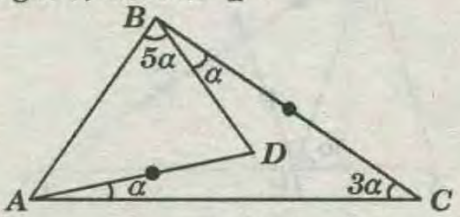
A) 80°
B) 70°
C) 40°
D) 20°
E) 60°

11 En la figura, calcular "x", si $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo ABC.



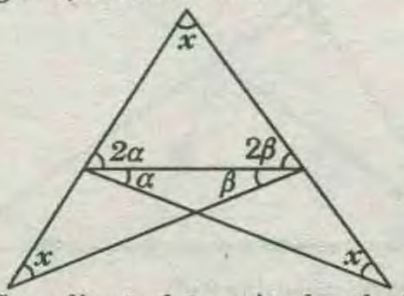
A) 60°
B) 40°
C) 70°
D) 80°
E) 50°

12 En la figura , calcular "α".



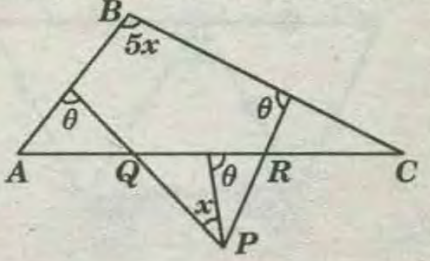
A) 20°
B) 18°
C) 10°
D) 12°
E) 15°

13 En la figura , calcular "x".



A) 20°
B) 30°
C) 36°
D) 45°
E) 18°

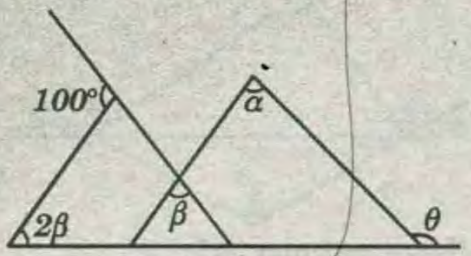
14 Del gráfico adjunto determina la relación correcta $(PQ=PR)$.



A) $3x=2\theta$
B) $5x=2\theta$
C) $7x=3\theta$
D) $4x=\theta$
E) $7x=2\theta$

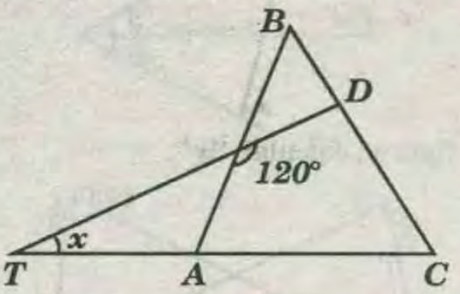
(15) Si: $\beta + \theta = 110°$. Calcular: α

A) 30°
B) 8°
C) 10°
D) 12°
E) 15°



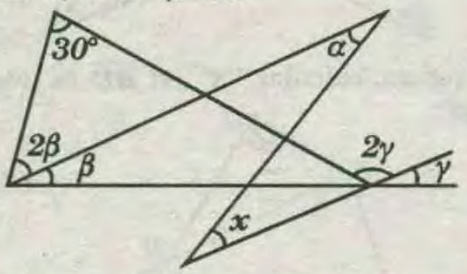
(16) Calcular x, si $AB=BC$ y $TC=TD$

A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 30°
E) 40°



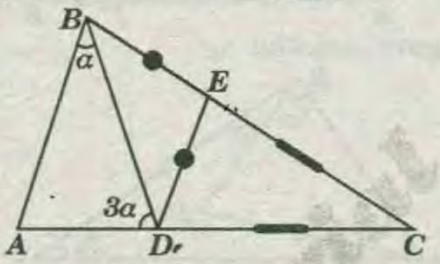
(17) Calcular x, si: $\alpha - \beta = 18°$

A) 16°
B) 17°
C) 18°
D) 19°
E) 36°



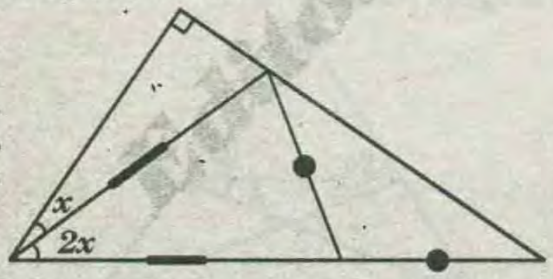
(18) En la figura, calcular la $m\sphericalangle ABC$.

A) 40°
B) 45°
C) 60°
D) 90°
E) 75°



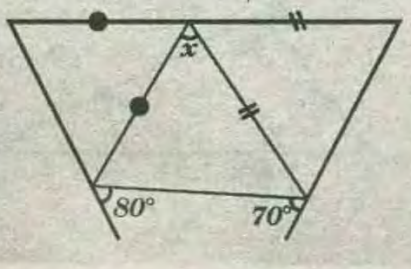
(19) En la figura, calcular "x"

A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 12°
E) 18°



(20) En la figura, calcular "x"

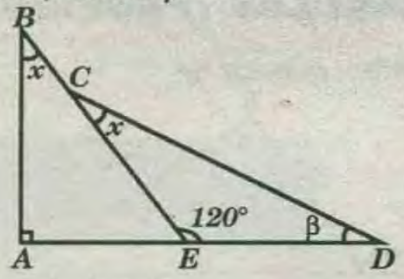
A) 70°
B) 80°
C) 75°
D) 90°
E) 120°



TAREA DOMICILIARIA

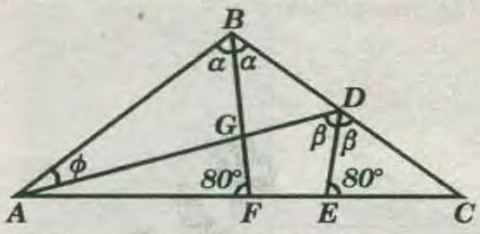
(01) En la figura, calcule β

A) 40°
B) 30°
C) 50°
D) 80°
E) 60°



(02) Del gráfico calcular ϕ

A) 20°
B) 40°
C) 30°
D) 45°
E) 36°

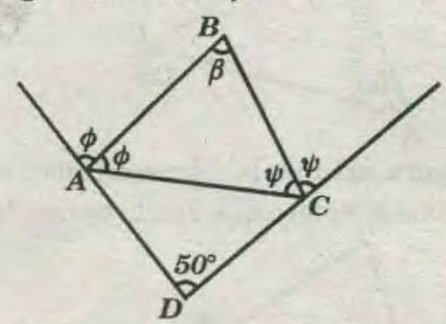


(03) En el triángulo ABC, la $m\sphericalangle ABC = 40°$; $m\sphericalangle CAB = 100°$; calcular $m\sphericalangle ACB$.

A) 20° B) 40° C) 30° D) 70° E) 60°

(04) De la figura, calcular β

A) 65°
B) 45°
C) 60°
D) 55°
E) 70°



(05) Los lados de un triángulo son enteros, dos de ellos son 7 y 9, calcule el mínimo valor entero del tercer lado.

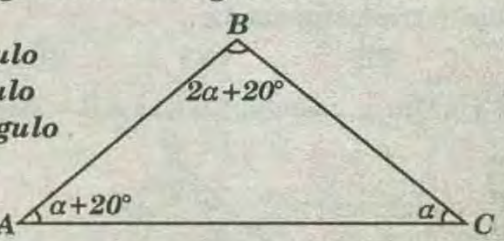
A) 2 B) 3 C) 5 D) 4 E) 6

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

TRIÁNGULOS - CLASIFICACIÓN

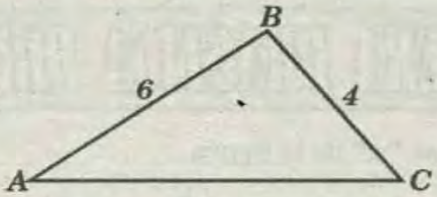
(01) Según el gráfico: el triángulo ABC es:

A) Acutángulo
B) Rectángulo
C) Obtusángulo
D) Isósceles
E) B y D



(02) En la figura el triángulo ABC es escaleno. Cuántos triángulos existen, si la medida del lado $\overline{AC}$ es entero?

A) 7
B) 5
C) 4
D) 8
E) 6

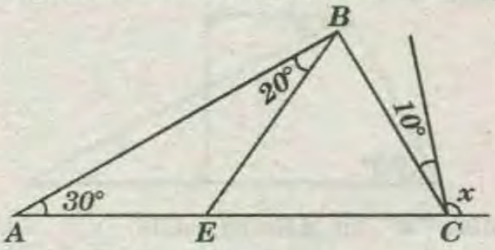


03 Se tiene un triángulo escaleno donde dos de sus lados miden **10** y **5**. Calcular la suma de los valores enteros que puede tomar el tercer lado.

A) 90 B) 100 C) 80 D) 40 E) 60

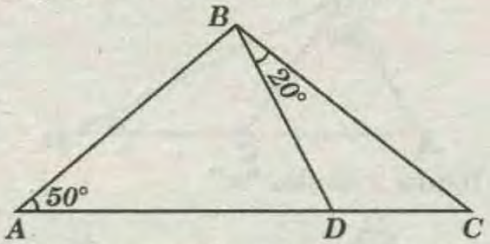
04 De la figura: $BC = EC$. Calcular "x"

A) 80°
B) 70°
C) 75°
D) 85°
E) 90°



05 De la figura $AB=BD$. Calcular $m\sphericalangle C$

A) 20°
B) 25°
C) 30°
D) 28°
E) 35°



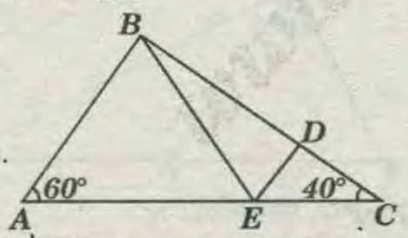
06 Dos lados de un triángulo escaleno miden **5** y **7**. Calcular la suma de los valores enteros impares que puede tomar la medida del tercer lado.

A)28 B)35 C)23 D)24 E)39

07 De la figura: $ED=DC$; $m\sphericalangle BED = m\sphericalangle BDE$

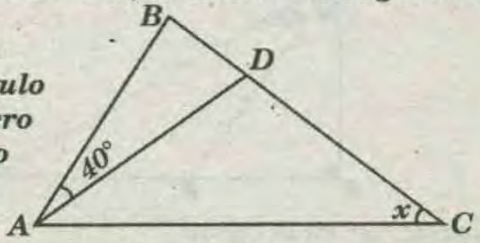
Si: $AE = 7$, calcular "BD"

A) 7
B) 6
C) 5
D) 4
E) 5,5



08 Si $AB=AD=DC$; entonces el triángulo ABC es:

A) Isósceles
B) Acutángulo
C) Equilátero
D) Escaleno
E) B y D



09 Dos lados de un triángulo isósceles miden **10** y **26**. Calcular el semiperímetro de dicho triángulo.

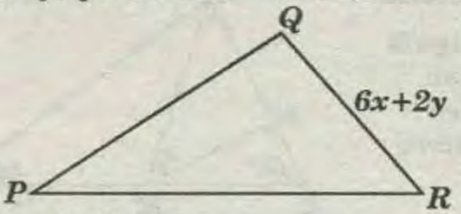
A) 46 B) 62 C) 31 D) 23 E) 20

10 Se tiene un triángulo isósceles cuyos lados miden **8** y **12**. Calcular el doble de su perímetro.

A) 56 B) 64 C) 28 y 32 D) 28 E) 56 y 64

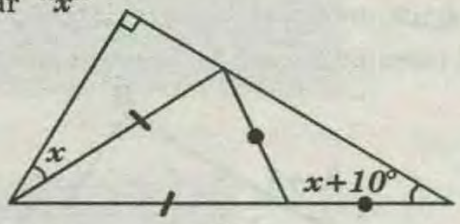
11 En la siguiente figura el triángulo PQR es equilátero cuyo perímetro es $120\ m$, calcular "$x+y$"

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 14



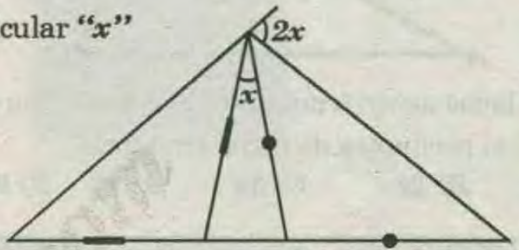
12 Calcular "x"

A) 36°
B) 30°
C) 45°
D) 53°
E) 37°



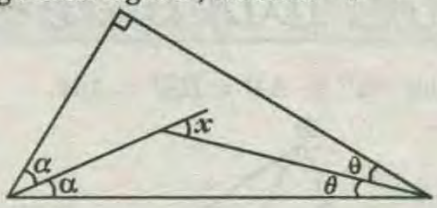
13 Calcular "x"

A) 45°
B) 40°
C) 36°
D) 50°
E) 35°



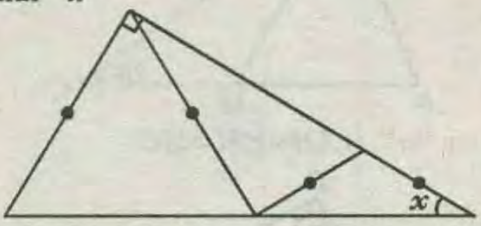
14 En la siguiente figura , calcular "x"

A) 20°
B) 35°
C) 45°
D) 50°
E) 40°



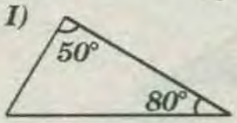
15 Calcular "x"

A) 22,5°
B) 18,5°
C) 30°
D) 36°
E) 26,6°

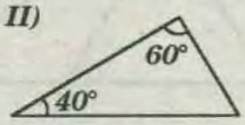


16 ¿Cuál de los siguientes triángulos son isósceles?

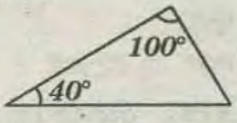
I)



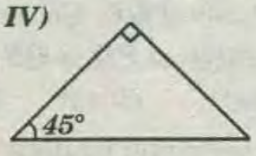
II)



III)



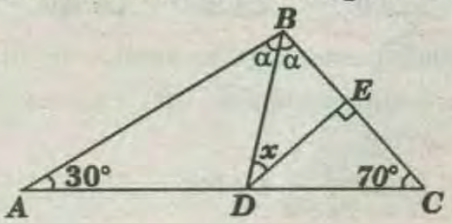
IV)



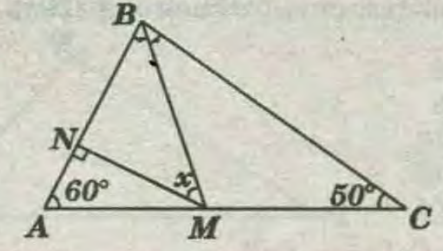
A) I y II B) Sólo III C) Sólo IV
D) I y III E) C y D

17 Calcular la medida de "x" en el siguiente triángulo:

A) 80°
B) 40°
C) 90°
D) 50°
E) 60°

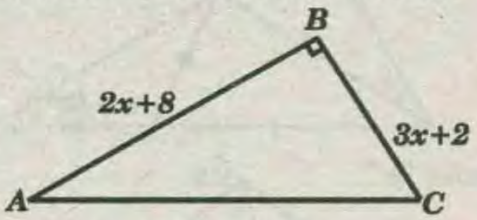


(18) En la siguiente figura a qué clase pertenece el triángulo ABM.



A) Acutángulo
B) Escaleno
C) Isósceles
D) Equilátero
E) A y B

(19) La siguiente figura es un triángulo rectángulo isósceles, calcular la medida de sus catetos.



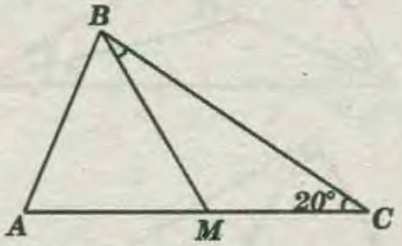
A) 20
B) 30
C) 10
D) 15
E) 25

(20) Los lados de un triángulo isósceles miden 6 y 14. Calcular el perímetro de dicho triángulo.

A) 26 B) 32 C) 34 D) 28 E) 26 y 34

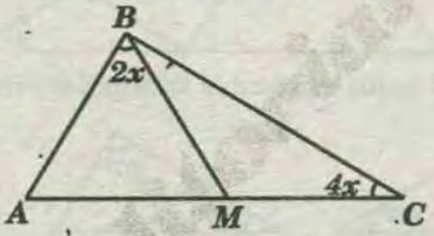
TAREA DOMICILIARIA

(01) Calcular "x" si $AB = BM = AM$.



A) 30°
B) 50°
C) 70°
D) 60°
E) 40°

(02) Calcular "x", si $AB=BM=MC$.



A) 158
B) 12°
C) 18°
D) 20°
E) 10°

(03) En el triángulo PQR, $\overline{QS}$ es bisectriz interior. Calcular la $m\sphericalangle PRQ$, si $PQ = QS = QR$.

A) 30° B) 36° C) 15° D) 60° E) 32°

(04) Se tiene el triángulo equilátero ABC, donde se traza el segmento AM (M en BC), calcular la $m\sphericalangle BAM$, si la $m\sphericalangle AMC=100°$

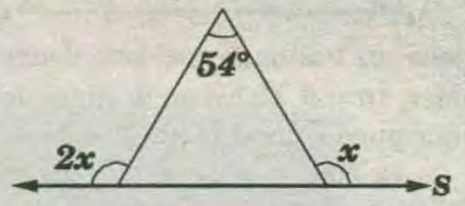
A) 20° B) 50° C) 30° D) 40° E) 25°

(05) La medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo se diferencian en 10°. Calcular la medida del ángulo mayor.

A) 50° B) 40° C) 90° D) 80° E) 70°

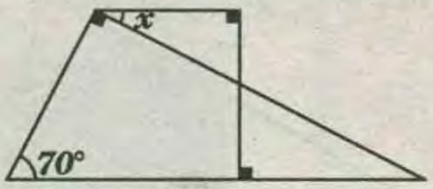
TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

(01) Calcular "x" de la figura.



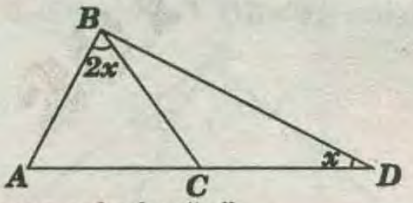
A) 60°
B) 62°
C) 64°
D) 72°
E) 78°

(02) Calcular "x".



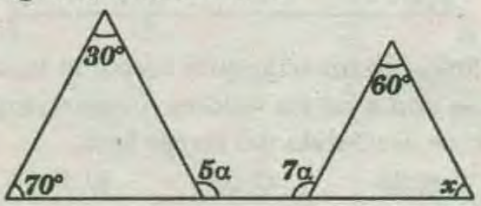
A) 10°
B) 30°
C) 20°
D) 37°
E) 50°

(03) Calcular "x", si: $AB=BC=CD$.



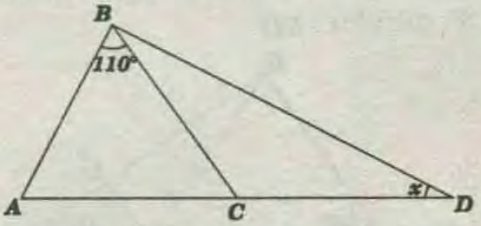
A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 37°
E) 20°

(04) En la figura, calcular "x".



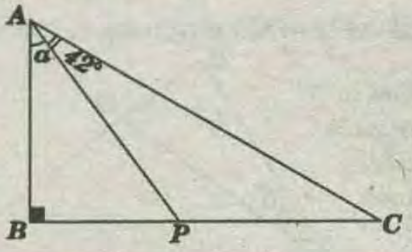
A) 90°
B) 100°
C) 80°
D) 120°
E) 110°

(05) Si: $AB=BC=CD$, calcular "x".



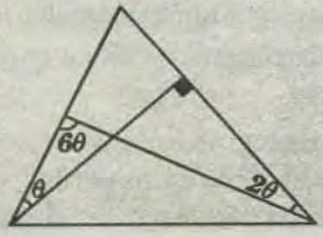
A) 12°
B) 14°
C) 15°
D) 18°
E) 17,5°

(06) Si: $AP=PC$, calcular "α".



A) 6°
B) 8°
C) 10°
D) 12°
E) 21°

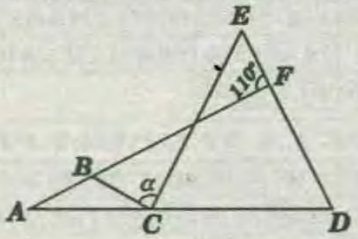
(07) Calcular "θ" en la figura.



A) 15°
B) 18°
C) 12°
D) 10°
E) 20°

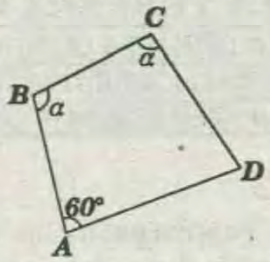
(08) Si: $AB=BC$, $EC=ED$, calcular "α".

A) 35°
B) 45°
C) 60°
D) 70°
E) 80°



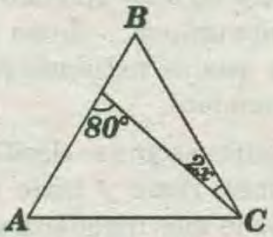
(09) Calcular "α", si: $AB=BC=AD$.

A) 30°
B) 60°
C) 75°
D) 80°
E) 90°



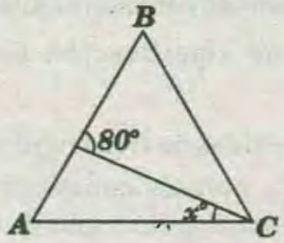
(10) Calcular "x", si el triángulo **ABC** es equilátero.

A) 10°
B) 12°
C) 18°
D) 15°
E) 20°



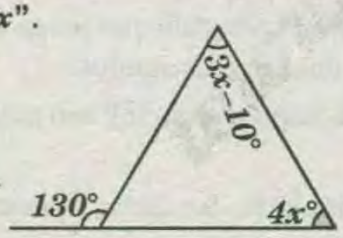
(11) Si el triángulo **ABC** es equilátero, calcular "x".

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 15°
E) 18°



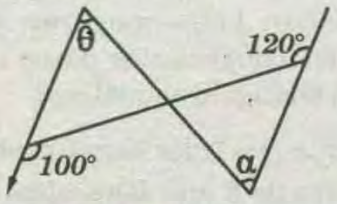
(12) Calcular "x".

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 25°



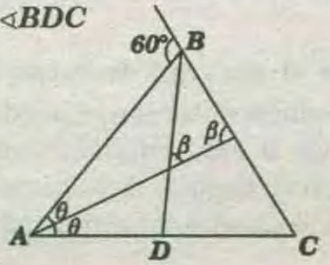
(13) Calcular "$\alpha-\theta$".

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°



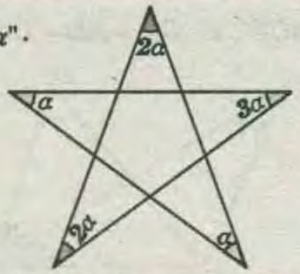
(14) Hallar: $m\sphericalangle BDC$

A) 10°
B) 30°
C) 50°
D) 60°
E) 70°



(15) Calcular "α".

A) 20°
B) 18°
C) 24°
D) 30°
E) 25°

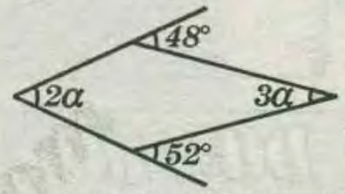


(16) Calcular "x" en la figura mostrada.

A) 22°
B) 22,5°
C) 30°
D) 36,5°
E) 42,5°

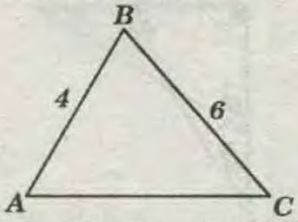
(17) Calcular "α".

A) 18°
B) 20°
C) 30°
D) 10°
E) 15°



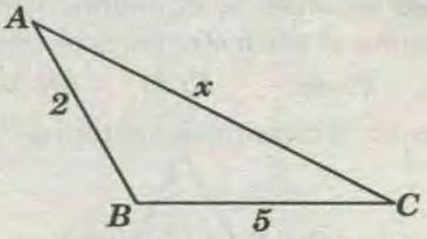
(18) En la figura, ¿cuántos valores enteros puede tomar el lado $\overline{AC}$ para que el triángulo exista?

A) 10
B) 8
C) 5
D) 4
E) N.A.



(19) En el triángulo obtusángulo **ABC** (obtuso en "**B**"), calcular "x".

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7



(20) Si el perímetro de un triángulo rectángulo es 30μ. Hallar el mínimo valor entero que puede tomar la hipotenusa.

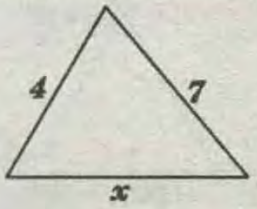
A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

(21) Dos ángulos internos de un triángulo están en la relación de 1 a 2. Hallar el mínimo valor entero que puede tomar el menor de los dos ángulos para que el triángulo sea acutángulo.

A) 30° B) 32° C) 31° D) 33° E) 34°

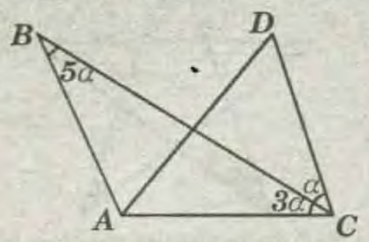
(22) Calcular el máximo valor entero que puede tomar "x".

A) 8
B) 10
C) 12
D) 9
E) 7



23 Hallar: $m\sphericalangle BCD$, si: $BA = AD = DC$.

A) 12°
B) 10°
C) 15°
D) 18°
E) 16°

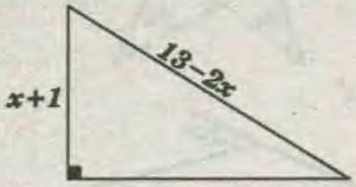


24 En un triángulo obtusángulo **ABC** (obtuso en "A"). Si: $AB=2$; $AC=5$, calcular "BC".

A) 5 B) 7 C) 6 D) 8 E) 4

25 Calcular el mayor valor impar de "x".

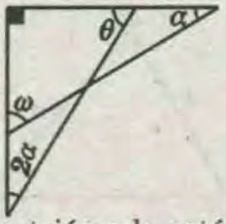
A) 1
B) 3
C) 5
D) 7
E) 9



TAREA DOMICILIARIA

01 Calcular "α", si: $\omega + \theta = 120°$.

A) 30°
B) 40°
C) 25°
D) 20°
E) 35°

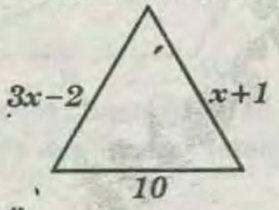


02 Los lados de un triángulo están en progresión aritmética de razón **5**, el mínimo valor entero que puede asumir el perímetro de dicho triángulo es:

A) 29 B) 30 C) 31 D) 32 E) 33

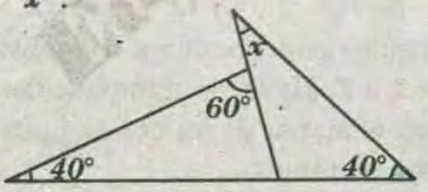
03 Calcular el menor valor entero de "x".

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4



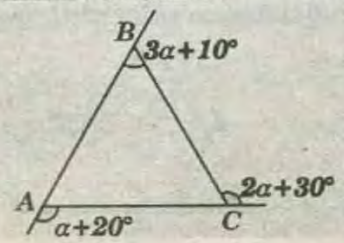
04 Calcular "x".

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°



05 En la figura, hallar: $m\sphericalangle ABC$.

A) 30°
B) 50°
C) 20°
D) 60°
E) 10°



CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)C	2)E	3)A	4)C	5)A	6)B	7)C	8)E	9)A	10)A
11)D	12)E	13)C	14)D	15)A	16)C	17)C	18)C	19)E	20)E
1)B	2)B	3)B	4)A	5)B					

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)B	2)B	3)C	4)E	5)C	6)C	7)A	8)E	9)C	10)E
11)B	12)B	13)C	14)C	15)A	16)E	17)D	18)E	19)A	20)C
1)E	2)E	3)B	4)D	5)A					

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA									
1)E	2)C	3)A	4)C	5)E	6)A	7)B	8)D	9)D	10)A
11)B	12)B	13)B	14)D	15)A	16)B	17)B	18)E	19)D	20)C
21)C	22)B	23)B	24)C	25)B	1)D	2)C	3)D	4)D	5)C

¡RECUERDA:

En un ***triángulo rectángulo***, los dos lados que forman el ángulo recto se denominan ***catetos*** (kathetos [descendentes]); y el lado opuesto al ángulo recto, ***hipotenusa*** (hipotenusa = hypo [debajo] + teino [tender] = línea que se extiende por debajo de los catetos que descienden).

Si a usted le preguntan cómo se clasifican los triángulos según sus vértices, ríase y trate de inventar una respuesta que sea lo más ingeniosa posible... Y ahora, en serio, vamos a plantearnos y resolver un ejercicio interesante, derivado de considerar simultáneamente ambos criterios de clasificación para cualquier triángulo.

01 Si le dan las medidas de tres ángulos, por ejemplo, $80°$, $60°$ y $40°$, ¿puede construir con ellos un triángulo? ¿Un solo triángulo o más de uno?

02 ¿Existe algún triángulo que tenga un solo ángulo agudo? ¿Y con dos ángulos agudos?

¿Con más de un ángulo recto? ¿Y con más de un ángulo obtuso?

03 En un triángulo, los lados opuestos a ángulos congruentes, son congruentes a su vez; y viceversa. Y también, dentro de un mismo triángulo, a ángulos mayores se oponen lados mayores; y viceversa. ¿Cuántos ángulos congruentes posee un triángulo isósceles? ¿Y un triángulo equilátero?

04 Un triángulo, cuyos lados tienen medidas enteras, tiene un perímetro de $8\ cm$. ¿Qué clase de triángulo es?

05 Ana recibe el encargo de construir todos los triángulos de medidas enteras que pueda, tales que su perímetro sea de $9\ cm$. Patricia recibe el mismo encargo, pero con triángulos cuyo perímetro mida 10 cm. ¿Cuál de las dos podrá construir más triángulos?

LINEAS NOTABLES

CAPITULO 10

OBJETIVOS :

Al finalizar la unidad, el alumno será capaz de:

** Aprender que son líneas notables : ceviana, mediana, bisectriz, altura, mediatriz.*

** Aprender que función cumple cada línea notable .*

** Aprender a resolver problemas utilizando dichas líneas.*

INTRODUCCIÓN :

Antiguamente se consideraba a la Geometría como "La única ciencia que quiso conferir Dios al hombre". Por tal motivo se veía a los geómetras como seres especiales y, por lo tanto, eran escuchados con admiración y respeto por lòs iniciados. Auque hoy ya no se sostienen tales teorías, la relación alumno maestro no ha cambiado tanto ante el fascinante mundo de las formas.

¿Que entendemos por notable? Si buscamos en el diccionario dicha palabra encontraremos que hace referencia a algo o alguien digno de nota, reparo o atención, debido tal vez a la importancia que tiene o a la función que cumple, es por eso que en la historia se habla de personajes notables haciendo referencia al papel importante que cumpliero dichos personajes en la historia. El día de hoy hablaremos de líneas notables y lo que podemos deducir de lo anteriormente dicho es que dichas líneas se llamarán notables ya que cumplen con una función importante y específica en un triángulo.

LÍNEAS NOTABLES Y PUNTOS NOTABLES

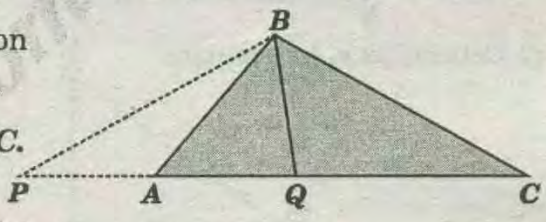
La líneas notables son aquellas que cumplen funciones específicas en el triángulo , dichas líneas son: ***Altura, Mediana , Mediatriz , Bisectriz interior , Bisectriz exterior.***

Puntos notables son : ***Ortocentro , Baricentro, Circuncentro , incentro*** y ***Excentro.***

I) CEVIANA:

Es aquella recta que parte de un vértice y cae en cualquier punto del lado opuesto o de su prolongación.

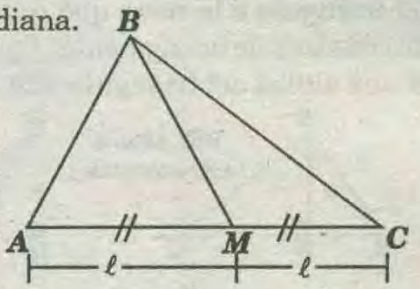
* $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ son cevianas del triángulo *ABC.*



II) MEDIANA :

A Es un segmento que une un vértice y el punto medio del lado opuesto. En la figura **M** es el punto medio de $\overline{AC}$, *BM* se llama mediana.

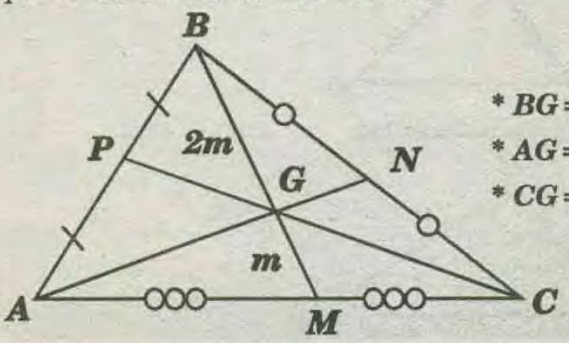
$\triangle ABC$: $\overline{BM}$ mediana relativa a, $\overline{AC}$ *(AM=MC).*



BARICENTRO (G):

Llamado también centro de gravedad o gravicentro o centroíde , es el punto de concurrencia de las tres medianas de un triángulo.

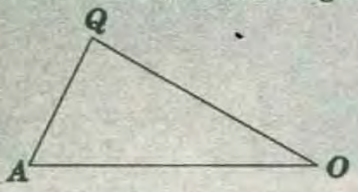
* El baricentro , siempre es un punto interior al triángulo , divide a cada mediana en dos segmentos que están en la relación de *2* a *1*.



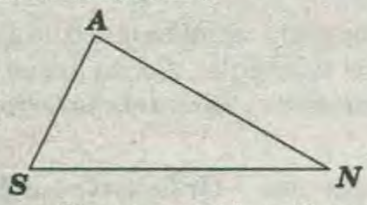
* *BG=2(GM)*
* *AG=2(GN)*
* *CG=2(GP)*

EJEMPLOS:

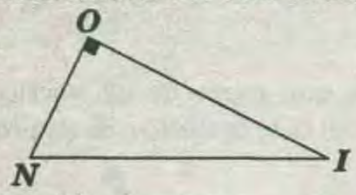
1) Trazar dos medianas en el triángulo.



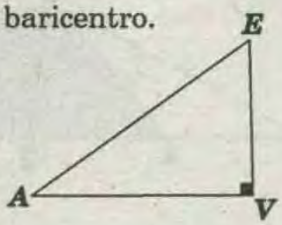
2) Determinar el baricentro



3) Trazar las medianas en cada triángulo:

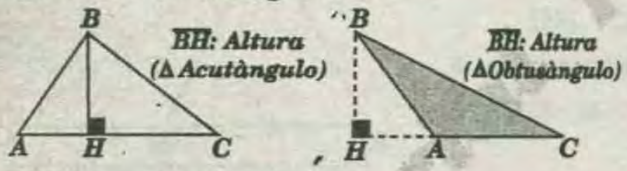


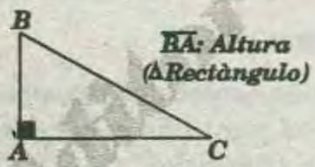
4) Determina el baricentro.



III) ALTURA:

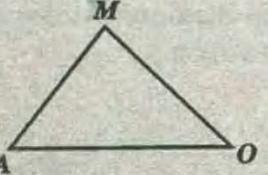
Es el segmento perpendicular trazado desde un vértice del triángulo a la recta que contiene al lado opuesto. En cada una de las siguientes figuras, el segmento $\overline{BH}$ es una altura del triángulo ABC.



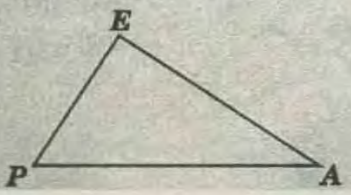


EJEMPLOS:

1) Trazar dos alturas en el triangulo.

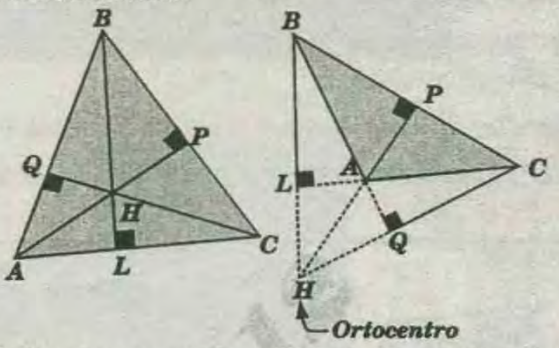


2) Determinar el ortocentro

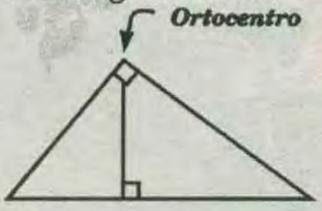


ORTOCENTRO:

Es el punto de concurrencia de las alturas de un triángulo. El ortocentro es un punto que puede estar en el interior del triángulo , fuera de él o en el vértice del ángulo recto , según los triángulos sean Acutángulos, Obtusángulos y Rectángulos respectivamente. Este punto tiene la propiedad de dividir a cada altura en dos segmentos cuyo producto es una constante.

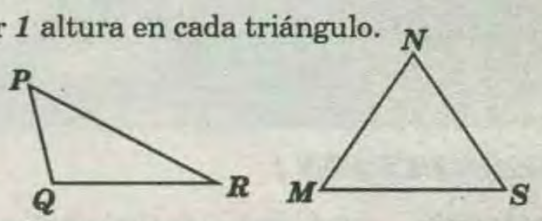


* El Ortocentro de un triángulo rectángulo coincide con el vértice del ángulo recto.

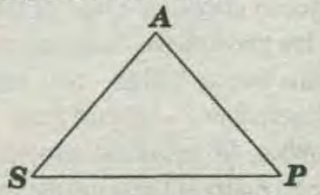


EJEMPLOS:

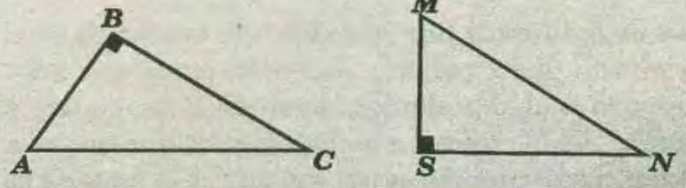
1) Trazar *1* altura en cada triángulo.



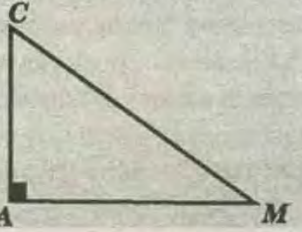
2) Determinar el ortocentro.



3) Trazar las alturas en cada triángulo.



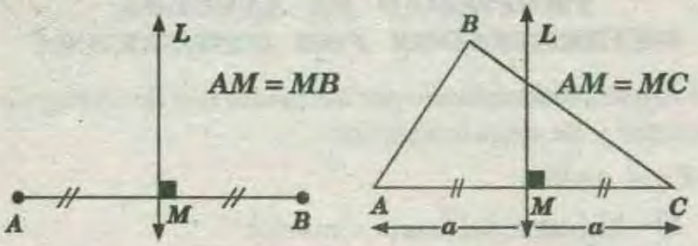
4) Determinar el ortocentro.



IV) MEDIATRIZ :

Es una recta perpendicular a un lado del triángulo en su punto medio , dicha recta se encuentra en el mismo plano que contiene al triángulo.

* Para un segmento : * Para un triángulo :



CIRCUNCENTRO (O) :

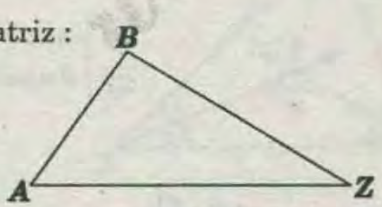
Es el punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo.

El circuncentro es un punto que puede estar en el interior del triángulo, fuera de él o en el punto medio de la hipotenusa, según los triángulos sean Acutángulos, Obtusángulos y Rectángulos, respectivamente. Este punto tiene la propiedad de ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo (Circunferencia circunscrita, es la que pasa por los vértices del triángulo) y equidistan de sus vértices.

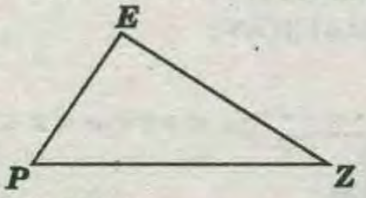
* "El circuncentro de un triángulo rectángulo , coincide con el punto medio de la hipotenusa".

EJEMPLOS :

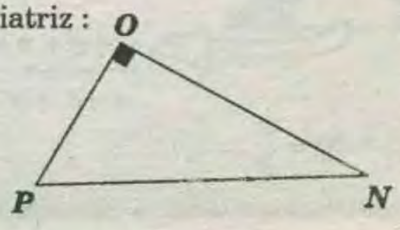
1) Trazar una mediatriz :



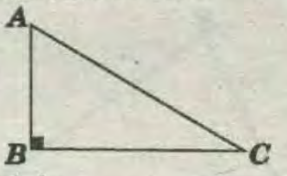
2) determinar el circuncentro en el triángulo :



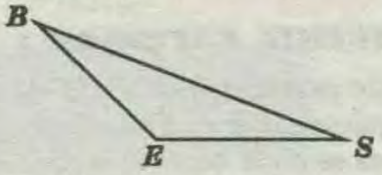
3) Trazar una mediatriz :



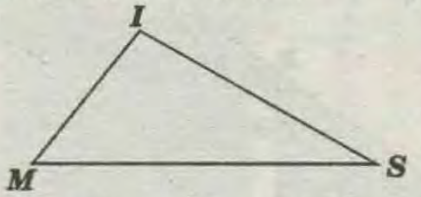
4) Determinar el circuncentro en :



5) Trazar una mediatriz :



6) Determinar el circuncentro :



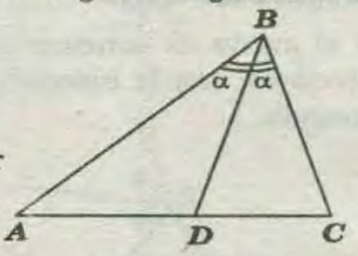
V) BISECTRIZ INTERIOR :

Es el rayo que partiendo del vértice de un triángulo , divide al ángulo interior en ángulos de igual medida.

* Si: $m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle DBC$

$\Rightarrow \overline{BD}$: bisectriz interior

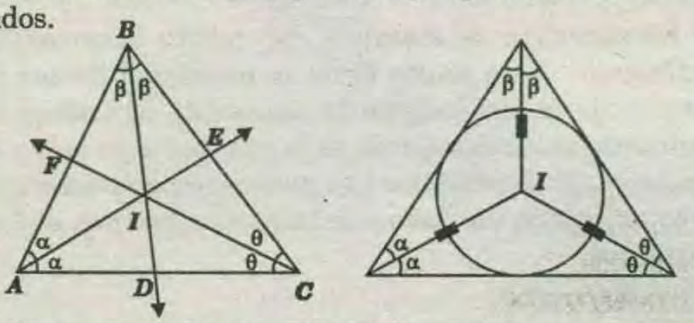
Relativa a $\overline{AC}$



INCENTRO (I):

Es el punto de concurrencia de las bisectrices interiores.

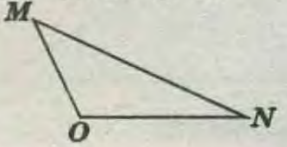
El Incentro , siempre es un punto interior al triángulo. Este punto tiene la propiedad de ser al centro de la circunferencia inscrita al triángulo (circunferencia inscrita es la que toca a los lados del triángulo, interiormente en tres puntos) y equidistar de los *3* lados.



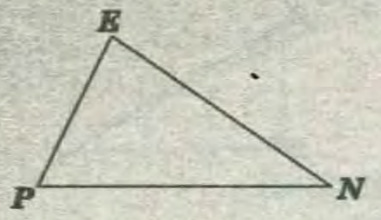
I: *I* incentro del triángulo *ABC*

EJEMPLOS:

1) Trazar la bisectriz interna en:

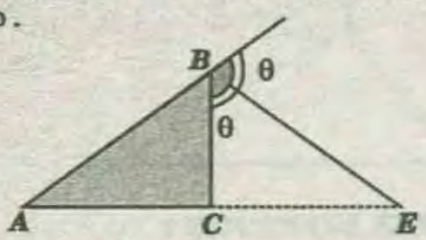


2) Determinar el incentro.



VI) BISECTRIZ EXTERIOR :

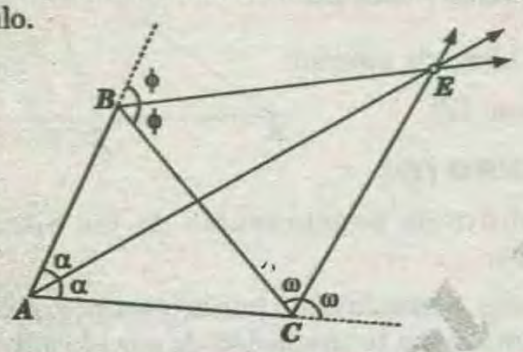
Es el rayo que partiendo del vértice de un triángulo, divide al ángulo exterior en 2 ángulos de igual medida. En la practica se mide desde el vértice del cuál parte hasta el punto de corte con la prolongación del lado opuesto .



$\overline{BE}$: Bisectriz de exterior relativa a $\overline{AC}$

EXCENTRO (E):

Es el punto de concurrencia de dos bisectrices exteriores, con la bisectriz del tercer ángulo del triángulo.



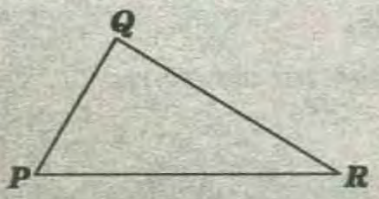
E: Excentro del triángulo *ABC* relativo al lado *BC*

* En todo triángulo se puede determinar tres excentros, uno relativo a cada lado.

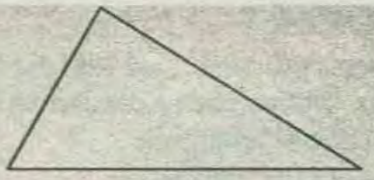
* El excentro es siempre, un punto exterior al triángulo. Este punto tiene la propiedad de ser el centro de la circunferencia exinscrita al triángulo (circunferencia exinscrita, es la que toca a un lado y a las prolongaciones de los tres puntos respectivamente) y equidistar de un lado y de las prolongaciones de los otros dos.

EJEMPLOS:

1) Trazar las bisectrices exteriores.



2) Determinar el excentro.



PROPIEDAD DE ÁNGULOS DETERMINADOS POR BISECTRICES

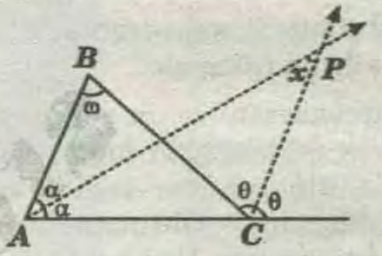
1) Ángulo determinado por las bisectrices de un ángulo interior y un ángulo exterior

* En el $\triangle ABC$:

$\overline{AP}$: bisectriz del ángulo interior.

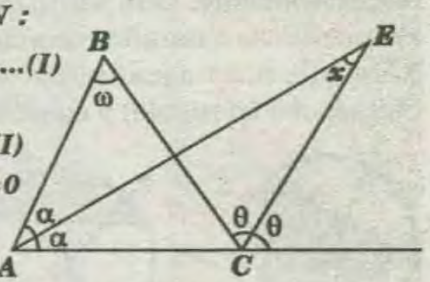
$\overline{CP}$: bisectriz del ángulo exterior.

* Entonces : $\boxed{x=\frac{\omega}{2}}$



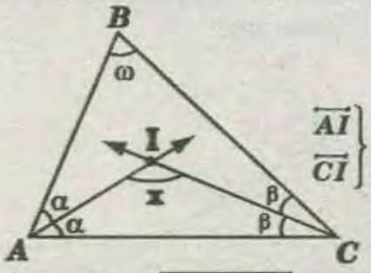
DEMOSTRACIÓN :

* $\triangle ABC: 2\alpha+\omega=2\theta$.....(I)
* $\triangle EAC: \alpha+x=\theta$
$\Rightarrow 2\alpha+2x=2\theta$.....(II)
* De (I) – (II): $\omega-2x=0$
$\Rightarrow x=\frac{\omega}{2}$



2) Ángulo determinado por las bisectrices de dos ángulos interiores .

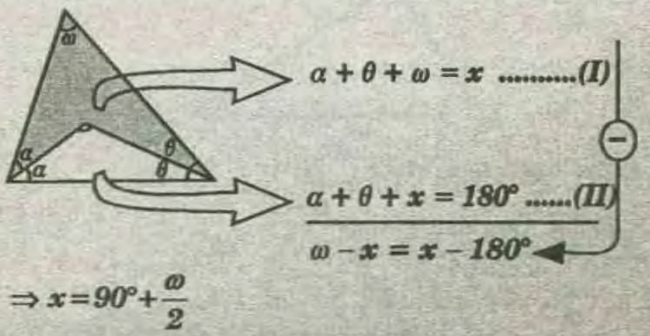
* En el $\triangle ABC$



$\overline{AI}$, $\overline{CI}$ } Bisectrices de los ángulos exteriores

Entonces : $\boxed{x=90°+\frac{\omega}{2}}$

DEMOSTRACIÓN :

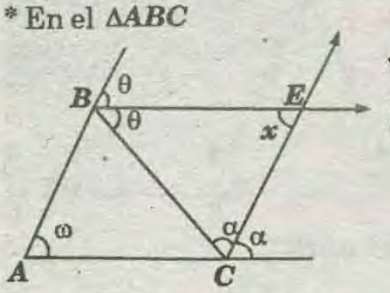


$\Rightarrow x=90°+\frac{\omega}{2}$

3) Ángulo determinado por las bisectrices de dos

ángulos exteriores

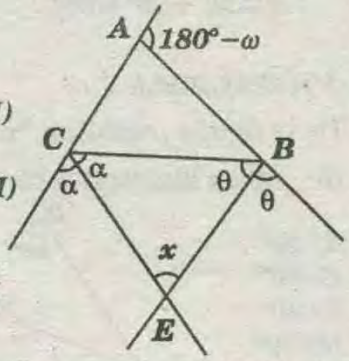
* En el ΔABC



$\overline{BE}$, $\overline{CE}$ } *Bisectrices de los ángulos externos*

$$x = 90° - \frac{\omega}{2}$$

DEMOSTRACIÓN :



* ΔABC :

$2\alpha + 2\theta + 180° - \omega = 360°$ .....(I)

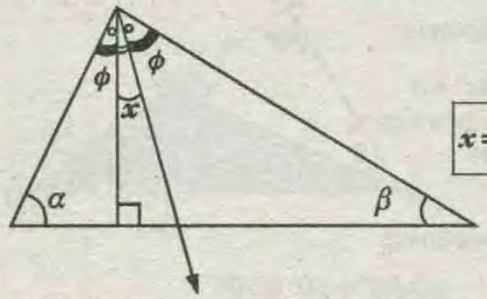
* ΔBEC: $\alpha + \theta + x = 180°$

$\Rightarrow 2\alpha + 2\theta + 2x = 360°$ .....(II)

* De (I) − (II):

$180° - \omega - 2x = 0 \Rightarrow x = 90° - \frac{\omega}{2}$

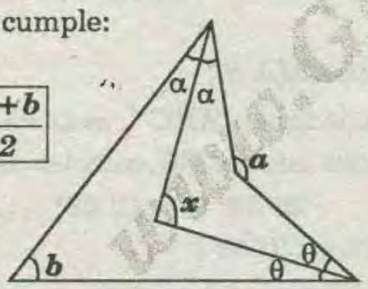
4) Ángulo formado por una altura y la bisectriz interior trazada desde el mismo vértice.



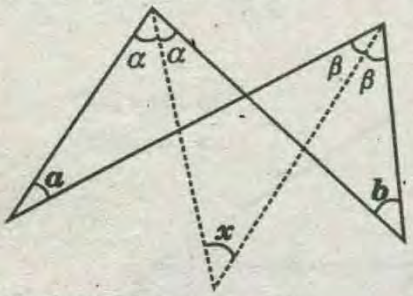
$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

5) En la figura , se cumple:

$$x = \frac{a+b}{2}$$



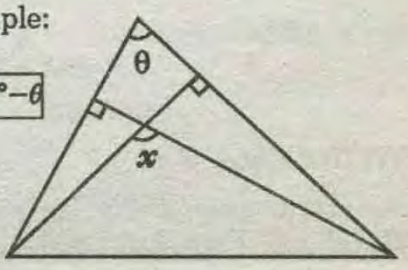
6) En la figura se cumple:



$$x = \frac{a+b}{2}$$

7) De la figura se cumple:

$$x = 180° - \theta$$



PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

En un triángulo ABC, $m\sphericalangle ACB = 30°$. Se traza la bisectriz $\overline{BD}$ de modo que BD=AD calcular $m\sphericalangle ABC$.

A) 90° B) 110° C)100° D)105° E) 80°

RESOLUCIÓN :

* Graficando :

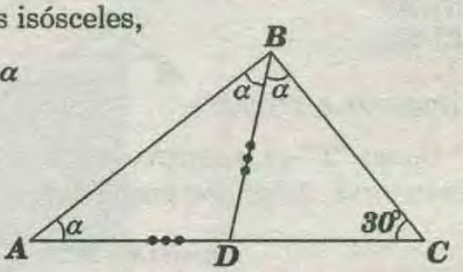
* Como el ΔABD es isósceles,

luego, $m\sphericalangle BAD = \alpha$

* Luego:

$a + 2a + 30° = 180°$

$\Rightarrow a = 50°$



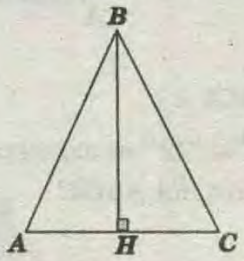
* Se pide: $m\sphericalangle ABC = 2a = 2(50°) = 100°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

La altura relativa a la base de un triángulo isósceles mide *21 cm*. Calcular distancia del baricentro a dicha base.

A) 6 cm.
B) 2
C) 21
D) 14
E) 7



RESOLUCIÓN :

* Trazando la mediana $\overline{AM}$, Para determinar el baricentro , además que la altura $\overline{BH}$ es una mediana (por tratarse de un triángulo isósceles)

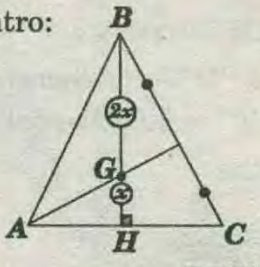
* Por propiedad del baricentro:

Si: $GH = x \Rightarrow BG = 2x$

* Luego de:

$BH = 21$

$\Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$

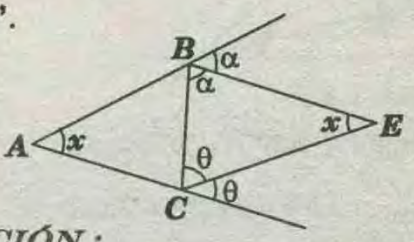


RPTA : "E"

PROBLEMA 3 :

Calcular "x".

A) 20°
B) 40°
C) 60°
D) 70°
E) 55°



RESOLUCIÓN :

Se aprecia que *"E"* es un excentro del ΔABC, luego

por propiedad:

$$x=90°-\frac{m\hat{A}}{2}\Rightarrow x=90°-\frac{x}{2}$$

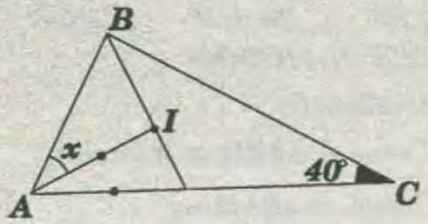
$$2x=180°-x\Rightarrow 3x=180°\Rightarrow x=60°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

Calcular "x", si "I" es incentro.

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 60°

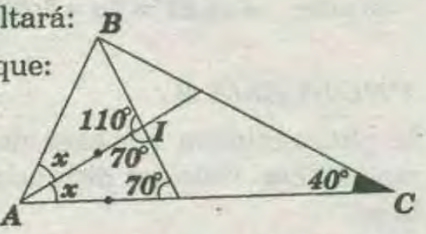


RESOLUCIÓN :

* Como "I" es incentro, entonces es de la bisectrices interiores, luego por propiedad.

$$m\sphericalangle BIA=90°+\frac{40°}{2}=110°$$

* Luego la figura, resultará:



* De donde se deduce que:

$$x+70°+70°=180°$$

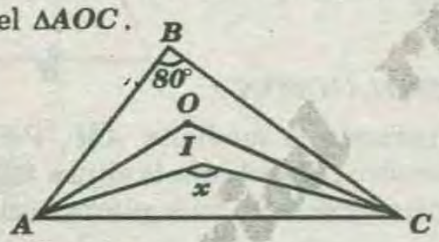
$$x=40°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

Calcular "x" si "O" es ortocentro del $\triangle ABC$, Además "I" es incentro del $\triangle AOC$.

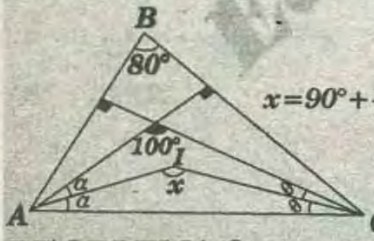
A) 120°
B) 130°
C) 140°
D) 150°
E) 160°



RESOLUCIÓN :

* Como "O" es ortocentro, entonces es de las alturas, como "I" es incentro del $\triangle AOC$

Entonces:



$$x=90°+\frac{100°}{2}=140°\ \text{(por propiedad)}$$

PROBLEMA 6 :

En un triángulo "ABC", se traza la ceviana BE tal que:

$$AB=BE=CE \text{ y } B\hat{C}E=38°$$

Hallar "$m\sphericalangle A$".

A)64° B)76° C)72° D)68° E)80°

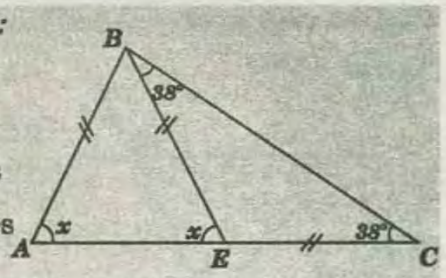
RESOLUCIÓN :

* Graficando:

* De los datos:

I) $\triangle BEC$ es Isósceles

II) $\triangle ABE$ es Isósceles



* Por ángulo exterior del $\triangle BEC$:

$$x=38°+38°=76°$$

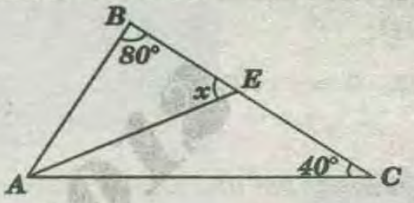
RPTA : "B"

PROBLEMA 7 :

De la figura , calcular "x".

Si: $\overline{AE}$ es bisectriz interior.

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 70°
E) 35°



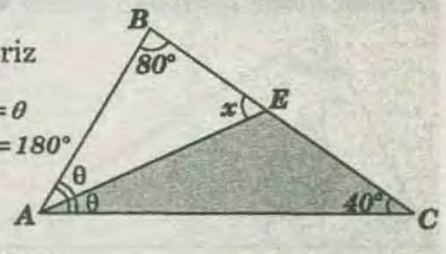
RESOLUCIÓN :

* Como $\overline{AE}$ es bisectriz

$\Rightarrow m\sphericalangle BAE=m\sphericalangle EAC=\theta$

* $\triangle ABC$: $80°+40°+2\theta=180°$

$\Rightarrow 2\theta=60°\Rightarrow \theta=30°$



* En el $\triangle AEC$: $\sphericalangle$externo

$$x=30°+40°=70°$$

RPTA : "D"

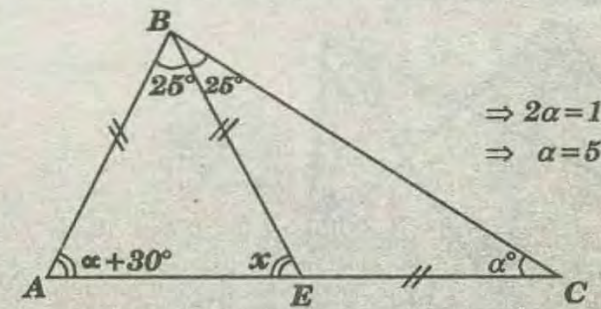
PROBLEMA 8 :

En un triángulo "ABC", $m\sphericalangle A=m\sphericalangle C+30°$ y se traza la bisectriz interior BE, calcular $m\sphericalangle AEB$; si: $\sphericalangle B=50°$

A) 45° B) 30° C) 62° D) 65° E) 75°

RESOLUCIÓN :

* En el $\triangle ABC$: $50°+(\alpha+30°)+\alpha=180°$



$$\Rightarrow 2\alpha=100°$$

$$\Rightarrow \alpha=50°$$

* En el $\triangle BEC$ $\sphericalangle$externo:

$$x=50°+25°$$

$$\Rightarrow x=75°$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 9 :

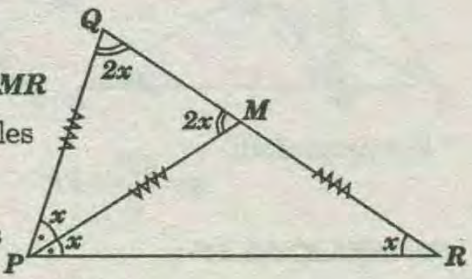
Dado el triángulo "PQR", se traza la bisectriz interior PM, tal que: $PQ=PM=MR$

Calcular la "$m\sphericalangle R$"

A) 20° B) 30° C) 37° D) 53° E) 36°

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Como: $PQ=PM=MR$

$\Rightarrow \Delta PMR$ es isósceles

* Además:

ΔQPM es Isósceles

* Luego: $2x+2x+x=180°$

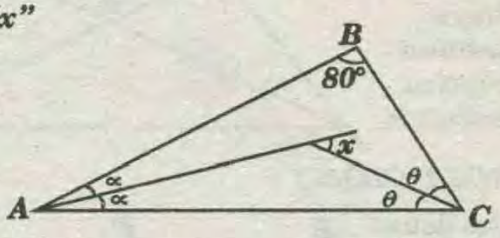
$\Rightarrow x=36°$

RPTA : "E"

PROBLEMA 10 :

Calcular: ***"x"***

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 60°



RESOLUCIÓN :

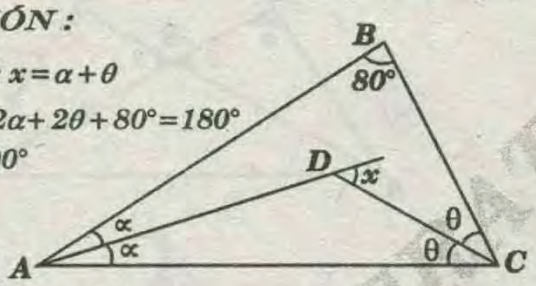
* En el ΔADC: $x=\alpha+\theta$

* De : ΔABC: $2\alpha+2\theta+80°=180°$

$\Rightarrow 2(\alpha+\theta)=100°$

$\Rightarrow 2x=100°$

$\Rightarrow \quad =50°$



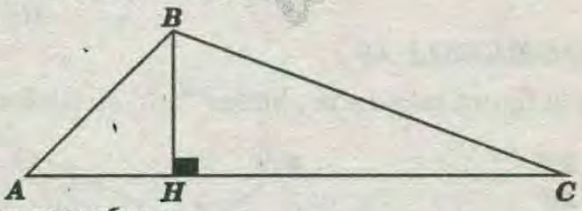
RPTA : "D"

PROBLEMA 11 :

En la figura $\overline{BH}$ es la altura. Además. $m\sphericalangle A=70°$ y $m\sphericalangle C=30°$

Calcular: $m\sphericalangle CBH - m\sphericalangle ABH$

A) 20°
B) 30°
C) 60°
D) 40°
E) 80°



RESOLUCIÓN :

* En el ABH: $m\sphericalangle ABH=90°-m\sphericalangle A$

$\Rightarrow m\sphericalangle ABH=90°-70°=20°$

* Del BHC: $m\sphericalangle CBH=90°-m\sphericalangle C$

$\Rightarrow m\sphericalangle CBH=90°-30°=60°$

$\Rightarrow m\sphericalangle CBH-m\sphericalangle ABH=60°-20°=40°$

RPTA: "D"

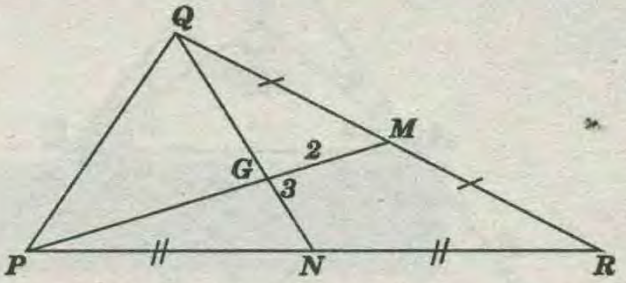
PROBLEMA 12 :

En un triángulo PQR se trazan las medianas $\overline{PM}$ y $\overline{QN}$ cortándose en el punto G.

Calcular ***"PG + QG"***, Si: $GM=2$ y $GN=3$

A) 6 B) 8 C) 10 D) 4 E) 12

RESOLUCIÓN :



*Por propiedad del baricentro:

$PG=2GM \Rightarrow PG=2(2)=4$

* Además:

$QG=2GN \Rightarrow QG=2(3)=6$

$\Rightarrow PG+QG=4+6=10$

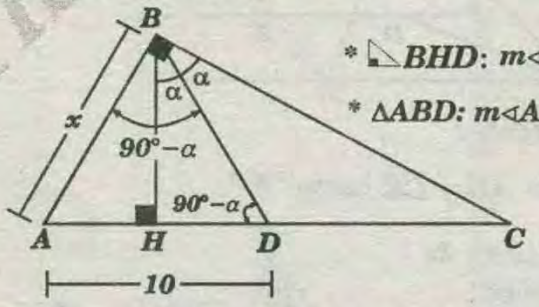
RPTA : "C"

PROBLEMA 13 :

Dado un triángulo rectángulo ABC recto en ***"B"***, se traza la altura $\overline{BH}$ y la bisectriz el ángulo HBC que corta al lado $\overline{AC}$ en el punto ***"D"***. Si: $AD=10$, calcular ***"AB"***.

A) 3 B) 4 C) 6 D) 10 E) 14

RESOLUCIÓN :



* $\triangle BHD$: $m\sphericalangle ADB=90°-\alpha$

* ΔABD: $m\sphericalangle ABD=90°-\alpha$

* Luego el triángulo ABD es isósceles. $\Rightarrow x=10$

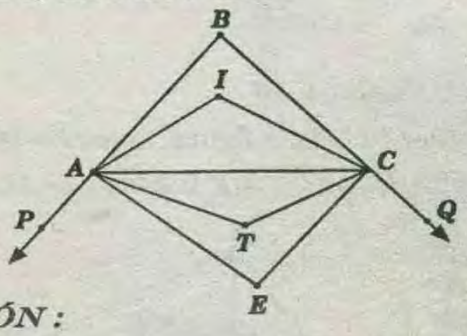
RPTA : "D"

PROBLEMA 14 :

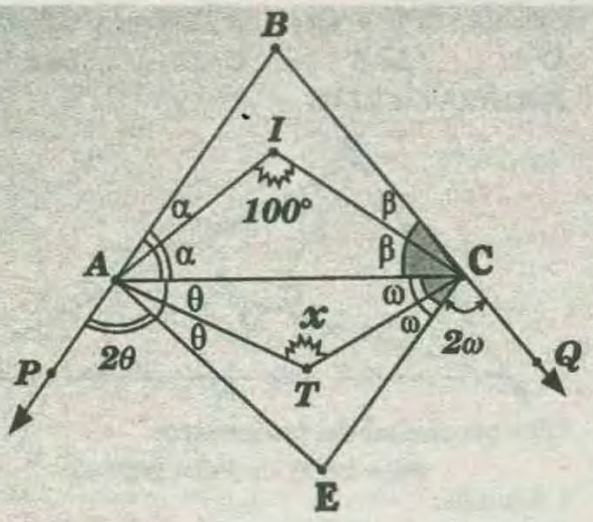
De la figura se cumple: $m\sphericalangle BAI=m\sphericalangle IAC$; $m\sphericalangle BCI=m\sphericalangle ICA$; $m\sphericalangle PAE=2m\sphericalangle EAT=2m\sphericalangle TAC$; $m\sphericalangle QCE=2m\sphericalangle ECT=2m\sphericalangle TCA$

Calcular: $m\sphericalangle ATC$; si: $m\sphericalangle AIC=100°$

A) 120°
B) 130°
C) 135°
D) 140°
E) 150°



RESOLUCIÓN :



* ΔATC: $x+\theta+\omega=180°$

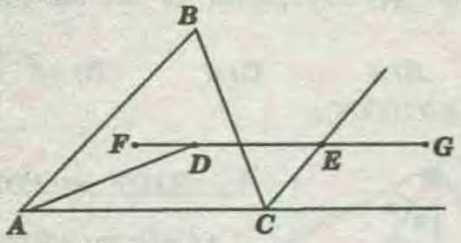
$\Rightarrow x+50°=180° \Rightarrow x=130°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 15 :

En la figura $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ son bisectrices, si: $m\sphericalangle B=4x$, $m\sphericalangle ADF=6x$ y $m\sphericalangle CEG=10x$. Calcular: "x"

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°



RESOLUCIÓN :

* Se prolongan $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ hasta "P".

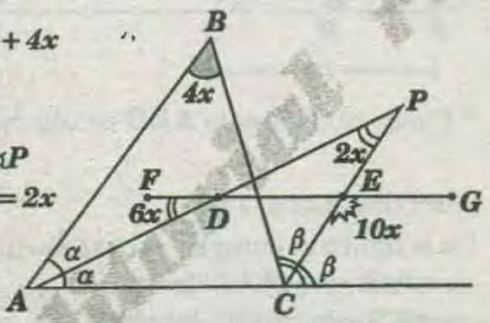
* ΔABC: $2\beta=2\alpha+4x$

$\Rightarrow 2\beta-2\alpha=4x$

$\Rightarrow \beta-\alpha=2x$

* APC: $\beta=\alpha+m\sphericalangle P$

$\Rightarrow m\sphericalangle P=\beta-\alpha=2x$



* ΔDEP: $6x+10x+2x=180°$

$\Rightarrow 18x=180°$

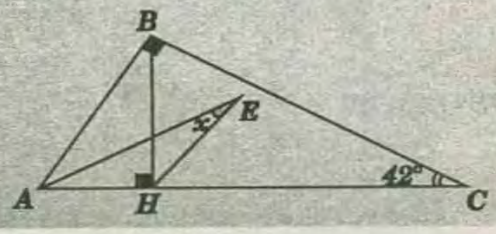
$\Rightarrow x=10°$

RPTA : "A"

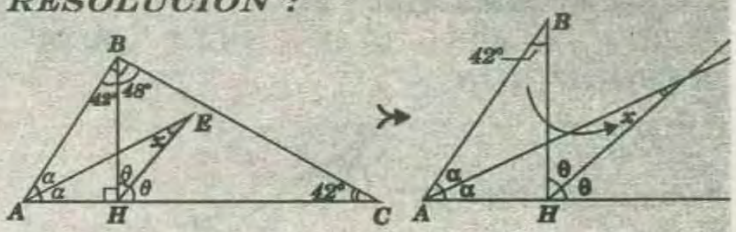
PROBLEMA 16 :

Calcular "x" de la figura, si $m\sphericalangle B=90°$; $\overline{AE}$ bisectriz del ángulo BAC y $\overline{HE}$ bisectriz de ángulo BHC:

A) 17°
B) 21°
C) 18°
D) 22°
E) 19°



RESOLUCIÓN :



* Por propiedad:

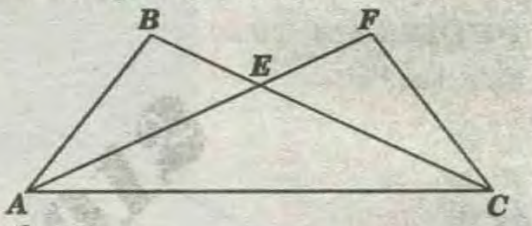
$$x=\frac{42°}{2}=21°$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 17 :

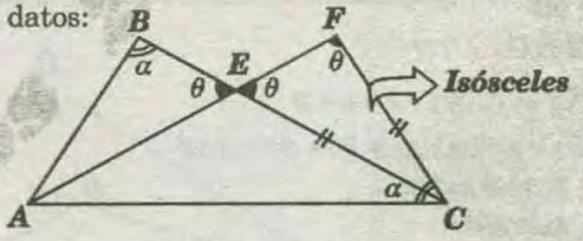
En la figura mostrada: $m\sphericalangle ABC=m\sphericalangle ACF$ y $EC=FC$, entonces, para el triángulo ABC, $\overline{AE}$ es una:

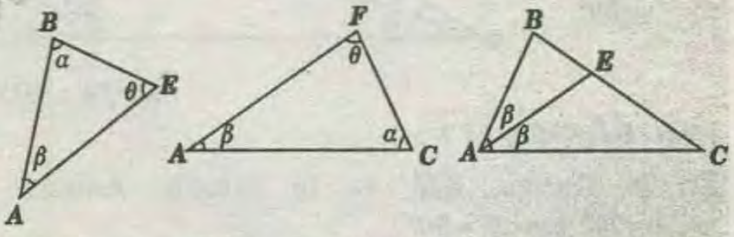
A) Bisectriz
B) Altura
C) Mediana
D) Triptica
E) Mediatriz



RESOLUCIÓN :

* De los datos:





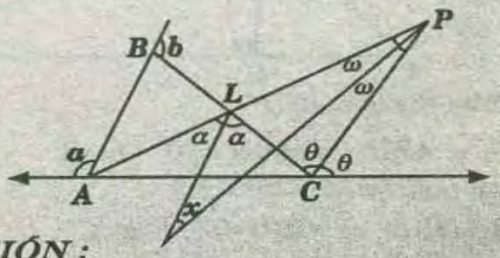
* Entonces : $\overline{AE}$ = bisectriz,

RPTA : "A"

PROBLEMA 18 :

En la figura mostrada , hallar "x" , si: $a+b=260°$

A) 20°
B) 25°
C) 15°
D) 12°
E) 35°



RESOLUCIÓN :

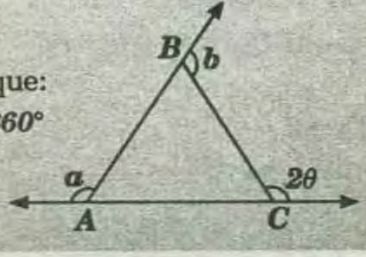
* ΔABC:

* Se tendrá que:

$\underbrace{a+b}_{260°}+2\theta=360°$

$\Rightarrow 2\theta=100°$

$\Rightarrow \theta=50°$

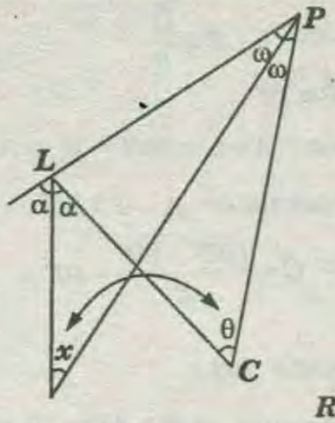


* Luego : $\triangle CPL$

* Por propiedad:

$$x=\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{50^\circ}{2}=25^\circ$$

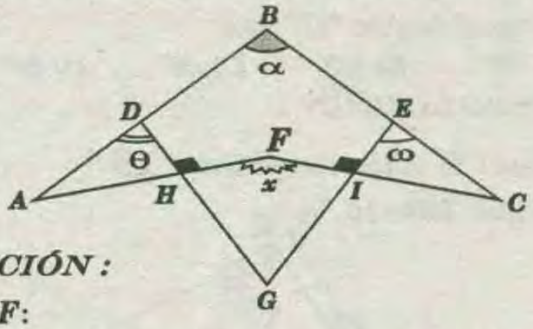


RPTA : "B"

PROBLEMA 19 :

En la figura mostrada, halle "x", si: $\alpha=35^\circ$ y $\theta+\omega=80^\circ$

A) 120°
B) 135°
C) 140°
D) 105°
E) 95°



RESOLUCIÓN :

* El $\wedge ABCF$:

$$x=m\sphericalangle A+m\sphericalangle C+m\sphericalangle B$$

$$\Rightarrow =90^\circ-\theta+90^\circ-\omega+\alpha$$

$$\Rightarrow =180^\circ+\alpha-(\theta+w)$$

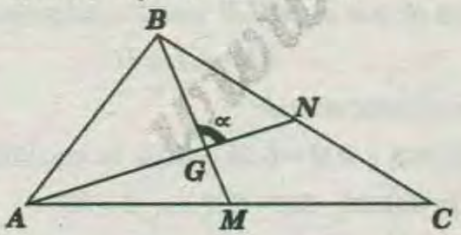
$$\Rightarrow =180^\circ+35^\circ-80^\circ \Rightarrow x=135^\circ$$

RPTA : "B"

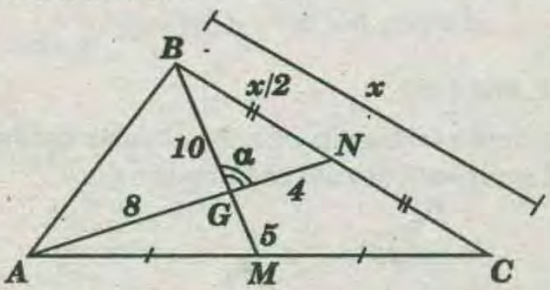
PROBLEMA 20 :

Hallar el mínimo valor entero de $\overline{BC}$, si: $BN=NC$; $AM=MC$; $GM=5$, $AG=8$ y "α" es obtuso.

A) 20
B) 19
C) 21
D) 22
E) 18



RESOLUCIÓN :



* Como "G" es baricentro:

$$\Rightarrow BG=2GM \Rightarrow BG=2(5)=10$$

$$\Rightarrow AG=2GM \Rightarrow GN=\frac{AG}{2}=\frac{8}{2}=4$$

* $\triangle BGN$:

Si: $\alpha>90^\circ \quad \Rightarrow \frac{x}{2}>\sqrt{10^2+4^2}$

$$\Rightarrow 21 \Rightarrow x_{min}=22 \Rightarrow \frac{x}{2}>\sqrt{116} \Rightarrow \frac{x}{2}>10,.....$$

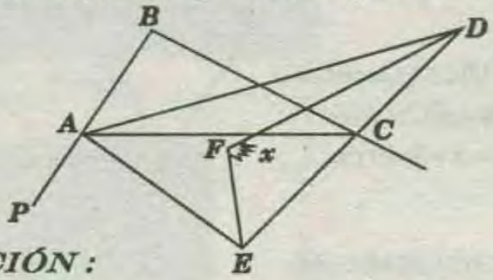
$$\Rightarrow x=22$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 21 :

Calcular "x", si: $m\sphericalangle BAD=m\sphericalangle DAC$, $m\sphericalangle ADF=m\sphericalangle FDE$, $m\sphericalangle AEF=m\sphericalangle FED$, $m\sphericalangle PAE=m\sphericalangle AEC$ y $m\sphericalangle B=\theta$

A) 105°
B) 120°
C) 135°
D) 145°
E) 120°



RESOLUCIÓN :

* Como AD es bisectriz del ángulo BAC y $\overline{AE}$ es bisectriz del ángulo PAC.

* Entonces . $m\sphericalangle DAE=90^\circ$

* $\triangle DAE$:

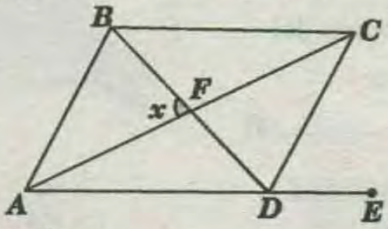
$$x=90^\circ+\frac{90^\circ}{2}=135^\circ.....\text{(Por propiedad)}$$

RPTA : "C"

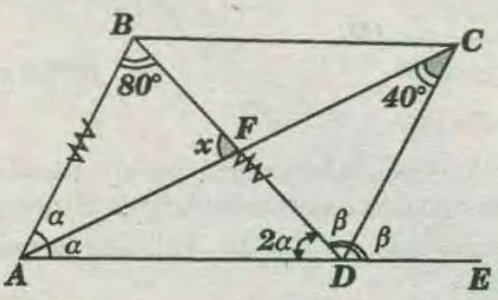
PROBLEMA 22 :

En la figura: $AB=BD$, $m\sphericalangle ACD=40^\circ$, $m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle CAD$ y $m\sphericalangle BDC=m\sphericalangle CDE$. Calcular "$x$".

A) 75°
B) 65°
C) 30°
D) 45°
E) 60°



RESOLUCIÓN :



$$\Rightarrow \frac{m\sphericalangle ABD}{2}=40^\circ \Rightarrow m\sphericalangle ABD=80^\circ$$

* $\triangle ABD$(Isósceles):

$$m\sphericalangle A=m\sphericalangle D=2\alpha \Rightarrow 4\alpha+80^\circ=180^\circ \Rightarrow \alpha=25^\circ$$

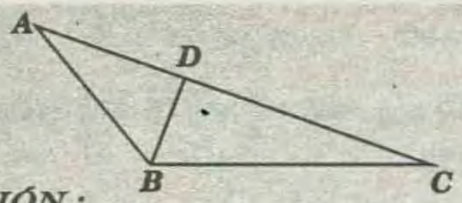
* $\triangle ABF$: $x+25^\circ+80^\circ=180^\circ \Rightarrow x=75^\circ$

RPTA : "A"

PROBLEMA 23 :

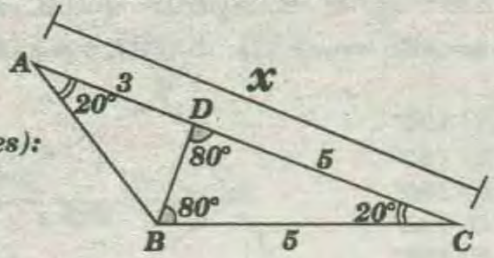
Si: $m\sphericalangle A=m\sphericalangle C=20^\circ$, $m\sphericalangle BDC=80^\circ$, $AD=3cm$ y $BC=5\,cm$. Hallar "AC"

A) 6cm
B) 10
C) 12
D) 8
E) 9



RESOLUCIÓN :

* $m\sphericalangle DBC = 180° - (80° + 20°) \Rightarrow m\sphericalangle DBC = 80°$



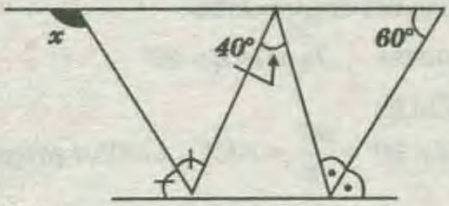
* ΔDBC (Isósceles):
  $DC = BC = 5cm$
$\Rightarrow x = 3 + 5 = 8\,cm$

RPTA : "D"

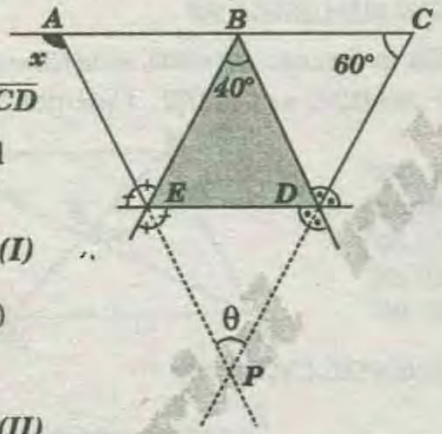
PROBLEMA 24:

Del gráfico mostrado , calcular el valor de "x"

A) 120°
B) 135°
C) 140°
D) 105°
E) 130°



RESOLUCIÓN :



* Se pide "x"
* Prologamos $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$
* ΔACP : (Medida del ángulo externo)

$x = 60° + \theta$ .....(I)

* ΔEBD (Propiedad)

$$\theta = 90° - \frac{40°}{2}$$

$\Rightarrow \theta = 70°$ .....(II)

* (II) en (I): $x = 130°$

RPTA : "E"

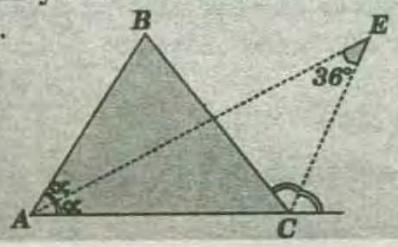
PROBLEMA 25:

Es un triángulo ABC, la bisectriz interior trazada por A forma con la bisectriz exterior del ángulo C un ángulo de $36°$. Sabiendo que $\hat{A} - \hat{C} = 20°$, calcular la medida del ángulo C.

A) 44° B) 88° C) 36° D) 64° E)72

RESOLUCIÓN:

* Como $\overline{AE}$ y $\overline{CE}$ son bisectrices interior y exterior, en ΔABC.



* Sabemos que : $\hat{E} = \frac{\hat{B}}{2}$
* Luego: $\hat{B} = 72°$
* En seguida : $\hat{A} + \hat{C} = 108° - B \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 108°$
* Además, por dato: $\hat{A} - \hat{C} = 20°$
* De donde: $\hat{C} = \frac{108° - 20°}{2} = 44°$

RPTA : "A"

PROBLEMA 26 :

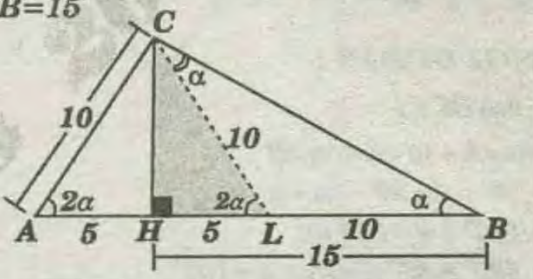
En un triángulo ABC, $AC = 10\ cms$, $\hat{A} = 2\hat{B}$, y la longitud desde el pie de altura trazada del vértice "C"; hasta el punto "B", es igual a $15\ cms$.

Luego el ángulo "C" vale.

A) 70° B) 60° C) 90° D) 80° E) 100°

RESOLUCIÓN :

* Sea $\overline{CH}$ la altura relativa a $\overline{AB}$.
* Dato: $HB = 15$



* Trazamos $\overline{CL}$, de modo que: $CL = AC$, obteniendo el ΔACL isósceles donde $ALC = A = 2\alpha$
* Luego , el ángulo exterior del ΔLCB

$$\Rightarrow LCB = \alpha$$

* Con el que el ΔCLB resulta isósceles

$$LB = CL = 10$$

* En consecuencia:

$HL = 5$ y $AH = 5 \Rightarrow \Delta ACL$ es equilátero

* De donde: $2\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = 30°$
* Finalmente, para el ΔABC , tenemos.

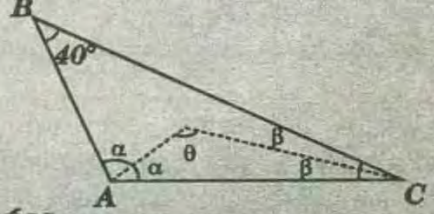
$$\hat{A} = 60°,\ B = 30° \text{ y } A\hat{C}B = 90°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 27 :

En el siguiente triángulo calcular el valor del ángulo que es el complemento del suplemento de θ.

A) 40°
B) 20°
C) 110°
D) 220°
E) 80°



RESOLUCIÓN:

* Por propiedad :

$$\theta = 90° + \frac{B}{2} \Rightarrow \theta = 90° + \frac{40°}{2} = 110°$$

* Luego, el complemento del suplemento de θ, será :

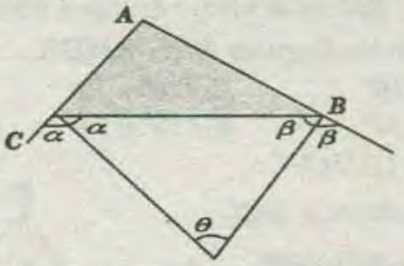
$$90° - (180° - 110°) = 20°$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 28 :

En la figura calcular el valor de θ, si $m\sphericalangle A = 70°$

A) 55°
B) 45°
C) 35°
D) 65°
E) 60°

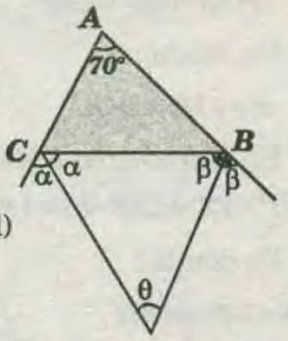


RESOLUCIÓN :

* De la figura piden: θ

* ΔABC :

$$\theta = 90° - \frac{70°}{2} = 55° \text{ .... (propiedad)}$$

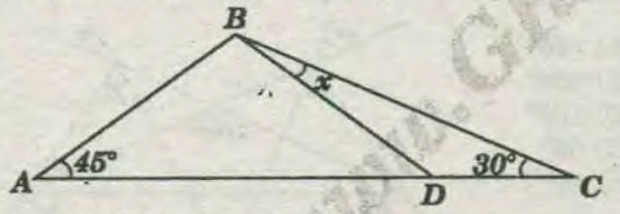


RPTA : "A"

PROBLEMA 29 :

Hallar el valor de **"x"** si $AB = BD$ y $BC = AD$

A) 15°
B) 10°
C) 30°
D) 18°
E) 37°



RESOLUCIÓN :

* Piden: x

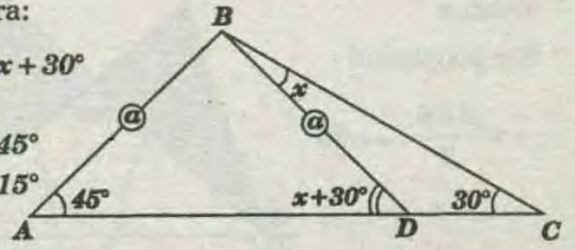
* En la figura:

$m\sphericalangle ADB = x + 30°$

* ΔABD:

$x + 30° = 45°$

$\Rightarrow x = 15°$



RPTA : "A"

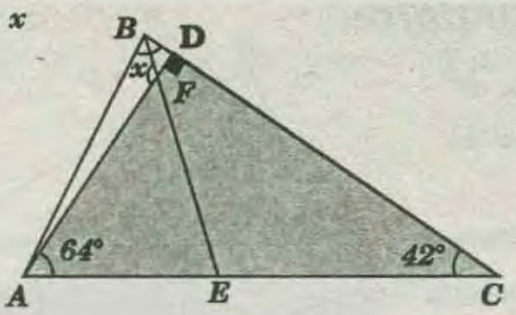
PROBLEMA 30 :

En el triángulo ABC, $\overline{AD}$ es la altura correspondiente al lado $\overline{BC}$ y $\overline{BE}$ es la bisectriz del ángulo B, las cuales cortan en F. Si $A = 64°$ y $C = 42°$, determinar el ángulo AFB.

A) 127° B) 130° C) 131° D) 142° E) 143°

RESOLUCIÓN:

* Piden: x



* $\wedge ACBF$:

$x = m\sphericalangle DAC + 42° + m\sphericalangle EBC$ .....(I)

* ΔABC: $m\sphericalangle ABE = m\sphericalangle EBC = 37°$

* $\triangle ADC$: $m\sphericalangle DAC = 48°$

* Reemplazando en (I): $x = 127°$

RPTA : "A"

PROBLEMA 31 :

Dado el triángulo ABC: si por el vértice C se traza CH perpendicular a AB (interiormente) y también la bisectriz exterior del vértice C y la diferencia de las medidas de los ángulos A y B es 26°. El ángulo que forma la bisectriz y la perpendicular es:

A) 110° B) 123° C) 103° D) 75° E) 96°

RESOLUCIÓN :

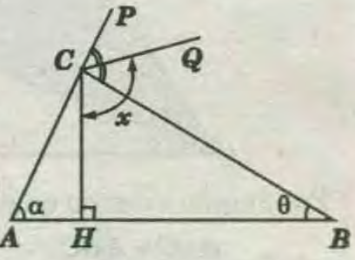
* Piden: x

* Datos: $\alpha - \theta = 26°$

* De la figura::

$x = m\sphericalangle HCB + m\sphericalangle BCQ$ .....(I)

* $\triangle CHB$: $m\sphericalangle HCB = 90° - \theta$



* ΔABC : $m\sphericalangle BCQ = m\sphericalangle QCP = \frac{\alpha + \theta}{2}$ .....(∢ exterior)

* Reemplazando en (I):

$$\Rightarrow x = (90° - \theta) + \frac{(\alpha + \theta)}{2}$$

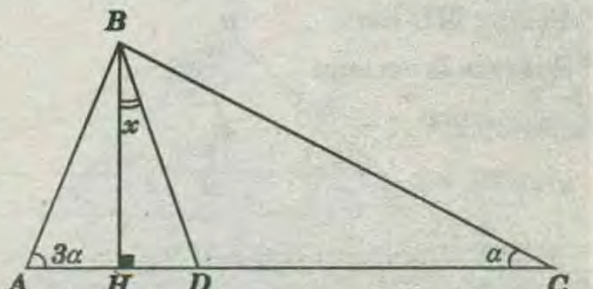
$$\Rightarrow x = 90° + \left(\frac{\alpha - \theta}{2}\right) = 90° + \left(\frac{26°}{2}\right) = 103°$$

RPTA : "C"

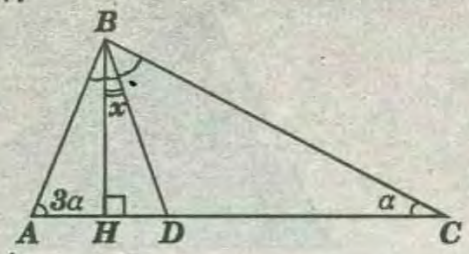
PROBLEMA 32 :

En la figura BH es altura del triángulo ABC y BD es bisectriz del triángulo ABC. Calcular el valor de **"x"**.

A) α
B) 2α
C) 3α
D) $\frac{\alpha}{2}$
E) $\frac{\alpha}{3}$



RESOLUCIÓN:



* Piden : x
* Propiedad:
* Si:

$\overline{BH}$: Altura

$\overline{BD}$: bisectriz interior

$$\Rightarrow x=\frac{m\sphericalangle BAC-m\sphericalangle ACB}{2}=\frac{3\alpha-\alpha}{2}=\alpha$$

RPTA : "A"

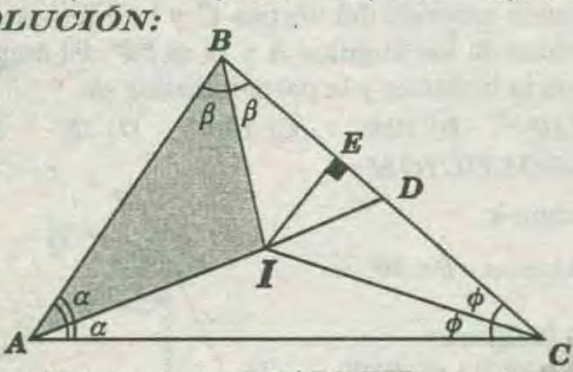
PROBLEMA 33 :

En un triángulo ABC , sea I el punto de intersección de la bisectrices, D el punto de intersección de la prolongación de $\overline{AI}$ y $\overline{BC}$; $\overline{IE}$ es la perpendicular trazada de I a $\overline{BC}$. Entonces la medida del ángulo BID es igual a la medida del ángulo:

A) $B\hat{A}C$ B) $I\hat{C}E$ C) $E\hat{I}C$ D) $D\hat{I}E$ E) $I\hat{B}C$

RESOLUCIÓN:

$BID=?$



* Por ángulo externo en el ΔABI: $BID=\alpha+\beta$

$$\Rightarrow B\hat{I}D=\frac{B\hat{A}C+A\hat{B}C}{2}$$

$$\Rightarrow B\hat{I}D=\frac{180^\circ-A\hat{C}D}{2}\Rightarrow B\hat{I}D=90^\circ-\frac{A\hat{C}B}{2}$$

$$\Rightarrow B\hat{I}D=90^\circ-\phi\Rightarrow B\hat{I}D=E\hat{I}C$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 34 :

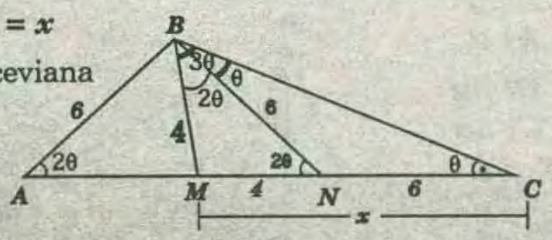
En un triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BM}$, tal que $m\sphericalangle MBC=3m\sphericalangle MCB$; $m\sphericalangle BAC=2m\sphericalangle BCA$, $AB=6$ y $BM=4$. Calcular MC

A)8 B)11 C)9 D)10 E)12

RESOLUCIÓN :

* Piden : $MC=x$
* Se traza la ceviana interior $\overline{BN}$

$m\sphericalangle NBC=\theta$



* ΔBMN isósceles : $BM=MN=4$
* ΔABN isósceles : $AB=BN=6$
* ΔBNC isósceles : $BN=NC=6$

$\Rightarrow x=10$

RPTA: "D"

PROBLEMA 35:

Sea el triángulo ABC en el cual $ABC=64^\circ$ y $ACB=72^\circ$ y sea $\overline{BM}$ y $\overline{CP}$ las bisectrices de los ángulos ABC y ACB, respectivamente. $\overline{BM}$ y $\overline{CP}$ se cortan en el punto Q, $\overline{BH}$ es la altura trazada desde B. Hallar la medida de los ángulos BQC y MBH.

A)122° y 16° B)120° y 12° C)110° y 14°
D)110° y 12° E)112° y 14°

RESOLUCIÓN :

* En el triángulo BQC

$\alpha+32^\circ+36^\circ=180^\circ$

* De donde :

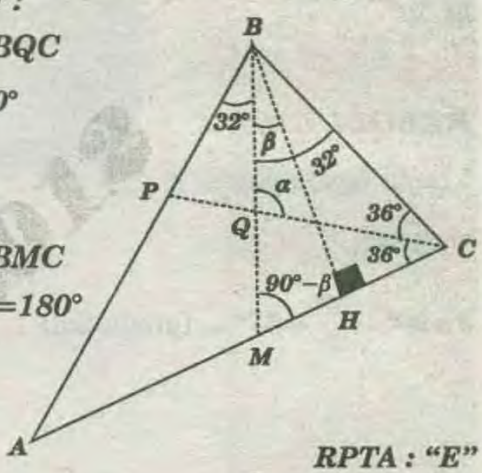
$\alpha=112^\circ=BQC$

* En el triángulo BMC

$32^\circ+72^\circ+(90^\circ-b)=180^\circ$

* De donde :

$\beta=14^\circ=MBH$

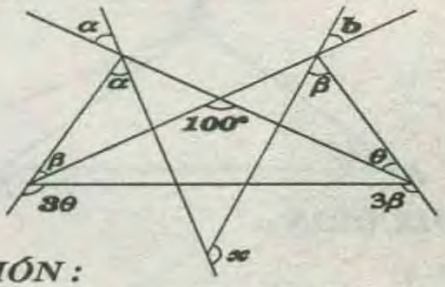


RPTA : "E"

PROBLEMA 36 :

Según el gráfico , calcule x.

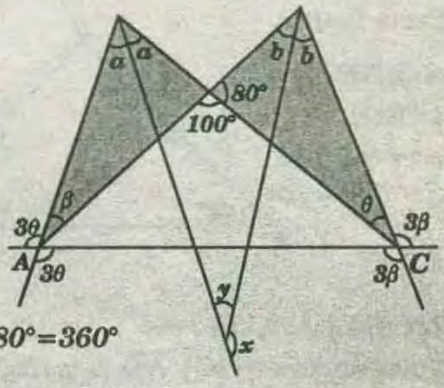
A) 145°
B) 205°
C) 120°
D) 95°
E) 89°



RESOLUCIÓN :

* Piden x
* Por propiedad :

$$y=\frac{\beta+\theta}{2}\ldots\ldots(I)$$



* En ΔABC:

$(3\theta+\beta)+(\theta+3\beta)+80^\circ=360^\circ$

$\Rightarrow \theta+\beta=70^\circ$

* En (I): $y=35^\circ$
* Se observa:

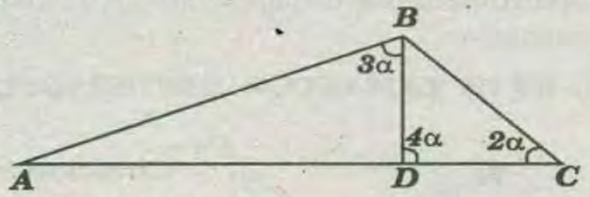
$x+y=180^\circ\Rightarrow x=145^\circ$

RPTA : "A"

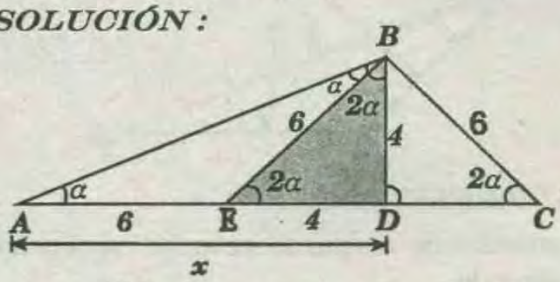
PROBLEMA 37:

En la figura mostrada, si $BD=4$ y $BC=6$, hallar AD.

A) 6
B) 8
C) 10
D) 15
E) 20



RESOLUCIÓN :



* Trazamos $\overline{BE}$, de manera que la $m\sphericalangle ABE=\alpha$

* Luego tenemos los triángulos isósceles:

AEB, EDB y EBC, en donde observamos que:

$AE=BE=BC=6$ y $ED=BD=4$

* En consecuencia :

$x=6+4 \Rightarrow x=10$

RPTA : "C"

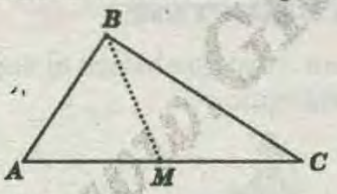
: RESUMEN :

I) CEVIANA INTERIOR :

se llama así a cualquier segmento de recta , que trazada por uno de los vértices corta al lado opuesto.

* En el $\triangle ABC$

* $\overline{BM}$: ceviana interior relativa a $\overline{AC}$

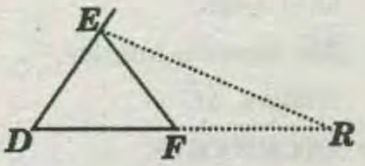


II) CEVIANA EXTERIOR :

Se llama así a cualquier segmento de recta , que trazada por uno de los vértices corta a la prolongación el lado opuesto.

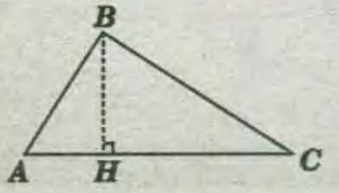
* En el $\triangle DEF$:

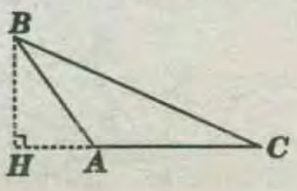
* $\overline{ER}$: Ceviana exterior relativa a $\overline{DF}$



III) ALTURA :

Es el segmento de recta , que partiendo de un vértice, cae perpendicularmente sobre su lado opuesto.



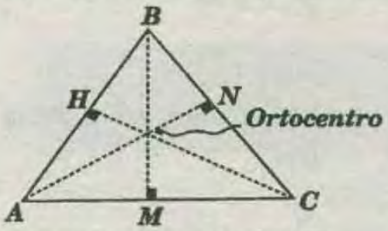


ORTOCENTRO :

Punto de concurrencia de las tres alturas de un triángulo. Todo triángulo tiene un ortocentro.

FORMAS DE TRAZAR UNA ALTURA

A) EN EL TRIÁNGULO ACUTÁNGULO:

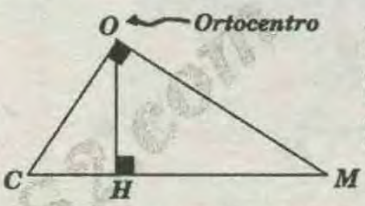


$\overline{AN}$, $\overline{CH}$, $\overline{BM}$ } Alturas del $\triangle ABC$

CARACTERÍSTICA :

El ortocentro es un punto interior , cuando el triángulo es acutángulo.

B) EN UN TRIANGULO RECTÁNGULO:



$\overline{CO}$, $\overline{OH}$, $\overline{OM}$ } Alturas del $\triangle COM$

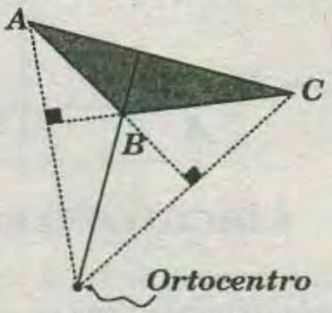
CARACTERÍSTICAS :

El ortocentro , es un punto ubicado en el vértice del ángulo recto. Cuando el triángulo es rectángulo.

RECORDAR:

Para determinar el ortocentro en un triángulo, solamente se pueden trazar 2 alturas.

C) EN UN TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO:

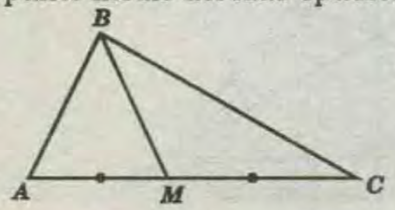


CARACTERÍSTICA :

El ortocentro es un punto exterior , cuando el triángulo es obtusángulo.

IV) MEDIANA :

Es el segmento de una recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.



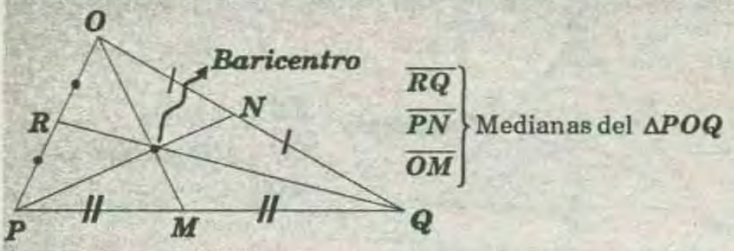
$\overline{BM}$: mediana

BARICENTRO O GRAVICENTRO

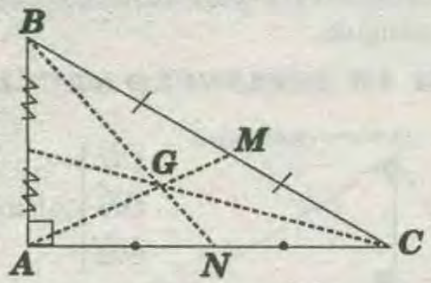
Punto de concurrencia de las tres medianas de un triángulo.

Formas de trazar una mediana:

A) EN UN TRIÁNGULO ACUTÁNGULO :



B) EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO :



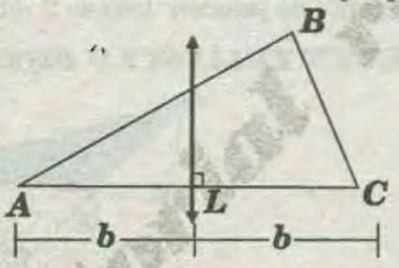
CARACTERÍSTICAS :

* El baricentro es siempre un punto interior en todo triángulo.

* Todo triángulo tiene un solo baricentro.

V) MEDIATRIZ :

Es la recta perpendicular a uno de los lados que pasa por su punto medio.



En el ΔABC

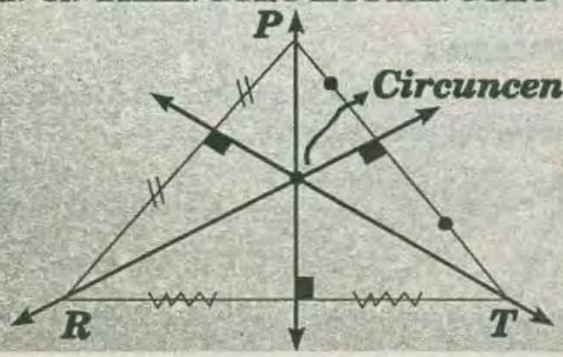
$\overline{L}$: mediatriz de $\overline{AC}$

CIRCUNCENTRO

Punto de concurrencia de las *3* mediatrices de un triángulo. Todo triángulo tiene un solo circuncentro.

Formas de trazar una mediatriz:

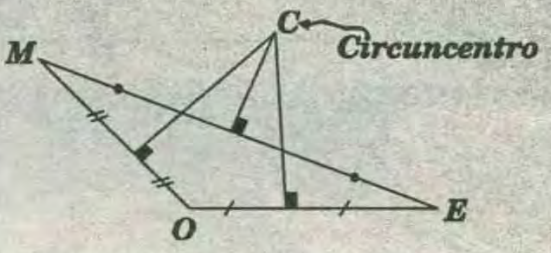
A) EN UN TRIÁNGULO ACUTÁNGULO :



CARACTERÍSTICA :

* El circuncentro es un punto interior , en un triángulo acutángulo.

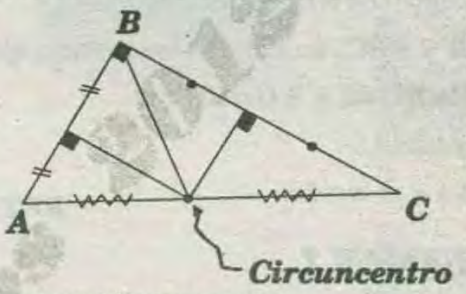
B) EN UN TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO :



CARACTERÍSTICAS :

El circuncentro de un punto exterior , si el triángulo es obtusángulo.

C) EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO :

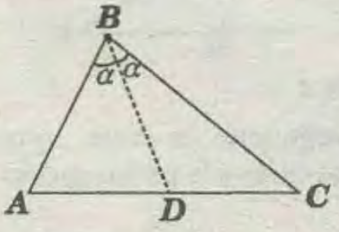


CARACTERÍSTICAS :

El circuncentro se encuentra ubicado en el punto medio de la hipotenusa, en un triángulo rectángulo.

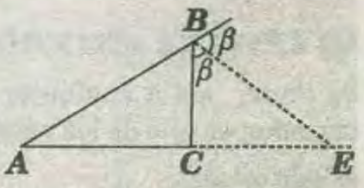
VI) BISECTRIZ :

Es un rayo que biseca al ángulo interno o externo en el triángulo



En el ΔABC

$\overline{BD}$: bisectriz interior relativa $\overline{AC}$

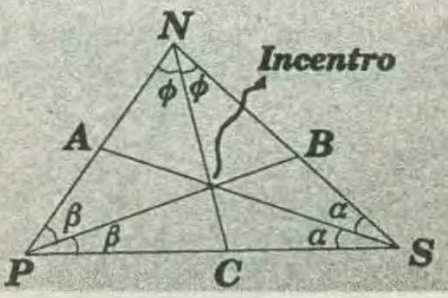


En el ΔABC

$\overline{BE}$: bisectriz exterior relativa $\overline{AC}$

A) INCENTRO

Punto de concurrencia de las bisectrices interiores.



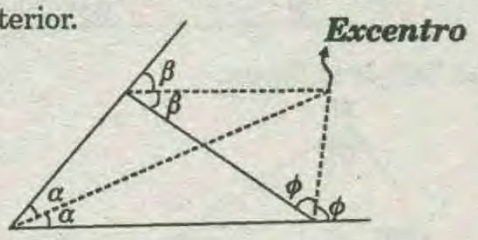
CARACTERÍSTICAS :

* Todo triángulo tiene un solo incentro.

* El incentro siempre es un punto interior al triángulo

B) EX-CENTRO

Punto de concurrencia de dos bisectrices exteriores y una interior.



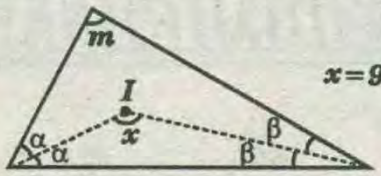
CARACTERÍSTICAS :

* Todo triángulo tiene *3* excentros.

* Los excentros son puntos exteriores de todo triángulo.

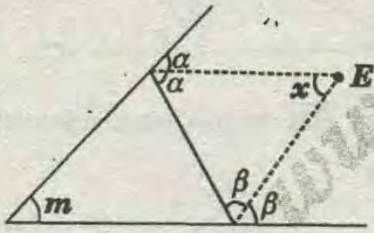
ÁNGULOS DETERMINADOS POR LAS BISECTRICES

I) Las *3* bisectrices interiores de un triángulo se cortan en un mismo punto llamado incentro. *(I)*



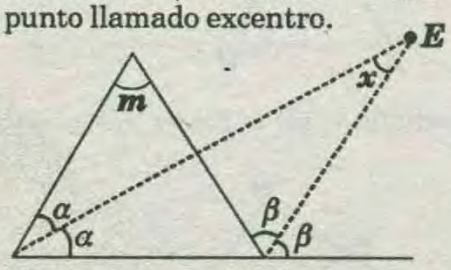
$$x = 90° + \frac{m}{2}$$

II) Si se traza dos bisectrices exteriores , se cortan en un mismo punto llamado excentro. *(E)*



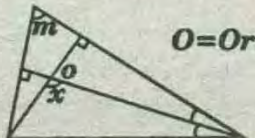
$$x = 90° - \frac{m}{2}$$

III) Si se traza una bisectriz interior y una exterior correspondiente a un segundo ángulo se cortan en un solo punto llamado excentro.



$$x = \frac{m}{2}$$

IV) Las *3* alturas se cortan en un solo punto llamado ortocentro.



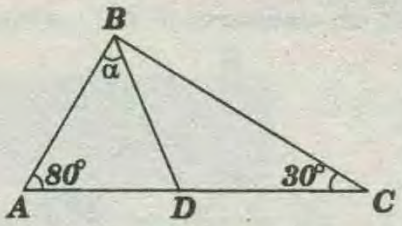
O=Ortocentro

$x + m = 180°$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

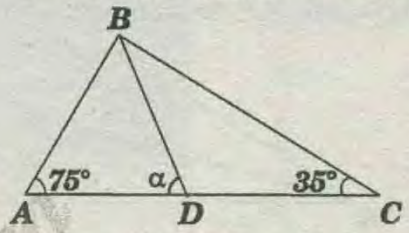
01 Calcular "α", si $\overline{BD}$: es bisectriz del ángulo "ABC"

A) 20°
B) 30°
C) 35°
D) 25°
E) 32°



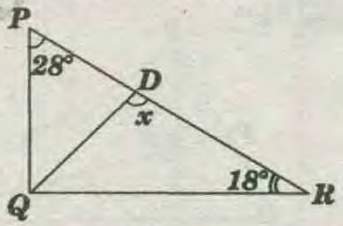
02 Calcular "α", si $\overline{BD}$: es bisectriz del ángulo *ABC*

A) 60°
B) 50°
C) 70°
D) 75°
E) 68°



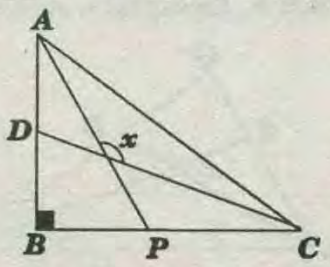
03 Si $\overline{QD}$ es bisectríz del ángulo *PQR*. Calcular "x"

A) 65°
B) 56°
C) 95°
D) 75°
E) 85°



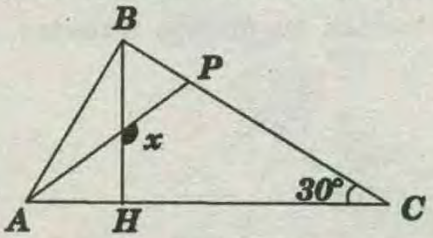
04 Si: $\overline{AP}$ y $\overline{CD}$ son bisectrices interiores, calcular "x"

A) 135°
B) 120°
C) 110°
D) 100°
E) 145°



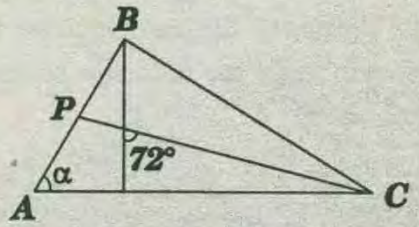
05 Si: *AP* y *BH* son alturas. Calcular "x".

A) 100°
B) 110°
C) 150°
D) 130°
E) 120°



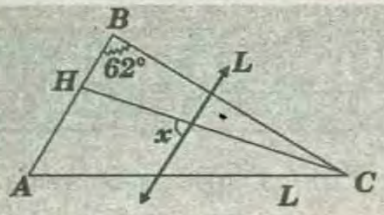
06 Si: $\overline{BH}$ y $\overline{CP}$ son alturas, calcular "α"

A) 72°
B) 64°
C) 68°
D) 70°
E) 65°



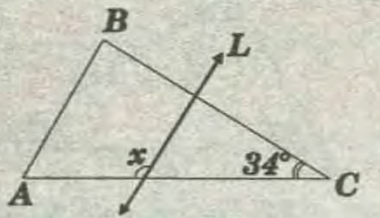
07 Si: $\overline{CH}$ es altura y $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{BC}$, calcular "x".

A) 62°
B) 52°
C) 42°
D) 72°
E) 56°



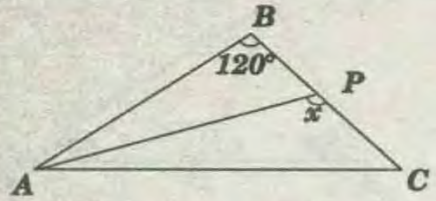
08 Si: $\overline{L}$ es mediatriz de $\overline{BC}$, calcular "x"

A) 110°
B) 120°
C) 128°
D) 124°
E) 132°



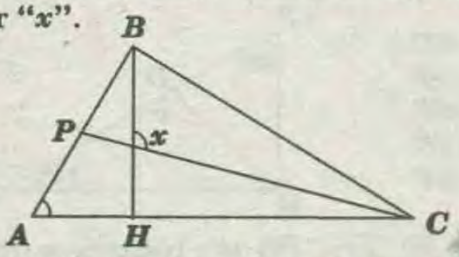
09 Si: $AB=BC$, $\overline{AP}$ es bisectriz. Calcular "x"

A) 130°
B) 132°
C) 135°
D) 136°
E) 140°



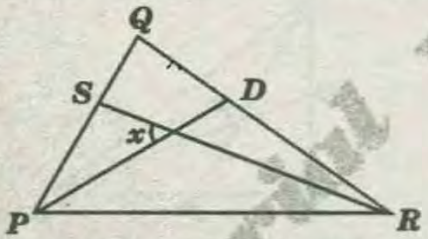
10 Si: $m\sphericalangle A+m\sphericalangle B=100°$, $\overline{BH}$ es altura y $\overline{CP}$ bisectriz. Calcular "x".

A) 100°
B) 110°
C) 115°
D) 130°
E) 120°



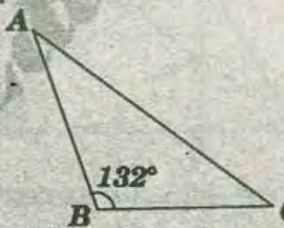
11 Si: $\overline{PD}$ es bisectriz, $\overline{RS}$ es altura, $m\sphericalangle Q+m\sphericalangle R=110°$. Calcular "$x$"

A) 45°
B) 35°
C) 65°
D) 55°
E) 60°



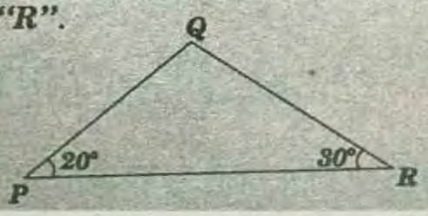
12 En la figura mostrada, calcular la medida del ángulo que forman las alturas trazadas desde los vértices "A" y "C".

A) 48°
B) 32°
C) 42°
D) 54°
E) 52°



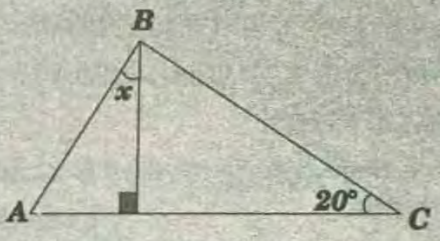
13 En la siguiente figura calcular la medida del ángulo que forman las alturas trazadas desde los vértices "P" y "R".

A) 40°
B) 30°
C) 20°
D) 60°
E) 50°



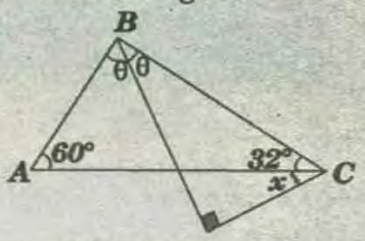
14 Si: $AC=BC$. Calcular "x"

A) 20°
B) 24°
C) 18°
D) 10°
E) 30°



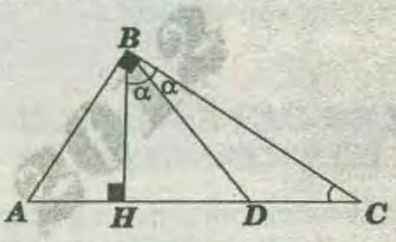
15 Calcular "x" de la figura.

A) 14°
B) 16°
C) 30°
D) 32°
E) 28°



16 Si: $AB=5$, $DC=4$, Calcular "AC"

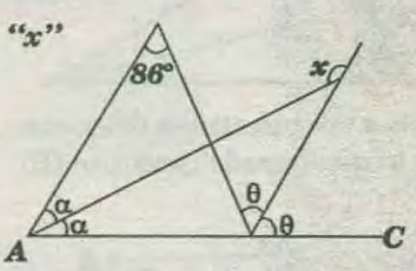
A) 8
B) 7
C) 10
D) 9
E) 12



TAREA DOMICILIARIA

01 Calcular "x"

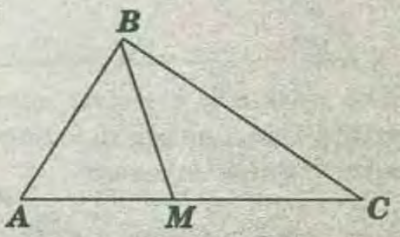
A) 127°
B) 117°
C) 147°
D) 157°
E) 137°



02 Calcular "x", si: $\overline{BM}$ es mediana: además:

$AM=x^2-1$, $MC=48$

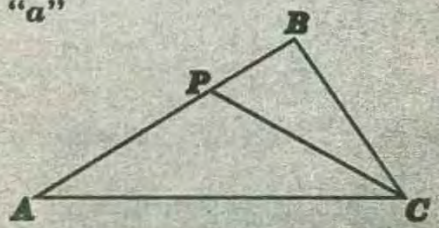
A) 5
B) 6
C) 9
D) 8
E) 7



03 Si: $\overline{PC}$ es mediana y $AP = 2a+4$, $BP = a+10$

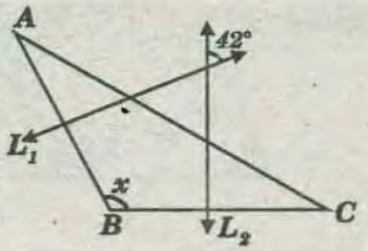
Calcular "a"

A) 4
B) 5
C) 9
D) 8
E) 6



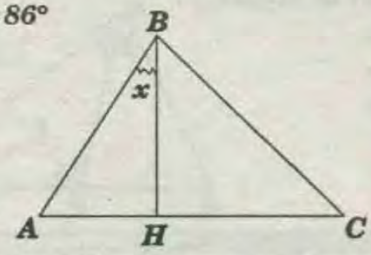
04 Calcular "x", si: $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$

A) 128°
B) 138°
C) 142°
D) 132°
E) 136°



05 Calcular "x", si: $\overline{BH}$ ea altura. Ademas: $m\sphericalangle C = 46°$ y $m\sphericalangle B = 86°$

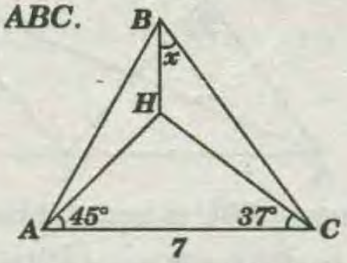
A) 52°
B) 43°
C) 34°
D) 42°
E) 32°



SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

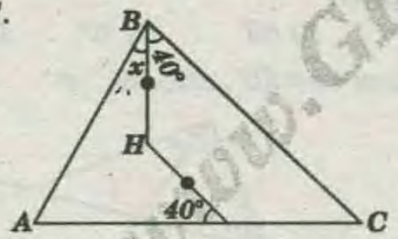
01 En la figura, calcular "x" si "H" es ortocentro del triángulo ABC.

A) 1°
B) 2°
C) 3°
D) 4°
E) 5°



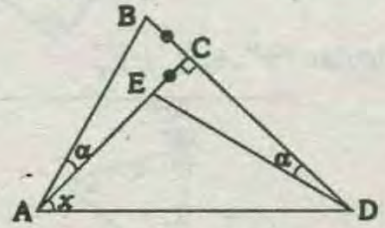
02 En la figura, calcular "x" si "H" es ortocentro del triángulo ABC.

A) 15°
B) 20°
C) 25°
D) 30°
E) 40°



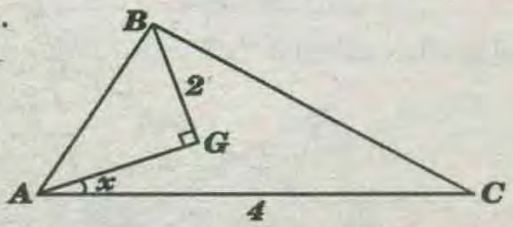
03 En la figura, calcular "x"

A) 60°
B) 53°
C) 37°
D) 45°
E) 30°



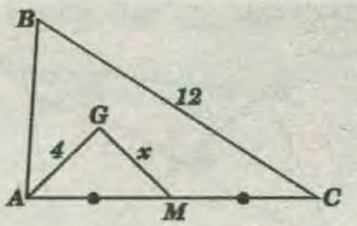
04 En la figura, calcular "x" si: "G" es baricentro del $\triangle ABC$.

A) 60°
B) 45°
C) 37°
D) 15°
E) 30°



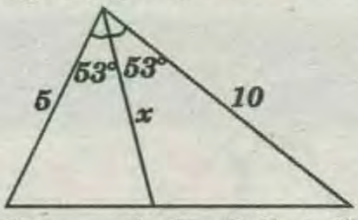
05 En la figura, calcular los valores enteros que puede tomar "x", si: "G" es baricentro del $\triangle ABC$.

A) 2; 3; 4
B) 3; 4
C) 2; 3
D) 3
E) 2



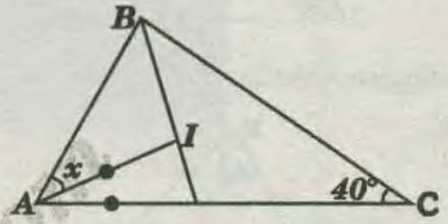
06 En la figura, calcular "x"

A) 5
B) 6
C) 3
D) 4
E) 7,5



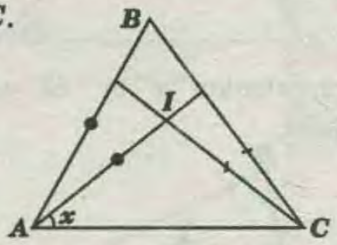
07 En la figura, calcular "x" si: "I" es incentro del $\triangle ABC$.

A) 50°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 60°



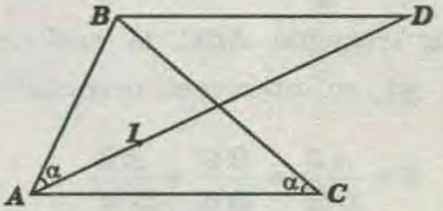
08 En la figura, calcular "x" si: "I" es incentro del triángulo ABC.

A) 45°
B) 40°
C) 30°
D) 36°
E) 20°



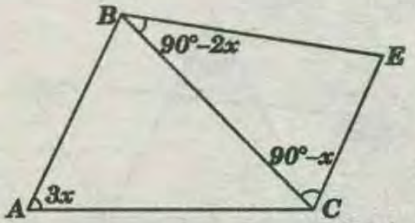
09 En la figura, calcular ID si: $AB=8$; "I" es incentro del $\triangle ABC$ y $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$.

A) 10
B) 9
C) 7
D) 6
E) 8



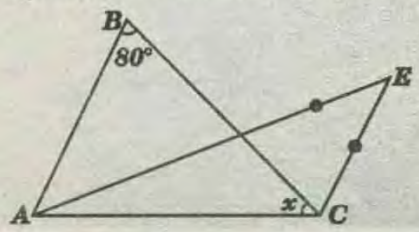
10 En la figura, calcular "x" si: "E" es excentro del $\triangle ABC$.

A) 20°
B) 18°
C) 30°
D) 15°
E) 12°



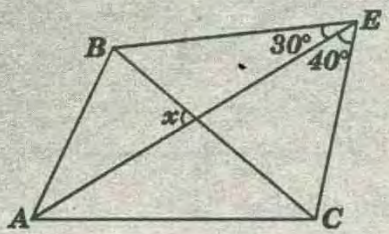
11 En la figura, calcular "x" si: "E" es excentro del $\triangle ABC$.

A) 80°
B) 40°
C) 60°
D) 40°
E) 30°



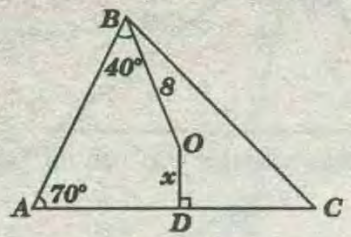
GRATIS.com

(12) En la figura, calcular "x" si "E" es excentro del $\triangle ABC$.



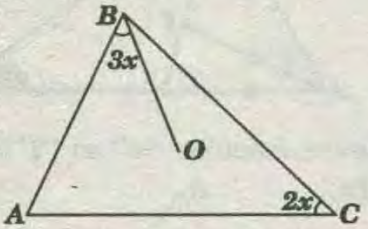
A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 80°

(13) En la figura, calcular "x" si: "O" es circuncentro del $\triangle ABC$.



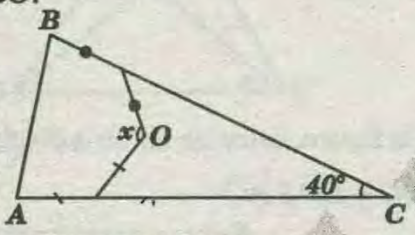
A) 5
B) 6
C) 3
D) 4
E) 2

(14) En la figura, calcular "x" si: "O" es circuncentro del $\triangle ABC$.



A) 12°
B) 15°
C) 18°
D) 20°
E) 24°

(15) En la figura, calcular "x" si: "O" es circuncentro del triángulo ABC.



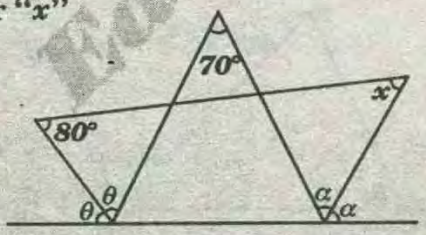
A) 110°
B) 120°
C) 130°
D) 140°
E) 150°

(16) En un triángulo ABC la mediana $\overline{AM}$ y la bisectriz $\overline{BF}$ se intersecan perpendicularmente. Calcular:

$$E=\frac{AB}{BM}+\frac{BC}{AB}+\frac{AB}{CM}$$

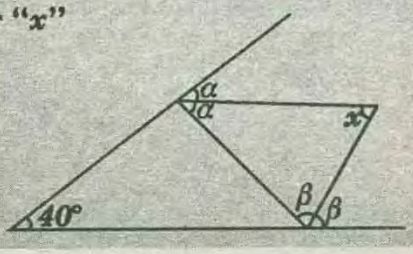
A) 3 B) 3,5 C) 4 D) 4,5 E) 2

(17) Calcular "x"



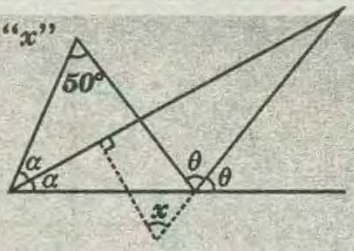
A) 35°
B) 40°
C) 45°
D) 50°
E) 55°

(18) Calcular "x"



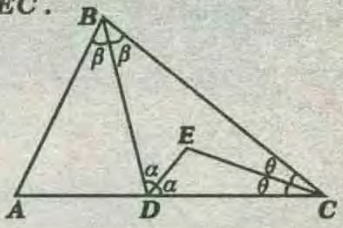
A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 80°

(19) Calcular "x"



A) 50°
B) 55°
C) 60°
D) 65°
E) 70°

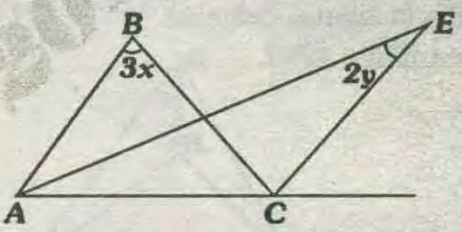
(20) En la figura, $m\sphericalangle BAC=80°$ y $m\sphericalangle BCA=40°$. Calcular la $m\sphericalangle DEC$.



A) 105°
B) 115°
C) 100°
D) 95°
E) 85°

TAREA DOMICILIARIA

(01) Si E es el excentro relativo a $\overline{BC}$; $x+y=35°$; calcular "x"

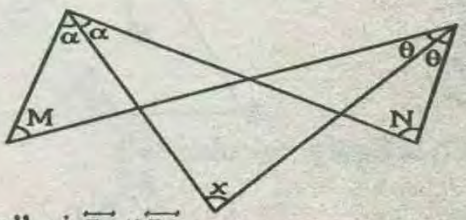


A) 15°
B) 20°
C) 18°
D) 17°
E) 23°

(02) En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, tal que la $m\sphericalangle BDA=72°$ y $m\sphericalangle BCD=35°$. Calcular la $m\sphericalangle BAD$

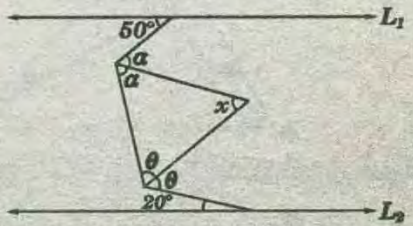
A) 56° B) 63° C) 70° D) 71° E) 77°

(03) Si: $m+n=80°$; calcular "x"



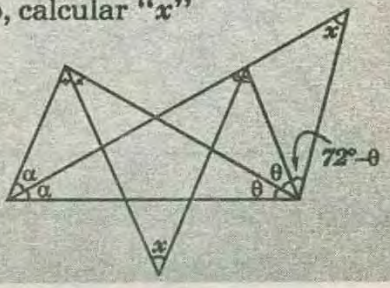
A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 45°
E) 60°

(04) Calcular "x", si $\overleftrightarrow{L_1}\parallel\overleftrightarrow{L_2}$



A) 20°
B) 55°
C) 65°
D) 45°
E) 70°

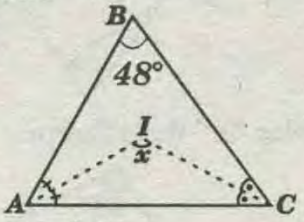
(05) Del gráfico, calcular "x"



A) 24°
B) 30°
C) 36°
D) 45°
E) 60°

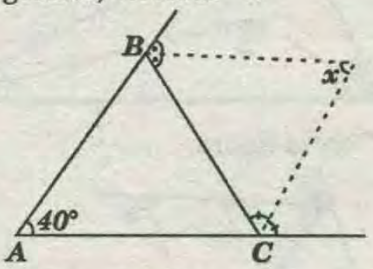
TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 En el gráfico, calcular "x"



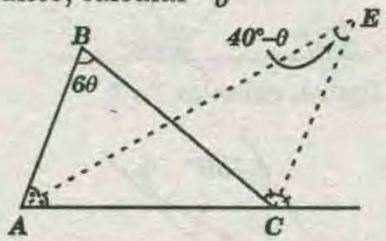
A) 124°
B) 114°
C) 118°
D) 128°
E) 122°

02 En el gráfico, calcular "x"



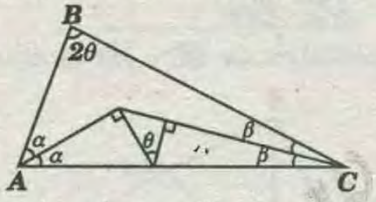
A) 50°
B) 65°
C) 55°
D) 80°
E) 70°

03 En el gráfico, calcular "θ"



A) 20°
B) 10°
C) 15°
D) 25°
E) 12°

04 En el gráfico mostrado calcular θ

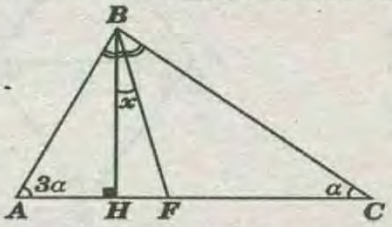


A) 60°
B) 30°
C) 45°
D) 36°
E) 54°

05 El menor ángulo que forman dos alturas en un triángulo acutángulo mide θ. Determinar la medida de un ángulo interno del triángulo.

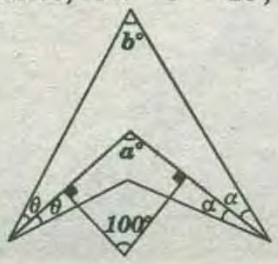
A) $\theta/2$ B) θ C) 2θ D) $\frac{2\theta}{3}$ E) $\frac{3\theta}{2}$

06 Indicar la relación correcta *($\overline{BF}$: BISECTRIZ)*



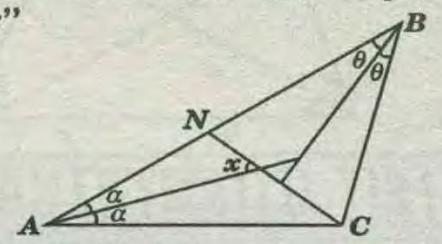
A) $x=\alpha$
B) $x=\alpha/2$
C) $x=2\alpha$
D) $x=2\alpha/3$
E) $x=3\alpha/2$

07 En el gráfico, si $a - b = 40$, calcular a.



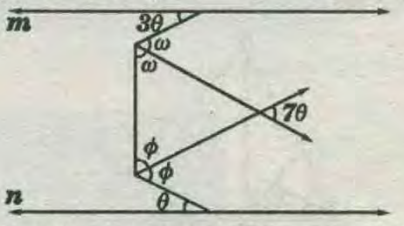
A) 90
B) 110
C) 120
D) 135
E) 100

08 En el triángulo ABC se sabe que $m\sphericalangle ACB=100°$ se traza la ceviana interior $\overline{CN}$ tal que $BC=BN$. Calcular "x"



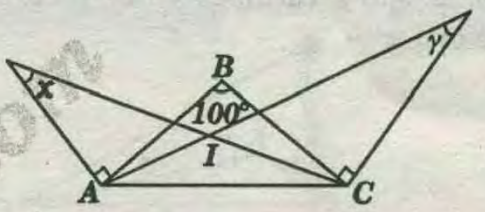
A) 50°
B) 40°
C) 30°
D) 60°
E) 45°

09 Si $m \parallel n$, calcular "θ"



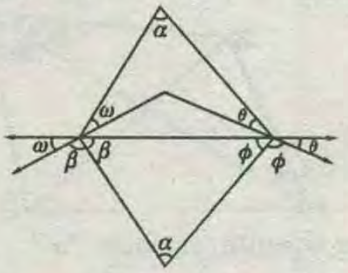
A) 9°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°

10 Si. "I" es el incentro del triángulo ABC, calcular "$x+y$"



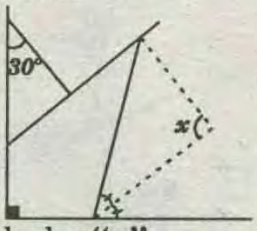
A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 80°

11 Del gráfico, calcular "α"



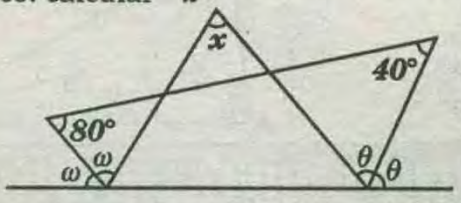
A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 36°
E) 54°

12 En el gráfico: calcular "x"



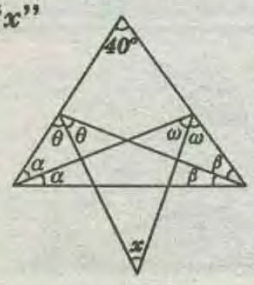
A) 65°
B) 75°
C) 85°
D) 95°
E) 105°

13 En el gráfico: calcular "x"



A) 60°
B) 30°
C) 50°
D) 45°
E) 36°

14 Calcular "x"

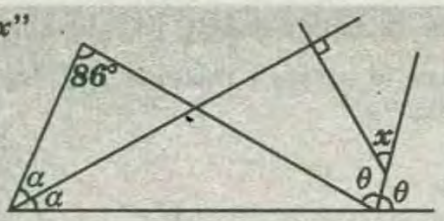


A) 25°
B) 35°
C) 40°
D) 30°
E) 45°

WWW.GRATIS2.COM

15 Calcular "x"

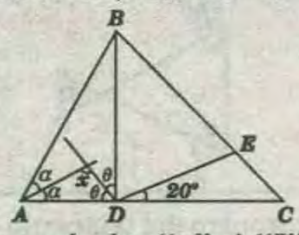
A) 57°
B) 67°
C) 47°
D) 17°
E) 27°



TAREA DOMICILIARIA

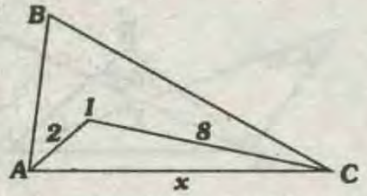
01 $AB=BC$; $BD=BE$, calcular "x"

A) 70°
B) 90°
C) 80°
D) 100°
E) 110°



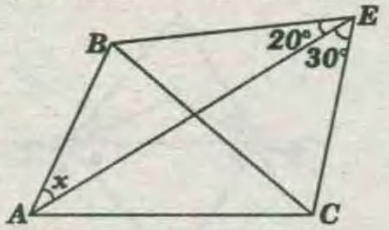
02 En la figura, calcular "x" si "I" es incentro del $\triangle ABC$ $(x \in Z^+)$

A) 6
B) 8
C) 9
D) 10
E) 7



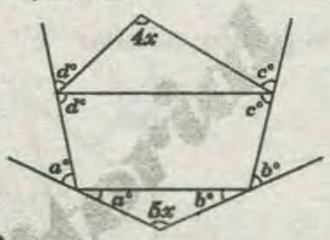
03 En la figura, calcular "x" si "E" es excentro del $\triangle ABC$.

A) 40°
B) 60°
C) 30°
D) 20°
E) 50°



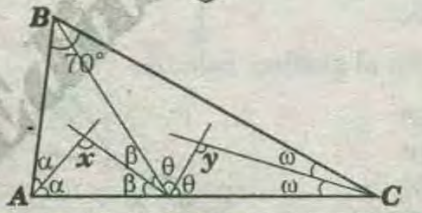
04 De la figura adjunta, calcular "x"

A) 27°
B) 30°
C) 20°
D) 22,5°
E) 32°



05 Calcular: $x+y$

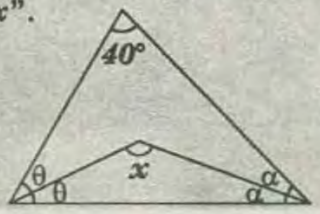
A) 225°
B) 215°
C) 230°
D) 235°
E) 240°



CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

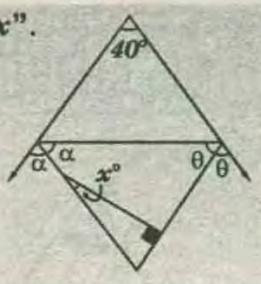
01 Calcular "x".

A) 100°
B) 110°
C) 120°
D) 130°
E) 150°



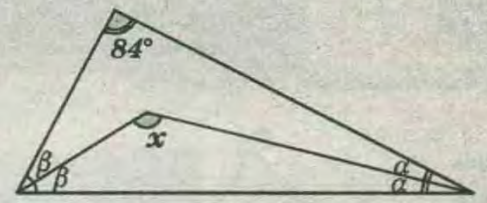
02 Calcular "x".

A) 10°
B) 30°
C) 20°
D) 45°
E) 50°



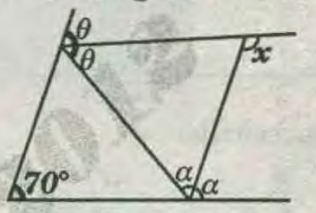
03 Calcular "x" de la figura.

A) 132°
B) 128°
C) 124°
D) 168°
E) 148°



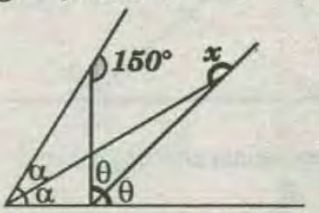
04 Calcular "x" en la figura.

A) 125°
B) 115°
C) 135°
D) 118°
E) 110°



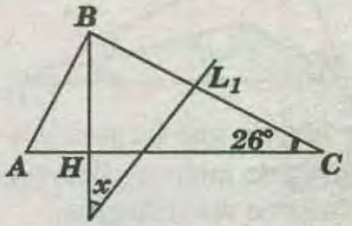
05 Según la figura, calcular "x".

A) 150°
B) 125°
C) 145°
D) 135°
E) 155°



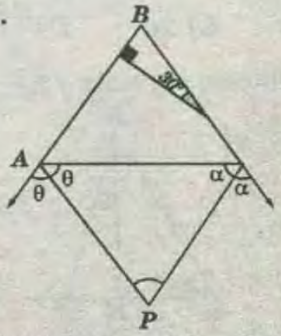
06 Si $\overleftrightarrow{L_1}$ es mediatriz de $\overline{BC}$ y $\overline{BH}$ es altura, calcular "x".

A) 52°
B) 26°
C) 48°
D) 42°
E) 32°



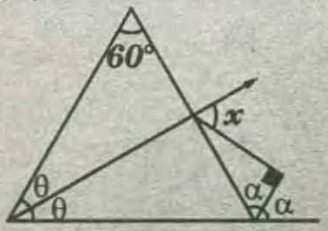
07 Calcular "x".

A) 80°
B) 70°
C) 40°
D) 50°
E) 60°



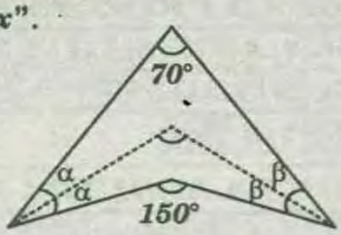
08 Calcular "x".

A) 30°
B) 60°
C) 37°
D) 40°
E) 50°



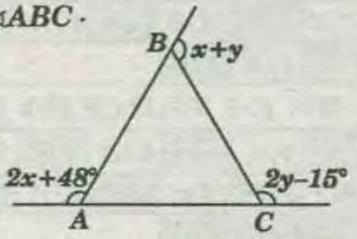
09 Calcular "x".

A) 110°
B) 120°
C) 130°
D) 140°
E) 150°



10 Hallar: $m\sphericalangle ABC$.

A) 72°
B) 71°
C) 89°
D) 94°
E) 101°

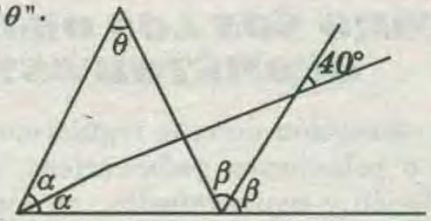


11 En un triángulo ABC la bisectriz interior del ángulo "A" y exterior del ángulo "C" se cortan en "P". Si los ángulos ABC y APC son complementarios, hallar: $m\sphericalangle APC$.

A) 30° B) 45° C) 37° D) 53° E) 60°

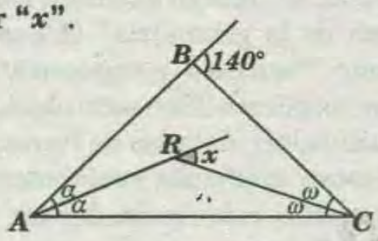
12 Calcular "θ".

A) 40°
B) 60°
C) 80°
D) 100°
E) 120°



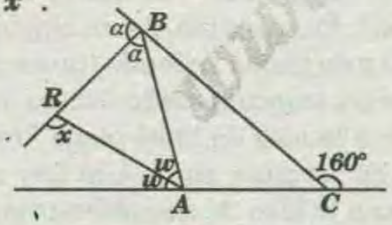
13 Calcular "x".

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 80°



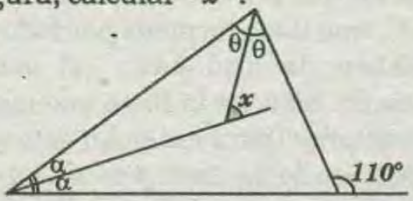
14 Calcular "x".

A) 80°
B) 100°
C) 110°
D) 120°
E) 140°



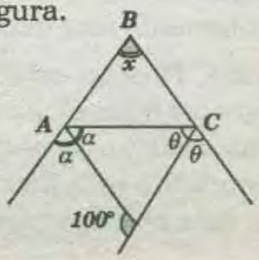
15 En la figura, calcular "x".

A) 40°
B) 30°
C) 60°
D) 55°
E) 45°



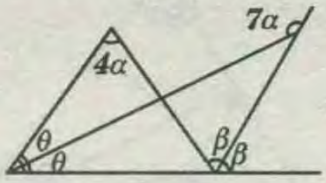
16 Calcular "x" de la figura.

A) 30°
B) 40°
C) 32°
D) 25°
E) 20°



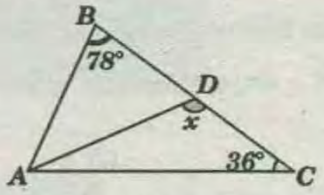
17 Calcular "α" de la figura mostrada.

A) 20°
B) 10°
C) 18°
D) 24°
E) 25°



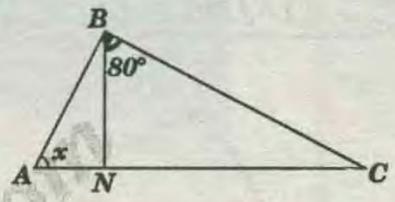
18 Si $\overline{AD}$ es bisectriz, calcular "x".

A) 100°
B) 102°
C) 108°
D) 110°
E) 111°



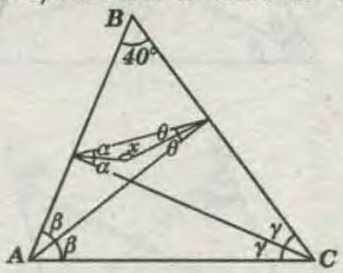
19 Si $\overline{BN}$ es altura, calcular "x".

A) 10°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 80°



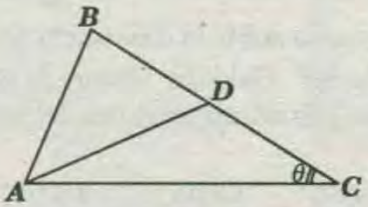
20 Del gráfico, calcular el valor de "x".

A) 135°
B) 110°
C) 145°
D) 120°
E) 160°



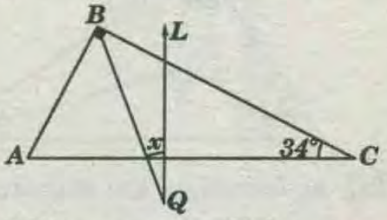
21 Calcular "θ", siendo: $m\sphericalangle B=120°$, $AD=DC$ y $\overline{AD}$ bisectriz.

A) 20°
B) 18°
C) 22°
D) 25°
E) 30°



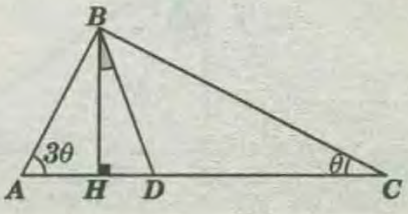
22 En el gráfico $\overline{BQ}$ es bisectriz y $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$. Calcular "x".

A) 12°
B) 11°
C) 13°
D) 16°
E) 18°



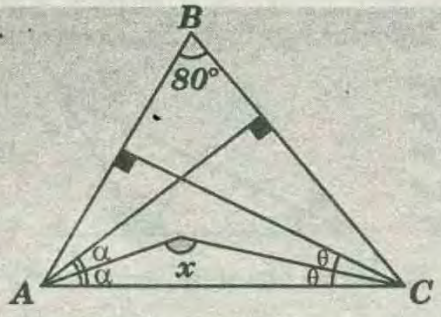
23 En el gráfico $\overline{BH}$ es altura y $\overline{BD}$ es bisectriz del $\sphericalangle ABC$. Señalar la relación correcta.

A) $x=2\theta$
B) $\theta=2x$
C) $\theta=3x$
D) $x=3\theta$
E) $x=\theta$



www.GRATIS2.com

(24) Calcular "x".



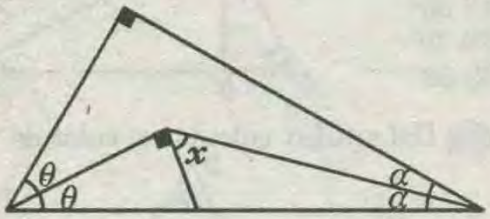
A) 140°
B) 130°
C) 120°
D) 110°
E) 125°

(25) En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$. Si $m\sphericalangle A = 2m\sphericalangle C$; $AB=8$; $BC=13$. Calcular "AD".

A) 5 B) 4 C) 8 D) 6 E) 6,5

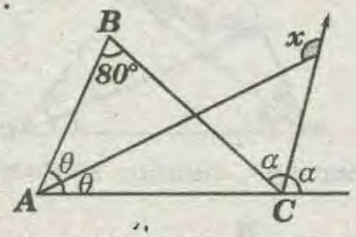
TAREA DOMICILIARIA

(01) Calcular "x".



A) 30°
B) 40°
C) 45°
D) 60°
E) 53°

(02) Calcular "x".

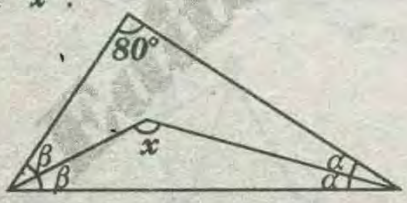


A) 140°
B) 100°
C) 120°
D) 110°
E) 130°

(03) En un triángulo ABC la diferencia de los ángulos "A" y "C" es de $80°$. Calcular el ángulo que forma la bisectriz interior y la altura trazadas del mismo vértice "B"

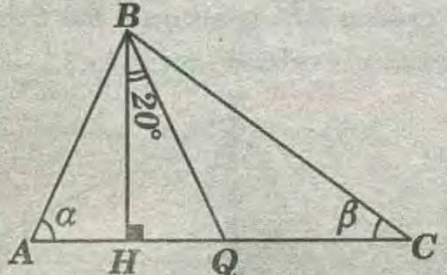
A) 30° B) 40° C) 50° D) 60° E) 45°

(04) Calcular "x".



A) 100°
B) 120°
C) 130°
D) 150°
E) 110°

(05) Si $\overline{BQ}$ es bisectriz del ángulo ABC, calcular $(\alpha-\beta)$.



A) 40°
B) 60°
C) 80°
D) 50°
E) 48°

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)C	2)C	3)C	4)A	5)C	6)A	7)A	8)D	9)C	10)D
11)D	12)A	13)E	14)D	15)A	16)D	17)*	18)*	19)*	20)*
1)E	2)E	3)E	4)B	5)D					

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)A	2)C	3)D	4)E	5)D	6)D	7)D	8)D	9)E	10)A
11)B	12)E	13)D	14)C	15)B	16)C	17)C	18)D	19)D	20)A
1)B	2)D	3)C	4)B	5)C					

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA									
1)B	2)E	3)B	4)C	5)B	6)A	7)E	8)A	9)B	10)B
11)D	12)B	13)A	14)B	15)C	16)*	17)*	18)*	19)*	20)*
01)E	02)C	03)A	04)D	05)B					

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA									
1)B	2)C	3)A	4)A	5)B	6)B	7)E	8)B	9)A	10)B
11)A	12)C	13)D	14)B	15)D	16)E	17)A	18)E	19)E	20)C
21)A	22)B	23)E	24)A	25)A	1)C	2)A	3)B	4)C	5)A

¿CÓMO SON LOS OBJETOS GEOMÉTRICOS?

Pero la percepción de esas regularidades llamadas formas o relaciones geométricas, así como su manipulación y representación, no constituyen, sin más, la geometría. El filósofo Edmund Husserl, en su obra "El origen de la geometría" (***Husserl, 2009***), denomina como ***"mundo pregeométrico"*** este mundo de cosas corpóreas (bien sean objetos naturales o artefactos culturales), dotadas de formas espaciales que se manifiestan mediante cualidades materiales tales como el tamaño, color, peso, dureza, etc.

A partir de ellas debe comenzar un proceso de "abstracción". Por ejemplo, de un objeto plano (o que se ve plano) y de forma redonda (una rueda, una flor, la sección de un tronco cortado, la cara de la luna...) se puede pasar a la idea de línea plana "redonda". Pero el tránsito no termina aquí. Aún hay un paso más, que es llegar a la idea de circunferencia, desligada de los objetos de los que proviene: la circunferencia es un objeto "ideal", una línea formada por todos los puntos que equidistan de uno dado (el centro de la circunferencia); o bien, es la línea que mantiene una curvatura constante (para entender esto último, si se "tuerce" el volante de un carro y se le deja con ese giro fijo, el carro, al moverse, traza una circunferencia, ya que constantemente está dando "la misma curva").

De esta forma, Husserl establece que los auténticos objetos geométricos son las ***idealidades geométricas***, modelos de los objetos de los que surgen. Y que la Geometría es la disciplina que estudia estas idealidades, esos modelos ideales.

CONGRUENCIA DE TRIANGULOS

CAPITULO 11

OBJETIVOS :

Al finalizar la unidad, el alumno será capaz de :

* *Reconocer en diferentes posiciones los casos de congruencia triángulos , con problemas que van gradualmente elevando su nivel.*

* *Usar el lenguaje matemático con precisión para expresar ideas de congruencia.*

* *Permitir un relativo dominio del tema, complementando con la práctica de problemas y su uso para la demostración de teoremas posteriores.*

* *Aplicar correctamente los teoremas relativos a la congruencia.*

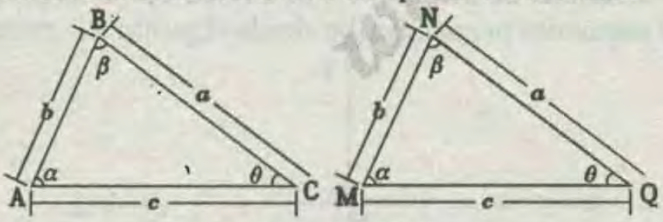
* *Reconocer y diferenciar las relaciones que existen entre los teoremas de congruencia.*

INTRODUCCIÓN :

Al observar en nuestro entorno un conjunto de objetos realizados por el hombre, estas tienen determinadas características en forma y tamaño que son las mismas.

Entonces, a esas formas y tamaño de los objetos que percibimos la geometría las estudia como la congruencia de las figuras,

Entonces la congruencia es el estudio analítico de la comparación de dos o mas figuras, para ello es necesario analizar sus elementos con los que se identifican.



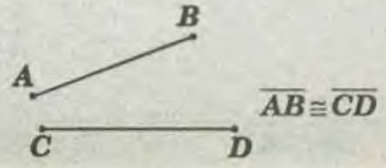
$\triangle ABC \cong \triangle MNQ$

CONGRUENCIA DE SEGMENTOS

Dos segmentos son congruentes, si tienen la misma longitud.

EJEMPLO:

Si $AB=CD$, entonces $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$ y se denota:



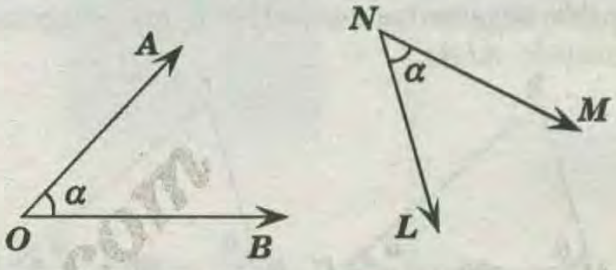
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

CONGRUENCIA DE ÁNGULOS

Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

EJEMPLO:

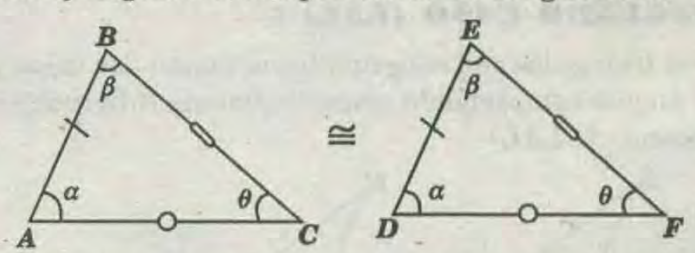
Si $m\sphericalangle AOB = m\sphericalangle MNL$, entonces el $\sphericalangle AOB$ es congruente con el MNL y se denota:



$\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle MNL$

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos ABC y DEF son congruentes si sus lados y ángulos son respectivamente congruentes.



Para indicar que el «triangulo ABC es congruente al triangulo DEF »; se escribe :

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Esta sola expresión nos dice a la vez seis cosas, a saber

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ó $AB=DE$

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ó $BC=EF$

$\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ó $AC=DF$

$\sphericalangle A \cong \sphericalangle D$ ó $m\sphericalangle A = m\sphericalangle D$

$\sphericalangle B \cong \sphericalangle E$ ó $m\sphericalangle B = m\sphericalangle E$

$\sphericalangle C \cong \sphericalangle F$ ó $m\sphericalangle C = m\sphericalangle F$

En cada una de las seis líneas anteriores , la congruencia de la izquierda significa lo mismo que la igualdad de la derecha. Podemos por tanto , utilizar una u otra notación según nos convenga. En dos triángulos congruentes , a lados congruentes se le oponen ángulos congruentes y recíprocamente a ángulos congruentes se le oponen lados congruentes.

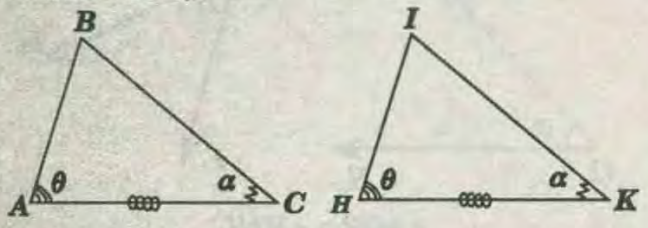
CASOS O CRITERIOS DE CONGRUENCIA

Para reconocer si dos triángulos son congruentes, no necesariamente los seis pares de elementos correspondientes deben de ser congruentes, si no simplemente tres pares de ellos, entre los que por lo menos deben figurar un par de lados correspondientes, esto implica la congruencia de los restantes.

De acuerdo con la naturaleza de los elementos congruentes, resultan los siguientes casos de congruencia de triángulos.

PRIMER CASO (ALA) :

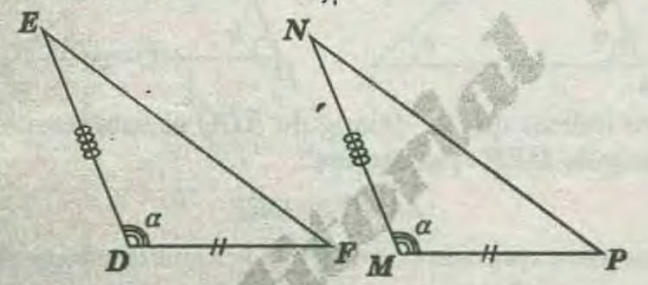
Dos triángulos son congruentes si tienen un lado y los ángulos adyacentes respectivamente congruentes (postulado *ALA*).



$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{H} \\ \overline{AC} = \overline{HK} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta HIK \\ \hat{C} = \hat{K} \end{cases}$$

SEGUNDO CASO (LAL) :

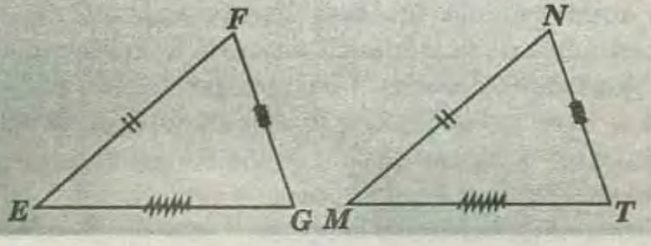
Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes (postulado *LAL*)



$$\begin{cases} DE = MN \\ \hat{D} = \hat{M} \\ DF = MP \end{cases} \Rightarrow \Delta DEF \cong \Delta MNP$$

TERCER CASO (LLL) :

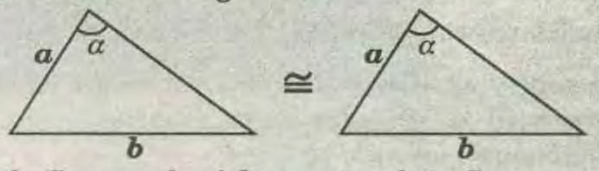
Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente congruentes (postulado *LLL*).



$$\begin{cases} EF = MN \\ EG = MT \Rightarrow \Delta EFG = \Delta MNT \\ FG = NT \end{cases}$$

CUARTO CASO (LLA y b>a) :

Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de dichos lados respectivamente congruentes.



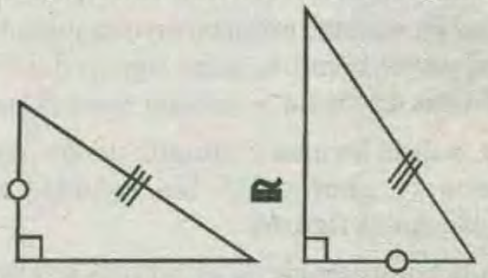
* En la figura solo si $b>a$, se podrá afirmar que los triángulos son congruentes.

NOTA :

Al establecer la congruencia entre dos triángulos por alguno de los casos mencionados se cumple que, "a lados de medidas iguales se oponen ángulos de medidas iguales" o que : ***"a ángulos de medidas iguales se oponen lados de medidas iguales".***

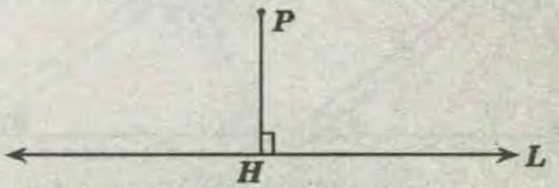
OBSERVACIÓN:

* Si dos triángulos rectángulos tienen congruentes un cateto y la hipotenusa entonces serán congruentes (*4to* caso)



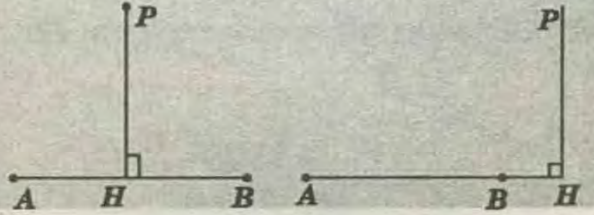
DISTANCIA DE UN PUNTO

La distancia de un punto a una recta , es la longitud del segmento perpendicular desde el punto a la recta.



* La medida de PH es la distancia de P a la recta L.

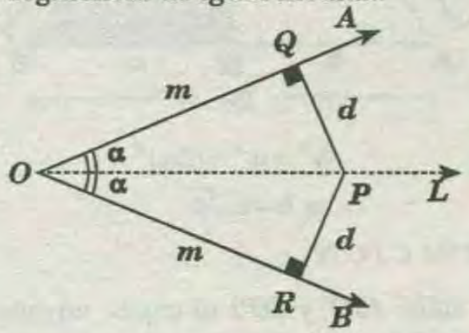
* Al punto *"H"* se le denomina pie de la perpendicular. La distancia de un punto a un segmento , es también la longitud del segmento perpendicular desde el punto al segmento o a la prolongación de dicho segmento. Es decir perpendicular a la recta que contiene el segmento.



APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA DE TRIANGULOS

PROPIEDAD DE LA BISECTRIZ

Cualquier punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de dichos ángulo ; además, se forma en cada lado segmentos de igual medida.

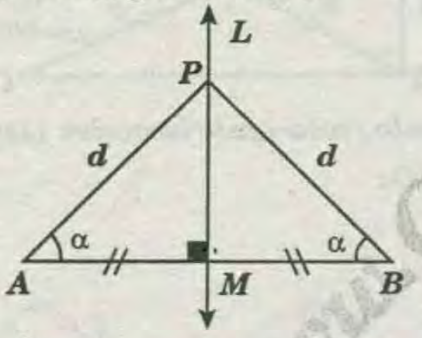


* Si : $\overleftrightarrow{L}$ es bisectriz del ángulo AOB

* Entonces: $PQ=PR$ y $OQ=OR$

PROPIEDAD DE LA MEDIATRIZ

Cualquier punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento formándose un triangulo isósceles.



* Si : $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de AB

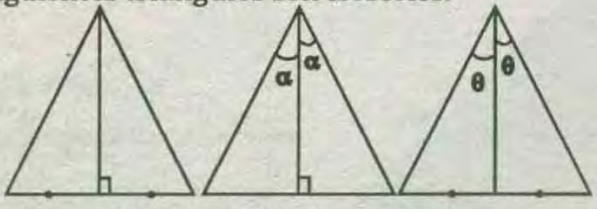
* Entonces : $AP=BP$ $\quad \triangle APB$: isósceles

NOTA :

Si dos líneas notables coinciden en un triángulo, entonces dicho triángulo es isósceles.

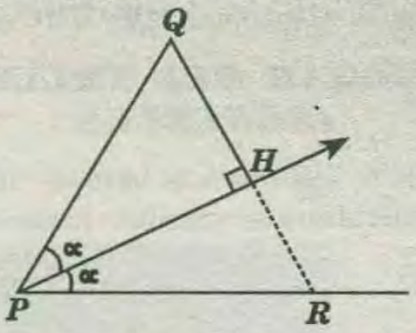
EJEMPLO:

los siguientes triángulos son isósceles.



RECOMENDACIÓN :

Cada vez que en un problema se observe una perpendicular a la bisectriz de un ángulo , se debe completar un triángulo isósceles.

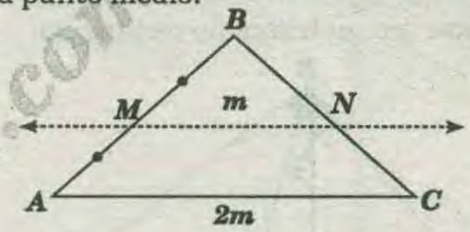


* En la figura se prolonga $\overline{QH}$ para formar el triángulo isósceles PQR , luego :

$$PQ = PR \quad \text{y} \quad QH = HR$$

TEOREMA DE LOS PUNTOS MEDIOS

Si por el punto medio de uno de los lados de un triangulo, se traza una paralela a cualquiera de los otros dos lados, entonces dicha paralela intersecará al tercer lado en su punto medio.

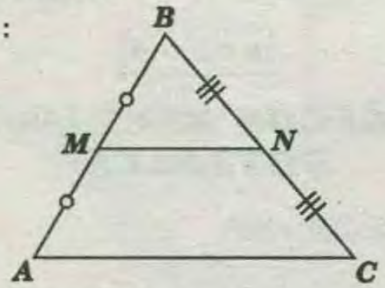


* Si *"M"* es punto medio de $\overline{AB} \wedge \overline{MN} // \overline{AC}$

$$\Rightarrow BN=NC \ \wedge \ MN=\frac{AC}{2}$$

OBSERVACIÓN:

* Si se tiene :



* Entonces se cumple que:

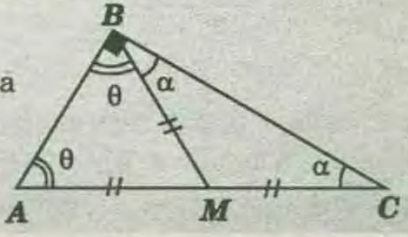
$$MN=\frac{AC}{2} \ \wedge \ \overline{MN} // \overline{AC}$$

TEOREMA DE LA MENOR MEDIANA EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

En todo triángulo rectángulo la mediana relativa a la hipotenusa mide igual que la mitad de dicha hipotenusa.

* Si : BM es mediana

$$\Rightarrow BM=\frac{AC}{2}$$



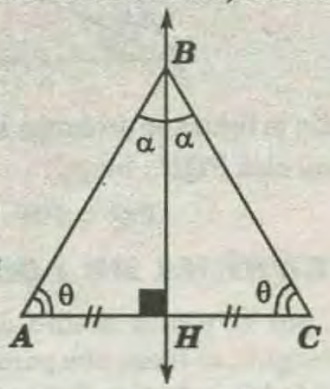
WWW.GRATIS2.COM

NOTA :

Observe, que los triángulos ***AMB*** y ***BMC*** son isósceles.

PROPIEDAD DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES

Si trazamos la altura en la base de un triángulo isósceles, dicha altura será también mediana , bisectriz y mediatriz.

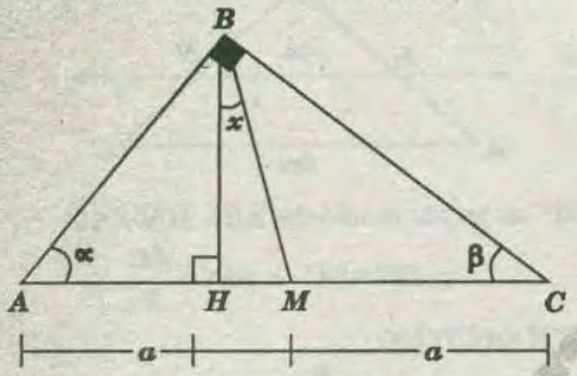


* Si: $AB = BC$

$\Rightarrow BH:$ { *Altura , Mediana;* / *Bisectríz, Mediatríz*

PROPIEDADES:

Ángulo formado por la altura y la mediana relativas a la hipotenusa , en un triángulo rectángulo.

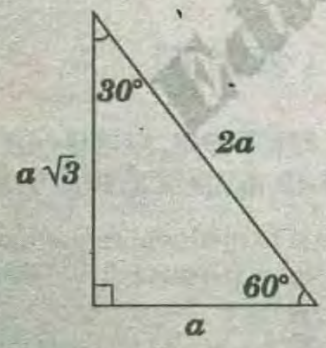


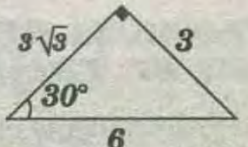
$$\boxed{x = \alpha - \beta}$$

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

I) Triangulo de *30°* y *60°*

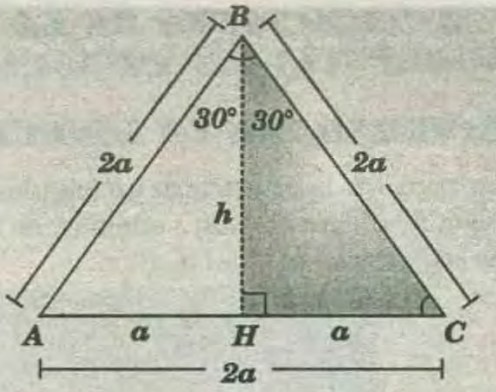
EJEMPLO :





DEMOSTRACIÓN:

* Considerando un triángulo equilátero cuyo lado mide *"2a"*, se traza la altura $\overline{BH}$ que también es mediana y bisectriz, entonces por Pitágoras :



$$h^2 + a^2 = (2a)^2$$

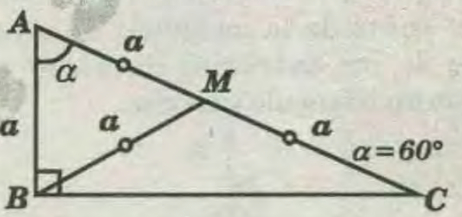
$$\Rightarrow h = a\sqrt{3}$$

OBSERVACIÓN :

En el $\triangle BHC$ *(30° y 60°)* el cateto adyacente a *60°* mide la mitad de la hipotenusa.

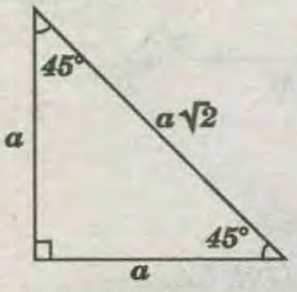
TEOREMA :

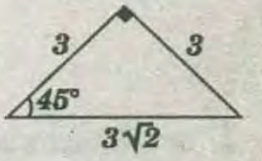
Si un cateto mide la mitad de la hipotenusa, entonces el ángulo agudo adyacente a dicho cateto mide *60°*.



II) Triángulo rectángulo isosceles (De 45° y 45°)

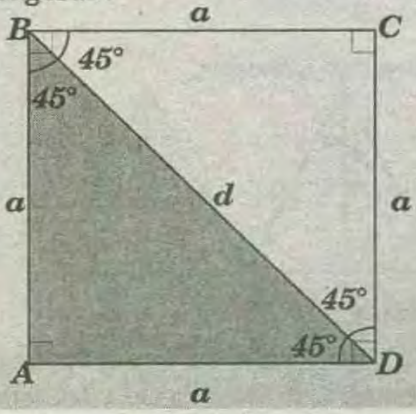
EJEMPLO:





DEMOSTRACIÓN :

Considerando un cuadrado cuyo lado mide *"a"*, se traza la diagonal formándose ángulos de *45°* entonces, por Pitágoras :



$$a^2 + a^2 = d^2$$

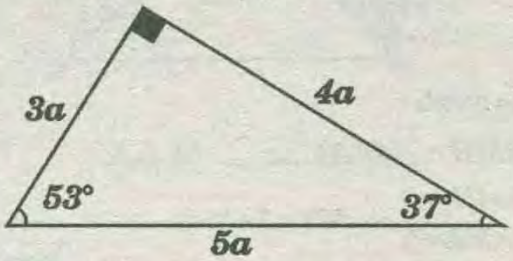
$$\Rightarrow d = a\sqrt{2}$$

Editorial Lumbreras S.A.C.

NOTA :

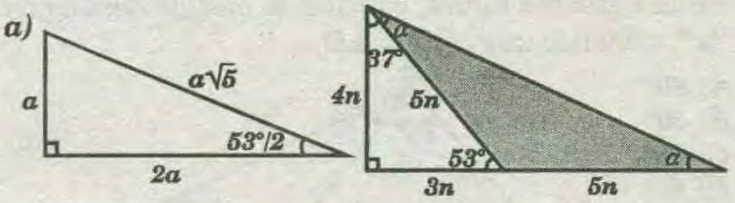
En el $\Delta BAD\ (45°)$ la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces el largo de un cateto.

III) Triángulo de 37° y 53° (APROXIMADO)



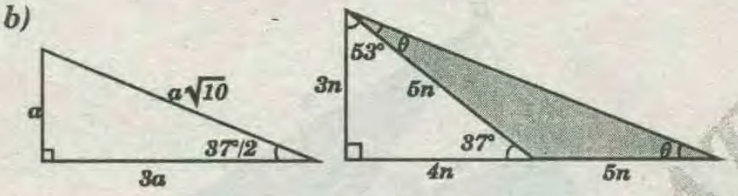
* Del triángulo rectángulo notable anterior se puede deducir que :

a)



$$\Rightarrow 2\alpha = 53° \Rightarrow \alpha = \frac{53°}{2}$$

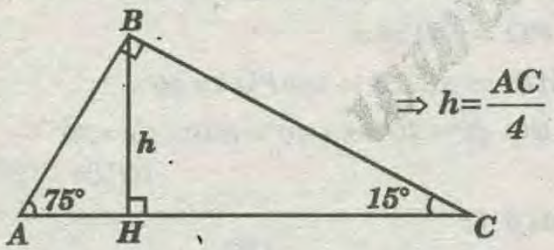
b)



$$\Rightarrow 2\theta = 37° \Rightarrow \theta = \frac{37°}{2}$$

PROPIEDAD :

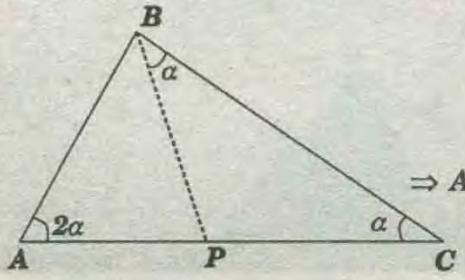
Solo para triángulo rectángulo de $75°$ y $15°$



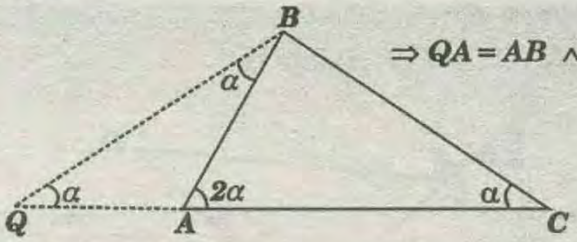
$$\Rightarrow h = \frac{AC}{4}$$

RECOMENDACIÓN :

En el triángulo ABC, si $m\sphericalangle BAC = 2m\sphericalangle BCA$, se traza una ceviana de modo que se formen dos triángulos isósceles. Esto es posible de dos formas diferentes observe los dos gráficos siguientes :



$$\Rightarrow AB = BP = PC$$



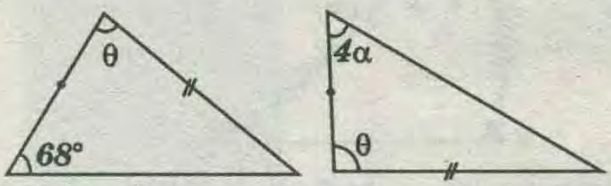
$$\Rightarrow QA = AB \wedge QB = BC$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Calcular "α" en la figura.

A) 13°
B) 12°
C) 14°
D) 17°
E) 8°



RESOLUCIÓN:

* Con los datos indicados , deducimos que los triángulos son congruentes, por el caso :

L. A. L.

$\Rightarrow$ A lados iguales se oponen ángulos iguales

$$\Rightarrow 68° = 4\alpha \Rightarrow 17° = \alpha$$

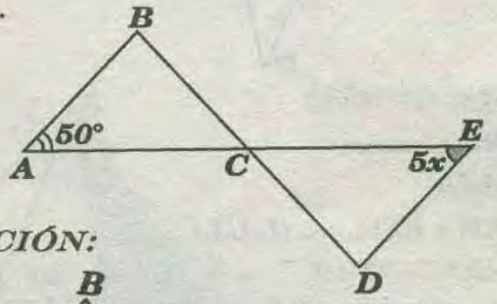
RPTA : "D"

PROBLEMA 2:

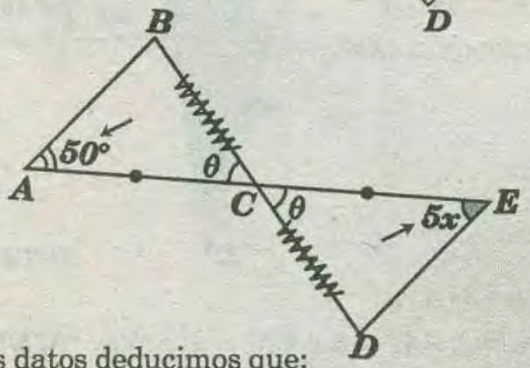
En la figura : $BC = CD$ y $AC = CE$

Hallar ***"2x"***.

A) 10°
B) 20°
C) 15°
D) 8°
E) 14°



RESOLUCIÓN:



* De los datos deducimos que:

$$\Delta ABC \cong CDE \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (L.\ A.\ L.)$$

$$\Rightarrow 5x = 50° \Rightarrow x = 10°$$

* Luego : $2x = 20°$

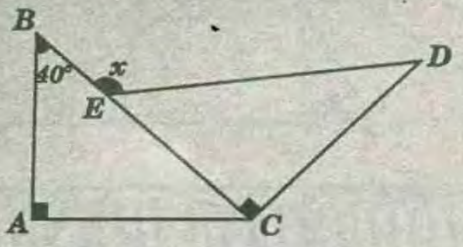
RPTA : "C"

WWW.GRATIS2.COM

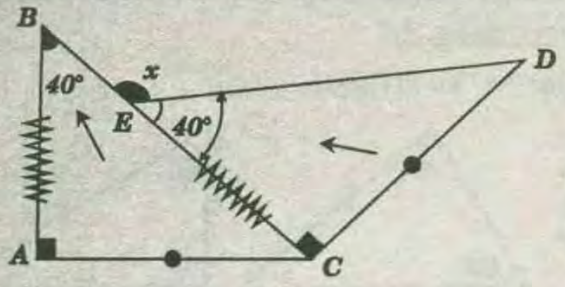
PROBLEMA 3:

Si : $AB = EC$ y $AC = CD$. Hallar "x"

A) 120°
B) 135°
C) 142°
D) 140°
E) 150°



RESOLUCIÓN:



* Con los datos : $\triangle BAC \cong \triangle ECD$ .....(L. A. L)

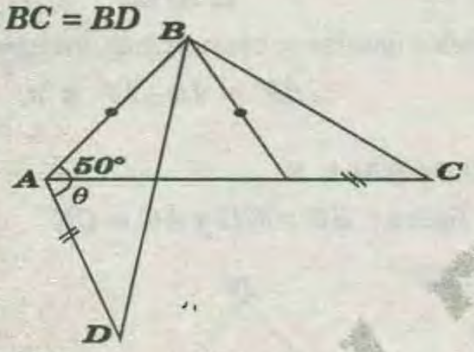
$m\sphericalangle CED = 40° \Rightarrow x + 40° = 180° \Rightarrow x = 140°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 4:

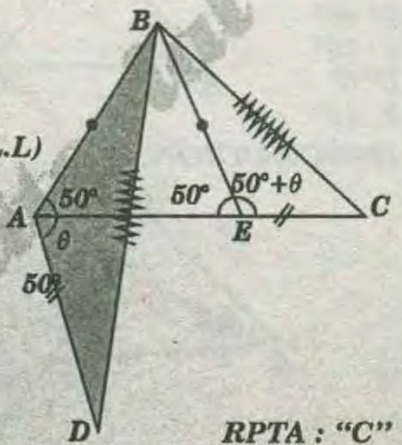
Hallar "", si : $BC = BD$

A) 60°
B) 70°
C) 80°
D) 100°



RESOLUCIÓN:

* $\triangle ABE$ isósceles
$(m\sphericalangle AEB)$
* $\triangle DAB \cong BEC$.....(L.L.L)
$\Rightarrow m\sphericalangle BEC = 50° + \theta$
$\Rightarrow 50° + (50° + \theta) = 180°$
$\Rightarrow \theta = 80°$

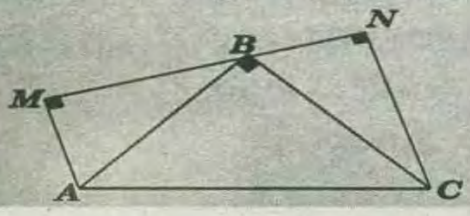


RPTA : "C"

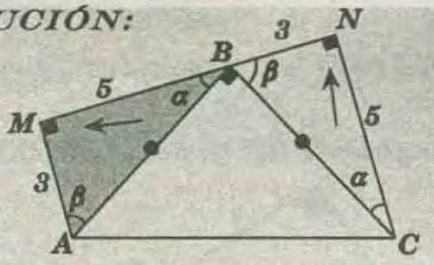
PROBLEMA 5:

Si : $AB = BC$, $AM = 3$ y $CN = 5$, hallar "MN"

A) 3
B) 4
C) 7
D) 8
E) 9



RESOLUCIÓN:



* Con los datos :

$\triangle AMB \cong \triangle CNB$..... (A.L.A)

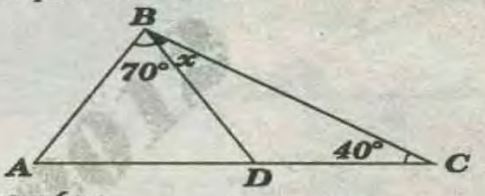
$\Rightarrow \begin{cases} AM = BN = 3 \\ NC = MB = 5 \end{cases} \Rightarrow MN = 5 + 3 = 8$

RPTA : "D"

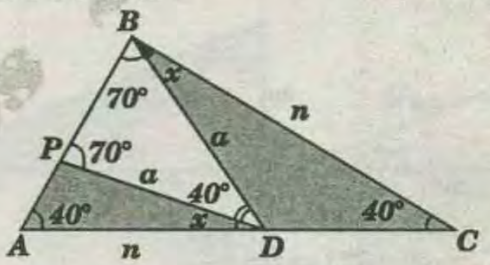
PROBLEMA 6:

En la siguiente figura, calcular la medida del ángulo "x", sabiendo que : $BC = AD$.

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 45°



RESOLUCIÓN:



* Se aprecia que : $m\sphericalangle DB = 40° + x$

* Trazamos $\overline{DP}$ de tal manera que :

$\sphericalangle BDP = 40° \sphericalangle ADP = x \Rightarrow m\sphericalangle BDP = 70°$

* Además : $PD = BD = a$

* Luego : $\triangle ADP \Rightarrow \triangle CDB \Rightarrow m\sphericalangle PDA = 40°$

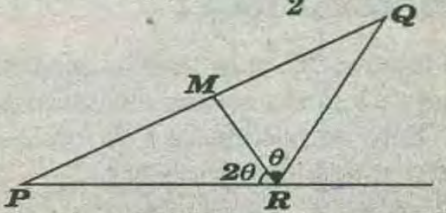
* En el : $\triangle ABC$: $40° + 70° + x + 40° = 180° \Rightarrow x = 30°$

RPTA : "B"

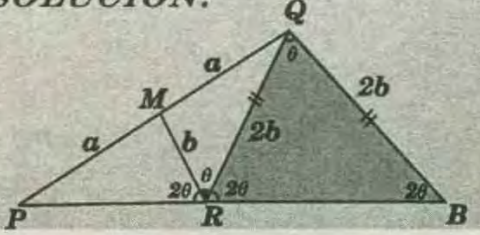
PROBLEMA 7:

En el gráfico : $PM = MQ$ y $RM = \dfrac{QR}{2}$, hallar "θ"

A) 24°
B) 36°
C) 40°
D) 30°
E) 25°



RESOLUCIÓN:



Editorial rubiños

* Trazamos $\overline{QB} // \overline{MR}$

$m\sphericalangle PRM = m\sphericalangle RBQ$

* Si : $MR = b \Rightarrow QB = 2b$

*Luego : ΔRBQ es isósceles.

$m\sphericalangle QRB = m\sphericalangle RBQ = 2\theta$

* ΔRBQ: $2\theta + 2\theta + \theta = 180° \Rightarrow \theta = 36°$

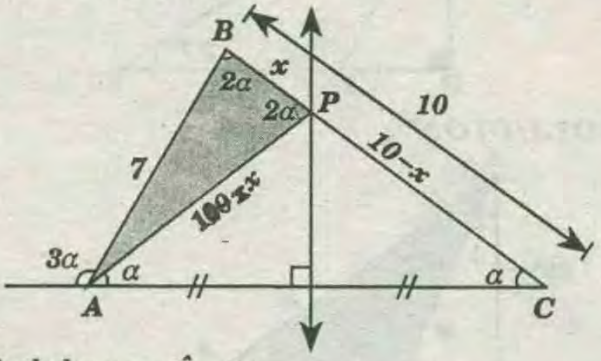
RPTA : "B"

PROBLEMA 8:

En un triángulo ABC se sabe que el ángulo externo de "A", es el triple del ángulo interior de "C", la mediatriz del lado $\overline{AC}$ corta al lado $\overline{BC}$ en "P". Hallar "BP", si $AB = 7$ y $BC = 10$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 20

RESOLUCIÓN:



* Se deduce : $m\hat{B} = 2\alpha$

* Se une "P" con "A" $\Rightarrow$ por propiedad la mediatriz :

$PA = PC = 10 - x$

$\sphericalangle PAC = \sphericalangle PCA = \alpha$

* Por ángulo exterior : $m\sphericalangle APB = 2\alpha$

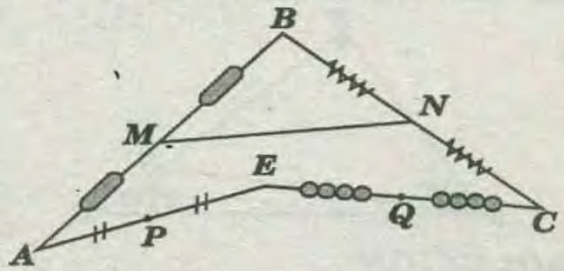
* ΔBAP isósceles : $7 = 10 - x \Rightarrow x = 3$

RPTA : "C"

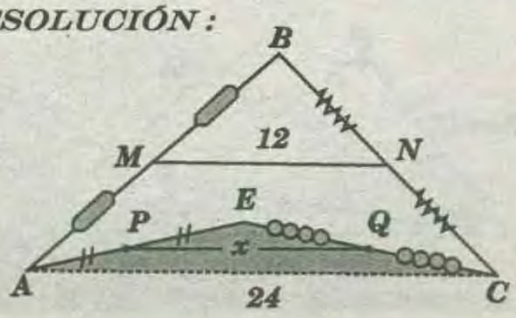
PROBLEMA 9:

En el gráfico : $MN = 12$. Hallar "PQ"

A) 8
B) 10
C) 6
D) 12
E) 14



RESOLUCIÓN :



* ΔABC, por base media : $AC = 24$

* ΔAEC, por propiedad:

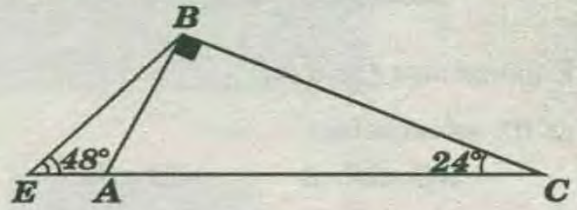
$$x = \frac{24}{2} = 12 \quad \text{.....} \left(\begin{matrix} \text{de la base} \\ \text{media} \end{matrix} \right)$$

RPTA : "D"

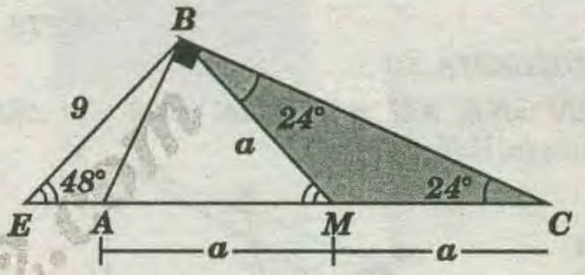
PROBLEMA 10:

Si : $EB = 9$, hallar "AC"

A) 12
B) 16
C) 14
D) 18
E) 20



RESOLUCIÓN :



* Por propiedad de la mediana :

$BM = AM = MC$

* ΔEBM es isósceles : $\Rightarrow a = 9 \Rightarrow AC = 18$

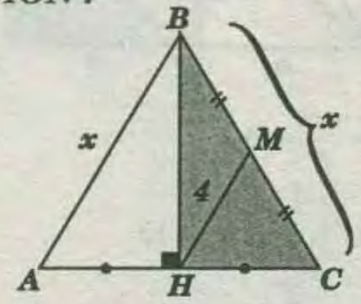
RPTA : "D"

PROBLEMA 11:

En un triángulo isósceles ABC $(AB = BC)$ se traza la altura $\overline{BH}$ y se toma el punto medio "M" de $\overline{BC}$, tal que : $MH = 4$. Calcular "AB"

A) 6 B) 4 C) 12 D) 8 E) 10

RESOLUCIÓN :



* $\triangle BHC$: por propiedad de la mediana $x = 8$

RPTA : "D"

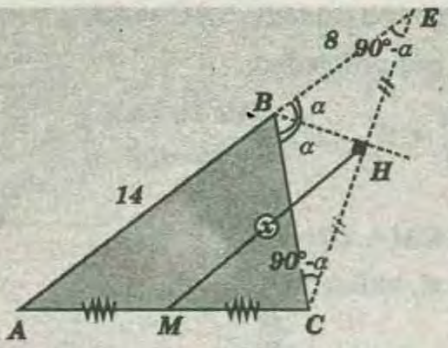
PROBLEMA 12:

En un ABC : $AB = 14u$ y $BC = 8u$. Luego se traza la bisectriz exterior del ángulo "B" y la perpendicular $\overline{CH}$ a dicha bisectriz siendo "M" punto medio de $\overline{AC}$, calcular "MH".

A) 10 B) 9 C) 11 D) 14 E) 8

RESOLUCIÓN :

www.GRATIS2.com



* Prolongamos $\overline{CH}$ y $\overline{AB}$

* $\triangle CBE$ es isósceles :

$BC=BE=8 \qquad EH=HC$

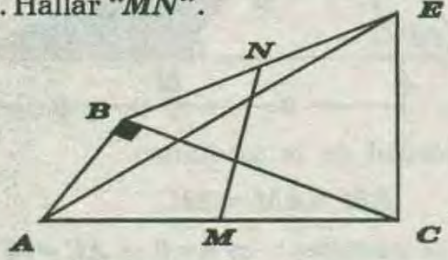
* $\triangle ACE$: por base media $x=\frac{22}{2}=11u$

RPTA : "C"

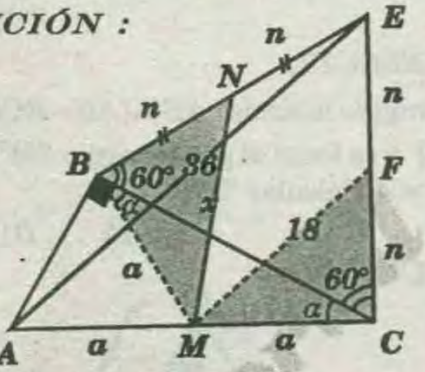
PROBLEMA 13 :

Si: $BN=NE$; $AM=MC$; $AE=36$ y el $\triangle BEC$ es equilátero. Hallar "MN".

A) 9
B) 14
C) 15
D) 18
E) 16



RESOLUCIÓN :



* $\triangle ACE$: $MF=\frac{AE}{2}=18$

* $\triangle ABC$: $BM=AM=MC$

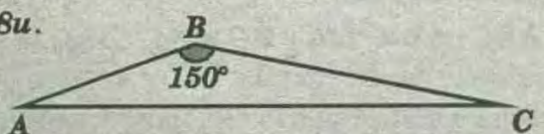
* $\triangle MBN \cong \triangle MCF$.....(L-A-L)

$\Rightarrow x=18$

RPTA : "D"

PROBLEMA 14 :

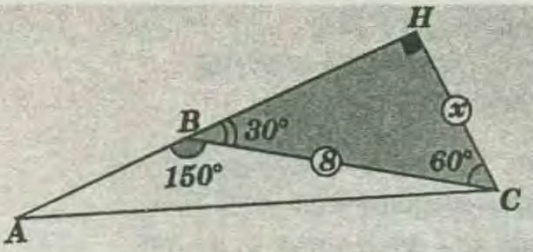
En la figura hallar la distancia de "C" a $\overline{AB}$, si : $BC = 8u$.



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 2

RESOLUCIÓN :

* Prolongando AB , hasta "H" :



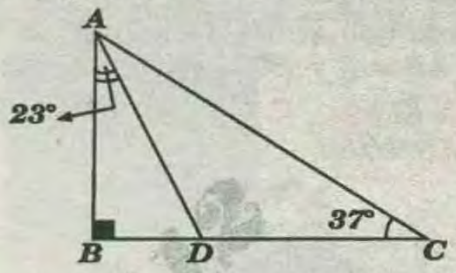
* BHC : notable de $30°$ y $60° \Rightarrow x = 4u$

RPTA : "B"

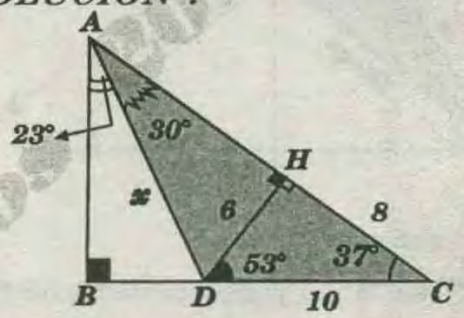
PROBLEMA 15 :

Calcular "AD", si: $CD = 10u$

A) 8u
B) 9
C) 12
D) 10
E) 14



RESOLUCIÓN :



* Trazamos la altura DH

* $\triangle DHC$ notable de $37°$ y $53°$: $DH=6u$

* $\triangle AHD$ notable de $30°$ y $60°$

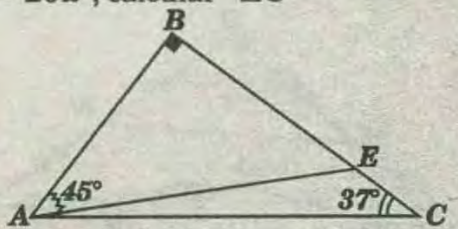
$\Rightarrow x = 12u$

RPTA : "C"

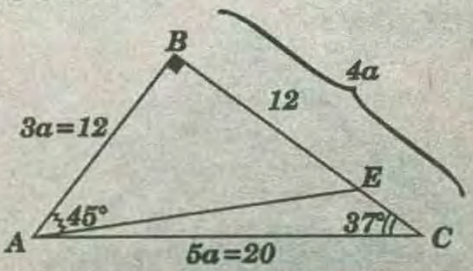
PROBLEMA 16 :

Si : $AC = 20u$, calcular "EC"

A) 3u
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7



RESOLUCIÓN :



* $\triangle ABC$: $5a=20 \Rightarrow a=4$

* $\triangle$ Luego : $AB=3(4)=12$

$BC=4(4)=16$

* $\triangle ABE$: $AB=BE=12$

* Finalmente : $EC=BC-BE$

$\Rightarrow EC=16-12=4u$

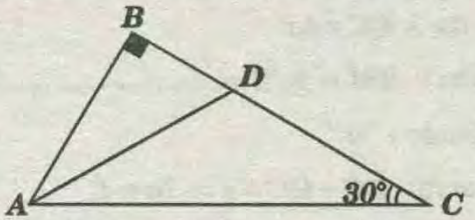
RPTA: "B"

PROBLEMA 17:

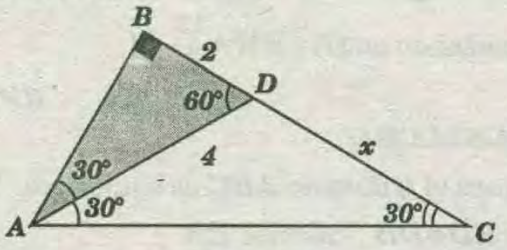
En la figura $\overline{AD}$ es bisectriz. Hallar **"CD"**, si :

$BD = 2u$

A) 2u
B) 3
C) 4
D) 6
E) 8



RESOLUCIÓN:



* $\triangle ABD$: Notable de $30°$ y $60°$

$AD=4u$

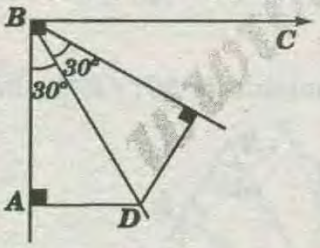
* $\triangle ADC$:isósceles $\Rightarrow x = 4u$

RPTA : "C"

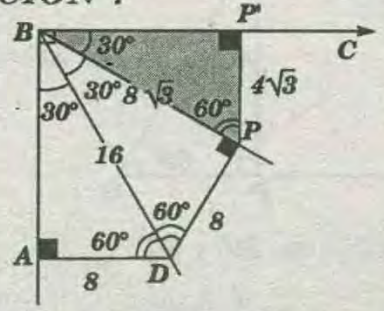
PROBLEMA 18 :

En la figura: $AD=8u$. Hallar la proyección de $\overline{BP}$ sobre BC.

A) 12u
B) 10
C) 8
D) 6
E) 14



RESOLUCIÓN :



* $\triangle BAD$: notable de $30°$ y $60°$

$BD = 16u$

* $\triangle BPD$: notable de $30°$ y $60°$

$DP=8u$ y $BP=8\sqrt{3}\,u$

* $\triangle BP'P$: notable de $30°$ y $60°$.....$(PP'=4\sqrt{3}\mu)$

$BP'=4\sqrt{3}\times\sqrt{3}=12u$

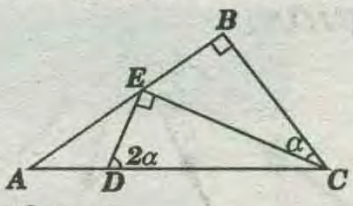
($\overline{BP'}$ proyección de $\overline{BP}$ sobre $\overline{BC}$)

RPTA: "A"

PROBLEMA 19 :

Calcular **"a"** de la figura, si : $CD = 2AD$

A) 20°
B) 30°
C) 15°
D) 25°
E) 37°

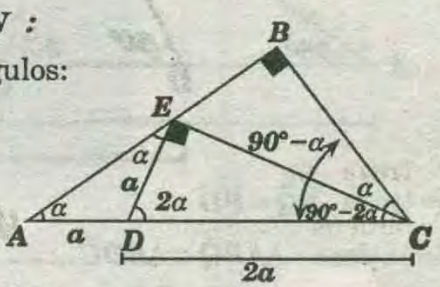


RESOLUCIÓN :

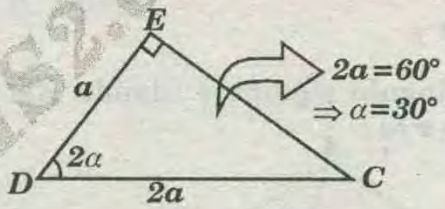
* Completando ángulos:

$\Rightarrow \Delta ADE$ isósceles

$AD = DE = a$



* Luego $\triangle DEC$ notable :



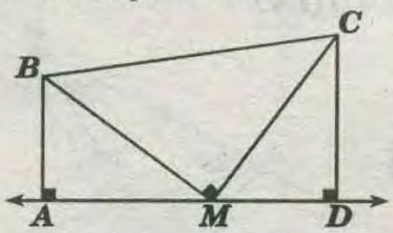
RPTA : "B"

PROBLEMA 20 :

En la figura calcular **"BC"**, si :

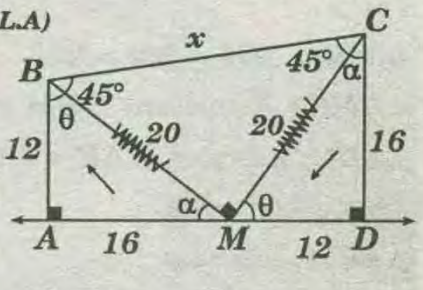
$AB=12cm$, $CD=16cm$ y $BM=CM$

A) 20m
B) 20 3
C) $20\sqrt{2}$
D) 40
E) 30



RESOLUCIÓN:

* $\triangle BAM \cong \triangle MDC$....(A.L.A)



$$\Rightarrow \begin{cases} AB=MD=12cm \\ AM=CD=16cm \end{cases}$$

$\alpha = 37°$; $\theta = 53°$

* $\triangle BAM(37°-53°)$: $BM=20cm$

* $\triangle BMC=(45°-45°)$: $\Rightarrow x=20\sqrt{2}$

RPTA : "C"

WWW.GRATIS2.COM

PROBLEMA 21 :

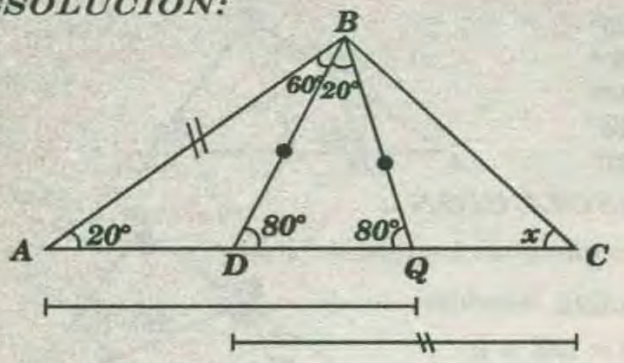
En un triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BD}$ tal que $\overline{AB}=\overline{CD}$ y D esta en el lado $\overline{AC}$.

Además $m\sphericalangle ABD=60°$ y $m\sphericalangle BAC=20°$.

Hallar la $m\sphericalangle BCA$.

A) 15° B) 30° C) 25° D)22° E)20°

RESOLUCIÓN:



* Se traza $\overline{BQ}=\overline{BD}$

* Se obtiene : $\triangle ABQ \cong \triangle BDC$ .....(LAL)

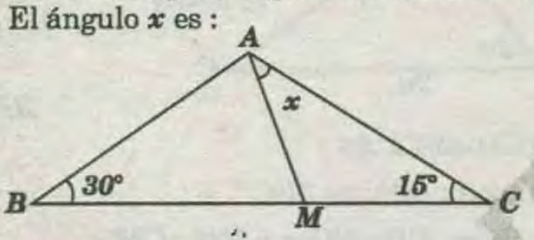
$\Rightarrow AB=BC \Rightarrow x=20°$

RPTA : "E"

PROBLEMA 22 :

Al resolver el triángulo siguiente (donde $\overline{AM}$: mediana). El ángulo x es :

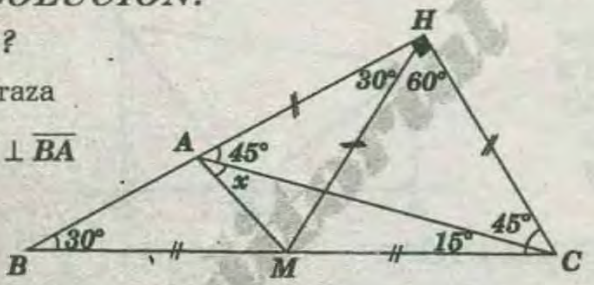
A) 45°
B) 30°
C) 60°
D) 75°
E) 15°



RESOLUCIÓN:

* $x=?$

* Se traza $\overline{CH} \perp \overline{BA}$



* Luego :

* $\triangle AHC$: $HM = BM = MC$

* $\triangle HMC$: Equilátero $\Rightarrow HM = MC = HC$

* $\triangle AHC$, isósceles $\Rightarrow AH = HC$

Luego : $AH = HM$

* $\triangle AHM$, isósceles

$AMH = HAM = x + 45° = 75° \Rightarrow x = 30°$

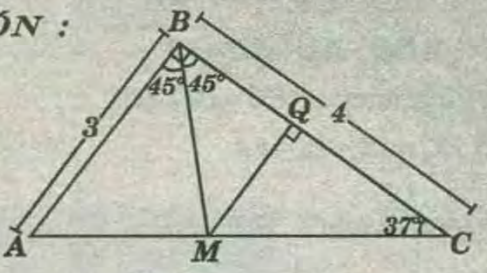
RPTA : "B"

PROBLEMA 23 :

Los catetos de un triángulo rectángulo miden $3m$ y $4m$. Calcular la longitud de la bisectriz del ángulo recto.

A) $\frac{7}{12}\sqrt{2}$ B) $\frac{4}{7}\sqrt{2}$ C)1 D) $\frac{12}{7}\sqrt{2}$ E) $\frac{12}{7}\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :



* Piden : BM

* De los datos

$\triangle ABC$ notable

$m\sphericalangle ACB=37°$

* Sea : $MQ = 3a$

$\Rightarrow BQ=3a \wedge QC=4a$

* También : $BM=3\sqrt{2}\,a$.....(I)

* Calculando : "a"

* Se observa: $BQ+QC=4 \Rightarrow 7a=4$

* Luego : $a=\frac{4}{7}$

* Reemplazando en (I): $BM=\frac{12}{7}\sqrt{2}$

RPTA: "E"

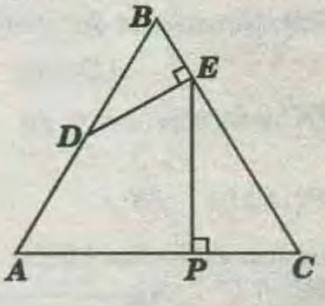
PROBLEMA 24:

En la figura el triángulo ABC es equilátero. Si : $AB=L$ y $AD=DB$, calcular EP.

A) $\frac{3}{8}L$ B) $\frac{3}{4}L$

C) $\frac{3\sqrt{3}}{8}L$ D) $2L$

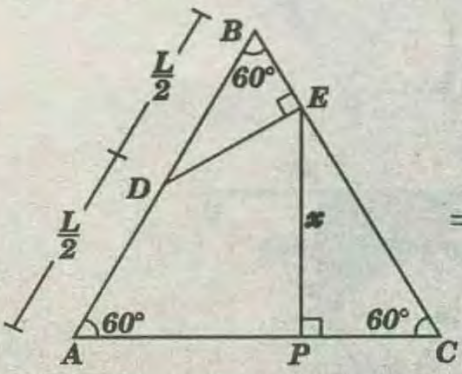
E) $3L$



RESOLUCIÓN:

* Piden: x

* $\triangle DEB$ (notable de 30° y 60°): $EB=\frac{L}{4}$



$\Rightarrow EC=\frac{3L}{4}$

* $\triangle EPC$ (notable de 30° y 60°) :

$x=\frac{EC}{2}\sqrt{3}$ $x=\frac{3}{8}\sqrt{3}L$

RPTA : "C"

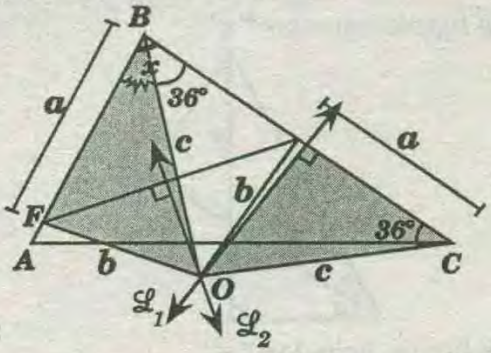
PROBLEMA 25 :

Sobre los lados AB y BC del triángulo ABC , se ubican los puntos F y G respectivamente , de modo que

$BF=CG$; las mediatrices de $\overline{FG}$ y $\overline{BC}$ se intercectan en el punto O. Si la medida del ángulo OCB es $36°$, entonces la medida del ángulo B es :

A) 36° B) 54° C) 72° D) 30° E) 40°

RESOLUCIÓN:



* Piden :

$$x=m\sphericalangle FBO+m\sphericalangle OBC.....(I)$$

* De la figura : $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$ mediatrices

$$\Rightarrow OF=OG=b \wedge OB=OC=c$$

* Luego : $DOFB=DOGC.....(LLL)$

$$\Rightarrow m\sphericalangle FBO=m\sphericalangle GCO=36°$$

* También :

$m\sphericalangle OBC=m\sphericalangle BCO=36°$.....*(DOBC:* isósceles*)*

* Reemplazando en *(I)*: $x = 72°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 26:

Los lados de un triángulo miden *10; 12* y *14* metros. Se trazan dos bisectrices exteriores y desde el tercer vértice se trazan perpendiculares a estas bisectrices. Hallar el segmento que une los pies de las perpendiculares.

A) 18 B) 20 C) 16 D) 22 E) 14

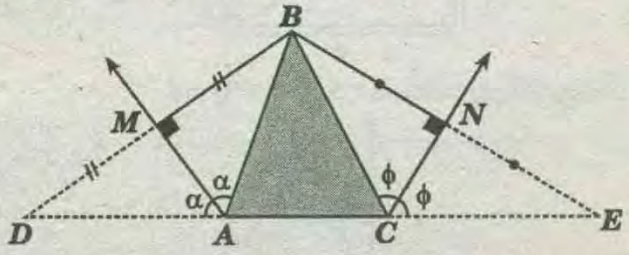
RESOLUCIÓN:

* Sea el ΔABC , donde

$$AB=10 ;\ BC=12 \text{ y } AC=14$$

* Incógnita : $\overline{MN}$

* Prolongamos $\overline{BM}$ y $\overline{BN}$ hasta sus intersecciones con la recta que contiene a $\overline{AC}$; Luego :



ΔDBA , isósceles , por ser $\overline{AM}$ bisectriz y altura

ΔBCE , isósceles , por ser $\overline{CN}$ bisectriz y altura

$$\Rightarrow AD=AB;\ CE=BC ;$$

M y N son puntos medios de $\overline{DB}$ y $\overline{BE}$

* En el ΔDBE, $\overline{MN}$ es base media relativa a $\overline{DE}$:

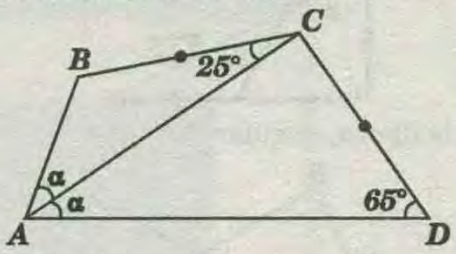
$$MN=\frac{DE}{2}=\frac{AB+AC+CE}{2} \Rightarrow MN=\frac{10+12+14}{2}=18$$

RPTA : "A"

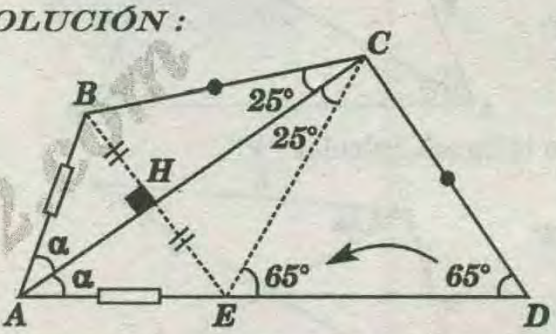
PROBLEMA 27:

En la figura mostrada. Hallar "a".

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°



RESOLUCIÓN :



* Se traza $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ luego $AB=AE$, $BH=HE$,

* Además en el ΔBCE se observa que $CB=CE$

* ΔAEC: $\alpha+25°=65° \Rightarrow \alpha=40°$

RPTA: "D"

PROBLEMA 28:

En un $\Delta ABC(AB=BC)$ se ubica en su interior el punto ***"P"*** de manera que :

$$AP=BC,\ m\sphericalangle PAC=\alpha \text{ y } m\sphericalangle PAB=60°-2\alpha .$$

Hallar : $m\sphericalangle PCA$.

A)25° B) 30° C)35° D) 40° E) 45°

RESOLUCIÓN:

* Se construye el Δ equilátero AEC.

* Luego :

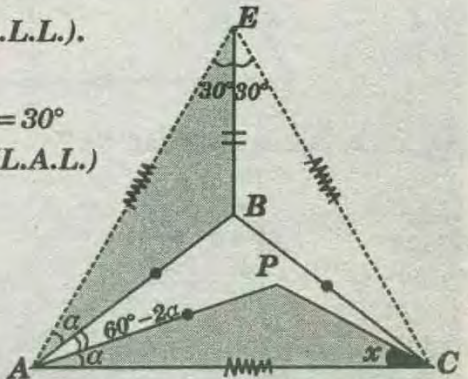
$\Delta AEB \cong \Delta CEB$....*(L.L.L.)*.

* Entonces:

$m\sphericalangle AEB=m\sphericalangle CEB=30°$

* $\Delta EAB \cong \Delta CAP$....*(L.A.L.)*

$$\Rightarrow x=30°$$



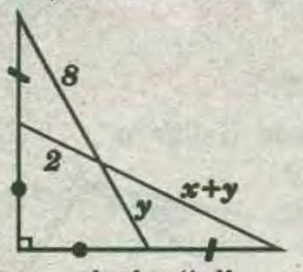
RPTA: "B"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS I

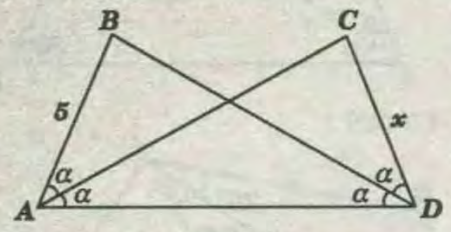
01 En la figura, calcular "x"

A) 8
B) 6
C) 4
D) 5
E) 2



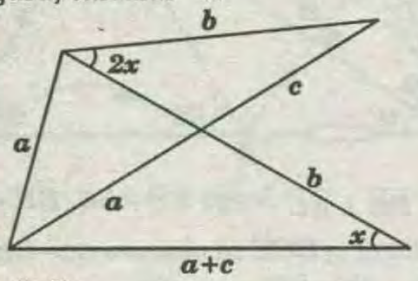
02 En la figura, calcular "x"

A) 4
B) 5
C) 10
D) 2,5
E) 7,5



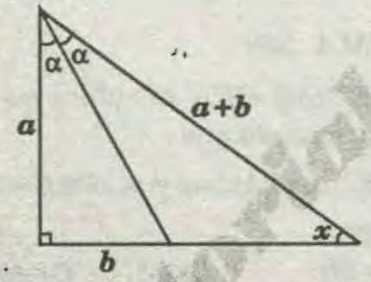
03 En la figura, calcular "x"

A) 30°
B) 22,5°
C) 15°
D) 18°
E) 12°



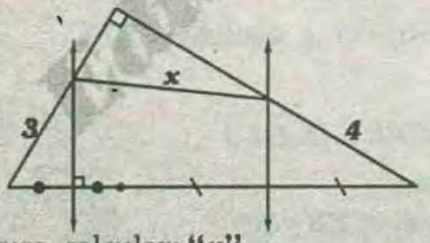
04 Calcular "x"

A) 15°
B) 22,5°
C) 30°
D) 37°
E) 45°



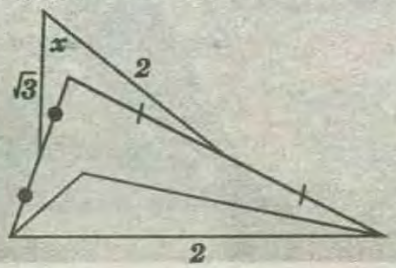
05 En la figura, calcular "x"

A) 3
B) 6
C) 5
D) 4
E) 7



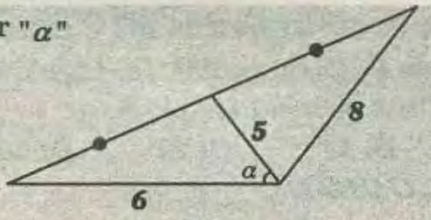
06 En la figura, calcular: "x"

A) 15°
B) 60°
C) 90°
D) 45°
E) 30°



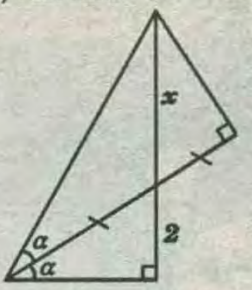
07 Calcular "α"

A) 15°
B) 30°
C) 37°
D) 45°
E) 53°



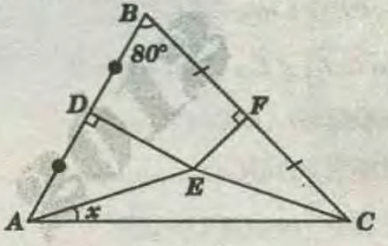
08 En la figura, calcular "x"

A) 2
B) 4
C) 8
D) 6
E) 10



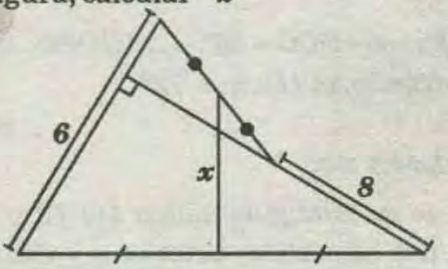
09 En la figura, calcular "x"

A) 30°
B) 25°
C) 15°
D) 20°
E) 10°



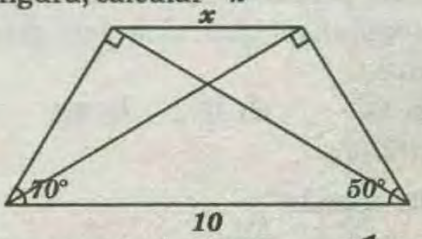
10 En la figura, calcular "x"

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7



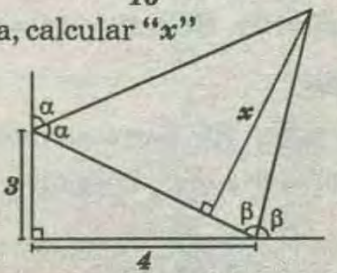
11 En la figura, calcular "x"

A) 4
B) 5
C) 6
D) 3
E) 8



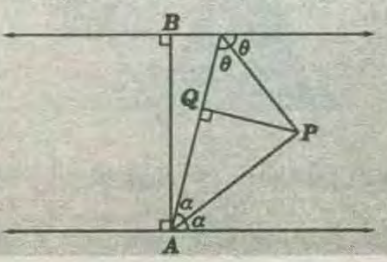
12 En la figura, calcular "x"

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8



13 Del gráfico, calcular AB, si $PQ=4$

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10

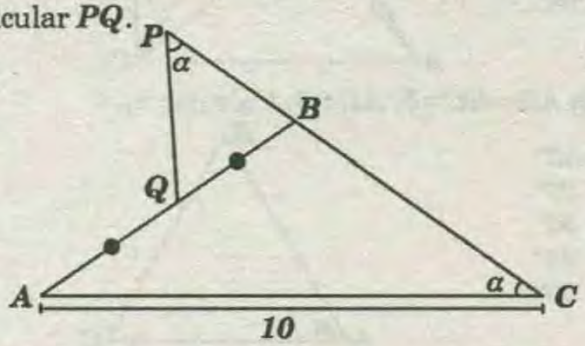


14 En un triángulo **ABC** se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$ y luego se traza la mediatriz $\overline{BD}$ que interseca a la prolongación de $\overline{AC}$ en "E". Si la $m\sphericalangle A=40°$; calcular la $m\sphericalangle EBC$

A) 20° *B) 25°* *C) 40°* *D) 45°* *E) 50°*

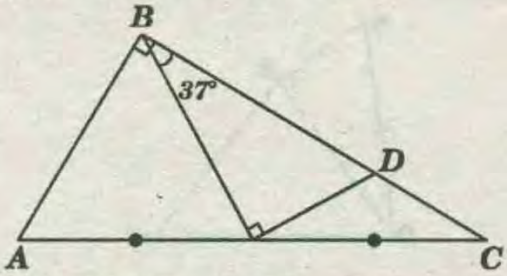
15 Calcular PQ.

A) 9
B) 8
C) 7
D) 6
E) 5



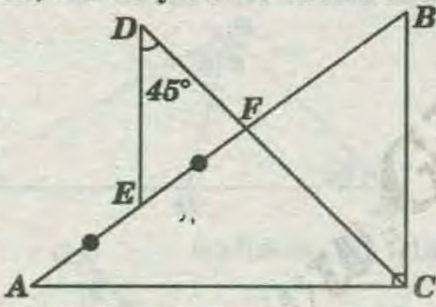
16 Calcular AC, si $BD=10$

A) 12
B) 14
C) 15
D) 16
E) 18



17 Si $AE=EF$; $DE=4$ y CD es bisectriz del $\sphericalangle ACB$, calcular AC.

A) 4
B) 6
C) 8
D) $8\sqrt{2}$
E) 12



18 En un triángulo ABC, $m\sphericalangle B=90°$, se traza la ceviana $\overline{BD}$ (D en la prolongación de $\overline{CA}$). Si: $m\sphericalangle DBC=3m\sphericalangle BCD$; $BD=14$, $AC=10$. Calcular **AD**.

A) 6 *B) 7* *C) 8* *D) 9* *E) 10*

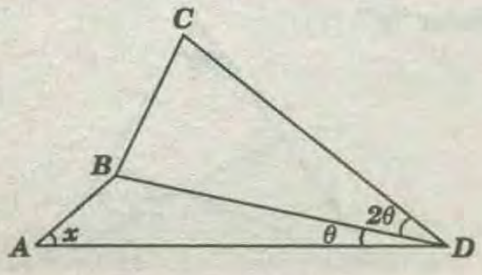
19 Dado un triángulo **ABC**, en $\overline{AC}$ se ubica el punto **D**, tal que: $m\sphericalangle ABD=2m\sphericalangle DBC$ y $5AD=6DC$

Calcular la $m\sphericalangle C$, si $AB=BD$.

A) 22,5° *B) 30°* *C) 37°* *D) 45°* *E) 53°*

20 Calcular "x", si **AB=BC** y **BD=CD**.

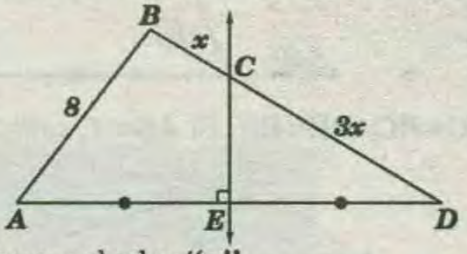
A) 20°
B) 26,5°
C) 30°
D) 37°
E) 45°



TAREA DOMICILIARIA

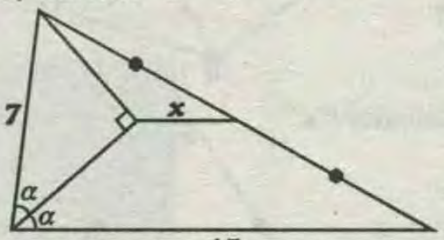
01 En la figura, calcular los valores enteros que puede tomar "x"

A) 3; 3; 4
B) 2; 3
C) 3; 4
D) 3
E) 4



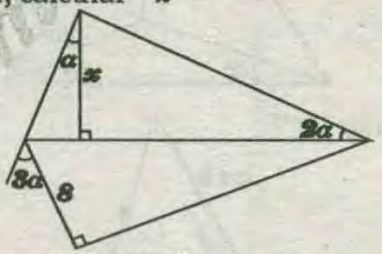
02 En la figura, calcular "x"

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6



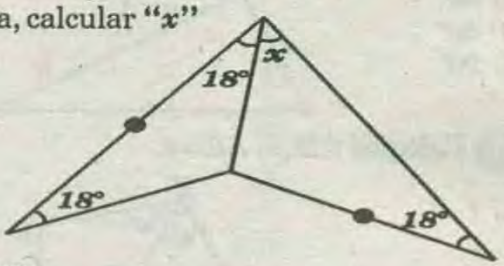
03 En la figura, calcular "x" **15**

A) 4
B) 16
C) 6
D) 8
E) 10



04 En la figura, calcular "x"

A) 18°
B) 36°
C) 54°
D) 72°
E) 90°

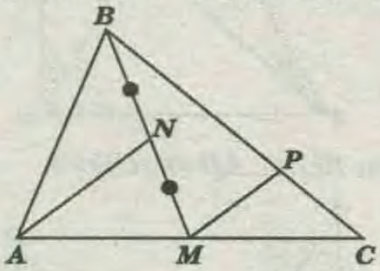


05 En el gráfico:

$BN=NM$; $AM=MC$ $\overline{AN}\parallel\overline{MP}$; $AN=18$

Calcular: MP

A) 18
B) $9\sqrt{2}$
C) 9
D) 12
E) 15

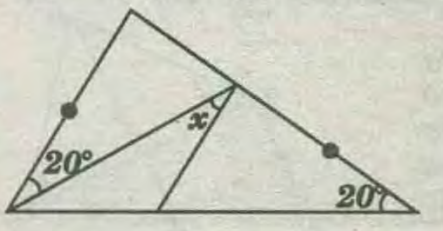


SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS II

01 Calcular "x"

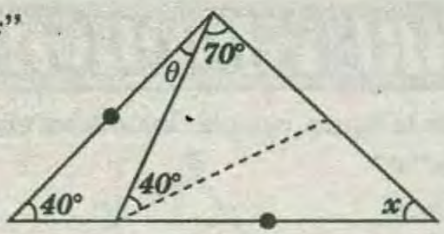
A) 15°
B) 10°
C) 20°
D) 25°
E) 35°



PROGRAMA2.com

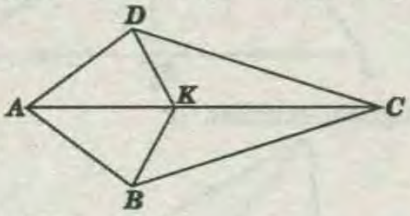
02 Calcular "x"

A) 30°
B) 20°
C) 10°
D) 35°
E) 40°



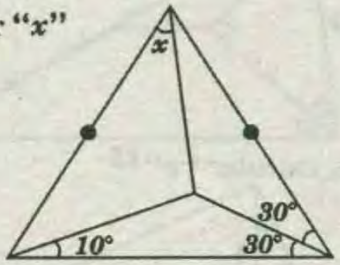
03 $DC=BC$, $DK=BK$. Si $AD=7$, calcular AB

A) 6
B) 3,5
C) 7
D) 4,5
E) 10



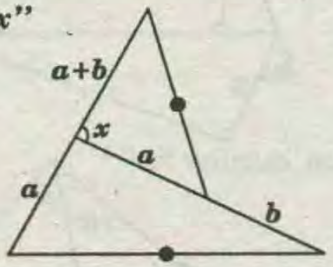
04 Calcular "x"

A) 20°
B) 10°
C) 40°
D) 30°
E) 50°



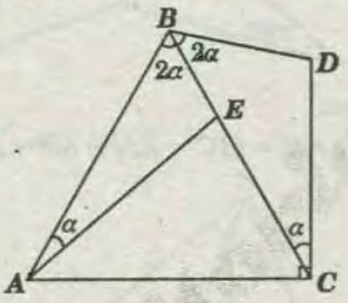
05 Calcular "x"

A) 80°
B) 70°
C) 60°
D) 50°
E) 90°



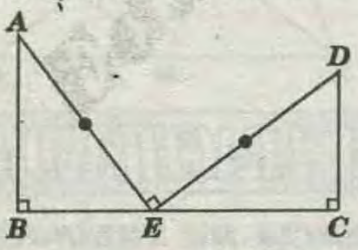
06 Calcular CD, si $AE=4$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



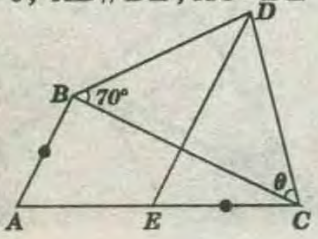
07 Calcular BC, si: $AB=6$; $CD=4$

A) 8
B) 9
C) 12
D) 10
E) 15



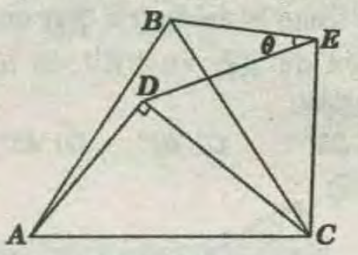
08 Calcular θ, $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$; $AC=DE$

A) 40°
B) 70°
C) 50°
D) 80°
E) 35°



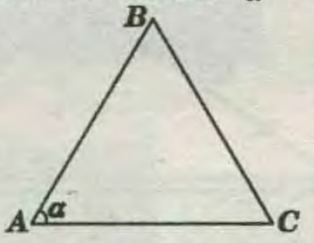
09 $\triangle ABC$: equilátero; $\triangle DEC$: equilátero: calcular θ

A) 35°
B) 45°
C) 60°
D) 20°
E) 30°



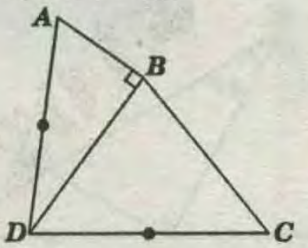
10 $AB=BC=5$; $AC=6$. Calcular "α"

A) 53°
B) 37°
C) 30°
D) 45°
E) 36°



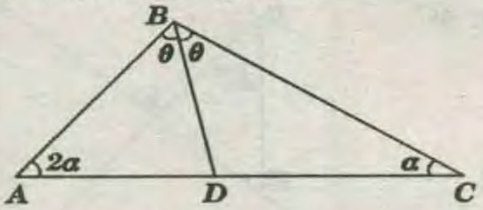
11 Calcular BC, si $AB=1$; $BD=4$

A) 4
B) 5
C) 3
D) 7
E) 6



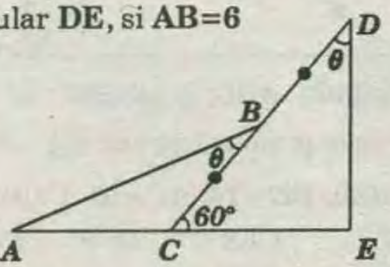
12 Calcular BC, si: AB=4; AD=3

A) 6
B) 8
C) 5
D) 9
E) 7



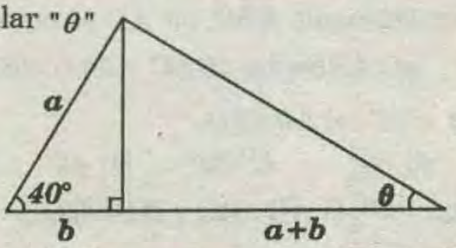
13 Calcular DE, si AB=6

A) 7
B) 8
C) 6
D) 5
E) 3



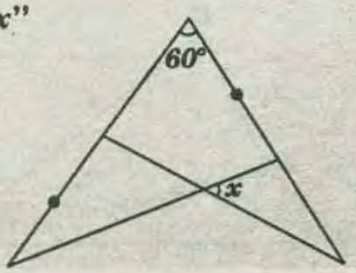
14 Calcular "θ"

A) 25°
B) 20°
C) 30°
D) 10°
E) 16°



15 Calcular "x"

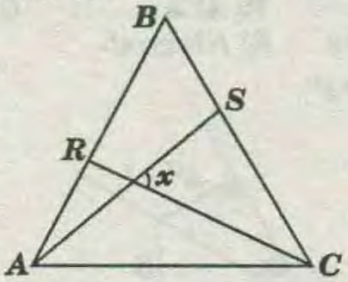
A) 45°
B) 60°
C) 30°
D) 53°
E) 37°



TAREA DOMICILIARIA

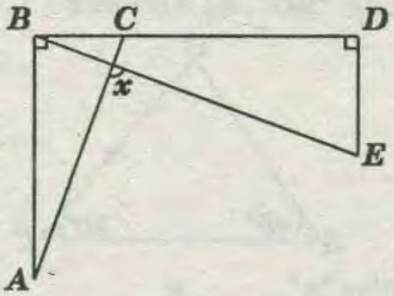
01 En la figura; el triángulo **ABC** es equilátero y **AR=BS**. Calcular "x"

A) 75°
B) 90°
C) 60°
D) 53°
E) 37°



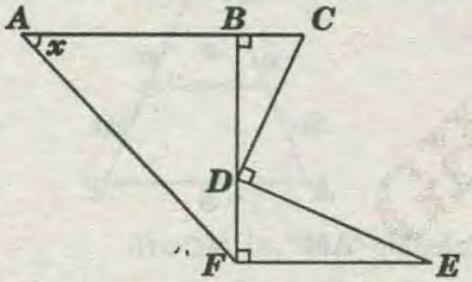
02 Calcular x si $BC=CD=DE=AB/2$

A) 60°
B) 90°
C) 80°
D) 120°
E) 207/2°



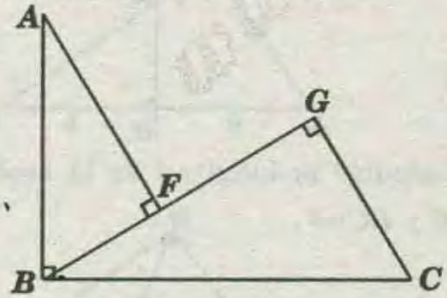
03 $CD=DE$, $AB=2BC=6$, $EF=5$. Calcular "x"

A) 37°
B) 53°
C) 60°
D) 75°
E) 30°



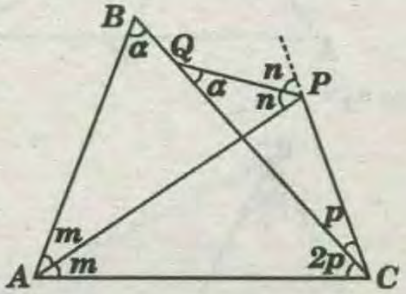
04 $AB=BC$, $AF=9$ y $CG=3$. Calcular FG

A) 5
B) 4
C) 8
D) 6
E) 9



05 En la figura adjunta, calcular "α"

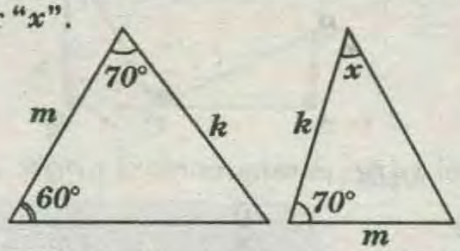
A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 72°
E) 36°



TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

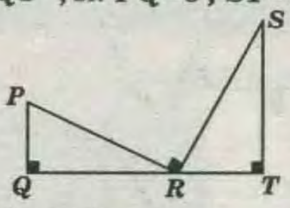
01 Calcular "x".

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 80°



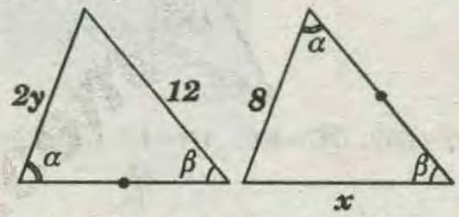
02 Hallar "QT", si: $PQ=5$, $ST=12$ y $PR=RS$.

A) 13
B) 14
C) 15
D) 16
E) 17



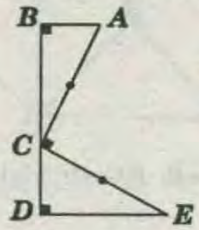
03 Calcular "$x+y$".

A) 18
B) 20
C) 16
D) 15
E) 24



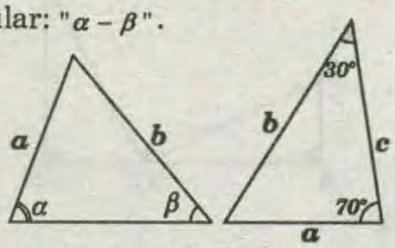
04 Si: $AB=4$ y $BD=12$, calcular: "BC".

A) 2
B) 9
C) 6
D) 8
E) N.A.



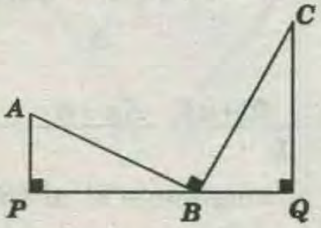
05 Calcular: "$\alpha-\beta$".

A) 50°
B) 20°
C) 30°
D) 25°
E) 35°



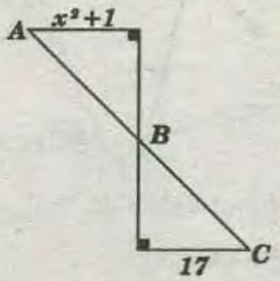
06 Si: $AB=BC$, $PQ=10$ y $AP=3$. Hallar: "CQ".

A) 7
B) 3
C) 5
D) 4
E) 12



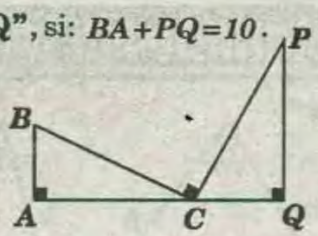
07 Calcular "x", si: $AB=BC$.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 8



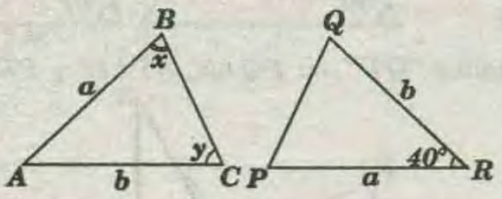
08 Hallar "AQ", si: $BA+PQ=10$.

A) 8
B) 9
C) 10
D) 11
E) 12



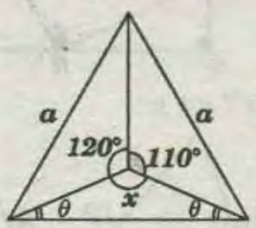
09 Si el $\triangle ABC$ es congruente al $\triangle PQR$, hallar "$x+y$".

A) 120°
B) 60°
C) 100°
D) 110°
E) 140°



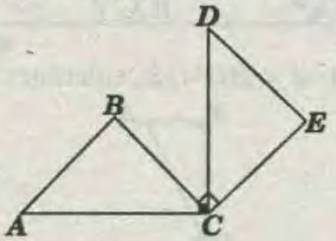
10 Calcular "x".

A) 110°
B) 130°
C) 100°
D) 120°
E) 140°



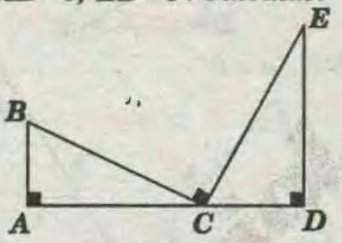
11 Si: $AC=DC$, $BC=EC$, $AB=12$. Calcular: "DE".

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 24



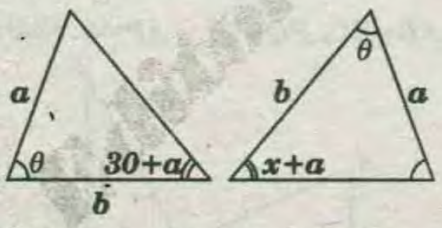
12 Si: $AC=EC$, $AB=6$, $ED=9$. Calcular: "BC".

A) 10
B) 12
C) 15
D) 18
E) 20



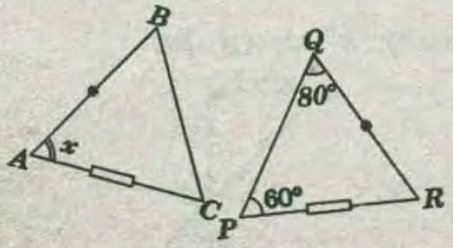
13 Calcular "x".

A) 20°
B) 15°
C) $\alpha+\theta$
D) 30°
E) $\theta-\alpha$

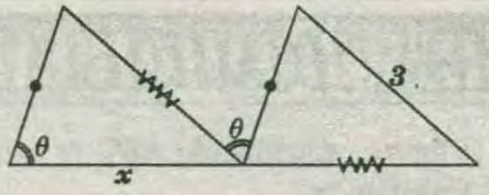


14 Si el $\triangle ABC$ es congruente al $\triangle PQR$, entonces hallar "x".

A) 20°
B) 40°
C) 60°
D) 30°
E) 25°



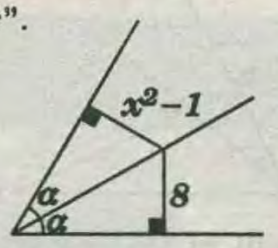
15 Para encontrar el valor de "x", ¿qué caso de la congruencia se debe utilizar?



A) LLL B) ALA C) LAL
D) Cualquiera E) Ninguno

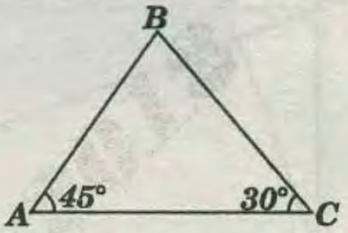
16 Calcular "x".

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



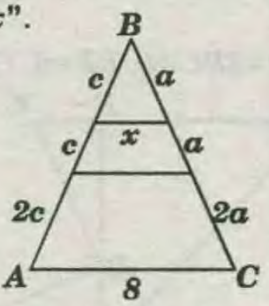
17 Calcular "BC", si: $AB=8\sqrt{2}$.

A) 12
B) 16
C) 20
D) 24
E) 28



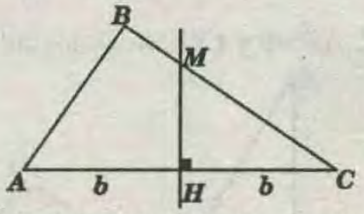
18 Calcular "x".

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 6



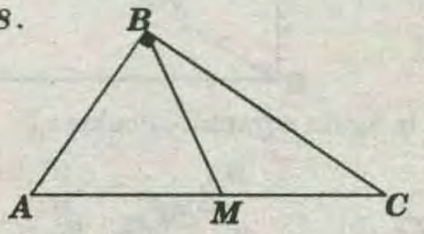
19 Calcular "AM", si $MC=10$.

A) 5
B) 6
C) 8
D) 10
E) 15



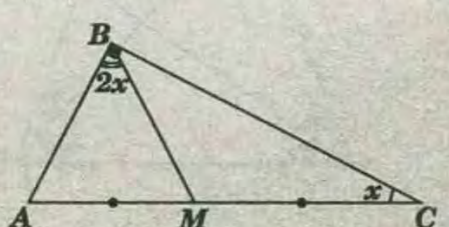
20 Calcular la longitud de la mediana $\overline{BM}$, si: $AB=6$ y $BC=8$.

A) 10
B) 8
C) 7
D) 6
E) 5



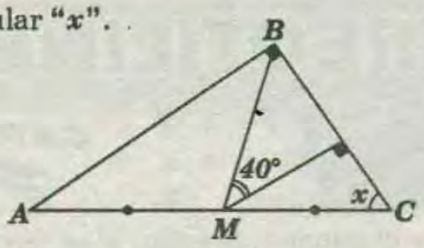
21 Calcular "x".

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°



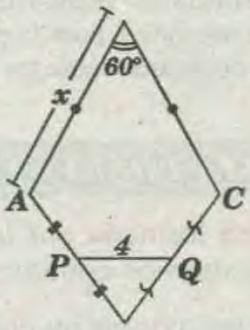
(22) Calcular "x".

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 30°
E) 35°



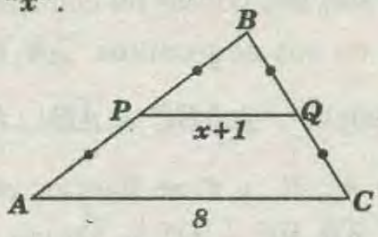
(23) Calcular "x".

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 14



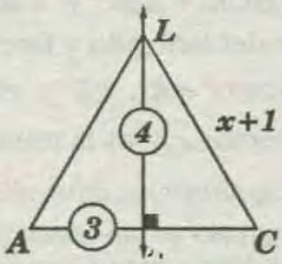
(24) Calcular "x".

A) 2
B) 4
C) 5
D) 3
E) 7



(25) Si $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$, calcular "x".

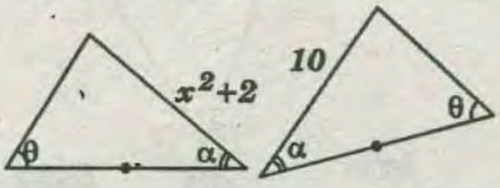
A) 5
B) 2
C) 3
D) 4
E) 6



TAREA DOMICILIARIA

(01) En la figura, calcular "$x+1$"

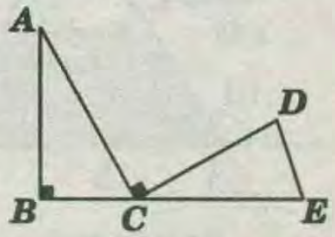
A) 3
B) 1
C) 5
D) 2
E) 4



(02) Hallar "DE", si: $AB=7$, $BC=3$, $CE=11$.

Además: $AC=DC$.

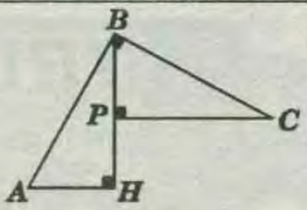
A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6



(03) Si: $AB=BC$, $AH=4$ y $PH=3$.

Calcular: "PC".

A) 1
B) 4
C) 5
D) 3
E) 7



CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)B	2)B	3)B	4)E	5)C	6)E	7)E	8)D	9)E	10)C
11)B	12)C	13)C	14)C	15)E	16)D	17)C	18)D	19)C	20)C
1)D	2)C	3)D	4)B	5)D					

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)C	2)E	3)C	4)E	5)E	6)D	7)D	8)A	9)E	10)A
11)B	12)E	13)C	14)B	15)B					
1)C	2)B	3)B	4)D	5)E					

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA									
1)E	2)E	3)C	4)D	5)A	6)A	7)C	8)C	9)E	10)B
11)D	12)C	13)D	14)B	15)C	16)C	17)B	18)B	19)D	20)E
21)C	22)B	23)B	24)D	25)D	1)E	2)D	3)E		

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

La **congruencia de triángulos** estudia los casos en que dos o más triángulos presentan ángulos de igual medida o congruentes, así como lados de igual medida o congruentes.

CONDICIONES DE CONGRUENCIA

Para que se de la congruencia de dos o más triángulos se requiere que sus lados respectivos sean congruentes, es decir que tengan la misma medida. Esta condición implica que los ángulos respectivos también tienen la misma medida o son congruentes. Las figuras **congruentes** son aquellas que tienen la misma forma y el mismo tamaño. Las partes coincidentes de las figuras congruentes se llaman **homologas** o correspondientes.

CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son congruentes cuando sus tres lados y ángulos también lo son, sin embargo, puede demostrarse la congruencia de dos triángulos si se sabe que algunas de sus partes correspondientes son **homólogas**.

Las condiciones mínimas que deben cumplir dos triángulos para que sean congruentes se denominan criterios de congruencia, los cuales son:

* ***Criterio LLL*** : Si en dos triángulos los tres lados de uno son respectivamente congruentes con los de otro entonces los triángulos son congruentes.

* ***Criterio LAL :*** Si los lados que forman a un ángulo, y éste, son congruentes con dos lados y el ángulo comprendido por estos de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

* ***Criterio ALA:*** Si dos ángulos y el lado entre ellos son respectivamente congruentes con dos ángulos y el lado entre ellos de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

* ***Criterio LLA:*** Si el lado más largo del triángulo, junto con otro lado de éste, y el ángulo superior del lado más largo del triángulo son congruentes con los del otro triángulo.

TRIANGULOS RECTILINEOS
(REPASO)

CAPITULO 12

OBJETIVOS :

* Comprender los conocimientos básicos sobre los triángulos , y las relaciones que se establecen entre sus elementos .

* Conocer y familiarizarse con los teoremas derivados de esta teoría y sus aplicaciones en la solución de problemas.

* *Reconocer e identificar cuando dos triángulos son congruentes según los casos que se van a plantear.*

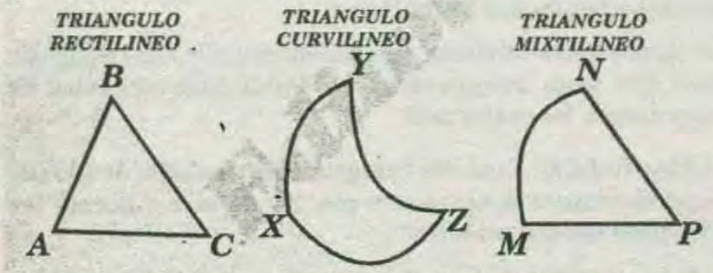
* Conocer los teoremas y aplicaciones respecto a la congruencia de triángulos para la resolución de problemas y la deducción de otros teoremas.

* *Conocer la relación entre los lados de los triángulos denominados triángulos rectángulos notables como también sus medidas angulares.*

INTRODUCCION :

Un **triángulo**, en geometría, es un polígono de tres lados determinado por tres segmentos de tres rectas que se cortan, denominados lados (Euclides); o tres puntos no alineados llamados vértices. También puede determinarse un triángulo por cualesquiera otros tres elementos relativos a él, como por ejemplo un ángulo y dos medianas; o un lado, una altura y una mediana.

Si está contenido en una superficie plana se denomina **triángulo**, o **trígono**, un nombre menos común para este tipo de polígonos. Si está contenido en una superficie esférica se denomina **triángulo esférico**. Representado, en cartografía, sobre la superficie terrestre, se llama **triángulo geodésico**.



La primera figura , representa un ***triángulo rectílineo***, ya que para unir los puntos se han empleado segmentos de recta.

La segunda figura muestra un ***triángulo curvilíneo*** porque se utilizan segmentos de línea curva para unir los puntos.

La tercera figura expone un ***triángulo mixtilíneo*** debido a que para unir los puntos necesitan tanto segmentos de línea recta como los de línea curva.

En muchas ocasiones en nuestro entorno se hace necesario relacionar dos objetos o figuras y para ello lo que se observa es la forma y el tamaño de estos, si se repiten dichas características entonces vemos la aplicación de la congruencia en la mecánica para la producción en serie. etc. por lo cual es necesario entender que es congruencia de figuras.

TRIANGULO RECTILINEO

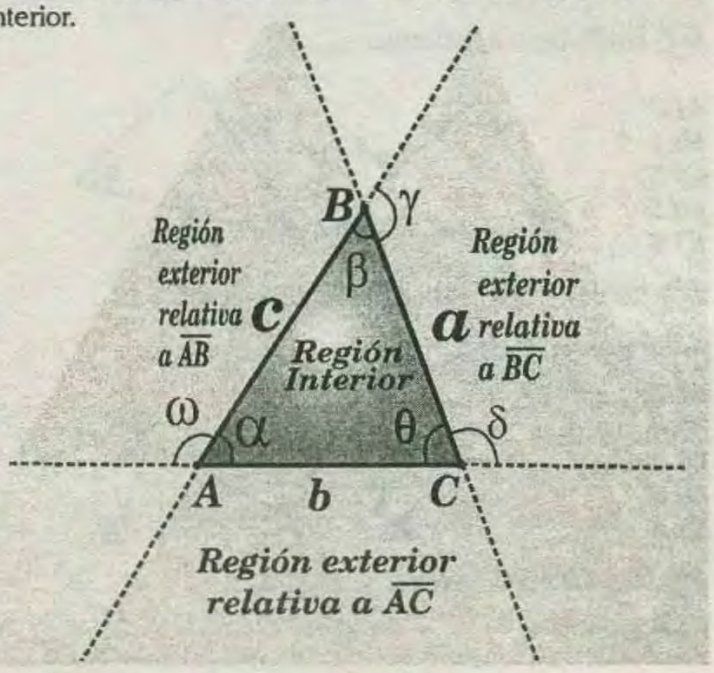
Figura geométrica formada por tres segmentos no colíneales y de extremos comunes.

Si A , B y C son tres puntos no colineales, entonces la reunión de los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$ es llamado triángulo : $\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$

Los puntos A , B y C se llaman vértices y los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se llaman lados.

Los ángulos $\sphericalangle BCA, \sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle BCA$ se llaman ángulos internos del triángulo y frecuentemente los designamos como: $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle C$. (Obsérvese que el ángulo interno $\sphericalangle A$ es la reunión de los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$). Un ángulo externo de un triángulo es el ángulo adyacente suplementario de un ángulo interno. Por ejemplo : δ. Un punto está en el interior de un triángulo si está en el interior de cada uno de los ángulos internos del triángulo.

Un punto está en el exterior de un triángulo, si está en el plano del triángulo, pero no está en el triángulo o en su interior.



* Notación de un triángulo: ΔABC se lee triángulo ABC.

* Vértices: A, B, C

* Lados: $\overline{AB}$; $\overline{AC}$, $\overline{BC}$

* Ángulos: Internos: α , β, θ

  Externos: ω , γ , δ

* ***PERÍMETRO DE UN TRIÁNGULO*** : $2p = a + b + c$

La suma de las longitudes de los lados de un triángulo se llama perímetro del triángulo.

* ***SEMIPERÍMETRO:*** $p = \frac{a+b+c}{2}$

• Las medidas de los lados se designa por letra minúscula del vértice opuesto a dicho lado.

$BC = a$; $AC = b$; $AB = c$

• Todo triángulo divide al plano en tres subconjuntos de puntos.

* Punto interiores al triángulo

* Puntos exteriores al triángulo

* Puntos del triángulo.

• Región triangular es una figura formada por los puntos del triángulo y los puntos interiores al triángulo.

• Cuando se dice área de triángulo , se refiere al área de la región triangular.

DEFINICIÓN DE REGIÓN TRIANGULAR

Una región triangular es la reunión de un triángulo con su interior. Una región triangular es un conjunto convexo.

PERÍMETRO DE UNA REGIÓN PLANA

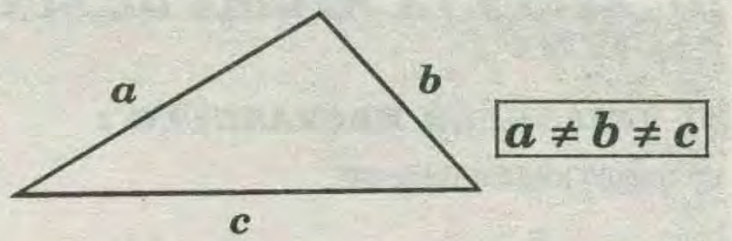
Se denomina perímetro de una región plana, a la línea cerrada (rectílinea, curvilínea o mixtilínea) que la limita. Para calcular la longitud del perímetro de una región plana debemos calcular la longitud de esta línea cerrada.

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

I) SEGÚN LA LONGITUD DE SUS LADOS :

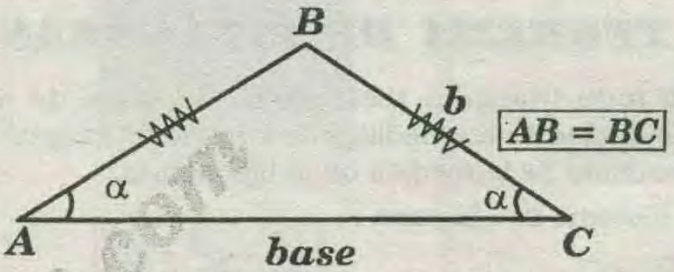
A) TRIÁNGULO ESCALENO :

Es un triángulo cuyos tres lados tienen diferentes longitudes.



B) TRIÁNGULO ISÓSCELES :

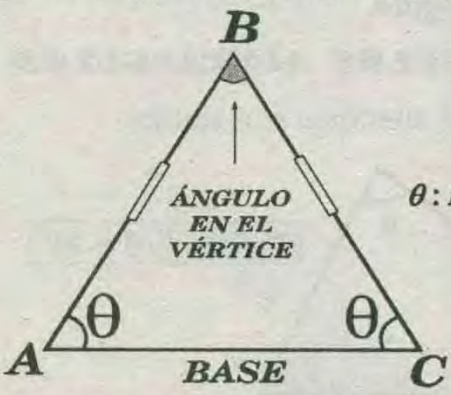
Es un triángulo en el cual dos de sus lados son congruentes. Al tercer lado lo llamaremos ***BASE***, el ángulo opuesto a la base lo denominaremos ***ÁNGULO EN EL VÉRTICE*** y los ángulos que están al frente a los lados congruentes son denominados como ***ÁNGULOS DE LA BASE.***



Tiene dos lados iguales y dos ángulos iguales

! RECALQUEMOS ¡

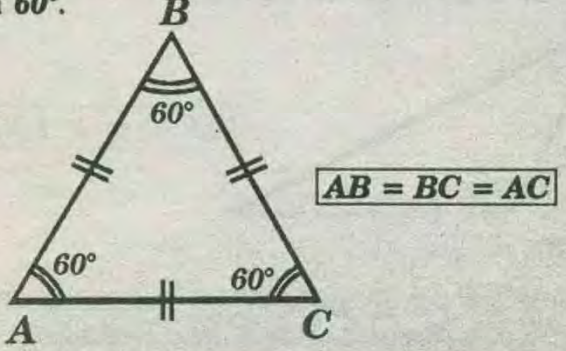
En todo triángulo isósceles , al lado desigual se le llama base y al ángulo que se opone a ella se le conoce como ángulo en el vértice o ángulo desigual. Los dos ángulos de la base son iguales.



θ : Angulo de la base

C) TRIÁNGULO EQUILÁTERO :

Todos sus lados son iguales y sus ángulos interiores miden $60°$.

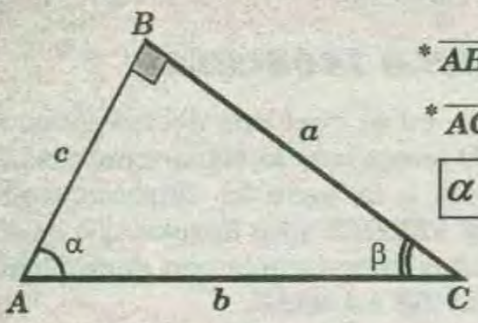


Es un triángulo cuyos tres lados son congruentes.

II) SEGÚN LA MEDIDA DE SUS ÁNGULOS :

A) TRIÁNGULO RECTÁNGULO :

Un ángulo interior mide $90°$



* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$: catetos

* $\overline{AC}$: Hipotenusa

$$\alpha + \beta = 90°$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo , la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.

* Teorema de Pitágoras :

$$a^2 + c^2 = b^2$$

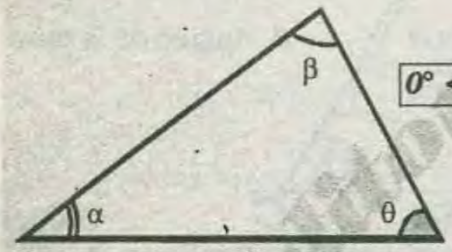
B) TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS :

Es un triángulo que no tiene un ángulo recto. Si los tres ángulos internos son agudos, se llama ***triángulo acutángulo.***

Si uno de sus ángulos internos es obtuso, se llama ***triángulo obtusángulo.***

B-1) TRIÁNGULOS ACUTÁNGULOS :

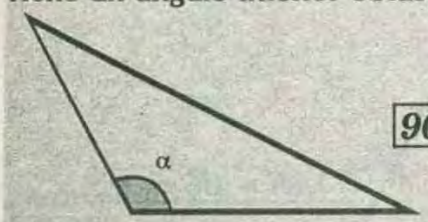
Todos sus ángulos interiores son agudos



$$0° < \alpha, \beta, \theta < 90°$$

B-2) TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO :

Tiene un ángulo interior obtuso



$$90° < \alpha < 180°$$

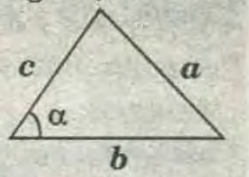
NOTA:

El triángulo equiángulo tiene sus tres ángulos internos congruentes. (Cada uno mide $60°$) por lo tanto es un triángulo acutángulo.

NATURALEZA DE UN TRIÁNGULO

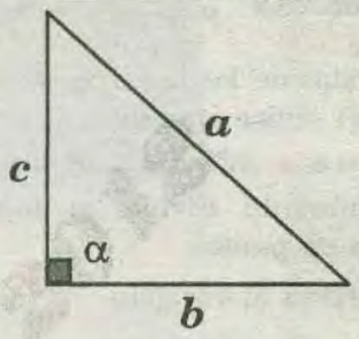
Según las longitudes de los lados de un triángulo , podemos determinar el tipo de triángulo , en base a lo siguiente :

I) Si: $\alpha < 90° \Rightarrow \boxed{a^2 < b^2 + c^2}$



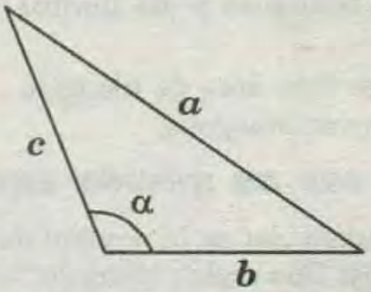
TRIÁNGULO ACUTÁNGULO

II) Si: $\alpha = 90° \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$



TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Iil) Si: $\alpha > 90° \Rightarrow \boxed{a^2 > b^2 + c^2}$



TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO

OBSERVACIONES :

- Si dos o más ángulos tienen igual medida , se dice que son congruentes y también si dos o más segmentos tienen igual longitud son congruentes .

- Si dos de un triángulo no son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados no son congruentes y ***a mayor lado se opone a mayor ángulo.***

- Todo triángulo tiene seis lados externos , estos seis ángulos forman tres pares de ángulo congruentes, por ser opuestos por el vértice .

- En un triángulo ***ABC***, el ángulo interior ***A*** y el exterior en ***A*** son suplementarios adyacentes. En cambio ***B*** y ***C*** no es adyacente con el ángulo exterior en ***A***.

• Si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos no son congruentes y ***a mayor ángulo se opone mayor lado***

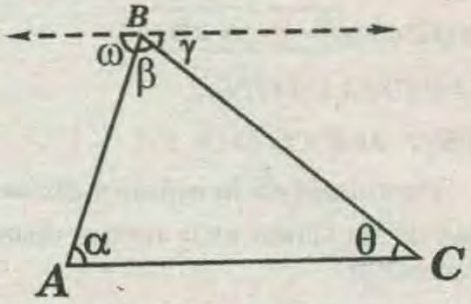
PROPIEDADES FUNDAMENTALES DEL TRIÁNGULO

TEOREMA 1 :

TEOREMA DE LA SUMA DE LAS MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS INTERNOS

En todo triángulo la ***suma*** de las medidas de los ángulos internos que forman sus lados es ***180°***.

DEMOSTRACION :



* Consideramos el triángulo ***ABC***. Por el vertice ***B*** trazamos una recta paralela a $\overline{AC}$.

* Se nota en $B: \omega + \beta + \gamma = 180° \ldots\ldots (I)$

* Por paralelas (ángulos alternos):

$$\boxed{\omega = \alpha} \wedge \boxed{\gamma = \theta} \ \ldots\ldots (II)$$

* En *(I)* y *(II)* : $\boxed{\alpha + \beta + \theta = 180°}$ *.....l.q.q.d.*

De acuerdo a este teorema, se tiene que:

i) Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto ni más de un ángulo obtuso.

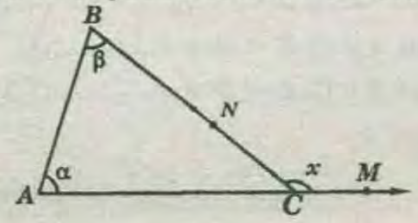
ii) Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

iii) Si dos triángulos tienen dos pares de ángulos correspondientes congruentes, el tercer par de ángulos correspondientes son también congruentes.

TEOREMA 2 :

TEOREMA DEL ÁNGULO EXTERNO

La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes a él . Es decir :



$\boxed{x = \alpha + \beta}$

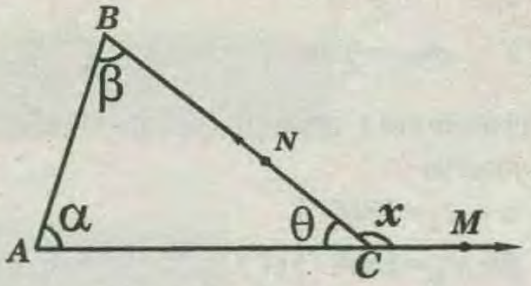
* $\sphericalangle MCN$: ángulo exterior del $\triangle ABC$

* $\sphericalangle BAC, \sphericalangle ABC$: ángulos interiores no adyacentes a $\sphericalangle MCN$

DEMOSTRACION :

* consideremos el triángulo ***ABC :***

**** PRIMER MÉTODO :***



$\boxed{x = \theta + \beta}$

* Sea la medida del ángulo ***BCA*** igual a θ :

$\theta + x = 180° \ldots\ldots (I)$

* Del teorema *1* fundamental del triángulo

$\alpha + \beta + \theta = 180° \ldots\ldots (II)$

*Reemplazando *II* en *I* :

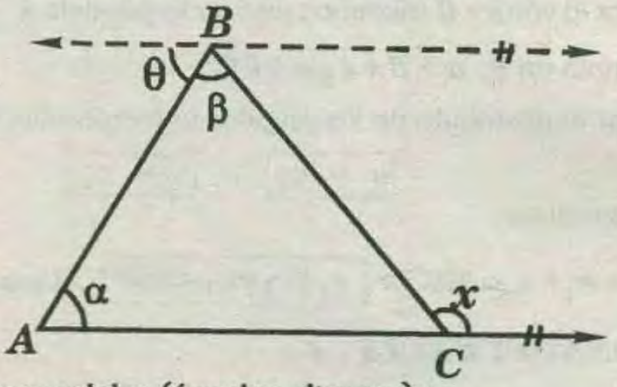
$\theta + x - \alpha - \beta - \theta = 0° \Rightarrow \boxed{x = \alpha + \beta}$

**** SEGUNDO MÉTODO :***

* Por el vértice ***B*** trazamos una recta paralela a $\overline{AC}$.

* Por paralelas (ángulos alternos)

$\alpha = \theta \ \ldots\ldots (I)$



* Por paralelas (ángulos alternos) :

$x = \theta + \beta \ \ldots\ldots (II)$

*Reemplazando *II* en *I* : $\boxed{x = \alpha + \beta}$ ..... ***l.q.q.d***

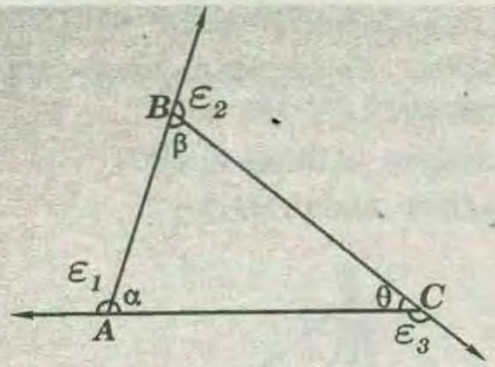
TEOREMA 3 :

La suma de las medidas los ángulos exteriores del triángulo , trazados uno en cada vértice es ***360°***.

DEMOSTRACIÓN :

* Considerando el triángulo ***ABC :***

• PRIMER MÉTODO :

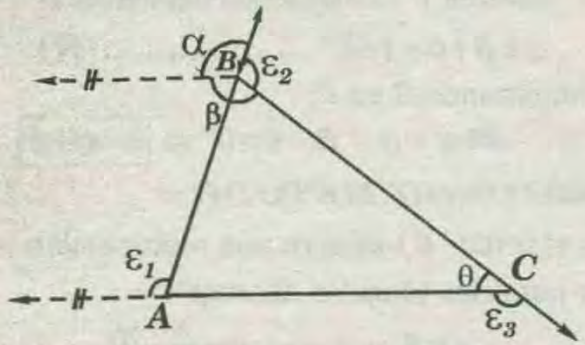


* Del teorema *1* anterior : $\alpha+\beta+\theta=180°$ en *A; B; C* se observa

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\varepsilon_1=180°\\ \beta+\varepsilon_2=180°\\ \theta+\varepsilon_3=180°\end{array}\right\}(+)$$

$$\underbrace{\alpha+\beta+\theta}_{180°}+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=540° \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=360°}$$

**** SEGUNDO MÉTODO :***



* Por el vértice *B* trazamos una recta paralela a $\overline{AC}$.

Se nota en *B*: $\alpha+\beta+\varepsilon_2=360°$

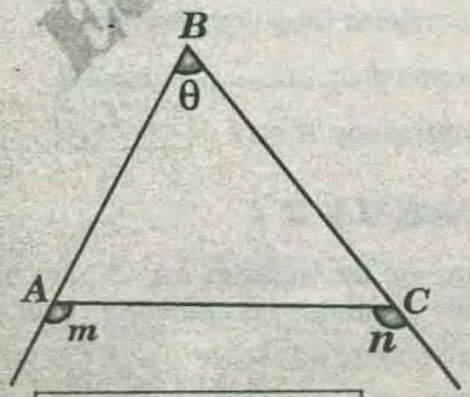
* Por el postulado de los ángulos correspondientes :

$$\boxed{\alpha=\varepsilon_1} \wedge \boxed{\beta=\varepsilon_3}$$

* Entonces :

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=360° \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=360°} \text{ ....l.q.q.d.}$$

CONSECUENCIA :

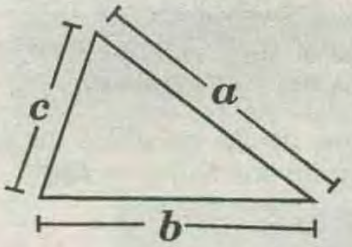


$$\boxed{m+n=180°+\theta}$$

TEOREMA 4 :

EXISTENCIA DEL TRIÁNGULO

En todo triángulo la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados , pero mayor que la diferencia de las longitudes de estas. A este teorema se le denomina ***desigualdad triangular o existencia***.



$$\boxed{b-c<a<b+c}$$
$$\boxed{a-c<b<a+c}$$
$$\boxed{b-a<c<b+a}$$

Si : $b\geq a\geq c \Rightarrow \boxed{b-c<a<b+c}$

DEMOSTRACIÓN :

PRIMER MÉTODO :

Postulado de la mínima distancia

"El segmento rectilíneo es la menor distancia entre sus extremos"

* Luego del $\triangle ABC$; según el postulado :

$$b < a + c \text{ .....(I)}$$

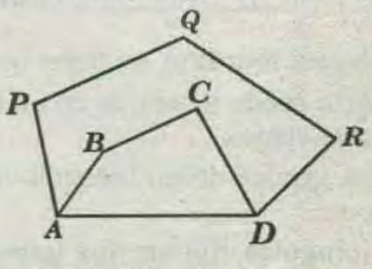
* También : $a < b + c$

$$\Rightarrow a - c < b \text{ .....(II)}.$$

* De *(I)* y *(II)*: $\boxed{a-c<b<a+c}$

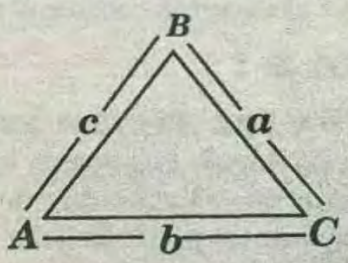
SEGUNDO MÉTODO :

Por el teorema de las poligonales :



$$AD+AB+BC+CD<PA+PQ+QR+RD$$

* Entonces :

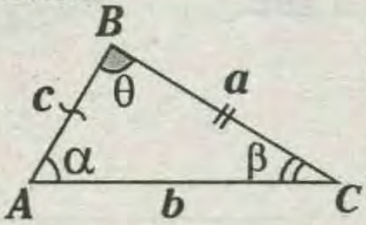


* Para los puntos *A* y *C*: $b < a + c$.....*(I)*
* Para los puntos *B* y *C*: $a < b + c$.....*(II)*
* De *(I)* : $b - c < a$
* De *(II)* y *(III)*: $\boxed{b-c<a<b+c}$ .....*l.q.q.d*

TEOREMA 5 :

REGLA DE LA CORRESPONDENCIA

A mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa. A menor lado se opone menor ángulo y viceversa. A lado congruentes se oponen ángulos congruentes y viceversa.



$$\begin{cases} Si: \boxed{\theta < \alpha \rightarrow b < a} \\ \boxed{\beta > \theta \rightarrow c > b} \end{cases}$$

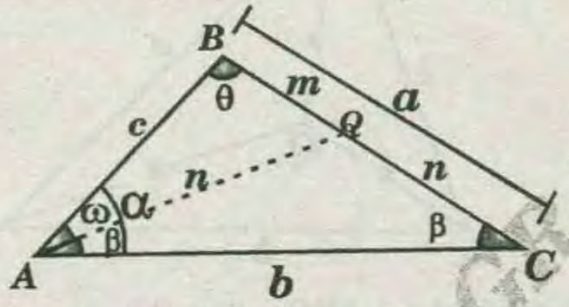
$$\begin{cases} Si: \boxed{c < b \rightarrow \beta < \theta} \\ \boxed{b > a \rightarrow \theta > \alpha} \end{cases}$$

* Por consecuencia un triángulo isósceles a lados iguales se oponen ángulos iguales ; y en un triángulo equilátero si los tres lados son iguales , entonces los tres ángulos son iguales ($60°$ cada uno) .

Usualmente a este teorema se le denomina teorema de la correspondencia en un triángulo.

DEMOSTRACIÓN:

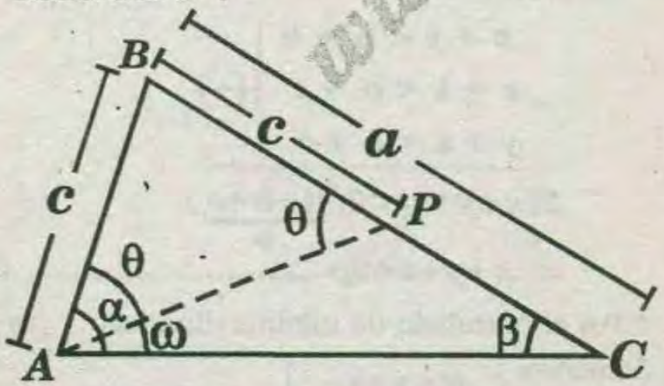
* 1ER MÉTODO :



* Como $a>c$, trazamos $AQ=QC=n$.

$$\alpha = \theta + \omega \Rightarrow \alpha > \beta$$

2DO MÉTODO :



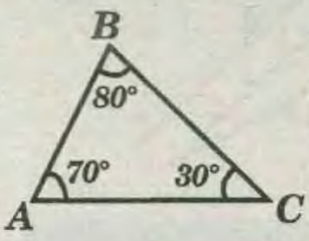
* Como $BC>AB$, consideramos en $\overline{BC}$ el punto P, tal que $BP=BA$. Por el teorema del triángulo isósceles en el triángulo ABP, tenemos :

$$m\sphericalangle BAP = m\sphericalangle BPA = \theta$$

* Sea : $m\sphericalangle PAC = \omega$, se observa: $\alpha = \theta + \beta \ \wedge \ \theta = \omega + \beta$

$$\Rightarrow \alpha = \beta + 2\omega \Rightarrow \boxed{\alpha > \beta} \quad \text{.....l.q.q.d}$$

EJEMPLOS :

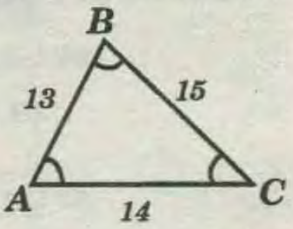


El mayor lado es $\overline{AC}$, porque se opone al mayor ángulo que es $80°$.

El menor lado es $\overline{AB}$, porque se opone al menor ángulo que es $30°$.

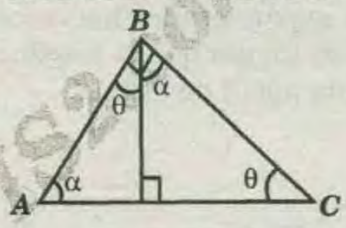
El mayor ángulo es $\sphericalangle A$ porque se opone al mayor lado que es 15.

El menor ángulo es $\sphericalangle C$ porque se opone al menor lado que es 13.



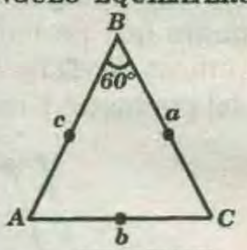
OBSERVACIONES :

TRIANGULO RECTANGULO



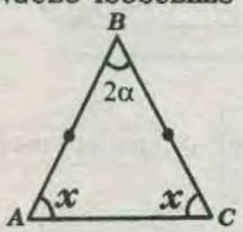
$$\Rightarrow \boxed{\alpha + \theta = 90°}$$

TRIANGULO EQUILATERO



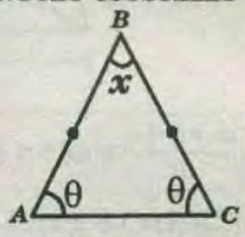
$$\Rightarrow \boxed{a = b = c}$$

TRIANGULO ISOSCELES



$$\Rightarrow \boxed{x = 90° - \alpha}$$

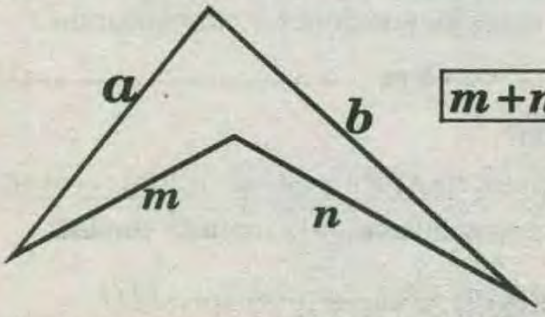
TRIANGULO ISOSCELES



$$\Rightarrow \boxed{x = 180° - 2\theta}$$

TEOREMA 6 :

Toda poligonal envuelta, es menor que su respectiva poligonal envolvente , de la misma naturaleza .

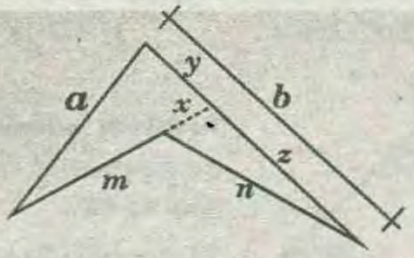


$$\boxed{m+n<a+b}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Según el postulado de la mínima distancia :

WWW.GRATIS2.COM



$m+x<a+y$ .....(I)

$n<x+z$ .....(II)

* Sumando *(I)* y *(II)*:

$$m+n+x<a+x+y+z$$

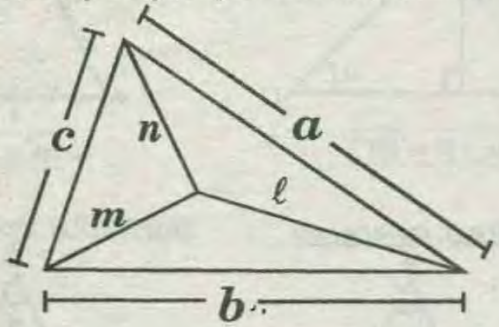
$$m+n<a+\underbrace{(y+z)}_{b}$$

$$\Rightarrow \boxed{m+n<a+b}$$

....l.q.q.d.

TEOREMA 7 : (VISSCHERS)

En todo triángulo , la suma de las distancias de un punto que pertenece a la región interior hacia los vértices de dicho triángulo es menor que la longitud del perímetro y mayor que la mitad de este.



$$\boxed{\frac{a+b+c}{2}<m+n+\ell<a+b+c} \vee \boxed{p<m+n+\ell<2p}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Por teorema de los poligonales, para :

$A \wedge B$: $\boxed{m+n<a+b}$

$A \wedge C$: $\boxed{m+\ell<a+c}$ (+)

$B \wedge C$: $\boxed{n+\ell<b+c}$

* Sumando estas inecuaciones y simplificando :

$m+n+\ell<a+b+c$ .....(I)

* Por teorema :

$\boxed{\triangle APC: b<m+\ell}$ $\boxed{\triangle APB: c<m+n}$ $\boxed{\triangle BPC: a<n+\ell}$

* Sumando y simplificando de manera similar :

$$\frac{a+b+c}{2}<m+n+\ell \text{.....(II)}$$

* De *(I)* y *(II)*: $\frac{a+b+c}{2}<m+n+\ell<a+b+c$

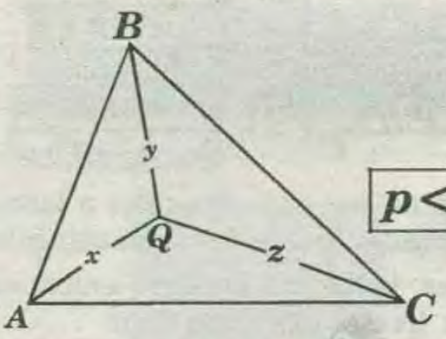
NOTA :

Si : $m>n>\ell$, entonces se debe tener en cuenta que:

$$a+b+c>2(m-\ell)$$

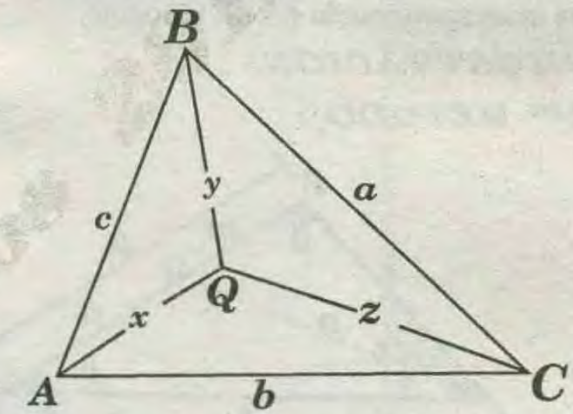
CONSECUENCIAS :

Si «*2p*» ; perímetro del $\triangle ABC$.



$\boxed{p<x+y+z<2p}$

DEMOSTRACIÓN :



* Perímetro del $\triangle ABC$: $2p=a+b+c$

* Semiperímetro del $\triangle ABC$: $p=(a+b+c)/2$

* Por el teorema :

$$\left.\begin{array}{l} x+y<a+b \\ x+z<a+c \\ y+z<b+c \end{array}\right\}(+)$$

$$2(x+y+z)<2(\underbrace{a+b+c}_{2p})$$

$$\Rightarrow x+y+z<2p \text{ .....(I)}$$

* Por el postulado de mínima distancia :

Sumando:

$$\left.\begin{array}{l} a<y+z \\ b<x+z \\ c<x+y \end{array}\right\}(+)$$

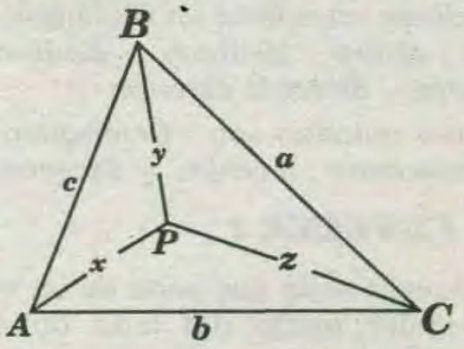
$$\underbrace{a+b+c}_{2p}<2(x+y+z)$$

$$\Rightarrow p<x+y+z<2p \text{.....(II)}$$

* De *(I)* y *(II)*: $\boxed{p<x+y+z<2p}$

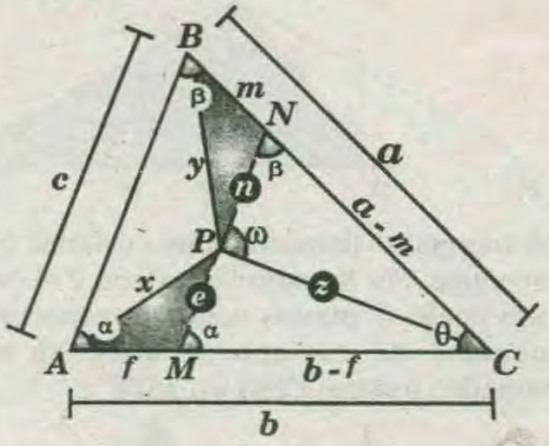
PROPIEDAD :

Si «P» es un punto interior, además $a > b > c$.



Se cumple : $\boxed{x+y+z<a+b}$

DEMOSTRACIÓN :



* Si : $a > b > c \Rightarrow \alpha > \beta > \theta$

* Se traza : $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ $(P \in \overline{MN})$

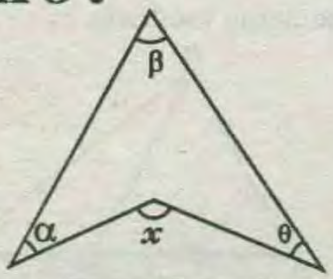
* Sabemos que :

$$\left.\begin{array}{l} \triangle BNP:\ y<m+n \\ \triangle APM:\ x<e+f \\ \triangle PNC:\ \beta<\omega \Rightarrow z<a-m \\ \triangle MNC:\ \theta<\beta \Rightarrow n+e<b-f \end{array}\right\}(+)$$

$$x+y+z+n+c<m+n+e+f+a-m+b-f$$

$\Rightarrow \boxed{x+y+z<a+b}$ .....l.q.q.d.

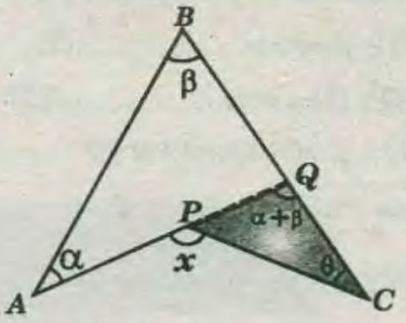
TEOREMA 8 :



$\boxed{x=\alpha+\beta+\theta}$

DEMOSTRACIÓN :

* PRIMER MÉTODO :

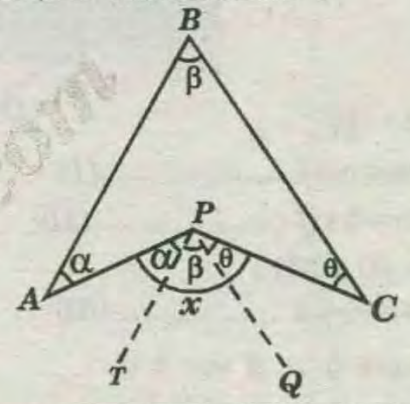


* Se prolonga $\overline{AP}$ hasta Q

* En $\triangle ABQ : \Rightarrow m\sphericalangle PQC = \alpha+\beta$

* En $\triangle PQC : \Rightarrow \boxed{x=\alpha+\beta+\theta}$

* SEGUNDO MÉTODO :



* Por P se traza: $\overline{PT} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$

* Por ángulos alternos internos :

$$m\sphericalangle APT = \alpha \ \wedge \ m\sphericalangle QPC = \theta$$

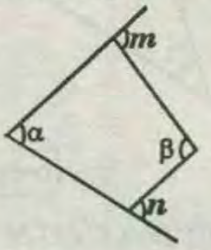
* Por ángulos de lados paralelos :

$$m\sphericalangle TPQ = \beta \Rightarrow m\sphericalangle ABC = \beta$$

* Por ángulos consecutivos , en P :

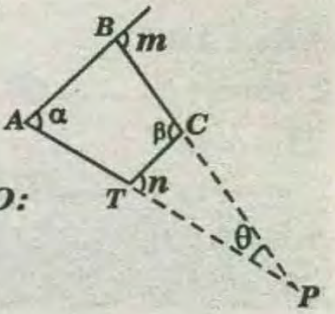
$\boxed{x=\alpha+\beta+\theta}$ .....l.q.q.d.

TEOREMA 9 :



$\boxed{\alpha+\beta=m+n}$

DEMOSTRACIÓN :



*PRIMER MÉTODO:

* Prolongamos $\overline{BC}$ y $\overline{AT}$

RESUELTOS-GRATIS2.com

hasta que se intersequen en P.

* Sea $m\sphericalangle TPC=\theta$.

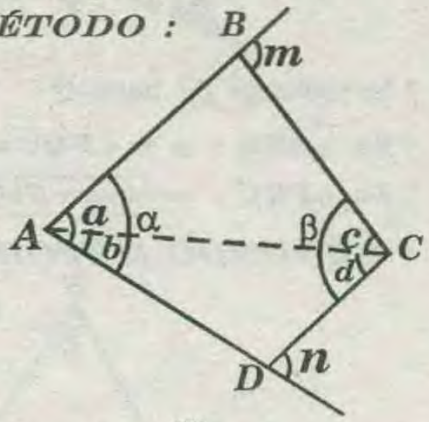
* En $\triangle TPC$: $\beta=\theta+n$.....(I)

* En $\triangle ABP$: $\theta+\alpha=m$.....(II)

* (I) y (II) : $\beta+\theta+\alpha=m+n+\theta$

$\Rightarrow \boxed{\alpha+\beta=m+n}$.....l.q.q.d.

SEGUNDO MÉTODO :



* Trazamos : $\overline{AC}$

$\triangle ABC : m=a+c$.....(I)

$\triangle ADC : n=b+d$.....(II)

* Sumando (I) y (II) :

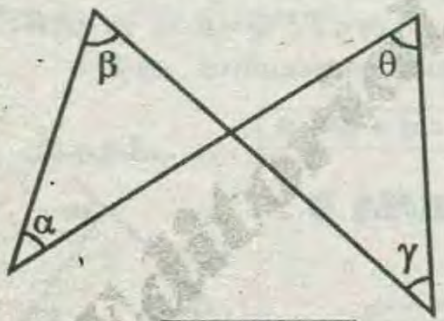
$m+n=a+b+c+d$ .....(III)

* Pero : $\alpha=a+b \wedge \beta=c+d$

* Reemplazando en (III) :

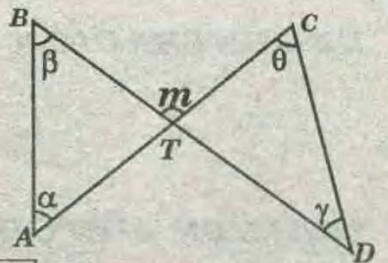
$\Rightarrow \boxed{m+n=\alpha+\beta}$.....l.q.q.d.

TEOREMA 10 :



$\Rightarrow \boxed{\alpha+\beta=\theta+\gamma}$

DEMOSTRACION :



* En $\triangle ABT$:

$m=\alpha+\beta$.....(I)

* En $\triangle ABT$:

$m=\theta+\gamma$ .....(II)

* De (I) y (II) : $\boxed{\alpha+\beta=\theta+\gamma}$.....l.q.q.d.

LÍNEAS NOTABLES

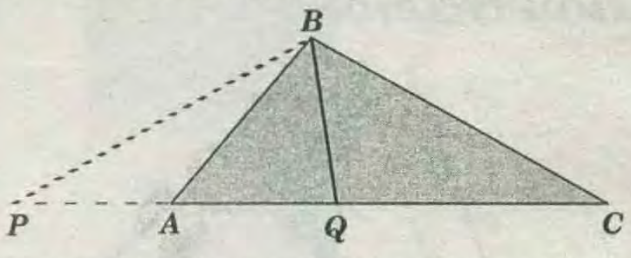
La líneas notables son aquellas que cumplen funciones específicas en el triángulo , dichas líneas son : ***Altura , Mediana , Mediatriz , Bisectriz interior , Bisectriz exterior.***

Puntos notables son : ***Ortocentro , Baricentro, Circuncentro , incentro*** y ***Excentro.***

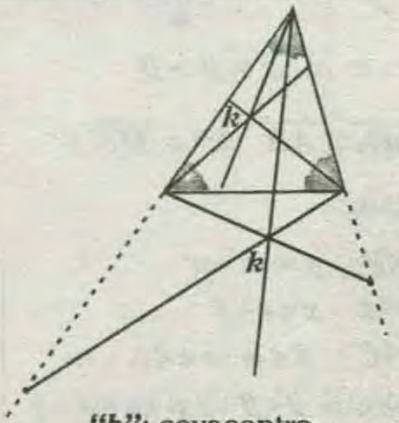
I) CEVIANA :

Es aquella recta que parte de un vértice y cae en cualquier punto del lado opuesto o de su prolongación.

* $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ son cevianas del triángulo ABC.



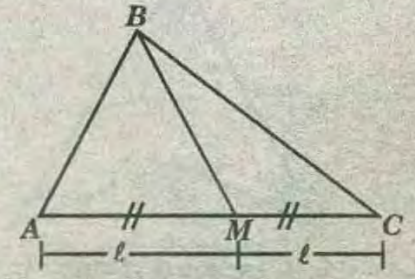
Todo triángulo tiene infinitas cevianas e infinitas cevacentros. Por lo tanto la ceviana y el cevacentro no son líneas ni puntos notables respectivamente . El nombre de ceviana se debe en honor al matemático italiano ***CEVA*** en ***1678***



"k": cevacentro

II) MEDIANA :

Es un segmento que une un vértice y el punto medio del lado opuesto. En la figura M es el punto medio de $\overline{AC}$, BM se llama mediana.



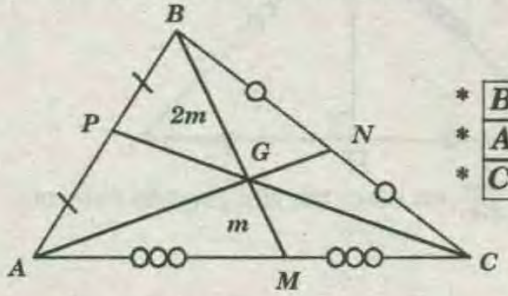
$\triangle ABC$:BM mediana relativa a $\overline{AC}$, $(AM = MC)$

Todo triángulo tiene tres medianas, trazadas de cada vértice.

BARICENTRO (G)

Llamado también ***centro de gravedad*** o ***gravicentro*** o centroíde , es el punto de concurrencia de las tres medianas de un triángulo.

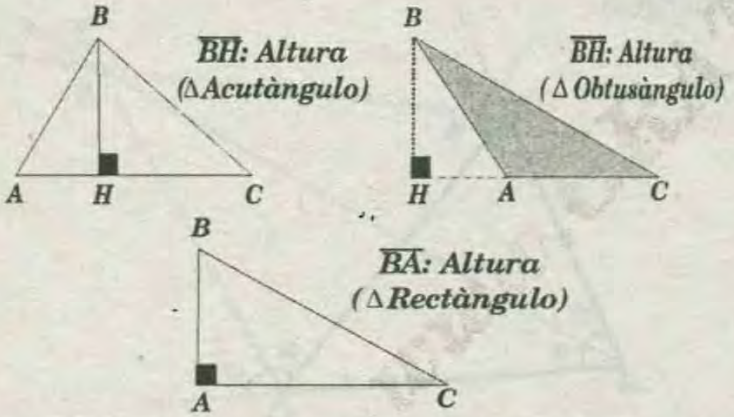
El baricentro , siempre es un punto interior al triángulo , divide a cada mediana en dos segmentos que están en la relación de *2* a *1*.



* $BG = 2(GM)$
* $AG = 2(GN)$
* $CG = 2(GP)$

III) ALTURA :

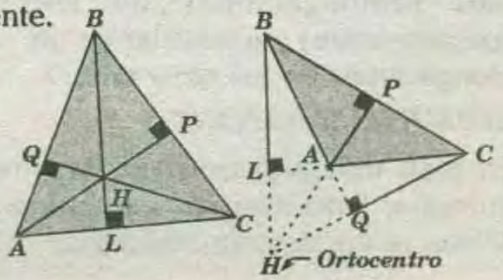
Es el segmento perpendicular trazado desde un vértice del triángulo a la recta que contiene al lado opuesto. En cada una de las siguientes figuras, el segmento $\overline{BH}$ es una altura del triángulo *ABC*.



Todo triángulo tiene tres alturas, trazadas de cada vértice.

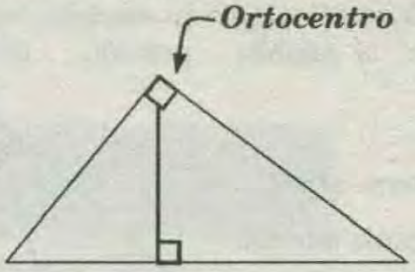
ORTOCENTRO

Es el punto de concurrencia de las alturas de un triángulo. El ortocentro es un punto que puede estar en el interior del triángulo , fuera de él o en el vértice del ángulo recto , según los triángulos sean Acutángulos, Obtusángulos y Rectángulos respectivamente.



Este punto tiene la propiedad de dividir a cada altura en dos segmentos cuyo producto es una constante.

* El Ortocentro de un triángulo rectángulo coincide con el vértice del ángulo recto.

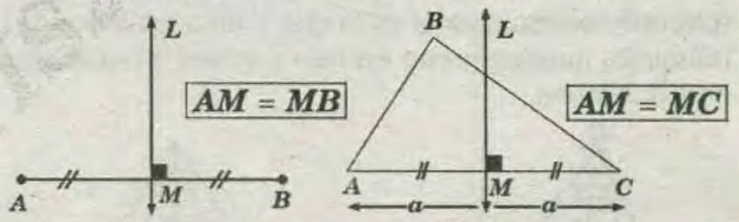


IV) MEDIATRIZ :

Es una recta perpendicular a un lado del triángulo en su punto medio , dicha recta se encuentra en el mismo plano que contiene al triángulo. Solo se puede medir aquella parte comprendida entre dos lados del triángulo .

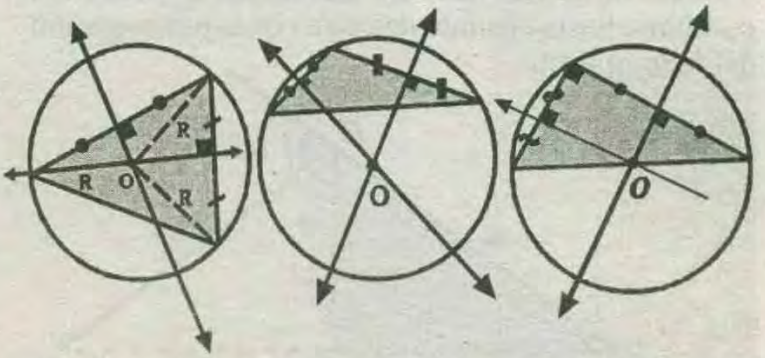
Todo triángulo tiene tres mediatrices, una de cada lado.

**** Para un segmento :*** **** Para un triángulo :***



CIRCUNCENTRO (O)

Es el punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo. El circuncentro es un punto que puede estar en el interior del triángulo , fuera de él o en el punto medio de la hipotenusa , según los triángulos sean Acutángulos , Obtusángulos y Rectángulos , respectivamente. Este punto tiene la propiedad de ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo (Circunferencia circunscrita, es la que pasa por los vértices del triángulo) y equidistan de sus vértices.

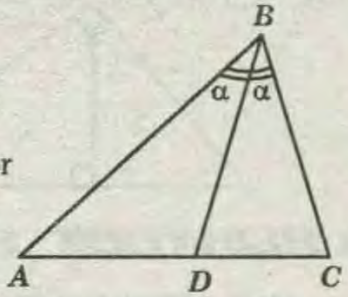


* " El circuncentro de un triángulo rectángulo , coincide con el punto medio de la hipotenusa".

V) BISECTRIZ INTERIOR :

Es el rayo que partiendo del vértice de un triángulo, divide al ángulo interior en ángulos de igual medida.

Para efectos de cálculo de su medida , se considera únicamente a aquella porción contenida en el triángulo .



Si: $m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle DBC$

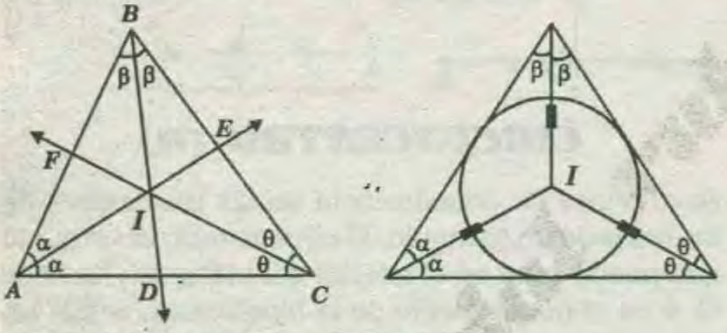
$\rightarrow \overline{BD}$:bisectriz interior

Relativa a $\overline{AC}$

Todo triángulo tiene tres bisectrices interiores, trazadas de cada vértice.

INCENTRO (I) :

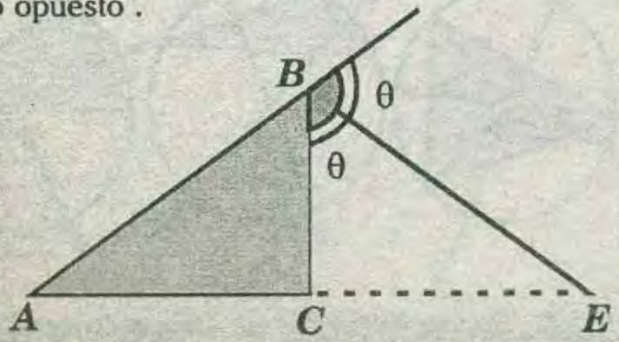
Es el punto de concurrencia de las bisectrices interiores. El Incentro , siempre es un punto interior al triángulo. Este punto tiene la propiedad de ser al centro de la circunferencia inscrita al triángulo (circunferencia inscrita es la que toca a los lados del triángulo, interiormente en tres puntos) y equidistar de los *3* lados.



I: *I* incentro del triángulo *ABC*

VI) BISECTRIZ EXTERIOR :

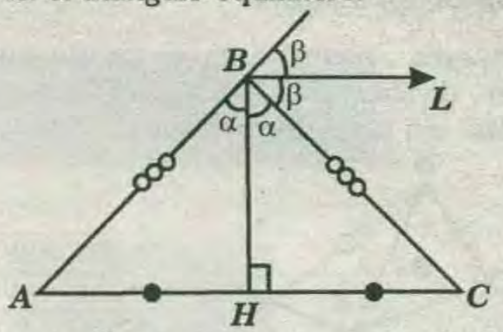
Es el rayo que partiendo del vértice de un triángulo, divide al ángulo exterior en *2* ángulos de igual medida. En la practica se mide desde el vértice del cuál parte hasta el punto de corte con la prolongación del lado opuesto .



$\overline{BE}$: Bisectriz de exterior relativa a $\overline{AC}$

NOTA : En un triángulo isósceles la bisectriz del ángulo externo desigual es paralelo a la base.

NOTA : En un triángulo isósceles, la altura relativa a la base es también mediana, bisectriz interior y segmento de recta mediatriz. Análogamente se cumple en el triángulo equilátero.



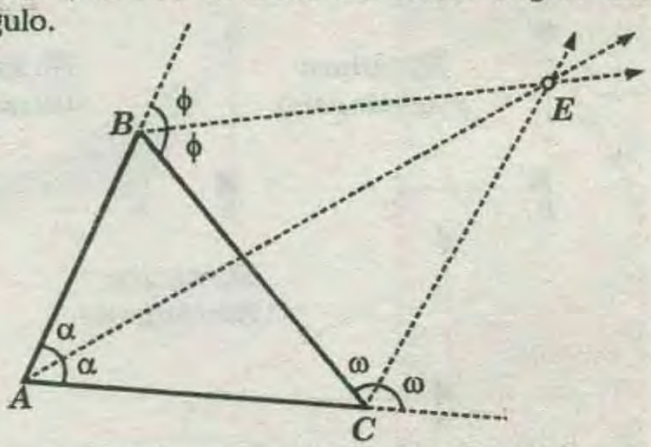
$\overline{AC}$ es base y $\overrightarrow{BL}$ es bisectriz del ángulo externo.

$\Rightarrow \overrightarrow{BL} // \overline{AC}$

$\overline{BH}$ es altura, mediana y bisectriz interior y segmento de recta mediatriz

EXCENTRO (E)

Es el punto de concurrencia de dos bisectrices exteriores, con la bisectriz del tercer ángulo del triángulo.



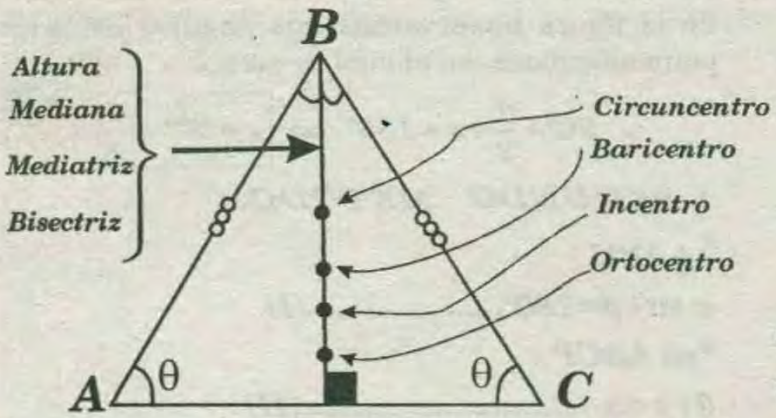
E: Excentro del triángulo *ABC* relativo al lado *BC*

* En todo triángulo se puede determinar tres excentros, uno relativo a cada lado.

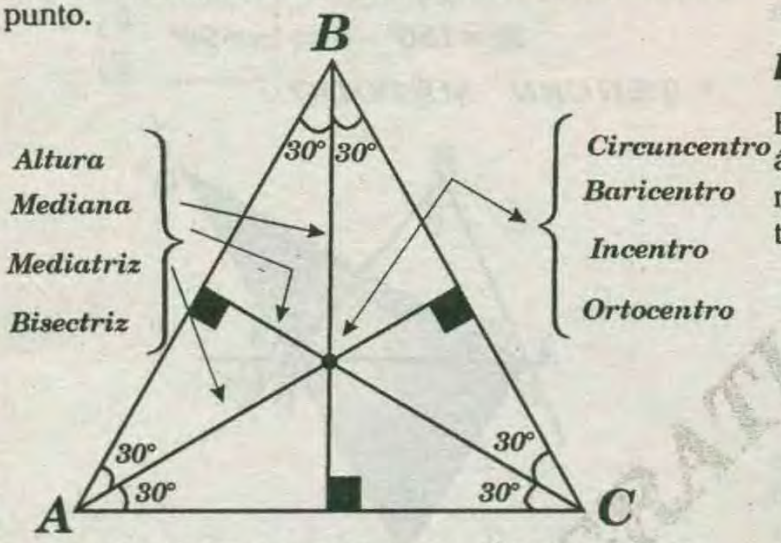
* El excentro es siempre, un punto exterior al triángulo. Este punto tiene la propiedad de ser el centro de la circunferencia exinscrita al triángulo (circunferencia exinscrita, es la que toca a un lado y a las prolongaciones de los tres puntos respectivamente) y equidistar de un lado y de las prolongaciones de los otros dos.

OBSERVACIONES :

* En todo triángulo isósceles las líneas notables relativas al lado desigual coinciden y los puntos notables se encuentran alineados.



* En el triángulo equilátero las líneas notables relativas a cualquiera de sus lados coinciden y los puntos notables también coinciden en un mismo punto.



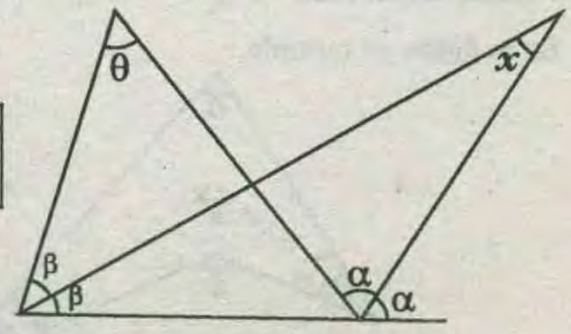
PROPIEDADES DE ÁNGULOS DETERMINADOS POR BISECTRICES

PROPIEDAD 1 :

El menor ángulo formado por una bisectriz exterior y la prolongación de una bisectriz interior , su medida es igual a la mitad de la medida del tercer ángulo interior .

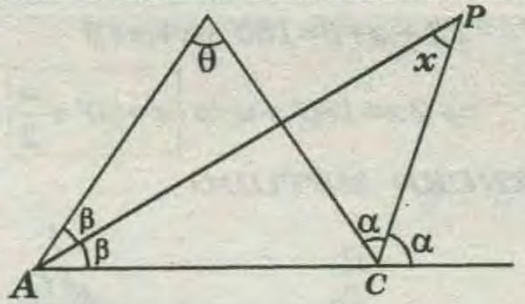
TEOREMAS :

I)



$x=\frac{\theta}{2}$

DEMOSTRACION :

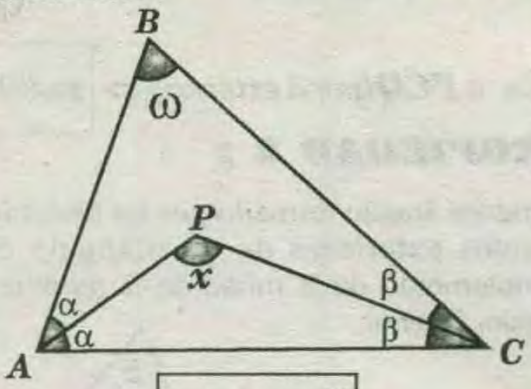


- $\triangle APC : \alpha=\beta+x$ .....(I)
- $\triangle ABC : 2\alpha=2\beta+\theta$ .....(II)
- (I) en (II): $2(\beta+x)=2\beta+\theta$

$\Rightarrow 2\beta+2x=2\beta+\theta \Rightarrow \boxed{x=\frac{\theta}{2}}$ .....l.q.q.d.

PROPIEDAD 2 :

El mayor ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos interiores de un triángulo, es obtuso, cuya medida es igual a 90° más la mitad de la medida del tercer ángulo interior .



$\boxed{x=90°+\frac{\omega}{2}}$

DEMOSTRACIÓN :

PRIMER MÉTODO :

* En el $\triangle ABC : 2\alpha+2\beta+\omega+180°$ .....(I)

* En el $\triangle APC : \alpha+\beta+x=180°$ .....(II)

* Reemplazando (II) en (I):

$2(180°-x)+\omega=180° \Rightarrow 360°-2x+\omega=180°$

$\Rightarrow 180°+\omega=2x \Rightarrow \boxed{x=90°+\frac{\omega}{2}}$

SEGUNDO MÉTODO :

$\triangle ABCP : x=\alpha+\omega+\beta$ ..... (I)

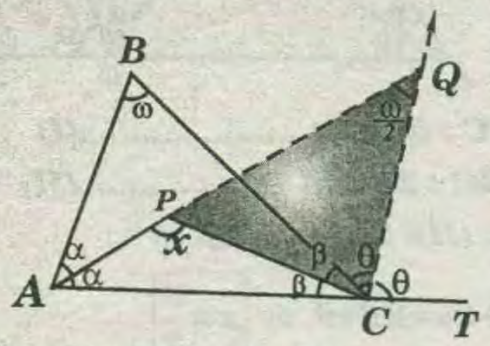
*En $\triangle APC : x+\alpha+\beta=180°$ .....(II)

* Sumando (I) y (II) :

$$2\beta+\alpha+\beta=180°+\alpha+\omega+\beta$$

$$\Rightarrow 2x=180°+\omega \Rightarrow \boxed{x=90°+\frac{\omega}{2}}$$

*** TERCER MÉTODO :**



* Trazamos la bisectriz del $\sphericalangle BCT$ que interseca a la prolongación de $\overline{AP}$ en Q.

* por las propiedad *1* :

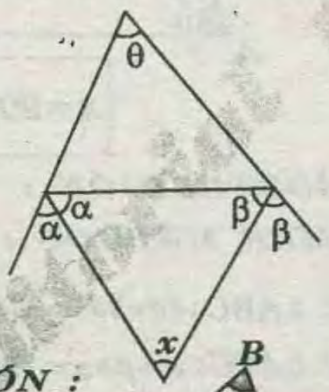
$$m\sphericalangle AQC=\frac{\omega}{2}$$

* *En* C : $2\beta+2\theta=180° \Rightarrow m\sphericalangle PCQ=\beta+\theta=90°$

* *En* $\triangle PCQ(por\sphericalangle externo) \Rightarrow \boxed{x=90°+\frac{\omega}{2}}$

PROPIEDAD 3 :

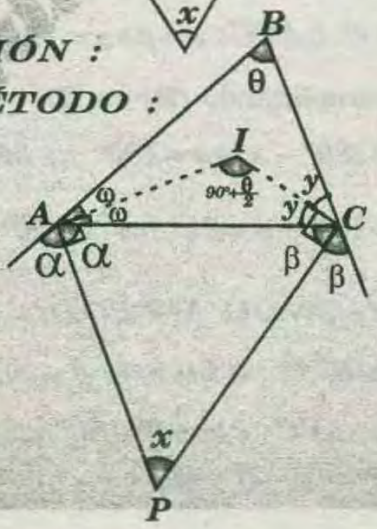
El menor ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos exteriores de un triángulo es igual al complemento de la mitad de la medida del tercer ángulo, interior.



$$\boxed{x=90°-\frac{\theta}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :

*** PRIMER MÉTODO :**



En la figura observamos dos ángulos de lados perpendiculares, en el cual se cumple :

$$90°+\frac{\theta}{2}+x=180° \Rightarrow \boxed{x=90°-\frac{\theta}{2}}$$

*** SEGUNDO MÉTODO :**

* $\triangle APC$:

$x+\alpha+\beta=180°$.....*(I)*

* *en* $ABCP$:

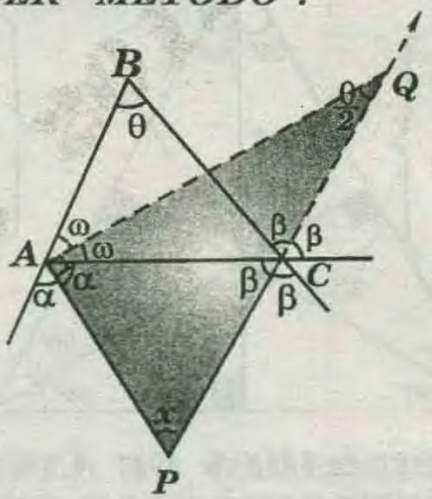
$\theta+x=a+\beta$.....*(II)*

* Sumando *(I)* y *(II)*:

$$\theta+x+x+\alpha+\beta=180°+\alpha+\beta$$

$$2x=180°-\theta \Rightarrow \boxed{x=90°-\frac{\theta}{2}}$$

*** TERCER MÉTODO :**



* Prolongamos $\overline{PC}$ y trazamos la bisectriz del $\sphericalangle BAC$ que se intersecan en Q .

* Por la propiedad *1*:

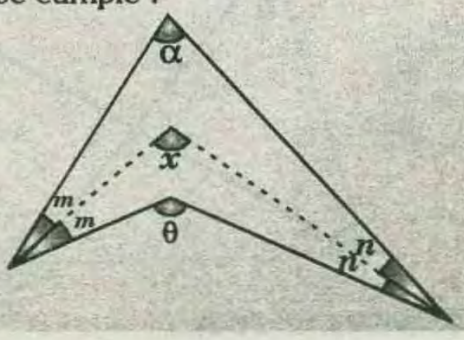
$$m\sphericalangle AQC=\frac{\theta}{2}$$

* *Como:* $2\omega+2\alpha=180° \Rightarrow \omega+\theta=90°=m\sphericalangle PAQ$

* En $\triangle AQP$: $x+\frac{\theta}{2}=90° \Rightarrow \boxed{x=90°-\frac{\theta}{2}}$

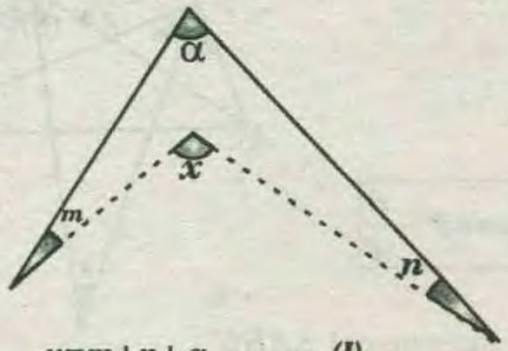
PROPIEDAD 4 :

En la figura se cumple :

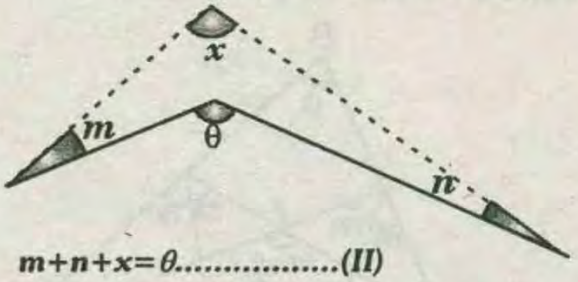


$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{\alpha+\theta}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :



$x=m+n+\alpha$.....(I)

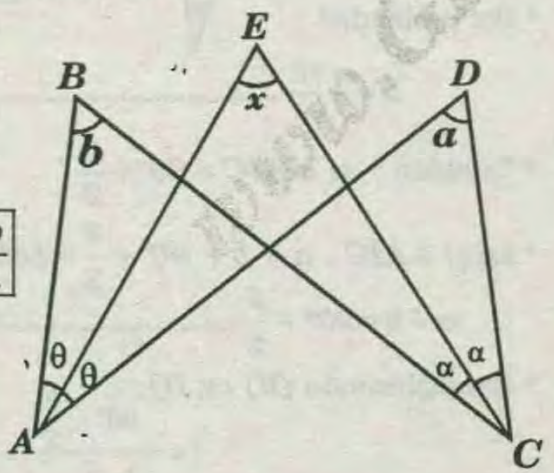


$m+n+x=\theta$.....(II)

* Sumando *(I)* y *(II)* : $2x=\alpha+\theta$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{\alpha+\theta}{2}}$$

PROPIEDAD 5 :



$$\boxed{x=\frac{a+b}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN

**** PRIMER MÉTODO :***

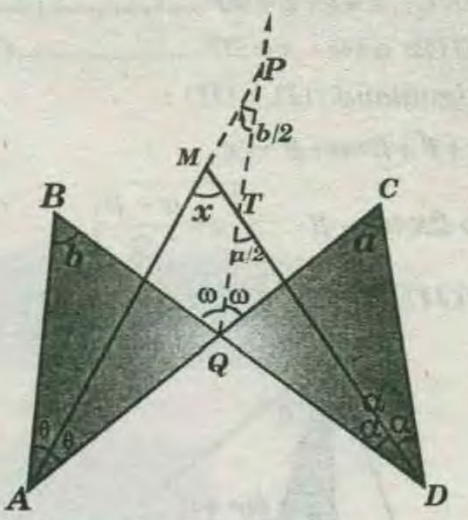
$\bowtie$ *BAEC:* $b+\theta=x+\alpha$.....(I)

$\bowtie$ *AECD:* $a+\alpha=x+\theta$.....(II)

* *De (I)+(II) :*

$$a+b+\alpha+\theta=2x+\alpha+\theta \Rightarrow \boxed{x=\frac{a+b}{2}}$$

SEGUNDO MÉTODO :



Trazamos la bisectriz del $\sphericalangle BQC$ que interceca a $\overline{DM}$ en *T* y a la prolongación de $\overline{AM}$ en *P*

* En $\triangle ABQ$ por la propiedad *1 :*

$$m\sphericalangle APQ=\frac{b}{2}$$

* En $\triangle QCD$ por la propiedad *1 :*

$$m\sphericalangle QTD=\frac{a}{2}$$

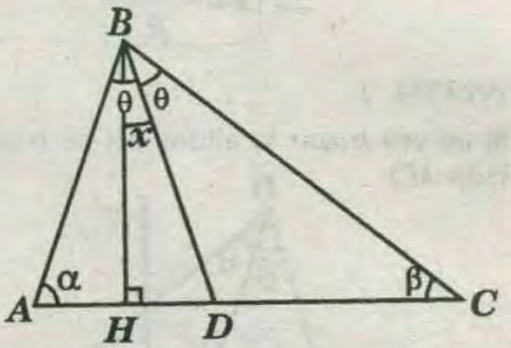
* En $\triangle PMT$ (por $\sphericalangle$ externo) :

$$x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{a+b}{2}}$$

PROPIEDAD 6 :

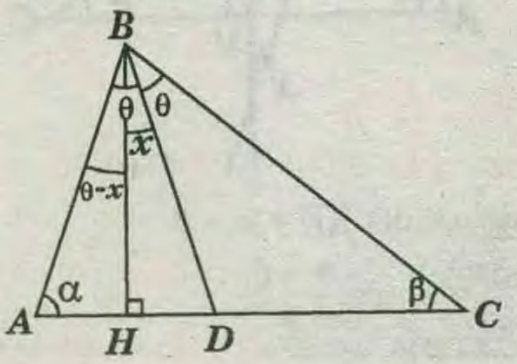
* Si: $\alpha>\beta$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{\alpha-\beta}{2}}$$



DEMOSTRACIÓN :

**** PRIMER MÉTODO :***



FREE GRATIS

$\triangle BHC$: $x+\theta+\beta=90°$ .....(I)

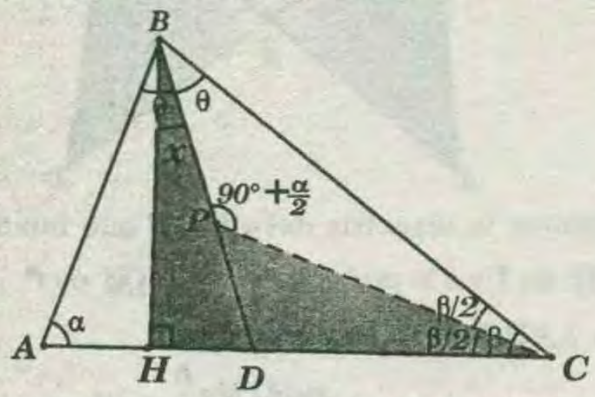
$\triangle AHB$: $\alpha+\theta-x=90°$ .....(II)

* *Igualando (I) y (II) :*

$x+\cancel{\theta}+\beta=\alpha+\cancel{\theta}-x$

$\Rightarrow 2x=\alpha-\beta \Rightarrow \boxed{x=\frac{\alpha-\beta}{2}}$

· ***SEGUNDO MÉTODO :***



* Trazamos la bisectriz del $\sphericalangle BCA$ que interseca a $\overline{BD}$ en P.

* En $\triangle BCA$ por la propiedad 2 :

$m\sphericalangle BCP=90°+\frac{\alpha}{2}$

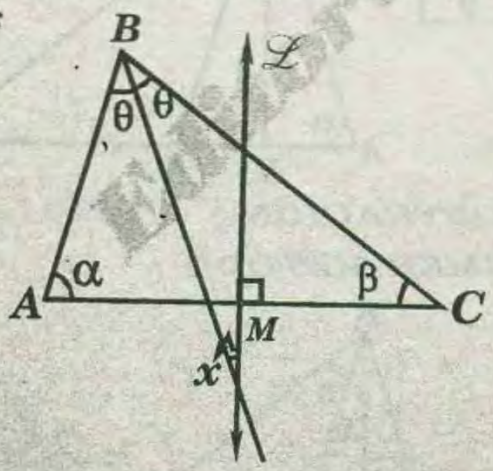
* $\triangle BHCP$:

$$90°+\frac{\alpha}{2}=x+90°+\frac{\beta}{2} \Rightarrow x=\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

NOTA :

Si en vez trazar la altura BH se traza mediatriz del lado AC:

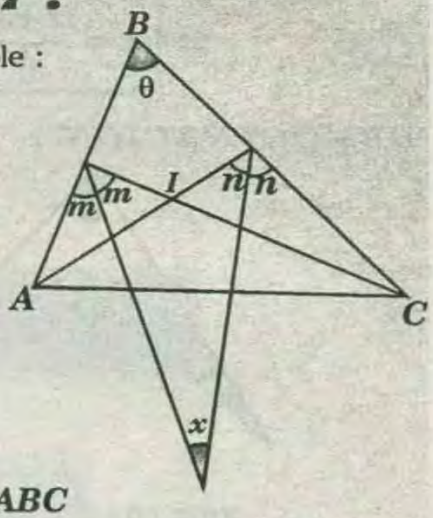


$\overrightarrow{\mathscr{L}}$: mediatriz del $\overline{AC}$ y $\alpha > \beta$

se cumple : $x=\frac{\alpha-\beta}{2}$

PROPIEDAD 7 :

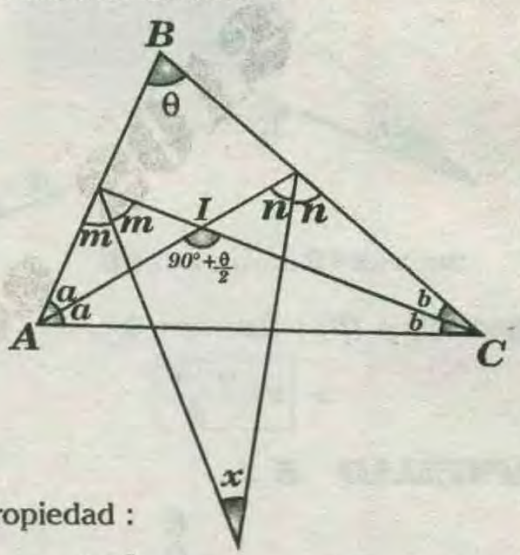
En la figura se cumple :



$$\boxed{x=45°-\frac{\theta}{4}}$$

$I \Rightarrow$ incentro del $\triangle ABC$

DÉMOSTRACIÓN :



* Por propiedad :

$$x=\frac{a+b}{2} \text{ .....(I)}$$

* También : $m\sphericalangle AIC=90°+\frac{\theta}{2}$

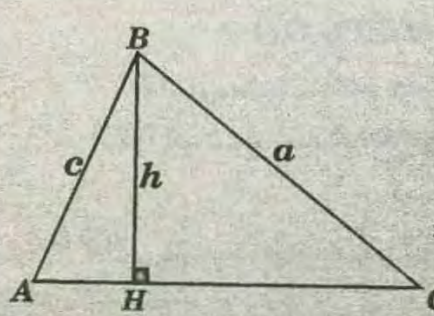
* En el $\triangle AIC$: $a+b+90°+\frac{\theta}{2}=180°$

$$a+b=90°-\frac{\theta}{2} \text{ .....(II)}$$

* Reemplazando (II) en (I):

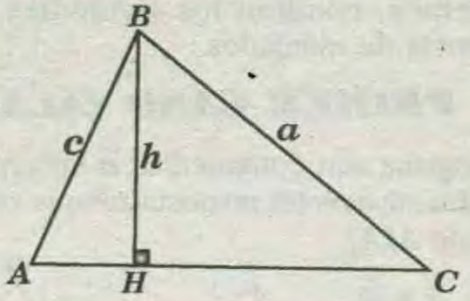
$$x=\frac{90°-\frac{\theta}{2}}{2} \Rightarrow \boxed{x=45°-\frac{\theta}{4}}$$

* En la figura se cumple :



$$\Rightarrow h<\frac{a+c}{2}$$

DEMOSTRACIÓN :



* En el $\triangle BHC$: $h<a$ .....*(I)*

* En el $\triangle ABH$: $h<c$ .....*(II)*

* Sumando *(I)* y *(II)* : $2h < a + c$

$$\Rightarrow \boxed{h<\frac{a+c}{2}}$$

CONGRUENCIA DE FIGURAS

Al observar en nuestro entorno un conjunto de objetos realizados por el hombre , estas tienen determinadas características en forma y tamaños que son las mismas.

Entonces , a esas formas y tamaño de los objetos que percibimos la geometría las estudia como la congruencia de las figuras.

Sobre dos conjuntos de puntos *A* y *B* (en una recta, en el plano o en el espacio) se dice que son congruentes, si existe una isometría que permita que un conjunto coincida con el otro.

NOTACIÓN :

$A \cong B$ se lee el conjunto *A* es congruente al conjunto *B*.

* Se afirma que dos conjuntos de puntos *A* y *B* son congruentes por descomposición finita, si

$$A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i ; A_i \cap A_j=\phi \text{ para } i \neq j$$

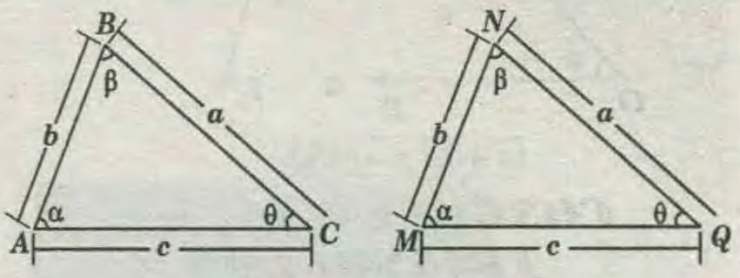
$$A=\bigcup_{i=1}^{n} B_i ; B_i \cap B_j=\phi \text{ para } i \neq j$$

$$A \cong B_i (i=1;2;....;n) \Rightarrow A \cong B$$

Esto es, *A* y *B* representan uniones de un número finito *n* de subconjuntos que son congruentes por pares.

Así, dos segmentos de igual longitud serán congruentes, dos ángulos de igual medida serán congruentes, dos triángulos equiláteros cuyos lados tienen igual longitud son congruentes, etc.

Entonces la congruencia es el estudio analítico de la comparación de dos o más figuras, para ello es necesario analizar sus elementos con los que se identifican.



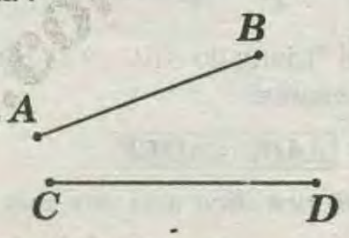
$\triangle ABC \cong \triangle MNQ$

CONGRUENCIA DE SEGMENTOS

Dos segmentos son congruentes , si tienen la misma longitud.

EJEMPLO:

Si $AB = CD$, entonces $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$ y se denota :

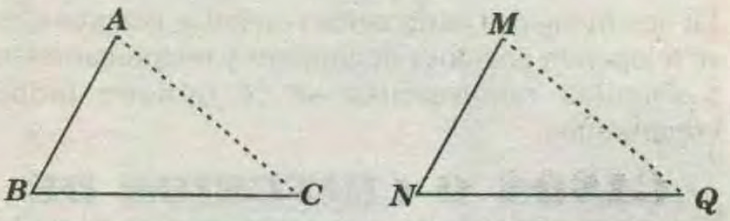


$$\boxed{\overline{AB} \cong \overline{CD}}$$

POSTULADO :

Si dos pares angulares son congruentes entonces los segmentos que unen los extremos libres de sus lados son congruentes, además cada uno de los pares angulares que forman estos segmentos con los lados de los pares angulares son respectivamente de igual medida.

Si $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle MNQ$ consideramos $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ y $\overline{BC} \cong \overline{NQ}$, entonces $\overline{AC} \cong \overline{MQ}$; $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle NMQ$ y $m\sphericalangle BCD = NQM$.

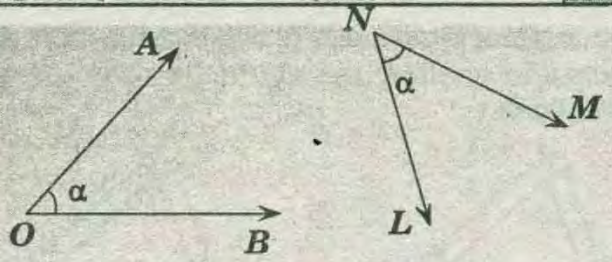


CONGRUENCIA DE ÁNGULOS

Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

EJEMPLO:

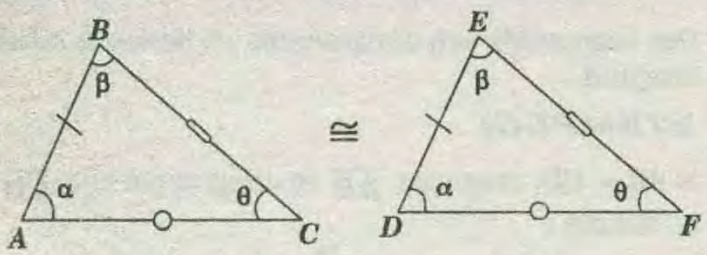
Si $m\sphericalangle AOB = m\sphericalangle MNL$, entonces el $\sphericalangle AOB$ es congruente con el MNL y se denota :



$\boxed{\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle MNL}$

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos *ABC* y *DEF* son congruentes si sus lados y ángulos son respectivamente congruentes.



Para indicar que el "triangulo *ABC* es congruente al triangulo *DEF* ; se escribe :

$\boxed{\triangle ABC \cong \triangle DEF}$

Esta sola expresión nos dice a la vez seis cosas, a saber

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, ó $AB = DE$
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$, ó $BC = EF$
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$, ó $AC = DF$

$\sphericalangle A \cong \sphericalangle D$, ó $m\sphericalangle A = m\sphericalangle D$
$\sphericalangle B \cong \sphericalangle E$, ó $m\sphericalangle B = m\sphericalangle E$
$\sphericalangle C \cong \sphericalangle F$, ó $m\sphericalangle C = m\sphericalangle F$

En cada una de las seis líneas anteriores , la congruencia de la izquierda significa lo mismo que la igualdad de la derecha. Podemos por tanto , utilizar una u otra notación según nos convenga.

En dos triángulos congruentes , a lados congruentes se le oponen ángulos congruentes y recíprocamente a ángulos congruentes se le oponen lados congruentes.

CASOS O CRITERIOS DE CONGRUENCIA

Para reconocer si dos triángulos son congruentes, no necesariamente los seis pares de elementos correspondientes deben de ser congruentes, si no simplemente tres pares de ellos, entre los que por lo menos deben figurar un par de lados correspondientes, esto implica la congruencia de los restantes.

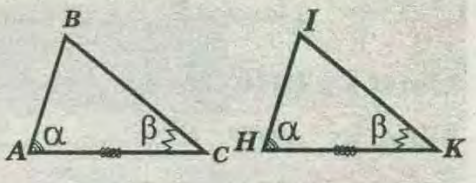
De acuerdo con la naturaleza de los elementos congruentes, resultan los siguientes casos de congruencia de triángulos.

PRIMER CASO (ALA)

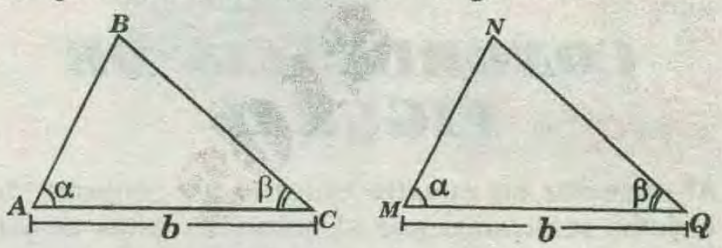
Dos triángulos son congruentes si tienen un lado y los ángulos adyacentes respectivamente congruentes (postulado *ALA*).

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{H} \\ \overline{AC} = \overline{HK} \\ \hat{C} = \hat{K} \end{cases}$$

$\rightarrow \boxed{\triangle ABC \cong \triangle HIK}$



Es decir son congruentes si tienen dos medidas angulares respectivamente iguales y el lado comprendido entre ellos son congruentes.



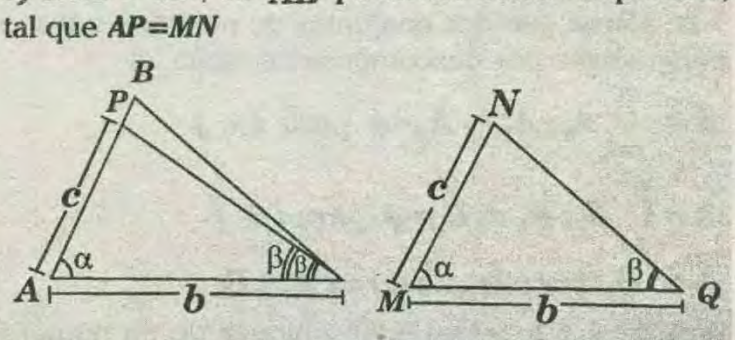
Si $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle NMQ = \alpha ; m\sphericalangle BCA = m\sphericalangle NQM = \beta$ y $\overline{AC} \cong \overline{MQ} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNQ$

DEMOSTRACIÓN :

* Como $\overline{AC} \cong \overline{MQ}$ y hacemos coincidir $A \leftrightarrow M$ y $C \leftrightarrow Q$ para que $ABC \leftrightarrow MNQ$, bastará probar que *B* y *N* también coincidan. Para ello bastará, demostrar que $AB = MN$ ó $CB = QN$.

* Suponiendo que $AB \neq MN$, tenemos dos posibilidades :

1) Si $AB > MN$, en $\overline{AB}$ podemos ubicar un punto *P*, tal que $AP = MN$



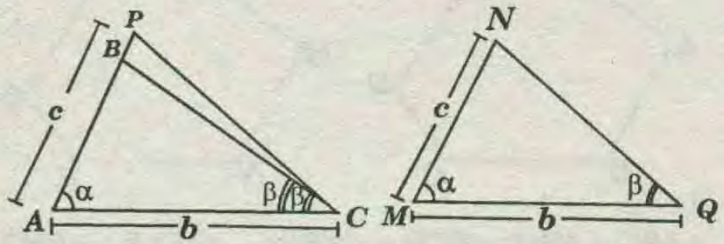
* Del postulado de pares angulares congruentes, $m\sphericalangle PCA = m\sphericalangle NQM = \beta$. No obstante, como $m\sphericalangle BCA = \beta$, *P* coincide con *B(P=B)*, además $\triangle APC \cong \triangle MNQ \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNQ$.

2) Si $AB < MN$, en la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica el punto *P* , tal que $AP = MN$.

* Del postulado de pares angulares congruentes, destacamos que $m\sphericalangle PCA = m\sphericalangle NQM = \beta$; pero $m\sphericalangle BCA = \beta$. Concluimos así que P coincide con $B(P=B)$

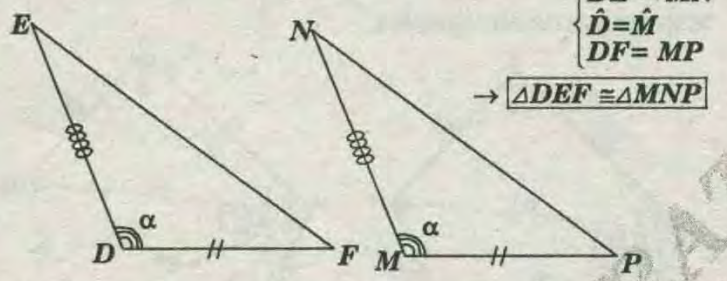
además al :

$$\triangle APC \cong \triangle MNQ$$
$$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNQ$$



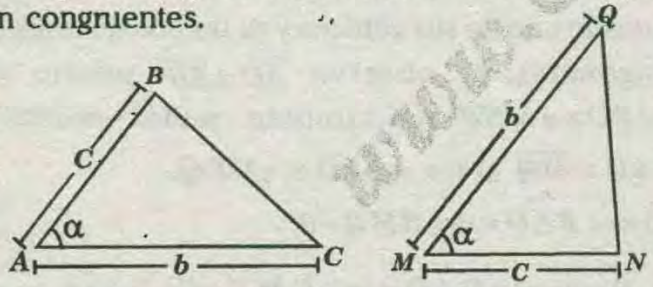
SEGUNDO CASO (LAL)

Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes (postulado *LAL*)



$$\begin{cases} DE = MN \\ \hat{D} = \hat{M} \\ DF = MP \end{cases} \rightarrow \boxed{\triangle DEF \cong \triangle MNP}$$

Es decir si dos triángulos tienen respectivamente un par angular congruente, entonces dichos triángulos son congruentes.



Si: $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle NMQ \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNQ$

DEMOSTRACIÓN :

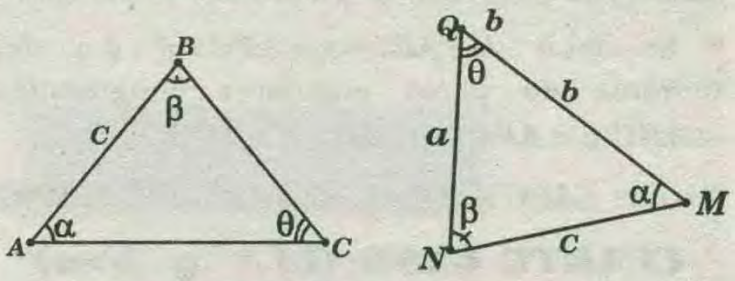
* Del postulado de pares angulares congruentes $BC=NQ$, $m\angle ABC = m\angle MNQ$ y $m\angle ACB = m\angle MQN$ observamos que la correspondencia $A \leftrightarrow M, B \leftrightarrow N, C \leftrightarrow Q$ cumple con nuestro propósito de hacer coincidir los triángulos y por lo tanto $\triangle ABC \cong \triangle MNQ$.

* Una correspondencia $ABC \leftrightarrow MNQ$ entre dos triángulos (con vértices A ; B ; C y M ; N ; Q respectivamente) es una congruencia si y solo si $AB = MN = c$; $BC = NQ = a$ y $AC = MQ = b$.

$m\angle BAC = m\angle NMQ = \alpha$

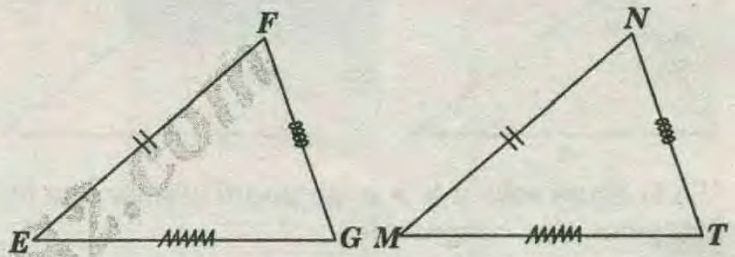
$m\angle ABC = m\angle MNQ = \beta$

$m\angle ACB = m\angle MQN = \theta$



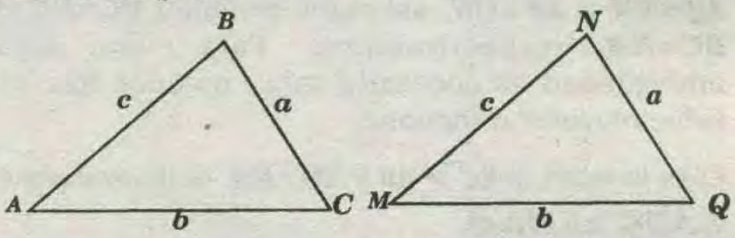
TERCER CASO (LLL)

Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente congruentes (postulado *LLL*).



$$\begin{cases} EF = MN \\ EG = MT \\ FG = NT \end{cases} \rightarrow \boxed{\triangle EFG = \triangle MNT}$$

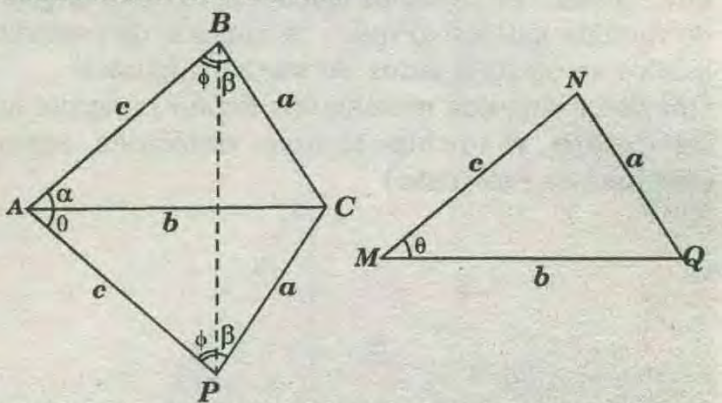
Es decir son congruentes si sus tres lados tienen la misma longitud.



Si $\overline{BC} \cong \overline{NQ}$; $\overline{AC} \cong \overline{MQ}$ y $\overline{AB} \cong \overline{MN}$

$$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNQ$$

DEMOSTRACIÓN :



* Construimos exteriormente al $\triangle ABC$ el triángulo APC congruente al $\triangle MNQ$, así :

TUTOR GRATIS.com

$m\sphericalangle PAC=m\sphericalangle NMQ=\theta$, $AP=MN=c$ y $PC=NQ=a$.

* Luego en los triángulos BCP y BAP como $BC=CP=a$ y $AB=AP=c$.

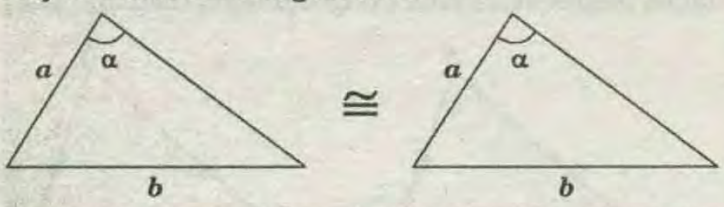
$\Rightarrow m\sphericalangle CBP=m\sphericalangle CPB=\beta$ y $m\sphericalangle ABP=m\sphericalangle APB=\phi$.

* Es decir $m\sphericalangle ABC=m\sphericalangle APC=\beta+\phi$ y del teorema de pares angulares congruentes $\sphericalangle ABC\cong\sphericalangle APC$. $\Rightarrow\triangle ABC\cong\triangle APC$

*Ya que $\triangle APC\cong\triangle MNQ$, entonces $\triangle ABC\cong\triangle MNQ$

CUARTO CASO (LLA y b>a)

Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de dichos lados respectivamente congruentes.



*En la figura solo si $b > a$, se podrá afirmar que los triángulos son congruentes.

NOTA :

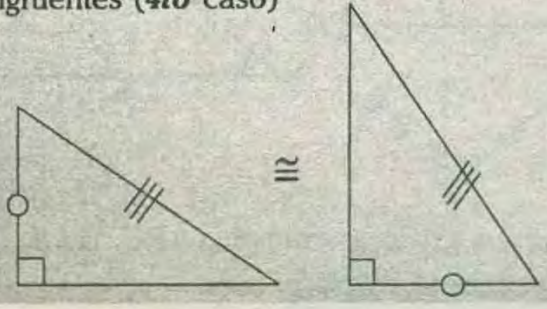
El hecho de que los triángulos sean congruentes implica que podría suceder que $\triangle ABC\cong\triangle MNQ$ ∨ $\triangle ABC\cong\triangle QNM$; es decir , $AB=NM$ o $AB=QN$, así como también $BC=NQ$ o $BC=NM$, respectivamente. Para evitar esta ambigüedad es necesario saber quiénes son los lados mayores o menores.

* Por lo tanto, si $BC > AB$ y $NQ>MN$, definitivamente $\triangle ABC\cong\triangle MNQ$.

OBSERVACIÓNES :

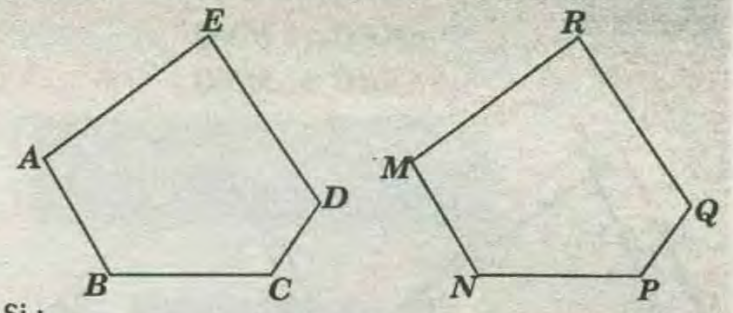
* Al establecer la congruencia entre dos triángulos por alguno de los casos mencionados se cumple que, "a lados de medidas iguales se oponen ángulos de medida iguales" o que : "a ángulos de medidas iguales se oponen lados de medidas iguales".

* Si dos triángulos rectángulos tienen congruentes un cateto y la hipotenusa entonces serán congruentes (*4to* caso)



POLIGONOS CONGRUENTES

Dos polígonos son congruentes si sus pares angulares tomados consecutivamente son respectivamente congruentes.



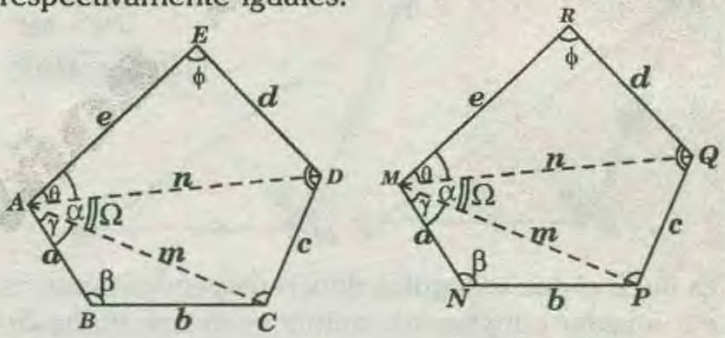
Si :

$\sphericalangle ABC\cong MNP;\sphericalangle BCD\cong\sphericalangle NPQ;.....;\sphericalangle EAB\cong\sphericalangle RMN$

$\Rightarrow Polígono_{(ABCDE)}\cong Polígono_{(MNPQR)}$

DEMOSTRACION :

Si los pares angulares tomados consecutivamente son congruentes , ello garantiza que las longitudes de sus lados y sus medidas angulares sean respectivamente iguales.



Si desde uno de sus vértices y su homólogo trazamos diagonales, se observa $\overline{AC}\cong\overline{MP}$ puesto que $\sphericalangle ABC\cong\sphericalangle MNP$. Así también $m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle NMP=\gamma$ y $AD\cong\overline{MQ}$ al ser $\sphericalangle AED\cong\sphericalangle MRQ$.

Así $m\sphericalangle EAD=m\sphericalangle RMQ=\theta$.

Es decir $m\sphericalangle DAC=m\sphericalangle QMP=\Omega$, pero como $AC=MP=m$ y $AD=MQ=n$. $\Rightarrow\sphericalangle DAC\cong\sphericalangle OMP$

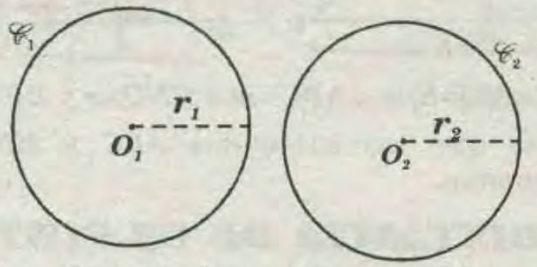
Por lo tanto $CD=PQ$; $m\sphericalangle ADC=m\sphericalangle MQP$ y $m\sphericalangle ACD=m\sphericalangle MPQ$ lo cual garantiza que los polígonos $ABCDE$ y $MNPQR$ son congruentes.

De igual manera se puede generalizar para polígonos de n lados $n\in\mathbb{Z}^+$ y $n\geq 3$

CIRCUNFERENCIAS CONGRUENTES

Si un polígono es regular (lados congruentes y pares angulares fomados por los lados también

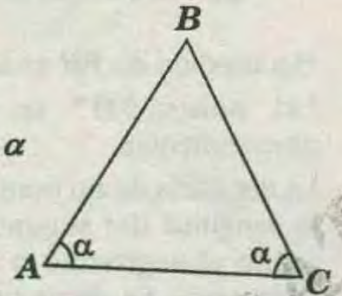
congruentes) y el número de lados tiende al infinito en el límite, el polígono regular se aprecia como una circunferencia. Por lo tanto, para que dos circunferencia sean congruentes bastará que sus radios tengan la misma longitud.



Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ circunferencias de radios r_1 y r_2, respectivamente. Si $r_1=r_2 \Rightarrow \mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2$

TEOREMA :

Si en un triángulo dos de sus medidas angulares son iguales , entonces los lados que se oponen a dichos ángulos son congruentes.



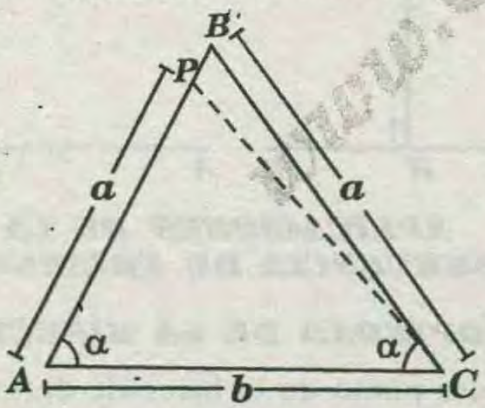
En triangulo *ABC*, si :

$m\sphericalangle CAB = m\sphericalangle ACB = \alpha$

$\Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{BC}$

DEMOSTRACIÓN :

* Para que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, bastará demostrar que $AB=BC$



* Para ello, partimos que $BC \neq AB$ y si demostramos que lo supuesto es contradictorio, entonces quedará demostrado el teorema.

Si $BC \neq AB$, contamos con dos posibilidades:

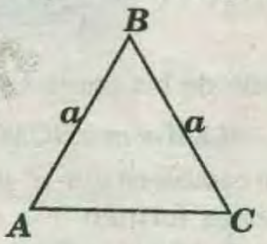
1) Si $AB>BC$, entonces en $\overline{AB}$ se puede ubicar un punto P, tal que $AP=BC$ y resulta así $\sphericalangle PAC \cong \sphericalangle BCA$. En consecuencia, $m\sphericalangle PCA=m\sphericalangle BAC=\alpha$, pero como $m\sphericalangle BCA=\alpha$ y al estar P entre A y B la medida debe ser mayor que $m\sphericalangle PCA$, se observa que es contradictorio.

2) Si $AB< BC$, esto es lo mismo que $BC>AB$, entonces en $\overline{BC}$ se puede ubicar un punto Q, tal que $CQ=AP$. Haciendo un análisis análogo al caso *1* , concluimos que lo supuesto también es contradictorio.

* De *(1)* y *(2)* queda demostrado que $AB=BC$ y por ende $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

TEOREMA DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES

Si un triángulo tiene dos lados de igual longitud, entonces los pares angulares formados por dichos lados y el lado desigual son congruentes.

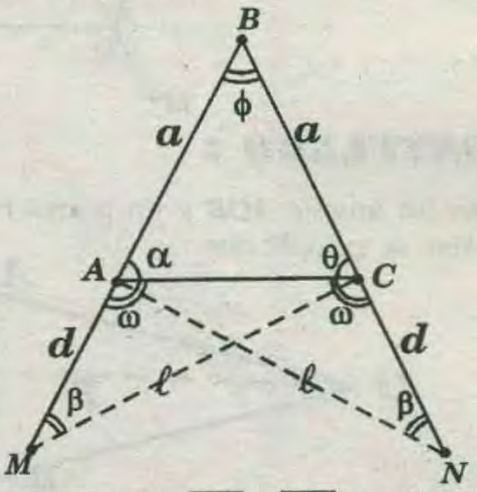


En el triángulo *ABC*, si $AB=BC=a$

$\Rightarrow m\angle BAC = m\angle BCA$

DEMOSTRACIÓN :

* Para que $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle BCA$, bastará demostrar que $m\angle BAC = m\angle BCA$.



Para ello, prolongamos $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ hasta M y N respectivamente, tal que $AM=CN=d$. De ahí que $BM=BN=a+d$.

* Por lo tanto : $\sphericalangle CBM \cong \sphericalangle ABN$

* Por el postulado de los pares angulares

$CM=AN=\ell$

$m\angle CMB = m\angle ANB = \beta$

* Luego, $\sphericalangle AMC \cong \sphericalangle CNB$

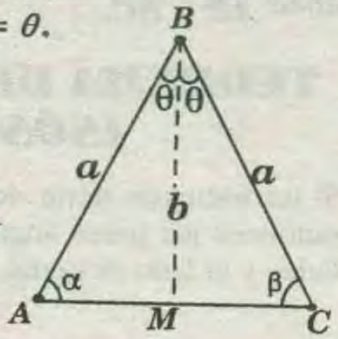
* Por el postulado de los pares angulares :

$$m\sphericalangle MAC = m\sphericalangle NCA = \omega$$

* Finalmente $\omega + \alpha = \omega + \theta = 180°$, de donde $\alpha = \theta$.

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle BCA$$

* Otra manera de demostrar es cuando en el triángulo *ABC (AB=BC)* trazamos $\overline{BM}$ con *M en* $\overline{AC}$ tal que $m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle MBC = \theta$.

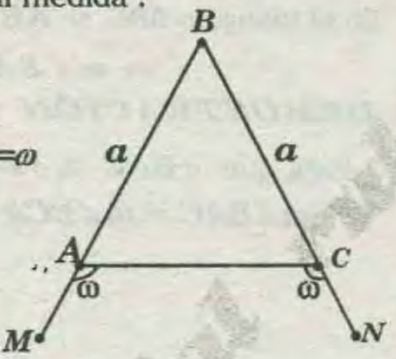


$\Rightarrow m\sphericalangle ABM \cong m\sphericalangle CBM$

* Por el postulado de los pares angulares :

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAM = m\sphericalangle BCM \Rightarrow \alpha = \beta$$

De lo anterior se establece que al prolongar los lados congruentes, estos forman con el lado desigual pares angulares de igual medida .

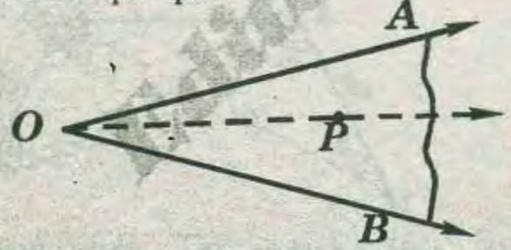


$\triangle ABC$, si $AB=BC=a$

$\Rightarrow m\angle MAC = m\angle NCA = \omega$

POSTULADO :

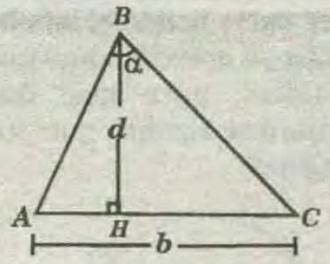
Dado un ángulo *AOB* y un punto *P* en la región interior, se cumple que :

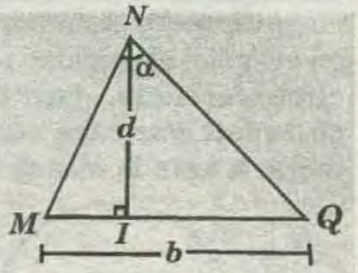


$$\boxed{m\sphericalangle AOB = m\sphericalangle AOP + m\sphericalangle POB}$$

TEOREMA :

Dados los triángulos *ABC* y *MNQ*, si $AC=MQ$, $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle MNQ$ y la distancia de *B* a $\overline{AC}$ es igual a la distancia de *N* a $\overline{MQ}$ concluimos que dichos triángulos son congruentes.

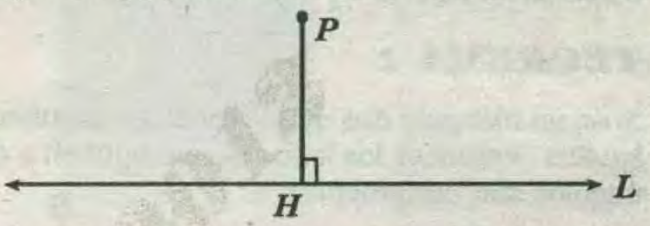




Si $AC=MQ=b$; $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle MNQ = \alpha$ y $BH=NI=d$ resulta que los triángulos *ABC* y *MNQ* son congruentes.

DISTANCIA DE UN PUNTO

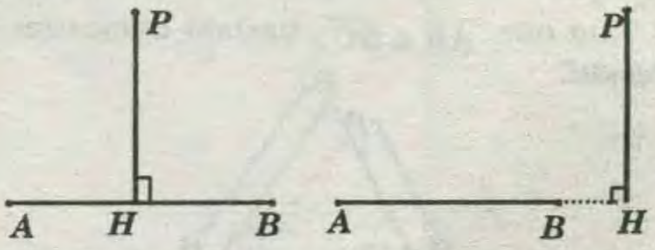
La distancia de un punto a una recta , es la longitud del segmento perpendicular desde el punto a la recta.



*La medida de *PH* es la distancia de *P* a la recta *L*.

*Al punto *"H"* se le denomina pie de la perpendicular.

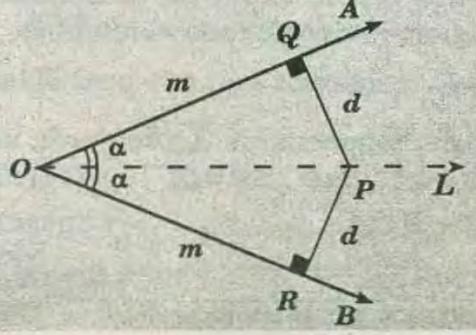
La distancia de un punto a un segmento , es también la longitud del segmento perpendicular desde el punto al segmento o a la prolongación de dicho segmento. Es decir perpendicular a la recta que contiene el segmento.



APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA DE TRIANGULOS

PROPIEDAD DE LA BISECTRIZ

Cualquier punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de dichos ángulo ; además, se forma en cada lado segmentos de igual medida.



* Si : $\overrightarrow{L}$ es bisectriz del ángulo AOB

* Entonces : $\boxed{PQ = PR}$ y $\boxed{OQ = OR}$

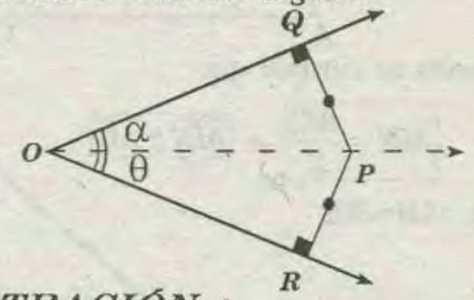
DEMOSTRACIÓN :

*como $m\sphericalangle AOL = m\sphericalangle LOB \wedge P \in \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \triangle PQO \cong \triangle PRO \Rightarrow (PQ = PR \wedge OQ = OR)$

TEOREMA :

Si un punto P pertenece a la región interior de un ángulo y equidista de los lados del ángulo , entonces P pertenece a la bisectriz del ángulo .



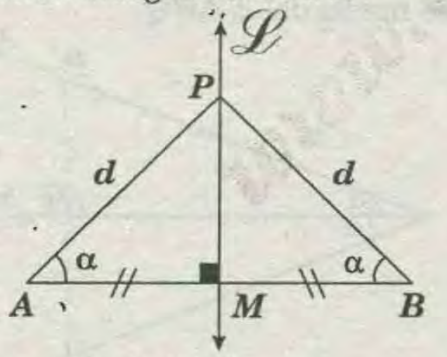
DEMOSTRACIÓN :

*como $PQ = PR \Rightarrow \triangle PQO \cong \triangle PRO$

$\Rightarrow \alpha = \theta \Rightarrow \overrightarrow{OP}$ es bisectríz

PROPIEDAD DE LA MEDIATRIZ

Cualquier punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento formándose un triángulo isósceles.



* Si : $\overrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de AB

* Entonces : $\boxed{AP = BP}$

$\triangle APB$: Isósceles

DEMOSTRACIÓN :

*como $P \in \mathscr{L}$

$\Rightarrow \triangle PMA \cong \triangle PMB \ldots\ldots (L.A.L.) \Rightarrow \boxed{MA = MB}$

$\Rightarrow \triangle APB$ es isósceles

TEOREMA :

Si un punto P equidista de los extremos de un segmento de recta , entonces P pertenece a la mediatriz de dicho segmento .

DEMOSTRACIÓN :

*en la figura anterior como $PA = PB \in \mathscr{L}$

$\Rightarrow \triangle PMA \cong \triangle PMB \ldots\ldots (L.L.L.) \Rightarrow AM = MB$

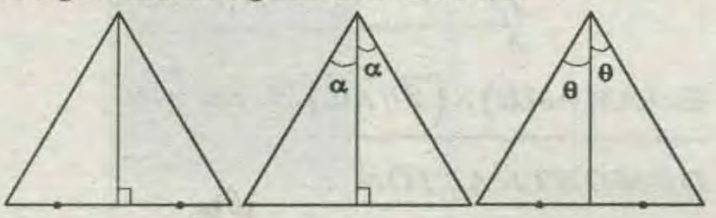
$\Rightarrow \mathscr{L}$ es mediatríz de $\overline{AB}$

NOTA :

Si dos líneas notables coinciden en un triángulo, entonces dicho triangulo es isósceles.

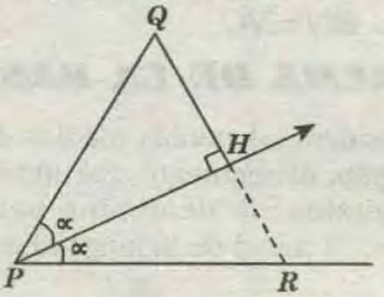
EJEMPLO:

los siguientes triángulos son isósceles.



RECOMENDACIÓN :

Cada vez que en un problema se observe una perpendicular a la bisectriz de un ángulo, se debe completar un triángulo isósceles.

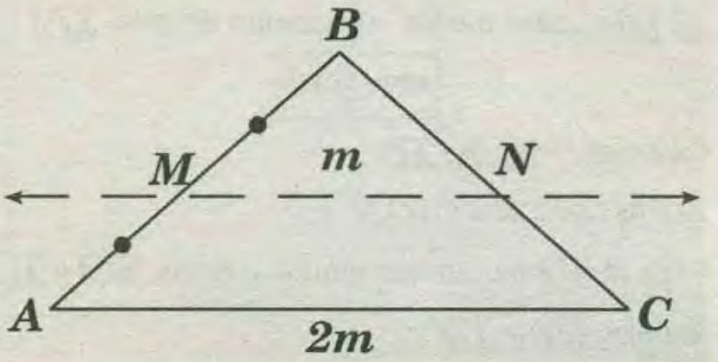


* En la figura se prolonga $\overline{QH}$ para formar el triángulo isósceles PQR , luego :

$PQ = PR$ y $QH = HR$

TEOREMA DE LOS PUNTOS MEDIOS

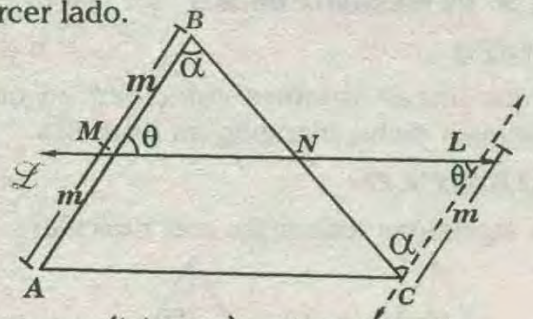
Si por el punto medio de uno de los lados de un triángulo, se traza una paralela a cualquiera de los otros dos lados, entonces dicha paralela intersecara al tercer lado en su punto medio.



* Si "M" es punto medio de $\overline{AB} \wedge \overline{MN} // \overline{AC}$

$$\Rightarrow \boxed{BN = NC} \wedge \boxed{MN = \frac{AC}{2}}$$

Es decir si se considera uno de los puntos medios de cualquier lado de un triángulo y se traza una recta paralela a otro lado, entonces dicha recta paralela biseca al tercer lado.



$$\underline{\text{Si}: (AM=MB) \wedge \left(\overrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{AC}\right)} \Rightarrow \boxed{BN=NC}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Se traza $\overrightarrow{CL} // \overrightarrow{AB}$

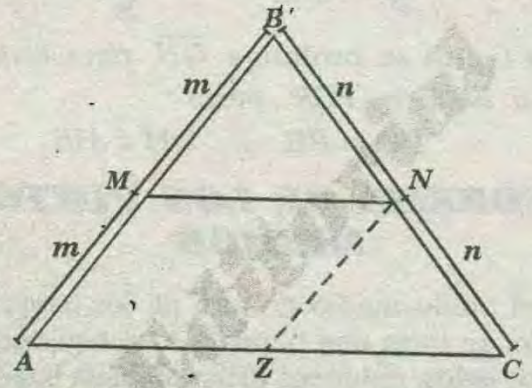
$\Rightarrow \square AMLC$: *paralelogramo*

* luego : $\triangle MBN \cong \triangle LCN$ ....*(A.L.A.)*

$\Rightarrow BN=NC$

TEOREMA DE LA BASE MEDIA

Si se considera los puntos medios de dos lados de un triángulo, el segmento que tiene por extremos dichos puntos, se denomina base media y su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado.



Si : $AM = MB$. $BN=NC$

$\Rightarrow \overline{MN}$: base media (segmento de lado $\overline{AC}$)

$$\boxed{MN=\frac{1}{2}(AC)}$$

* Además: $\overline{MN} // \overline{AC}$

DEMOSTRACION :

* Por el teorema de los puntos medios $\overline{MN} // \overline{AC}$ se traza $\overline{NZ} // \overline{AB}$

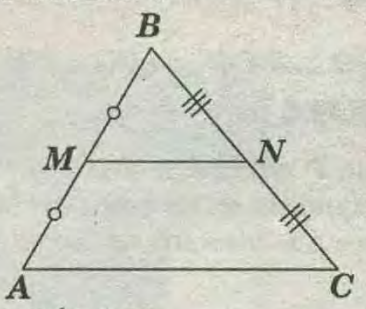
$\Rightarrow AZ=ZC$

$\square AMNZ$ = paralelogramo $MN=AZ=ZC$

$$\Rightarrow \boxed{MN=\frac{AC}{2}}$$

OBSERVACIONES :

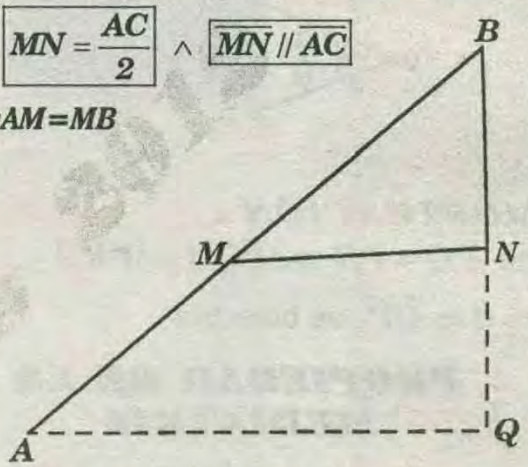
✱ Si se tiene :



* Entonces se cumple que:

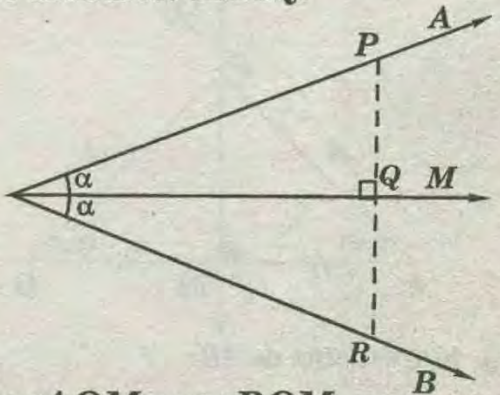
$$\boxed{MN=\frac{AC}{2}} \wedge \boxed{\overline{MN} // \overline{AC}}$$

✱ Sea : $AM=MB$



Al trazar $\overline{AQ} // \overline{MN} \Rightarrow BN // NQ$

$\overline{MN}$ base media del $\triangle ABQ$.



* Sea : $m\sphericalangle AOM = m\sphericalangle BOM = \alpha$

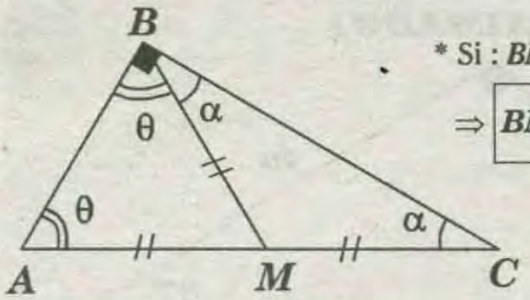
* Al trazar $\overline{PQ} \perp \overline{OM}$

* Al prolongar $\overline{PQ}$; interseca en R a $\overrightarrow{OB}$ por lo cual $OP=OR$ y $PQ=QR$

TEOREMA DE LA MENOR MEDIANA EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

En todo triángulo rectángulo la mediana relativa a la hipotenusa mide igual que la mitad de dicha

hipotenusa.

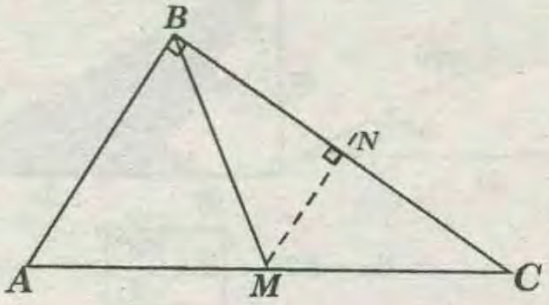


* Si : BM es mediana

$$\Rightarrow \boxed{BM = \frac{AC}{2}}$$

Observe, que los triángulos AMB y BMC son isósceles.

Es decir si se traza la mediana relativa a la hipotenusa, la longitud de dicha mediana es la mitad de la longitud de la hipotenusa.



Si $AM=MC \Rightarrow BM=1/2(AC)$

DEMOSTRACIÓN :

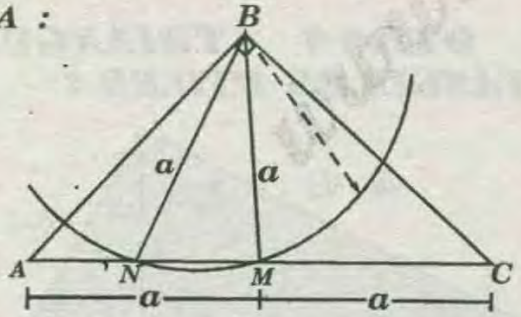
Se traza $\overline{MN} // \overline{AB}$

* Por el teorema de los puntos medios :

$$BN=NC \wedge m\sphericalangle BNM=90°$$

* Luego : $\triangle BMC$ (isósceles) $\Rightarrow BM=MC=AM$

NOTA :



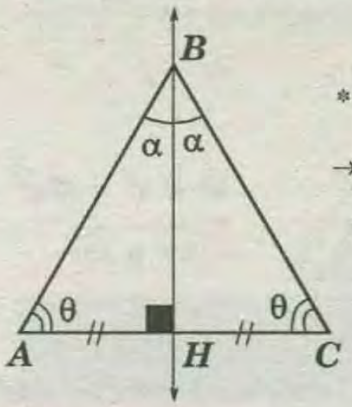
Sea : $AB \neq BC$

$AM=MC$; $BM=1/2(AC)$. Entonces en un triángulo rectángulo existe la posibilidad de encontrar :

$BM=BN=AC/2$, pero $\overline{BN}$ no es mediana.

PROPIEDAD DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES

Si trazamos la altura en la base de un triángulo isósceles , dicha altura será también mediana , bisectriz y mediatriz.

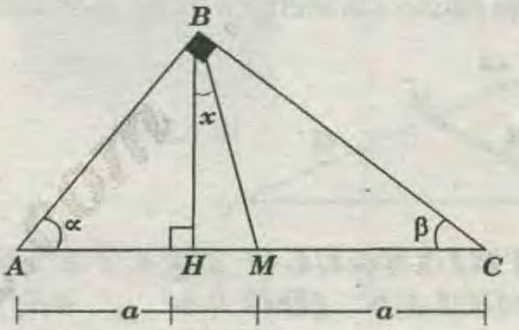


* Si: $AB = BC$

$\rightarrow BH : \begin{cases} \text{Altura , Mediana;} \\ \text{Bisectríz, Mediatríz} \end{cases}$

PROPIEDAD :

Ángulo formado por la altura y la mediana relativas a la hipotenusa , en un triángulo rectángulo.



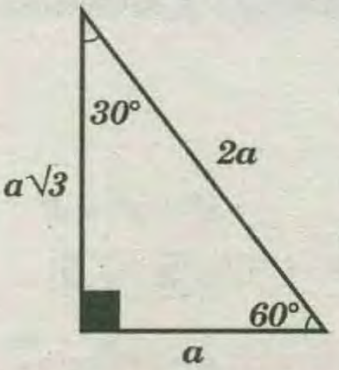
$$\boxed{x = \alpha - \beta}$$

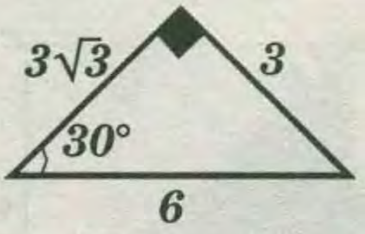
TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

Son aquellos triángulos donde a partir de la razón de *2* de sus lados se pueden calcular las otras medidas angulares y reciprocamente . Solo existe dos triángulos rectángulos notables que se deducen del triángulo equilátero y del cuadrado .

I) TRIAGULO DE 30° y 60° :

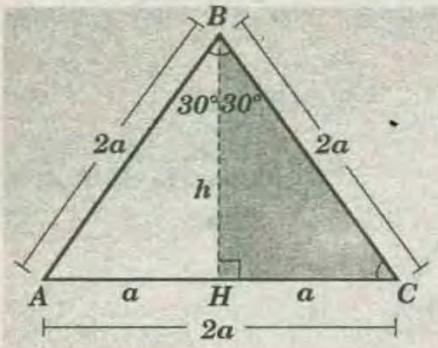
EJEMPLO :





DEMOSTRACIÓN:

* Considerando un triángulo equilátero cuyo lado mide *"2a"*, se traza la altura $\overline{BH}$ que también es mediana y bisectriz, entonces por Pitágoras :



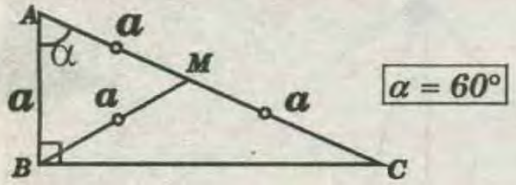
$h^2 + a^2 = (2a)^2$

$\rightarrow \boxed{h = a\sqrt{3}}$

* En el $\triangle BHC$ *(30° y 60°)* el cateto adyacente a *60°* mide la mitad de la hipotenusa.

TEOREMA :

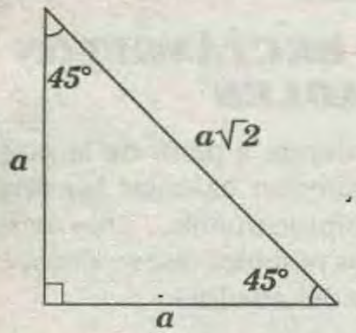
Si un cateto mide la mitad de la hipotenusa, entonces el ángulo agudo adyacente a dicho cateto mide *60°*.

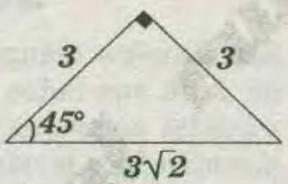


$\boxed{\alpha = 60°}$

II) TRIÁNGULO RECTANGULO ISÓSCELES (DE 45° y 45°)

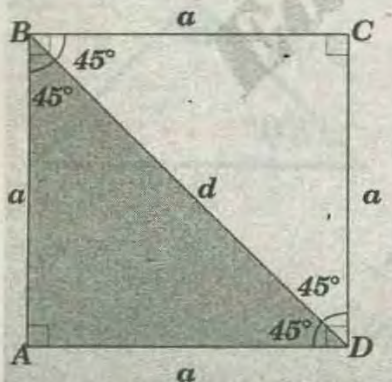
EJEMPLO:





DEMOSTRACIÓN :

Considerando un cuadrado cuyo lado mide *"a"*, se traza la diagonal formándose ángulos de *45°* entonces, por Pitágoras :

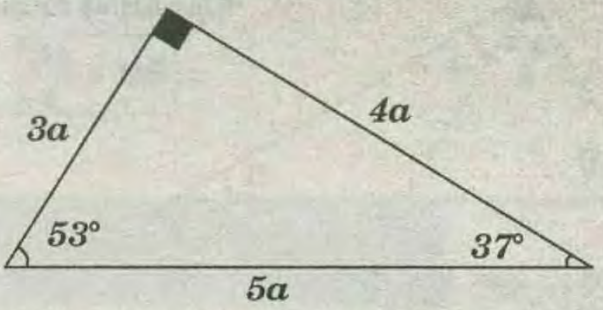


$a^2 + a^2 = d^2$

$\rightarrow \boxed{d = a\sqrt{2}}$

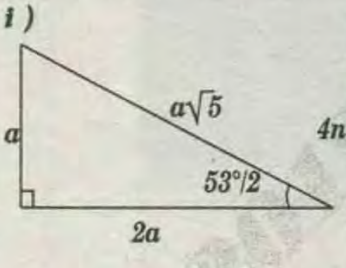
En el *BAD (45°)* la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces el largo de un cateto.

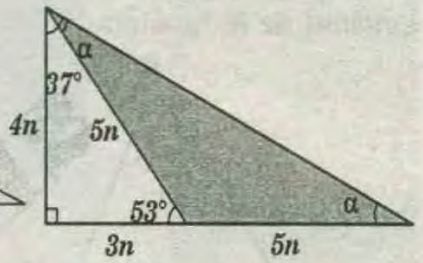
III) TRIANGULO DE 37° y 53° (APROXIMADO)



* Del triángulo rectángulo anterior se puede deducir que :

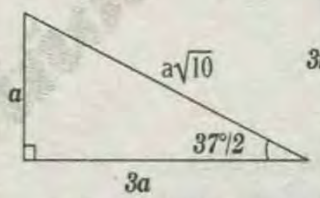
i)

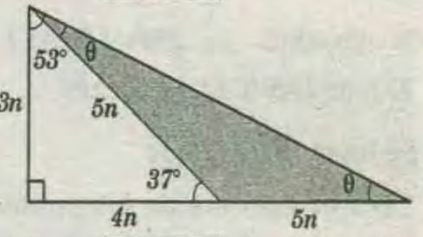




$\Rightarrow 2\alpha = 53° \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{53°}{2}}$

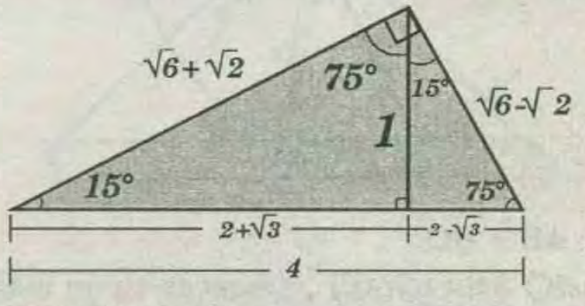
ii)





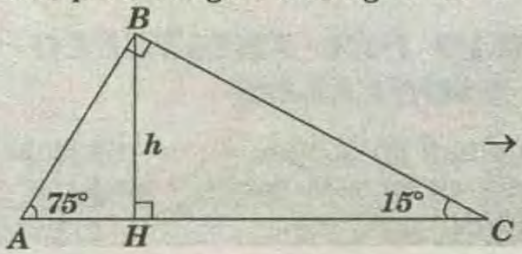
$\Rightarrow 2\theta = 37° \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{37°}{2}}$

IV) OTROS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS UTILES :

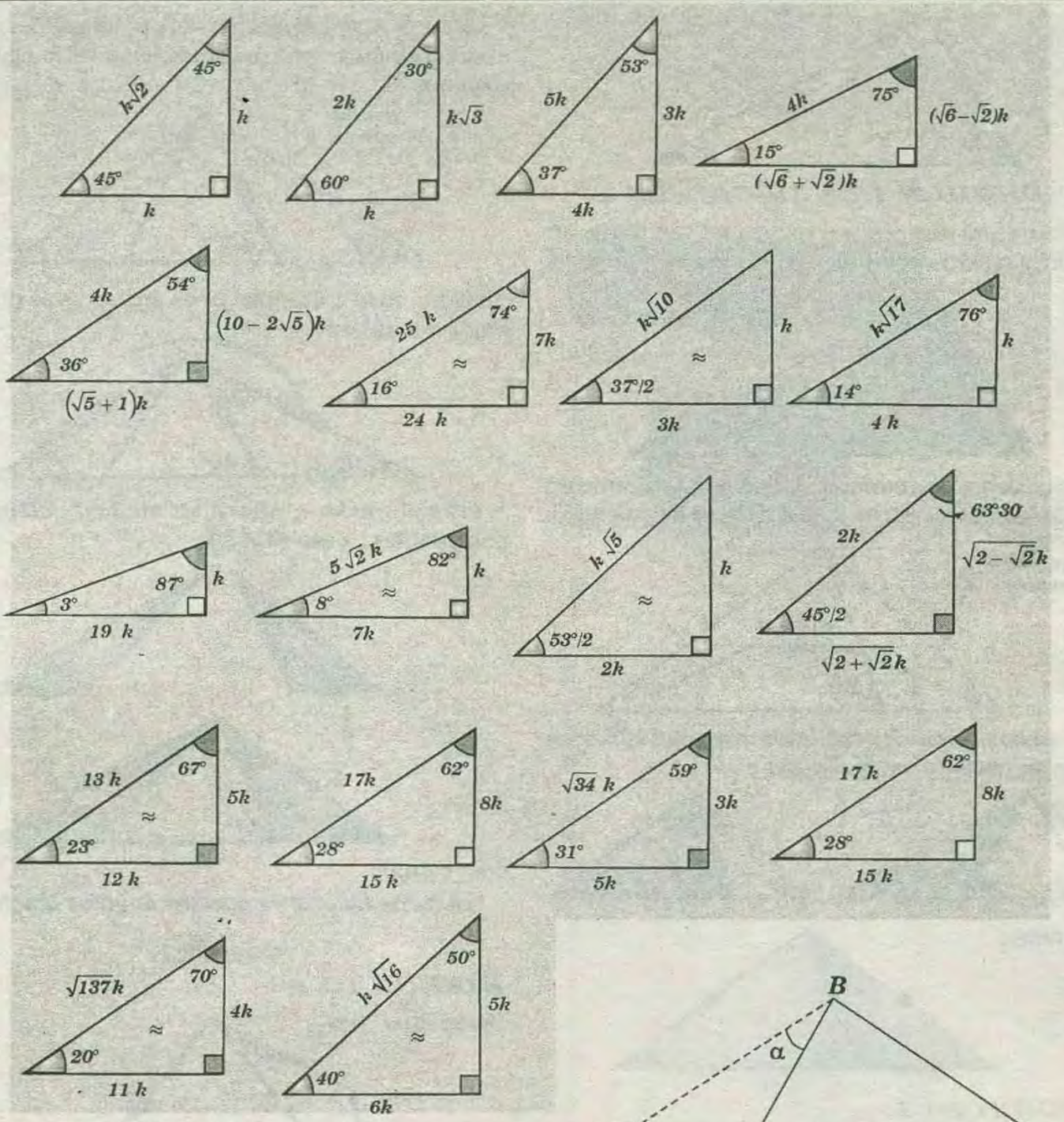


PROPIEDAD :

Solo para triángulo rectángulo de *75°* y *15°*



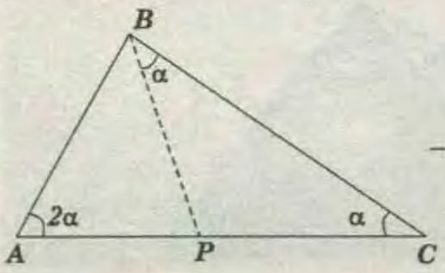
$\rightarrow \boxed{h = \frac{AC}{4}}$



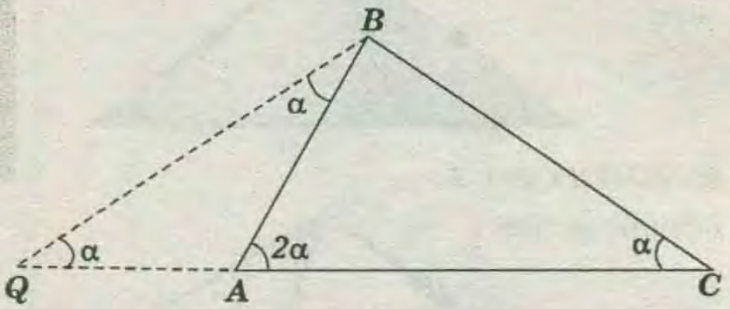
RECOMENDACIÓN :

En el triángulo ABC , si $m\sphericalangle BAC = 2m\sphericalangle BCA$, se traza una ceviana de modo que se formen dos triángulos isósceles.

Esto es posible de dos formas diferentes observe los dos gráficos siguientes :



$\rightarrow \boxed{AB = BP = PC}$

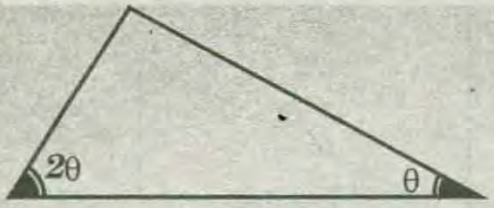


$\rightarrow \boxed{QA = AB} \wedge \boxed{QB = BC}$

REGLAS PARA HACER TRAZOS AUXILIARES DE TRIÁNGULOS

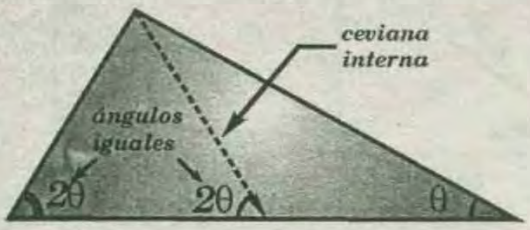
I) TRAZO DE LA CEVIANA :

Cuando se observa un triángulo que tenga ángulos interiores en la relación de uno a dos , de la siguiente forma :



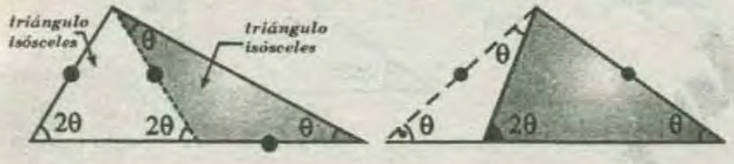
TENDREMOS DOS OPCIONES :

I-1) Se trazará una ceviana interna tal que forme un ángulo igual al mayor en la misma base del triángulo.

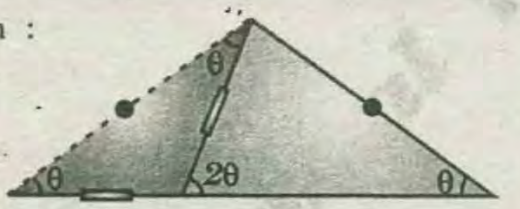


I-2) Se trazará una ceviana externa tal que forme un ángulo igual al menor en la misma base del triángulo.

* En ambos casos obtendremos triángulos isósceles como se muestra en las figuras :

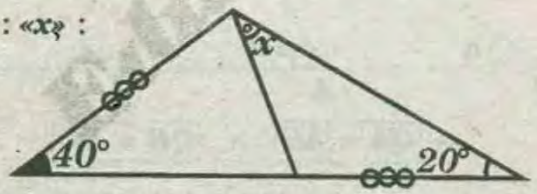


* También :



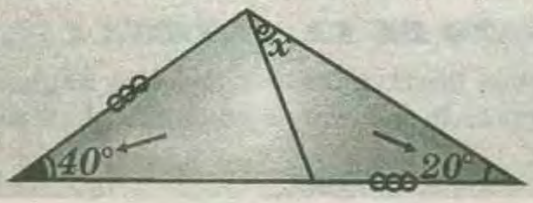
EJERCICIO 1:

Determinar : «x» :

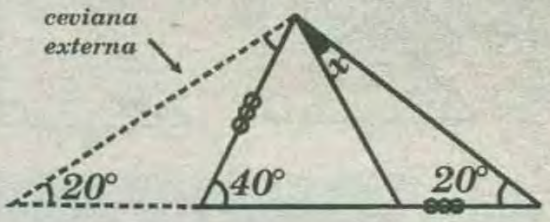


RESOLUCIÓN :

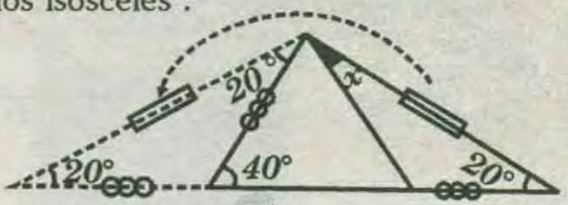
* ***PRIMER PASO :*** Se observa en el triángulo ángulos internos en la relación de *1* a *2* *(20°* y *40°)*



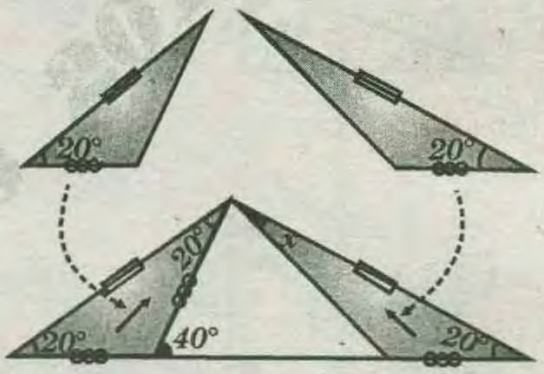
* ***SEGUNDO PASO :*** Aplicamos el primer criterio : pero ahora trazamos una ceviana externa de la siguiente manera.



* ***TERCER PASO :*** Completamos ángulos y se obtiene triángulos isósceles .



* ***CUARTO PASO :*** Ahora se observa triángulos congruentes , caso *(L.A.L)*



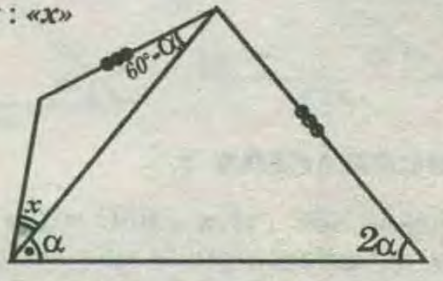
* Se cumple :

«A lados iguales se oponen ángulos iguales»

$$\Rightarrow \boxed{x=20°}$$

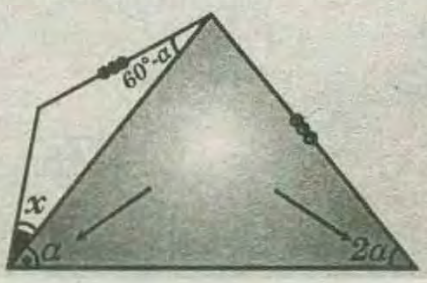
EJERCICIO 2 :

Determinar : «x»



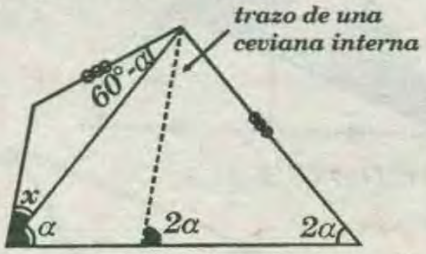
RESOLUCIÓN :

* Se tiene en la figura un triángulo que tiene ángulos internos la relación de *1* a *2*.

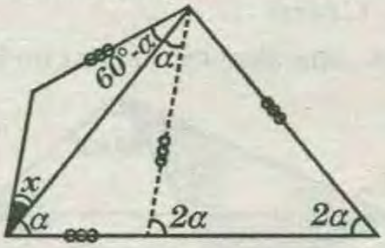


***PRIMER PASO :** Entonces aplicamos el primer criterio :

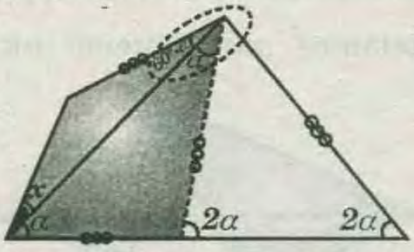
Trazamos la ceviana interna.



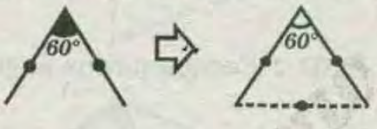
* ***SEGUNDO PASO :*** Ahora , completamos ángulos y observamos lados iguales.

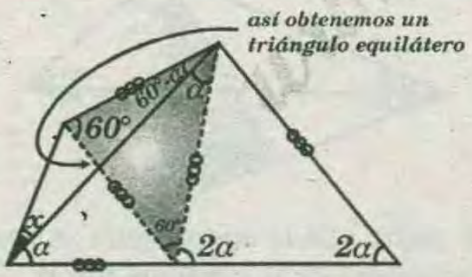


* ***TERCER PASO :*** Se observa , un ángulo de ***60°*** grados de la siguiente forma :

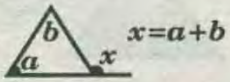


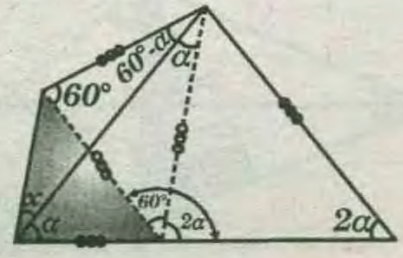
* ***CUARTO PASO :*** Aplicamos la siguiente propiedad.



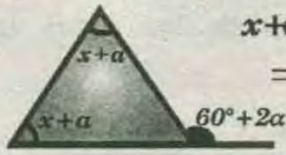


* ***QUINTO PASO :*** Se observa un triángulo isósceles adicional donde se podrá aplicar





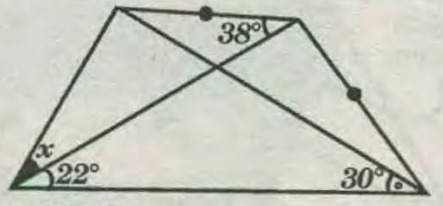
*De aquí :



$$x+\alpha+x+\alpha=60°+2\alpha$$
$$\Rightarrow 2x+\cancel{2\alpha}=60°+\cancel{2\alpha}$$
$$\Rightarrow \boxed{x=30°}$$

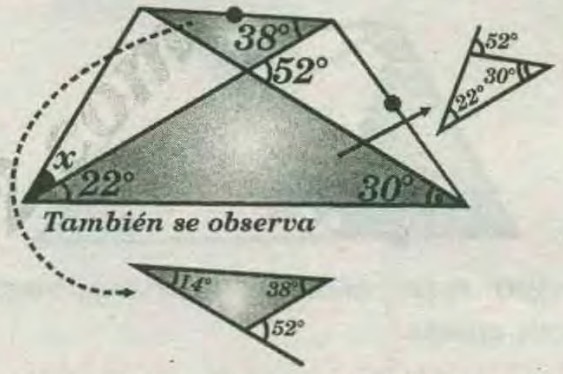
EJERCICIO 3 :

Determinar : « ***x*** »

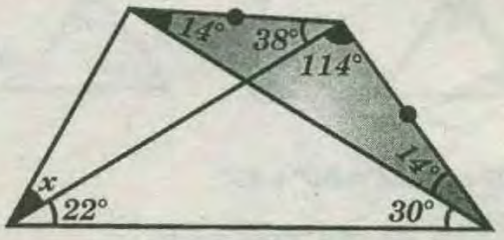


RESOLUCIÓN:

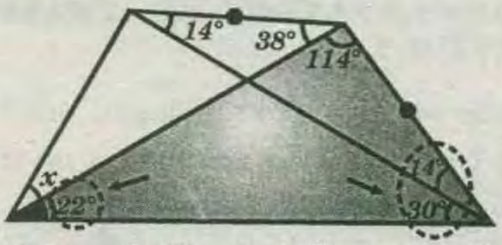
* ***PRIMER PASO : :*** Completamos ángulos internos en la figura y se tiene:



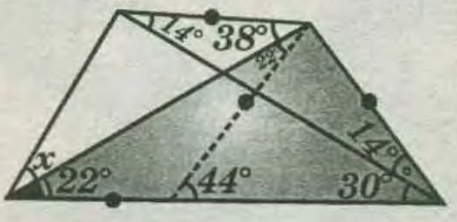
* ***SEGUNDO PASO :*** Se tiene un triángulo isósceles.



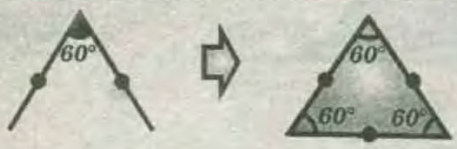
* ***TERCER PASO :*** Se observa un triángulo que tiene ángulos internos en la relación de ***1*** a ***2(22°*** y ***44°)***.

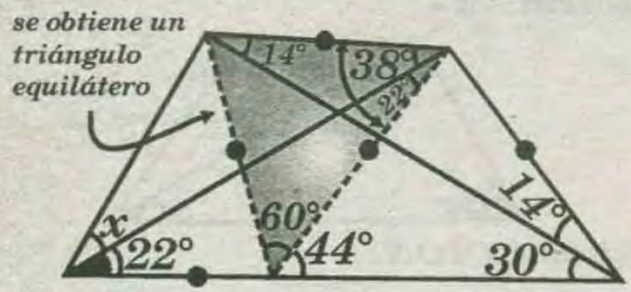


* ***CUARTO PASO :*** Aplicamos el primer criterio,trazamos la ceviana interna .

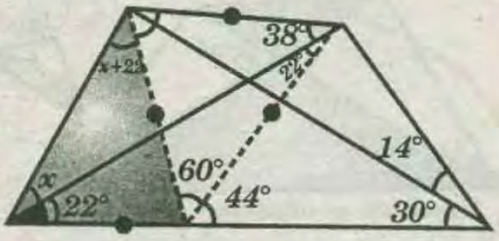


* ***QUINTO PASO*** : ahora observamos un ángulo de ***60°(38°+22°)*** acompañado de dos lados iguales entonces hacemos:

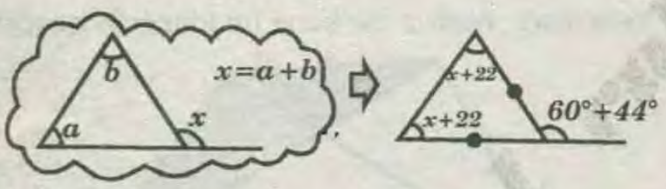




* ***SEXTO PASO*** : Luego se observa un nuevo triángulo isósceles.



* ***SÉPTIMO PASO*** : Ahora en este triángulo isosceles se puede aplicar.



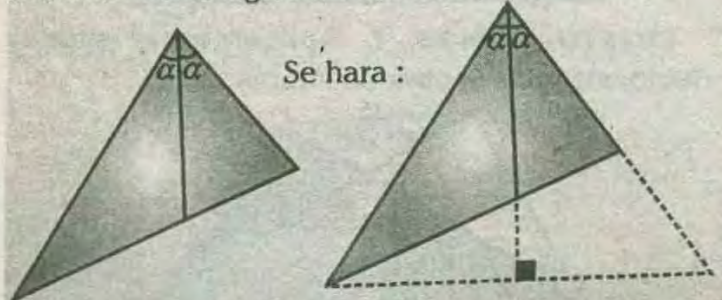
$$x+22°+x+22°=60°+44°$$

$$\Rightarrow 2x+44°=60°+44°$$

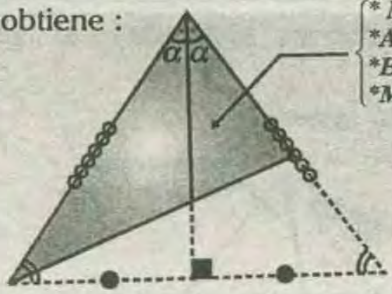
$$\Rightarrow x=30°$$

II) COMPLETANDO UN TRIÁNGULO ISÓCELES :

Cuando de observe en un triángulo una bisectriz interior, se buscará completarlo a un triángulo isósceles de la siguiente manera :

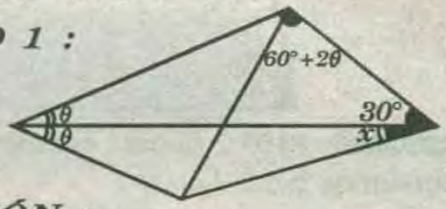


* Se obtiene :



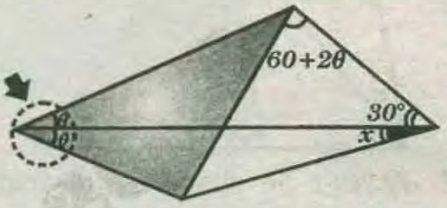
EJERCICIO 1 :

Calcular ***«x»***



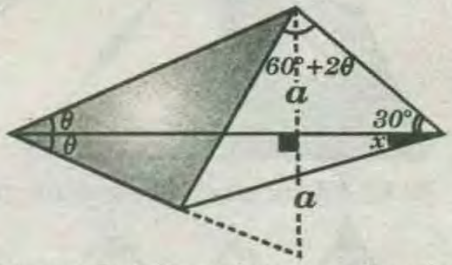
RESOLUCIÓN :

* Se observa , una bisectriz interior en la figura.

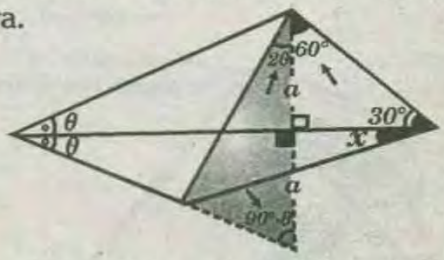


* ***PRIMER PASO :***

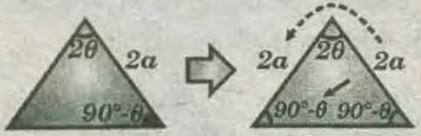
Lo completamos para obtener un triángulo isósceles.

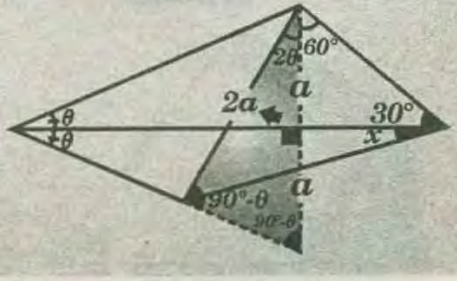


* ***SEGUNDO PASO :*** Completamos ángulos internos en la figura.

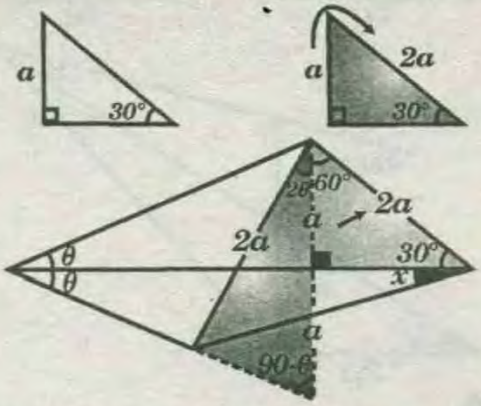


* ***TERCER PASO :*** En la nueva figura se observa , un triángulo isósceles de la siguiente forma :

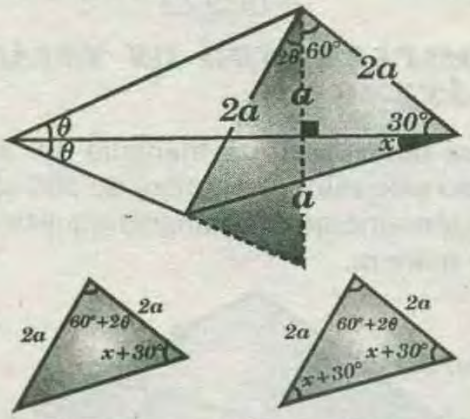




* ***CUARTO PASO :*** Se observa que se obtiene un triángulo rectángulo notable ***(30° y 60°)***



* ***QUINTO PASO*** : También se observa en la figura , un nuevo triángulo isósceles

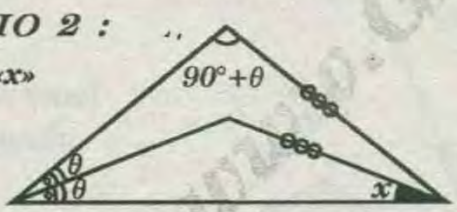


$$\Rightarrow 60°+2\theta+x+30°+x+30°=180°$$

$$\Rightarrow 2\theta+2x=60° \Rightarrow \boxed{x=30°-\theta}$$

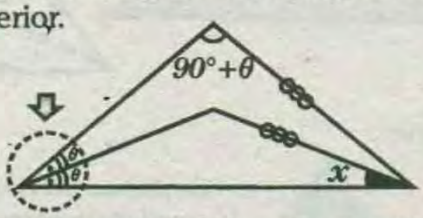
EJERCICIO 2 :

Determinar : «x»

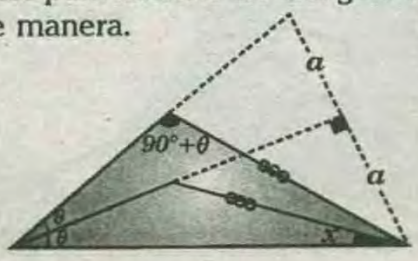


RESOLUCIÓN :

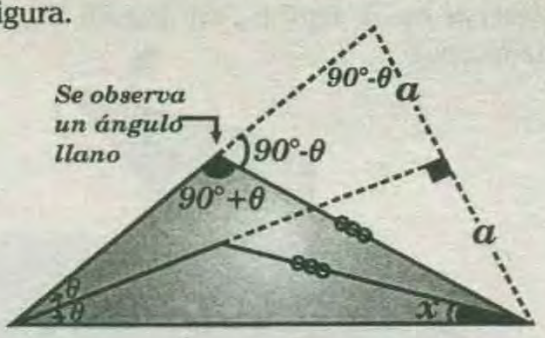
* Se observa en la figura , un ángulo donde hay bisectriz interior.



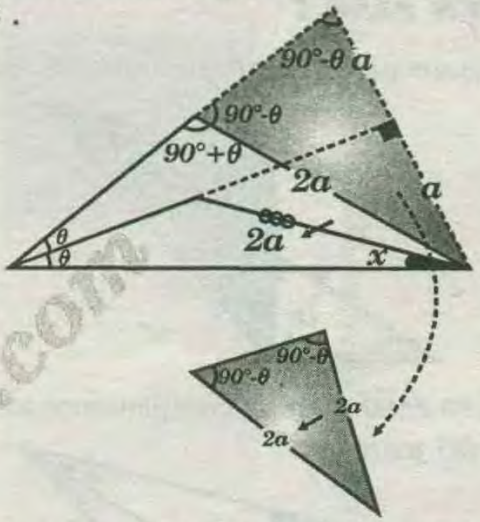
* ***PRIMER PASO :*** Según el criterio ***#2*** , lo completamos para obtener un triángulo isósceles de la siguiente manera.



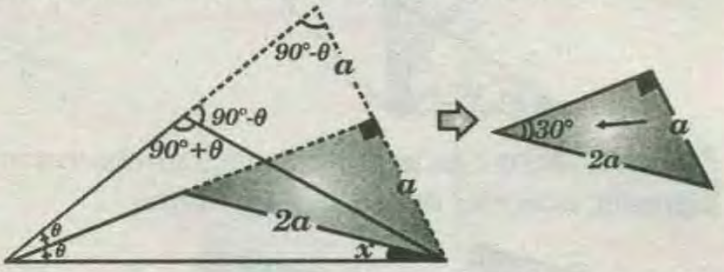
* ***SEGUNDO PASO :*** Completamos ángulos internos en la figura.



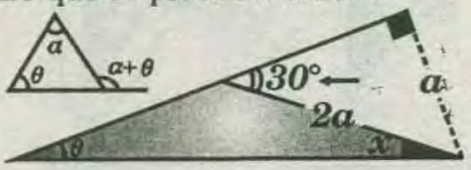
* ***TERCER PASO :*** En la figura se observa un triángulo isósceles .



* ***CUARTO PASO :*** Se observa que se obtiene un triángulo rectángulo notable ***(30° y 60°)***



* ***QUINTO PASO*** : Finalmente se tiene en al figura , un triángulo que se presenta como :

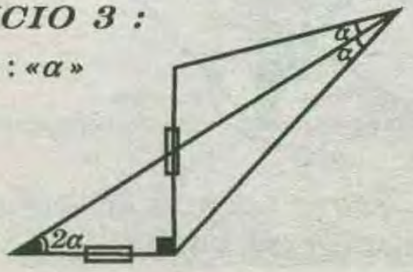


$$\Rightarrow \theta+x=20$$

$$\boxed{x=20°-\theta}$$

EJERCICIO 3 :

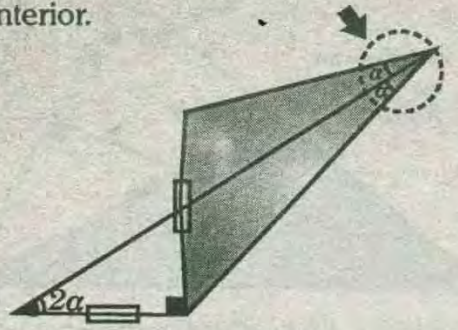
Determinar : «α»



www.GRATIS2.com

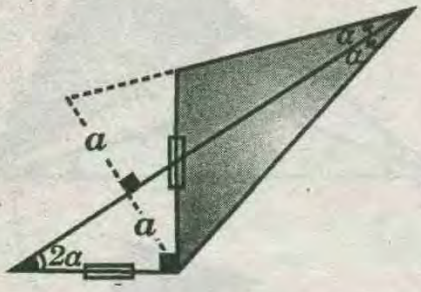
RESOLUCIÓN :

* Se observa en la figura , un ángulo donde hay bisectriz interior.

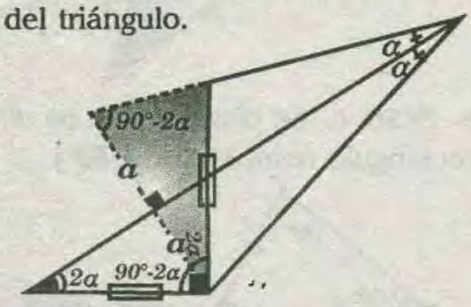


*** PRIMER PASO :**

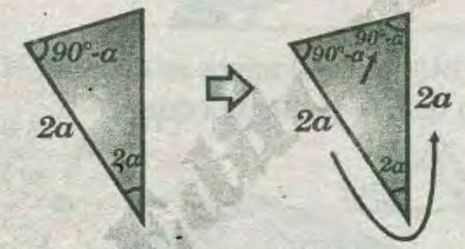
Completamos para obtener un triángulo isócseles .

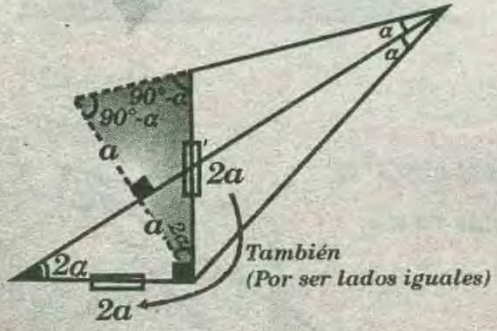


*** SEGUNDO PASO :** Ahora completamos los ángulos internos del triángulo.

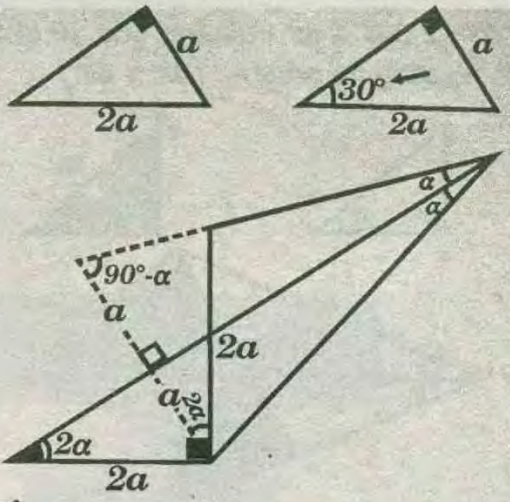


*** TERCER PASO :** En la nueva figura , se observa un triángulo, isósceles de la siguiente forma .





*** CUARTO PASO :** Luego se obtiene un triángulo rectángulo notable ***(30° y 60°)***.

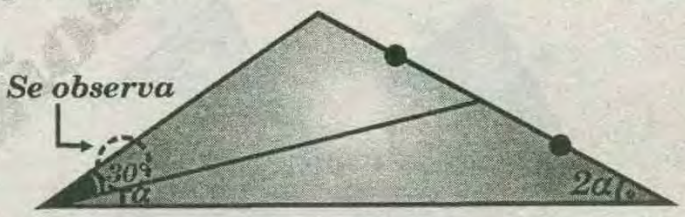


$\Rightarrow 2\alpha = 30°$

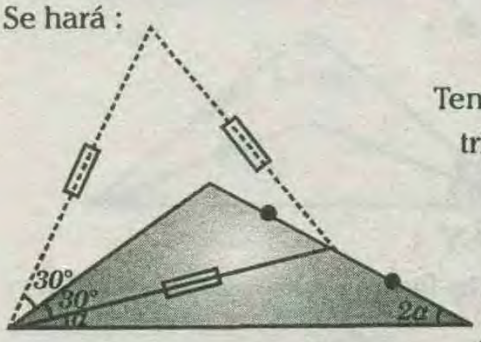
$\Rightarrow \boxed{\alpha = 15°}$

III) COMPLETANDO UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO :

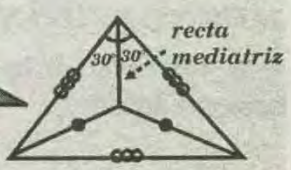
Cuando se observa en un triángulo un ángulo de ***30°*** y como este valor es la mitad de ***60°***, se buscará formar externamente un triángulo equilátero , de la siguiente manera.



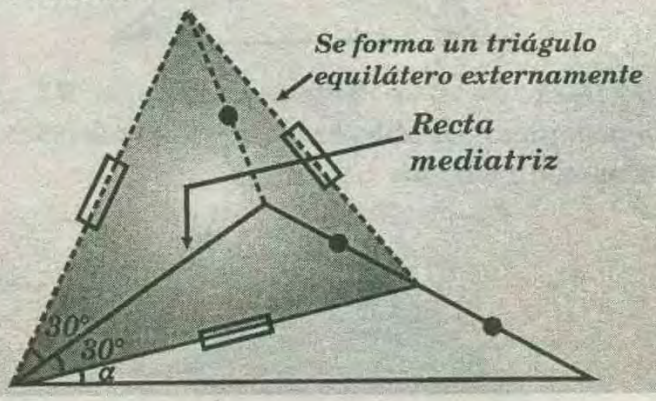
Se hará :



Tener presente en un triángulo equilátero

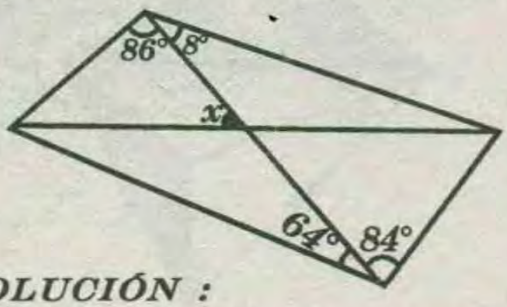


* Se obtiene :



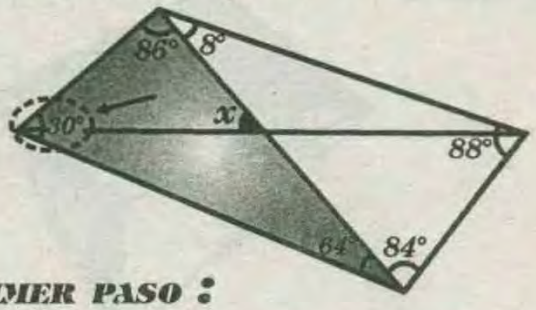
EJERCICIO 1 :

Determinar : x



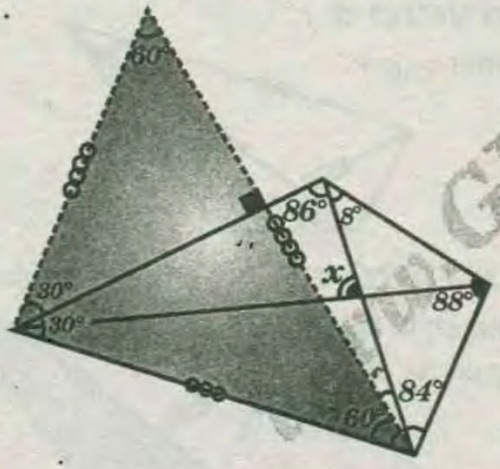
RESOLUCIÓN :

* Primero completamos los ángulos de la figura y se observa un ángulo de ***30°***

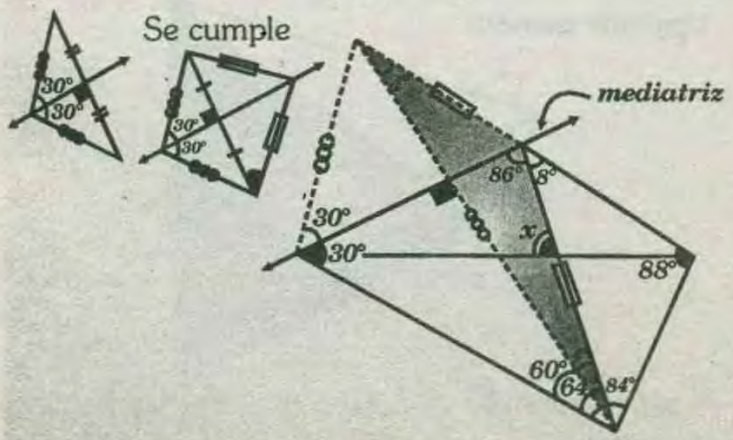


*** *PRIMER PASO :***

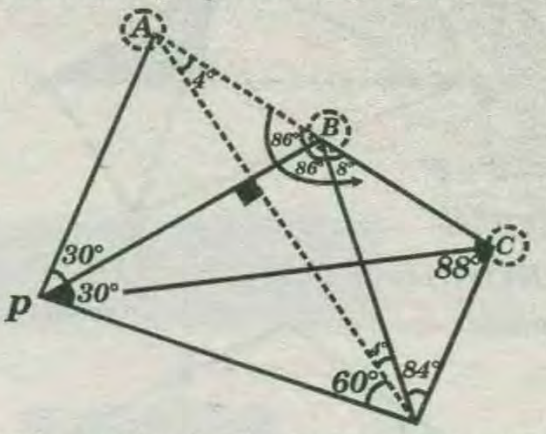
Como observamos un ángulo de ***30°,*** construimos un triángulo equilátero exteriormente de la siguiente manera .



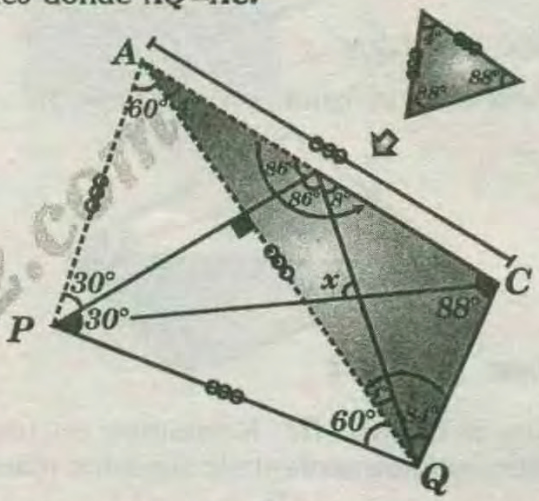
*** *SEGUNDO PASO :*** Se observa en la figura una recta mediatriz.



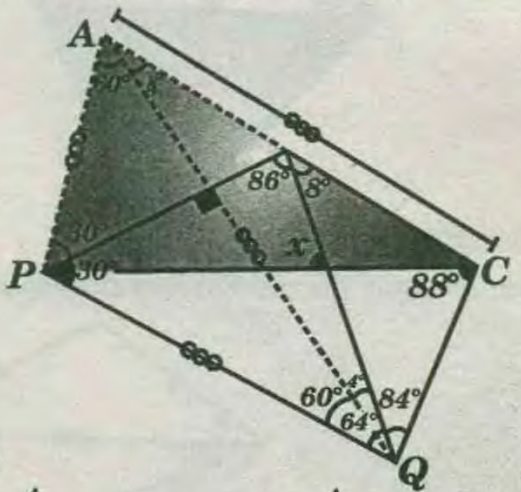
*** *TERCER PASO :*** Luego se observa un ángulo llano en *«B»* ***(86°+86°+8°=180°)*** lo cual nos indica que los vertices ***A , B*** y ***C*** son colineales.



*** *CUARTO PASO :*** Luego se observa un triángulo isósceles donde ***AQ=AC.***



*** *QUINTO PASO*** : Se observa ahora un nuevo triángulo isósceles ***PAC*** donde ***(PA=AC)***



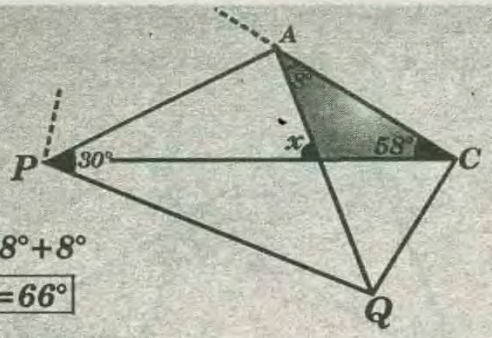
* De aquí :

*** *SEXTO PASO*** :

Ahora interiormente de la figura se tiene un triángulo donde se cumple :

$$m\sphericalangle ACP = 58°$$

GRATIS2.com

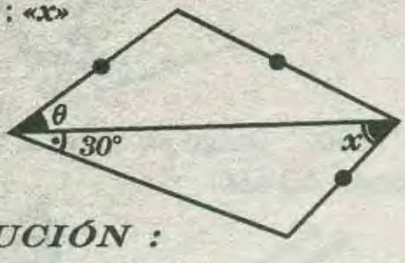


$\Rightarrow x=58°+8°$

$\Rightarrow \boxed{x=66°}$

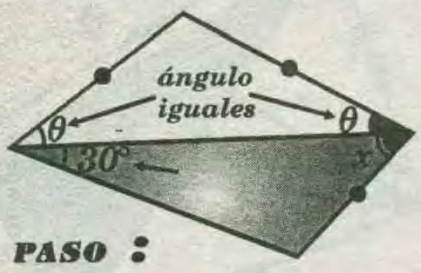
EJERCICIO 2 :

Determinar : «*x*»



RESOLUCIÓN :

* Se observa en la figura , un ángulo de ***30°*** .

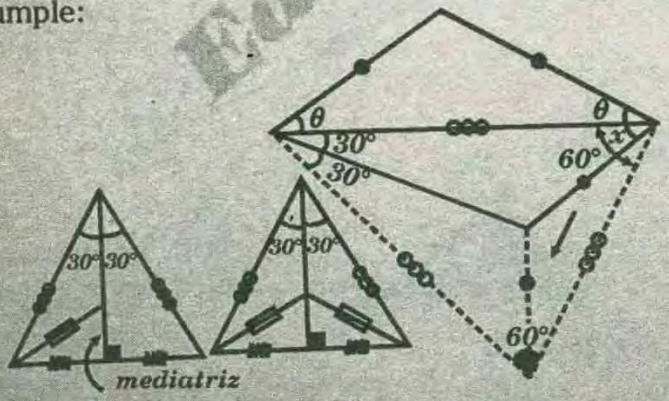


PRIMER PASO :

* Según el criterio *III*: formamos un triángulo equilátero exteriormente de la siguiente manera .

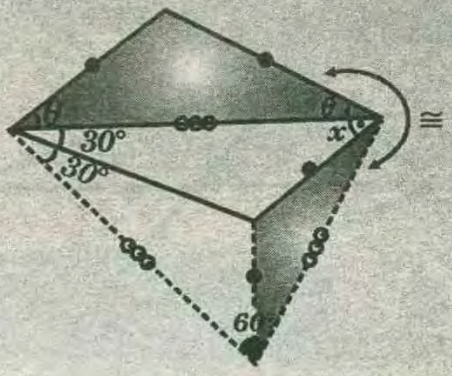
**** SEGUNDO PASO :***

Sabemos que en todo triángulo equilátero , se cumple:

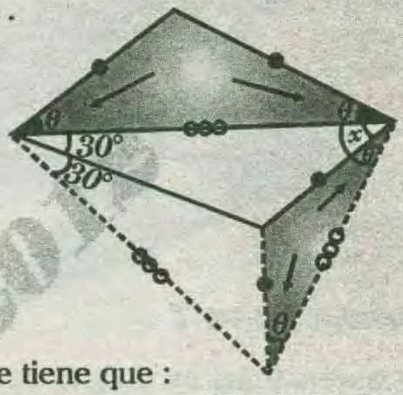


**** TERCER PASO :***

Se observa que se obtiene dos triángulos congruentes caso (*L.L.L.*).



* Entonces se cumple : «A lados iguales se oponen ángulos iguales» .

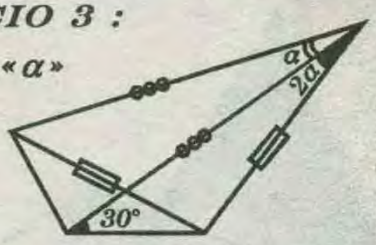


* De la manera se tiene que :

$\Rightarrow x+\theta=60° \Rightarrow \boxed{x=60°-\theta}$

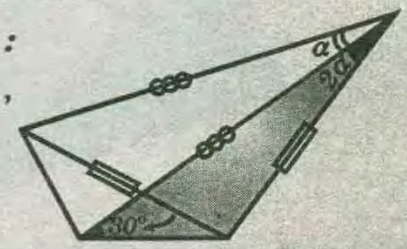
EJERCICIO 3 :

Determinar : « α »



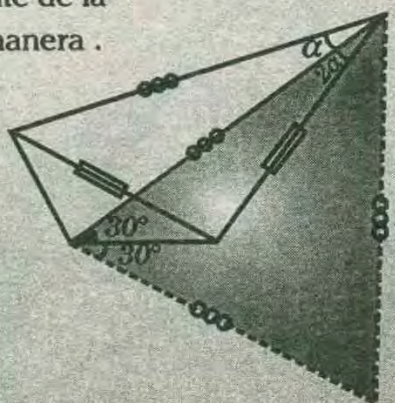
RESOLUCIÓN :

* Se tiene en la figura , un ángulo de ***30°***

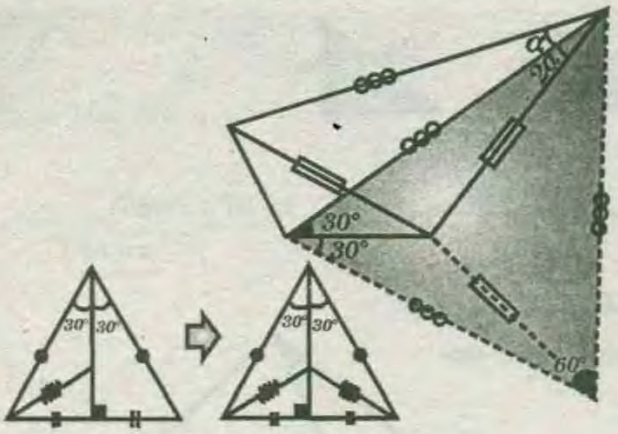


**** PRIMER PASO :***

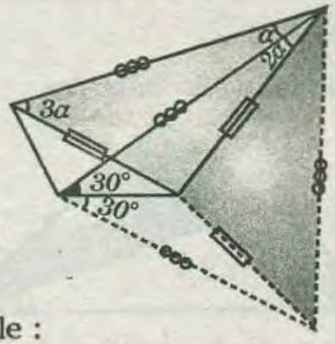
Entonces formamos un triángulo equilátero exteriormente de la siguiente manera .



**** SEGUNDO PASO :*** Se sabe que en todo triángulo equilátero se cumple .

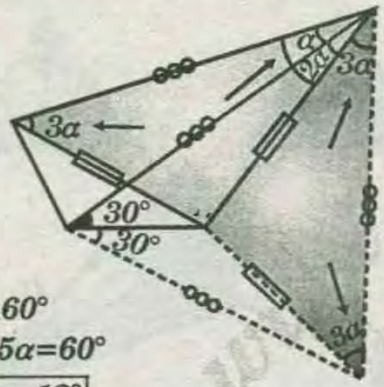


* ***TERCER PASO :*** Se observa en la figura que se obtiene dos triángulos congruentes , caso ***(L.L.L)***.



Aquí se cumple :

«A lados iguales se oponen ángulos iguales»



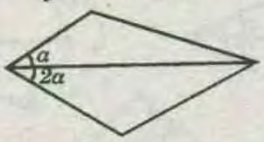
$\Rightarrow 2\alpha+3\alpha=60°$

$\Rightarrow 5\alpha=60°$

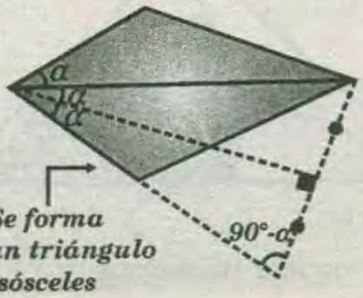
$\Rightarrow \boxed{\alpha=12°}$

IV) PROPIEDAD DE LA BISECTRIZ:

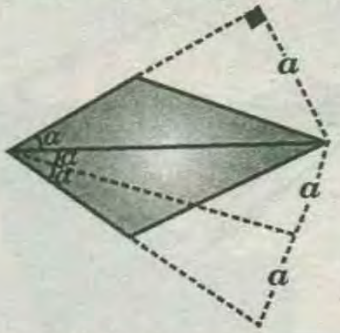
Cuando se observa en una figura de la siguiente forma se realizará el siguiente trazo:



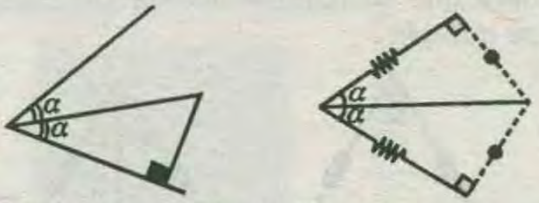
* Se hará ;



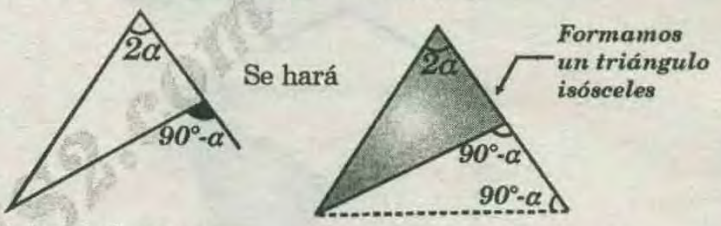
* Se realiza el siguiente trazo obtener la siguiente figura :



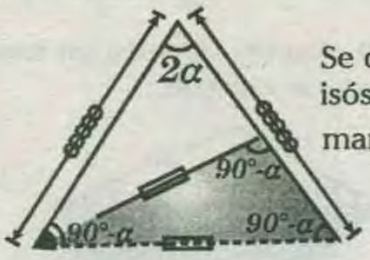
* Por la Propiedad de la bisectriz :



* Si se observa la siguiente figura :



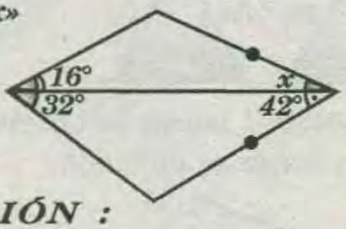
* Se obtiene :



Se observa dos triángulos isósceles de la siguiente manera.

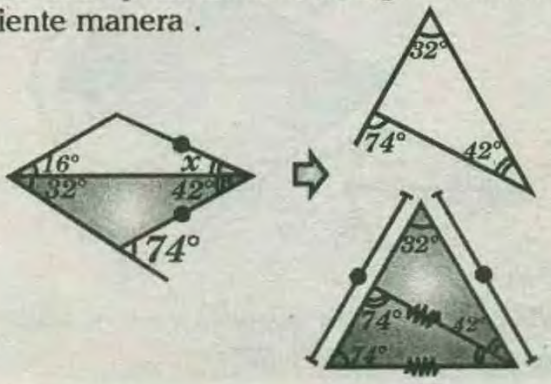
EJERCICIO 1 :

Determinar : «x»

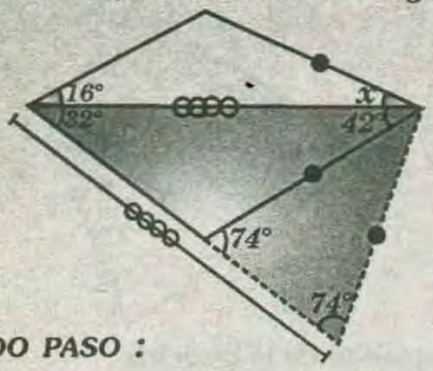


RESOLUCIÓN :

* En la figura se observa que podemos realizar el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles de la siguiente manera .

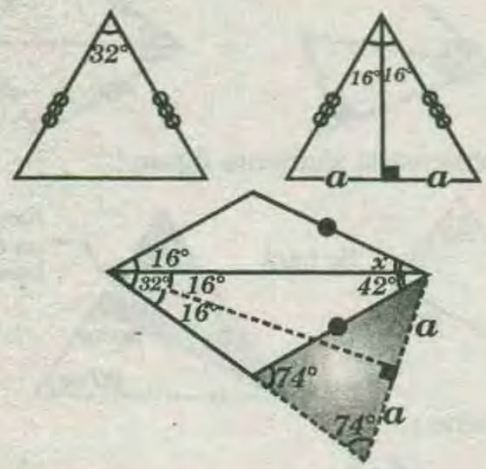


PRIMER PASO : Realizamos el trazo sugerido en la figura

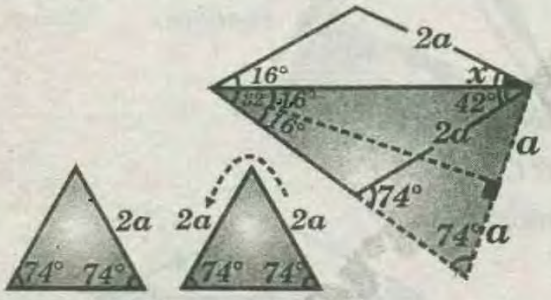


* ***SEGUNDO PASO :***

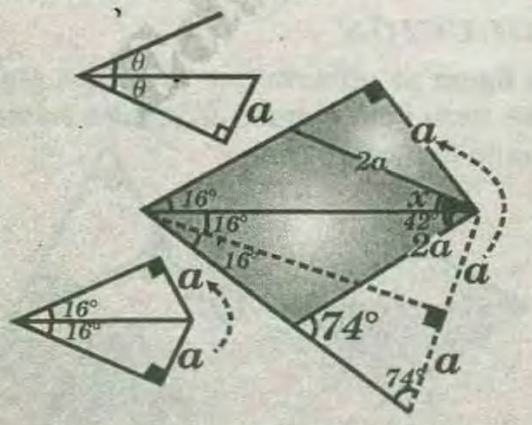
Se observa que se obtiene un triángulo isósceles donde se cumple :



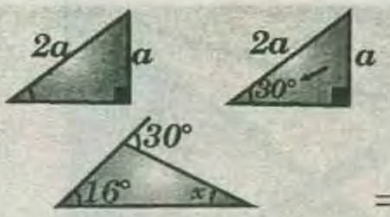
* ***TERCER PASO :*** Se observa también un nuevo triángulo isósceles donde se cumple :



* ***CUARTO PASO :*** Luego se observa la siguiente propiedad en donde se cumple :



* ***QUINTO PASO*** : Se observa que se obtiene un triángulo notable de ***30°*** y ***60°***

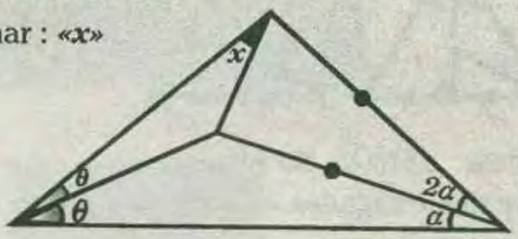


$\Rightarrow 16° + x = 30°$

$\Rightarrow \boxed{x = 14°}$

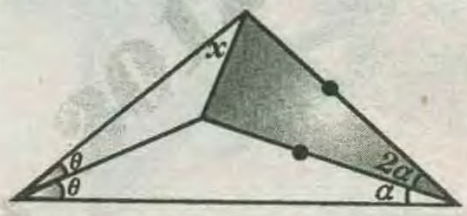
EJERCICIO 2 :

Determinar : «*x*»

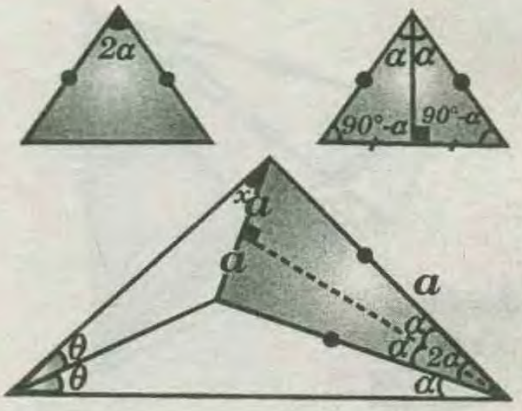


RESOLUCIÓN :

* Se observa un triángulo isósceles :

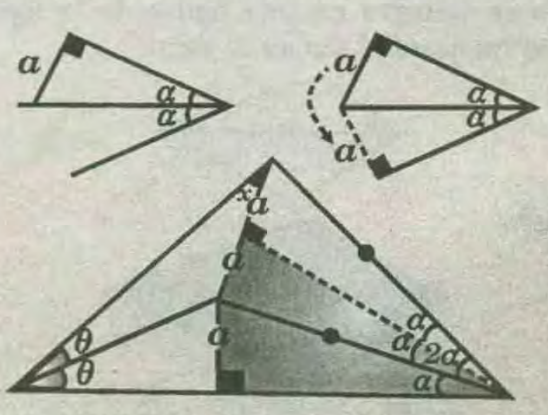


* ***PRIMER PASO :*** Aquí se realizá el siguiente trazo :



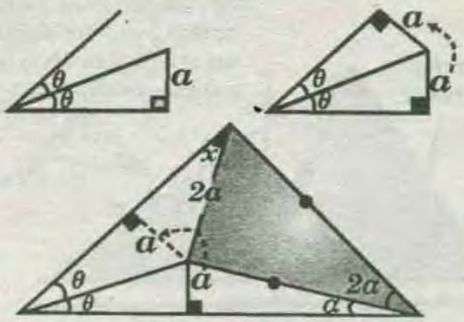
* ***SEGUNDO PASO :***

Luego se observa en la figura que se obtiene :

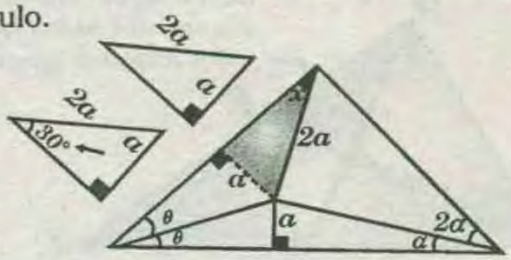


* ***TERCER PASO :***

De la misma manera se obtiene.



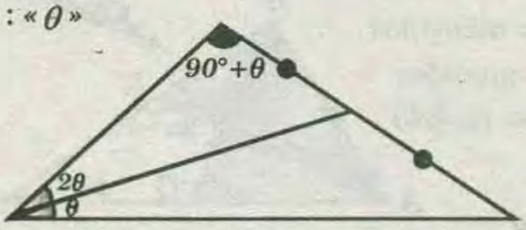
* ***CUARTO PASO :*** Se observa un triángulo rectángulo.



$\Rightarrow \boxed{x = 30°}$

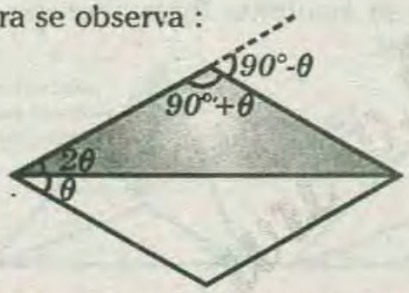
EJERCICIO 3 :

Determinar : « θ »

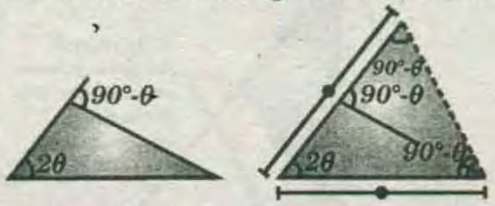


RESOLUCIÓN :

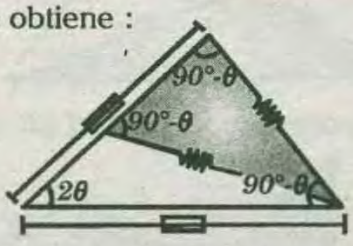
* En la figura se observa :



* Realizamos el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles de la siguiente manera.

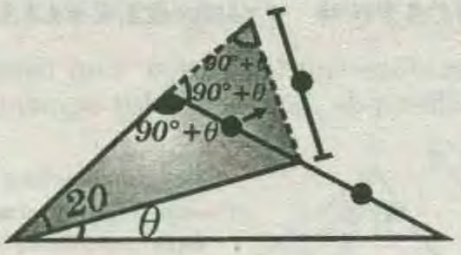


* También se obtiene :



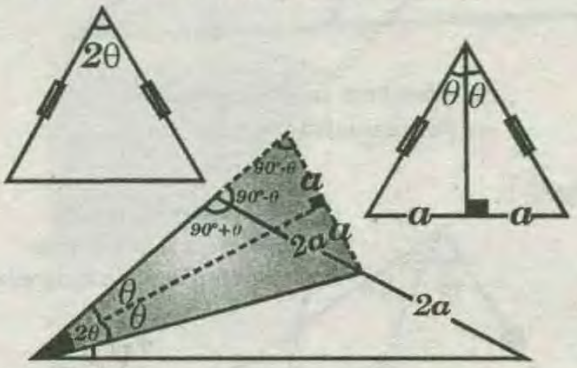
PRIMER PASO :

Realizamos en la figura inicial en trazo sugerido :



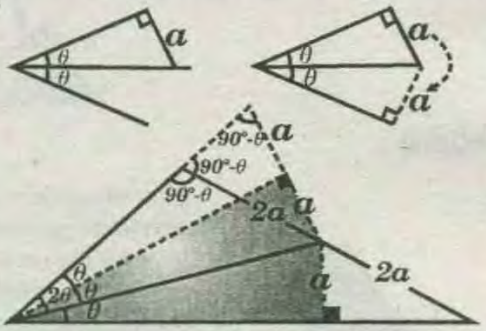
* ***SEGUNDO PASO :***

Se observa que se obtiene un triángulo isósceles donde se cumple la siguiente propiedad



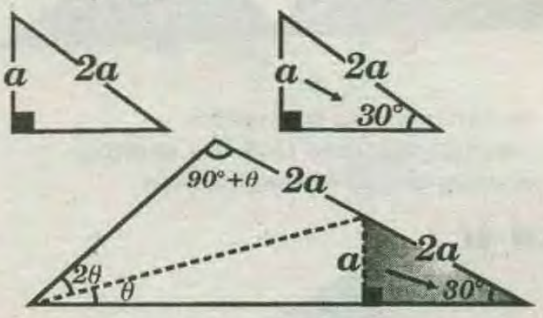
* ***TERCER PASO :***

Luego se observa en la figura que se tiene la siguiente propiedad .

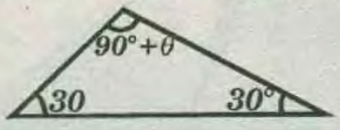


* ***CUARTO PASO :***

Se observa que se obtiene un triángulo rectángulo notable de ***30°*** y ***60°***



* ***QUINTO PASO*** : Finalmente en el triángulo total se tiene:



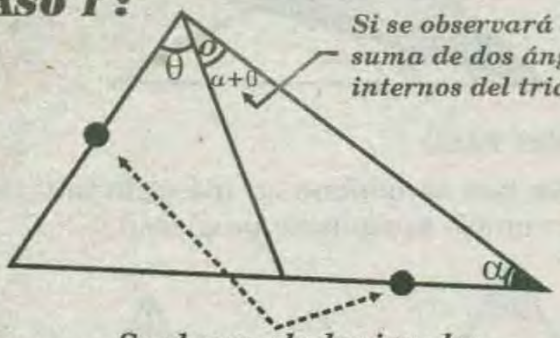
$90°+\theta+3\theta+30°=180°$

$\Rightarrow 4\theta=60° \Rightarrow \boxed{\theta=15°}$

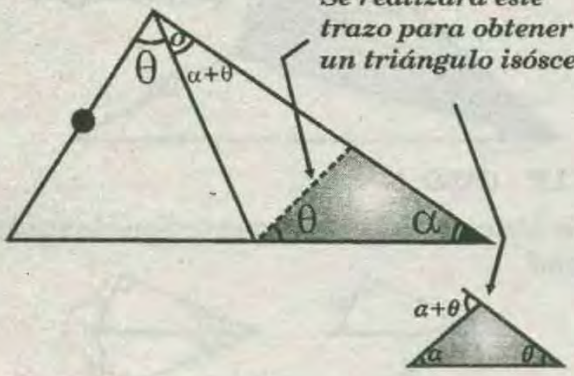
V) BUSCANDO CONGRUENCIA :

Cuando se observan triángulos con lados iguales en forma alternada , se realizan los siguientes trazos.

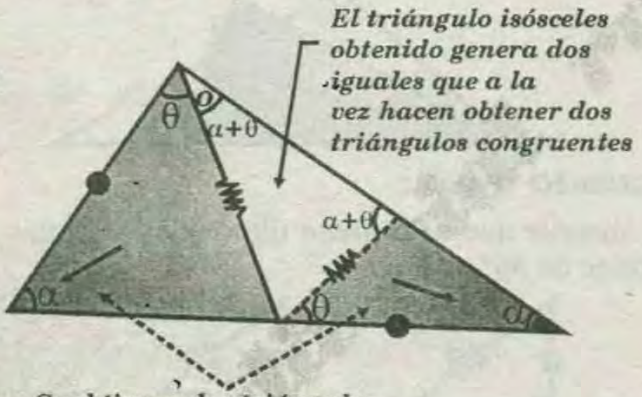
CASO I :



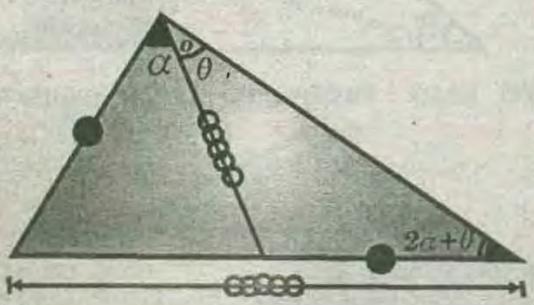
* Se hará :



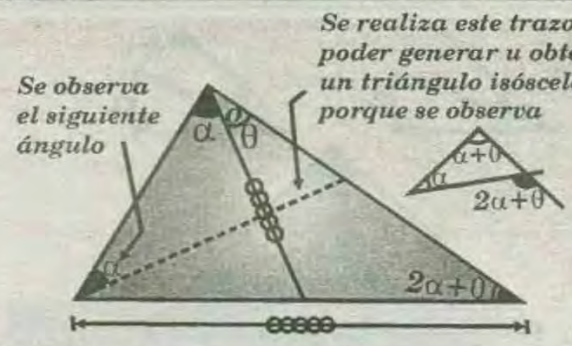
* Se obtiene :



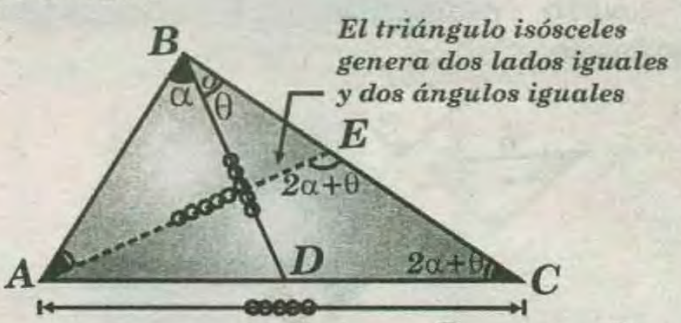
CASO II :



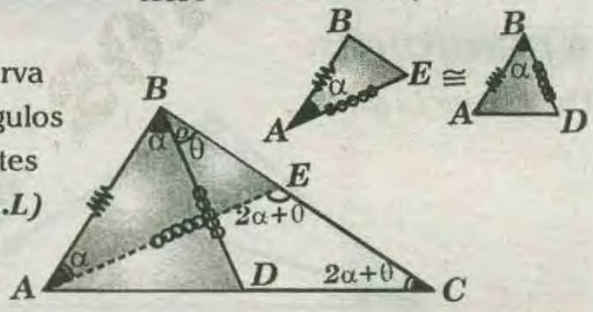
* Se hará :



* Se obtiene :

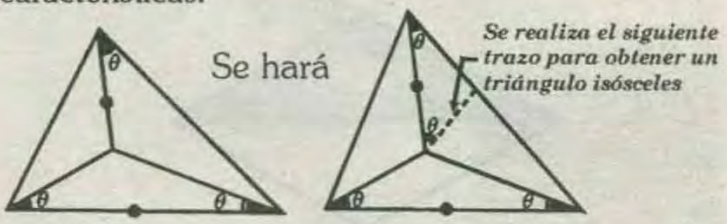


Se observa dos triángulos congruentes caso *(L.A.L)*

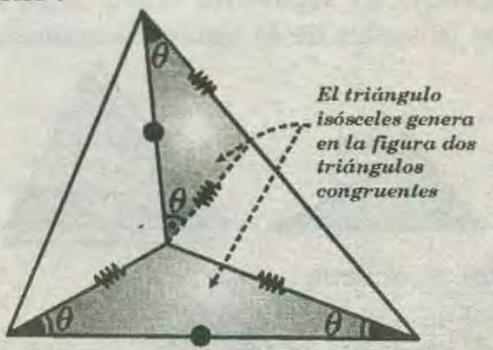


CASO III :

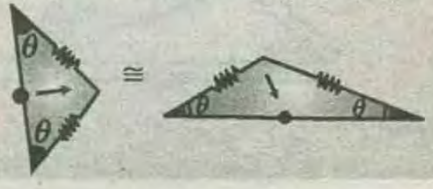
Si tenemos la siguiente figura con las siguientes características.



* Se obtiene :

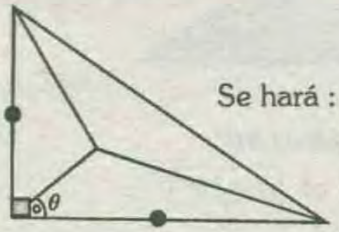


* Se observa congruencia , caso *(A.L.A)* :

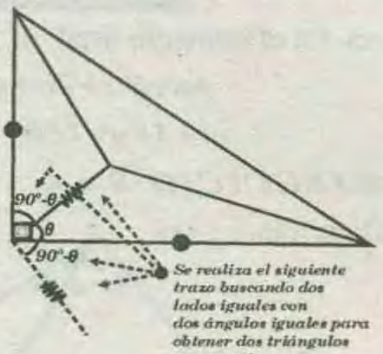


CASO IV :

Si tenemos la siguiente figura con la siguiente característica.

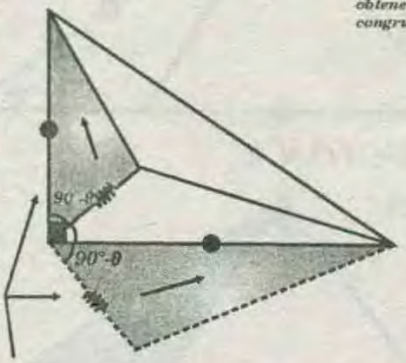


Se hará :



Se realiza el siguiente trazo buscando dos lados iguales con dos ángulos iguales para obtener dos triángulos congruentes.

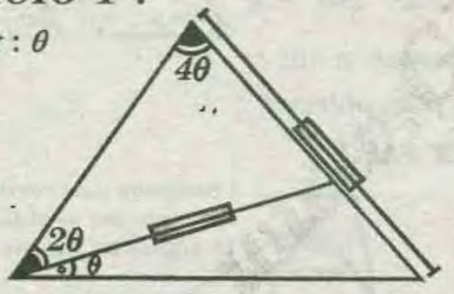
* Se obtiene :



Se obtiene dos triángulos congruentes , caso: ***(L.A.L)*** entonces se aplica «a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa»

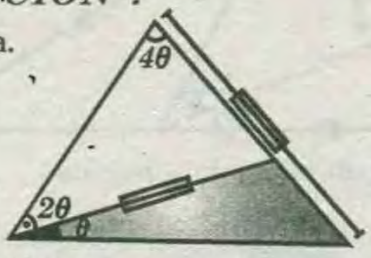
EJERCICIO 1 :

Determinar : θ



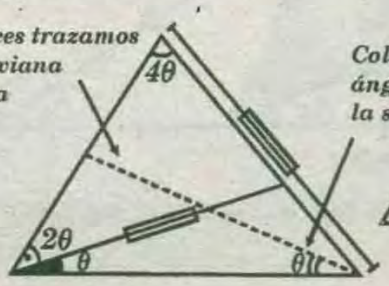
RESOLUCIÓN :

* En la figura.

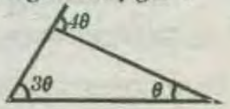


* PRIMER PASO :

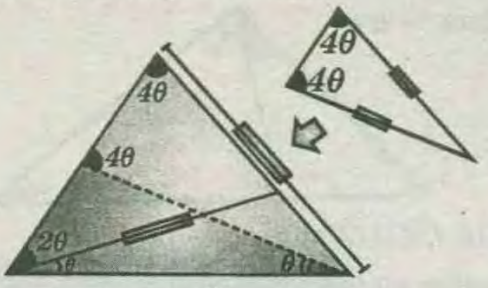
Entonces trazamos una ceviana interna



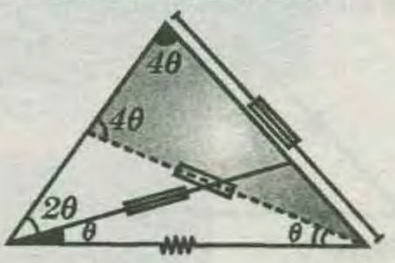
Colocamos el siguiente ángulo para obtener la siguiente figura



* Se obtiene un triángulo isósceles :

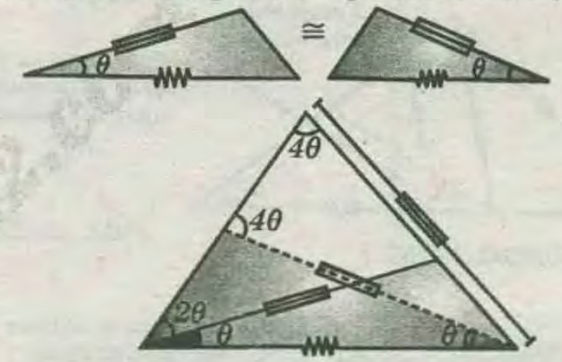


* Luego :

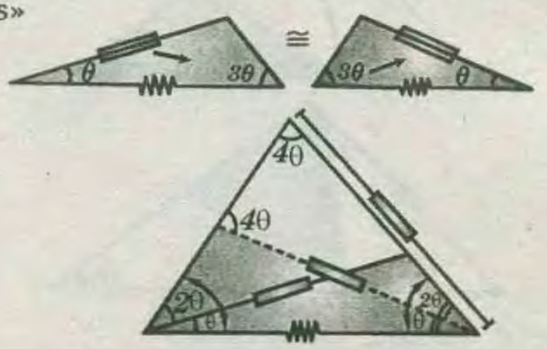


* SEGUNDO PASO :

Se observa dos triángulos congruentes caso ***(L.A.L)***

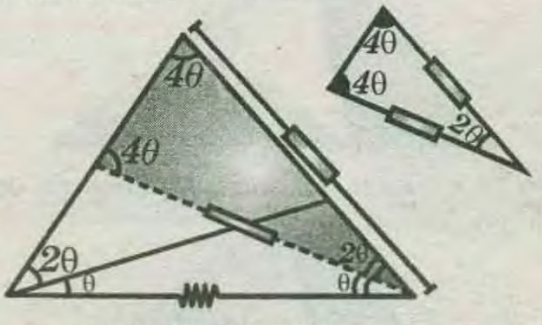


* Se cumple «A lados iguales se oponen ángulos iguales»



* TERCER PASO :

Finalmente se observa :

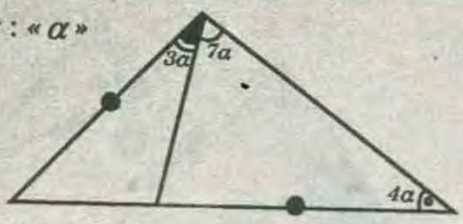


$\Rightarrow 4\theta+4\theta+2\theta=180°$

$\Rightarrow 10\theta=180° \Rightarrow \boxed{\theta=18°}$

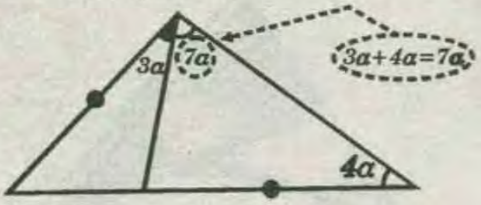
EJERCICIO 2 :

Determinar : « α »



RESOLUCIÓN :

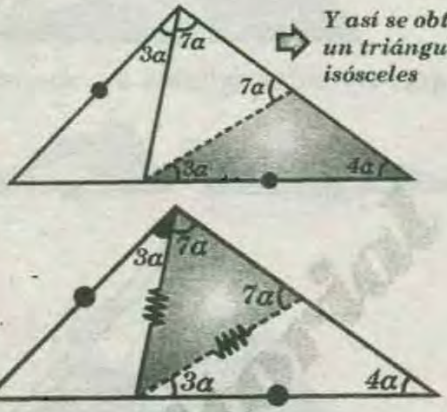
* Se observa en la figura :



*** PRIMER PASO :**

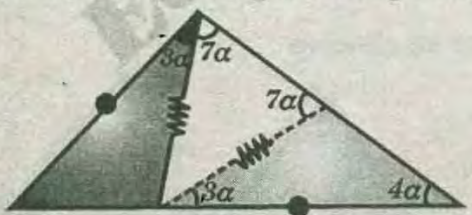
Como vemos lados iguales en forma alternada entonces hacemos.

*** SEGUNDO PASO :**

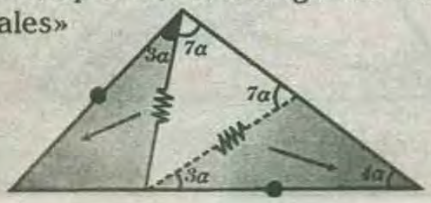


*** TERCER PASO :**

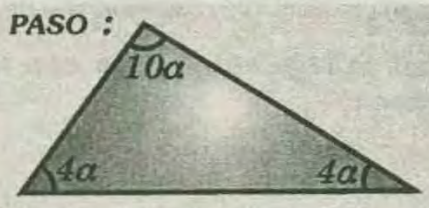
Luego se observa dos triángulos congruentes , caso *(L.A.L).*



* Luego se cumple :«A lados iguales se oponen ángulos iguales»



*** CUARTO PASO :**



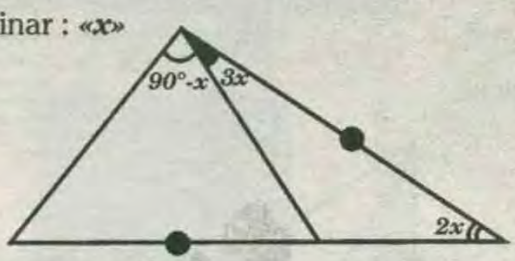
$\Rightarrow$ En el triángulo total.

$$4\alpha+3\alpha+7\alpha+4\alpha=180°$$

$$\Rightarrow 18\alpha=180° \Rightarrow \boxed{\alpha=10°}$$

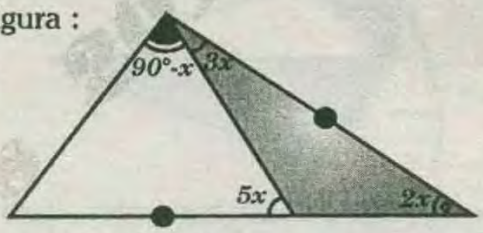
EJERCICIO 3 :

Determinar : «x»



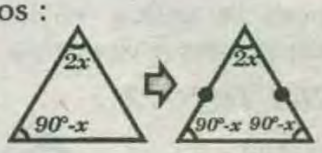
RESOLUCIÓN :

* En la figura :



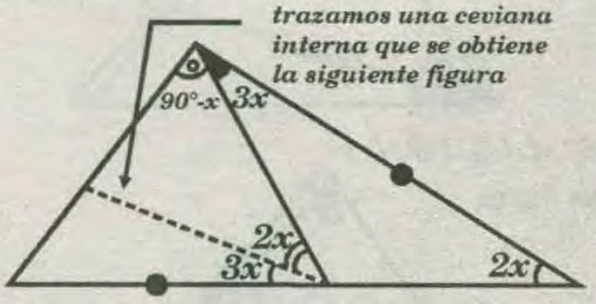
* Luego se ve los ángulos :

$2x \quad 90° - x$

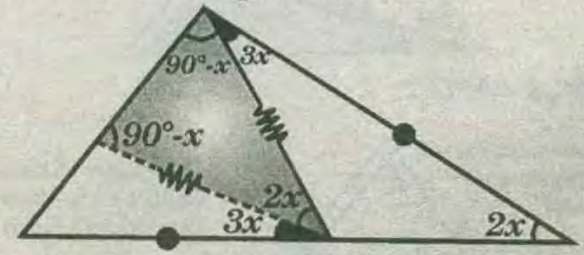


Y lo llevamos a un triángulo para obtener :

*** PRIMER PASO :**

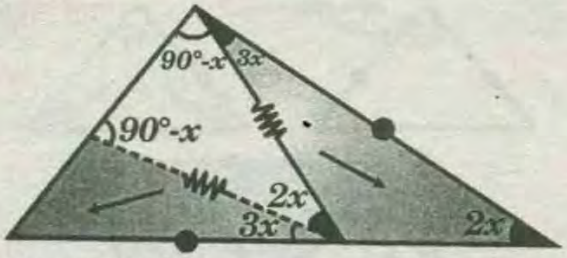


* Se observa un triángulo isósceles :



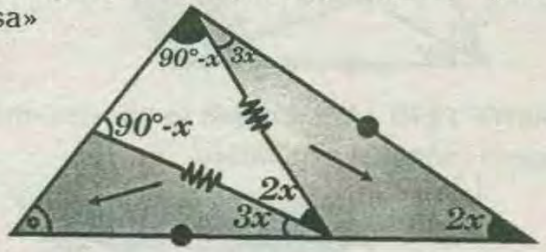
*** SEGUNDO PASO :**

Ahora observamos dos triángulos congruentes , caso *(L.A.L)*



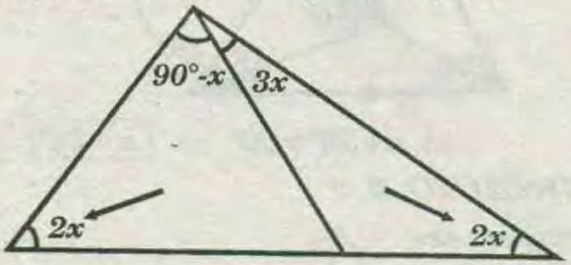
* Luego se cumple :

«A lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa»



* ***TERCER PASO :***

Finalmente se obtiene la siguiente figura.



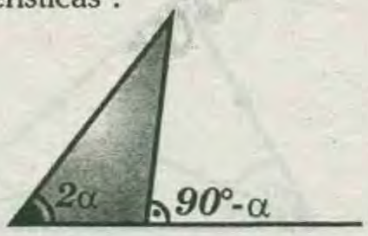
* Luego :

$$2x+90°-x+3x+2x=180°$$

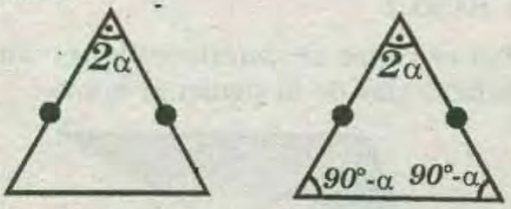
$$\Rightarrow 6x=90° \Rightarrow \boxed{x=15°}$$

VI) TRAZO DE UN ÁNGULO SIMÉTRICO (ESPEJO) :

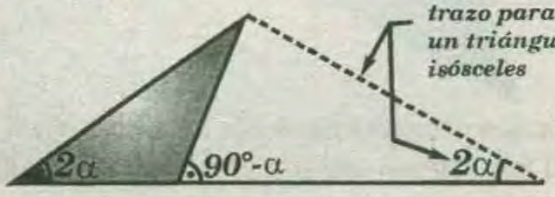
CASO 1 : Si observamos la siguiente figura con las siguientes características :



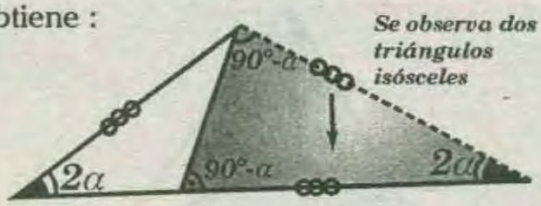
* Se buscará :



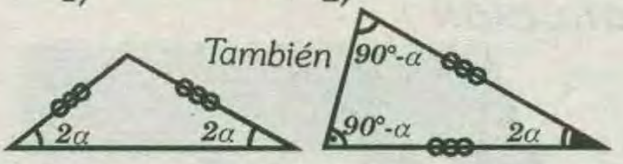
* Ahora hacemos :



* Se obtiene :

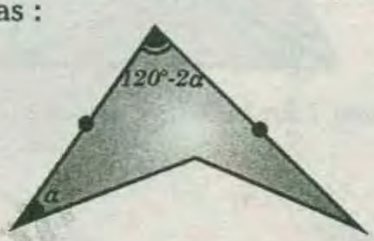


1) 2)

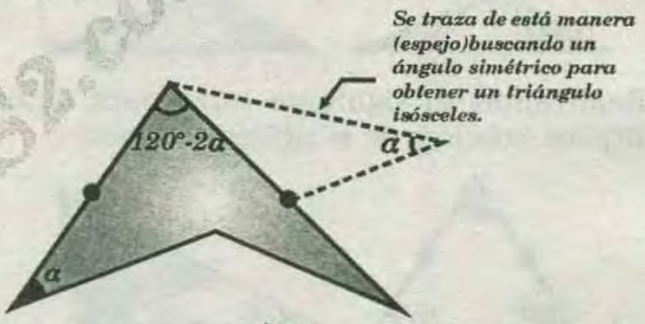


CASO 2 :

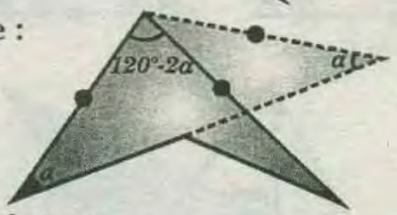
Si tenemos está figura con las siguientes caracteristicas :



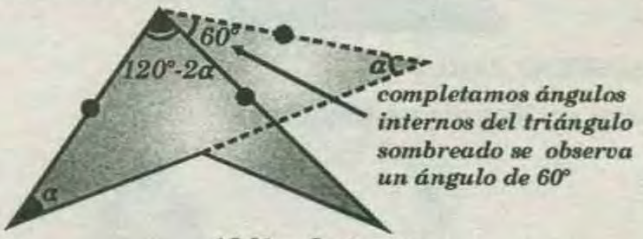
* Se hará :



* Se obtiene :

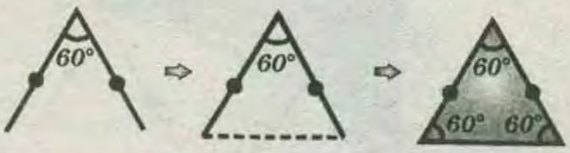


* Ahora se observa :



$$\underline{120° - 2\alpha+\alpha+\alpha}$$
$$120°$$

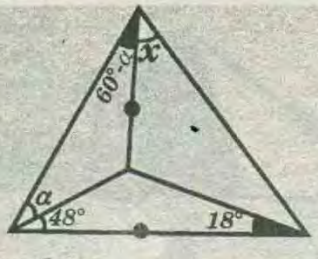
* Ahora aplicamos :



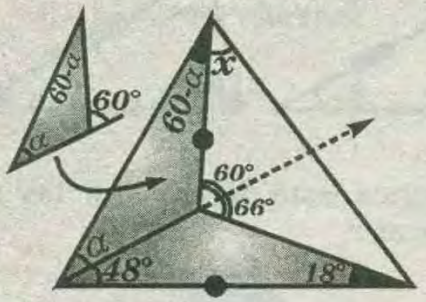
Se traza y se obtiene un triángulo equilátero

EJERCICIO 1 :

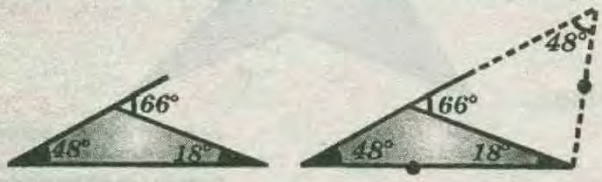
Determinar : «x»



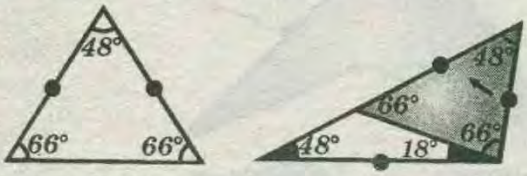
RESOLUCIÓN :



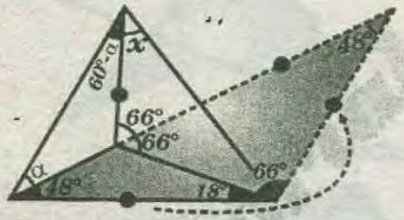
* ***PRIMER PASO :*** En la figura sombreada se tiene



* Realizamos el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles de la siguiente manera :

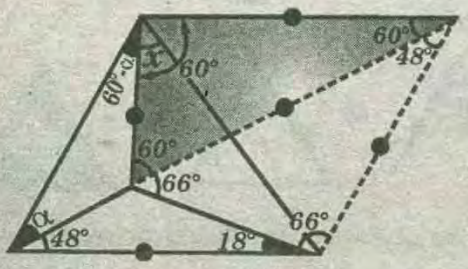


* Luego en la figura :

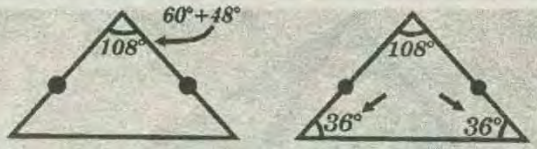


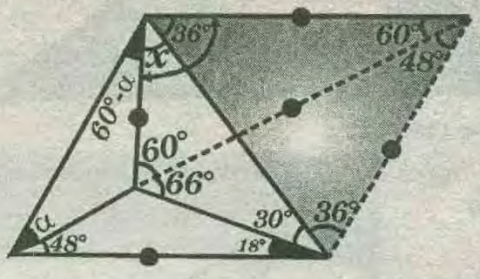
* ***SEGUNDO PASO :***

Luego se observa un triángulo equilátero .

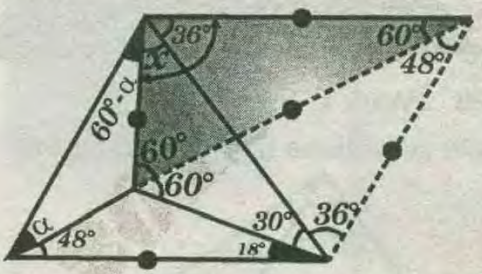


* ***TERCER PASO :*** Luego vemos un nuevo triángulo isósceles.





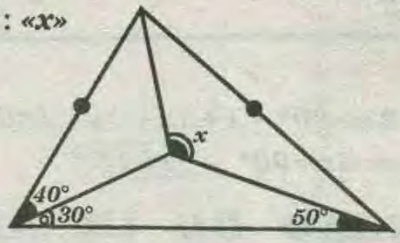
* ***CUARTO PASO :*** Finalmente se observa en la figura un nuevo triángulo equilátero



$\Rightarrow x+36°=60° \Rightarrow \boxed{x=24°}$

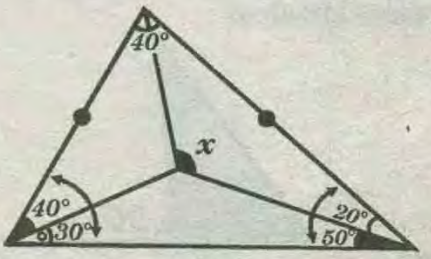
EJERCICIO 2 :

Determinar : «*x*»



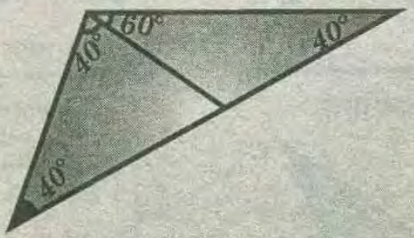
RESOLUCIÓN :

* Se observa en la figura , un triángulo isósceles.

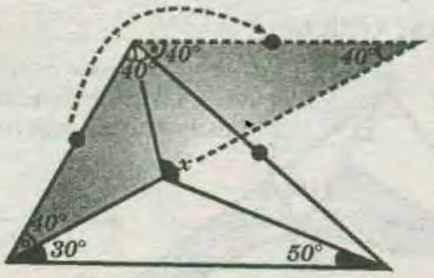


PRIMER PASO :

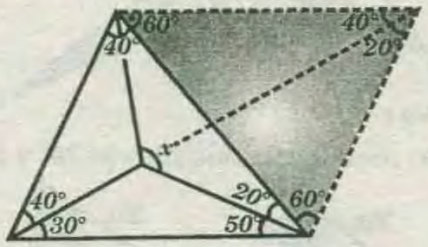
* Se observa que se puede obtener un nuevo triángulo isósceles de la siguiente forma :



$\Rightarrow$ Empleamos el sexto criterio de construcción para obtener el triángulo anterior

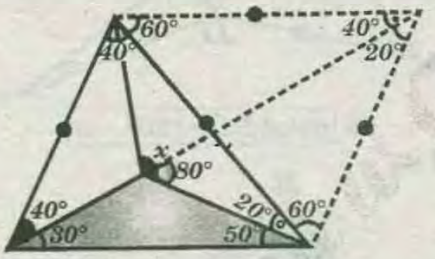


* ***SEGUNDO PASO :*** Ahora se observa la siguiente propiedad donde se cumple :

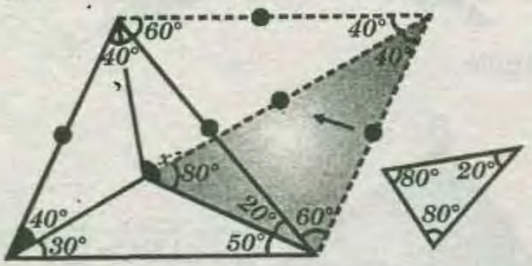


* ***TERCER PASO :***

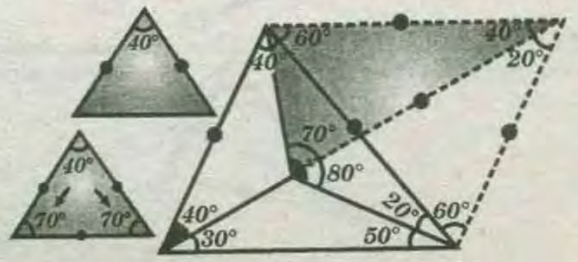
Luego se observa en la figura un triángulo que cumple la siguiente propiedad.



* ***CUARTO PASO :*** Luego se obtiene un triángulo isósceles.



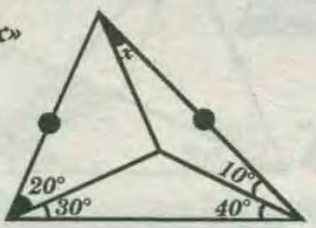
* ***QUINTO PASO*** : También se obtiene .



* Luego : $x=70°+80° \Rightarrow \boxed{x=150°}$

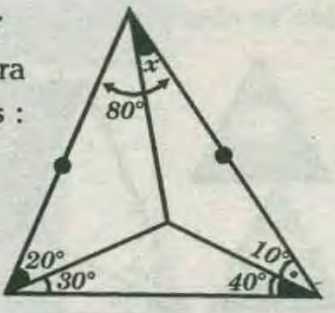
EJERCICIO 3 :

Determinar : «x»



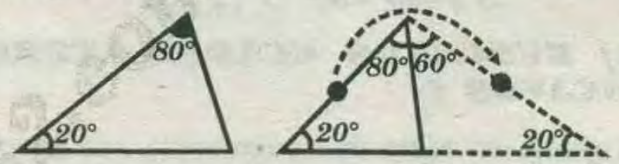
RESOLUCIÓN :

* Se observa en la figura un triángulo isósceles :

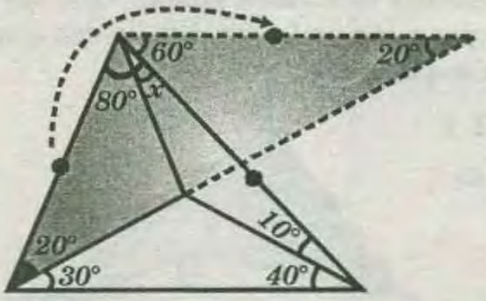


* ***PRIMER PASO :***

En la figura se tiene :

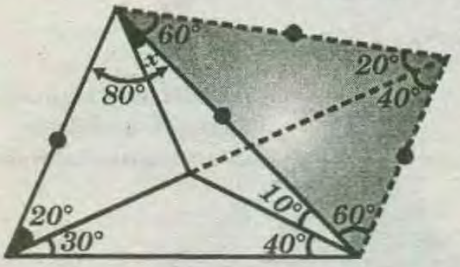


* Empleando el sexto criterio de construcción para obtener el triangulo anterior.



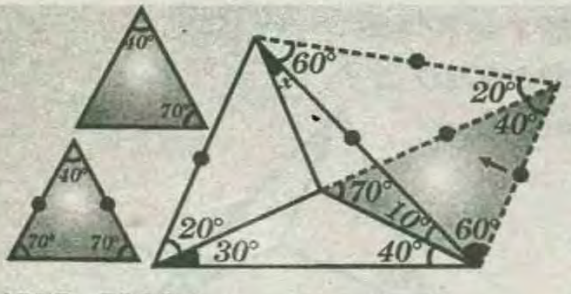
* ***SEGUNDO PASO :***

Luego se observa en la figura que se obtiene la siguiente propiedad donde se cumple :



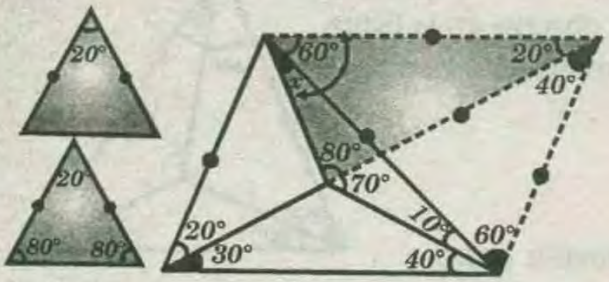
* ***TERCER PASO :***

También se obtiene un nuevo triángulo isósceles.



* *CUARTO PASO :*

También se observa en la figura :



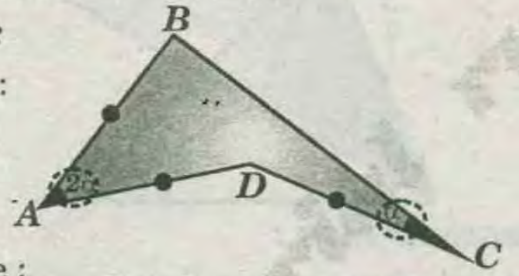
$\Rightarrow x+60°=80° \Rightarrow \boxed{x=20°}$

VII) BUSCANDO CUADRILÁTEROS CONCAVOS :

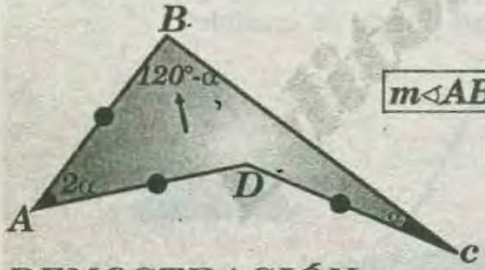
Con ayuda del tema de congruencia , se buscará obtener en las figuras dadas, cuadriláteros cóncavos tanto interiormente como exteriormente, teniendo en cuenta obtener tres lados iguales con sus ángulos internos que estén en la relación de dos a uno; de la siguiente manera.

CASO I :

Si tenemos :

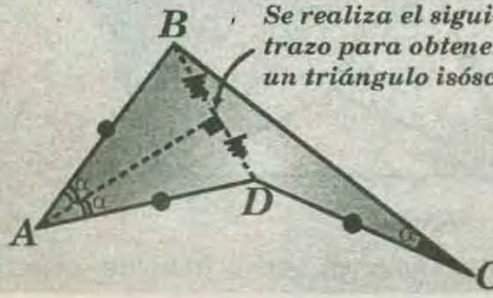


* Se cumple :

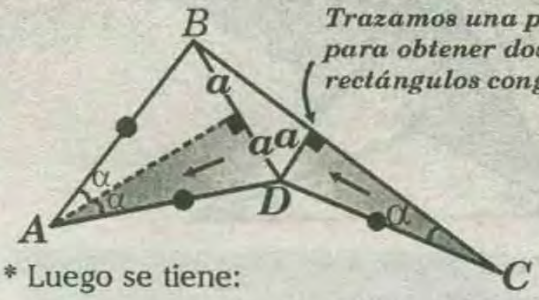


$\boxed{m\sphericalangle ABC=120° - \alpha}$

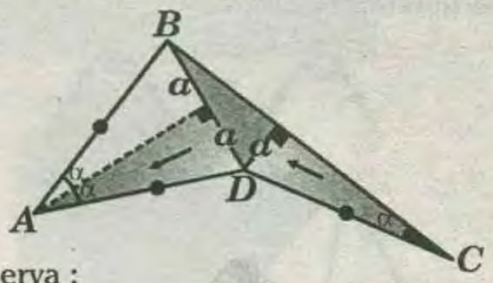
DEMOSTRACIÓN :



* También se obtiene :



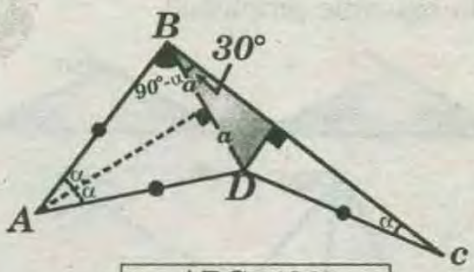
* Luego se tiene:



* Se observa :

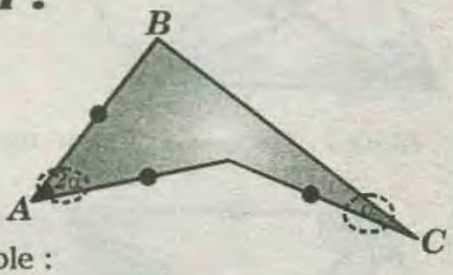
Un triángulo rectángulo notable de *30°* y *60°* .

* Ahora :

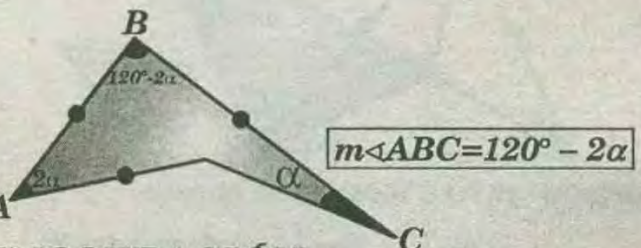


$\Rightarrow \boxed{m\sphericalangle ABC=120° - \alpha}$

CASO II :

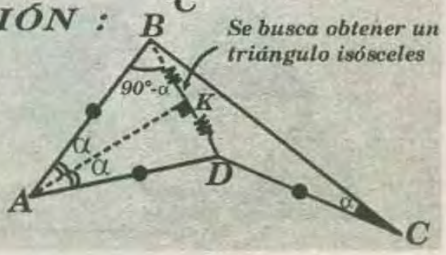


* Se cumple :

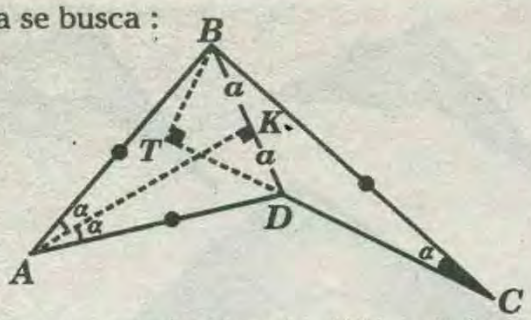


$\boxed{m\sphericalangle ABC=120° - 2\alpha}$

DEMOSTRACIÓN :

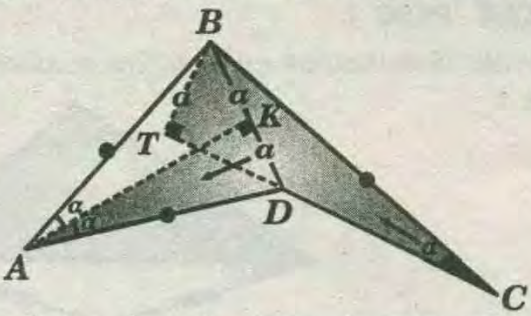


* Ahora se busca :



* Se observa que el triángulo *ABD* es isósceles.

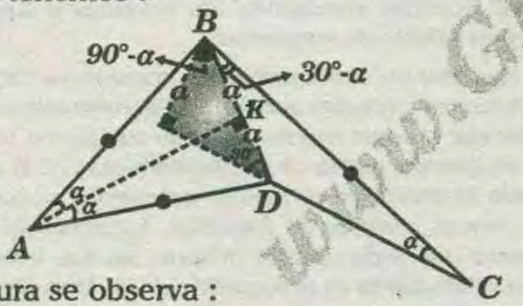
* Se traza $\overline{BT} \perp \overline{TC}$ para obtener dos triángulos rectángulos congruentes $\triangle AKD \cong \triangle BTC$



* Como $\triangle AKD \cong \triangle BTC \Rightarrow BT=KD=a$

*Luego es observa: $\triangle BTD$ es notable de *30°* y *60°*

* Ahora tenemos :



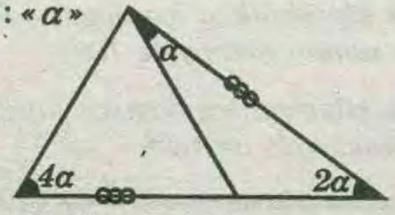
* En figura se observa :

$$m\sphericalangle ABC=90° - a+30° - a$$

$$\Rightarrow \boxed{m\sphericalangle ABC=120° - 2a}$$

EJERCICIO 1 :

Determinar : « *a* »

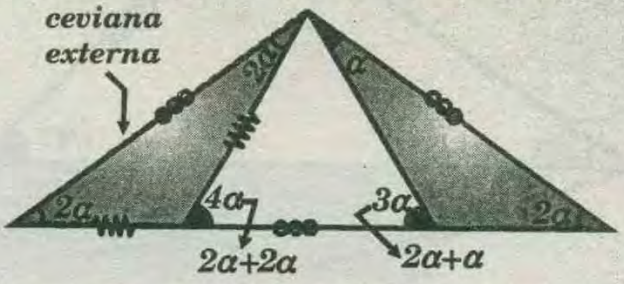


RESOLUCIÓN :

* Observamos en la figura

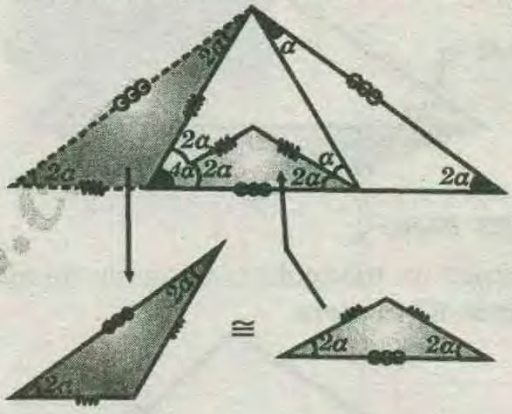
* ***PRIMER PASO :***

Primero aplicamos en primer criterio de construcción trazando una ceviana externa.



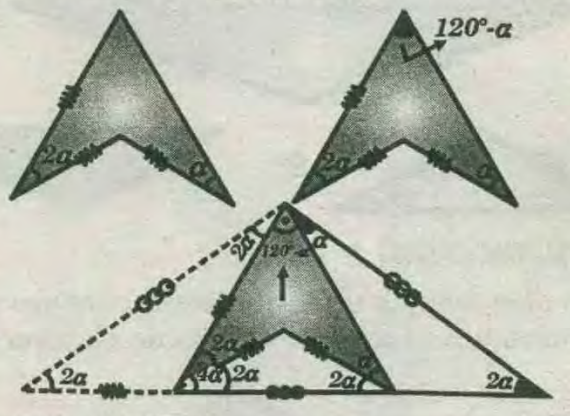
* ***SEGUNDO PASO :***

Ahora construimos un triángulo congruente interiormente para obtener dos triángulos congruentes de la siguiente forma caso *(A.L.A)*



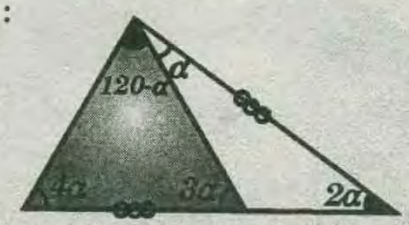
* ***TERCER PASO :***

Luego en la nueva figura observamos un cuádrilatero cóncavo donde se cumple :



* ***CUARTO PASO :***

Finalmente se observa en la figura sombreada que se cumple :



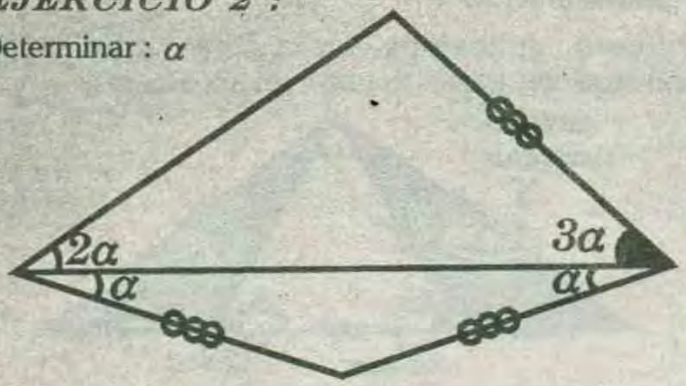
$$\Rightarrow 4a+120° - a+3a=180°$$

$$\Rightarrow 6a=60° \Rightarrow \boxed{a=10°}$$

WWW.GRATIS2.C

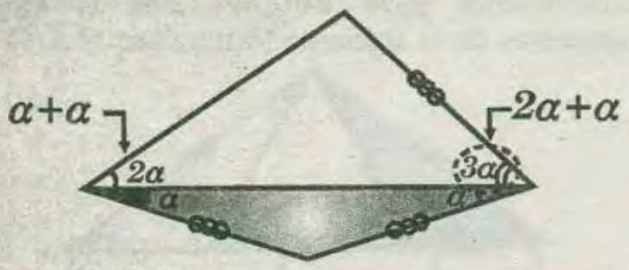
EJERCICIO 2 :

Determinar : α



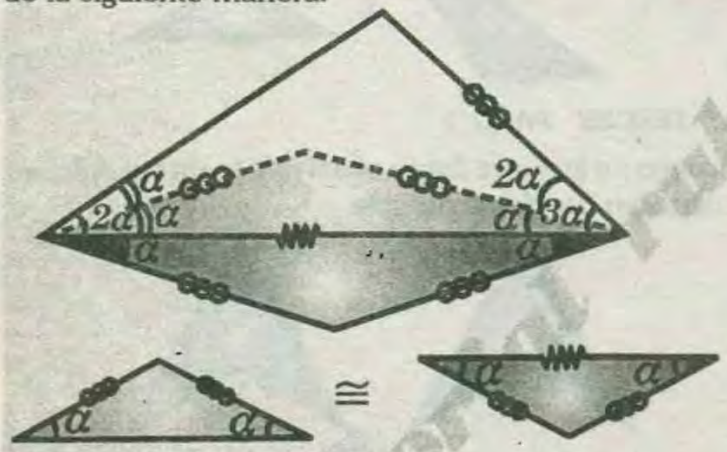
RESOLUCIÓN :

* Observamos la figura y se obtiene :



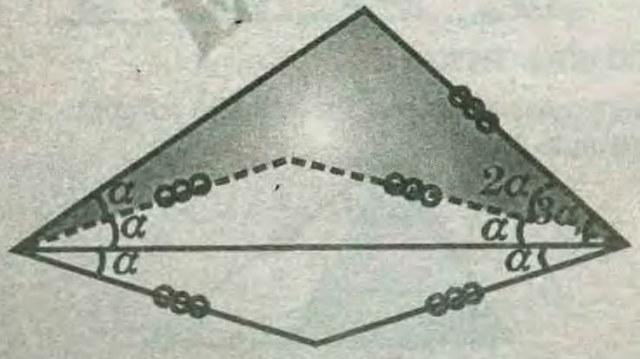
* ***PRIMER PASO :***

Construimos un triángulo congruente interiormente de la siguiente manera.

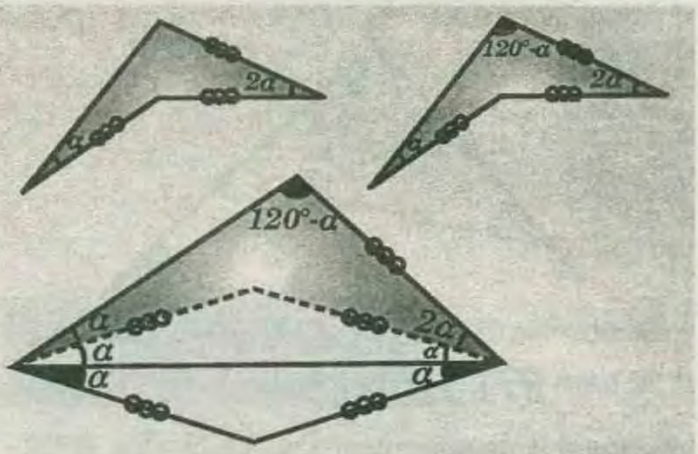


* ***SEGUNDO PASO :***

Ahora observamos un cuadrilátero concavo y con ello aplicamos èl séptimo criterio de construcción :

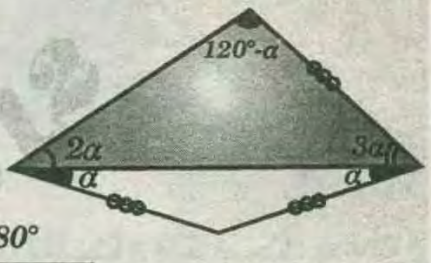


* Aquí podemos observar que se cumple :



* ***TERCER PASO :***

Finalmente observamos en la figura sombreada se cumple :



$$120° - \alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180°$$

$$\Rightarrow 4\alpha = 60° \Rightarrow \boxed{\alpha = 15°}$$

MENSAJE A LA TIERRA

Sabemos que en la Tierra han existido grandes geómetras de la talla de Euclides quien dedicó gran parte de su vida a la elaboración de una geometría consistente. ¿Podrá Euclides resolver nuestro problema? Nuestras cuestiones son enviadas y rápidamente recibimos vía satélite las respuestas:

«No negamos la consistencia de la geometría de Euclides pero es necesario tener en cuenta que los resultados de ésta se basan en 5 axiomas que durante muchos años se supusieron ciertos. Los avances en diversas ramas de las Matemáticas y de la Astrofísica han creado la necesidad de nuevas geometrías elaboradas por grandes mentes como la de Riemann, Lobachevsky y Bolyai. Proponemos que sean ustedes mismos los que analicen que geometría deben aplicar en su pequeño planeta. Para ello enviamos una serie de directrices:

La geometrías que proponemos son:

* ***Geometría euclídea:*** *los ángulos interiores de un triángulo suman exactamente 180°*

* ***Geometría hiperbólica:*** *los ángulos interiores de un triángulo suman menos de 180°*

* ***Geometría elíptica:*** *los ángulos interiores de un triángulo suman más de 180°*

Para llegar a concluir cuál de ellas se ajusta a sus necesidades deberán demostrar utilizando las herramientas y saberes matemáticos que poseen una de estas tres condiciones. Hace falta que sea cierta para todos los triángulos.

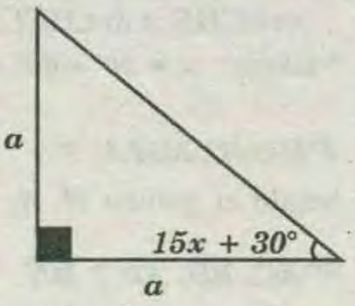
Será necesario que tengan claro el concepto «recta», en cualquier geometría la recta es el camino más corto que une dos puntos. Con estos datos, confiamos en obtener una demostración fiable.»

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

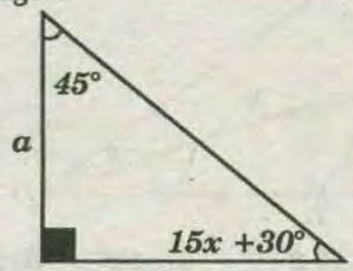
Calcular "x"

A) 1°
B) 2°
C) 3°
D) 4°
E) 20°



RESOLUCIÓN:

* Como es un triángulo rectángulo isósceles , luego :



$15x + 30° = 45°$

$\rightarrow 15x = 15°$

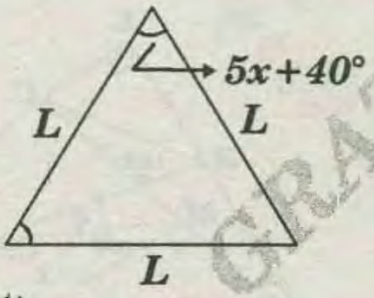
$\rightarrow x = 1°$

RPTA :"A"

PROBLEMA 2 :

Calcular "x"

A) 10°
B) 20°
C) 2°
D) 4°
E) 5°



RESOLUCIÓN:

* Como se trata de un triángulo equilátero; luego:

$$5x + 40 = 60°$$

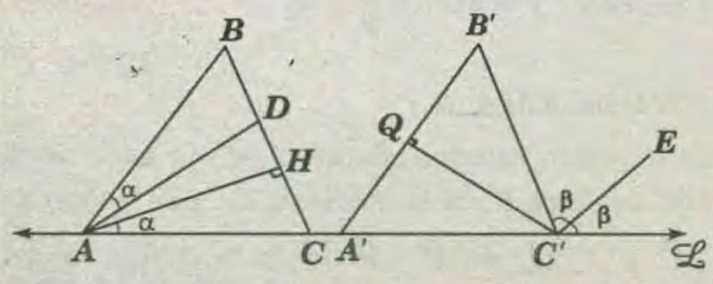
$$\Rightarrow 5x = 20° \Rightarrow x = 4°$$

RPTA :"D"

PROBLEMA 3 :

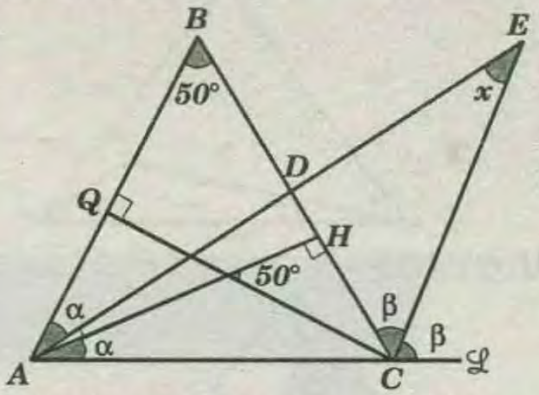
En el gráfico, el triángulo *ABC* se ha trasladado sobre $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ tal que su nueva posición se muestra en *A'B'C'* .

Si la medida del ángulo en $\overline{AH}$ y $\overline{C'Q}$ es 130°, calcule la medida del ángulo entre $\overline{AC}$ y $\overline{C'E}$



A) 20° B) 25° C) 30° D) 30° E) 65°/2

RESOLUCIÓN :



* Por ángulos de lados perpendiculares :

$$m\sphericalangle B = 180° - 130° = 50°$$

* Ahora por propiedad :

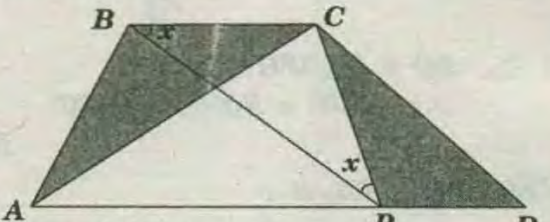
$$x = \frac{50°}{2} \rightarrow x = 25°$$

RPTA :"B"

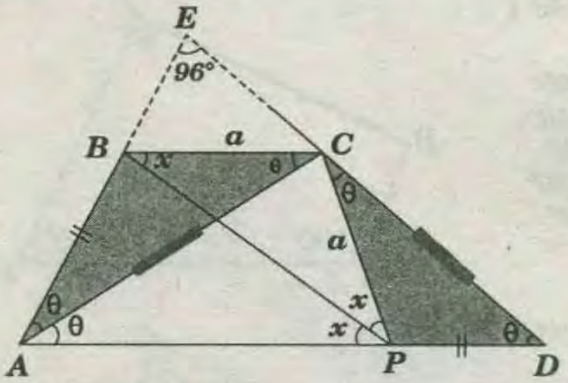
PROBLEMA 4 :

En el gráfico , las regiones sombreadas son congruentes, $\overline{AD} // \overline{BC}$ y el ángulo entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ mide 96° . Calcule *x* .

A) 20°
B) 24°
C) 28°
D) 35°
E) 32°



RESOLUCIÓN :



* Si : $\Delta ABC \cong \Delta DPC$

$\Rightarrow m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle D = \theta$ *(Teoría)*

$\wedge\ AC = CD \Rightarrow m\sphericalangle CAD = m\sphericalangle O = \theta$

* Pero : $m\sphericalangle E = 96°$

$\Rightarrow 2\theta + \theta = 180° - 96° = 84° \Rightarrow \theta = 28°$

* $\Delta PCD : 2x = 2\theta \Rightarrow x = \theta \Rightarrow x = 28°$

RPTA :"C"

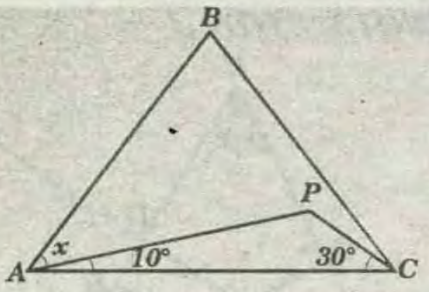
PROBLEMA 5 :

Según el gráfico, *AB=AP=BC* .

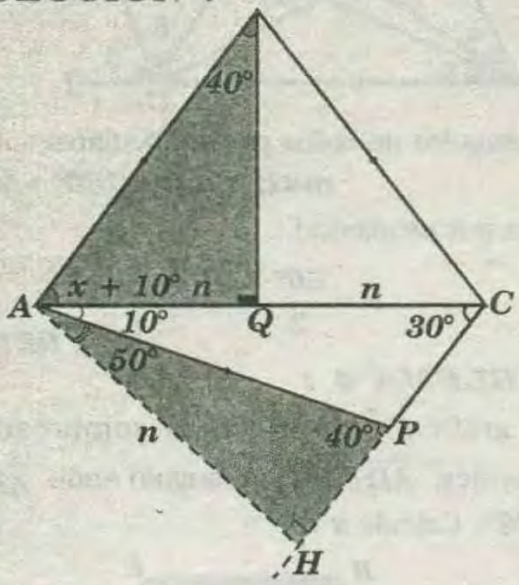
Calcule *x* .

GRATIS.com

A) 30°
B) 40°
C) 50°
D) 60°
E) 70°



RESOLUCIÓN :



Si $\triangle ABQ \cong \triangle APH$ (LL)

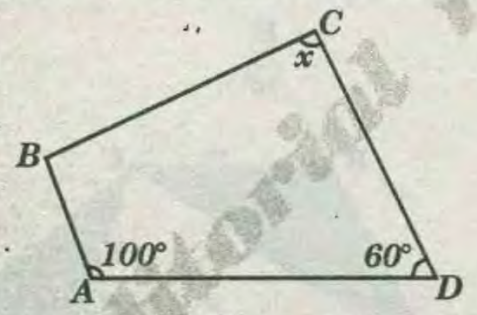
$\Rightarrow x + 10° = 50° \Rightarrow x = 40°$

RPTA:"B"

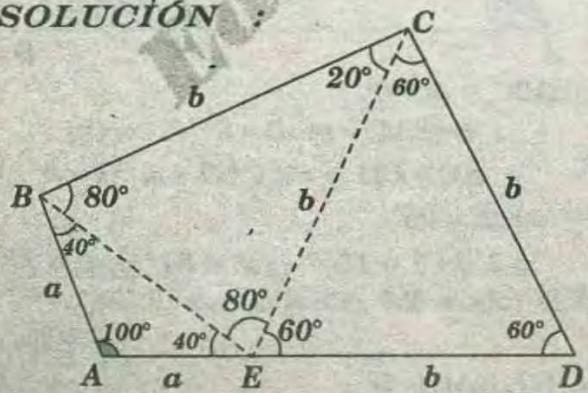
PROBLEMA 6 :

En el gráfico , $BC=CD$ y $AD=AB+BC$.
Calcule x .

A) 100°
B) 110°
C) 90°
D) 130°
E) 80°



RESOLUCIÓN :



* Se traza $\overline{CE}$ de manera que la $m\sphericalangle CED = 60° \Rightarrow \Delta ECD$ equilátero :

$EC = CD = ED = b$.

ΔABE isósceles : $AB = AE = a$.

ΔBCE isósceles : $BC = CE = b$;

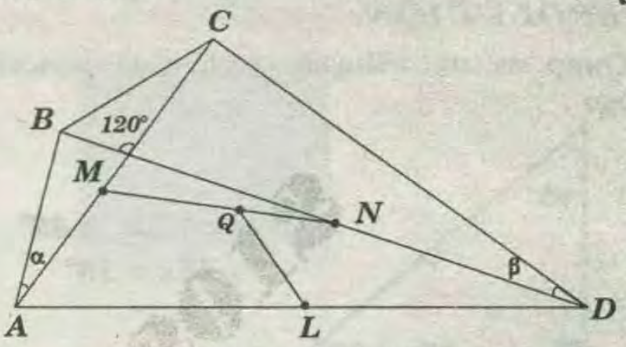
$m\sphericalangle CBE = m\sphericalangle BEC = 80° \Rightarrow m\sphericalangle BCE = 20°$

* Luego : $x = 20° + 60° \Rightarrow x = 80°$

RPTA: "E"

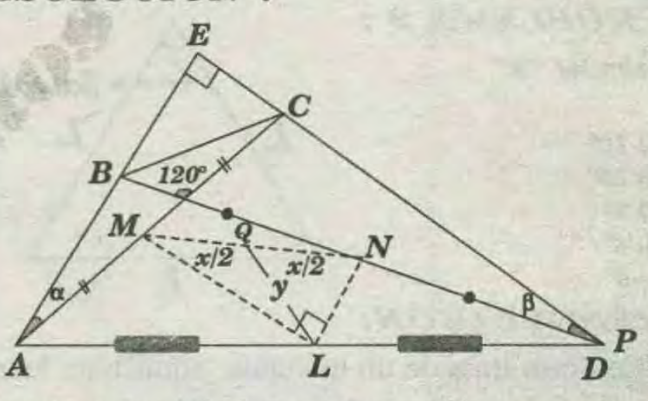
PROBLEMA 7 :

Según el gráfico M, N, L y Q son puntos medios de $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ y $\overline{MN}$ .Si $\alpha+\beta=30°$, Calcule $\frac{MN}{QL}$



A) 1 B) 1/2 C) 2 D) 3/2 E) 2/3

RESOLUCIÓN :



* Por el teorema de los puntos medios :

$\overline{ML} // \overline{CD}$; $\overline{LN} // \overline{AB}$

* Pero :

$$\underbrace{\alpha+\beta}_{30°} + m\sphericalangle E = 120°$$

$$m\sphericalangle E = 90°$$

* Ahora por ángulos de lados perpendiculares :

$$m\sphericalangle MLN = 90°$$

* $\triangle MLN$: $y = x/2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 2$

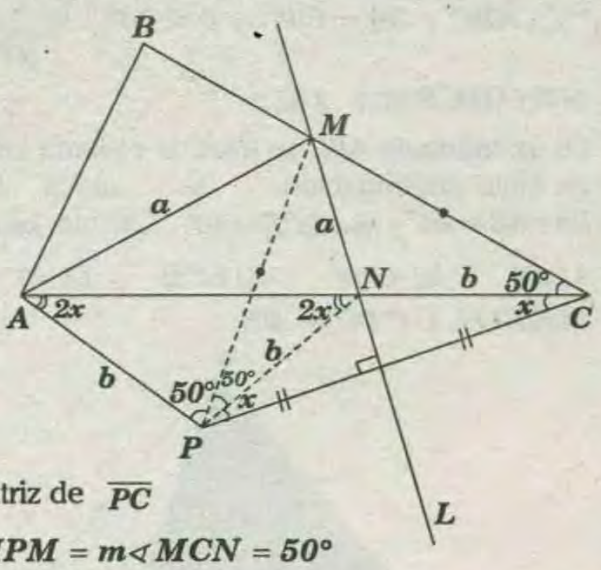
RPTA:"C"

PROBLEMA 8 :

En la región exterior relativa a $\overline{AC}$ de un triángulo ABC se ubica P . Si la mediatriz de $\overline{PC}$ interseca a $\overline{BC}$ y a $\overline{AC}$ en M y N respectivamente tal que $AM=MN$, $AP=NC$ y $m\sphericalangle ACM=50°$, calcule $m\sphericalangle PCN$.

A) 10° D) 20° B) 15° C) 18° E) 30°

RESOLUCIÓN :



L : mediatriz de $\overline{PC}$

$\Rightarrow m\sphericalangle MPM = m\sphericalangle MCN = 50°$

$\Delta AMP \cong \Delta NMP$ (LLL)

$\Rightarrow m\sphericalangle AMP = m\sphericalangle MP = 50°$

$\Delta ANP : 2x + 2x + 100° = 180°$

$4x = 80° \Rightarrow x = 20°$

RPTA:"D"

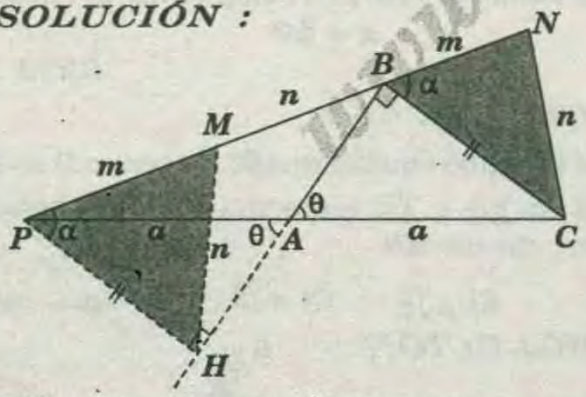
PROBLEMA 9 :

En un triángulo ABC, recto en B, se ubica P en la prolongación de $\overline{CA}$ y N en la prolongación de $\overline{PB}$, tal que $PA=AC$ y $PB=BN+NC$.

Calcule $\frac{NP}{NC}$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 3/2 E) 4/3

RESOLUCIÓN :



$\triangle PHA \cong \triangle CBA$ (AL) $\Rightarrow PH = BC$

$\Delta PMH \cong DBNC$ (LAL) $\Rightarrow MH = NC = n$

$\triangle PHB$: $\overline{MH}$ es mediana

$\Rightarrow m = n \rightarrow \frac{m}{n} = 1$

* Luego :

$$\frac{NP}{NC} = \frac{2m}{n} + 1 \rightarrow \frac{NP}{NC} = 2(1) + (1) \Rightarrow \frac{NP}{NC} = 3$$

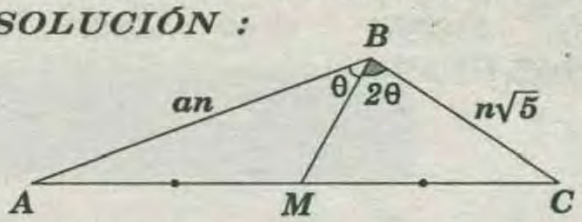
RPTA:"B"

PROBLEMA 10 :

En un triángulo ABC se traza la mediana BM, tal que $m\sphericalangle CBM = 2(m\sphericalangle MBA)$ y $\sqrt{5}(AB) = 2(BC)$. Calcule $m\sphericalangle ABM$.

A) 53° B) 72°30' C) 63°30' D) 60° E) 37°

RESOLUCIÓN :



* Según la relación :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}}; BC > AB$$

* Según las medidas de los ángulos :

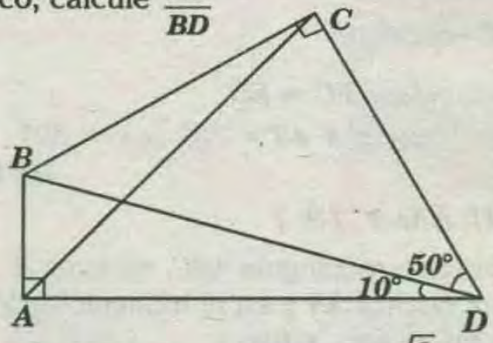
$$m\sphericalangle CBM = 2.m\sphericalangle MBA = 2\theta.\ BC < AB$$

Lo cual se contradicen , en consecuencia el problema está mal propuesto.

Es más , si $\theta = 63°30'$, el triángulo ABC no existe , porque $3\theta = 190°30'$.

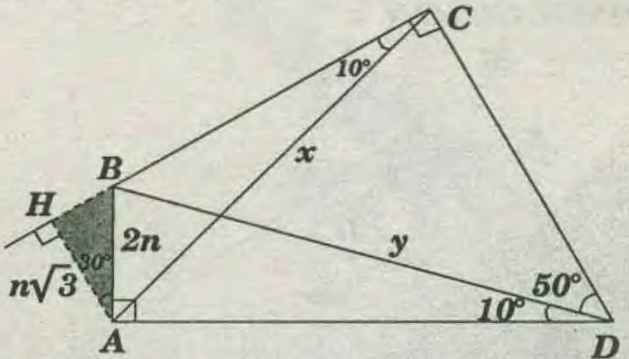
PROBLEMA 11 :

Del gráfico, calcule $\frac{AC}{BD}$



A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

RESOLUCIÓN :



$\triangle AHB$:

$AB = 2n\ ;\ AH = n\sqrt{3}$

$\triangle AHC \sim \triangle BAD$

$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{n\sqrt{3}}{2n} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

RPTA : "D"

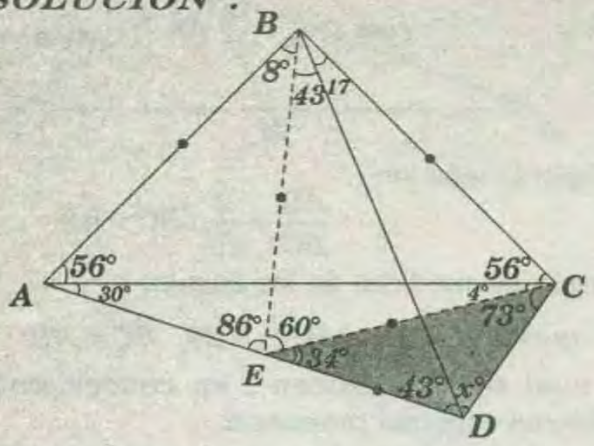
www.GRATIS2.com

PROBLEMA 12 :

En un triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ se ubica D. Si $m\sphericalangle BAC=56°$, $m\sphericalangle CAD=30°$ y $m\sphericalangle CBD=17°$, calcule $m\sphericalangle BDC$.

A) 15° B) 22°30' C) 45° D) 34° E) 30°

RESOLUCIÓN :



* Se traza $\overline{BE}$ de modo que $m\sphericalangle ABE = 8°$

ΔABE isósceles : $AB = BE$

* Pero ΔABC isósceles : $AB = BC$

➡ ΔEBC equilátero

ΔECD isósceles : $EC = ED$

$$\Rightarrow x + 43° = 73° \Rightarrow x = 30°$$

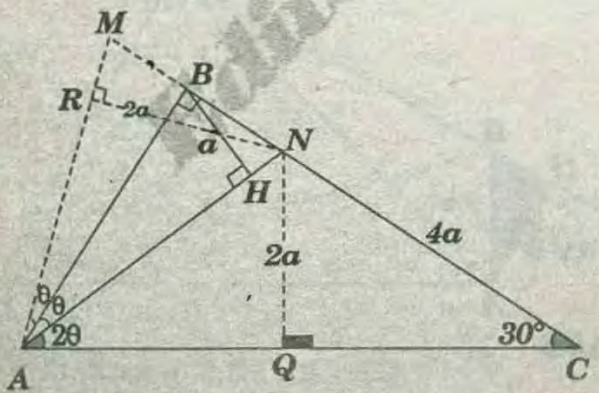
RPTA :"E"

PROBLEMA 13 :

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior AN y en el triángulo ABN se traza la altura BR. Si $NC=4(BH)$ y $m\sphericalangle ACN=30°$, calcule $m\leq BAN$.

A) 20° B) 25° C) 30° D) 35° E) 40°

RESOLUCIÓN :



* $\triangle NQC$ notable de 30° y 60° ➡ $NQ = 2a$

ΔAMN isósceles : Si $\overline{BH} = a$

➡ $NR = 2a$ (propiedad).

* $\triangle ARN \cong \triangle AQN$ (LL)

$$\Rightarrow m\sphericalangle RAN = m\sphericalangle NAQ = 2\theta$$

* $\triangle ABC$: $3\theta = 60° \rightarrow \theta = 20°$

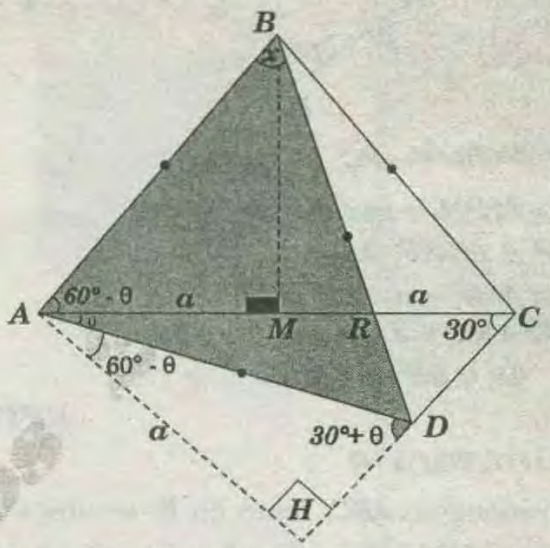
RPTA :"A"

PROBLEMA 14 :

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BR, en cuya prolongación se ubica D, tal que $DA=AB=BC$ y $m\sphericalangle RCD=30°$. Calcule $m\sphericalangle ABR$.

A) 30° B) 45°/2 C) 53°/2 D) 45° E) 60°

RESOLUCIÓN 28 :



* $\triangle AHD \cong \triangle AMB$ (LL)

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAM = m\sphericalangle DAH = 60° - \theta$$

ΔABD :

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAD = 60° - \theta + \theta = 60°$$

* Pero como $AB = AD$, en conscuencia es equilátero.

$$x = 60°$$

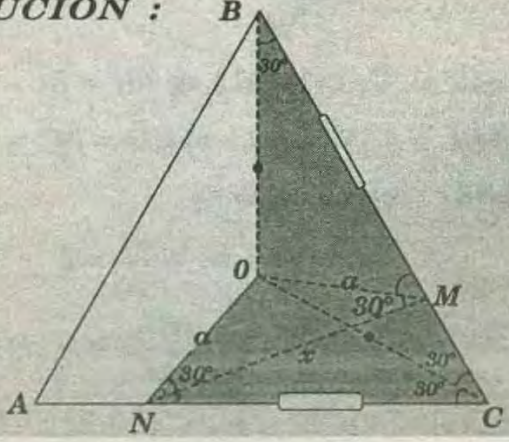
RPTA :"E"

PROBLEMA 15 :

En un triángulo equilátero ABC de centro O se ubica M y N en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si $MB=NC$ y $ON=a$, calcule MN.

A) a B) $a\sqrt{2}$ C) $a\sqrt{3}$ D) $2a$ E) $\frac{3}{2}a$

RESOLUCIÓN :



$\triangle OBM \cong \triangle OCN$ (LAL)

$\Rightarrow ON = OM = a$

$m\sphericalangle BMO = m\sphericalangle ONC$

* El cuadrilátero $NOMC$ es inscriptible.

$\Rightarrow m\sphericalangle OMN = m\sphericalangle ONM = 30°$

$\triangle NOM$: $x = a\sqrt{3}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 16 :

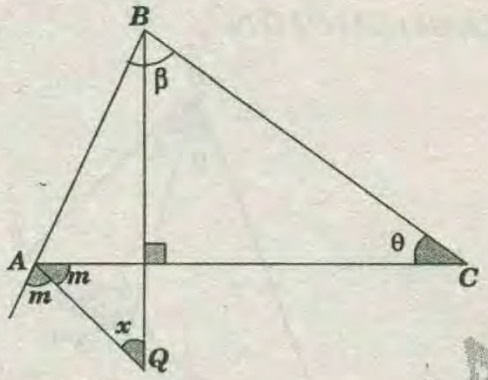
En un triángulo ABC se cumple:

$$m\sphericalangle ABC + m\sphericalangle ACB = 100.$$

Calcule la medida del ángulo agudo que determinan la altura y la bisectriz exterior trazadas desde el vértice A.

A) 50 B) 40 C) 60 D) 48 E) 55

RESOLUCIÓN :



* Dato :

$$\beta + \theta = 100° \quad \text{.....(I)}$$

* $\triangle ABC$: $2m = \beta + \theta$ .....(II)

* (I) en (II): $2m = 100° \Rightarrow m = 50°$

$\Rightarrow x = 40°$

RPTA :"B"

PROBLEMA 17 :

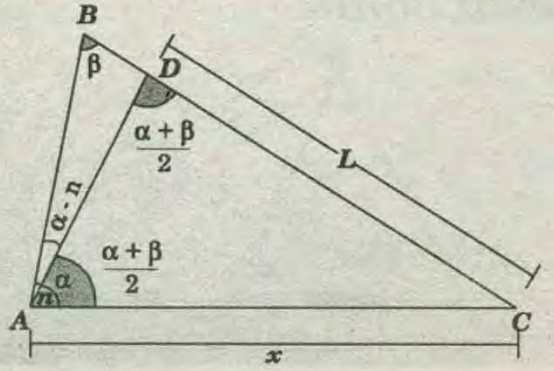
En el lado BC de un triángulo ABC se tiene el punto D, tal que se verifica :

$$m\sphericalangle CDA = \frac{m\sphericalangle BAC + m\sphericalangle ABC}{2}$$

y $CD = L$. Calcule la longitud del lado AC.

A) L B) $\frac{L}{2}$ C) $\frac{L}{3}$ D) $\frac{2L}{3}$ E) $\frac{3L}{4}$

RESOLUCIÓN :



$\triangle ABD$: $\alpha - n + \beta = \frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow n = \frac{\alpha+\beta}{2}$

* $\triangle ADC$ isósceles : $AC = DC \Rightarrow x = L$

RPTA : "A"

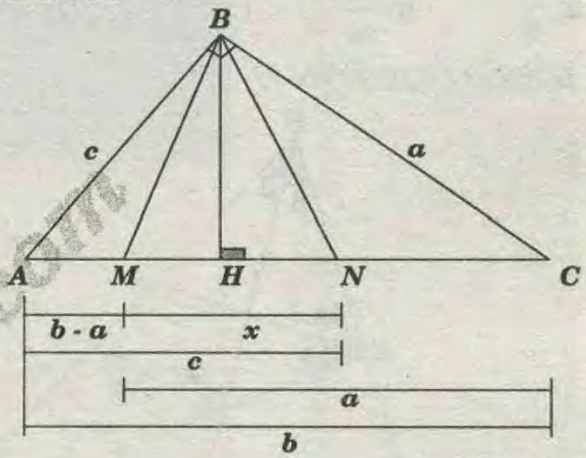
PROBLEMA 18 :

En un triángulo ABC (recto en B) se traza la altura BH. Las bisectrices de los ángulos ABH y HBC intersectan a la hipotenusa en los puntos M y N.

Si $AB + BC - AC = K$; calcule MN.

A) K B) $\frac{2K}{3}$ C) $\frac{K}{2}$ D) $\frac{3K}{4}$ E) $\frac{3K}{5}$

RESOLUCIÓN :



* Dato:

$$c + a - b = k \quad \text{.....(I)}$$

* De la figura: $b - a + x = c$

$$x = c + a - b \quad \text{.....(II)}$$

* De (I) y (II): $x = k$

RPTA :"A"

PROBLEMA 19 :

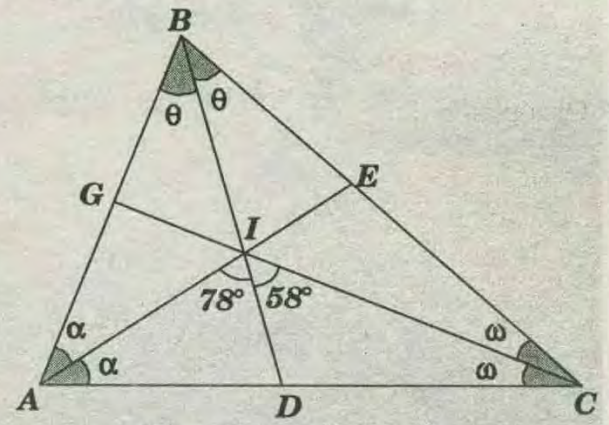
En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores AE , BD y CG intersectándose en el punto I.

Si $m\sphericalangle AJD = 78°$ y $m\sphericalangle DIC = 58°$.

Calcule $m\sphericalangle BAC - m\sphericalangle BCA$.

A) 40 B) 38 C) 44 D) 25 E) 20

RESOLUCIÓN :



* Por propiedad : $78° + 58° = 90° + \theta$

WWW.GRATIS2.COM

$\Rightarrow \theta = 46°$

* ΔABI : $\alpha + 46° = 78° \Rightarrow \alpha = 32°$
* ΔAIC: $32° + \omega = 44° \Rightarrow \omega = 12°$

* Luego:

$x = 2(32° - 12°) \Rightarrow x = 40°$

RPTA :"A"

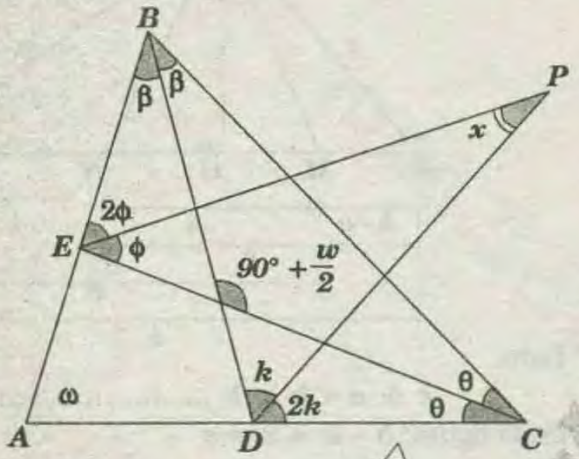
PROBLEMA 20 :

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores BD y CE, luego se trazan los rayos DP y EP tal que : $m\sphericalangle BEP = 2m\sphericalangle PEC$, $m\sphericalangle CDP = 2m\sphericalangle PDB$.

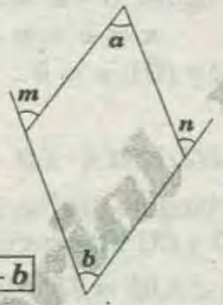
Si $m\sphericalangle BAC = \omega$. Calcule la $m\sphericalangle EPD$.

A) $\frac{w}{2}$ B) $\frac{90}{w}$ C) $\frac{180}{2w}$ D)45 E) 60

RESOLUCIÓN :



* Recuerda la propiedad:



$\boxed{m+n=a+b}$

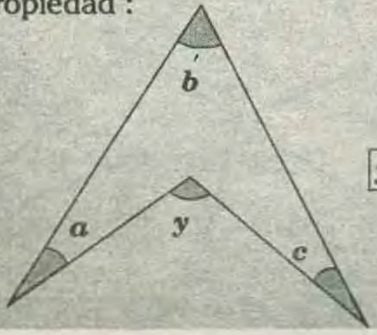
* En el cuadrilátero $AEID$ por propiedad :

$$\varpi + 90° + \frac{\varpi}{2} = 3(k+\phi)$$

$$\Rightarrow 90° + \frac{3\varpi}{2} = 3(k+\phi)$$

$$\Rightarrow 30° + \frac{\varpi}{2} = k + \phi \quad .....(I)$$

* Otra propiedad :



$\boxed{y=a+b+c}$

* En el cuarilátero no convexo $EPDI$:

$$x + k + \phi = 90° + \frac{\varpi}{2} \quad .....(II)$$

* (I) en (II):

$$x + 30° + \frac{\omega}{2} = 90° + \frac{\omega}{2}$$

$$\Rightarrow x = 60°$$

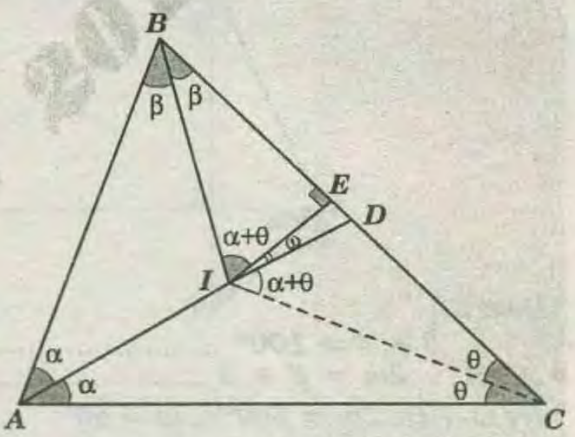
RPTA : "E"

PROBLEMA 21 :

En un triángulo ABC, el punto I es el incentro, el punto D es el punto de intersección de la prolongación de $\overline{AI}$ con el lado BC, IE es la perpendicular trazada del punto I al lado BC. La medida del punto I al lado BC. La medida del ángulo BID es igual a la :

A) $m\sphericalangle BAC$ B) $m\sphericalangle ICE$ C) $m\sphericalangle EIC$
D) $m\sphericalangle DIE$ E) $m\sphericalangle IBD$

RESOLUCIÓN :



* ΔABC:

$\alpha + \beta + \theta = 90° \rightarrow \alpha + \theta = 90° - \beta$.....(I)

* $\triangle IBE$: $m\sphericalangle BIE = 90° - \beta$ .....(II)
* ΔAIC : $m\sphericalangle CID = \alpha + \theta$ .....(III)
* De (I) ; (II) y (III): $m\sphericalangle BIE = m\sphericalangle CID$
* Luego: $m\sphericalangle BID = m\sphericalangle EIC$

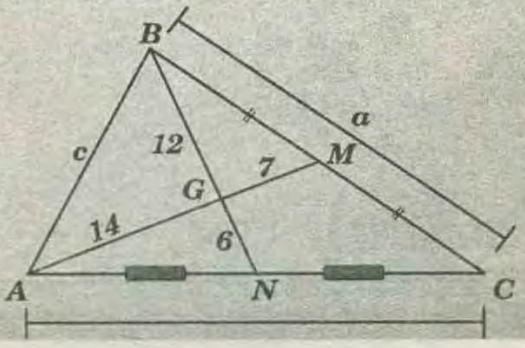
RPTA : "C"

PROBLEMA 22 :

En un triángulo ABC las medianas AM y BN miden $18u$ y $21u$. Calcule el mayor perímetro entero del triángulo ABC.

A) 101 u B) 100 u C) 102 u D) 103 u E) 104 u

RESOLUCIÓN :



* Por teorema (desigualdad triangular)

ΔAGN : $14-6<\frac{b}{2}<14+6$

$\Rightarrow 16 < b < 40$ .....(I)

ΔGBM : $12-7<\frac{a}{2}<12+7$

$\Rightarrow 0 < a < 38$ .....(II)

ΔAGB :

$14 - 12 < c < 14 + 12$

$\Rightarrow 2 < c < 26$ .....(III)

* Sumando (I); (II) y (III):

$16 + 10 + 2 < a + b + c < 40 + 38 + 26$

$\Rightarrow 28 < a + b + c < 104$

* El mayor perímetro entero del triángulo ABC es : 103μ

RPTA : "D"

PROBLEMA 23 :

En un triángulo ABC, se trazan las cevianas AM y CN las prolongaciones de las cevianas trazadas desde M y N en los triángulos AMC y ANC se intersectan en Q, tal que.

$m\sphericalangle MCN = 2m\sphericalangle MAC$,

$m\sphericalangle NAM = 2m\sphericalangle ACN$

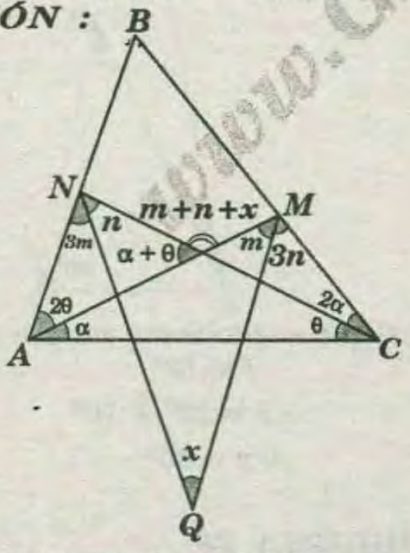
$m\sphericalangle ANQ = 3m\sphericalangle AMQ$

$m\sphericalangle QMC = 3m\sphericalangle QNC$

Calcule la $m\sphericalangle MQN$

A) 90 B) 100 C) 105 D) 110 E) 120

RESOLUCIÓN :



* ΔAMC : $3\alpha + \theta + 3n + m = 180^\circ$ .....(I)

* ΔANC : $3\theta + \alpha + 3m + n = 180^\circ$ .....(II)

* Sumando (I) y (II): $4\alpha + 4\theta + 4m + 4n = 360^\circ$

$\Rightarrow \alpha + \theta + m + n = 90^\circ$.....(III)

* Pero: $x + \alpha + \theta + m + n = 180^\circ$.....(IV)

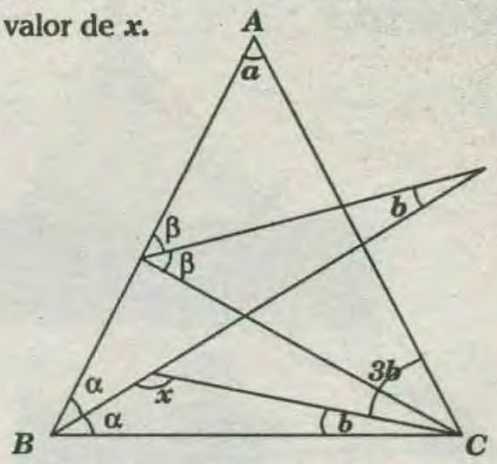
* (III) en (IV): $x + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 90^\circ$

RPTA : "A"

PROBLEMA 24 :

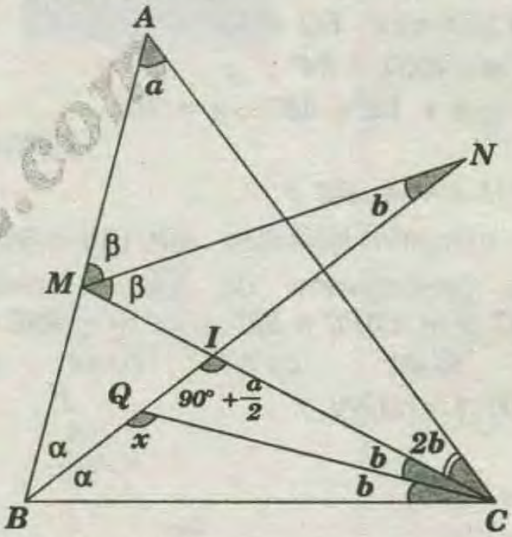
En la figura se cumple $a+2b = 100^\circ$.

Halle el valor de x.



A) 140 B) 110 C) 120 D) 130 E) 135

RESOLUCIÓN :



* Dato : $a + 2b = 100^\circ$ .....(I)

* ΔBMC:

$$m\sphericalangle N = b = \frac{m\sphericalangle MCQ + b}{2}$$

$\Rightarrow m\sphericalangle MCQ = b$

* ΔABC :

I es el incentro, por propiedad:

$$m\sphericalangle BIC = 90^\circ + \frac{a}{2}$$

* ΔQIC :

$$x = 90^\circ + \frac{a}{2} + b$$

$$\Rightarrow x = 90^\circ + \frac{a + 2b}{2} \text{ .....(II)}$$

* (I) en (II):

$$x = 90^\circ + \frac{100}{2} \rightarrow x = 140^\circ$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 25 :

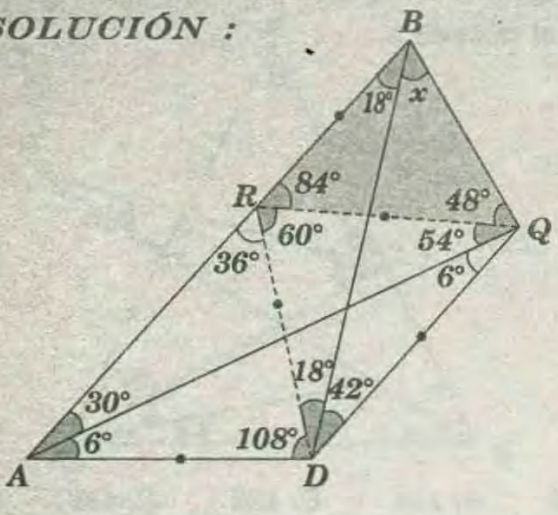
En un triángulo ABD se ubica un punto exterior Q relativo al lado BD tal que $AD = DQ$; $m\sphericalangle BAQ = 30^\circ$, $m\sphericalangle ABD = 18^\circ$ y $m\sphericalangle BDQ = 42^\circ$.

WWW.GRATIS2.COM

Halle $m\sphericalangle DBQ$.

A) 20° B) 30° C) 40° D) 50° E) 60°

RESOLUCIÓN :



* ΔRQD equilátero : $DR = RQ = DQ$
* ΔRBQ isósceles : $RQ = RB$
* Pero: $m\sphericalangle BRQ = 84°$

$\Rightarrow x + 18° = 48° \Rightarrow x = 30°$

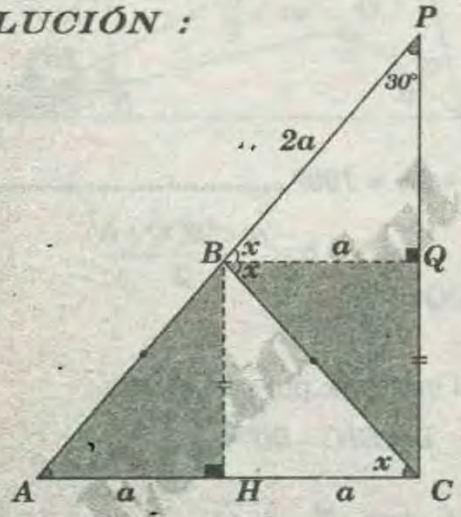
RPTA : "C"

PROBLEMA 26 :

Dado el triángulo isósceles ABC $(AB = BC)$, sea $P \in$ a la prolongación de $\overline{AB}$ de modo que $BP = AC$. Si $m\sphericalangle BPC = 30°$, halle $m\sphericalangle BAC$.

A) 10° B) 60° C) 20° D) 18° E) 22,5°

RESOLUCIÓN :



* $\triangle ABH \cong \triangle BCQ$ (LL) $\Rightarrow BH = QC$

$m\sphericalangle QBC = m\sphericalangle A = x$

* ΔABC : $m\sphericalangle CBP = 2x \Rightarrow m\sphericalangle PBQ = x$
* $\triangle BPQ$: $x = 60°$

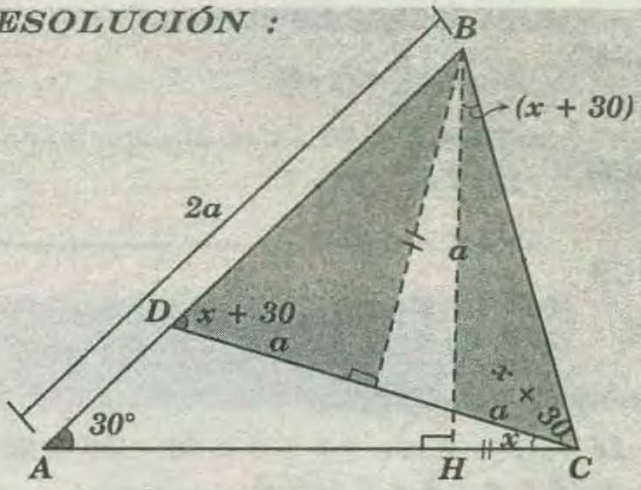
RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

En un triángulo ABC se tiene que $m\sphericalangle A = 30°$, se traza la ceviana CD de modo que $CB = BD$ y $CD = AB$. Halle la mediana del ángulo DCA.

A) 5° B) 7° C) 10° D) 12° E) 15°

RESOLUCIÓN :



* $\triangle BHC \cong \triangle DMB$ (LL):

$\Rightarrow BM = HC$ y $m\sphericalangle HBC = x + 30°$

* $\triangle BHC$: $x + 30 + x + 30 + x = 90°$

$\Rightarrow 3x = 30° \Rightarrow x = 10°$

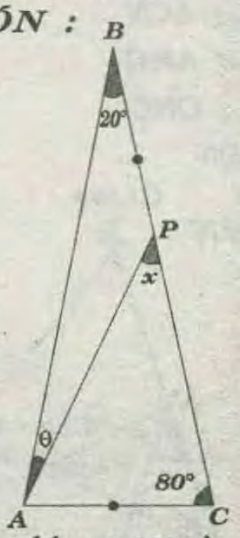
RPTA : "C"

PROBLEMA 28 :

Con el triángulo ABC, $m\sphericalangle B = 20°$, $m\sphericalangle C = 80°$ y $P \in BC$, tal que $BP = AC$. Halle la $m\sphericalangle APC$.

A) 10° B) 12° C) 18° D) 20° E) 30°

RESOLUCIÓN :



*Al igual que un problema anterior se deduce que :

$\theta = 10°$

$\Rightarrow x = 20° + 10°$

$\Rightarrow x = 30°$

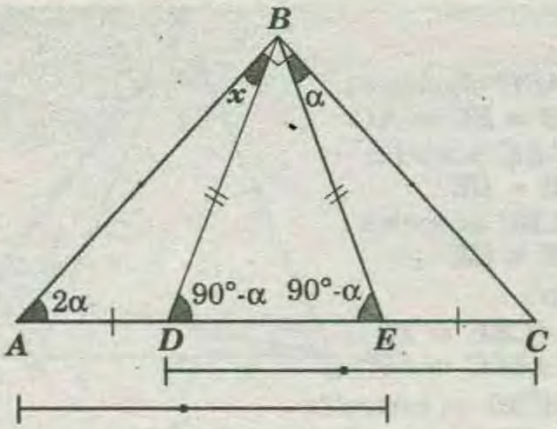
RPTA :"E"

PROBLEMA 29 :

En un triángulo rectángulo ABC se trazan las cevianas BD y BE de modo que $AB = DC$, $BD = BE$. Si $m\sphericalangle BAC = 2m\sphericalangle EBC$. Halle la $m\sphericalangle ABD$.

A) 45° B) $\frac{45}{2}°$ C) 37° D) $\frac{37}{2}°$ E) $\frac{53}{2}°$

RESOLUCIÓN :



* $\Delta DBC \cong \Delta EBA$ (LAL) $\Rightarrow BC = AB$
* $\triangle ABC$ isósceles : $AB = BC$

$$\Rightarrow 2\alpha = 45^\circ \Rightarrow x = \frac{45^\circ}{2}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 30 :

En el triángulo $ABC(AB = BC)$, sea $P \in$ a la prolongación de $\overline{AC}$.

Tal que $BP = AC$, $2m\sphericalangle A - m\sphericalangle BPC = 60^\circ$

Halle $m\sphericalangle B$.

A) 60° B) 75° C) 90° D) 100° E) 120°

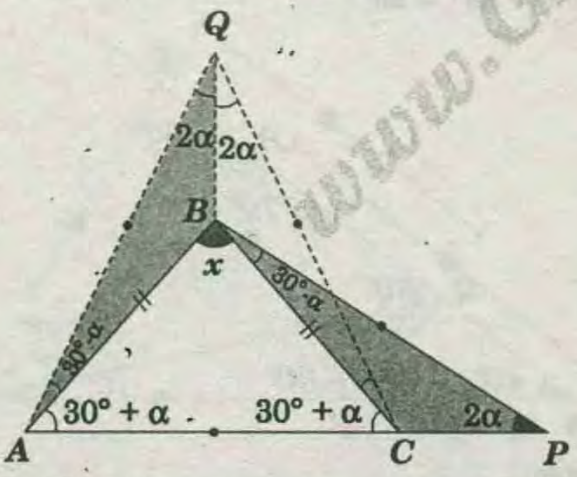
RESOLUCIÓN :

* Se construye el triángulo equilátero AQC :

$$AC = AQ = QC$$

$\Delta BCP \cong DABQ$ (LAL)

$$\Rightarrow m\sphericalangle AQB = m\sphericalangle P = 2\alpha$$



* Pero $\overline{QB}$ es bisectriz , entonces :

$$2\alpha + 2\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$$
$$\Rightarrow x = 90^\circ$$

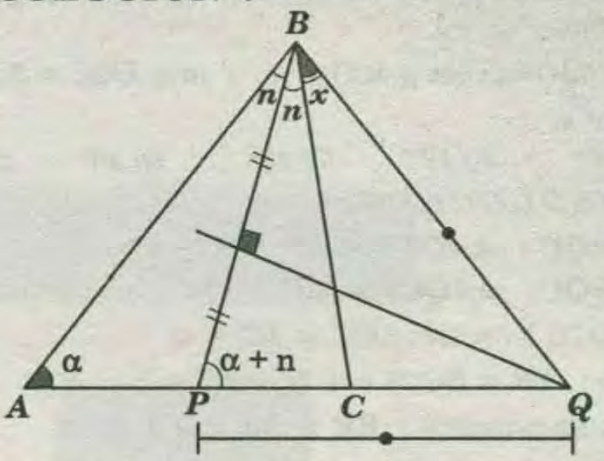
RPTA : "C"

PROBLEMA 31 :

El ángulo A de un triángulo ABC mide α. Se traza la bisectriz interior BP y la mediatriz del segmento BP la cual corta a la prolongación de $\overline{AC}$ en el punto Q. Halle $m\sphericalangle QBC$.

A) $\frac{\alpha}{2}$ B) $\frac{\alpha}{3}$ C) $\frac{2\alpha}{3}$ D) $\frac{3\alpha}{3}$ E) α

RESOLUCIÓN :



* ΔABP por el teorema del ángulo externo:

$$m\sphericalangle BPQ = \alpha + n$$

* ΔPBQ isósceles : $m\sphericalangle BPQ = m\sphericalangle PBQ = \alpha + n$
* Luego : $x + n = \alpha + n \Rightarrow x = \alpha$

RPTA : "E"

PROBLEMA 32 :

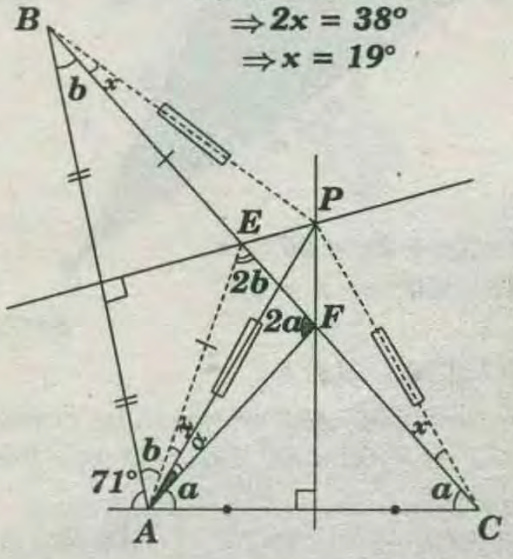
El ángulo exterior de A de un triángulo ABC mide 71. Las mediatrices de los lados AB y AC se intersectan en P y al lado BC lo intersecta en E y F respectivamente. Halle la $m\sphericalangle PAF$.

A) 12° B) 17° C) 26° D) 41° E) 19°

RESOLUCIÓN :

* ΔAPC isósceles : $m\sphericalangle PAF = m\sphericalangle PCF = x$
* ΔBPC isósceles : $m\sphericalangle PBE = m\sphericalangle PCF = x$
* ΔAPB isósceles : $m\sphericalangle PBE = m\sphericalangle PAE = x$
* ΔABC : $a + b = 71^\circ$ .....(I)
* ΔAEF : $2(a + b) + 2x = 180^\circ$ .....(II)
* (I) en (II) :

$$2(71) + 2x = 180^\circ$$
$$\Rightarrow 2x = 38^\circ$$
$$\Rightarrow x = 19^\circ$$



RPTA : "E"

WWW.GRATIS.COM

PROBLEMA 33 :

En un triángulo rectángulo isósceles ABC $(m\sphericalangle B=90°)$, en su interior se tiene el punto cualquier Q, tal :

$m\sphericalangle BAQ=2x$, $m\sphericalangle ACQ=x$ y $m\sphericalangle QBC=3x$.

Halle x.

A) 10° B) 12° C) 15° D) 18° E) 20°

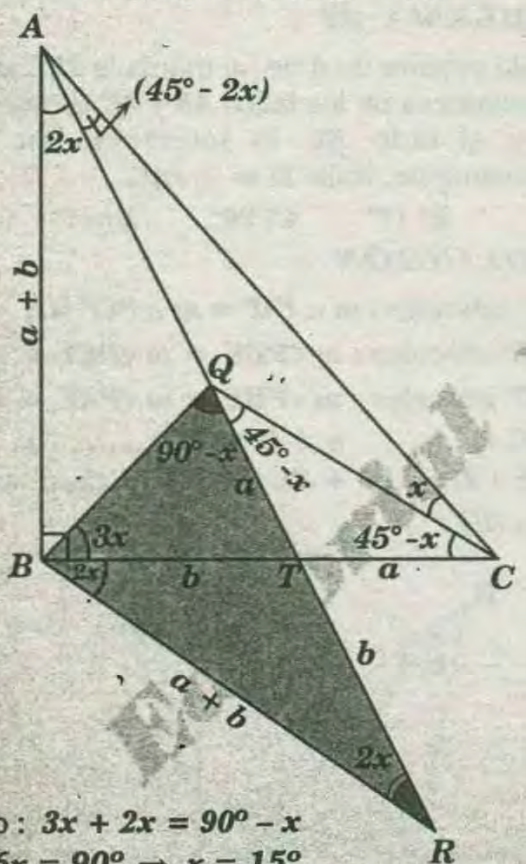
RESOLUCIÓN :

* ΔAQC : $m\sphericalangle CQT = 45° - x$
* ΔBQC: $m\sphericalangle QCT = 45° - x$
* ΔQTC isósceles : $QT = TC = a$

Pero : $AB = BC = a + b \Rightarrow BT = b$

* Ahora trazamos : $BR = AB = a + b$
* Prolongamos $\overline{AQ}$ hasta $R \Rightarrow m\sphericalangle R = 2a$
* ΔBQR isósceles : $BR = QR = a + b$
* Pero : $TQ = a \Rightarrow TR = b$
* ΔBRT isósceles :

$m\sphericalangle TBR = m\sphericalangle TRB = 2x$



* Luego : $3x + 2x = 90° - x$

$\Rightarrow 6x = 90° \Rightarrow x = 15°$

RPTA : "C"

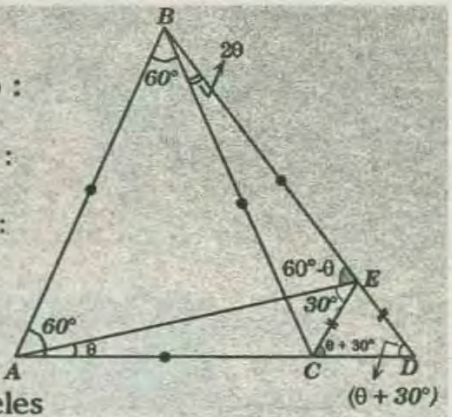
PROBLEMA 34 :

En un triángulo ABD se trazan las cevianas AE y BC, tal que $AB = BE = AC$, $CE = ED$; $m\sphericalangle BAC = 60°$.

Halle $m\sphericalangle EAC$.

A) 8° B) 9° C) 10° D) 12° E) 15°

RESOLUCIÓN :



* ΔABC equilátero : $AB = BC = AC$
* ΔABE isósceles : $AB = BE$
* ΔCBE isósceles : $CB = BE$
* Pero : $m\sphericalangle CBE = 2\theta$

$\Rightarrow m\sphericalangle AEC = 30°$

* El ΔCED es isósceles

$m\sphericalangle ECD = m\sphericalangle EDC = \theta + 30°$

* ΔAED : $60° - \theta = \theta + \theta + 30°$

$\Rightarrow 3\theta = 30° \Rightarrow \theta = 10°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 35 :

En un triángulo ABC isósceles la $m\sphericalangle ABC=100°$ se trazan las cevianas. $\overline{BP}$ y $\overline{CQ}$ $(P\in\overline{AC}$ y $Q\in\overline{AB})$ tal que : $m\sphericalangle ABP = m\sphericalangle BCQ = 30°$

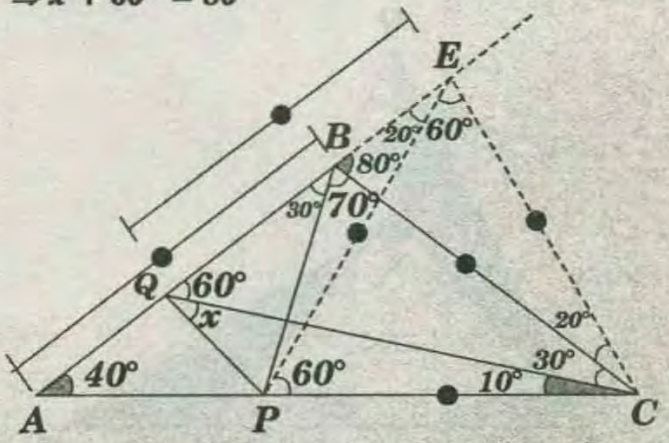
Calcule la $m\sphericalangle CQP$.

A) 20° B) 40° C) 30° D) 50° E) 36°

RESOLUCIÓN :

* ΔBEC isósceles : $BC = EC$
* ΔPEC equilátero : $PC = PE = PC$
* ΔQEC isósceles : $QE = CE$
* ΔQEP isósceles : $QE = EP$

$\Rightarrow x + 60° = 80°$



$x = 20°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 36 :

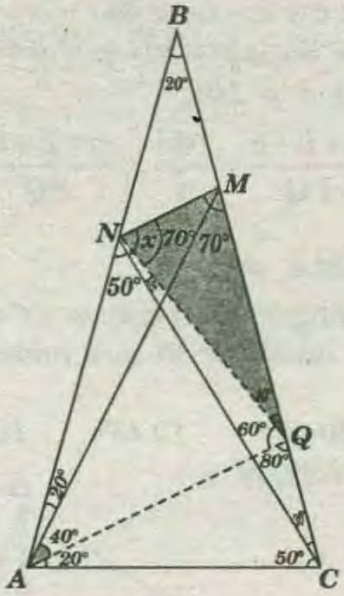
En triángulo ABC isósceles $(AB = BC)$. Se trazan las cevianas AM y CN. Tal que :

$m\sphericalangle BAM = m\sphericalangle ABC = 20°$ y $m\sphericalangle BCN = 30°$.

Calcule la $m\sphericalangle MNC$:

A) 70° B) 60° C) 75° D) 80° E) 85°

RESOLUCIÓN :

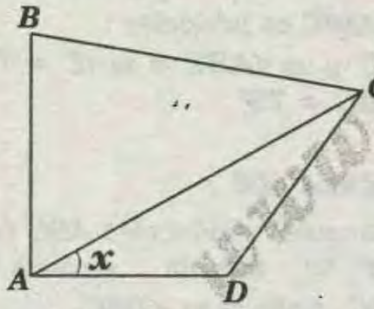


* Se traza $\overline{AQ}$, de modo que $m\ddot{E}QAC = 20°$
* ΔAQC isósceles : $AQ = AC$
* ΔANC isósceles : $AN = AC$
* ΔANQ equilátero: $AQ = NQ = AN$
* ΔNMQ isósceles: $NQ = MQ$
* Pero: $m\sphericalangle NQM = 40°$
* Luego: $x = 10° + 70° \Rightarrow x = 80°$

RPTA : "D"

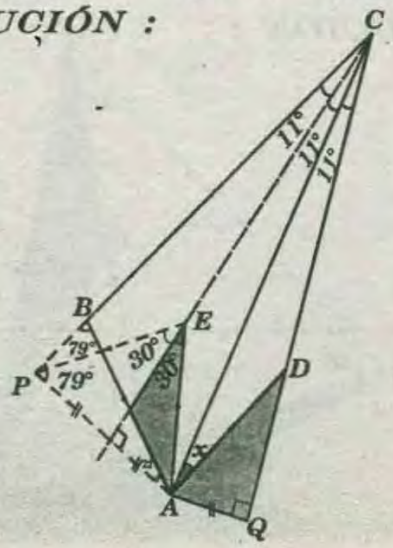
PROBLEMA 37 :

En la figura se cumple que $AB = AD$, $m\sphericalangle BAC = 57°$, $m\sphericalangle BCA = 22°$ y $m\sphericalangle ACD = 11$. Halle x.



A) 15° B) 16° C) 19° D) 22° E) 27°

RESOLUCIÓN :



* ΔPCA isósceles :
  $m\sphericalangle APC = m\sphericalangle PAC = 79°$
* ΔAPB isósceles : $AP = AB$
* ΔPEA equilátero : $AP = PE = AE$
* $\overline{CA}$ bisectriz, por teorema: $HA = AQ$
* $\triangle EHA \cong \triangle DQA$ (LL):
  $\Rightarrow m\sphericalangle ADQ = m\sphericalangle HEA = 30°$
* ΔADC : $x + 11° = 30° \Rightarrow x = 19°$

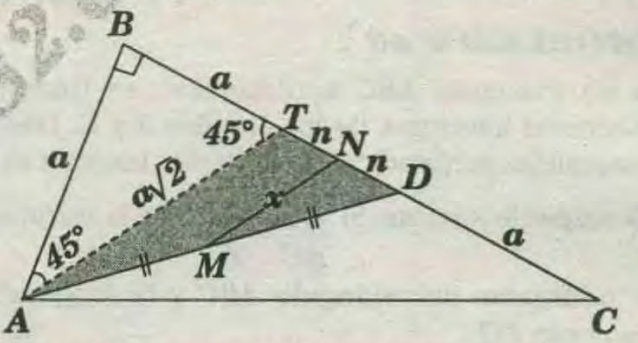
RPTA : "C"

PROBLEMA 38 :

En un triángulo rectángulo $ABC (m\sphericalangle B = 90°, AB<BC)$, $D \in \overline{BC}$ de modo que $DC = AB$. Si $AB = a$. Halle la longitud de segmento que une los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

A) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{a}{\sqrt{3}}$ C) a D) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ E) $\frac{a}{\sqrt{3}}$

RESOLUCIÓN :



* Se traza $\overline{AT}$; de modo que $m\sphericalangle BAT = 45°$
* $\triangle ABT$ isósceles : $AB = BT = a$
* En $\overline{BC}$: $BN = NC = a + n$
* Luego: $TN = ND = n$
* ΔATD : $TN = ND$ y $AM = MD$
* $\overline{MN}$ es base media.

Por teorema :

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

RPTA : "A"

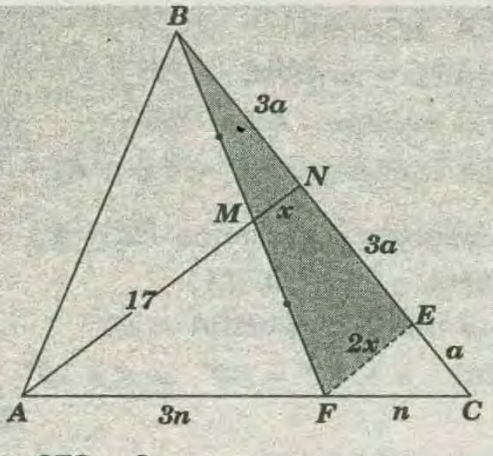
PROBLEMA 39 :

Dado el triángulo ABC, sobre $\overline{AC}$ se tiene un punto F de modo que $AF = 3FC$. En el triángulo ABF se traza la mediana AM cuya prolongación intersecta a $\overline{BC}$ en N. Si $AM = 17$ cm. Halle MN.

A) 1 cm B) 2 C) 3/2 D) (9/5) E) (17/7)

RESOLUCIÓN :

WWW.GRATIS2.COM



* Dato : $AF = 3FC = 2n$

* Se traza: $\overline{FE} \parallel \overline{AN} \Rightarrow \dfrac{EC}{NE} = \dfrac{1}{3}$

* ΔFBE : $NB = NE = 3a$

* $\overline{MN}$ es base media ; por teorema : $FE = 2x$

* Luego :

$$\frac{2x}{17+x} = \frac{n}{4n} \Rightarrow 8x = x + 17 \Rightarrow 7x = 17 \Rightarrow x = \frac{17}{7}$$

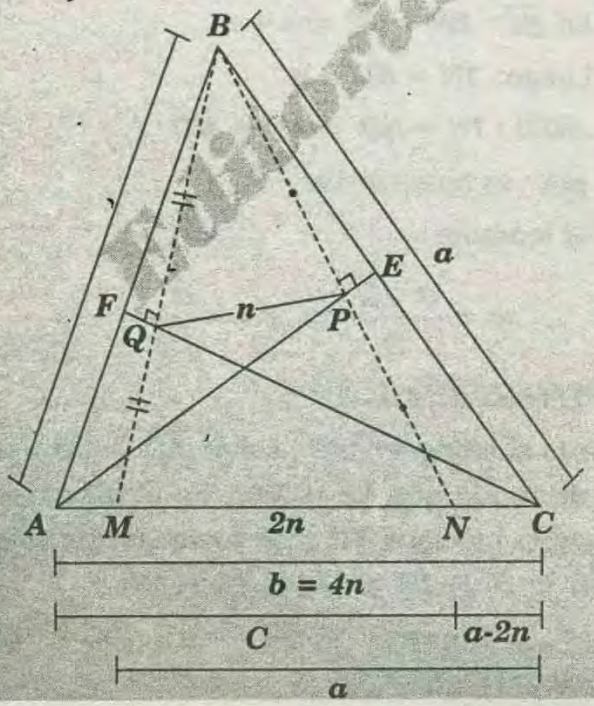
RPTA : "E"

PROBLEMA 40 :

En un triángulo ABC acutángulo , se trazan las bisectrices interiores de los ángulos A y C. Desde B se trazan las perpendiculares a dichas bisectrices BP y BQ respectivamente. Si $\dfrac{PQ}{AC} = \dfrac{1}{4}$ Halle la razón entre el perímetro del triángulo ABC y la longitud del segmento PQ.

A) 10 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

RESOLUCIÓN :



* De la figura: $c + a - 2n = 4n$

$\Rightarrow a + c = 6n \Rightarrow a + b + c = 6n + 4n$

$\Rightarrow a + b + c = 10n$

* Luego : $\dfrac{a+b+c}{PQ} = \dfrac{10n}{n} \Rightarrow \dfrac{a+b+c}{PQ} = 10$

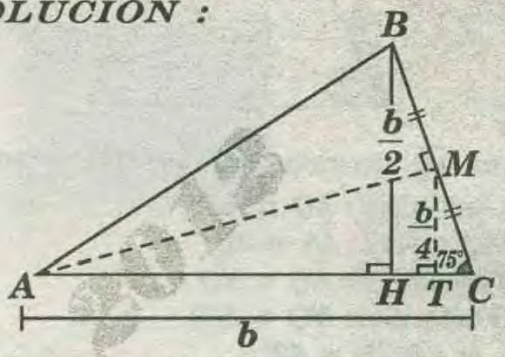
RPTA : "A"

PROBLEMA 41 :

ABC es un triángulo en el que $m\sphericalangle C = 75°$, la altura BH mide la mitad de lo que mide AC. Halle la $m\sphericalangle ABC$.

A) 75° B) 60° C) 45° D) 37° E) 30°

RESOLUCIÓN :



* $\triangle AMC$; por propiedad :

$$MT = \frac{AC}{4} \Rightarrow MT = \frac{b}{4}$$

* $\triangle BHC$:

$$MT = \frac{BH}{2} \text{ y } \overline{BH} \parallel \overline{MT}$$

$\Rightarrow \overline{MT}$ es base media , donde $BM = MC$

* Luego el ΔABC es isósceles :

$AB = AC$ y $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle C = 75°$

$\Rightarrow m\sphericalangle ABC = 75°$

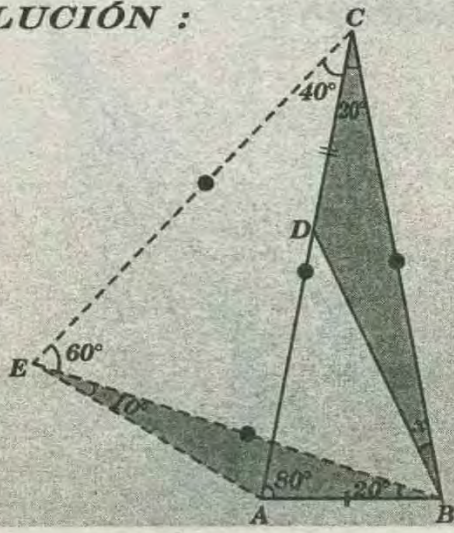
RPTA : "A"

PROBLEMA 42 :

En un triángulo isósceles ABC $(AC = BC)$, la $m\sphericalangle C = 20°$. Se traza la ceviana BD de modo que $AB = DC$, halle la $m\sphericalangle DBC$.

A) 5° B) 8° C) 9° D) 10° E) 17°

RESOLUCIÓN :



* Se construye el triángulo equilátero ECB :

$$EC = EB = CB$$

* ΔECA isósceles : $EC = CA$

$$m\sphericalangle BEA = 70° - 60° = 10°$$

* Luego : $\Delta DCB \cong \Delta ABE\ (LAL) \Rightarrow x = 10°$

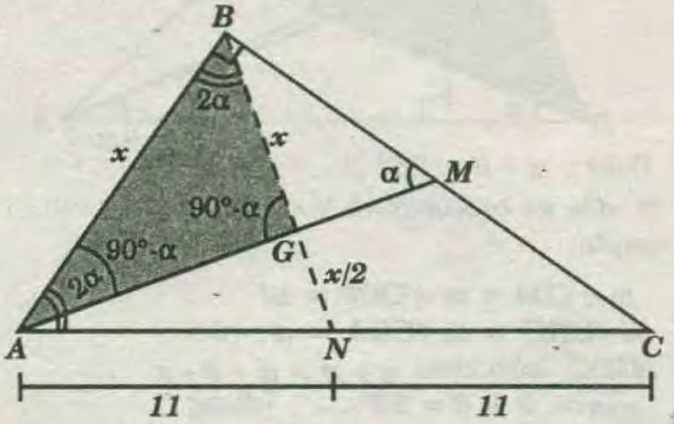
RPTA : "D"

PROBLEMA 43 :

En un triángulo rectángulo ABC se tiene que $m\sphericalangle A = 2m\sphericalangle AMB$. Si M punto medio de $\overline{BC}$ y $AC = 22cm$. Halle AB.

A) 10 cm B) 12 C) 14 D) 14 E) (22/3)

RESOLUCIÓN :



* Se traza la mediana $\overline{BN}$.

$$\Rightarrow AN = NC = BN = 11$$

* Pero ΔABG es isósceles : $AB = BG = x$

* Como G es baricentro , entonces :

$$BG = 2GN = x$$

* Luego : $x + \frac{x}{2} = 11 \Rightarrow \frac{3x}{2} = 11 \Rightarrow x = \frac{22}{3} cm$

RPTA : "E"

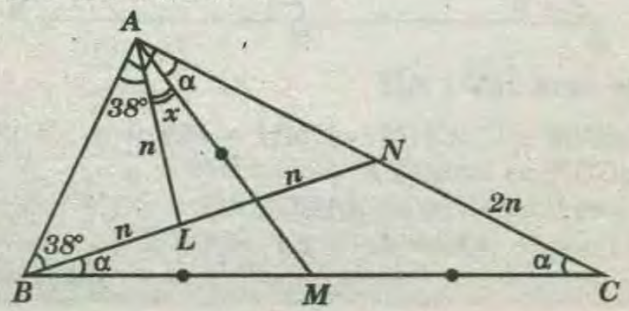
PROBLEMA 44 :

En un triángulo ABC (recto en A) $\overline{AM}$ es mediana , $\overline{BN}$ es ceviana, $\sphericalangle BCN \cong \sphericalangle CBN$ y la $m\sphericalangle ABN = 38°$. Si L es punto medio de $\overline{BN}$.

Calcule la $m\sphericalangle LAM$.

A) 37° B) 27° C) 26° D) 19° E) 13°

RESOLUCIÓN :



* $\triangle ABC$: $2a + 38° = 90° \Rightarrow a = 26°$

* $\triangle ABN$:

$$38° + x + 26° = 90°$$

$$\Rightarrow x + 64° = 90°$$

$$\Rightarrow x = 26°$$

RPTA : "C"

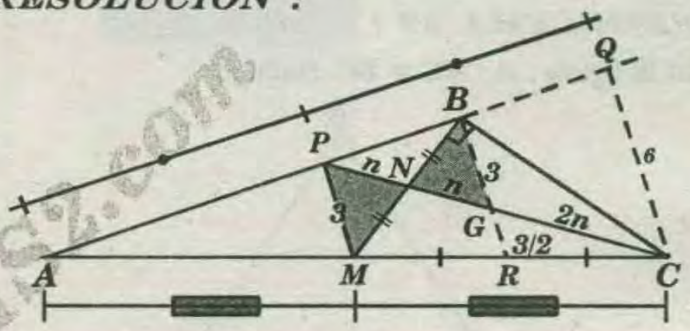
PROBLEMA 45 :

En un triángulo ABC. $\overline{BM}$ mediana, N : punto medio de $\overline{BM}$, la prolongación de $\overline{CN}$ interseca a $\overline{AB}$ en P. Si $PM = 3u$ y $m\sphericalangle MBC = 90°$.

Halle la longitud de $\overline{AC}$.

A) 18u B) 15u C) 12u D) 10u E) 6u

RESOLUCIÓN :



* Se traza $\overline{BR} // \overline{PM}$:

$$\Rightarrow DMNP \cong DBNG\ (ALA)$$

* Por el cual :

$$BG = PM = 3 \text{ y } NP = NG = n$$

* Ahora prolongamos $\overline{AB}$ y luego trazamos $\overline{CQ} // \overline{PM}$, por teorema : $AP = PQ$

* Observamos el ΔPQC:

$$\overline{BG} // \overline{QC} \text{ y } BG = \frac{QC}{2} = 3$$

* Por teorema de los puntos medios :

$PG = GC = 2n \Rightarrow G$ es baricentro del $\triangle MBC$:

$$GR = \frac{3}{2} \ ; \ BR = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

* Luego :

$$AC = 4\left(\frac{9}{2}\right) \Rightarrow AC = 18\mu$$

RPTA : "A"

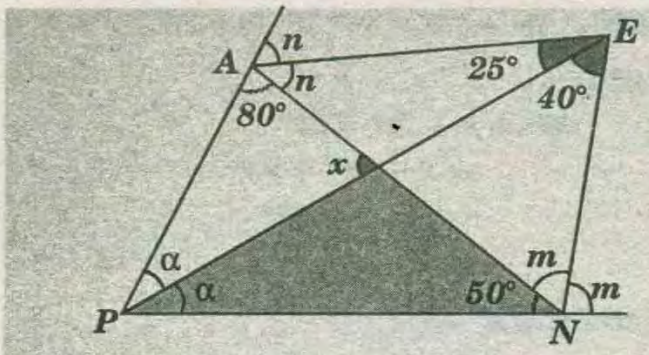
PROBLEMA 46 :

En un triángulo PAN, E es excentro relativo al lado AN, $m\sphericalangle AEP = 25°$ y $m\sphericalangle PEN = 40°$. Halle la medida del ángulo que determinan $\overline{AN}$ y $\overline{PE}$.

A) 45° B) 60° C) 75° D) 65° E) 70°

RESOLUCIÓN :

WWW.GRATIS2.COM



* Por propiedad : $m\sphericalangle PAN = 2(40°) = 80°$

$m\sphericalangle ANP = 2(25°) = 50°$

* ΔPAN : $2\alpha = 180° - 130° = 50°$

$\Rightarrow \alpha = 25°$

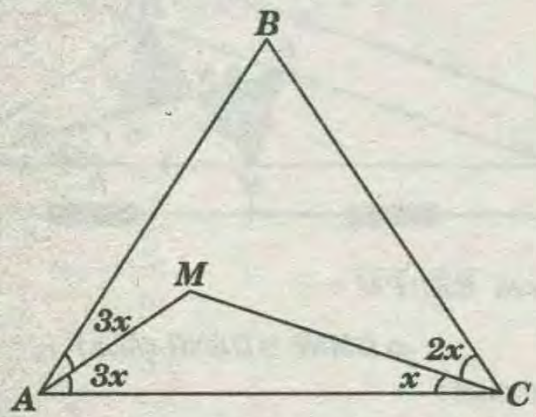
* Luego :

$\Rightarrow x = 50° + 25° \Rightarrow x = 75°$

RPTA : "C"

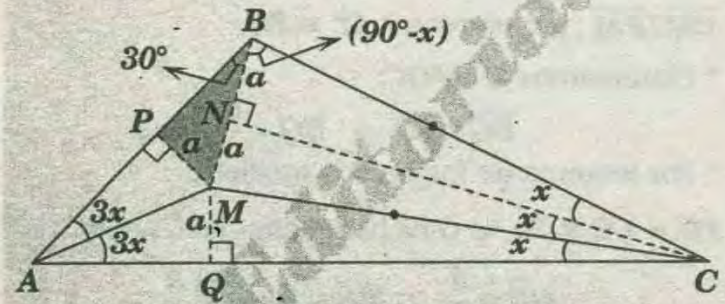
PROBLEMA 47 :

En la figura , si : $MC = BC$. Halle x.



A) 25° B) 3° C) 7,5° D) 4° E) 4,5°

RESOLUCIÓN :



* ΔMBC isósceles: $MC = BC$

$\Rightarrow BN = MN = a$

* Al trazar :

$\overline{MQ} \perp \overline{AC}$ resulta que $MQ=MN=a$ (teorema).

* Al trazar :

$\overline{MP} \perp \overline{AB}$ resulta que $MP = MQ = a$ (teorema).

* $\triangle MPB$ notable de $30°$ y $60°$.

* ΔABC : $6x + 3x + 90° - x + 30° = 180°$

$\Rightarrow 8x = 60° \Rightarrow x = 7,5°$

RPTA : "C"

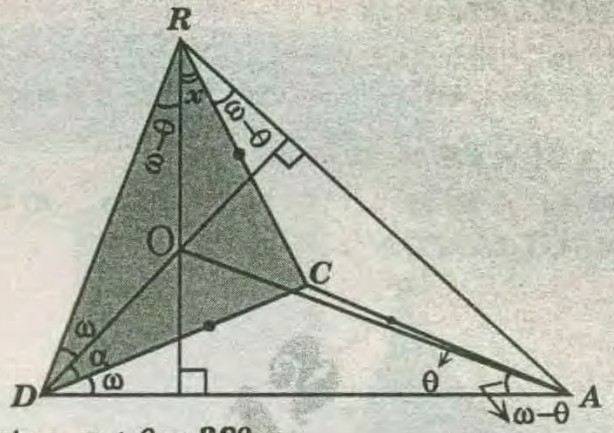
PROBLEMA 48 :

En un triángulo acutángulo DRA , O es ortocentro y C circunscentro. Halle la $m\sphericalangle ORC$.

$m\sphericalangle ODC + m\sphericalangle OAC = 38°$

A) 36° B) 38° C) 48° D) 35° E) 45°

RESOLUCIÓN :



* Dato : $\alpha + \theta = 38°$

* Si «O» es orotocentro y «C» es circuncentro , se cumple:

$m\sphericalangle CDA = m\sphericalangle ODR = \omega$

$m\sphericalangle DRO = m\sphericalangle CRA = \omega - \theta$

* ΔDRC isósceles: $\alpha + \cancel{\omega} = \cancel{\omega} - \theta + x$

$\Rightarrow x = \alpha + \theta = 38°$..... (dato)

$\Rightarrow x = 38°$

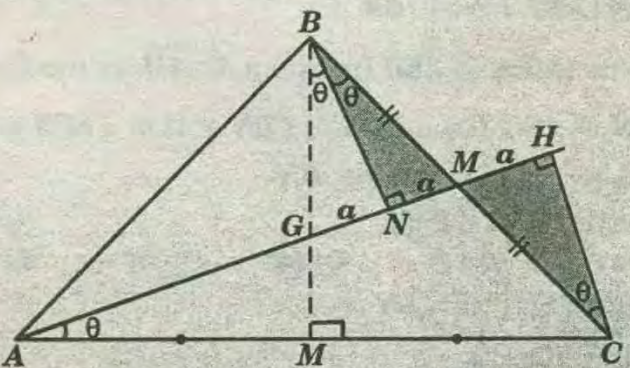
RPTA : "B"

PROBLEMA 49 :

En un triángulo ABC $(AB = BC)$ se traza la medida AM y se prolonga hasta el punto H de modo que $m\sphericalangle AHC=90°$, Si $m\sphericalangle MAC=m\sphericalangle BCH$ y $MH = a$, halle AM.

A) $2a$ B) $3a/2$ C) $4a/3$ D) $4a$ E) $6a$

RESOLUCIÓN :



* Se traza $\overline{BN} \perp \overline{AH}$

$\triangle BNM \cong \triangle CHM$: $\Rightarrow MH = MN = a$

* ΔGBM es isósceles : $GN = NM = a$

* G es baricentro de ΔABC : $AG = 2GM = 4a$

* * Luego : $AM = 4a + 2a \Rightarrow AM = 6a$

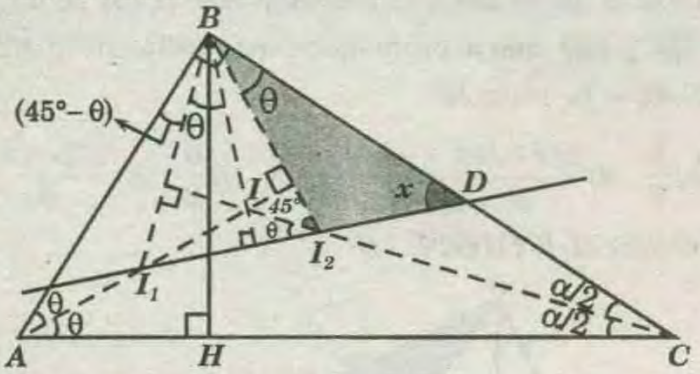
RPTA : "E"

PROBLEMA 50 :

En un triángulo ABC recto en B $(AB < BC)$, se traza la altura BH. Los puntos I_1 e I_2 son los incentros de los triángulos ABH y HBC. La recta que pasa por los incentros intersecta al cateto BC en el punto D. Si $m\sphericalangle BCA = \alpha$. Calcule $m\sphericalangle BDI_1$

A) α B) 2α C) $90° - \alpha$ D) $60°$ E) $45°$

RESOLUCIÓN :



ΔI_1BI_2: I es ortocentro

* Pero: $m\sphericalangle BI_2I = 45°$

* ΔI_2BD: $x + \theta = \theta + 45° \Rightarrow x = 45°$

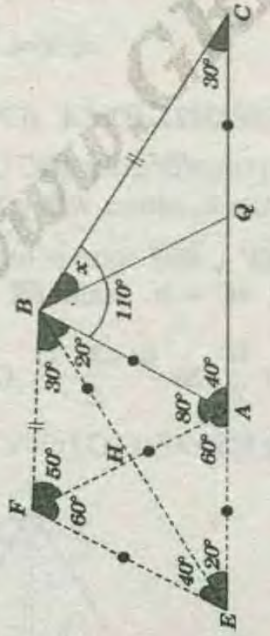
RPTA : "E"

PROBLEMA 51 :

En un triángulo ABC, se traza la ceviana BQ, tal que $AB = QC$; $m\sphericalangle A = 40°$, $m\sphericalangle C = 30°$. Halle $m\sphericalangle QBC$.

A) $55°$ B) $45°$ C) $50°$ D) $60°$ E) $30°$

RESOLUCIÓN :



* En la prolongación de $\overline{CA}$ se construye el triángulo equilátero EFA, de modo que :

$AB = EA = EF = FA$

* ΔABH es isósceles:

$AB = HB$

* $\Delta EFB \cong \Delta ABC$ (ALA)

$\Rightarrow FB = BC$

* $\Delta HFB \cong \Delta QBC$ (LAL)

$\Rightarrow x = 50°$

RPTA : "C"

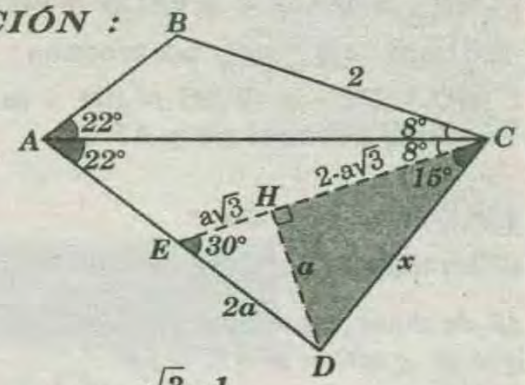
PROBLEMA 52 :

En un triángulo ABC la $m\sphericalangle A = 22°$, $m\sphericalangle C = 8°$. Se construye exteriormente y sobre el lado AC otro triángulo ADC, la $m\sphericalangle CAD = 22°$ y $m\sphericalangle ACD = 23°$.

Si $BC = 2$. Halle DC.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



* Sabemos que : $tg15° = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

* $\triangle DHC$: $tg15° = \dfrac{a}{2-a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

* Efectuando :

$$a = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad .....(I)$$

* $\triangle DHC$:

$$x^2 = a^2 + (2-a\sqrt{3})^2 \Rightarrow x^2 = a^2 + 4 - 4a\sqrt{3} + 3a^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 4a^2 + 4 - 4a\sqrt{3} \quad .....(II)$$

* (I) en (II):

$$x^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + 4 - 4\sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 - \cancel{2\sqrt{3}} + 4 - 6 + \cancel{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x^2 = 8 - 6 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \sqrt{2}$$

RPTA : "A"

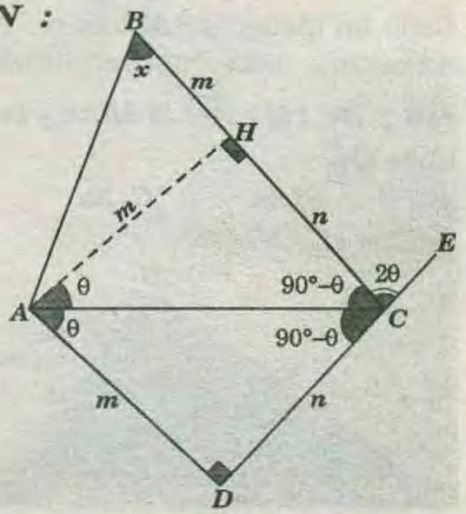
PROBLEMA 53 :

En el lado AC de un triángulo ABC se construye el triángulo rectángulo ACD (recto en D) de manera que $m\sphericalangle ECB = 2m\sphericalangle CAD$ ($E \in$ la prolongación de $\overline{DC}$).

Si $AD + DC = CB$. Halle la $m\sphericalangle ABC$.

A) $30°$ B) $35°$ C) $40°$ D) $45°$ E) $60°$

RESOLUCIÓN :



* Dato : $BC = m + n$
* Pero : $m\sphericalangle ACD = m\sphericalangle ACB = 90° - \theta$
* Se traza $\overline{AH} \perp \overline{BC}$, por teorema :
$HC = DC = n \Rightarrow BH = AH = m$
* $\triangle AHB$ isósceles : $x = 45°$

RPTA : "D"

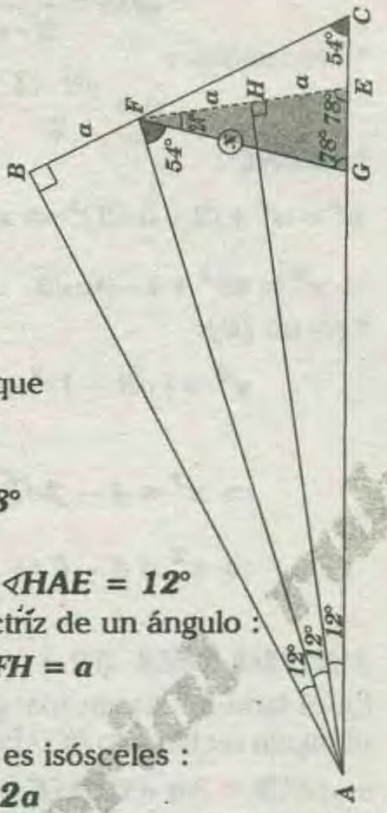
PROBLEMA 54 :

En un triángulo ABC, $m\sphericalangle B = 90°$, se traza la ceviana AF, de manera que la $m\sphericalangle BAF = 12°$, $G \in \overline{AC}$ de modo que $m\sphericalangle AFG = m\sphericalangle C = 54°$.

Si $BF = a$. Halle FG.

A) $2a$ B) $4a/3$ C) $\frac{3a}{2}$ D) $3a$ E) $\frac{5a}{3}$

RESOLUCIÓN :



* Se traza $\overline{FE}$ de modo que $m\sphericalangle FEG = 78°$.
* ΔAFE isósceles :
$m\sphericalangle AFE = m\sphericalangle AEF = 78°$
* Se traza $\overline{AH} \perp \overline{EF}$
$\Rightarrow m\sphericalangle BAF = FAH = m\sphericalangle HAE = 12°$
* Por teorema de la bisectríz de un ángulo :
$BF = FH = a$
* Pero : $FH = HE = a$
* Como el triángulo GFE es isósceles :
$FG = FE \Rightarrow x = 2a$

RPTA: "A"

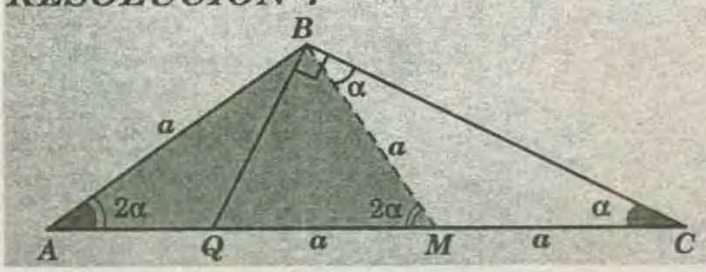
PROBLEMA 55 :

Dado un triángulo ABC obtuso en B por el punto B trazamos una perpendicular al lado BC, $\overline{QB} \perp \overline{BC}$; $Q \in \overline{AC}$ .Si $AB = a$ y $m\sphericalangle BAC = 2m\sphericalangle BCA$.

Halle QC.

A) a B) $2a$ C) $3a$ D) $a/2$ E) $a/3$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle QBC$; se traza la mediana $\overline{BM}$:
$m\sphericalangle C = m\sphericalangle MBC = \alpha$
* ΔABC isósceles :: $AB = BM = a$
* Luego : $QC = a + a \Rightarrow QC = 2a$

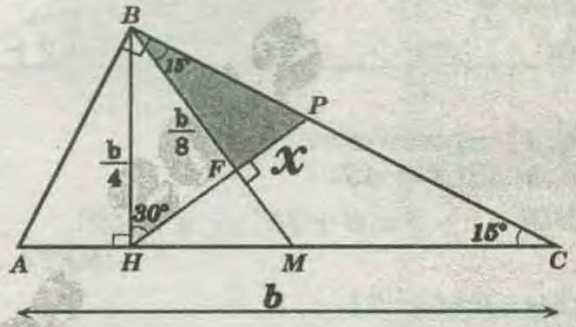
RPTA : "B"

PROBLEMA 56 :

En un triángulo ABC (recto en B), la $m\sphericalangle C = 15°$, se traza la altura BH y la mediana BM. Por H se traza $\overline{HF} \perp \overline{BM}$ que al prolongarse intersecta en P a $\overline{BC}$. Si $AC = b$. Halle FP.

A) $\frac{b}{3}$ B) $\frac{b(2-\sqrt{3})}{8}$ C) $\frac{b(\sqrt{3}-2)}{2}$ D) $\frac{b}{2}$ E) $\frac{b(2-\sqrt{3})}{8}$

RESOLUCIÓN :



$\triangle BPF$:

$$tg15° = \frac{x}{b/8} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow x = \frac{b}{8}\left[\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}\right]$$

$$\Rightarrow x = \frac{b(2-\sqrt{3})}{8}$$

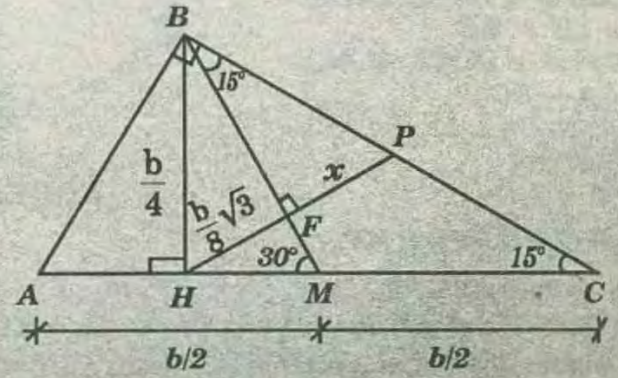
RPTA : "E"

PROBLEMA 57 :

En un triángulo ABC (recto en B), la $m\sphericalangle C = 75°$ se traza la altura BH y la mediana BM. Por H se traza $\overline{HF} \perp \overline{BM}$ que al prolongarse intersecta en P a $\overline{BC}$. Si $AC = b$. Halle FP.

A) $\frac{b}{2}$ B) $\frac{b(\sqrt{3}-1)}{2}$ C) $\frac{b(\sqrt{3}-2)}{2}$ D) $\frac{b}{2}$ E) $\frac{b(\sqrt{3}-2)}{8}$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle ABC$; por propiedad : $BH = \frac{b}{4}$

* $\triangle HFM$ notable : $HF = \frac{b}{8}\sqrt{3}$

* Pero: $\underbrace{BH} = \underbrace{HP}$

$$\frac{b}{4} = \frac{b\sqrt{3}}{8} + x \Rightarrow x = \frac{b}{8}(2-\sqrt{3})$$

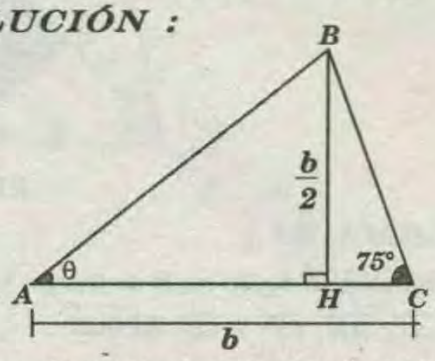
RPTA : "E"

PROBLEMA 58 :

ABC es un triángulo en el que $m\sphericalangle C = 75°$, la altura *BH* mide la mitad de lo que mide *AC*. Halle la $m\sphericalangle ABC$.

A) 75° B) 60° C) 45° D) 37° E) 30°

RESOLUCIÓN :



* Ya hemos demostrado esta propiedad.

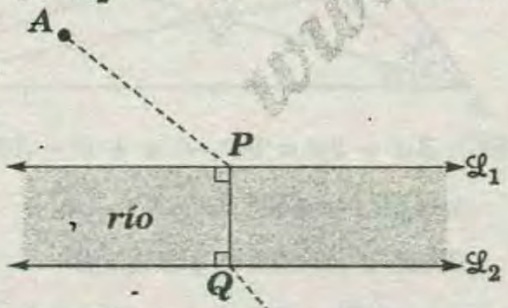
Se cumple : $\theta = 30° \Rightarrow m\sphericalangle ABC = 75°$

RPTA : "A"

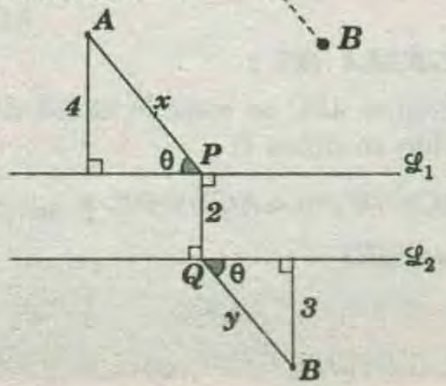
PROBLEMA 59 :

En el gráfico *A* y *B* representan dos ciudades que se encuentran en riberas opuestas. Se requiere construir un puente perpendicular al río tal que la carretera de *A* hacia *B* que pasa por el río sea la más corta posible (por ejemplo *APQB*). Si *PQ=2* y las distancias de *A* y *B* hacia $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ son *4* y *3* respectivamente, calcule $\frac{AP}{QB}$.

A) 4/3
B) 2,5
C) 3
D) 3,5
E) 4



RESOLUCIÓN :



* Tiene que ser $\overline{AP} // \overline{BQ}$ para que la distancia de «*A*» hacia «*B*» sea la más corta posible. $\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$

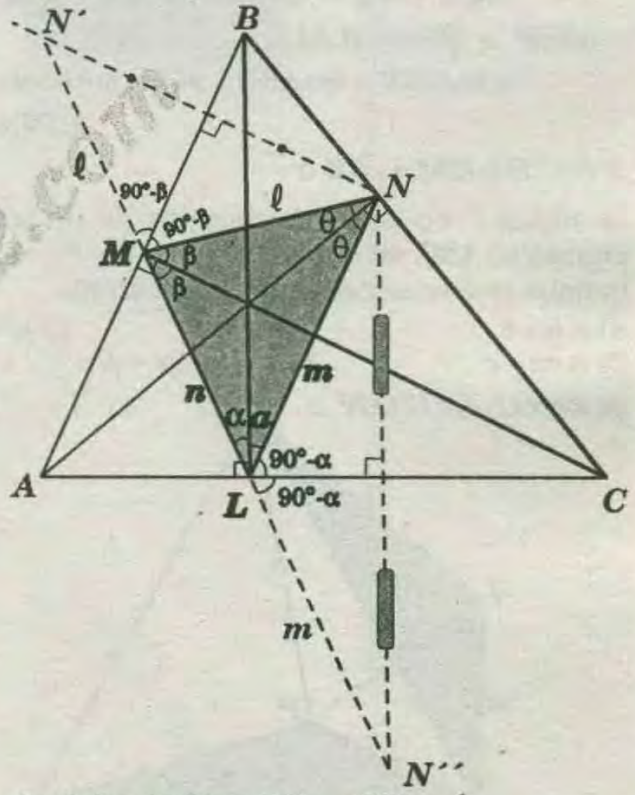
RPTA : "A"

PROBLEMA 60 :

Se tiene un triángulo acutángulo tal que *M, N* y *L* pertenecen a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Para que la región *MNL* tenga menor perímetro *M, N* y *L* deben ser para el triángulo *ABC*.

A) pies de las alturas.
B) punto medio de sus lados.
C) los vértices.
D) los extremos de las bisectrices interiores.
E) los extremos de las bisectrices exteriores.

RESOLUCIÓN :



N´ es simétrico de $N \Rightarrow MN = MN' = \ell$.

N" es simétrico de $N \Rightarrow LN = LN" = m$.

Luego ; el perímetro del ΔLMN es *N'N"* entonces; para que la región *MNL* tenga menor perímetro *M, N* y *L* deben ser pies de las alturas para el triángulo acutángulo *ABC*.

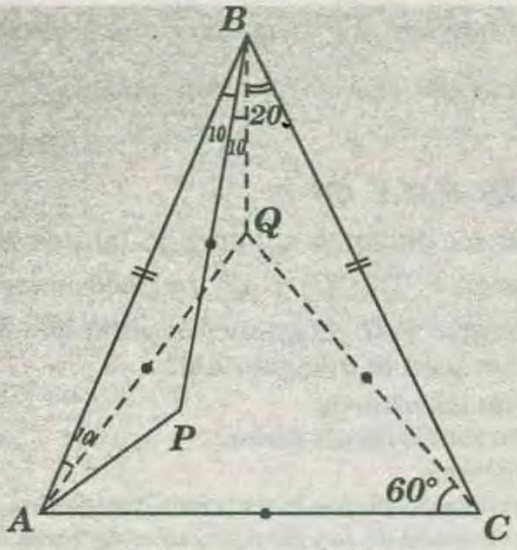
RPTA : "A"

PROBLEMA 61 :

En un triángulo isósceles *ABC* de base *AC*, se ubica *P* en la región interior tal que *PB=AC*, $m\sphericalangle PBC = 30°$ y $m\sphericalangle PBA = 10°$. Calcule $m\sphericalangle PAB$.

A) 10° B) 15° C) 20° D) 22° E) 25°

RESOLUCIÓN :



* Se construye el triángulo equilátero

$AQC : AQ = QC = AC \Rightarrow m\sphericalangle BAQ = 10°$

* $\Delta ABP \cong \Delta BAQ$ (LAL)

$\Rightarrow m\sphericalangle BAP = m\sphericalangle ABQ = 20° \Rightarrow m\sphericalangle PAB = 20$

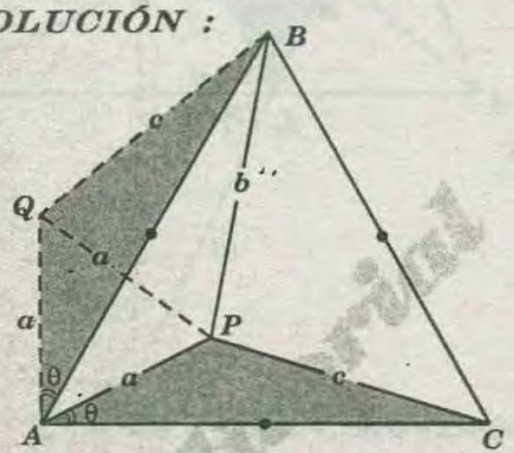
RPTA : "C"

PROBLEMA 62 :

Se ubica P en la región interior de un triángulo equilátero ABC, tal que $AP=a$, $BP=b$ y $PC=c$ $(b>c)$. Indique qué relación siempre se cumple .

A) $a.b-c$ B) $c<a<b$ C) $a^2+c^2=b^2$
D) $a<b-c$ E) $b-c<a<b+c$

RESOLUCIÓN :



Se construye el triángulo equilátero AQP : $AQ=QP=AP=a$, entonces la $m\sphericalangle QAB = m\sphericalangle PAC = \theta$

* $\Delta AQB \cong \Delta APC$ (LAL) $\Rightarrow QB = PC = c$

* ΔQBP ; por teorema se cumple :

$$\boxed{b-c<a<b+c}$$

PROBLEMA 63 :

En un triángulo ABC se ubica N en AB y M en $\overline{AC}$ tal que $MN=NB=BC$.

Si $m\sphericalangle BAC=20°$ y $m\sphericalangle BCA=80°$, calcule $m\sphericalangle ANM$.

A) 10° B) 16° C) 18° D) 15° E) 20°

RESOLUCIÓN :

* $\triangle CQN$ notablede 30° y 60°

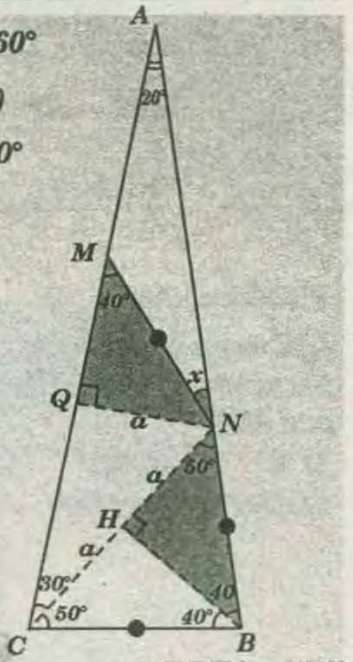
* $\triangle NHB \cong \triangle QMN$ (LL)

$\Rightarrow m\sphericalangle MNQ = m\sphericalangle HBN = 40°$

* ΔMAN :

$x + 20° = 40°$

$\Rightarrow x = 20°$



RPTA : "E"

PROBLEMA 64 :

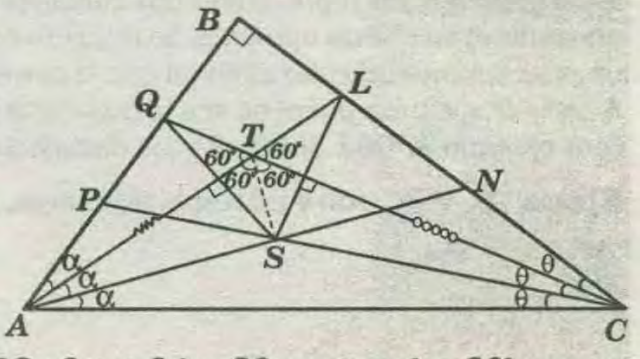
En un triángulo ABC recto en B se trazan las cevianas interiores $\overline{AL}$, $\overline{AN}$, $\overline{CP}$ y $\overline{CQ}$ tal que

$m\sphericalangle BAL=m\sphericalangle LAN=m\sphericalangle NAC$ y $m\sphericalangle BCQ= m\sphericalangle QCP=m\sphericalangle PCA$

Si $\overline{AN} \cap \overline{CP} = \{S\}$ calcule $m\sphericalangle QSL$.

A) 45° B) 53° C) 60° D) 75° E) 90°

RESOLUCIÓN :



$\triangle ABC : 3\alpha + 3\theta = 90 \rightarrow \alpha + \theta = 30°$

$\Delta AQT \cong \Delta AST \Rightarrow \overline{AT} \perp \overline{QS}$

$\Delta TLC \cong \Delta TSC \Rightarrow \overline{TC} \perp \overline{LS}$

* Luego : $m\sphericalangle QSL = 60°$

RPTA : "C"

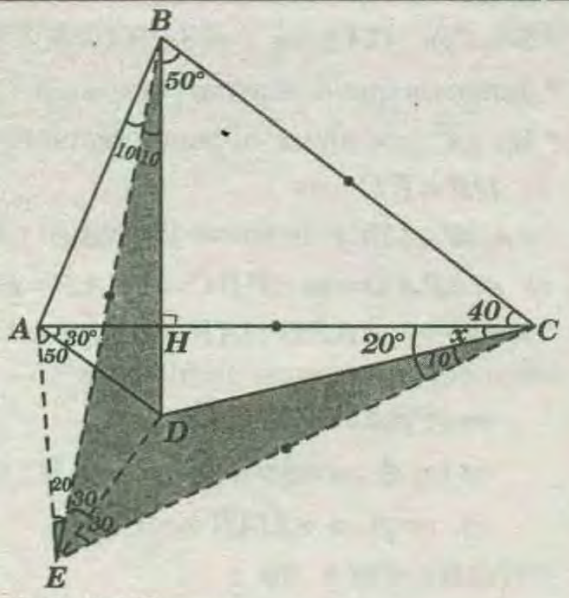
PROBLEMA 65 :

En un triángulo ABC se traza la altura BH en cuya prolongación se ubica D.

Si $m\sphericalangle BAC=70°$, $m\sphericalangle ACB=40°$ y $m\sphericalangle DAC=30°$, calcule $m\sphericalangle ACD$.

A) 5° B) 10° C) 7,5° D) 15° E) 20°

RESOLUCIÓN :



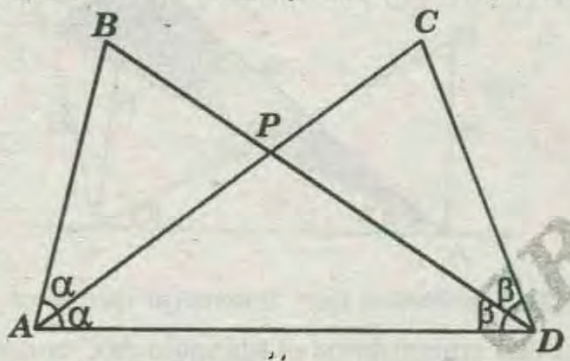
$\Delta EDB \cong \Delta EDC$ (LAL)

$\Rightarrow x = 10°$

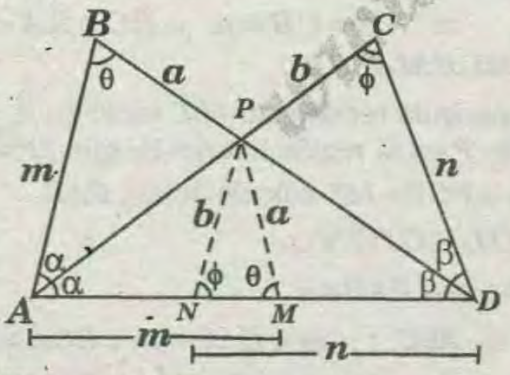
RPTA : "B"

PROBLEMA 66 :

En la figura mostrada, $\alpha > \beta$ demuestra que $BP > PC$



RESOLUCIÓN :



* Sea : $BP = a$ y $PC = b$

$\Rightarrow$ tenemos que demostrar que $a > b$ Ubicamos en $\overline{AD}$ el punto M tal que :

$AM = AB = m \Rightarrow$ el $\Delta AMP \cong \Delta ABP$

$\Rightarrow PM = BP = a$ y $m\sphericalangle AMP = m\sphericalangle ABP = \theta$

* Así también en $\overline{AD}$ ubicamos el punto N tal que :

$DN = DC = n \Rightarrow$ el $\Delta DNP \cong \Delta DCP$

$\Rightarrow PN = PC = b$ y $m\sphericalangle PND = m\sphericalangle PCD = \phi$

* Luego en $\measuredangle ABDC$.

* Si : $\alpha > \beta \Rightarrow \theta < \phi$

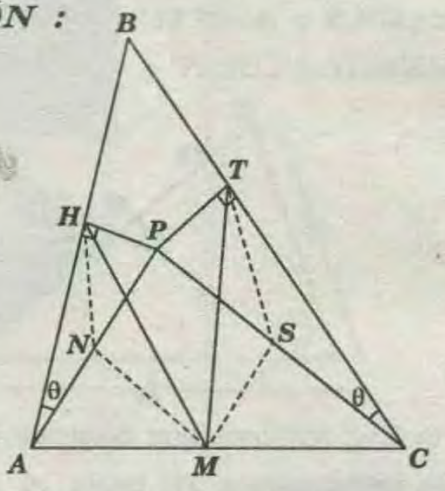
* En el ΔNPM : si $\theta < \phi \Rightarrow b < a$

* Por lo tanto queda demostrado que $a > b$

PROBLEMA 67 :

Dado un triángulo ABC, en su interior se ubica el punto P y en los lados AB y BC se ubican los puntos H y T respectivamente tal que $m\sphericalangle AHP = m\sphericalangle CTP = 90°$; luego se ubica el punto medio M de $\overline{AC}$. Demuestre que si $m\sphericalangle HAP = m\sphericalangle TCP$ entonces $HM = MT$.

RESOLUCIÓN :



* Del dato : $m\sphericalangle HAP = m\sphericalangle TCP = \theta$

* Se ubican los puntos medios N y S de $\overline{AP}$ y $\overline{PC}$ respectivamente.

* $\overline{HN}$: mediana relativa a la hipotenusa de $\triangle AHP$.

* $\overline{TS}$: mediana relativa a la hipotenusa de $\triangle PTC$.

* Por teorema se sabe :

$HN = AN = NP$ .....(I)

$TS = PS = SC$ .....(II)

* ΔANH :

isósceles , luego por ángulo exterior $m\sphericalangle HNP = 2\theta$

* ΔTSC :

isósceles , luego por ángulo exterior $m\sphericalangle PST = 2\theta$

* En el triángulo APC como M, N y S son puntos medios de sus lados.

$\overline{MN}$: base media relativa al lado $PC \rightarrow \overline{MN} // \overline{CP}$

$\overline{MS}$: base media relativa al lado $AP \rightarrow \overline{MS} // \overline{AP}$

* Entonces $MNPS$ es un paralelogramo

$m\sphericalangle MNP = m\sphericalangle PSM$, $NP = MS$.....(III)

y $MN = NP$ .....(IV)

WWW.GRATIS2.COM

* De *(I)* y *(III)* : $HN=MS$
* De *(II)* y *(IV)*: $TS=MN$
* Además :

$m\sphericalangle MNH=m\sphericalangle MNP+m\sphericalangle HNP=m\sphericalangle MNP+2\theta$

$m\sphericalangle MST=m\sphericalangle PSM+m\sphericalangle PST=m\sphericalangle PSM+2\theta$

* Anteriormente se obtuvo que :

$m\sphericalangle MNP=m\sphericalangle PSM \quad m\sphericalangle MNH=m\sphericalangle MST$

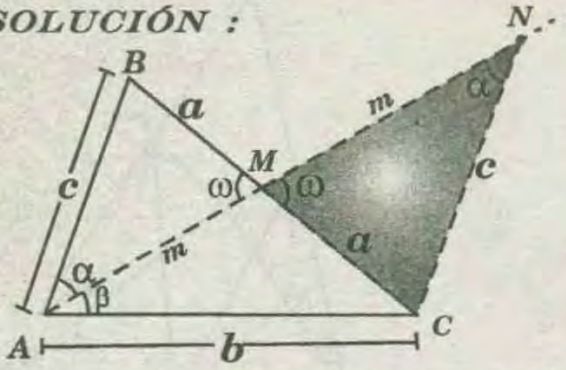
* Luego :

$$\Delta MNH \cong \Delta TSM\ (LAL) \rightarrow HM=MT$$

PROBLEMA 68 :

Dado un triángulo ABC, se ubica el punto medio M de $\overline{AC}$ Demuestre que si $AC>AB$, entonces $m\sphericalangle MAB > m\sphericalangle MAC$.

RESOLUCIÓN :



* Si $b>c$ tenemos que demostrar que $\alpha>\beta$. Para ello prolongamos $\overline{AM}$ hasta el punto N, tal que $MN=MA=m$, sean $BM=MC=a$ y $m\sphericalangle NMC=m\sphericalangle AMB=\omega$ ($\sphericalangle_s$ opuestos por el vértice).
* Los triángulos AMB y NMC son congruentes

$\Rightarrow AB=NC=c$ y $m\sphericalangle MAB=m\sphericalangle MNC=\alpha$

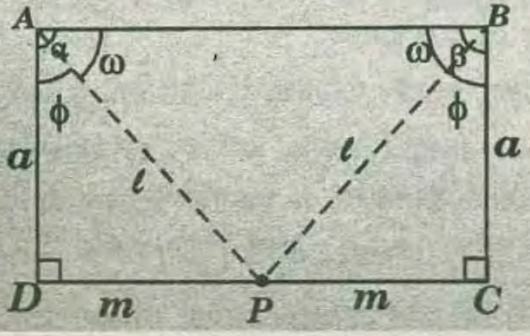
* En el ΔANC; $b>c$
* Por lo tanto $\alpha > \beta$, con lo cual queda demostrado la conjetura.

PROBLEMA 69 :

En un cuadrilátero $ABCD$; $AD=BC$ y $m\sphericalangle BCD=m\sphericalangle ADC=90°$.

Demuestre que $\sphericalangle DAB \cong \sphericalangle CBA$

RESOLUCIÓN :



* Sea : $m\sphericalangle DAB=\alpha$ y $m\sphericalangle CBA=\beta$
* Tenemos que domostrar que $\alpha=\beta$
* En $\overline{DC}$ ubicamos el punto medio P

$\Rightarrow DP=PC=m$

$\Rightarrow ADP \cong \Delta BCP$ (teorema de triángulo congruentes)

$\Rightarrow m\sphericalangle PAD=m\sphericalangle PBC=\phi$ y $AP=BP=\ell$

* Luego en ΔAPB : $(AP=PB)$ y del teorema de lados congruentes en un triángulo

$m\sphericalangle PBA=m\sphericalangle PAB=\omega$

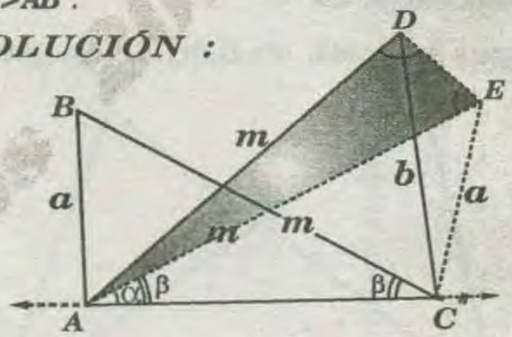
$\Rightarrow$ en A : $\alpha=\phi+\omega$ y en B : $\beta=\phi+\omega$

$\Rightarrow \alpha=\beta \Rightarrow \sphericalangle DAB \cong \sphericalangle CBA$

PROBLEMA 70 :

En una recta se ubican los puntos A y C. Si hacia un mismo lado de la recta se ubican los puntos B y D, tal que $AD=BC$ y $m\sphericalangle DAC > m\sphericalangle BCA$, demuestre que $DC>AB$.

RESOLUCIÓN :



* si $\alpha > \beta$ tenemos que demostrar que $b>a$.
* Para ello construimos el triángulo AEC congruente al triángulo CBA .

$\Rightarrow AE=CB=m$ y $EC=BA=a$

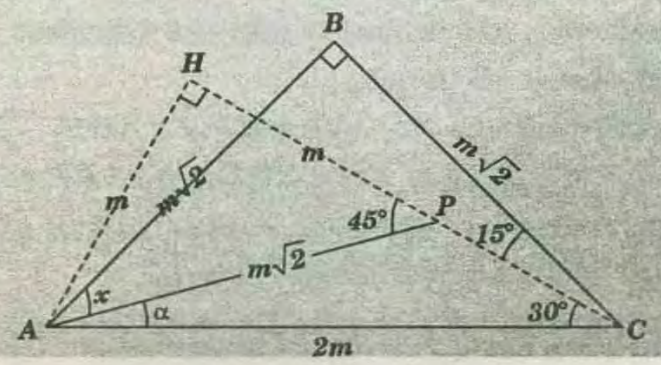
PROBLEMA 71 :

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se ubica un punto P en la región interior,tal que $AP=AB=BC$. Si la $m\sphericalangle PCB=15°$, calcule la $m\sphericalangle PAB$.

RESOLUCIÓN :

* Piden : $m\sphericalangle PAB=x$
* En el ΔABC : $m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle BCA=45°$

$\Rightarrow m\sphericalangle PCA+15°=45°$



* Se tiene que : $m\sphericalangle PCA = 30°$

* Luego,si la $m\sphericalangle PAC = \alpha$ se tiene

$\alpha + x = 45°$.....(I)

* Es decir , el problema consiste en calcular α.

* Prolongamos $\overline{CP}$ y trazamos $\overline{AH} \perp \overline{PC}$, para aprovechar el $\triangle AHC$ (notable de $30°$ y $60°$).

* Si : $AH = m \rightarrow AC = 2m$

* En el $\triangle ABC$:

$$AB = BC = m\sqrt{2} \Rightarrow AP = m\sqrt{2}$$

* Luego , en el $\triangle APH$: $m\sphericalangle APH = 45°$

* Por ángulo exterior : $\alpha + 30° = 45° \Rightarrow \alpha = 15°$

* En el ΔAPC

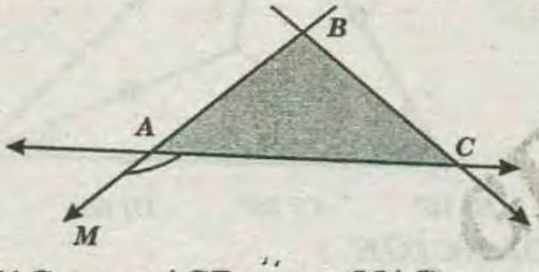
* Reemplazando en (I) : $x = 30°$

PROBLEMA 72 :

Demostrar que la medida de un ángulo exterior de un triángulo es mayor que la medida de cualesquiera de los dos ángulos interiores no adyacentes a él.

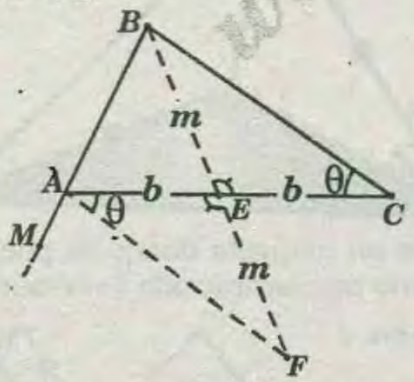
RESOLUCIÓN :

* Al considerar el triángulo sombreado:



$m\sphericalangle MAC > m\sphericalangle ACB \vee m\sphericalangle MAC > m\sphericalangle ABC.$

Sea E punto medio de $\overline{AC}$ y prolongamos BE hasta F, tal que $EF = BE$.



* Entonces, como $m\sphericalangle AEF = m\sphericalangle CEB$ (postulado de los ángulos opuestos por el vértice), los triángulos AEF y CEB son congruentes (teorema de los triángulos congruentes)

$$\Rightarrow m\sphericalangle FAE = m\sphericalangle BCE = \theta$$

* Del postulado de ángulos :

$m\sphericalangle MAC = m\sphericalangle MAF + m\sphericalangle FAC \Rightarrow m\sphericalangle MAC > m\sphericalangle FAC$,

pero como $\sphericalangle BCE \cong \sphericalangle FAC$

$$\Rightarrow m\sphericalangle FAC = m\sphericalangle ACB = \theta$$

* Por lo tanto, $m\sphericalangle MAC > m\sphericalangle ACB$ (el otro caso puede ser demostrado de manera análoga).

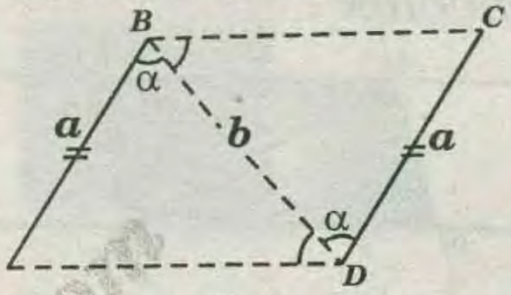
PROBLEMA 73 :

Si los segmentos AB y CD son paralelosy congruentes , demostrar que : $\overline{BC} \cong \overline{AD} \vee \overline{BC}$ y $\overline{AD}$ se bisecan.

RESOLUCIÓN :

Sea $\overline{AB} // \overline{CD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

1) Si los segmentos BC y AD no se intersecan.



* Trazamos $\overline{BD}$ y por ángulos alternos internos

$m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle CDB = \alpha$

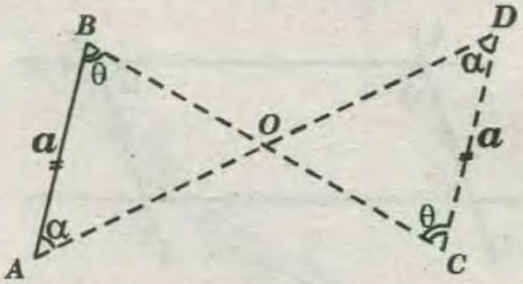
* Sea $BD = b$ y $AB = CD = a$

$$\Rightarrow \sphericalangle ABD \cong \sphericalangle CDB \quad \Rightarrow \overline{AD} \cong \overline{BC}$$

* También : $m\sphericalangle ADB = m\sphericalangle CBD$

* Por el recíproco de los angulos alternos internos $\overline{AD}$ es paralelo con $\overline{BC}$ ($\overline{AD} // \overline{BC}$).

2) Si los segmentos BC y AD se intersecan.



Sea $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{O\}$ por ángulos alternos internos, se cumple

- $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle DCB = \theta$
- $m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle CDA = \alpha$

* Del teorema de triángulos congruentes :

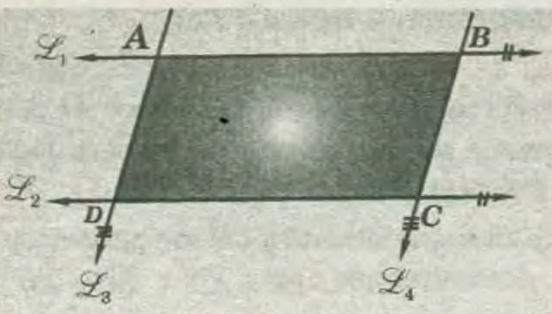
$\Delta ABO \cong \Delta DCO$ (A.L.A.)

$\Rightarrow AO = DO$ y $BO = CO$

.....l.q.q.d

PROBLEMA 74 :

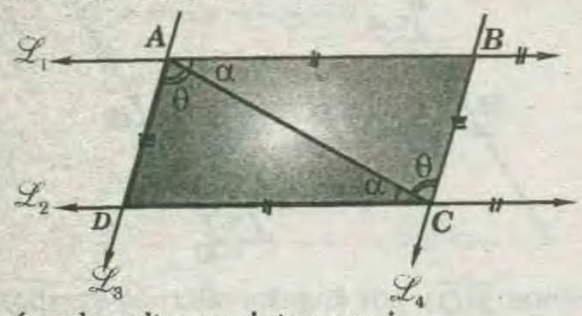
Si dos pares de rectas paralelas se intersecan dos a dos, estos determinan segmentos congruentes respectivamente.



Sea : $\overrightarrow{\mathcal{L}_1} \| \overrightarrow{\mathcal{L}_2}$ y $\overrightarrow{\mathcal{L}_3} \| \overrightarrow{\mathcal{L}_4}$

$\Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

RESOLUCIÓN :



* Por ángulos alternos internos si :

$\overrightarrow{\mathcal{L}_1} \| \overrightarrow{\mathcal{L}_2} \Rightarrow m\sphericalangle CAB = m\sphericalangle ACD = \alpha$

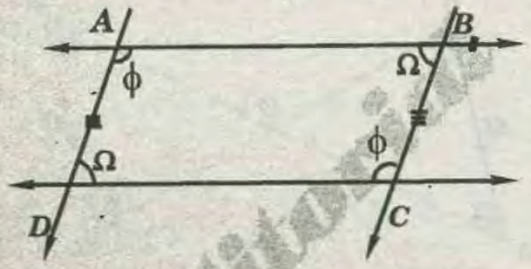
$\overrightarrow{\mathcal{L}_3} \| \overrightarrow{\mathcal{L}_4} \Rightarrow m\sphericalangle DAC = m\sphericalangle BCA = \theta$

* Del segundo teorema de triángulos congruentes :

$\triangle DAC \cong \triangle BCA \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

OBSERVACIÓN :

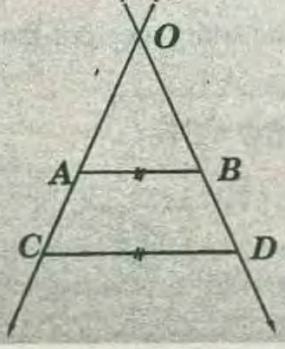
Si $\overline{AB} \| \overline{DC}$ y $\overline{AD} \| \overline{BC}$



$\Rightarrow m\sphericalangle ADC = m\sphericalangle CBA$ y $m\sphericalangle DAB = m\sphericalangle BCD$

PROBLEMA 75 :

En la figura si, $\overline{AB} \| \overline{CD}$, asumimos que $CD > AB$.

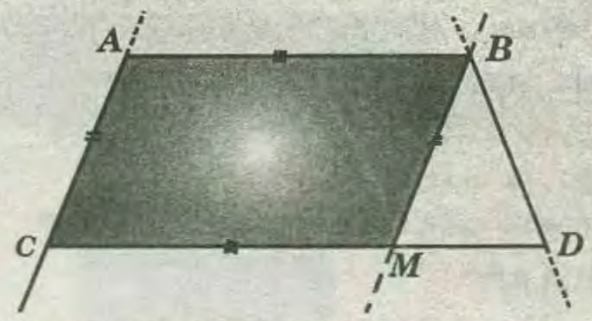


Si $\overline{AB} \| \overline{CD}$, estando $\overline{AB}$ más próximo a O que $\overline{CD}$

Demostrar que : $CD > AB$

RESOLUCIÓN :

* Por B trazamos una recta paralela a $\overline{AC}$ que interseca a $\overline{CD}$ en M.

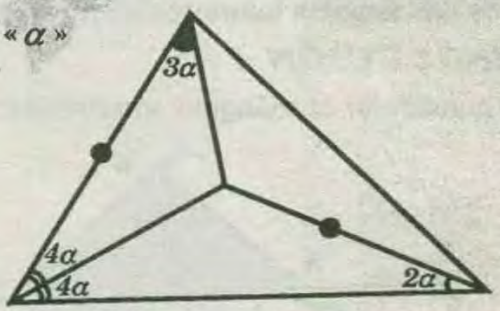


* Del teorema de los dos pares de rectas paralelas tenemos que $CM = AB$.

$CD = CM + MD \Rightarrow CD > CM \Rightarrow CD > AB$

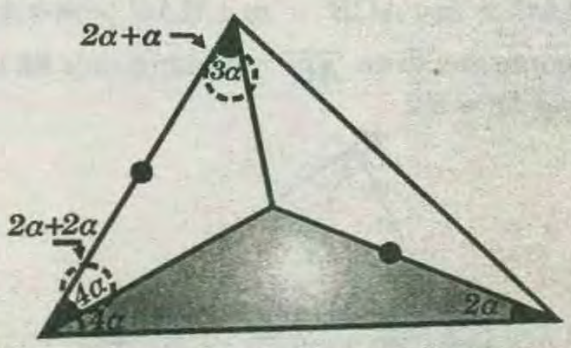
PROBLEMA 76 :

Determinar : « α »



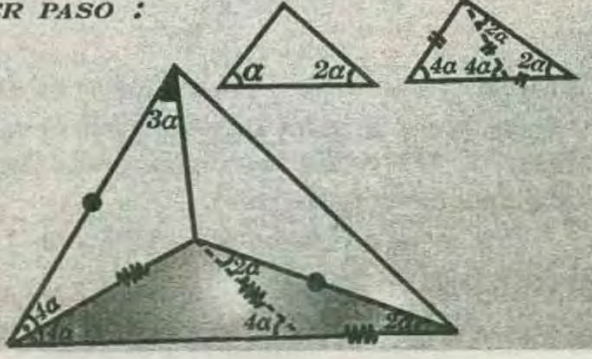
A) 25° B) 15° C) 30° D) 60° E) 20°

RESOLUCIÓN :



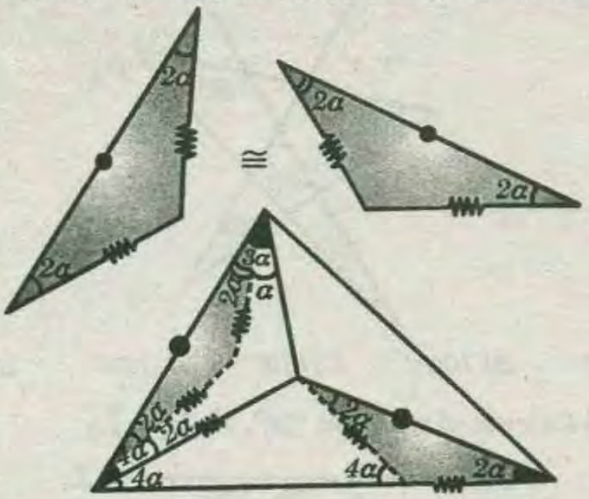
* Se observa un triángulo donde se puede usar el primer criterio de construcción (ver teoría) .

PRIMER PASO :



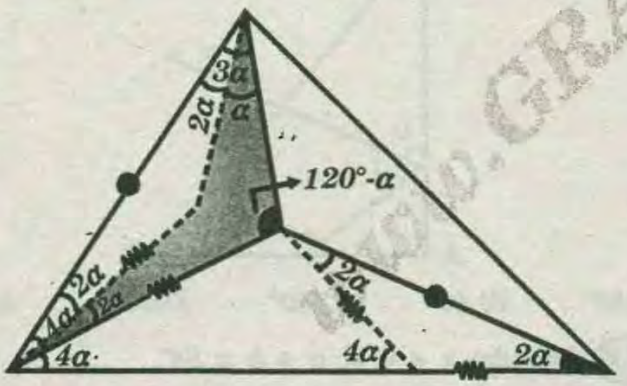
SEGUNDO PASO :

Construimos un triángulo congruente interiormente en la figura , de la siguiente manera y se obtiene :



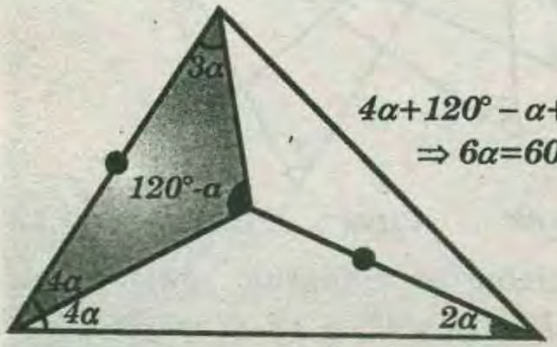
* ***TERCER PASO :***

En la figura observamos un cuadrilátero concavo donde se cumple :



* ***CUARTO PASO :***

Luego en la figura sombreada , se tiene :



$4\alpha+120^\circ-\alpha+3\alpha=180^\circ$

$\Rightarrow 6\alpha=60^\circ \Rightarrow \alpha=10^\circ$

RPTA : "B"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 La reunión del triángulo con su interior se denomina:

A) Área del triángulo ***B) Area de la región triangular***
C) Región angular ***D) Región triangular***

02 Responda con ***(V)*** si es verdadero y con ***(F)*** si es falso.

( ) Todo triángulo tiene tres lados .

( ) El número de vértices de un triángulo es seis .

( ) El triángulo está incluído en la región triangular.

A) VVV ***B) VFV*** ***C) FVV*** ***D) FFV*** ***E) FFF***

03 Si los lados de un triángulo miden ***35°; 65°*** y ***80°,*** entonces el triángulo es:

I) Acutángulo ***II) Escaleno***
III) Obtusángulo ***IV) Rectángulo***

A)Solo I ***B)Solo II*** ***C)Solo III***
D)Solo IV ***E) I y II***

04 Si los lados de un triángulo miden ***4 ; 9*** y ***8***, entonces su perímetro será:

A) 19 ***B)20*** ***C) 21*** ***D) 22*** ***E) 23***

05 Si dos ángulos de un triángulo miden ***35°*** y ***55°***, luego dentro de la clasificación de los triángulos, según sus ángulos está catalogado como:

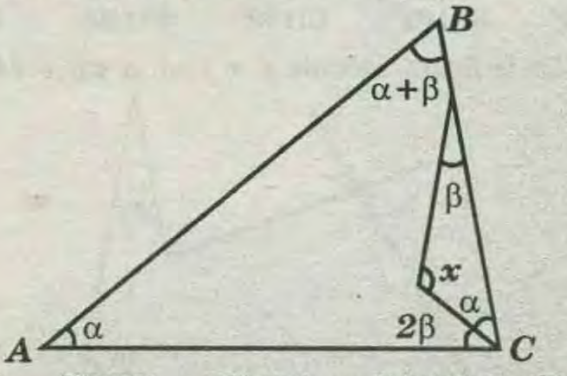
A) Acutángulo ***B) Obtusángulo*** ***C) Rectángulo***
D) Faltan datos ***E)N.A***

06 Si ***A, B,*** y ***C*** son los vértices de un triángulo luego la operación $\Delta ABC - \overline{AB}$, es igual a:

A) $\overline{BC}$ ***B)*** $\overline{AC}$ ***C)*** $\overline{BC} \cap \overline{AC}$

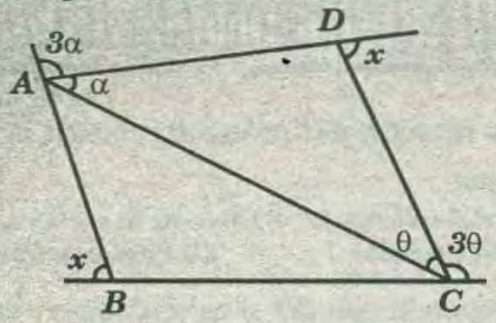
D) $\overline{BC} \cup \overline{AC}$ ***E)*** $\overline{AB} \cup \overline{AC}$

07 De la figura, calcule el valor de ***"x"***.



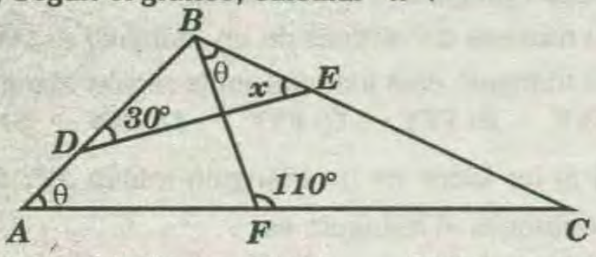
A) 100° ***B) 120°*** ***C)110°*** ***D)130°*** ***E)140°***

08 De la figura, calcular el valor de "x".



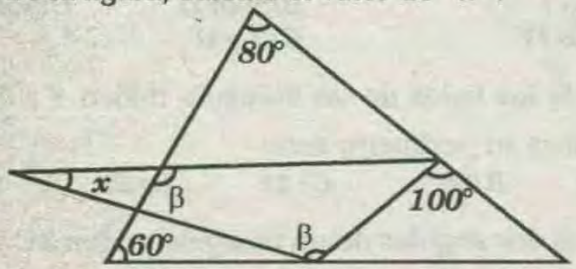
A) 30° B) 36° C)45° D)60° E)72°

09 Según el gráfico, calcular "x".



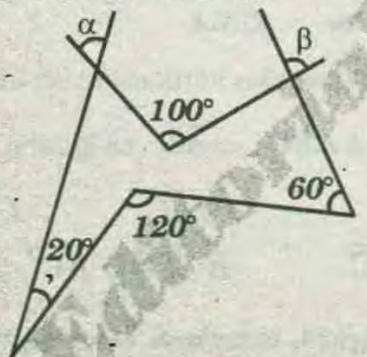
A) 35° B) 40° C)45° D)50° E)55°

10 De la figura, calcule el valor de "x".



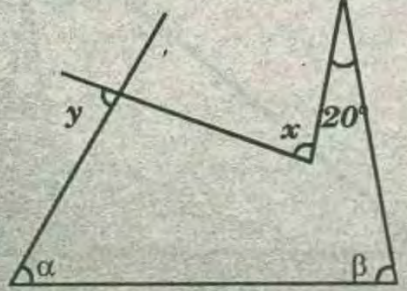
A) 20° B) 18° C)15° D)22,5° E)12°

11 De la figura, calcule: $\alpha + \beta$.



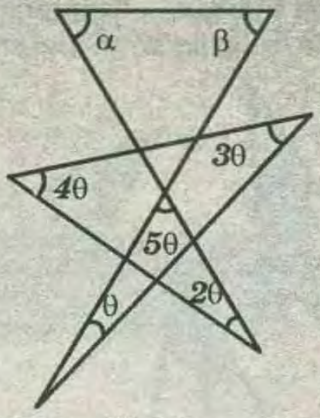
A)110° B) 120° C)130° D)140° E)150°

12 De la figura, calcule $x + y$, si: $\alpha + \beta = 140°$.



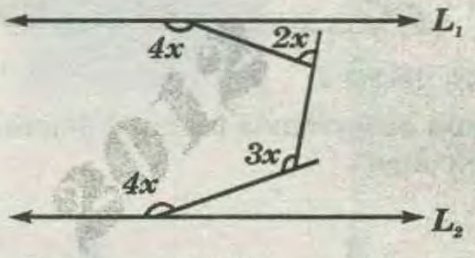
A)140° B) 150° C)160° D)145° E)155°

13 Del gráfico, calcular: $\alpha + \beta$.



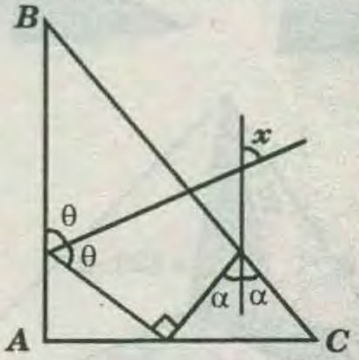
A)90° B) 100° C)110° D)120° E)150°

14 Calcule el valor de "x", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



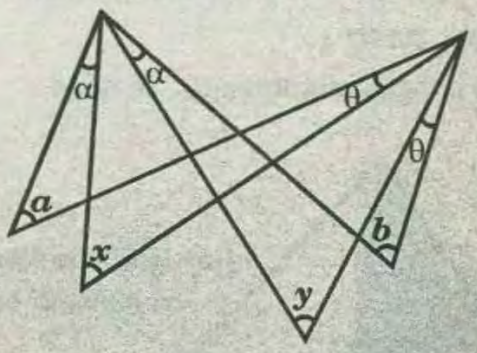
A)20° B) 25° C)30° D)35° E)40°

15 Calcular "x", si la $m\sphericalangle ABC = 40°$.



A)30° B) 40° C)50° D)65° E)70°

16 Calcular $x + y$, si: $a + b = 86°$.

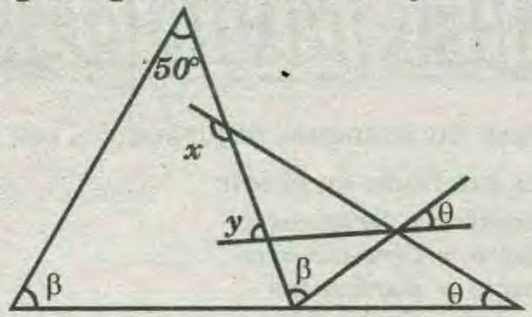


A)43° B) 86° C)129° D)172° E)51°

17 Se tiene un triángulo ABC donde $BC = 3x$, $AB = 18$ y $AC = 12$. Si $m\sphericalangle A > m\sphericalangle C$, calcular el valor entero par de "x".

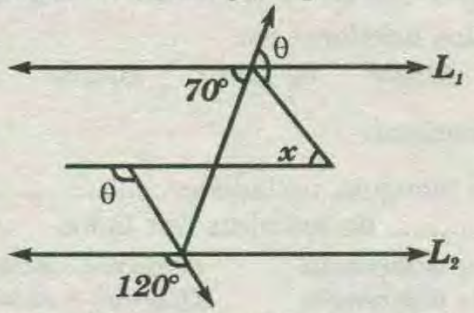
A)6° B) 4° C)8° D)2° E)10°

18 Según el gráfico, calcular: $x + y$.



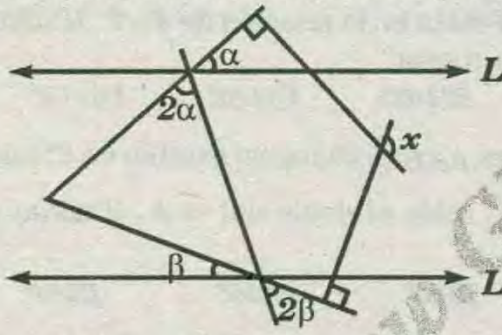
A)220° B) 280° C)250° D)260° E)230°

19 Calcular "x", si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$.



A)20° B) 30° C)40° D)50° E)60°

20 De la figura, calcule el valor de "x", Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$



A)100° B) 110° C)115° D)120° E)125°

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular'la medida de uno de los ángulos de un triángulo, si estos forman una progresión aritmética.

A)60° B)45° C)30° D)53° E)37°

02 ¿En qué triángulo, se cumple que las medidas de sus ángulos son proporcionales a *1 ; 3* y *5*

A)Triángulo acutángulo
B)Triángulo equilátero
C)Triángulo Obtusángulo
D)Triángulo equiángulo
E)Triángulo rectángulo

03 Si los ángulos *A* y *C* de un triángulo *ABC* miden *40°* y *30°* respectivamente ¿Cuál de sus tres lados es el mayor?

A)$\overline{BC}$ B)$\overline{AB}$ C)$\overline{AC}$

04 Las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son entre sí como *2* a *7*. ¿Cuánto mide el mayor de estos ángulos?

A)60° B)35° C)50° D)20° E) 60°

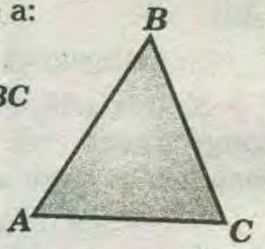
05 El ángulo desigual de un triángulo isosceles mide *80°* ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos iguales?

A)45° B)50° E) 60° D)20° E)40°

06 ¿Cuánto mide el ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos de un triángulo equilátero?

A) 100° B) 90° C) 110° D) 120° E) 135°

07 Dado el triángulo *ABC*, la operación, $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$ es equivalente a:



A) El perímetro del triángulo ABC
B) La región triangular
C) $\triangle ABC$
D) $\overline{AB} + \overline{BC}$

08 El segmento que une el vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto se llama:

A) Bisectríz B) Altura C) Mediatríz
D) Mediana E) Ceviana

09 El segmento que parte de un vértice de un triángulo y cae en forma perpendicular al lado opuesto se denomina:

A) Bisectríz B) Altura C) Mediatríz
D) Ceviana E) Mediana

10 El punto donde concurren las tres mediatrices de un triángulo se denomina:

A) Baricentro B) Circuncentro C)Ortocentro
D) Incentro E) Cevacentro

11 Incentro es el punto donde concurren las:

A) Medianas B) Bisectrices C) Alturas D) Mediatrices

12 En un triángulo obtusángulo, el número de alturas exteriores es:

A) 1 B)2 C)3 D) Todas son interiores

13 El baricentro de un triángulo divide a la mediana en dos segmentos cuyas medidas están en una relación de:

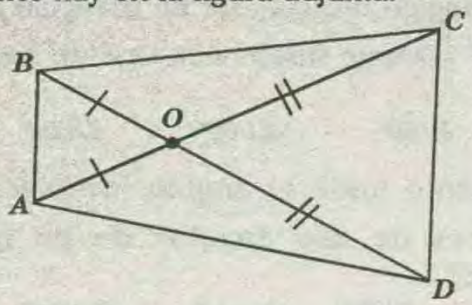
FREE GRATIS .com

A) 1:3 B) 2:3 C)1:4 D)2:1 E) 7:1

14 El punto donde se intersectan las bisectrices de dos ángulos exteriores de un triángulo se denomina:

A) Excentro *B) Incentro* *C) Baricentro*

15 Determinar cuántos pares de triángulos congruentes hay en la figura adjunta.



A)2 B)3 C)5 D)4 E)6

16 Responder con *(V)* verdadero y con *(F)* si es falso.

( ) Un triángulo es congruente consigo mismo.

( ) Si dos triángulos son cada uno de ellos congruentes con un tercero, entonces serán congruentes entre sí.

( ) Todos los triángulos rectángulos de igual hipotenusa son congruentes.

A) VVF *B) VVV* *C) FVV* *D) FFV* *E) FFF*

17 El segmento determinado al unir los puntos medios de dos lados de un triángulo se denomina:

A) Mediana *B) Mediatriz* *C) Semimediana*
D) Base media *E) Media base*

18 Completar:

« En todo triángulo rectángulo la mediana relativa a la hipotenusa es igual a..... de dicha hipotenusa.

A)La mitad *B)La tercera parte* *D)Base*
C)La cuarta parte *E) La quinta parte*

19 En un triángulo isósceles la altura relativa a la base, es a la vez:.

I) Mediana y Bisectriz
II) Mediana de la base
III) Bisectríz

De estas proposiciones son verdaderas:

A) Solo I *B) Solo II* *C)I y II* *D) II y III* *E) Todas*

20 El triángulo, cuyo ortocentro es interior se denomina:

A) Equilátero *B) Obtusángulo* *C) Isósceles*
D) Acutángulo *E) Rectángulo.*

TAREA DOMICILIARIA

01 Para un triángulo obtusángulo, los puntos notables exteriores en él son:

A) Baricentro y Ortocentro
B) Incentro y Circuncentro
C) Incentro y Baricentro
D) Excentro y Baricentro
E) Ortocentro y Circuncentro

02 En un triángulo, la suma de las medidas de sus ángulos interiores es:

A) 90° *B)135°* *C) 180°* *D) 270°* *E) 360°*

03 Completar:

« En todo triángulo, un lado es .....que la ..... de los otros dos lados.

A)Menor – diferencia *B)Mayor – suma*
C)Mayor – diferencia *D)Igual – suma*
E)Igual – diferencia

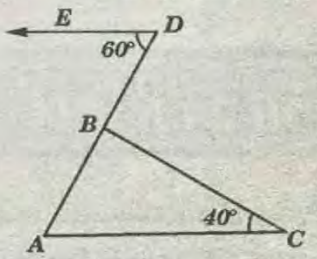
04 En el $\triangle ABC$, $m\sphericalangle A=30°$ y la medidas de los otros dos están en la relación de *3* a *7*. ¿Cuánto mide el ángulo mayor?

A)105° *B)102°* *C)110°* *D)115°* *E)120°*

05 En el $\triangle ABC$, el ángulo exterior en *C*, mide *126°*. Si el $\sphericalangle B$ mide el doble del $\sphericalangle A$. ¿Cuánto mide el $\sphericalangle A$?

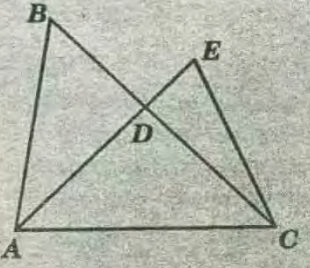
A)42° *B)40°* *C)36°* *D)84°* *E)90°*

06 En la Figura adjunta $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ ¿Cuánto mide el ángulo *DBC* ?



A)90°
B)105°
C)100°
D)110°
E)120°

07 En la Figura $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle ACE$; $DC=EC$, ¿Qué línea notable es $\overline{AD}$ del triángulo *ABC*



A)Altura
B)Bisectríz exterior
C)Mediatríz
D)Bisectríz interior
E)Mediana

08 Dado el triángulo *ABC* donde su incentro es *I*,

y, $m\sphericalangle AIC = 150°$; calcular la $m\sphericalangle B$.

A)120° B)105° C)115° D) 125° E) 135°

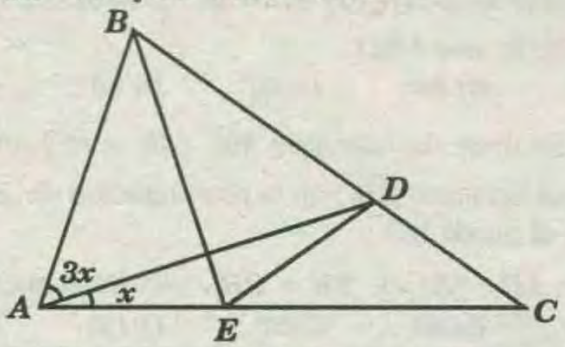
09 En un triángulo ABG, las bisectrices de los ángulos A y C forman un ángulo cuya medida es el triple de la medida del $\sphericalangle B$. Calcular la $m\sphericalangle B$.

A) 72° B) 22,5° C)18° D)36° E)45°

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

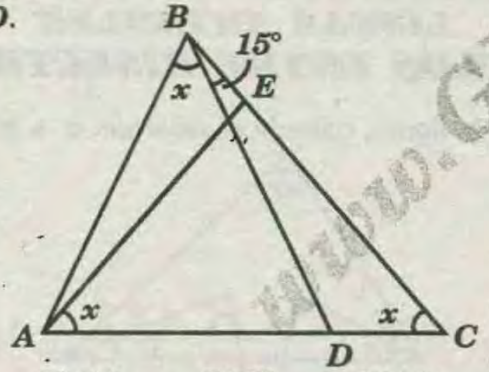
CLASIFICACION DE LOS TRIANGULOS-LINEAS NOTABLES

01 De la figura, calcule el valor de "x" , si: $AB = BE = BD$ y $AE = ED = DC$.



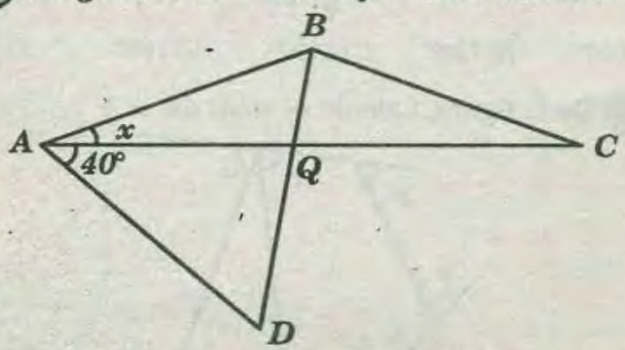
A)12° B) 15° C)16° D)18° E)20°

02 De la figura, calcule el valor de "x", si: $AB = BD$.



A)40° B) 50° C)30° D)45° E)55°

03 Del gráfico: $AB = BC = QC = BD$. Calcular "x".

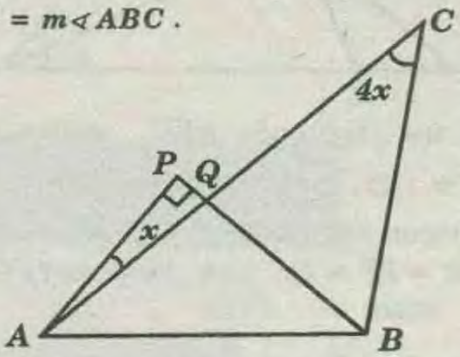


A)25° B) 10° C)30° D)15° E)20°

04 En un triángulo isósceles ABC $(AB = AC)$ se traza la ceviana interior BM. Calcular la $m\sphericalangle MBC$, si: $AM = MB = BC$.

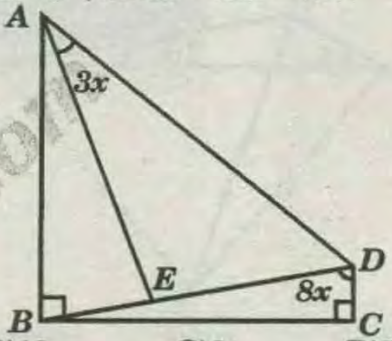
A)30° B)36° C)15° D)20° E)18°

05 En la figura, calcular "x", si: $AB = BC$ y $m\sphericalangle AQB = m\sphericalangle ABC$.



A)15° B)12° C)10° D)5° E)8°

06 Calcular "x", si: $AB = AE = BD$.



A)5 B)10 C)6 D)7 E)8

07 En un triángulo isósceles ABC $(AB=AC)$, en su mediana se ubica el punto D, tal que: $AD = DC$. Si la $m\sphericalangle DAB=15°$, calcule la $m\sphericalangle BDC$.

A)30° B)45° C)50° D) 60° E)55°

08 En un triángulo isósceles ABC $(AB = BC)$ se trazan las cevianas interiores $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ las cuales se cortan en F. Si la $m\sphericalangle ABF = 20°$ y $BF = BD$, calcular $m\sphericalangle DAC$.

A) 5° B) 30° C) 10° D) 40° E) 20°

09 En un triángulo ABC, en donde la $m\sphericalangle ABC = 40°$, se traza la bisectriz interior $\overrightarrow{CM}$. Calcular la $m\sphericalangle BCA$, si la bisectriz del $\sphericalangle BAC$ es perpendicular a la bisectriz del $\sphericalangle BCM$.

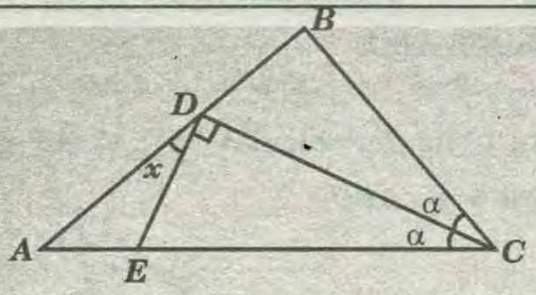
A) 90° B)80° C)60° D) 50° E) 70°

10 Se tiene un triángulo ABC en el cual $m\sphericalangle A - m\sphericalangle C = 40°$, luego se traza la ceviana $\overline{AM}$ tal que $AB = BM$. Calcular la medida del ángulo entre las alturas $\overline{BH}$ y $\overline{BQ}$ de los triángulos ABC y ABM.

A)40° B)20° C)10° D)30° E)15°

11 Si: $m\sphericalangle B - m\sphericalangle A = 50°$, calcular el valor de "$x$".

WWW.GRATIS2.COM

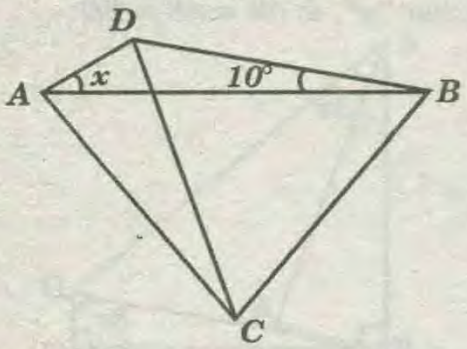


A)20°
B)15°
C)10°
D)30°
E)25°

12 En un triángulo ABC, $m\sphericalangle BAC = 30°$ y $m\sphericalangle ABC = 120$, en las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos P y Q, respectivamente, tal que: $AB = BP = QC$. Calcular la $m\sphericalangle PQC$.

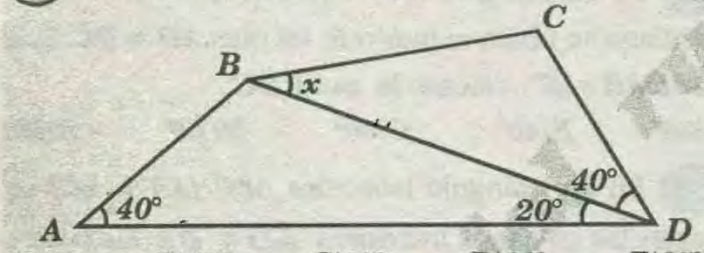
A)30° B)60° C)18° D)36° E)45°

13 De la figura, calcule el valor de "x", si la $m\sphericalangle ACB = 80°$ y $AC = BC = BD$.



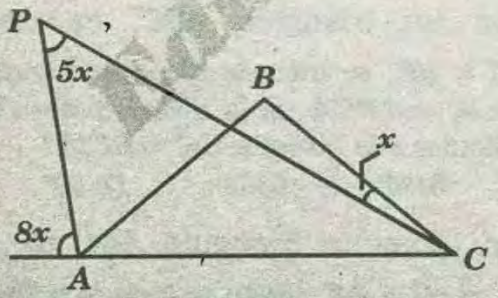
A)18° B)15° C)20° D)25° E)30°

14 De la figura, calcule el valor de "x", si: $AB = DC$.



A)20° B)40° C)25° D)30° E)35°

15 De la figura, calcule el valor de "x", si: $AP = AB = BC$.



A)5° B)10° C)15° D)20° E)25°

16 Se tiene un triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la ceviana interior $\overline{BP}$ cuya prolongación interseca en Q a la bisectriz del ángulo exterior en C. Calcular la $m\sphericalangle PQC$, si: $AB = AP$.

A)45° B)60° C)30° D) 36° E) 54°

17 En la región interior de un triángulo ABC se ubica el punto P tal que la $m\sphericalangle PAB = 30°$, $m\sphericalangle ABP = 45°$, $m\sphericalangle APC = 120°$ y $AB = PC$. Calcule la $m\sphericalangle PCB$.

A) 20° B) 18° C) 25° D) 24° E)15°

18 En un triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, se traza la bisectriz interior $\overline{CQ}$. Si $AQ = 2$ y CQ toma un valor entero, calcule dicho valor.

A) 1 B) 2 C) 3 D)4 E)5

19 En un triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ y en el triángulo DBC la altura $\overline{CH}$, tal que: $m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle HCD$ y $BD = BC$. Si $m\sphericalangle DBC = 40°$, calcular la $m\sphericalangle ABD$.

A)40° B) 80° C) 60° D) 50° E)20°

20 Se tiene un triángulo ABC $(AB = AC)$, en éste se traza la altura $\overline{BH}$; en la prolongación de $\overline{BC}$ se ubica el punto D:

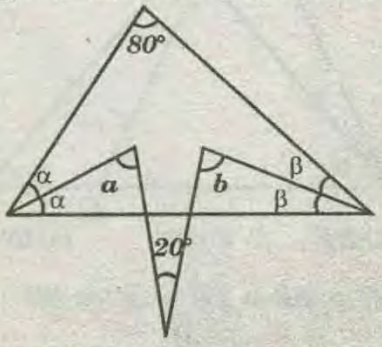
$\overleftrightarrow{HD} \cap \overline{AB} = \{E\}$. Si $BE = BH$, calcular la $m\sphericalangle BDE$.

A) 10° B)36° C)45° D)15° E) 30°

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

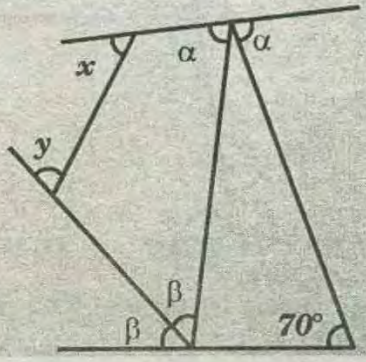
LINEAS NOTABLES
ANGULOS ENTRE BISECTRICES

01 De la figura, calcule el valor de: $a + b$.



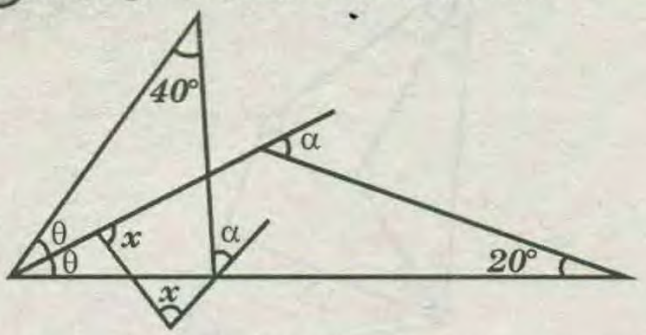
A) 100° B)120° C)130° D)140° E)150°

02 De la figura, calcule el valor de: $x + y$.



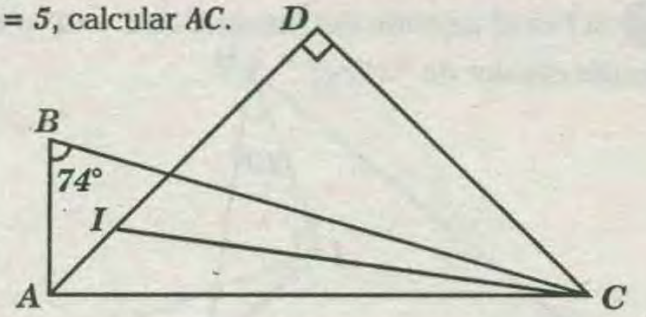
A) 100° B)120° C)130° D)125° E)115°

03 De la figura, calcule el valor de "x".



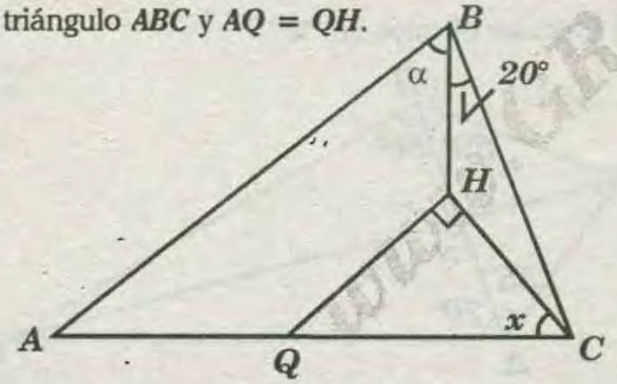
A) 60° B)70° C)75° D)80° E)65°

04 Si *I* es el incentro del triángulo *ABC*, *AI = 1* e *IC = 5*, calcular *AC*.



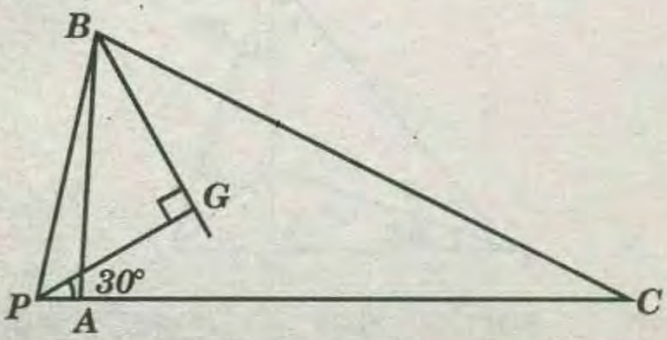
A) 6 B)3 C)$4\sqrt{2}$ D)$3\sqrt{2}$ E)$4\sqrt{3}$

05 De la figura, calcular "x", si *H* es el ortocentro del triángulo *ABC* y *AQ = QH*.



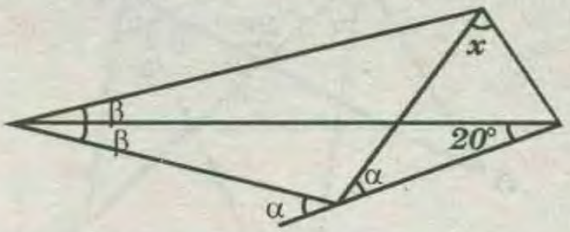
A)30° B)40° + 2α C)25° D)35° + α E)50°

06 Si *G* es baricentro del triángulo *ABC* y *BG = 4*, calcular *PB*.



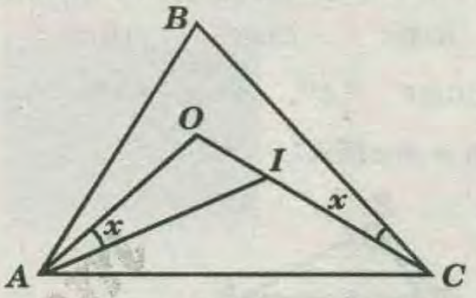
A)$2\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{7}$ C)$2\sqrt{5}$ D) 2 E) 3

07 De la figura, calcule el valor de "x".



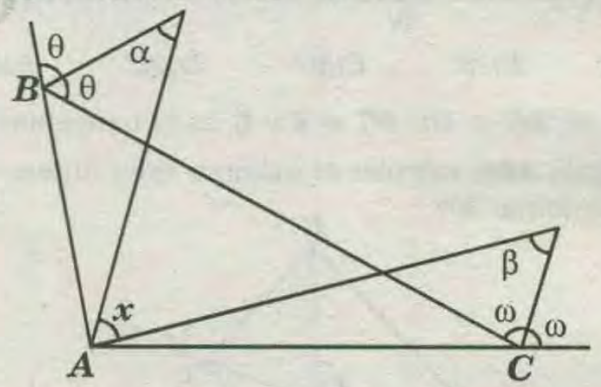
A)40° B)50° C)60° D)70° E)80°

08 De la figura: *O* es el ortocentro e *I* es el incentro del triángulo *ABC*. Calcule el valor de "x".



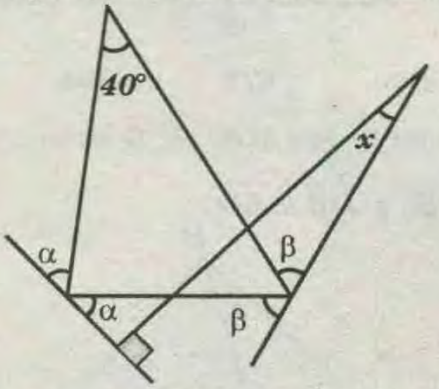
A) 12° B)15° C)18° D)20° E)10°

09 De la figura, calcule el valor de "x", si la $m\sphericalangle CAB = 100°$ y $\alpha + \beta = 50°$.



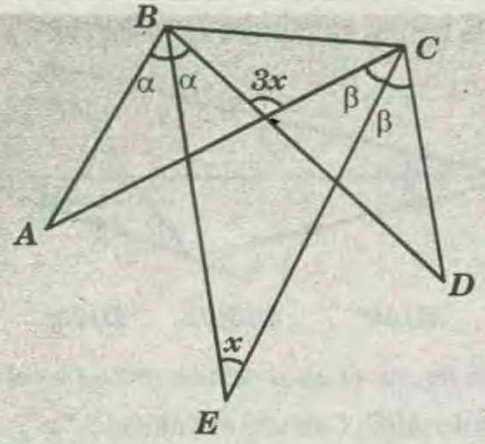
A)40° B)60° C)50° D)80° E)70°

10 De la figura, calcule el valor de "x".



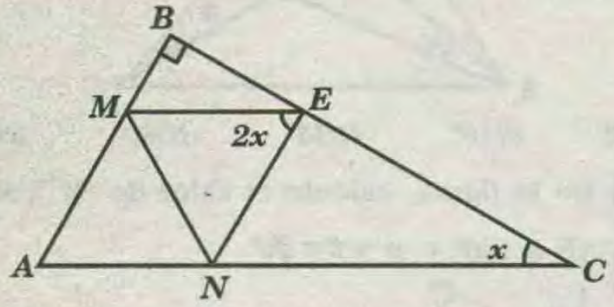
A)20° B)15° C)25° D)10° E)30°

11 Según el diagrama: *AB = BC = CD*. Calcular "x".



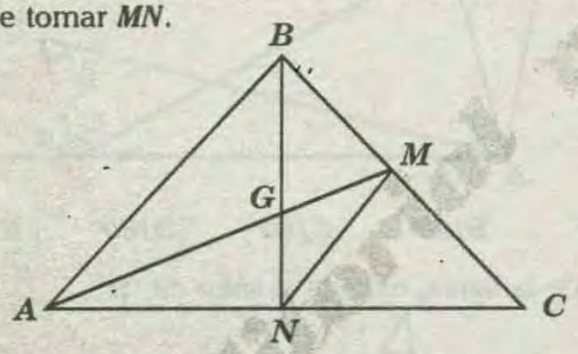
A)30° B)32° C)36° D)40° E)45°

12 Calcular "x", si: $m\sphericalangle BME = m\sphericalangle NME$ y $m\sphericalangle MNE = m\sphericalangle ENC$



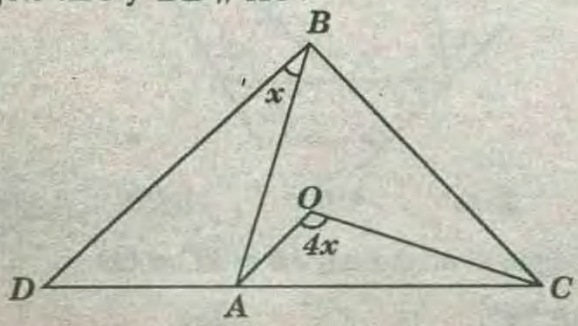
A)20° B)18° C)30° D)22° E)16°

13 Si: $AG = 10$, $BG = 8$ y G es el baricentro del triángulo ABC, calcular el máximo valor entero que puede tomar MN.



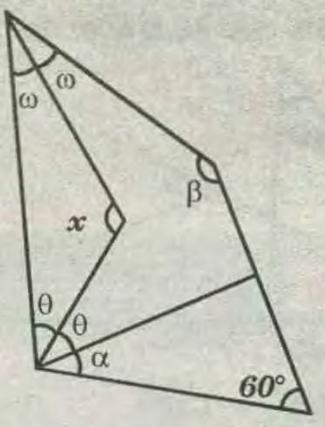
A)8 B)6 C)7 D)5 E)4

14 Calcular la $m\sphericalangle AOC$, si O es ortocentro del triángulo ABC y $\overline{DB} \parallel \overline{AO}$.



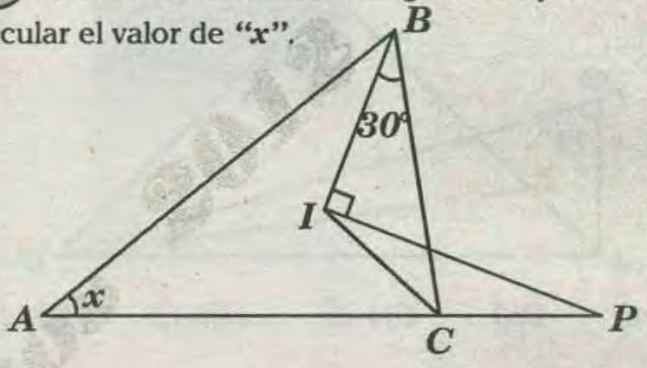
A)135° B)120° C)150° D)144° E)165°

15 De la figura, calcular "x", si: $\alpha + \beta = 180°$



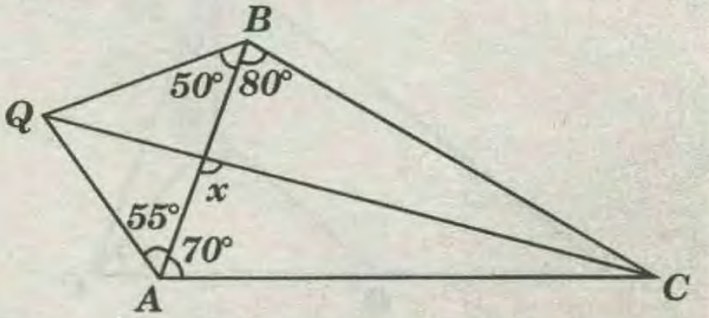
A)140° B)130° C)120° D)110° E)100°

16 Si I es el incentro del triángulo ABC y $CP = CI$, calcular el valor de "x".



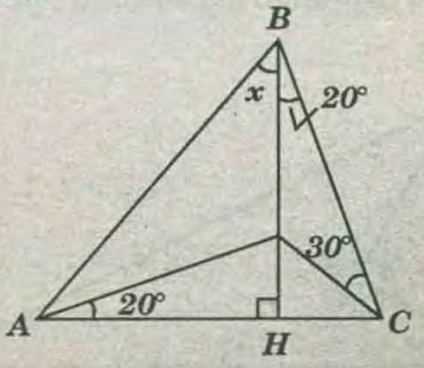
A)40° B)30° C)50° D)20° E)35°

17 Calcular el valor de "x".



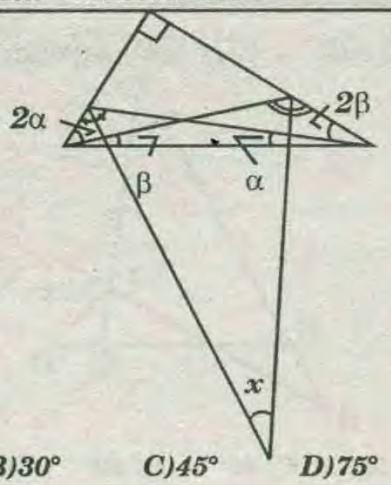
A)105° B)90° C)100° D)110° E)95°

18 De la figura, calcular "x".



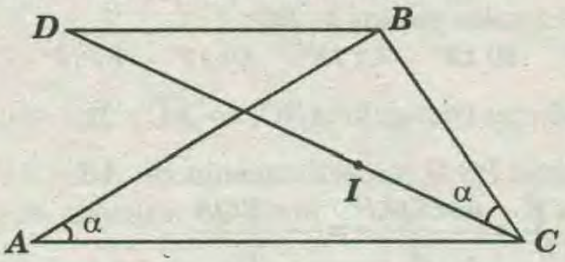
A)20° B)30° C)35° D)25° E)40°

19 De la figura, calcular "x".



A)60° B)30° C)45° D)75° E)22,5°

20 Según la figura: $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$. Si $BC = 6$, calcular ID, donde I es incentro del triángulo ABC.



A)10 B)5 C)6 D)8 E)7

QUINTA PRACTICA DIRIGIDA

TRIANGULOS

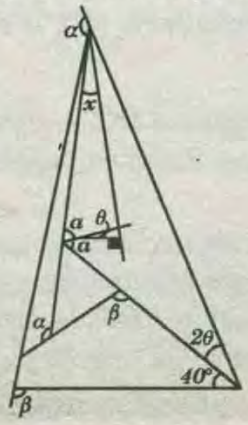
01 Si la diferencia de las medidas de dos ángulos exteriores de un triánguló es igual al complemento del ángulo interior ubicado en el tercer vértice, calcular la medida de un ángulo interior del triángulo.

A) 30° B) 45° C) 60° D) 90° E) 75°

02 Dado un triángulo ABC, tal que $m\measuredangle ABC = 3(m\measuredangle BCA)$ y además $AC = 2(AB)$. Calcular la $m\measuredangle BAC$

A) 120° B) 90° C) 75° D) 60° E) 45°

03 Del gráfico, calcular el valor de "x".



A) 20° B) 25° C) 30° D) 40° E) 50°

04 En la región interior de un triángulo ABC se ubica el punto P, de modo que:

$$AB = BC = PC,\ m\measuredangle ABP = m\measuredangle PCA$$

Calcular la medida del ángulo determinado por $\overrightarrow{BP}$ y $\overrightarrow{AC}$.

A) 90° B) 60° C) 30° D) 75° E) 45°

05 Sean ABC y AEC dos triángulos rectángulos, cuya hipotenusa común es $\overline{AC}$ y cuyos catetos de mayor longitud son $\overline{AB}$ y $\overline{CE}$ los cuales se intersecan en el punto Q. Si $AB+CE=12$ y $AE+BC=6$, entonces la suma de los valores enteros de la longitud de $\overline{AC}$ es:

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

06 En el lado $\overline{BC}$ de un triángulo ABC se ubica un punto D y se une con el vértice A.

Si $2(m\measuredangle CDA) = m\measuredangle BAC + M\measuredangle ABC$ y $CD = 6$

Entonces la longitud de $\overline{AC}$ es:

A) 12 B) 6 C) 4 D) 3 E) 8

07 En un triángulo ABC: $AB=BC$, $D \in \overline{AB}$ y $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ (E en $\overline{AC}$) La prolongación de $\overline{DE}$ interseca a un rayo $\overrightarrow{CX}$ que forman $\overrightarrow{CA}$ un ángulo congruente con el ángulo BCA, en el punto F.

Si $AD=a$ y $CF=b$, halle BD.

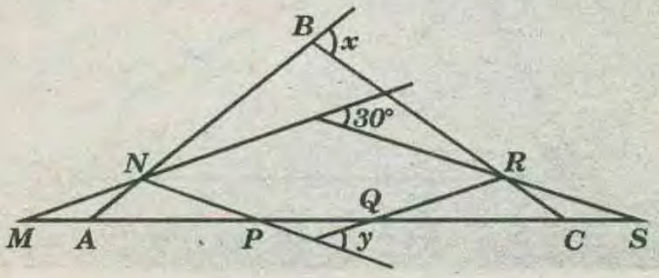
A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{2b-a}{2}$ C) $\frac{2a-b}{2}$ D) $\frac{b-a}{2}$ E) $b-2a$

08 En el lado $\overline{AC}$ de un triángulo ABC, se ubica el punto M, tal que $AM=MC$; en el exterior relativo al lado $\overline{BC}$ se ubica el punto E, tal que $m\measuredangle MBE = 90°$. Calcular el mínimo valor entero de ME, si $AB=6$, $BC=8$ y MB toma su máximo valor entero.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

09 Calcule el valor de $(x+y)$,

si: $AM=AN$, $CR=CS$, $MN=NP$ y $QR=RS$.



A) 60° B) 30° C) 90° D) 120° E) 150°

10 Se tiene un triángulo acutángulo ABC, en la región interior se ubican los puntos P y Q de tal manera que P y Q equidistan de los vértices del triángulo ABC y ABP, respectivamente. Si $m\measuredangle ABQ = m\measuredangle BCA$, calcular $m\measuredangle AQB$.

A) 120° B) 60° C) 90° D) 75° E) 150°

11 Se tiene un triángulo ABC: en la prolongación de $\overline{CA}$ se ubica el punto E, de modo que: $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA)$ y $AE = AB + BC$. Calcule la razón de las medidas de los ángulos BEA y EBA.

A) 1/2 B) 1 C) 1/3 D) 1/4 E) 1/5

12 ABC es un triángulo,

$m\measuredangle B = 127°$, $AB + AC = 10$ y $m\measuredangle C = 37°$

Calcule BC.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13 Exteriormente al triángulo ABC y relativo a $\overline{AB}$ se ubica el punto D, tal que:

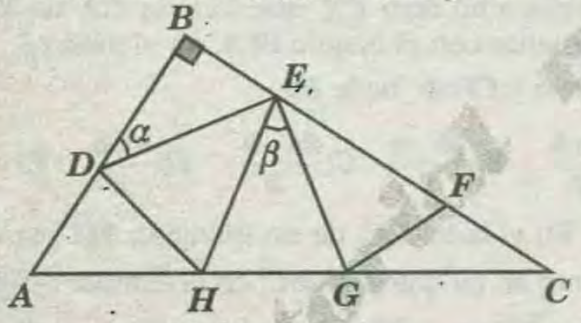
$AD = AC$ y $m\measuredangle BAD = 5°$.

Si $m\measuredangle BAC = 15°$ y $m\measuredangle ABC = 55°$, calcular la $m\measuredangle DBA$.

A) 25° B) 30° C) 35° D) 40° E) 45°

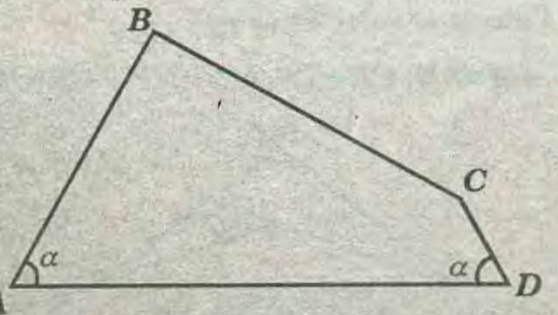
14 Calcule $\alpha + \beta$, si:

$DE = EH = EG = EF$, $AD = DH$ y $GF = FC$.



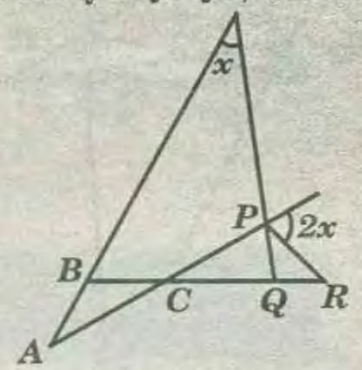
A) 450° B) 360° C) 270° D) 90° E) 180°

15 Del gráfico: $AB = 3$, $CD = 1$, BC toma su menor valor entero y $\alpha < 60°$. Calcule el valor de AD, si se sabe que es impar.



A) 3 B) 5 C) 7 D) 11 E) 9

16 Si: $AB = BC$ y $PQ = QR$, calcular el valor de "x".



A) 40° B) 36° C) 45° D) 60° E) 30°

17 Se tiene un triángulo ABC. Si: $AB = 5$, $m\measuredangle BAC = 4(m\measuredangle BCA)$, calcular el máximo valor entero de BC.

A) 11° B) 13° C) 15° D) 17° E) 19°

18 En un triángulo ABC, en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente. Si: $AB = AP = PQ$ y $\frac{m\measuredangle B}{11} = \frac{m\measuredangle QAP}{2} = \frac{m\measuredangle BQA}{3}$ calcular $m\measuredangle C$.

A) 5° B) 8° C) 9° D) 10° E) 12°

19 En un triángulo APQ, en las prolongaciones de $\overline{AP}$ $\overline{AQ}$ y $\overline{PQ}$ $\overline{CB}$ se ubican los puntos B, C, S y L, respectivamente, de modo que $PB + PQ = 10$ y $m\measuredangle CQS = m\measuredangle LBA + m\measuredangle LCA$. Calcule el mínimo valor entero de QC.

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

20 En un triángulo ABC se ubica en $\overline{AC}$ el punto D, tal que: $AC = DB + BC$, $m\measuredangle BDC = 40°$ y $m\measuredangle C = 20°$ Calcular la $m\measuredangle A$

A) 45° B) 37° C) 22,5° D) 30° E) 20°

SEXTA PRACTICA DIRIGIDA

LINEAS NOTABLES

01 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

( ) Si en un triángulo ABC, la mediana $\overline{BM}$ mide igual a, $\frac{\overline{AC}}{2}$ entonces dicho triángulo tiene un ángulo recto.

( ) La mediatriz de un lado de un triángulo puede cortar a otro lado del triángulo perpendicularmente.

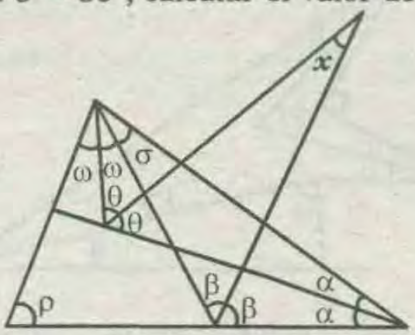
( ) Dado el triángulo ABC, la bisectriz del ángulo interior en B corta a $\overline{AC}$ en su punto medio.

( ) Al trazar la altura de un triángulo obtusángulo,

necesariamente dicha altura se encuentra en el exterior de dicho triángulo.

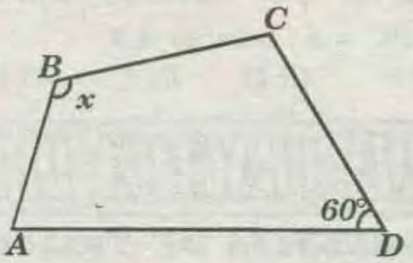
A) FVVF B) VFFF C) VFFV D)VFVF E)VVFV

02 Si: $\rho+\sigma = 80°$, calcular el valor de *"x"*.



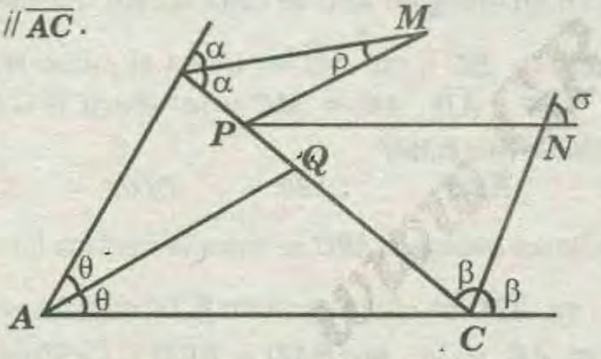
A) 20° B) 10° C) 15° D) 30° E) 25°

03 Calcular *"x"*, si: $AB=3$; $BC=CD=4$ y $AD= 7$.



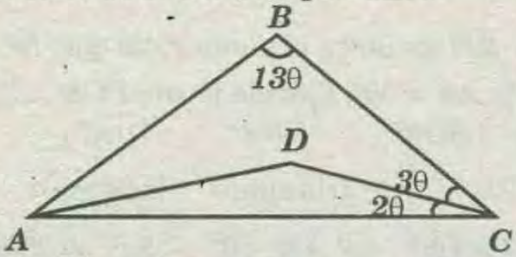
A) 100° B) 110° C) 120° D) 135° E) 140°

04 En el gráfico, calcular $\rho+\sigma$, si $\overline{AQ} // \overline{MP}$ y $\overline{NP} // \overline{AC}$.



A) 60° B) 90° C) 45° D) 74° E) 53°

05 Según el gráfico: $AB = AD = DC$. Indicar qué punto notable es D del triángulo ABC.



A) Baricentro B) Incentro C) Ortocentro
D) Circuncentro E) Cevacentro

06 En un triángulo PQR se trazan las bisectrices interiores $\overline{QE}$ y $\overline{RF}$ se ubica el punto S exterior y relativo a $\overline{QR}$ tal que la $m\sphericalangle QFS = 3(m\sphericalangle SFR)$, $m\sphericalangle RES = 3(m\sphericalangle QES)$

Calcule la $m\sphericalangle QPR$, si: $m\sphericalangle QPR+m\sphericalangle FSE=180°$

A) 60° B) 100° C) 90° D) 80° E) 110°

07 En un triángulo ABC se trazan las cevianas $\overline{BE}$ y $\overline{AD}$ de manera que:

$AB = AE= BD$, $DE = DC$, $m\sphericalangle BAE = 60°$. Calcule la $m\sphericalangle EDC$.

A) 80° B) 90° C) 100° D) 120° E) 145°

08 Se tiene un triángulo ABC, se ubica un punto interior P tal que: $BC = CP$ y $\overline{AP}$ es bisectriz. Si: $m\sphericalangle PCB = 2(m\sphericalangle PCA)$, calcular la $m\sphericalangle APC$.

A) 120° B) 115° C) 135° D) 105° E) 150°

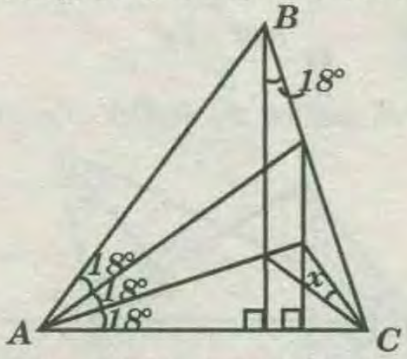
09 Dado un triángulo ABC, por C se trazan perpendiculares a $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, las cuales se intersecan con las bisectrices de los ángulos BAC y ABC en P y Q, respectivamente. Si $\overline{AP}\cap\overline{BC}=\{E\}$; $m\sphericalangle APC+m\sphericalangle BQC=3m(m\sphericalangle BCA)$ y $\overline{BQ}\cap\overline{AC}=\{F\}$ calcule la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos BEA y AFB.

A) 35° B) 60° C) 40° D) 30° E) 36°

10 En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{AM}$. Luego en $\overline{AC}$ se ubica un punto N, tal que: $MN = NC$ y $m\sphericalangle ABC + m\sphericalangle AMN = 180°$

A) 60° B) 50° C) 30° D) 35° E) 40°

11 Según el gráfico, calcule el valor de *"x"*.



A) 12° B) 15° C) 16° D) 24° E) 18°

12 Dado un triángulo isósceles ABC $(AB = BC)$, en su región interior se ubica el punto P, tal que: $m\sphericalangle BAP=38°$, $m\sphericalangle PAC=30°$ y $m\sphericalangle ABP=33°$. Calcule la $m\sphericalangle PCB$.

A) 19° B) 15° C) 14° D) 16° E) 18°

13 En el triángulo ABC, $m\sphericalangle ABC = 50°$, se ubica

un punto interior O tal que B es ortocentro del $\triangle AOC$. En la prolongación de $\overline{AO}$ se ubica el punto D tal que: $DO = DC$. Calcular la $m\sphericalangle ADC$.

A) 25° B) 50° C) 60° D) 80° E) 75°

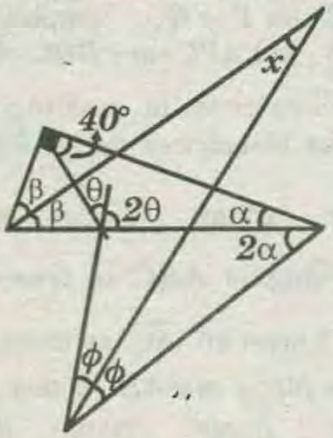
14 En un triángulo ABC las bisectrices interiores trazadas desde A y C se intersecan en P. Luego se ubican los puntos exteriores Q y R, relativos a $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, de modo que: $m\sphericalangle QAC = m\sphericalangle RPC = 90°$, $AP = PR$ y $RC = 7$. Calcular el menor valor entero de QC.

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 13

15 En un triángulo ABC $(AB = BC)$, se traza la ceviana interior $\overline{AM}$ $(M \in \overline{BC})$, tal que $AM = AC$. El ángulo AMC toma su máximo y mínimo valor entero. Calcular la diferencia de dichos valores.

A) 14 B) 18 C) 28 D) 29 E) 27

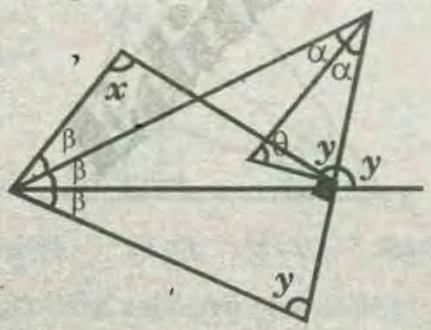
16 En el gráfico, calcule el valor de "x" en función de β.



A) $\frac{320° - 5\beta}{3}$ B) $\frac{110° - 3\beta}{4}$ C) $\frac{320° - 4\beta}{3}$

D) $\frac{5\beta - 220°}{3}$ E) $\frac{340° - 7\beta}{3}$

17 Según el gráfico: $\beta + \theta = 110°$. Calcule el valor de: $x + y$.

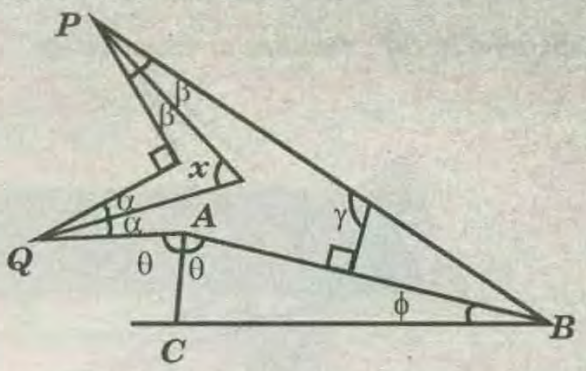


A) 120° B) 110° C) 135° D) 125° E) 140°

18 En un triángulo equilátero ABC se trazan la altura $\overline{BH}$ y la ceviana interior $\overline{AP}$ las cuales se intersecan en Q. Si: $BQ = BP$, calcular $m\sphericalangle BAP$

A) 30° B) 15° C) 53° D) 18° E) 45°

19 Según el gráfico: $AB = BC$ y $\gamma + \phi = 140°$. Calcule el valor de "x".



A) 80° B) 70° C) 65° D) 60° E) 75°

20 Se tiene un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BP}$ tal que: $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle BPA)$ Si: $BC = 15$ y $PC = 4$, calcular AB.

A) 10 B) 9 C) 11 D) 8 E) 12

SEPTIMA PRACTICA DIRIGIDA

CONGRUENCIA DE TRIANGULOS TRIANGULOS RECTANGULOS NOTABLES

01 En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{AN}$ (N en $\overline{BC}$), en $\overline{AC}$ se ubica el punto M, tal que: $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, $AB = MC$ y la $m\sphericalangle ACB = 20°$. Calcule la $m\sphericalangle BMN$.

A) 15° B) 30° C) 20° D) 10° E) 40°

02 En un triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{AD}$, en $\overline{AD}$ se ubica el punto E, tal que: $AB = EC$, $CD = AE$ y la $m\sphericalangle BAD = ECD$. Calcule la $m\sphericalangle ADB$.

A) 40° B) 60° C) 80° D) 50° E) 30°

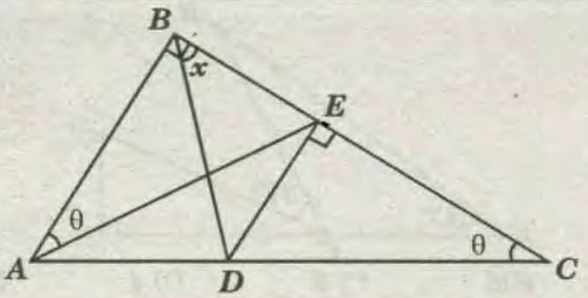
03 En un triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BN}$, en $\overline{BN}$ se ubica el punto P, tal que: $NP = NC$, $AP = BC$ y $AN = NB$. Calcule la $m\sphericalangle PCN$.

A) 30° B) 15° C) 18° D) 45° E) 20°

04 En un triángulo isósceles ABC, $m\sphericalangle ABC = 100°$, en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos P, Q y R, respectivamente tal que: $AR = QC$ y $AP = RC$. Calcular la $m\sphericalangle PRQ$.

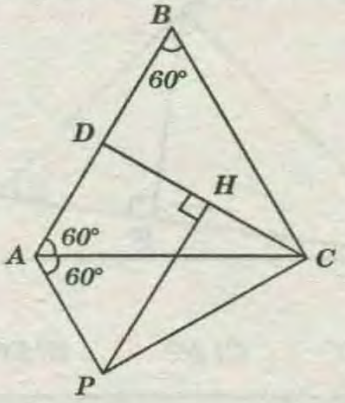
A) 100° B) 40° C) 80° D) 35° E) 50°

05 Si: $AB = EC$, calcular el valor de "x".



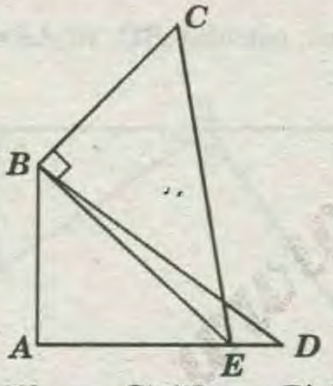
A) 60° B)30° C) 45° D) 75° E) 53°

06 En la figura, si: $DB = AD$ y $PC = 8$, calcule PH.



A) 4 B)$4\sqrt{3}$ C) 5 D) $5\sqrt{3}$ E)6

07 En la figura los triángulos DAB y EBC son congruentes. Si: $AE = 12$ y $ED = 3$, calcule la $m\sphericalangle AEB$.

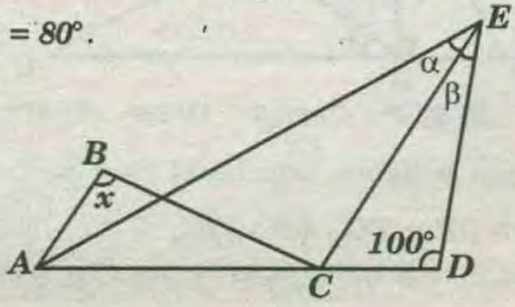


A) 30° B)60° C) 45° D) 37° E) 53°

08 Se tiene un triángulo ABC, tal que: $m\sphericalangle A = m\sphericalangle C = 20°$, en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos E y D, respectivamente. Si los triángulos ABE y EDC son congruentes, calcule la $m\sphericalangle ABE$.

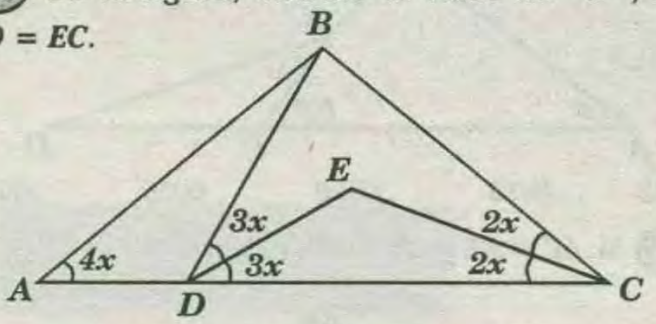
A)40° B)50° C) 60° D) 30° E)53°

09 Calcule "x", si: $AB = ED$, $AD = BC + CE$ y $2\alpha + \beta = 80°$.



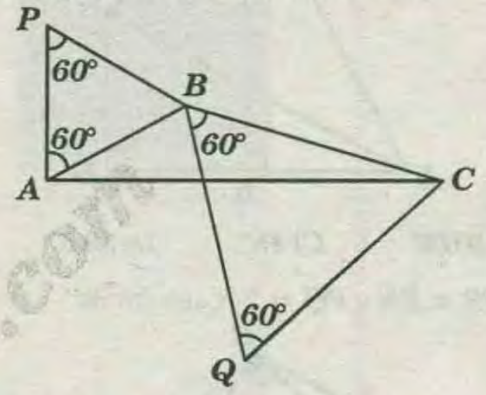
A)80° B)100° C) 110° D) 140° E)160°

10 De la figura, calcule el valor de "x", si: $BD = EC$.



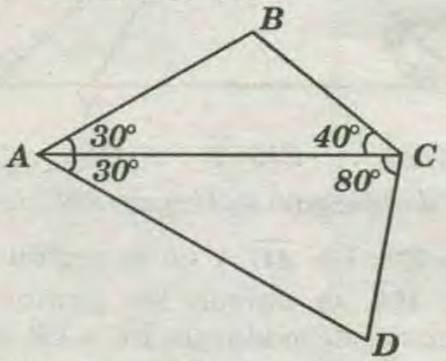
A)10° B)12° C) 15° D) 18° E)16°

11 En la figura, si $AC = 8$, calcule PQ.



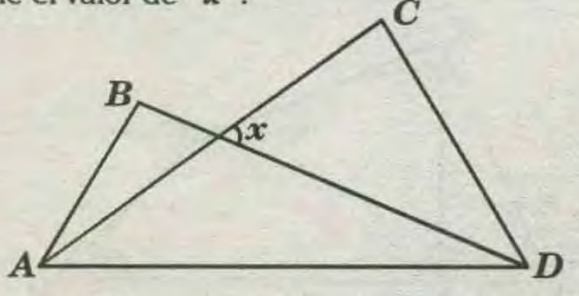
A)6 B)7 C) 8 D) 9 E)10

12 Si: $BC = 6$, calcule CD.



A)6 B)7 C) 8 D) 9 E)10

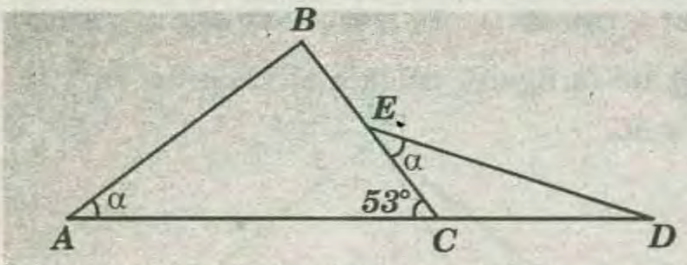
13 Si: $m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle CDA = 60°$ y $AD = AB + CD$, calcule el valor de "x".



A)30° B)40° C) 50° D) 60° E)70°

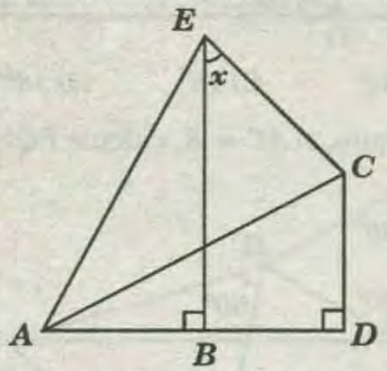
14 En la figura: $AC = 17$, $BE = EC$ y $AB = ED$. Calcule CD.

CLUB GRATIS2.com



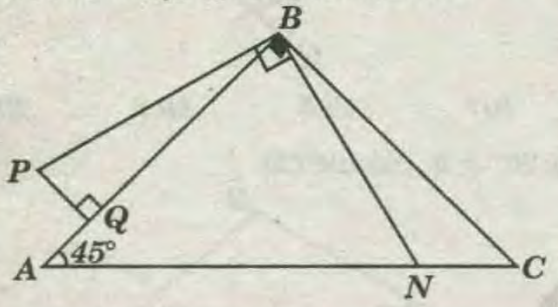
A)12 B)15 C)16 D)10 E)18

15 Si: $AC = AE$ y $AB = CD$, calcular "x".



A)60° B)15° C) 45° D) 22,5° E)30°

16 Si: $PB = BN$ y $PQ = 2$, calcular NC.

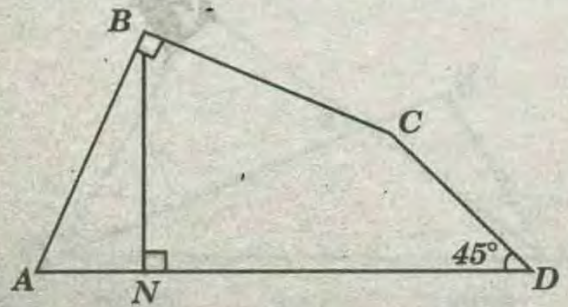


A)2 B)$\sqrt{6}$ C)$2\sqrt{2}$ D)4 E)$2\sqrt{3}$

17 Dado un triángulo rectángulo ABC, recto en B, $m\sphericalangle BAC = 37°$. En $\overline{AC}$ y en la región exterior relativa a $\overline{BA}$ se ubican los puntos D y E, respectivamente, de modo que: $DC = CB$, $AB = AE$ y $m\sphericalangle ADE = 90°$. Calcular la $m\sphericalangle BAE$.

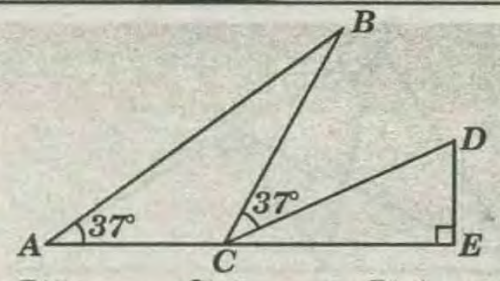
A) 21° B) 8° C) 16° D)10° E)23°

18 Si: $AB = BC$ y $BN = 12$, calcular AD.



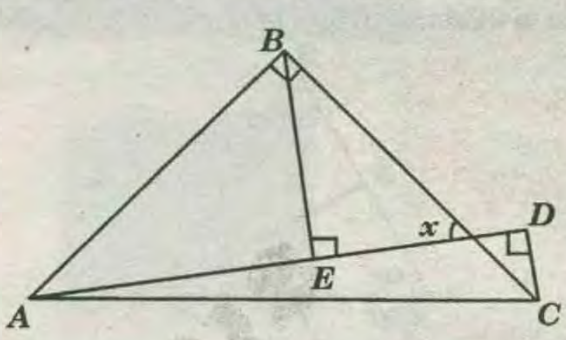
A)12 B)24 C) 20 D) 36 E)30

19 Si: $BC = CD$ y $AC = 10$, calcular ED.



A)6 B)5 C) 8 D) 4 E)9

20 Si: $AB = BC$ y $BE = 3(DC)$, calcular el valor de "x".

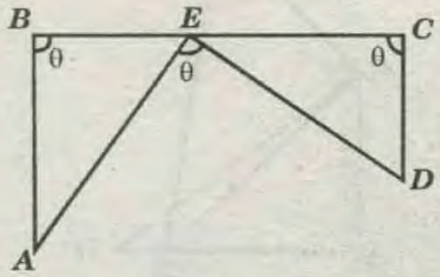


A)50° B)60° C) 45° D)53° E)37°

OCTAVA PRACTICA DIRIGIDA

CONGRUENCIA DE TRIANGULOS

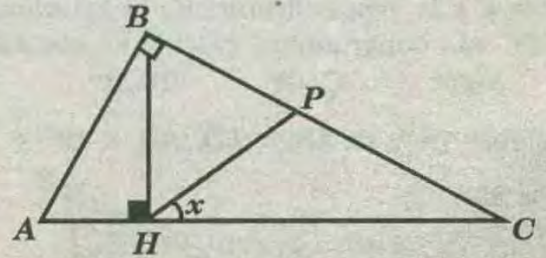
01 Del gráfico, calcular BC, si: $AE = ED$, $CD = 4$ y $AB = 6$.



A) 9 B) 18 C) 15 D) 10 E) 12

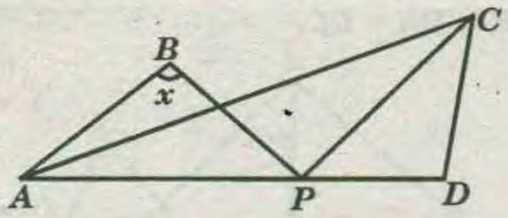
02 En la figura: $AH = 3$ y $HC - BH = 4$.

Calcular el valor de α



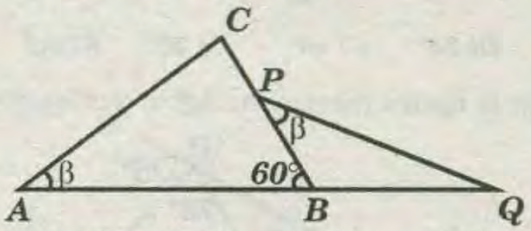
A) 18,5° B) 22,5° C) 26,5° D) 30° E) 37°

03 Según la figura, calcular el valor de "x", si: $AD = BP + PC$, $AB = DC$, $2(m\sphericalangle ACP) + m\sphericalangle PCD = 80°$ y $m\sphericalangle CDP = 100°$



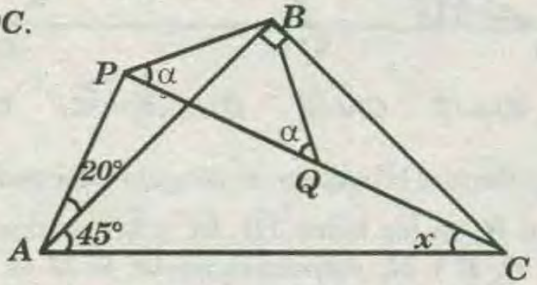
A) 80° B) 90° C) 160° D) 60° E)100°

04 En la figura, calcular AQ, si: $PQ = AC$, $BP = 3$ y $PC=2$.



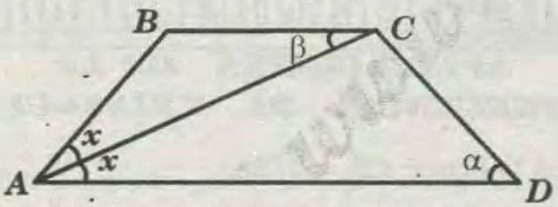
A)10 B) 12 C) 13 D) 13 E) 15

05 Según el gráfico, calcule el valor de "x", si: $AP=QC$.



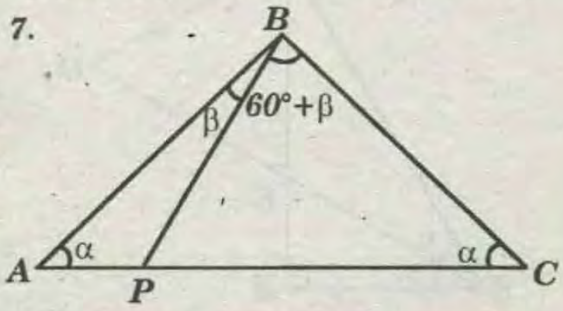
A) 35° B) 20° C) 25° D) 15° E) 30°

06 Del gráfico, calcular el valor de "x", si: $BC = CD$ y $\alpha - \beta = 24°$.



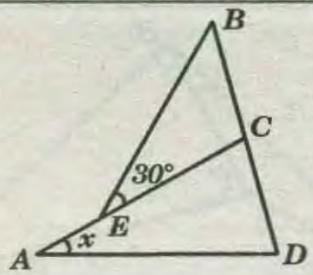
A) 12° B) 24° C) 30° D) 36° E) 48°

07 Según el gráfico, calcule BP, si: $AP = 2$ y $PC = 7$.



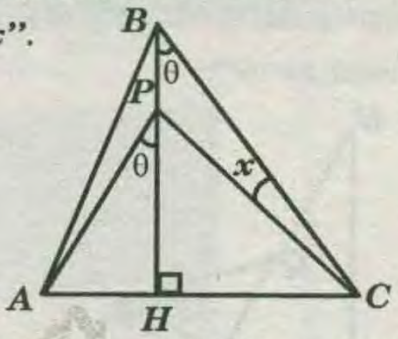
A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 7

08 Del gráfico, calcular el valor de "x", si $BC = CD$ y $AD = EB$.



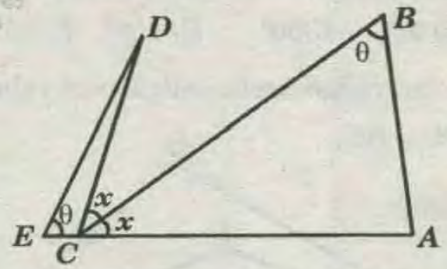
A) 15° B) 20° C) 25° D) 30° E) 40°

09 En el gráfico: $AB=PC$ y $PH=3(BP)$. Calcular "x".



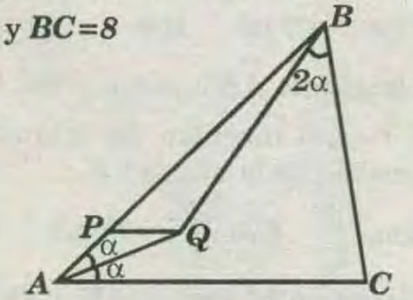
A) 15° B) 53°/2 C) 37°/2 D) 8° E) 16°

10 Calcular el valor de "x", si: $AB=DE$ y $AE= BC$



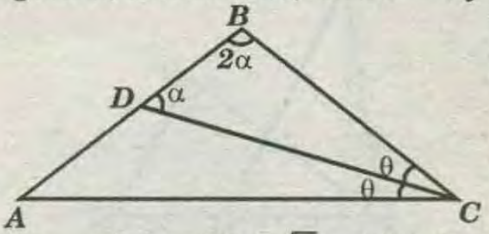
A) 18° B) 30° C) 36° D) 15° E) 20°

11 Del gráfico, calcular BQ, si: $PB = AC$, $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ y $BC=8$



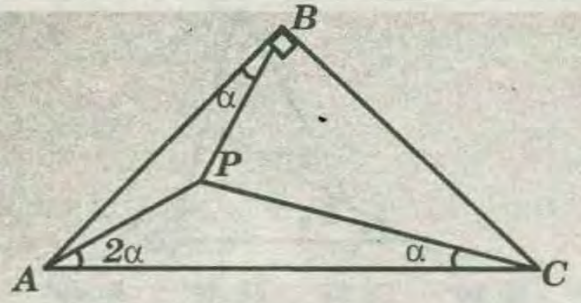
A) 6 B) 10 C) 8 D) $4\sqrt{2}$ E) 5

12 Del gráfico, calcular AD, si: $BC = 6$ y $AC = 9$.



A) 2 B) 3 C) 4 D) $2\sqrt{2}$ E) 2,5

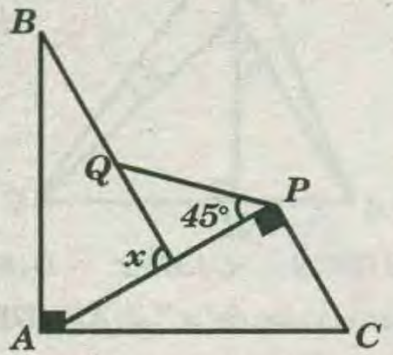
13 Del gráfico, calcular el valor de α.



A) 10° B)12° C) 22,5° D) 18° E) 15°

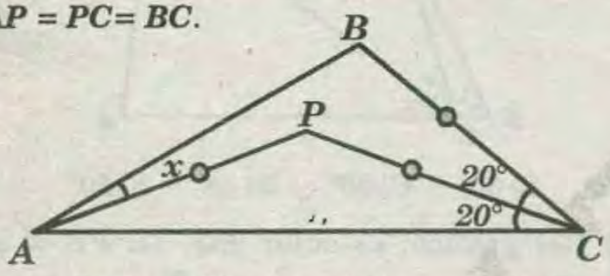
(14) En la figura: $AB = AC$ y $BQ = PC$.

Calcular el valor de "x".



A) 72° B) 54° C)60° D) 120° E) 90°

(15) De la figura mostrada, calcular el valor de "x", si: $AP = PC = BC$.

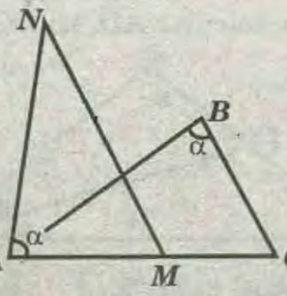


A) 12° B) 10° C) 15° D)9° E) 12,5°

(16) En el triángulo ABC: $m\measuredangle A = 20$, $m\measuredangle C = 40$ y $AI = a$. Si I es el incentro del triángulo ABC, calcular la medida de la altura CH.

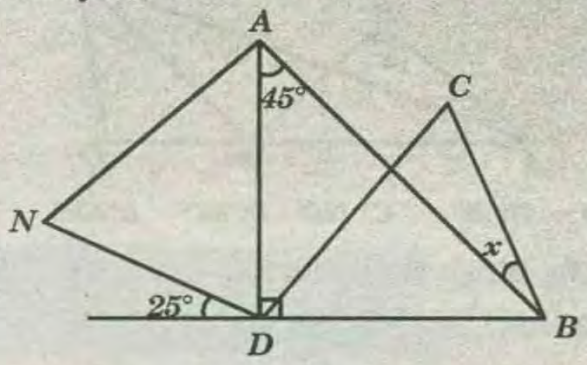
A) $a/\sqrt{2}$ B) $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $a\frac{\sqrt{6}}{3}$ D) $a/2$ E) $a\frac{\sqrt{3}}{4}$

(17) En la figura: $\overline{NM} \parallel \overline{BC}$ y $AM = BC$. Calcular AM, si: $MN = 12$ y $MC = 5$.



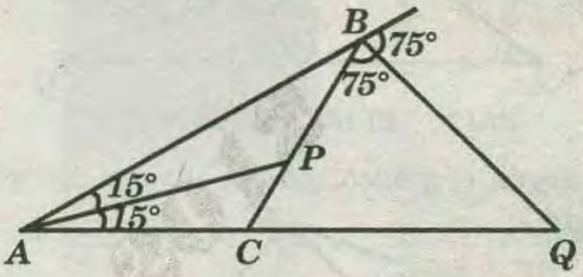
A) 6 B) 5 C) 7 D) 8 E) 10

(18) Del gráfico, calcular el valor de "x", si: $AN = DC$ y $DN = BC$.



A) 20° B) 25° C) 40° D) 35° E) 30°

(19) En la figura mostrada: $AP = a$. Calcular BQ.



A) a B) $a\sqrt{2}$ C) $a\sqrt{3}$ D) $a(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ E) $2a$

(20) Se tiene el triángulo rectángulo isósceles ABC, recto en B, en los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos D, E y M, respectivamente. Si M es punto medio de $\overline{AC}$ y $BD = EC$. calcular $m\measuredangle MDE$

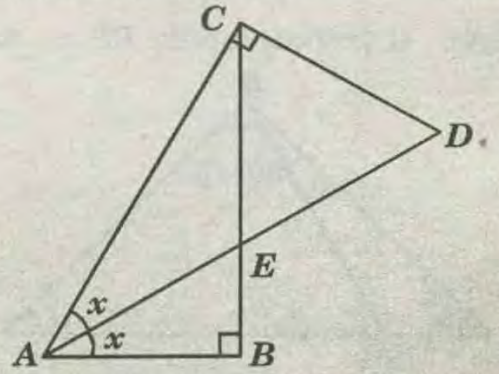
A) 15° B) 26,5° C) 30° D) 45° E) 60°

NOVENA PRACTICA DIRIGIDA

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA DE TRIANGULOS

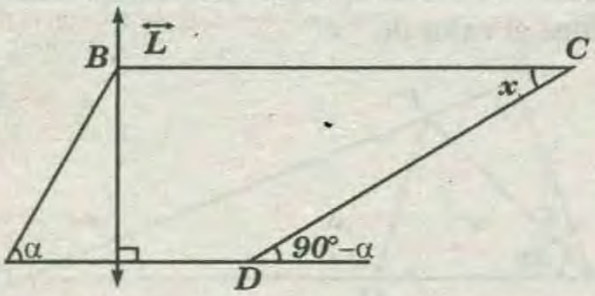
(01) En la figura: $CD = 2(BE)$.

Calcular el valor de "x".



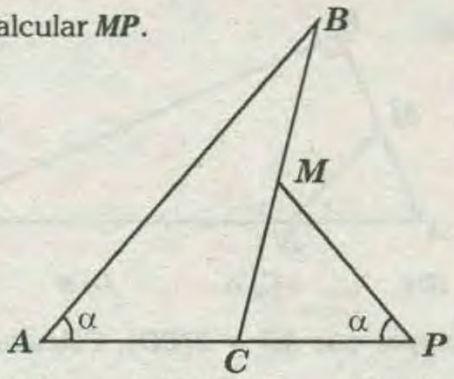
A) 22,5° B) 30° C) 37° D)15° E)18°

(02) En la figura mostrada: $\vec{L}$ es mediatriz de $\overline{AD}$ y $BC = 2(AB)$. Calcular el valor de "x".



A)15° B) 18° C) 30° D)45° E)60°

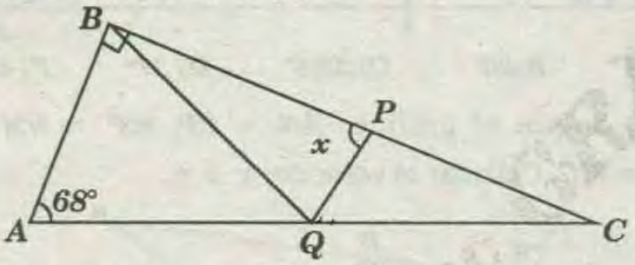
03 En el gráfico mostrado: $BM = MC$. Si: $AB = 6$, calcular MP.



A)1 B) 2 C)1,5 D) 2,5 E)3

04 Del gráfico adjunto: $AQ = QC = BP$.

Calcular el valor de "x".

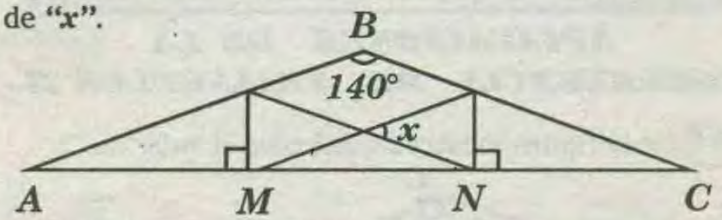


A)59° B) 68° C) 69° D)79° E)89°

05 En un triángulo ABC la mediatriz de la bisectriz exterior $\overrightarrow{BD}$ intersecta en E a $\overline{CD}$. Calcular la $m\sphericalangle CBE$, si: $m\sphericalangle BAC = 40°$. ($D$ pertenece a la prolongación de $\overline{AC}$)

A) 20° B)30° C) 40° D) 50° E)80°

06 En la figura: $AM = MN = NC$. Calcular el valor de "x".

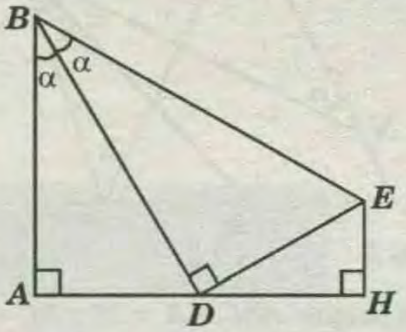


A) 40° B)50° C) 55° D) 60° E)70°

07 En un triángulo PQR en $\overline{QR}$ se consideran los puntos K y L ($L \in \overline{KR}$) y M es punto medio de $\overline{PR}$, tal que: $QK = LR$ y $KL = PQ$. Calcular $m\sphericalangle KML$.

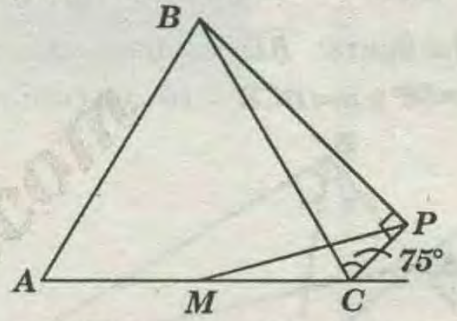
A) 60° B) 75° C) 90° D) 120° E) 135°

08 Según el gráfico: $BE - AB = 3$. Calcular EH.



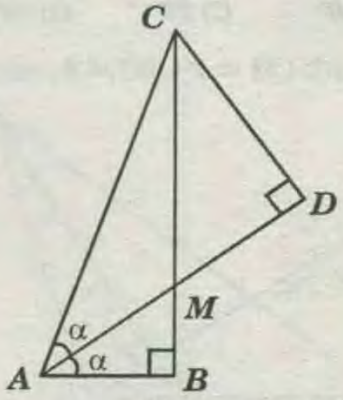
A) 0,5 B) 1,5 C) 1 D) 2 E) 3

09 En la figura adjunta el triángulo ABC es equilátero y $AM = MC = 2$. Calcular MP.



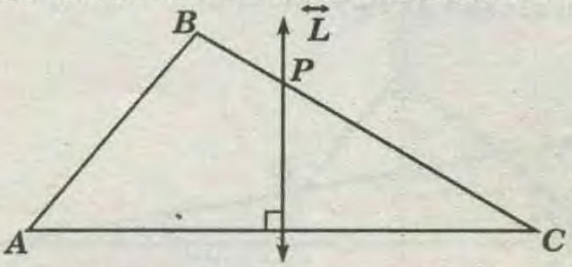
A)2 B)$2\sqrt{2}$ C)$2\sqrt{3}$ D)4 E)6

10 En la figura: $AM = MD$ y $MB = 2$. Calcular CM.



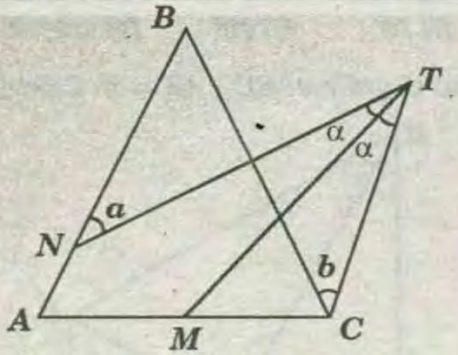
A) 3 B)4 C)5 D) 6 E)8

11 $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$; $PC = 3(BP)$ y $AB = 8$. Calcular cuántos valores enteros toma BP.



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12 En el gráfico: $AB = BC$, $AM = MC$, $BM = 5$ y $a + b = 74°$. Calcular la distancia de B y $\overleftrightarrow{MT}$

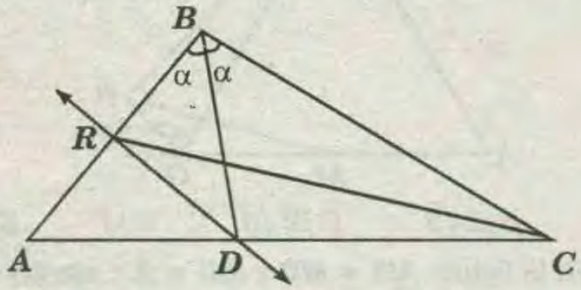


A) 2 B) 3 C) 4 D)2,5 E)5

13 En un triángulo ABC, $AB = 20$ y $BC = 30$, por el vértice C se traza $\overline{CP}$ perpendicular a la bisectriz exterior trazada de B. Si M es punto medio de $\overline{AC}$, calcule PM.

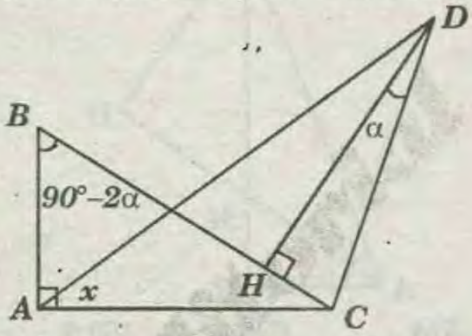
A) 15 B)20 C)25 D)30 E)35

14 En la figura: $\overrightarrow{RD}$ es mediatriz de $\overline{AB}$, $m\sphericalangle BAD = 50°$ y $m\sphericalangle BCR = 10°$. Calcular $m\sphericalangle CRD$



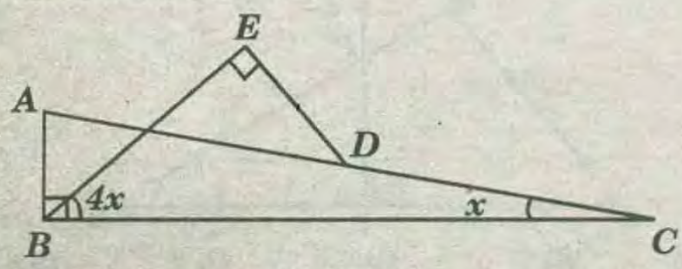
A) 10° B) 20° C) 25° D) 30° E) 35°

15 Si: $AD = 10$, $CH = 2$ y $AC = 6$, calcular el valor de "x".



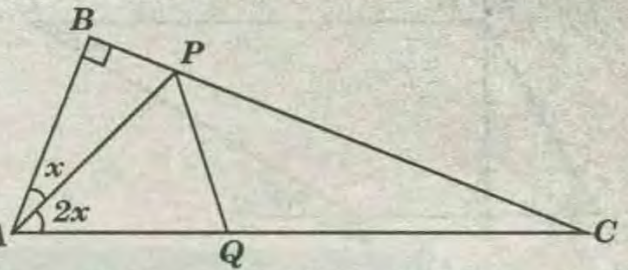
A) 30° B) 37° C) 45° D) 53° E) 60°

16 En el gráfico adjunto se tiene: $AD=DC=2(ED)$. Calcular el valor de "x".



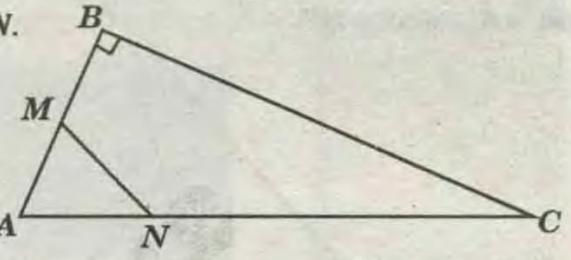
A) 10° B)12° C) 15° D) 18° E) 20°

17 Según el gráfico: $PC = 2(AB)$ y $AB = AQ$. Calcular el valor de "x"



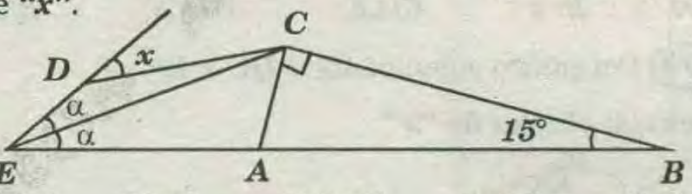
A) 12° B)15° C) 18° D) 20° E) 22,5°

18 En el gráfico: $AM = MB$ y $NC=3(AN)=12$. Calcular MN.



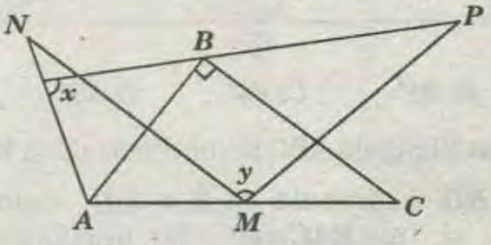
A) 3 B)4 C) 5 D) 6 E) 8

19 Se cumple que $AB = 2(CD)$. Calcular el valor de "x".



A) 15° B)30° C) 22,5° D) 37° E) 45°

20 Según el gráfico: $AN = BP$, $MP = NM$ y $AM = MC$. Calcular el valor de: $x + y$.

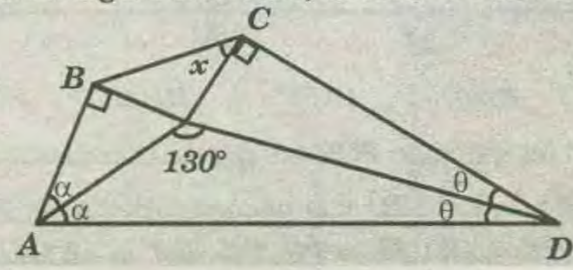


A) 90° B)120° C) 135° D) 150° E) 180°

DECIMA PRACTICA DIRIGIDA

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA DE TRIANGULOS II

01 De la figura mostrada, calcular el valor de "x".

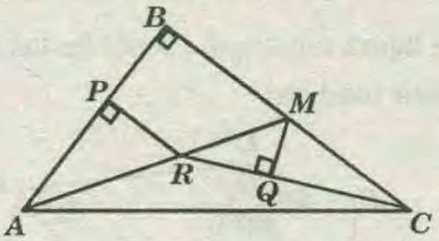


A) 20° B) 25° C) 30° D) 40° E) 35°

02 En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, la mediatriz de $\overline{AC}$ y la bisectriz del $\measuredangle BAC$ se intersecan en P. Si $\overline{PH} \perp \overline{BC}$ (H en $\overline{BC}$) y $50(PH) = 11(AC)$, calcule $m\measuredangle ACB$.

A) 14° B) 37° C) 15° D) 18° E) 16°

03 Según el gráfico: $\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{CR}=1$. Calcule $\frac{PB}{RQ}$.

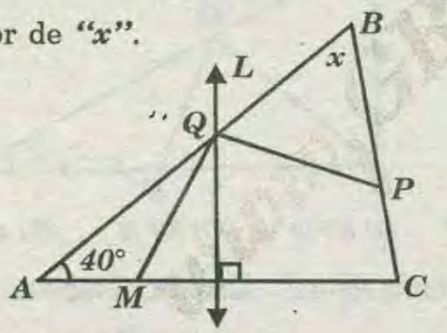


A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) 2 E) 1

04 En los lados BC y AC de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica P y Q, respectivamente de modo que: $m\measuredangle PAC = 2(m\measuredangle PAB)$; $m\measuredangle APQ = m\measuredangle ACB$ y $BP=3$ cm. Calcule PQ.

A) 3 cm B) $3\sqrt{2}$ cm C) $3\sqrt{3}$ cm D) 1 cm E) 6 cm

05 Si L es mediatriz de $\overline{AC}$, $AM = PC$ y $QM = PQ$ calcular el valor de "x".

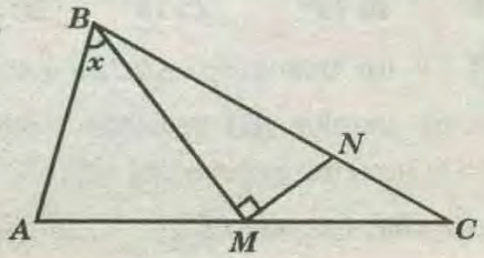


A) 60° B) 80° C) 50° D) 65° E) 70°

06 Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en A, se traza $\overline{AH}$ perpendicular a la bisectriz interior del ángulo B (El punto H ubicado en dicha bisectriz). Si $AC = 2(BH)$, calcular la $m\measuredangle C$

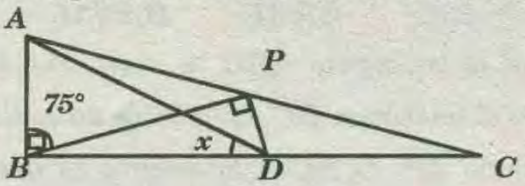
A) 10° B) 25° C) 22,5° D) 30° E) 36°

07 Calcular el valor de "x", si: $4(BM)=9(MN)$ y $AB=AM=MC$.



A) 30° B) 45° C) 37° D) 53 E) 75°

08 En la figura: $AP = PB$. Calcular el valor de "x".

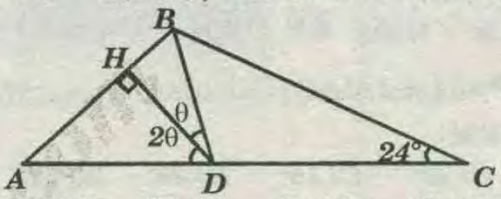


A) 26,5° B) 18,5° C) 15° D) 30° E) 22,5°

09 En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{AF}$ (F en $\overline{BC}$) y la ceviana $\overline{BD}$ que son perpendiculares. Si el punto D pertenece a la mediatriz de $\overline{FC}$ y $AF = FC$, calcular la $m\measuredangle FCD$.

A) 18° B) 20° C) 30° D) 36° E) 45°

10 Si: $DC = 2(DH)$, calcule el valor de θ.



A) 36° B) 24° C) 16° D) 18° E) 48°

11 Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$ y la ceviana $\overline{AP}$ que se intersecan en Q. Si: $m\measuredangle BAP = m\measuredangle BCA$ y la mediatriz de $\overline{HP}$ contiene al vértice B, calcular $\frac{BQ}{BC}$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$

12 En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz interior $\overline{AF}$ y la ceviana interior $\overline{CN}$, tal que: $m\measuredangle NCB = m\measuredangle BAF$. Si $CN = 8$, calcular la distancia de C a $\overline{AF}$.

A) 1 B) 5 C) 3 D) 6 E) 4

13 En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ y la ceviana $\overline{CD}$, tal que: $BC = CD$. Calcular la $m\measuredangle CDH$, si: $m\measuredangle BAC = 60°$ y $m\measuredangle DCA = 15°$.

A) 15° B) 45° C) 30° D) 20° E) 60°

14 En un triángulo ABC se traza la altura BH en la cual se ubica el punto P tal que: $m\measuredangle ABH = 18°$ y $m\measuredangle PAB = 12°$. Si $BC = AB + AP$, calcule la $m\measuredangle ACB$.

A) 18° B) 15° C) 32° D) 16° E) 36°

15 Se tiene los triángulos equiláteros ABC y PMQ, tal que $\overline{PQ} \subset \overline{AC}$ y M es punto de la región interior del triángulo ABC, además P pertenece a

$\overline{AQ}$. Si $AC = 2(PQ) = 4L$, calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AM}$ y $\overline{BQ}$.

A)2L B)L C)$\sqrt{3}L$ D)$2\sqrt{3}L$ E)3L

16 En el triángulo ABC la distancia de B al excentro E relativo a $\overline{BC}$ es el doble de la distancia de B al lado $\overline{AC}$. Si $BC=CE$, calcular la $m\sphericalangle ACB$.

A) 30° B) 40° C)60° D) 36° E)37°

17 En un triángulo ABC se traza la ceviana interior AD de modo que $AB = DC$, además: $m\sphericalangle DAC=\frac{m\sphericalangle ACD}{2}=\frac{m\sphericalangle BAC}{5}$. Calcular la $m\sphericalangle DAC$

A) 12° B) 16° C) 18° D) 10° E) 15°

18 En un ΔABC se traza la mediana $\overline{AM}$ y en el ΔABM se traza $\overline{BP} \perp \overline{AM}$, $\left(P \in \overline{AM}\right)$ tal que: $m\sphericalangle ABP=3\left(m\sphericalangle MAC\right)$ Calcular la $m\sphericalangle MAC$, si: $AP = 2(PM)$.

A) 18° B) 20° C) 15° D) 36° E) 24°

19 Exteriormente a un triángulo rectángulo isósceles ABC, recto en B, y relativo a $\overline{AC}$ se ubica el punto P de modo que la $m\sphericalangle APC=135°$, luego las mediatrices de $\overline{AP}$ y $\overline{PC}$ intersecan a $\overline{AC}$ en M y L, respectivamente. Calcule la $m\sphericalangle MBL$

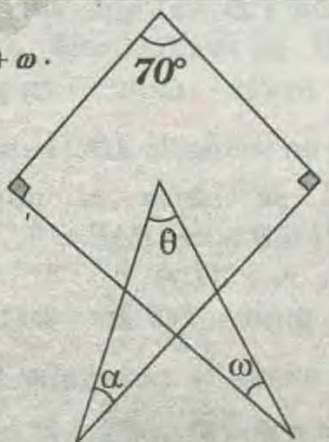
A) 37° B) 53° C) 15° D) 45° E) 35°

20 En un triángulo acutángulo ABC se. ubica un punto interior P, tal que: $AP= BC$, $m\sphericalangle BAC= m\sphericalangle PCA$ y $m\sphericalangle BAP=m\sphericalangle BCP$ Calcule $m\sphericalangle BAC$.

A) 15° B) 60° C) 37° D) 30° E) 45°

DECIMO PRIMERA PRACTICA

01 Calcular: $\alpha+\theta+\omega$.



A) 70° B) 100° C) 110° D) 140° E) 130°

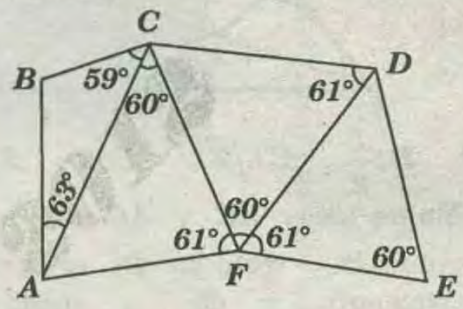
02 En un triángulo $ABC, m\sphericalangle A=2m\sphericalangle C$, $AB=4$. Calcular el máximo y mínimo valor entero que puede tomar el lado $\overline{BC}$.

A)8 y 7 B)5 y 4 C)5 y 2 D)7 y 6 E)5 y 3

03 Los catetos de un triángulo rectángulo ABC mide $AB=8$; $BC=15$, se traza la altura $\overline{BH}$ y las bisectrices $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ de los ángulos ABH y HBC respectivamente. Hallar PQ

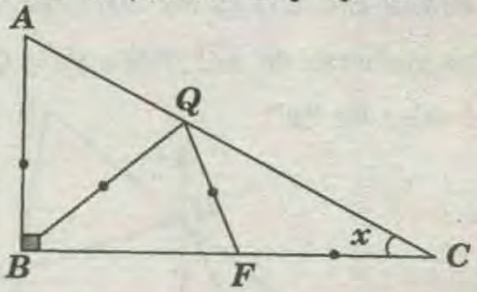
A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 3

04 En la figura mostrada, ¿cuál de los segmentos es de menor medida?



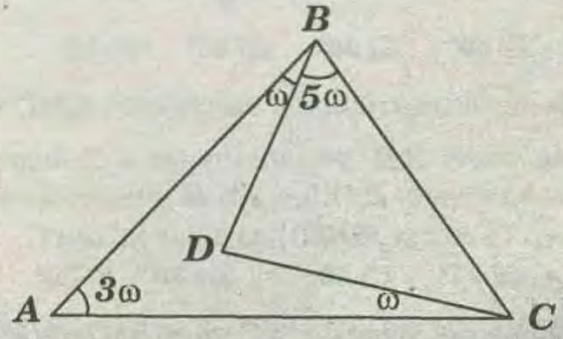
A) $\overline{AC}$ B) $\overline{AB}$ C) $\overline{FD}$ D) $\overline{FE}$ E) $\overline{DE}$

05 Calcular "x", si : $AB=BQ=QF=FC$.



A) 15° B) 87°/2 C) 53°/2 D) 45°/2 E) 20°

06 En la figura, $AB =DC$, calcular "ω"



A)10° B) 15° C) 18° D) 20° E) 26°

07 En un triángulo $ABC, m\sphericalangle A=2(m\sphericalangle C)$, la bisectriz interior $\overline{BD}$ prolongada intersectada en "E" a la bisectriz exterior del $\sphericalangle C$.

Si : $DE=8u$. Calcular CE.

A)4u B)7u C)8u D)14u E)10u

08 En un triangulo acutángulo, dos de sus lados suman **30u**. Calcular el mayor valor entero que puede tomar la altura relativa al tercer lado.

A) 11u B) 12u C) 13u D) 14u E) 15u

09 Los lados de un triángulo isósceles miden de **5** y **13**. calcular su perímetro.

A)23 B)31 C)26 y 31 D)18 E)28

10 En un triángulo , las longitudes de dos lados son **7u** y **8u** respectivamente. Calcular el perímetro del triángulo , si la longitud del tercer lado es el doble de la longitud de uno de sus otros lados.

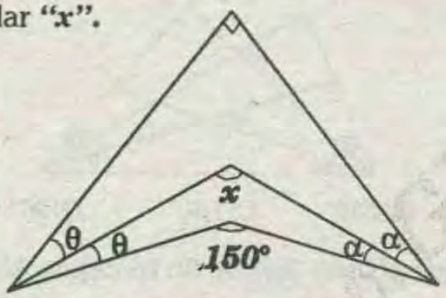
A)29 B)31 C)29 y 30 D)15 E)23

11 En un triángulo **ABC** , sobre la prolongación del lado $\overline{CB}$ se ubica en el punto **Q**, tal que la medida del suplemento del ángulo **AQC** es el doble de la medida del ángulo **ACB**. Calcular **QB**.

Si : **AQ=9** y **BC=7**.

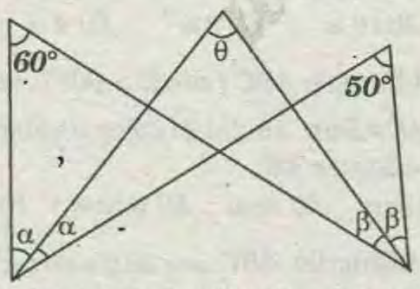
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12 Calcular **"x"**.



A)100° B110° C)120° D)130° E)140°

13 Calcular "θ"



A)110° B)110° C)90° C)55° E)60°

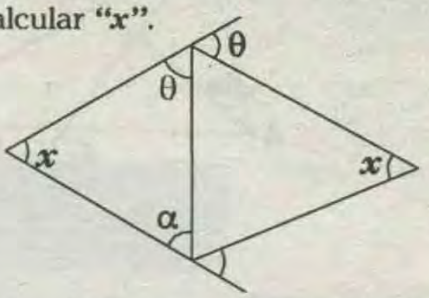
14 Los catetos de un triángulo rectángulo **ABC** miden : **AB=16, BC=30** se traza la altura **BH** y las bisectrices **BP**, $\overline{BQ}$ de los ángulos **ABH** y **HBC** respectivamente. Calcular **PQ**

A)120 B)18 C)24 C)36 E) No existe

15 En un triángulo **ABC**, la medida del ángulo formado por la bisectriz interior del ángulo **A** y la bisectriz exterior del ángulo **C** es siete veces la medida del ángulo **B** Calcular la medida del ángulo **B**.

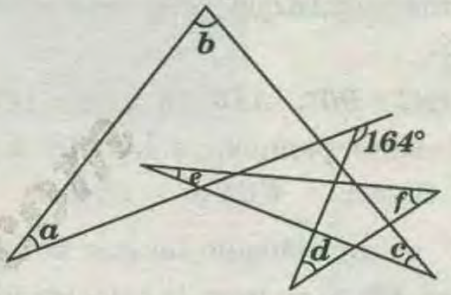
A)120° B)18° C)24° C)36° E) No existe

16 Del gráfico calcular **"x"**.



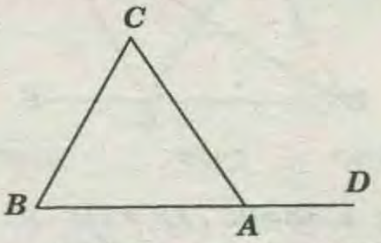
A)120° B)18° C)24° C)36° E)60°

17 Calcular la suma de los ángulos **a; b; d; e; f** .



A) 540° B) 180° C) 720° D) 360° E) 320°

18 El triángulo **CAD** es igual a tres veces el ángulo **CAB** y el ángulo **BCA** es mayor al ángulo **CBA**. El mayor lado del triángulo **ABC** es:

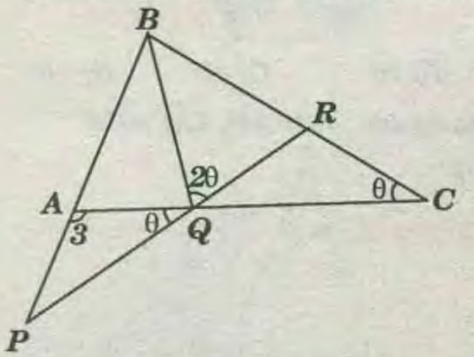


A) $\overline{BC}$ B) $\overline{AB}$ C) $\overline{AC}$

D) Puede ser $\overline{AC}$ o $\overline{BC}$ dependiendo de la forma del triángulo

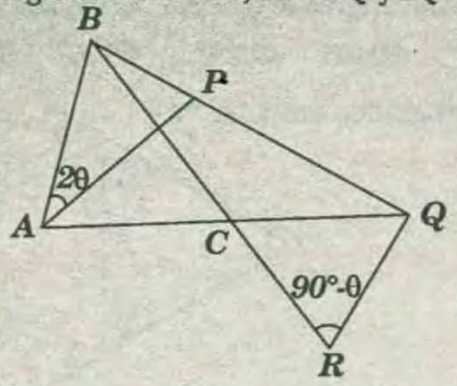
E) No se puede determinar los datos.

19 En el gráfico: **PA=2** y **BR–RC=3** Calcule **PQ** .



A)6 B)5 C)4 D)3 E)7

20 Segun el gráfico : $AB=BC$, $AP=PQ$ y $BQ=AB+3$. Calcule CR.



A) 2 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

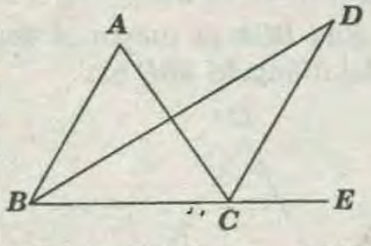
21 En un $\triangle ABC$ equilátero se ubica el punto D exterior al triángulo,tal que el segmento $\overline{BD}$ intersecta al lado $\overline{AC}$.

Si $m\sphericalangle ADC > 90°$, $AD=8u$ y $CD=15u$

Calcule el menor perímetro entero del $\triangle ABC$

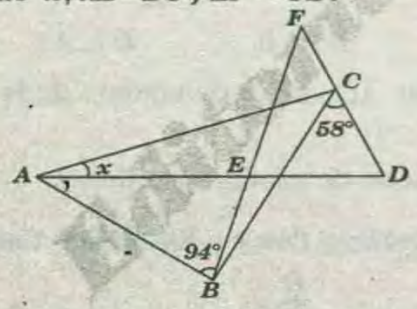
A) 52 u B)24 u C)22 u D)46 u E) 48 u

22 ABC es un triángulo tal que la medida del ángulo A es $40°$, si se traza la bisectriz interior del ángulo ABC y la bisectriz exterior del ángulo C, la medida del ángulo formado por las dos bisectrices es :



A)160° B)35° C)70° D)60° E)20°

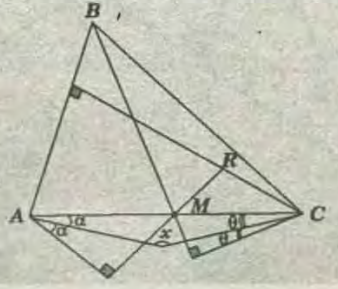
23 Calcule x, $AB=BC$, $EF=FD$.



A) 20° B) 15° C) 30° D) 18° E) 25°

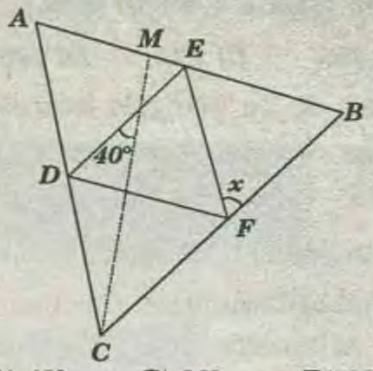
24 En la figura : $AB=AM$, $CM=CR$.

Calcule "x"



A)157° B)150° C)170° D)140° E)125°

25 En la figura, los triángulos ABC y DEF son equiláteros, $AM=MB$. Calcular "x"

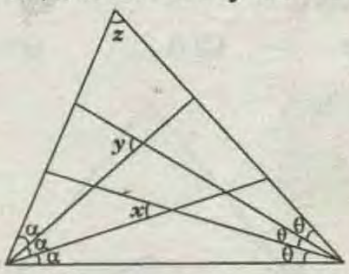


A) 55° B) 40° C) 30° D) 60° E) 50°

26 En un triángulo ABC, la suma de las medidas de los ángulos B y C es $105°$. Si la medida del ángulo A excede a la medida del ángulo B en $4°$ y la medida del ángulo C es:

A)34° B)35° C)75° D)30° E)40°

27 Del gráfico, calcular: $x+y+z$.



A)120° B)160° C)150° D)90° E)180°

28 Sobre el lado $\overline{BC}$ de un triángulo ABC, se ubica el punto "D", tal que la $m\sphericalangle ADC$ es igual a la semisuma de los ángulos interiores de A y B. Calcular BD, si además : $AC=12u$; $BC=16u$

A)14 u B)10 u C) 8 u D) 4 u E) 6 u

29 En un triángulo ABC $(m\sphericalangle B > 90°)$, se sabe que: $BC=2m$ y $AC=5cm$. Hallar el valor o valores enteros que puede adoptar AB .

A) 4cm B) 5cm C) 6cm D) 4,5cm E) 4,5 y 6cm

30 En un triángulo ABC, $m\sphericalangle BAC=80°$; $m\sphericalangle BCA=40°$ en $\overline{AC}$ la se ubica un punto "M", tal que , $m\sphericalangle ABM=50°$. Calcular la $m\sphericalangle BME$, siendo "E" un punto de $\overline{BC}$, tal que : $BE=AB$.

A)50° B)80° C)40° D)20° E)30°

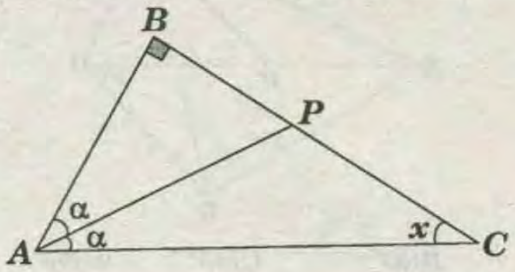
31 Se tiene dos rectas oblicuas (secantes) L_1 y L_2 las cuales se intersectan en el punto Q. Además,una tercera secante o transversal las intersectan en los punto puntos A y B, formado con ellas ángulos

agudos correspondientes cuyas medidas son $85°$ y $75°$ respectivamente. Sea "X" un punto de $\overline{AB}$ "Y" un punto de $\overline{AQ}$ y Z un punto de $\overline{BQ}$, tal que : $\overline{AY} \cong \overline{AX}$ y $\overline{BZ} \cong \overline{BX}$. Calcular la medida del $\sphericalangle XYZ$.

A)75° B)80° C)100° D)85° E)95°

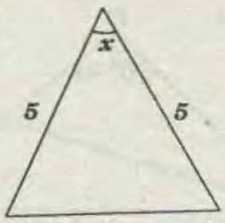
DECIMO SEGUNDA PRACTICA

01 En la figura, calcular "x". $2BP=PC$.



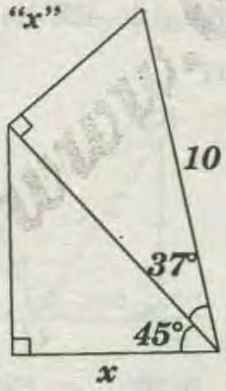
A) 15° B) 30° C) 5° D) 60° E) 75°

02 Calcular "x".



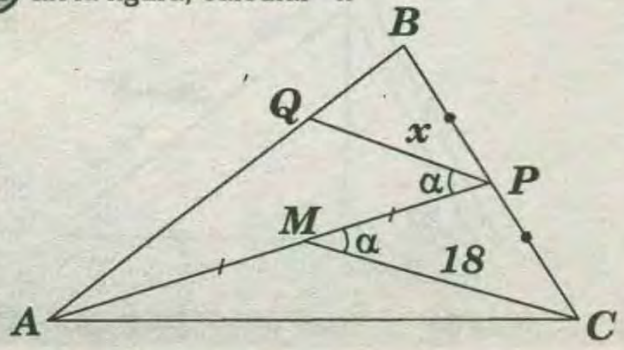
A)106° B) 120° C) 53° D) 37° E) 74°

03 En la figura, calcular "x"



A)4 B)8 C) $\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

04 En la figura, calcular "x"

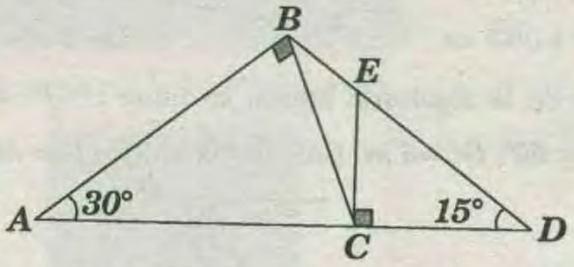


A) 8 B) 19 D) 12 D) 18 E) 9

05 En un triángulo ABC, ubican los puntos medios M y N de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. El segmento que une los puntos medios de $\overline{MC}$ y $\overline{NA}$ mide $2u$. Calcular AC.

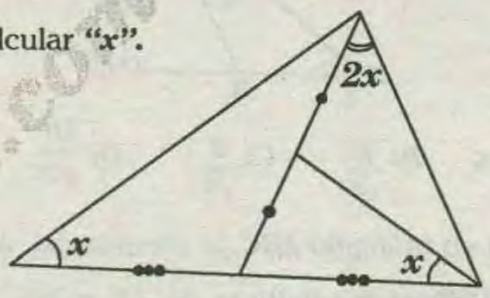
A)2 u B)1 u C) 3 u D) 8 u E) 6 u

06 En el gráfico, $ED=12u$. Calcular AC.



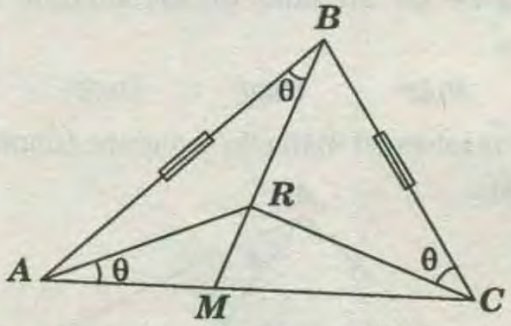
A) $2\sqrt{2}$ B) $2,5\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{2}$ E) $1,5\sqrt{2}$

07 Calcular "x".



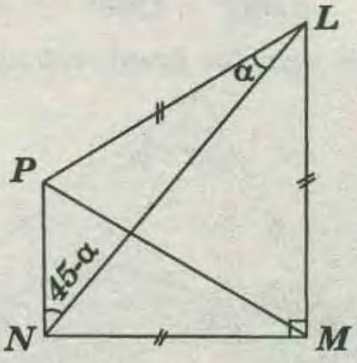
A) 15° B) 18° C) 20° D) 30° E) 36°

08 Del gráfico calcular "θ", si : $BR=3$ y $RM=2$



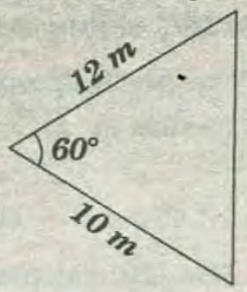
A)30° B)18° 30' C)26° 30' D)15° E)45°

09 En la figura, calcular el angulo "α".



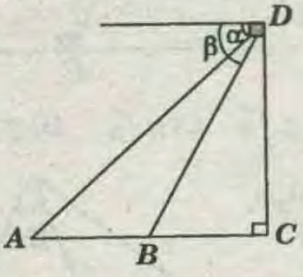
A) 20° B) 10° C) 12° D) 30° E) 15°

10 En la figura, calcular el perímetro del triángulo.



A) $22+\sqrt{8}$ m B) $22+\sqrt{47}$ m
C) $22+\sqrt{63}$ m D) $22+2\sqrt{31}$ m

11 En la siguiente figura, se tiene : "α" = 30°, "β" = 60°, DC=5 m. Calcular la longitud de AB.

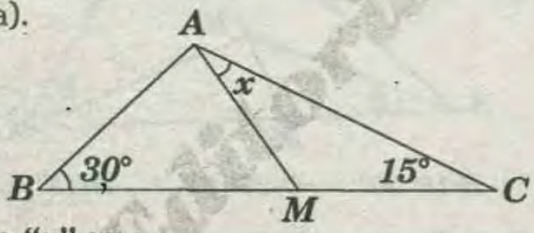


A) $\sqrt{3}+5$ B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ D) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12 En un triángulo ABC, la medida del ΔABC es igual a 128° las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ cortan a $\overline{AC}$ en los puntos R y S, respectivamente. Luego, la suma de las medidas de los ángulos $A\hat{B}R$ y $S\hat{B}C$ es :

A)40° B)48° C)50° D)52° E)64°

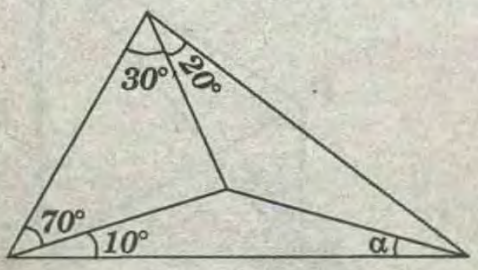
13 Al resolver el triángulo siguiente, (donde $\overline{AM}$: mediana).



El ángulo "x" es:

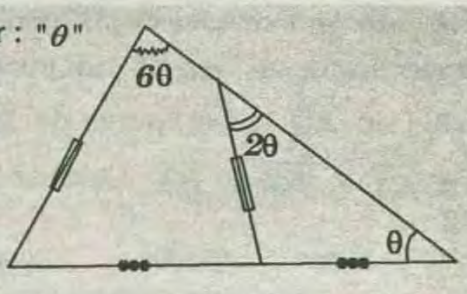
A)45° B)30° C)60° D)75° E)15°

14 En la siguiente figura , calcular "α".



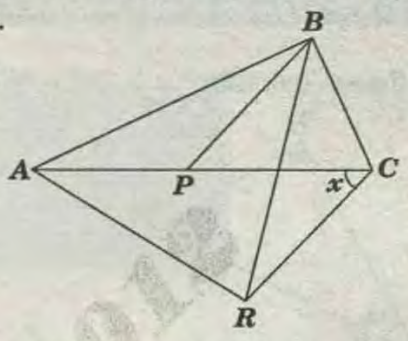
A)9° B)10° C)15° D)22,5 E)30°

15 Calcular : "θ"



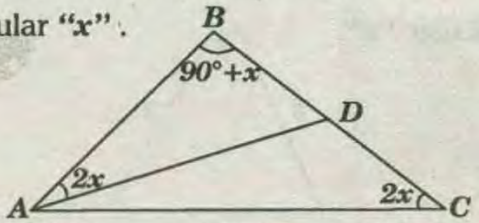
A)10° B)18° C)20° D)30° E)16°

16 Calcular : "x", si los triangulos ABR y PBC son equiláteros.



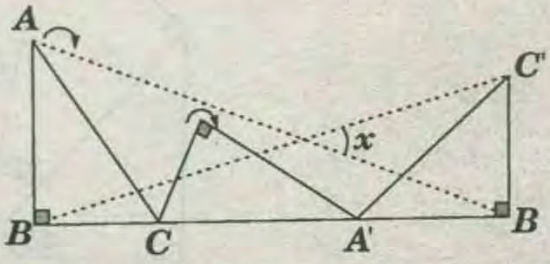
A)30° B)37° C)45° D)53° D)60°

17 En la figura mostrada , BD=DC .
Calcular "x".



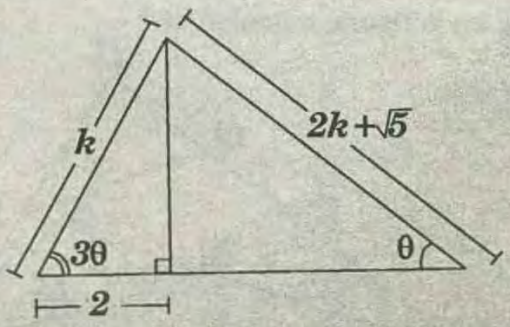
A)10° B)12° C)15° D)18° E)20°

18 El triángulo ABC ha rotado . Calcular : "x", si : $m\sphericalangle A=37°$.



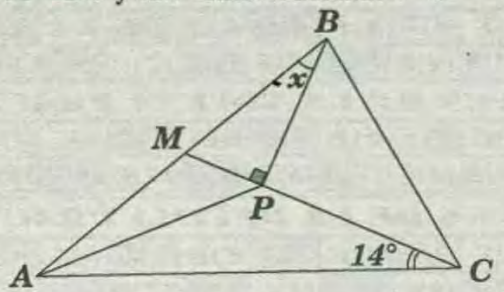
A)45° B)30° C)31° D)65°/2 E)28°

19 Del gráfico , calcular "θ"



A)15° B)18°30' C)26° 30' D)22° 30' E)16°

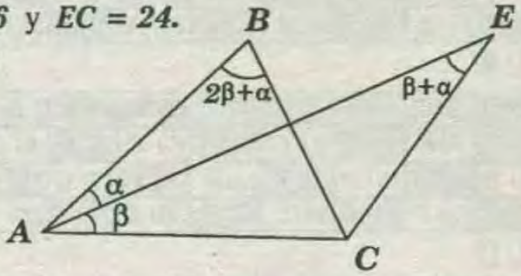
20 Si: $AP=BC$ y $AM=MB$. Calcular : "x"



A) 14° B) 27° 30' C)18° 30' D)37° E)45°

21 Del gráfico, calcular AE .

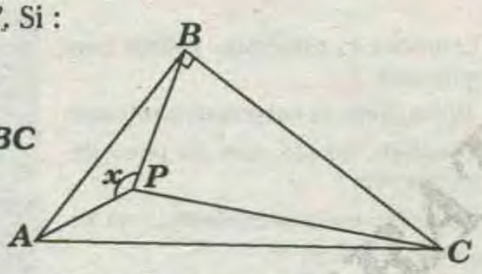
Si: $BC = 36$ y $EC = 24$.
$AB = AC$



A) 60 B) 62 C) 64 D) 66 E) 60

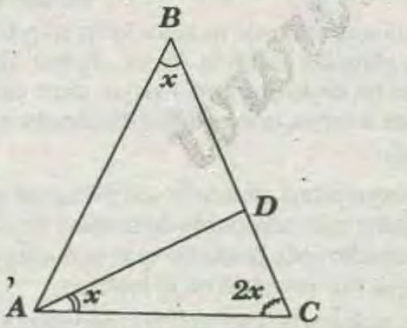
22 Calcular "x", Si :

$AP=1$
$PB=2$
$PC=3$ y $AB= BC$



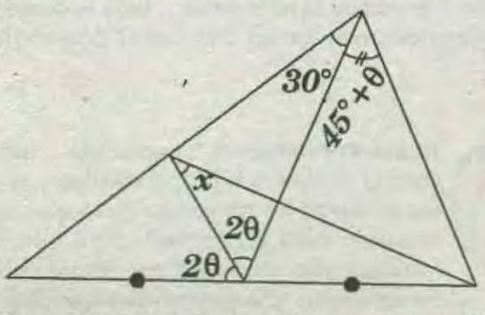
A)100° B)110° C)120° D)135° E)150°

23 Del gráfico, calcular "x" , si : $AB=AD+DC$.



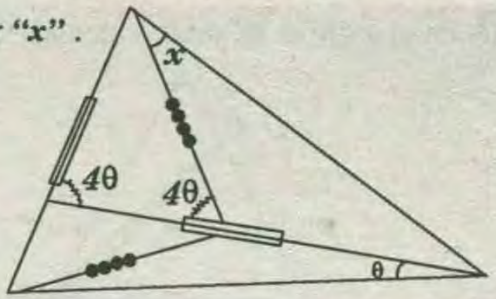
A)10° B)12° C)15° D)18° E)36°

24 Calcular "x", en función de : "θ".



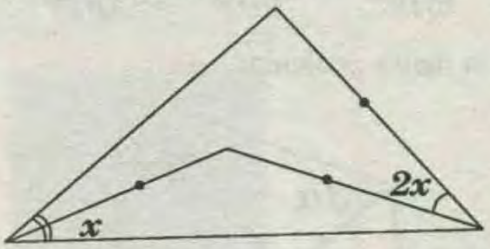
A) 2θ B) θ C) $\theta + 15°$ D) $\theta + 30°$ E) $60° + \theta$

25 Calcular "x" .



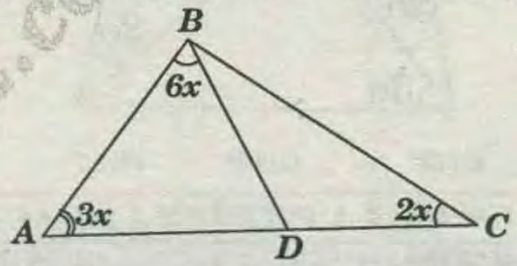
A) 9° B) 18° C) 30° D) 36° E) 54°

26 En la figura, calcular "x".



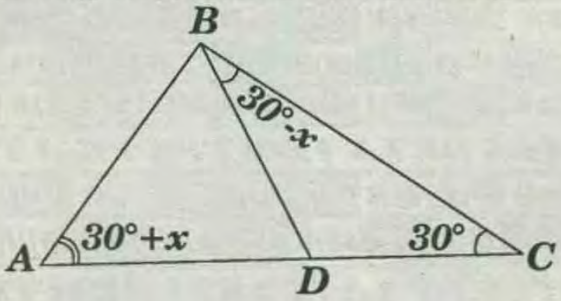
A)10° B)15° C)18° D)30° E)22° 30'

27 En el gráfico, calcular "x" , si $AD=BC$.



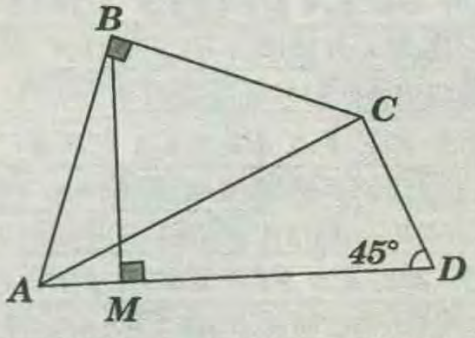
A) 10° B) 12° C) 20° D) 15° E) 18°

28 En el gráfico, calcular "x", si $AD=BC$.



A)12° B)15° C)10° D)18° E)20°

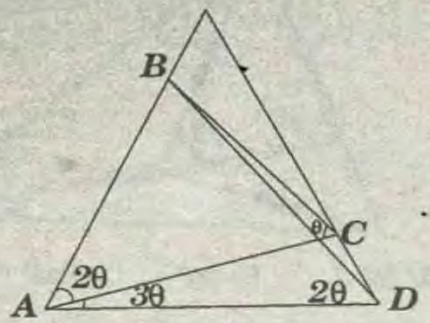
29 En la gráfica : $AB = BC$, $BM = 1$, calcular AD.



A) 1 B) 3/2 C)2 D) 5/2 E) 3

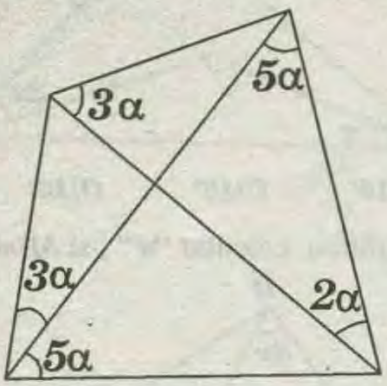
www.rubiños.com

30 En el gráfico: $BC=AD$, calcular "θ".



A)10° B)12° C)15° D)18° E)20°

31 En la figura , calcular "α"



A)9° B)12° C)10° D)15° E)18°

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)D	2)B	3)E	4)C	5)C	6)D	7)B	8)E	9)B	10)A
11)D	12)C	13)D	14)E	15)D	16)B	17)C	18)E	19)D	20)D

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)A	2)C	3)C	4)E	5)B	6)D	7)C	8)D	9)B	10)B
11)B	12)B	13)D	14)A	15)B	16)A	17)D	18)A	19)A	20)D
01)E	02)C	03)C	04)A	05)A	6)C	7)D	8)A	9)E	

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1)D	2)B	3)E	4)B	5)C	6)B	7)C	8)C	9)B	10)B
11)E	12)E	13)E	14)D	15)B	16)A	17)E	18)C	19)D	20)C

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA

1)E	2)D	3)D	4)C	5)E	6)B	7)D	8)C	9)B	10)A
11)C	12)C	13)A	14)B	15)C	16)A	17)E	18)E	19)B	20)C

CLAVES DE LA QUINTA PRACTICA

1)B	2)D	3)A	4)B	5)C	6)B	7)D	8)C	9)C	10)A
11)C	12)B	13)B	14)D	15)B	16)B	17)E	18)D	19)C	20)D

CLAVES DE LA SEXTA PRACTICA

1)B	2)E	3)C	4)B	5)D	6)B	7)C	8)E	9)E	10)A
11)E	12)A	13)D	14)C	15)C	16)E	17)E	18)E	19)B	20)C

CLAVES DE LA SEPTIMA PRACTICA

1)C	2)B	3)D	4)B	5)C	6)B	7)D	8)C	9)B	10)A
11)C	12)A	13)D	14)D	15)C	16)C	17)E	18)B	19)A	20)D

CLAVES DE LA OCTAVA PRACTICA

1)D	2)E	3)E	4)C	5)C	6)B	7)B	8)D	9)D	10)C
11)C	12)B	13)E	14)E	15)B	16)D	17)C	18)A	19)A	20)D

CLAVES DE LA NOVENA PRACTICA

1)B	2)C	3)E	4)D	5)C	6)A	7)C	8)E	9)B	10)D
11)A	12)B	13)C	14)B	15)B	16)A	17)E	18)B	19)B	20)E

CLAVES DE LA DECIMA PRACTICA

1)D	2)E	3)E	4)E	5)A	6)D	7)D	8)A	9)D	10)B
11)A	12)E	13)C	14)E	15)C	16)D	17)D	18)A	19)D	20)E

DECIMO PRIMERA **TRIÁNGULOS**

1) C	2)D	3) D	4) D	5) D	6) B	7) C	8) D	9) B	10) A
11) B	12) C	13) D	14) A	15) C	16) E	17) D	18) B	19) B	20) E
21) E	22) E	23) D	24)A	25) E	26) A	27) E	28) D	29) A	30) E
31) B									

DECIMO SEGUNDA **CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS**

1) B	2)E	3) E	4) C	5) D	6) C	7) D	8) C	9) E	10) D
11) D	12) D	13) B	14) B	15)E	16) E	17) C	18) D	19) C	20) E
21) E	22) D	23) E	24)C	25) B	26) D	27) D	28) B	29) C	30) C
31) C									

BUSCANDO LA GEOMETRÍA

Entonces el principito señaló con gravedad:

-¡No importa, es tan pequeña mi casa!

Y agregó, quizás, con un poco de melancolía:

-Derecho, camino adelante... no se puede ir muy lejos

De esta manera supe una segunda cosa muy importante: su planeta de origen era apenas más grande que una casa .

Esto no podía asombrarme mucho. Sabía muy bien que aparte de los grandes planetas como la Tierra, Júpiter, Marte, Venus, a los cuales se les ha dado nombre, existen otros centenares de ellos tan pequeños a veces, que es difícil distinguirlos aun con la ayuda del telescopio.

Podemos hacernos una idea de la complicación que resultaría para una persona aproximadamente de nuestro tamaño que habita en un planeta mucho más pequeño que el nuestro, el estudio de la geometría que nos enseñan en el Instituto.

Por ejemplo, algo tan sencillo como la construcción de una cancha de baloncesto podría terminar con la paciencia de cualquiera: Trazaremos la línea de fondo siguiendo la trayectoria del ecuador de nuestro pequeño planeta y las dos bandas las haremos partiendo de dos puntos a la distancia adecuada... para la construcción de dichas bandas debemos lanzar dos líneas perpendiculares al ecuador.

Ya nos lo estábamos imaginando... ¡las rectas se cortan! Ambas son perpendiculares al ecuador y sin embargo no paralelas. ¿Será que no estamos trazando bien las rectas? ¿Será que no hemos medido los ángulos de forma adecuada? Necesitamos una geometría específica para este pequeño mundo.

POLIGONOS
INTRODUCCION
CAPITULO 13A

OBJETIVOS :

Al finalizar la unidad, el alumno será capaz de:

* *Aprender la definición de polígono plano.*
* *Utiliza correctamente los nombres de los polígonos.*
* *Reconocer las clases de polígonos.*
* *Aplicar las fórmulas en la resolución de problemas.*

INTRODUCCIÓN :

Si analizanos la palabra ***polígono*** podríamos decir que proviene de dos raíces: ***POLI*** que significa varios y ***GONO*** que significa ángulo, sin embargo, hoy aprenderás que dicha palabra encierra mucho más contenido de lo que te imaginas

POLI – varios

GONO – ángulo

Del cual se puede entender su significado: varios ángulos, surge la interrogativa ¿Para que puede servir un polígono?

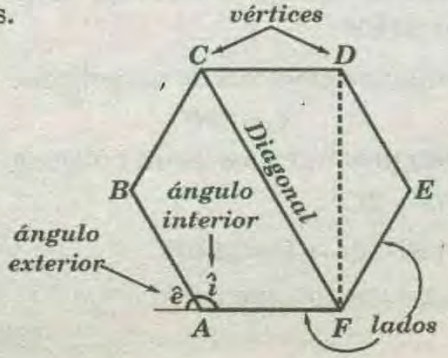
La respuesta dependerá de quien la responda como por ejemplo: quienes lotizan los terrenos generalmente utilizan la forma cuadrangular para realizar tal actividad, así mismo los tableros de las carpetas y de las mesas tiene forma rectangular; esto es debido a que si se realizará en forma de otras figuras se perdería espacio o sería incómodo.

En la propia naturaleza al observar los panales de las abejas notará que en ellas hay cavidades que tiene forma hexagonal.

Para un estudiante el conocer las características del polígono le servirá para realizar el estudio de las propiedades de otras figuras.

POLÍGONO

Se denomina polígono a la reunión de tres o más segmentos de recta que tienen sus extremos comunes a dos lados.



Elementos:

* Vértices: $A, B, C, ...$
* Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, ...$
* Ángulos: Interior: $\hat{i}$
  Exterior: $\hat{e}$
* Diagonales: $\overline{CF}$ y $\overline{DF}$
* Perímetro: ***(2p) : 2p=AB+BC+CD+DE+EF+FA***

NOTA :

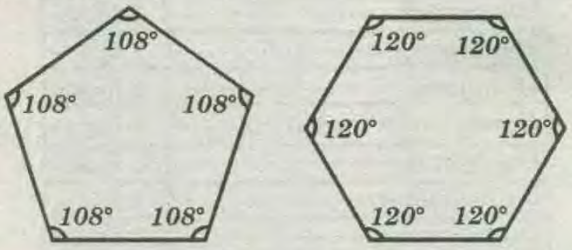
Si un polígono tiene ***"n"*** lados, entonces tendrá ***"n"*** vértices y ***"n"*** ángulos.

CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS CONVEXOS

I) POLÍGONO EQUIÁNGULO :

Cuando tienen todos sus ángulos internos congruentes.

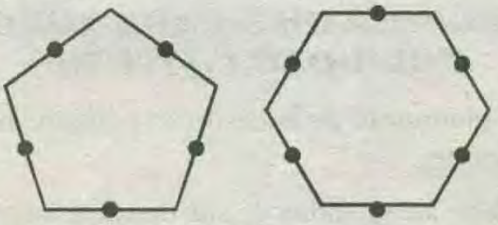
EJEMPLOS:



II) POLÍGONO EQUILÁTERO :

Cuando tienen todos sus lados congruentes.

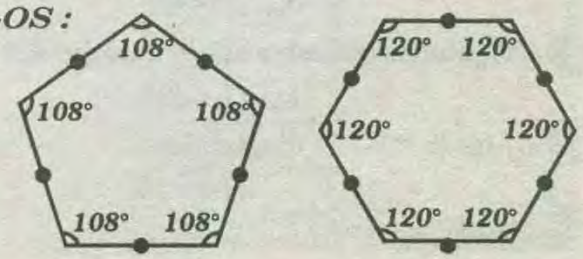
EJEMPLOS:



III) POLÍGONO REGULAR :

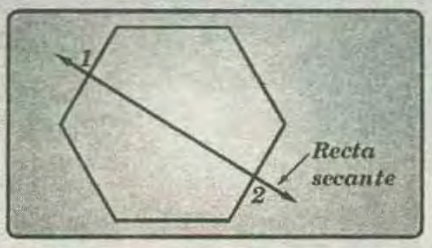
Cuando tienen todos sus ángulos internos congruentes y todos sus lados congruentes.

EJEMPLOS :



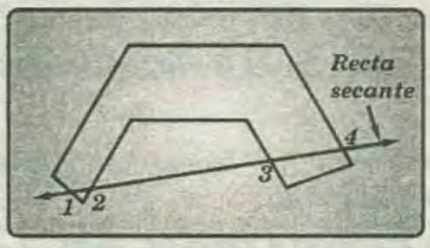
IV) POLÍGONO CONVEXO :

Un polígono es convexo cuando una recta secante lo corta como máximo en dos puntos.



V) POLÍGONO NO CONVEXO :

Un polígono es no convexo cuando una recta secante lo corta en más de dos puntos.



DENOMINACIÓN DE LOS POLÍGONOS

Triángulo	3 lados
Cuadrilátero	4 lados
Pentágono	5 lados
Hexágono	6 lados
Heptágono	7 lados
Octógono	8 lados
Nonágono o Eneágono	9 lados
Decágono	10 lados
Endecágono	11 lados
Dodecágono	12 lados
Pentadecágono	15 lados
Icoságono	20 lados
Enégono	n lados

PROPIEDADES PARA TODO POLÍGONO CONVEXO

Si **"n"** es el número de lados de un polígono convexo, se cumple que:

(01) Suma de las medidas de sus ángulos internos:

$$S_{m\angle i} = 180°(n-2)$$

(02) Suma de las medidas de sus ángulos externos:

$$S'_{m\angle e} = 360°$$

(03) Diagonales trazadas desde un solo vértice:

$$D_i = (n-3)$$

(04) Número total de diagonales:

$$D_T = \frac{n(n-3)}{2}$$

EN POLÍGONOS REGULARES Y EQUIÁNGULOS

(05) Medida de un ángulo interno

$$\hat{i} = \frac{180°(n-2)}{n}$$

(06) Medida de un ángulo exterior:

$$\hat{e} = \frac{360°}{n}$$

(07) Medida de un ángulo central $(\hat{c})$, en un polígono central:

$$\hat{c} = \frac{360°}{n}$$

EJERCICIOS

* Completar el siguiente cuadro:

Número de lados	Nombre	Suma de ángulos internos (S_i)	Número de diagonales (D)
6			
8			
10			
15			
20			

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

¿Cuánto suman los ángulos internos de un polígono convexo de 8 lados?

A) 1020° B) 308° C) 920° D)1080° E) 960°

RESOLUCIÓN :

Suma de ángulos internos de un polígono:

$$S_i = 180°(n-2)$$

Como $n=8 \Rightarrow S_i = 180°(8-2) \Rightarrow S_i = 1080°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

¿Cuánto suman los ángulos externos e internos de un icoságono?

A) 2800° B) 3600° C) 4000° D) 8200° E)1020°

RESOLUCIÓN :

* Suma de ángulos externos de un polígono:

$$S_{\hat{e}} = 360°$$

* Suma de ángulos internos de un polígono:

$$S_i = 180°(n-2)$$

$$\Rightarrow S_i = 180°(20-2) \rightarrow S_i = 3240°$$

$$\Rightarrow S_{\hat{e}} + S_i = 360° + 3240° = 3600°$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

Hallar la medida del ángulo interior del polígono regular mostrado.

A) 92°
B) 120°
C) 108°
D) 140°
E) 90°

RESOLUCIÓN:

Como el polígono mostrado es un pentágono, entonces: $n=5$.

$$\Rightarrow \hat{i}=\frac{180°(5-2)}{5} \Rightarrow \hat{i}=108°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

¿Cuánto mide un ángulo interno de un polígono regular de *18* lados?

A) 90° *B) 72°* *C) 144°* *D) 108°* *E)160°*

RESOLUCIÓN :

* Ángulo interno de un polígono regular:

$$\hat{i}=\frac{180°(n-2)}{n}$$

* Como: $n=18 \Rightarrow \hat{i}=\frac{180°(18-2)}{18} \Rightarrow \hat{i}=160°$

RPTA : "E"

PROBLEMA 05 :

¿Cuánto mide el ángulo externo de un icoságono regular?

A) 12° *B) 16°* *C) 20°* *D) 18°* *E) 32°*

RESOLUCIÓN:

* Ángulo externo de un polígono regular: $\hat{e}=\frac{360°}{n}$

* Icoságono: $n=20 \Rightarrow \hat{e}=\frac{360°}{20} \Rightarrow \hat{e}=18°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 6 :

Si la figura es un polígono regular, hallar *"x"*

A) 120°
B) 145°
C) 140°
D) 135°
E) 90°

RESOLUCIÓN:

* Como la figura es un octógono: $n=8$

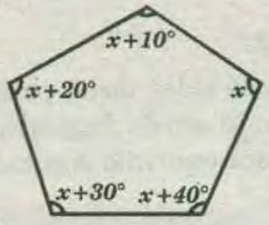
x: ángulo interior

$$\Rightarrow x=\frac{180°(n-2)}{n} \Rightarrow x=\frac{180°(8-2)}{8}=135°$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 7 :

Calcular *"x"* en:



A) 92°
B) 80°
C) 88°
D) 84°
E) 100°

RESOLUCIÓN:

* De la figura: $n=5$

Hallamos la suma de ángulos interiores:

$$S_i=180°(n-2)$$

* Del gráfico:

$$x+20°+x+10°+x+x+30°+x+40°=180°(5-2)$$

$$\Rightarrow 5x+100°=540° \Rightarrow x=88°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

¿Qué polígono tiene *44* diagonales ?

A) Hexágono ***B) Endecágono***
C) Triángulo ***D) Icoságono***

RESOLUCIÓN :

* Número de diagonales:

$$D=\frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow 44=\frac{n(n-3)}{2}$$

* Por aspa simple:

$$0=n^2-3n-88$$

n -11 $\Rightarrow$ $n=11$ ✓ *endecágono*
n 8 $n=-8$ ×

RPTA : "B"

PROBLEMA 9 :

Si la relación entre el ángulo interior y central de un polígono regular es como *3* a *2*, hallar el número de lados del polígono.

A) 3 *B) 2* *C) 5* *D) 4* *E) 7*

RESOLUCIÓN :

$$\frac{\hat{i}}{\hat{c}}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\frac{180°(n-2)}{n}}{\frac{360°}{n}}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{n-2}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow n=5$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

En un polígono regular, el doble de números de diagonales es el quíntuplo de lados, luego, la medida de sus ángulos es:

A) 120° *B) 135°* *C) 180°* *D)105°* *E) 95°*

RESOLUCIÓN :

* Por dato: $2D=5n$

$$\Rightarrow 2\left[\frac{n(n-3)}{2}\right]=5n \Rightarrow n-3=5 \Rightarrow n=8$$

* Se pide:

$$m\sphericalangle i=\frac{180°(n-2)}{n}=\frac{180°(8-2)}{8}=135°$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 11 :

Hallar el número de lados de un polígono en el cual la diferencia de su número de diagonales y el número de ángulos rectos a que equivale la suma de sus ángulos interiores, es **19**.

A) 12 B) 8 C) 13 D) 14 E) 10

RESOLUCIÓN :

* Según enunciado:

D – (número de ángulos rectos) $=19$

$$\Rightarrow \frac{n(n-3)}{2}-\frac{S_i}{90°}=19 \Rightarrow \frac{n(n-3)}{2}-\frac{180°(n-2)}{90°}=19$$

* Simplificando, resultará:

$$n^2-7n=30 \Rightarrow \underbrace{n(n-7)=10\times 3}$$

* tanteando resultará: $\Rightarrow n=10$

RPTA : "E"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcula la suma de los ángulos de un polígono:

A) de 5 lados B) de 11 lados C) de 37 lados
D) de 7 lados E) de 9 lados

02 Calcula la medida del ángulo interior y del ángulo central de un polígono regular de:

A)12 lados B) 18 lados C) 72 lados D) 6 lados

03 Calcula el ángulo interior faltante de un:

A) Cuadrilátero con los ángulos interiores de 34°, 43°, 152°.
B) Pentágono con los ángulos interiores de 77°, 89°, 100°, 210°.

04 Calcula el número de lados de un polígono cuyos ángulos interiores suman:

A) 900° B) 1800° C) 3600° D) 5400°

05 Hallar el número de diagonales de un decágono.

A) 32 B) 34 C) 35 D) 37 E) 39

06 ¿Cuál es la medida del ángulo interior de un hexágono regular?

A) 110° B) 115° C) 118° D) 120° E) 123°

07 Calcular la suma de los ángulos internos de un pentágono convexo.

A) 540° B) 545° C) 530° D) 550° E) 560°

08 ¿Cuántass diagonales se pueden trazar desde un vértice de un octógono?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

09 Hallar la suma de los ángulos externos de un icoságono

A) 360° B) 365° C) 570° D) 575° E) 580°

10 Calcular la medida del ángulo exterior de un dodecágono regular.

A) 15° B) 20° C) 30° D) 45° E)60°

11 Calcular la medida del ángulo central de un hexágono regular.

A) 30° B) 60° C) 75° D) 80° E) N.A.

12 ¿Cuál es el polígono cuyo número de lados es igual al número de vértices?

A) Triángulo B) Pentágono C) Hexágono
D) Decágono E)N.A.

13 ¿Cuántos lados tiene el polígono cuya suma de sus ángulos internos es **720°**?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

14 Si al número de lados de un polígono le agregamos su número de vértices se obtiene **20**. Hallar su número de lados.

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) N.A.

15 Hallar la suma de las medidas de los ángulos interiores de un hexágono convexo.

A) 720° B) 600° C) 900° D) 360° E) 540°

16 Si la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono convexo es **900°**. Hallar su número de lados.

A) 6 B) 8 C) 5 D) 7 E) 10

17 ¿Cuántas diagonales tiene el polígono que posee 8 vértices?

A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 28

18 ¿En qué polígono se cumple que el número de diagonales es el triple del número de lados?

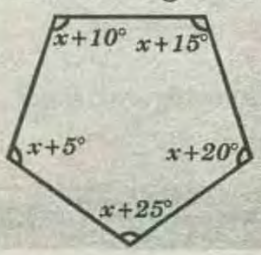
A) Pentágono B) Decágono C) Nonágono
D) Hexágono E) Endecágono

19 Hallar la suma de los ángulos interiores de un hexágono más la suma de los ángulos interiores de un pentágono.

A) 1250° B) 1350° C) 1270° D) 1260° E)1280°

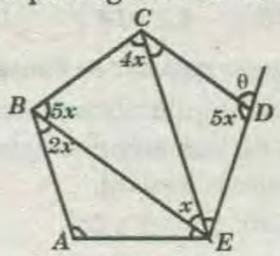
20 ¿Cuál es el valor del ángulo **"x"** en el polígono mostrado?

A) 60°
B) 85°
C) 93°
D) 120°



TAREA DOMICILIARIA

01 En el siguiente pentágono convexo, hallar: "θ"



A) 136°
B) 100°
C) 90°
D) 150°
E) 132°

02 ¿Cuántos lados tiene el polígono convexo en el cual el número de diagonales es mayor en *133* que el número de lados?

A) 13 *B) 17* *C) 11* *D) 14* *E) 19*

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 ¿Cuántas diagonales tiene un octógono?

A) 16 *B) 18* *C) 24* *D) 32* *E) 20*

02 Calcular cuántas diagonales tiene un polígono de trece lados.

A) 65 *B) 75* *C) 80* *D) 54* *E) 48*

03 ¿Cuántas diagonales tiene un dodecágono?

A) 64 *B) 27* *C) 52* *D) 54* *E) 56*

04 Calcular la suma de los ángulos interiores de un nonágono.

A) 1210° *B) 1144°* *C) 1080°* *D) 1440°* *E) 1260°*

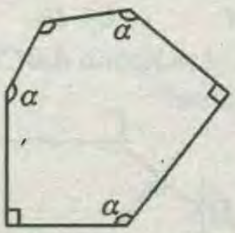
05 Calcular la suma de los ángulos interiores de un decágono.

A) 1210° *B) 1260°* *C) 1620°* *D) 1420°* *E) 1440°*

06 Calcular "α" en la figura.

A) 100°
B) 135°
C) 115°
D) 120°
E) 110°

07 Calcular "α" en la figura.



A) 125°
B) 135°
C) 115°
D) 120°
E) 110°

08 si el número de lados más el número de vértices de un polígono es *14*, calcular el número total de diagonales.

A) 5 *B) 14* *C) 9* *D) 24* *E) 32*

09 Si el número de lados más el doble del número de vértices de un polígono es *18*, ¿Cómo se llama el polígono?

A) Pentágono *B) Octágono* *C) Hexágono*
D) Nonágono *E) Decágono*

10 ¿Cuántos lados tiene el poligono de *35* diagonales?

A) 8 *B) 9* *C) 12* *D) 11* *E) 10*

11 ¿Cómo se llama el polígono que tiene *54* diagonales?

A) Decágono *B) Dodecágono* *C) Octágono*
D) Nonágono *E) Icoságono*

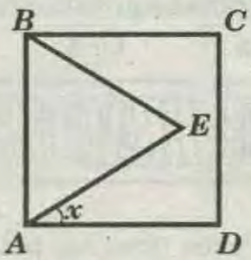
12 ¿Cómo se llama el polígono donde el número de lados es igual al número de diagonales?

A) Hexágono *B) pentágono* *C) octágono*
D) octágono *E) cuadrilátero*

13 Calcular la suma de ángulos internos de un polígono donde el número de diagonales es el doble del número de lados.

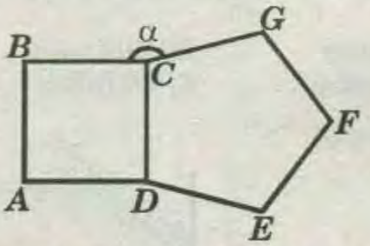
A) 540° *B) 720°* *C) 900°* *D) 1080°* *E) 1260°*

14 Si: *"ABCD"* y *"ABE"* son polígonos regulares, hallar *"x"*.



A) 15°
B) 20°
C) 24°
D) 45°
E) 30°

15 Si: *"ABCD"* y *"CDEFG"* son polígonos regulares, calcular "α"



A) 160°
B) 162°
C) 152°
D) 150°
E) 148°

16 Calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono que tiene *20* diagonales.

A) 1260° *B) 1050°* *C) 720°* *D) 900°* *E) 1080°*

17 La suma de ángulos interiores de un polígono es *1440°*. Calcular del número total de diagonales.

A) 35 *B) 25* *C) 42* *D) 52* *E) 54*

18 El ángulo exterior de un polígono equilátero mide *45°*, calcular el número total de diagonales de dicho polígono.

A) 18 *B) 27* *C) 20* *D) 14* *E) 35*

19 El ángulo interior de un polígono equilátero mide *140°*. Calcular el número total de diagonales.

A) 24 B) 20 C) 32 D) 27 E) 45

(20) ¿Cuántos lados tiene un polígono equiángulo, donde su ángulo interior mide 120°?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 6 E) 8

TAREA DOMICILIARIA

(01) La suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono es 1620°. Calcular su número de lados.

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 14

(02) Encontrar el número de diagonales más el número de vértices de un heptágono.

A) 19 B) 15 C) 18 D) 24 E) 21

(03) Calcular el número de diagonales de un icoságono.

A) 150 B) 160 C) 170 D) 140 E) 180

(04) Encontrar el número de lados de un polígono, si la suma de las medidas de sus ángulos interiores es 720.

A) 4 B) 6 C) 5 D) 7 E) 8

(05) ¿Cuántos lados tiene un polígono donde la suma de ángulos interiores equivale a cuatro ángulos rectos?

A) 3 B) 5 C) 4 D) 6 E) 7

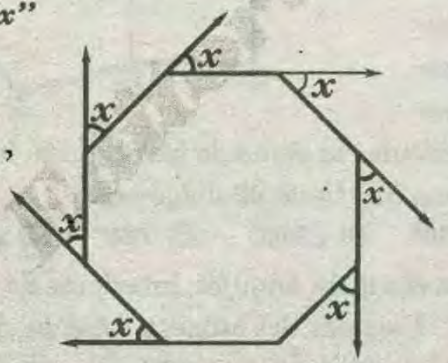
TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

(01) ¿Cuántos lados tiene un polígono cuya suma de las medidas de sus ángulos internos y externos es 7200°?

A) 36 lados B) 40 lados C) 24 lados
D) 45 lados E) 50 lados

(02) Calcular "x"

A) 30°
B) 36°
C) 45°
D) 60°
E) 50°



(03) ¿Cuál es el polígono convexo cuyo número de diágonales es igual al doble del número de lados?

A) Cuadrado B) Exágono C) Heptágono
D) Dodecágono E) Octógono

(04) ¿En qué polígono regular, la medida del ángulo interior es el cuádruplo de la medida del ángulo exterior?

A) Heptágono B) Octógono C) Nonágono
D) Decágono E) Undecágono

(05) El ángulo exterior de un polígono equiángulo es 18, calcular el número total de diágonales.

A) 35 B) 170 C) 144 D) 90 E) 180

(06) En un polígono regular se cumple que la suma de las medidas de los ángulos internos es 35 veces la suma de las medidas de sus ángulos externos. Calcular la medida de su ángulo central.

A) 20° B) 30° C) 25° D) 60° E) 50°

(07) El número de diágonales de un polígono excede al número de lados en 25. Calcular su número de lados.

A) 6 B) 9 C) 12 D) 10 E) 24

(08) Al aumentar dos lados a un polígono, el número de diágonales es 54. ¿Cuántos lados tenía el polígono?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

(09) La suma de las medidas de 13 ángulos consecutivos de un pentadecágono es 2200. Calcular la medida del ángulo que determina las bisectrices interiores de los últimos dos ángulos.

A) 110° B) 40° C) 70° D) 140° E) 55°

(10) Un polígono regular tiene 2 lados más que otro pero su ángulo central mide 30° menos que la medida del otro, luego el polígono es:

A) Pentágono B) Heptágono C) Hexágono
D) Octágono E) Triángulo

(11) En un icoságono regular ABCDEF..., las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ se intersecan en "P". Calcular: $m\sphericalangle BPD$

A) 100° B) 110° C) 116° D) 120° E)126°

(12) Al prolongar (en los dos sentidos) los lados no consecutivos de un exágono equiángulo, que figura se forma:

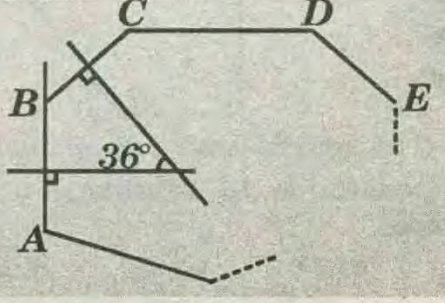
A) Un exágono regular B) Un cuadrado
C) Dodécano regular D) Triágulo equilátero
E) Un triángulo rectángulo

(13) Si a un polígono regular se le aumenta dos lados, la medida de su ángulo externo varía en 9. ¿Cuántos ángulos centrales tiene el polígono original?

A) 6 B) 4 C) 10 D) 8 E) 9

(14) En la figura el polígono ABCDE.... es equiángulo ¿cuántos lados tiene?

A) 6
B) 8
C) 10
D) 20
E) 15



(15) En un polígono convexo, la diferencia entre el número de diágonales y el número de ángulos rectos a que equivale la suma de las medidas de los ángulos internos es igual al número de lados de dicho polígono. Calcular su número de lados.

A) 7 B) 8 C) 12 D) 16 E) 10

(16) Se tiene un hexágono equiángulo *ABCDEF*, *AB=2*; *BC=6*, *EF=1* y *AF=9*. Calcular *CD* y *DE*.

A) 4 y 7 B) 5 y 6 C) 3 y 8 D) 2 y 4 E) 1 y 10

(17) Calcular el máximo número de ángulos exteriores obtusos de un polígono convexo de *"n"* lados.

A) n/2 B) n–3 C) 3 D) n/3 E) n–2

(18) Las medidas de los ángulos internos de un polígono convexo están en progresión aritmética de razón *6*. Si el menor ángulo mide *105°*, calcular su número de diagonales.

A) 6 B) 12 C) 18 D) 9 E) 27

(19) La diferencia entre el número de diágonales de cierto polígono convexo regular y el número de ángulos rectos que equivale la suma de ángulos internos es *8*. Calcular la medida del ángulo central.

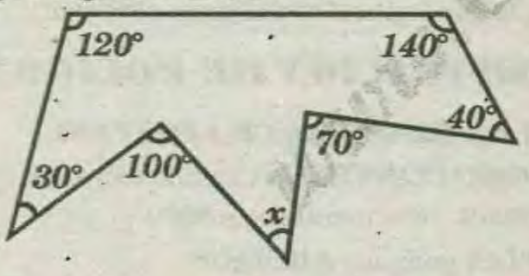
A) 30° B) 60° C) 72° D) 40° E) 45°

(20) Se tiene un octógono equiángulo *ABCDE.....*, *AB=2BC=*$\sqrt{2}$ y *CD=3*. Calcular *AD*.

A) 4 B) 12 C) 5 D) 6 E) 6

TAREA DOMICILIARIA

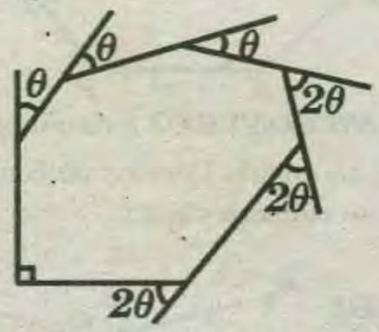
(01) Según el gráfico calcular *"x"*



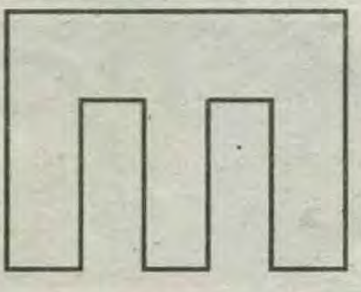
A) 30° B) 20° C) 40° D) 25° E) 26°

(02) Calcular "θ"

A) 15°
B) 20°
C) 30°
D) 45°
E) 25°



(03) Calcular la suma de medidas de los ángulos interiores del siguiente polígono.



A) 2160° B) 1080° C) 1800° D)1440° E) 1600°

(04) Si a un polígono se le aumenta un lado su número de diagonales aumenta en seis, el número de diágonales será:

A) 9 B) 14 C) 20 D) 27 E) 15

(05) Se tiene un decágono regular *ABCDE...* Calcular la medida del ángulo formado por las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$

A) 64° B) 72° C) 80° D) 88° E) 96°

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)*	2)*	3)*	4)*	5)C	6)D	7)A	8)B	9)A	10)C
11)B	12)B	13)D	14)A	15)A	16)D	17)B	18)C	19)D	20)C
1)C	2)D								

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

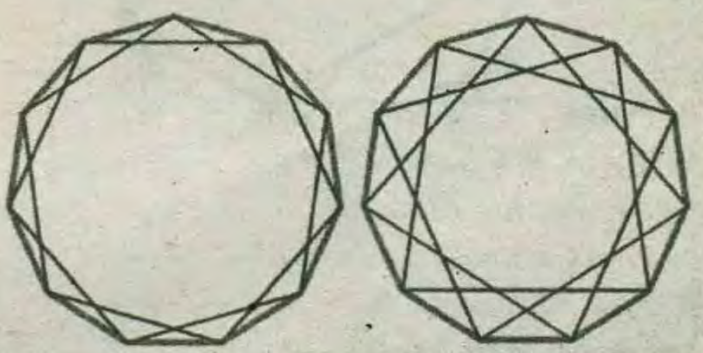
1)E	2)A	3)D	4)E	5)E	6)B	7)B	8)B	9)C	10)E
11)B	12)B	13)C	14)E	15)B	16)E	17)A	18)C	19)D	20)D
1)D	2)E	3)C	4)B	5)C					

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1)B	2)C	3)C	4)D	5)B	6)E	7)D	8)C	9)A	10)C
11)E	12)D	13)D	14)C	15)B	16)A	17)C	18)D	19)E	20)C
01)B	02)C	03)C	04)B	05)B					

POLÍGONO ESTRELLADO

Si unimos los vértices de un polígono saltando rítmicamente un número dado de vértices hasta volver al primero conseguiremos un polígono estrellado. Dependiendo del número de vértices podremos conseguir más o menos polígonos estrellados a partir de un polígono. En el siguiente ejemplo podemos ver los dos polígonos estrellados que se pueden obtener a partir del endecágono (*11* lados.)



POLIGONOS I

CAPITULO 13B

OBJETIVOS :

Al finalizar la unidad, el alumno será capaz de:

* *Conocer definición de polígono plano.*
* *Clasificar los polígonos y precisar sus elementos*
* *Graficar los diferentes tipos de polígonos*
* *Utilizar las fórmulas para polígonos convexos*
* *Resolver problemas sobre polígonos.*
* *Aprender y utilizar correctamente los teoremas de dicho polígono en la resolución de problemas.*

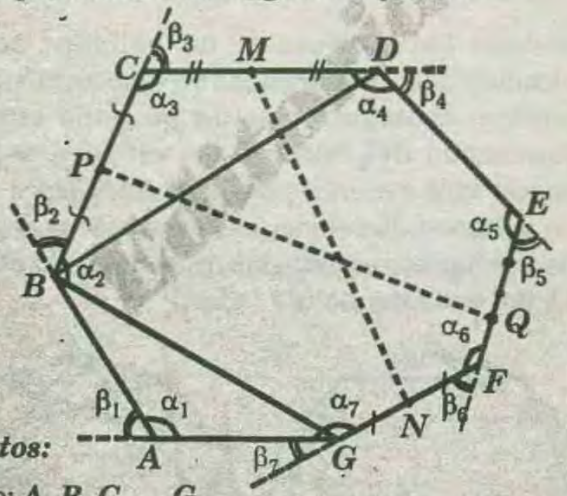
INTRODUCCION :

Basta con mirar nuestro entorno y ver la forma de un cuaderno, una puerta,una ventana de forma triangular, hexagonal u octogonal, etc. deduciras que nos encontramos con figuras geométricas de diferentes lados.

En este capítulo estudiaremos estas figuras geométricas y sus propiedades, así como sus aplicaciones, matizados con problemas resueltos para finalmente mostrar problemas propuestos.

POLÍGONO

Es la figura geométrica, que se forma al unir tres o más puntos coplanares mediante segmentos de recta, de modo que limitan una región del plano.



Elementos:

* Vértice: *A, B, C, ...G*
* Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$,.....,$\overline{GA}$
* Ángulos Interiores. : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots\ldots$
* Ángulos Exteriores.: $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\ldots\ldots$
* Diagonales : $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$,.....
* Diagonales Medias: $\overline{MN}$, $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$,.....
* Perímetro $2p = AB+BC+CD+DE, +\ldots\ldots\ldots$

REGIÓN POLIGONAL :

Es la unión del polígono y su interior.

El polígono según la región que limita, se denomina polígono de región convexa y polígono de región no convexa.

OBSERVACIONES :

* Un polígono convexo, es interceptado en solo 2 puntos, por cualquier recta secante a dicho polígono.
* Un polígono no convexo, es interceptado en más de dos puntos por cualquier recta secante a dicho polígono.

NOTA :

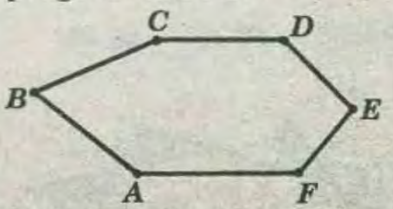
Todo polígono que limita una región convexa, en forma practica le denominamos polígono convexo.

CLASIFICACIÓN DE POLIGONOS

I) POR LA REGIÓN QUE LIMITAN:

POLÍGONO CONVEXO : Cuando todos sus ángulos son convexos. *($0° < \sphericalangle convexo < 360°$)*.

EJEMPLO: polígono *ABCDEF*

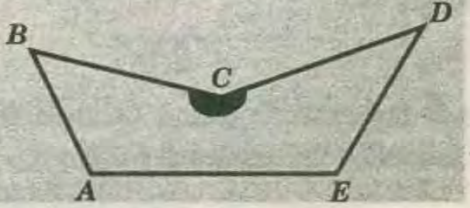


POLÍGONO NO CONVEXO (cóncavo):

Cuando tiene un ángulo interior no convexo por lo menos *($0° < \sphericalangle$ no convexo $< 360°$)*

EJEMPLO:

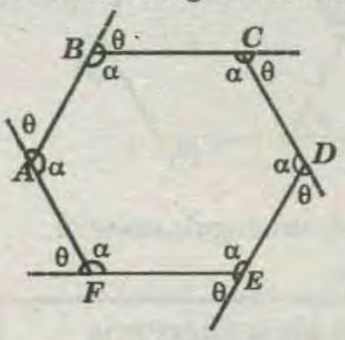
polígono *ABCDE*



II) POR LA MEDIDA DE SUS LADOS Y ANGULOS

POLÍGONO EQUIÁNGULO :

Es aquel polígono cuyos ángulos internos son de igual medida ; dicho polígono siempre es convexo. Además sus ángulos externos son de igual medida.



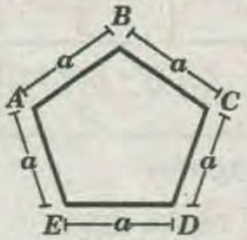
* En la figura el polígono **ABCDEF**, es equiángulo.

α: medida de sus ángulos interiores:

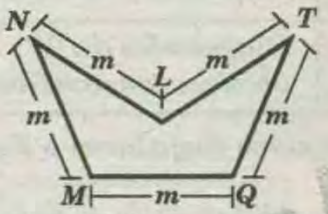
θ: medida de sus ángulos exteriores.

POLÍGONO EQUILÁTERO:

Es aquel polígono cuyos lados son de igual medida.



Polígono Convexo

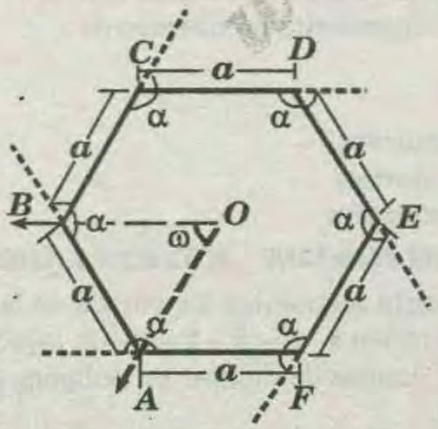


Polígono no Convexo o Cóncavo

En la figuras los polígonos **ABCDE** y **MNLTQ** son equiláteros.

POLÍGONO REGULAR :

Es aquel polígono equiángulo y equilátero a la vez.



En la figura el polígono **ABCDEF** es regular.

O: Centro de polígono regular (punto de concurrencia de las mediatrices de los lados).

POLIGONO IRREGULAR:

Será cuando no es regular

ÁNGULO CENTRAL :

En un polígono regular, se define al ángulo cuyo vértice es el centro de polígono y cuyos lados contienen a los extremos de dicho polígono.

* En el gráfico: $\sphericalangle AOB$: ángulo central: ω

III) SEGÚN EL NUMERO DE LADOS :

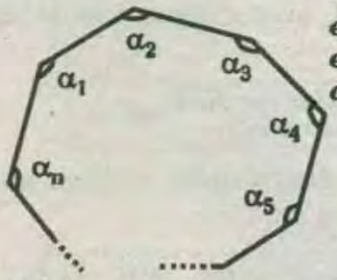
Nombre	Números de Lados
Triángulo	⟶ 3 lados
Cuadrilátero	⟶ 4 lados
Pentágono	⟶ 5 lados
Exágono	⟶ 6 lados
Heptágono	⟶ 7 lados
Octágono	⟶ 8 lados
Nonágono ó eneágono	⟶ 9 lados
Decágono	⟶ 10 lados
Endecágono	⟶ 11 lados
Pentadecágono	⟶ 15 lados
Icoságono	20 lados
. . . . .	
Polígono de n lados	⟶ n lados

PROPIEDADES DEL POLÍGONO

I) En todo polígono de n lados

$$N°vértices = N°lados = N°de\ ángulos\ interiores = n$$

II) Suma de medidas de los ángulos internos (S_i)



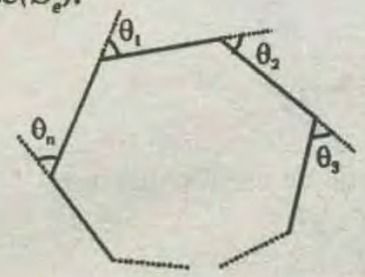
"En la figura el polígono es convexo de "n" lados"

* Entonces :

$$S_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots \alpha_n = 180°(n-2)$$

También se cumple en polígonos no convexos

III) Suma de medidas de los ángulos externos de un polígono convexo tomados uno por vértice(S_e).



"En la figura se muestra un polígono convexo de "n" lados"

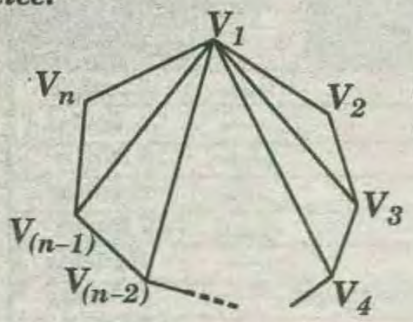
www.GRATIS2.com

* Entonces : $\boxed{S_e=360°}$

(*Solo para polígonos convexos*)

IV) NÚMERO DE DIAGONALES DE UN POLÍGONO

a) Número de Diagonales Trazadas Desde un Vèrtice:



" Polígono de "n" lados"

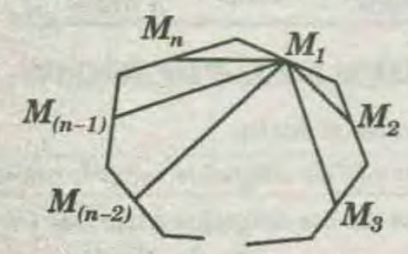
$$\boxed{\text{N° diagonales de 1 vértice} = n-3}$$

b) Número Total de Diagonales:

En todo polígono de n lados

$$\boxed{\text{N° total de diagonales} = \frac{n(n-3)}{2}}$$

c) Número de Diagonales Medias de un Polígono



"polígono de "n" lados"

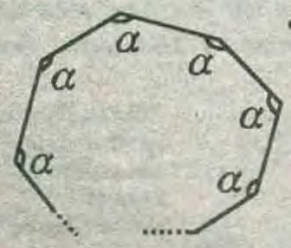
Sean $M_1, M_2, M_3, \ldots M_n$ los puntos medios de los lados del polígono.

$$\boxed{\text{N° diagonales medias de 1 punto medio} = n-1}$$

d) Número total de diagonales medias en todo polígono de «n» lados :

$$\boxed{\text{N° total de diagonales medias} = \frac{n(n-1)}{2}}$$

V) MEDIDA DE UN ÁNGULO INTERIOR EN POLÍGONOS EQUIÁNGULOS :

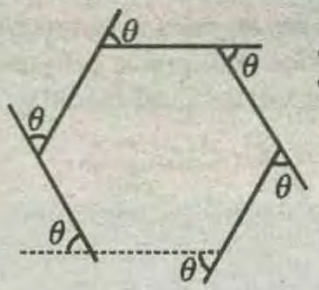


"polígono de "n" lados"

α : Media de un ángulo interior.

* Entonces $\alpha = \frac{180°(n-2)}{n}$

VI) MEDDA DE UN ÁNGULO EXTERIOR EN POLÍGONOS EQUIÁNGULOS :



" Polígono de "n" lados"

* $\theta = \frac{360°}{n}$

θ : medida de un ángulo exterior.

RESUMEN:

1	Suma de ◁ internos	$180°(n-2)$
2	Suma de ◁ internos (Polígono Convexo)	$360°$
3	Número total de diagonales	$\frac{n(n-3)}{2}$
4	Diagonales de un solo vértice	$(n-3)$
5	Diagonales medias	$\frac{n(n-1)}{2}$
6	Diagonales de "V" vértices consecutivos	$: nV - \frac{(V+1)(V+2)}{2}$

Polígonos Regulares o Equiángulos

7	Un ángulo interno	$\frac{180°(n-2)}{n}$
8	Un ángulo externo	$\frac{360°}{n}$

Polígonos Regulares

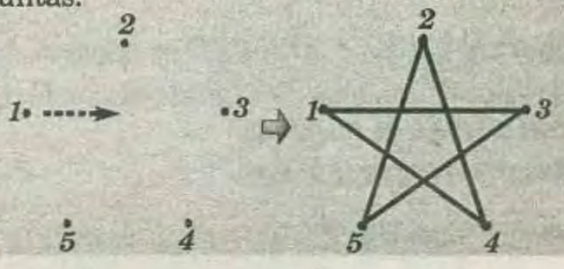
9	Un ángulo central	$\frac{360°}{n}$

Donde **"n"** representa en número de :

* Lados
* Vértices
* Ángulos internos
* Ángulos externos
* Ángulos centrales

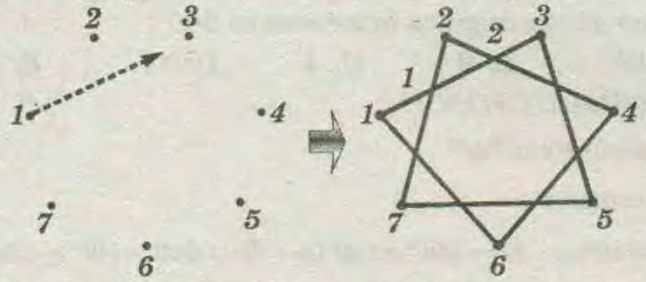
POLIGONOS ESTRELLADOS

* Une mediante segmentos los puntos de la figura en el siguiente orden **1– 3 – 5 – 2 – 4 – 1**. ¿Qué figura se ha tomado? Acabas de dibujar un polígono estrellado de **5** puntas.



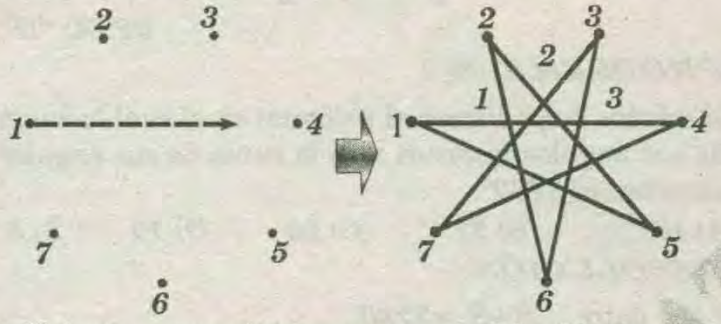
* En seguida dibuja *6* puntos en el plano y únelos siguiendo la misma secuencia anterior ¿Resulta un polígono estrellado? Habrás comprobado que no es posible dibujar un polígono estrellado de *6* puntas.

* Prueba con *7* puntas, aprovechando los puntos mostrados.



* Has seguido la secuencia *1– 3– 5– 7– 2– 4– 6– 1.*

Ahora une los mismos puntos siguiendo la secuencia *1 – 4 –7 – 3 – 6 – 2 – 5 – 1.*

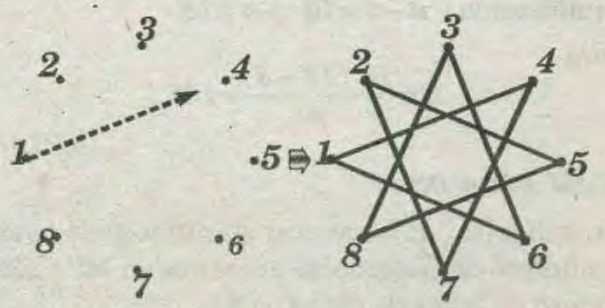


* Habrás comprobado que es posible dibujar dos polígonos estrellados de *7* puntas. El primero se llama polígono estrellado de género *7* y de segunda especie, porque para construirlo, los puntos se unen de *2* en *2* ó dejando dos espacios. El segundo se llama polígono estrellado de género *7* y de tercera especie, porque se dibuja uniendo los puntos *3* en *3*, ó dejando *3* espacios.

¿Es posible predecir cuántos polígonos estrellados de *8* puntas (género *8*) existen , sin necesidad de dibujarlos?.

La mitad de *8* es *4*. Los números enteros positivos menores que *4* son *2* y *3*. De estos números sólo *3* es primo entre sí con *8* (***PESI*** con *8*), aparte de *1*.

Por consiguiente hay solo un polígono estrellados de género *8* y de tercera especie :



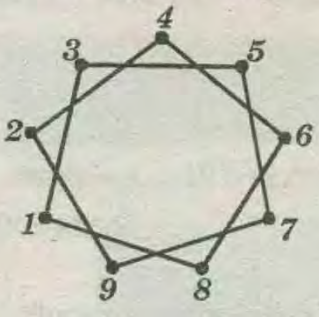
Género 8 (tercera especie)

Para dibujar polígonos estrellaos de *9* puntas :

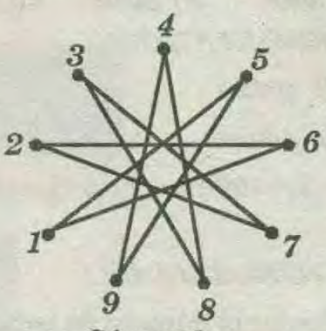
La mitad de *9=4,5*

Números menores que *4,5 : 1; 2; 3; 4 PESI* con *9* a parte de *1 : 2* y *4* (*2* números)

Luego: hay dos polígonos de género *9*, que son de segunda y cuarta especie.



Género 9 (cuarta especie)



Género 9 (segunda especie)

Número de Polígonos Estrellados

Generalizando el proceso que hemos seguido el número de polígonos estrellados de n lados es igual a la cantidad de números menores que $n/2$ que son primos entre sí con $n(n \in N)$ a parte de *1*.

Suma de los Ángulos Interiores de un Polígono Estrellado :

Si *"n"* es el género de un polígono estrellado y *"a"* es el número de espacios entre un lado y los vértices (especie), entonces la suma de los ángulos de las puntas es :

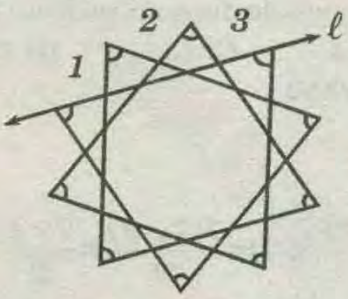
$$\boxed{S=180°(n-2a)}$$

* Donde :

$n \rightarrow$ género

$a \rightarrow$ especie

EJEMPLO:



* En la figura; contamos *10* puntas, entonces su género

$$\rightarrow n = 10$$

*Al trazar la recta "ℓ" por uno de sus lados, observamos *3* espacios hacia un lado, entonces su especie es $a=3$.

* Por consiguiente :

$$S=180°(10-2(3))=720°$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 01 :

Calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono de *24* lados.

A) 360° B) 3960° C) 1236° D) 2567° E)154°

RESOLUCIÓN :

* Si: $n=24$

* Entonces:

$$S_i=180°(n-2) \Rightarrow S_i=180°(24-2) \Rightarrow S_i=3960°$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 02 :

Calcular el número de lados de un polígono regular en el cual al dividir la medida de un ángulo interior entre la de su ángulo central, se obtiene *3,5* de cociente.

A) 4 B) 8 C) 10 D) 12 E) 9

RESOLUCIÓN :

* Trasformando :

$$3,5=\frac{7}{2}$$

Por condición :

$$\frac{\measuredangle i}{\measuredangle c}=\frac{7}{2} \Rightarrow \frac{\frac{180°(n-2)}{n}}{\frac{360°}{n}}=\frac{7}{2} \Rightarrow \frac{\frac{180°n-360°}{n}}{\frac{360°}{n}}=\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{n(180°n-360°)}{360°}=\frac{7}{2}$$

* Simplificando :

$$\frac{n-2}{2}=\frac{7}{2} \Rightarrow n=9$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 03 :

Calcular el número de diagonales de un heptágono.

A) 5 B) 14 C) 13 D) 15 E) 7

RESOLUCIÓN:

* Si : $n=7$

* Entonces :

$$D=\frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow D=\frac{7(7-3)}{2}=\frac{7\times 4}{2}$$

$$\Rightarrow D=14 \text{ diagonales}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 04 :

Calcular el número de lados del polígono regular en el cual su ángulo interior es el cuádruple de su ángulo exterior.

A) 12 B) 8 C) 10 D) 9 E) 24

RESOLUCIÓN:

* Condición : $\measuredangle i=4\measuredangle E$

* Entonces :

$$\frac{180°(n-2)}{n}=4\left(\frac{360°}{n}\right) \Rightarrow n-2=8 \Rightarrow n=10$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 05 :

Calcular el número de diagonales de un polígono cuya suma de sus ángulos interiores es *900°*.

A) 16 B) 9 C) 4 D) 14 E) 24

RESOLUCIÓN :

* Calculando *"n"*

* Entonces :

$$S_i=180°(n-2) \Rightarrow 900°=180°(n-2) \Rightarrow 900°=180°n-360°$$

* Por lo tanto : $n=7$

* Calculando *"D"* :

$$D=\frac{n(n-3)}{2}=\frac{7(7-3)}{2}=14$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 06 :

¿Cuántos lados tienen el polígono en el cual la suma de sus ángulos internos más la suma de sus ángulos externos es *3780°*.

A) 10 B) 21 C) 20 D) 19 E) 5

RESOLUCIÓN:

* Por dato: $S+S_e=3780$

$$\Rightarrow 180°(n-2)+360°=3780°$$

$$180°n-360°+360°=3780°$$

$$\Rightarrow 180°n=3780° \Rightarrow n=21$$

$\rightarrow$ El polígono tiene *21* lados

RPTA: "B"

PROBLEMA 07 :

La suma de los ángulos interiores de un polígono es igual a *8* veces la suma de los ángulos exteriores. Calcular el número de diagonales de dicho polígono.

A) 135 B) 134 C) 200 D) 190 E) 50

RESOLUCIÓN :

* Dato : $S_i=8S_e$

$$\Rightarrow 180°(n-2)=8(360°)$$

* Simplificando : $n-2=16 \Rightarrow n=18$

* Ahora :

$$D=\frac{18(18-3)}{2}=135$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 08 :

En un polígono , al aumentar su número de lados en *3*, su número de diagonales aumenta en *36*. Calcular el número de lados de dicho polígono.

A) 13 B) 14 C) 15 D) 11 E) 12

RESOLUCIÓN:

#Lados	#Diagonales
n	$\frac{n(n-3)}{2}$
$n+3$	$\frac{(n+3)n}{2}$

* Entonces :

$$\frac{n(n+3)}{2}-\frac{n(n-3)}{2}=36$$

* Operando :

$$n[n+3-(n-3)]=72 \Rightarrow n(n+3-n+3)=72$$

$$\Rightarrow 6n=72 \Rightarrow n=12$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 09 :

Calcular el número de lados de un polígono , si la suma de las medidas de los ángulos interiores es el triple de la suma de las medidas de los ángulos exteriores.

A) 11 B)12 C) 6 D) 8 E) 14

RESOLUCIÓN :

* Dato : $S_i=3S_e$

$$\Rightarrow 180°(n-2)=3(360°) \Rightarrow n-2=3(2) \Rightarrow n=8$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 10 :

Si el número de los lados de un polígono aumenta en *3*, al numero de sus diagonales aumenta en *15*, ¿Cuál es el polígono?.

A) 10 B) 4 C) 5 D) 6 E) 12

RESOLUCIÓN:

#Lados	#Diagonales
n	$\frac{n(n-3)}{2}$
$n+3$	$\frac{(n+3)n}{2}$

* Entonces :

$$\frac{n(n+3)}{2}-\frac{n(n-3)}{2}=15 \Rightarrow \frac{n^2+3n}{2}-\frac{n^2-3}{2}=15$$

$$\Rightarrow \frac{n^2+3n+n^2+3}{2}=15 \Rightarrow 6n=30 \Rightarrow n=5$$

$\Rightarrow$ El polígono es pentágono

RPTA: "C"

PROBLEMA 11 :

Calcular la suma de ángulos internos del polígono que tiene *77* diagonales.

A) 1360° B) 2480° C) 2160° D)1940° E) 3600°

RESOLUCIÓN:

Por dato:

$$\frac{\overbrace{n(n-3)}^{\text{Número de diagonales}=77}}{2}=77 \Rightarrow n(n-3)=2\times 7\times 11$$

$$\Rightarrow n(n-3)=14\times 11 \Rightarrow n=14$$

Se pide : $S_i=180°(14-2)=2160°$

RPTA: "C"

PROBLEMA 12 :

¿Cuántas diagonales se puede trazar en un polígono regular, en el cual, el ángulo interior es *9* veces el ángulo exterior?

A) 120 B) 140 C) 210 D) 320 E) 170

RESOLUCIÓN:

* Por dato: $\sphericalangle i=9\sphericalangle e$

$$\frac{180°(n-2)}{n}=9\times\frac{360°}{n} \Rightarrow n-2=18 \Rightarrow n=20$$

* Se pide el número de diagonales, lo cual será:

$$\frac{n(n-3)}{2}=\frac{20(17)}{2}=170$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 13 :

Un polígono de *"n"* lados tiene *"x"* diagonales: otro polígono de *"2n"* lados tiene *"5x"* diagonales ¿cómo se llama el primer polígono?.

A) Nonágono o Eneágono
B) Eneágono o Nonágono
C) Octágono o Icoságono
D) Triángulo o Pentágono
E) Hexágono o Heptágono

RESOLUCIÓN:

* Por dato:

$$\frac{\frac{n(n-3)}{2}=x}{\frac{2n(2n-3)}{2}=5x} \quad \frac{n(2n-3)}{n-3}=5$$

"Dividiendo miembro a miembro"

$$\Rightarrow 4n-6=5n-15 \Rightarrow n=9$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 14 :

Si se disminuye en dos el número de lados de un polígono, el número de sus diagonales disminuye en *19*.

¿Cómo se llama aquel polígono?.

A) Nonágono B) Dodecágono C) Eneágono
D) Octágono E) Hexágono

RESOLUCIÓN:

	Número de lados	Números de diagonales	
Al inicio	n	$\frac{n(n-3)}{2}$	Disminuye en 19
Después	$n-2$	$\frac{(n-2)(n-2-3)}{2}$	

* Entonces :

$$\frac{n(n-3)}{2}-\frac{(n-2)(n-5)}{2}=19$$

* Al resolver, resulta: $n=12$

RPTA: "B"

PROBLEMA 15 :

Si se triplica el número de lados de un polígono, la suma de sus ángulos internos queda quintuplicada.

¿Cómo se llama dicho polígono?.

A) Octágono B) Decágono C) Cuadrilátero D) Triángulo E) Pentágono

RESOLUCIÓN:

	Al inicio	Después
Número de lados	n	$3n$
Suma de ángulos internos	$180°(n-2)$	$180°(3n-2)$

* Del enunciado :

$$180°(3n-2)=5[180°(n-2)]$$

* Resolviendo, resulta : $n=4$

* Luego se trata de un cuadrilátero

RPTA: "C"

PROBLEMA 16 :

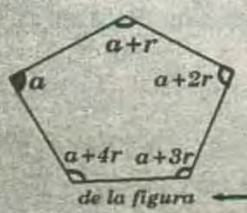
Los ángulos internos de un pentágono convexo, están en progresión aritmética. Calcular la medida de uno de dichos ángulos.

A) 108° B) 110° C) 112° D) 114° E) 116°

RESOLUCIÓN:

* Graficando adecuadamente:

* Pero en un pentágono:



$S_i=180°(5-3)$

$5a+10r=540°$

$\Rightarrow \underbrace{a+2r}=108°$ → Este es un ángulo

RPTA : "A"

PROBLEMA 17 :

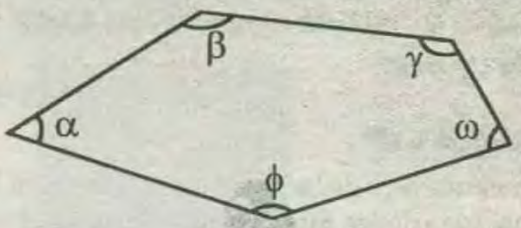
En la figura , calcular "ϕ", si :

* α: medida del ángulo interior de un hexágono regular.

* β: medida del ángulo interior de un pentágono, regular.

* γ: medida del ángulo exterior de un icoságono regular.

* ω: medida del ángulo interior de un dodecágono regular.



A) 120° B) 130° C) 105° D) 140° E) 144°

RESOLUCIÓN:

* Cálculo de "α": $\alpha=\frac{180°(6-2)}{6}=120°$

* Cálculo de "β": $\beta=\frac{180°(5-2)}{5}=108°$

* Cálculo de "γ": $\gamma=\frac{360°}{20}=18°$

* Cálculo de "ω": $\omega=\frac{180°(12-2)}{12}=150°$

* Luego :

$$\phi+\alpha+\theta+\gamma+\omega=180°(5-2)$$

$$\phi=540°-(120°+108°+18°+150°)\Rightarrow \phi=144°$$

RPTA: "E"

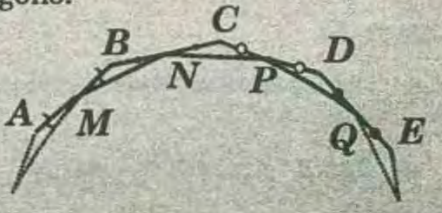
PROBLEMA 18 :

Determinar el número de lados de un polígono , si se sabe que el número máximo de segmentos que se forman al unir los puntos medios de los lados es **55**.

A) 7 B) 8 C) 10 D) 11 E) 12

RESOLUCIÓN:

* Si unimos los puntos medios de todos los lados del polígono **ABCDE...** de **"n"** lados , se formará otro polígono **MNPQ...** de **"n"** lados ; y si seguimos uniendo los puntos medios se formarán las diagonales de este último polígono.



Luego , el numero máximo de segmentos será :

$$n+\frac{n(n-3)}{2}=55 \Rightarrow 2n+n^2-3n=110$$

$\Rightarrow n^2-n=110$

* Resolviendo : $n=11$

RPTA: "D"

PROBLEMA 19 :

La suma de los ángulos internos de dos polígonos regulares difieren en $720°$ y sus ángulos centrales difieren en $7{,}5°$. Hallar el cociente mayor que la unidad entre los números de lados de ambos polígonos.

A) 2 *B)* $\frac{1}{2}$ *C)* $\frac{4}{3}$ *D)* $\frac{7}{4}$ *E)* $\frac{5}{2}$

RESOLUCIÓN:

* Por datos del problema, se tiene:

$$S_{i_1}-S_{i_2}=720°$$

$\Rightarrow 180°(n-2)-180°(m-2)=720°$.....*(I)*

* Además :

$$\measuredangle c_2-\measuredangle c_1=7{,}5°$$

$$\Rightarrow \frac{360°}{m}-\frac{360°}{n}=7{,}5°\text{.....(II)}$$

* De *(I)* :

$$180°n-360°-180°m+360°=720°$$

$\Rightarrow 180°(n-m)=720° \Rightarrow n-m=4 \Rightarrow n=m+4$.....*(III)*

* Reemplazando *(III)* en *(II)*:

$$\frac{360°}{m}-\frac{360°}{m+4}=7{,}5°$$

* Resolviendo: $m=12$ y $n=16$

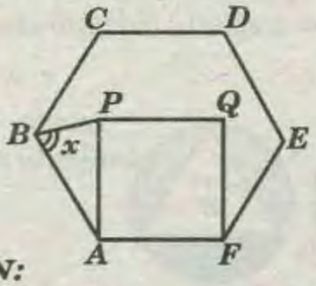
* Se pide: $\frac{n}{m}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 20 :

Hallar *"x"*, si: *ABCDEF* y *APQF* son polígonos regulares.

A) $60°$
B) $75°$
C) $80°$
D) $90°$
E) $72°$



RESOLUCIÓN:

* En el cuadrado *APQF*:

$$AP=AF \text{ y } m\measuredangle PAF=90°$$

* En el hexágono regular *ABCDEF;*

$$AB=AF \text{ y } m\measuredangle BAF=120°$$

ΔABP (isósceles) ya que:

$$AB=AP=AF$$

Luego : $m\measuredangle B=m\measuredangle P=x$

$$m\measuredangle B+m\measuredangle P+m\measuredangle A=180°$$

$\Rightarrow x+x+(120°-90°)=180° \Rightarrow 2x=150° \Rightarrow x=75°$

RPTA: "B"

PROBLEMA 21 :

¿Cuál o cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I) El interior de todo ángulo plano es una región convexa.

II) Una región triangular es convexa.

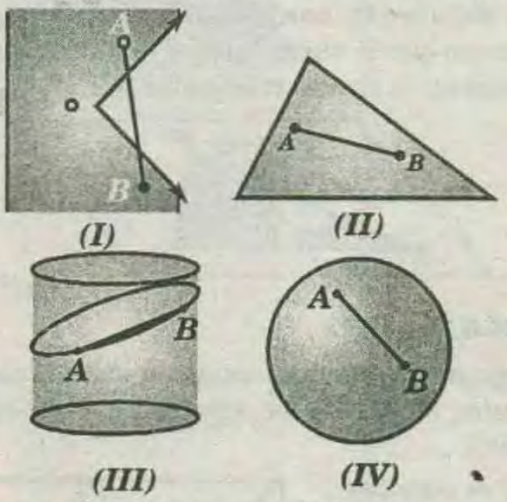
III) La superficie de un cilindro es región convexa.

IV) El interior de una circunferencia es una región convexa.

A) Todas *B) I, II y IV* *C) II y IV*
D) I y III *E) II, III y IV*

RESOLUCIÓN:

"Un conjunto de puntos se llama convexo, si el segmento determinado por dos puntos cualesquiera del conjunto, esta totalmente contenido en él".



Respecto a las afirmaciones dadas:

I) No todo ángulo plano es una región convexa.

II) Una región triangular es convexa.

III) La superficie de un cilindro no es región convexa.

IV) El interior de una circunferencia es una región convexa.

RPTA : "C"

PROBLEMA 22 :

Indicar el valor de verdad en las siguientes proposiciones:

I) La reunión de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo.

II) La intersección de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo.

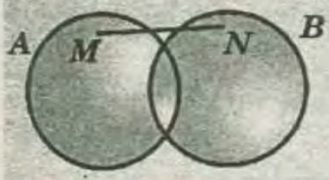
III) En todo región triangular al extraer un punto notable del triángulo se determina un conjunto

convexo.

A) FFF B) FFV C) FVF D) FVV E) VVV

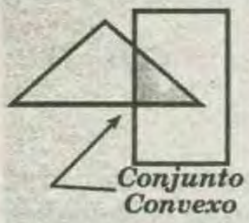
RESOLUCIÓN:

I) FALSA:



Siendo *"A"* y *"B"* conjuntos convexos, se aprecia que no necesariamente *"$A \cup B$"* es un conjunto convexo, ya que *MN* no esta contenido en la reunión de *A* y *B*.

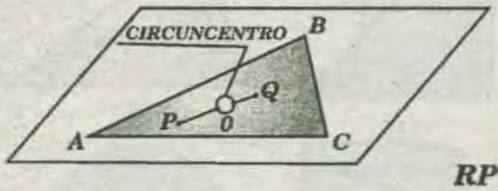
II) VERDADERA:



La intersección de 2 conjuntos convexos, necesariamente es un conjunto convexo.

III) FALSA:

"En el siguiente contraejemplo, el lugar del, circuncentro queda vació, luego *PQ* no esta contenido totalmente en la región triangular *ABC*".

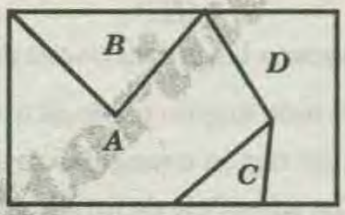


RPTA: "C"

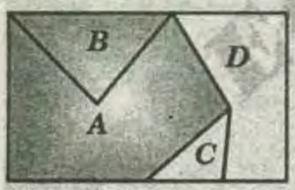
PROBLEMA 23 :

En la figura, las regiones están marcadas con letras mayúsculas ¿Cual de los siguientes enunciados es verdadero?.

A) $A \cup C$ es convexo
B) $B \cup C$ es convexo
C) $C \cup D$ es convexo
D) $A \cup B$ es convexo
E) $A \cup D$ es convexo



RESOLUCIÓN:



Analizando las alternativas, se deduce que: *"$A \cup B$"* origina un conjunto convexo.

RPTA: "D"

PROBLEMA 24 :

Indicar la proposición verdadera *(V)* o proposición falsa *(F)*.

I) En una región rectangular una diagonal separa a dicha región, en 3 subconjuntos de los cuales uno es no convexo.

II) Las particiones de un conjunto incluidas sus fronteras siempre son conjuntos convexos.

III) La intercepción entre una región circular y una región poligonal regular inscrita, siempre es un conjunto convexo.

IV) La diferencia entre una región circular y una región poligonal regular inscrita, siempre es un conjunto convexo.

A) VVFF B) FFVF C) FVVF D) VVVF

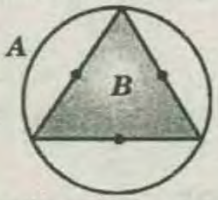
RESOLUCIÓN:

I) FALSA:

"La diagonal *AC* separa a dicha región, en 3 subconjuntos de puntos convexos".

II) FALSA:

III) VERDADERA:

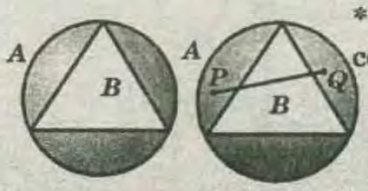


* Todo polígono regular inscrito en una circunferencia siempre es convexo.

Luego:

$A \cap B$ = conjunto convexo siempre.

IV) FALSA :



* Luego *"A–B"* no es un conjunto convexo.

RPTA: "B"

PROBLEMA 25 :

Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* en las proposiciones:

I) Tres circunferencias secantes determinan como mínimo 2 conjuntos.

II) El interior de un polígono equilátero de 12 lados es un conjunto, convexo.

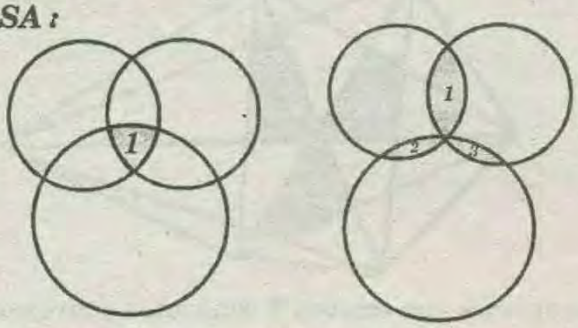
III) Una recta al interceptar a un ángulo determina

como máximo *4* regiones convexas.

A) VFV B) VVF C) FFV D) FVF

RESOLUCIÓN:

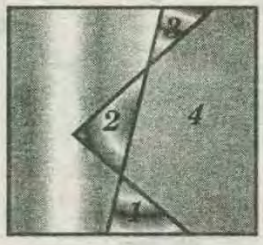
I) FALSA :



Como mínimo *1*, y como máximo *3* regiones

II) FALSA:

III) VERDADERA:

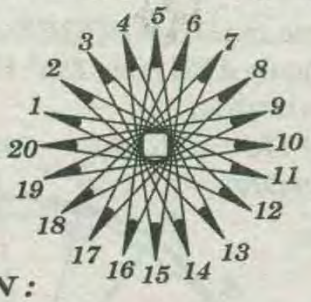


RPTA: "C"

PROBLEMA 26 :

En el polígono estrellado mostrado , calcular la suma de las medidas de los ángulos en las puntas.

A) 540°
B) 360°
C) 720°
D) 1080°
E) 540°



RESOLUCIÓN :

* De la figura : $n=20$ y $a=9$

* Ahora aplicamos la fórmula para la suma de los ángulos interiores de un polígono estrellado, es decir:

$$S=180°(n-2a) \Rightarrow S=180°[20-2(9)] \Rightarrow S=360°$$

RPTA: "B"

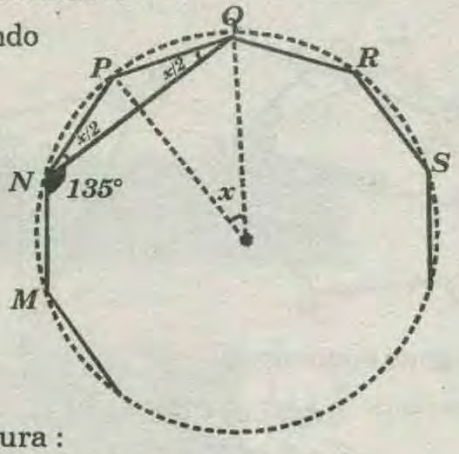
PROBLEMA 27 :

En un polígono regular *MNPQRS .... ;* $m\sphericalangle NQ=135°$. Halle la medida del ángulo central y el número de diagonales.

A) 30° y 54 B) 24° y 252 C) 40° y 27
D) 20 y 135 E) 36 y 35

RESOLUCIÓN:

* Graficando



* De la figura :

$$135°+\frac{x}{2}=\begin{matrix}\text{medida del}\\ \text{ángulo interno}\end{matrix}$$

$$\Rightarrow 135°+\frac{1}{2}\left(\frac{360°}{n}\right)=\frac{180°(n-2)}{n}$$

$\frac{360°}{n}$ → Ángulo central

* Resolviendo: $n=12$

* Se pide: $x=\frac{360°}{12}=30°$

Además: $N_D=\frac{12(12-3)}{2}=54$

RPTA: "A"

PROBLEMA 28 :

En un polígono convexo de n lados , desde $(n-5)$ lados consecutivos se han trazado $9n-10$ diagonales medias. Calcular el número total de diagonales medias.

A) 76 B) 152 C) 110 D) 132 E) 171

RESOLUCIÓN:

* Aplicamos:

$$\boxed{N_{D_m}=mn-\frac{m(m+1)}{2}} \; ; \; m=n-5$$

$$N_{D_m}=9n-10$$

$$\Rightarrow 9n-10=(n-5)n-\frac{(n-5)(n-5+1)}{2}$$

* Resolviendo : $n^2=19n \Rightarrow n=19$

* Se pide : $N_{D_{tm}}=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{19(19-1)}{2}=171$

RPTA: "E"

PROBLEMA 29 :

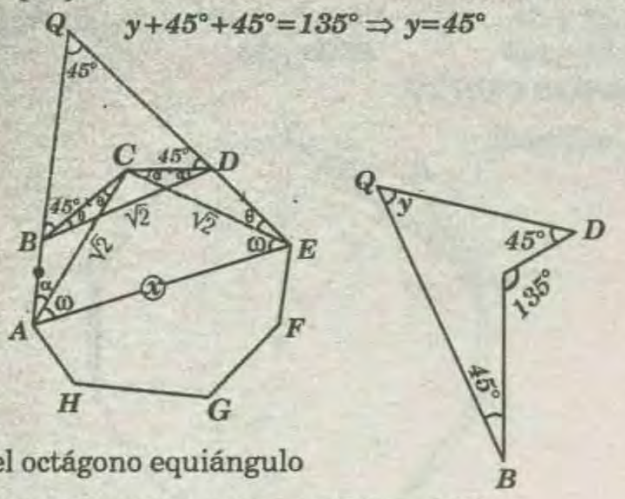
En un octágono equiángulo *ABCDEFGH* en el cual:

$AB=CD$; $BC=DE$ y $BD=\sqrt{2}$, hallar AE.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

RESOLUCIÓN:

* Por propiedad :



$y+45°+45°=135° \Rightarrow y=45°$

En el octágono equiángulo observamos que: $\triangle ABC \cong \triangle CDE \cong \triangle BCD$

En el $\triangle AQE$: $\Rightarrow AC=CE=BD=\sqrt{2}$

$\alpha+\theta+2\omega+45°=180°$

$\Rightarrow 45°+2\omega+45°=180°$

$\Rightarrow 2\omega=90° \Rightarrow \omega=45°$

* En consecuencia , el ACE es rectángulo isósceles, en el cual : $x=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

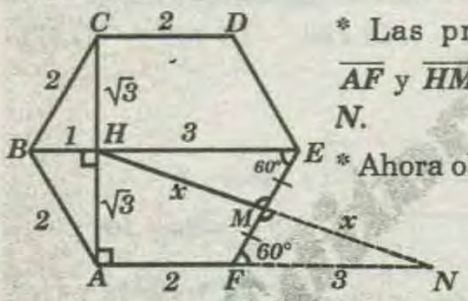
RPTA : "B"

PROBLEMA 30 :

Se tiene un hexágono regular $ABCDEF$ cuyo lado mide 2m; hallar la longitud del segmento que tiene por extremos al punto medio de $\overline{EF}$ y al punto de intersección de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$.

A) 3 B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{7}$ D) $\sqrt{11}$ E) $\sqrt{4}$

RESOLUCIÓN:



* Las prolongaciones de $\overline{AF}$ y $\overline{HM}$ se interceptan en N.

* Ahora observamos que:

$\triangle FMN \cong \triangle EMH$.....*(A.L.A)*

$\Rightarrow HM=MN=x$ y $HE=FN=3$

* En el $\triangle HAN$:

$$\sqrt{3}^2+5^2=(2x)^2 \Rightarrow x=\sqrt{7}$$

RPTA: "C"

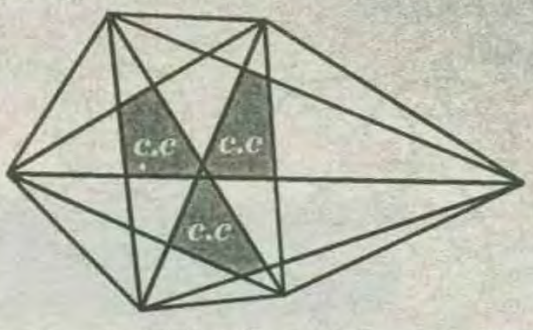
PROBLEMA 31 :

Se tiene un hexágono convexo, se traza sus diagonales determinándose regiones convexas. Encuentre el número máximo de conjunto convexos y disjuntos que existen cuyos bordes forman pentágonos.

A) 4 B) 3 C) 2 D) 0 E) 5

RESOLUCIÓN:

* Gráfico, según enunciado.



* Se aprecia que existen *3* conjuntos convexos.

RPTA: "B"

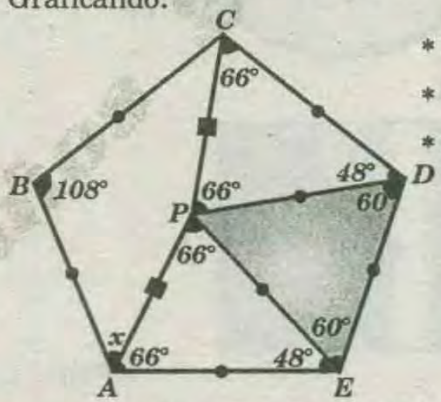
PROBLEMA 32 :

En el interior de un pentágono regular $ABCDE$ se ubica un punto P. Si $DP=AB$ y la $m\sphericalangle CPD=66°$, entonces la $m\sphericalangle PAB$ es :

A) 41° B) 40° C) 38° D) 55° E) 42°

RESOLUCIÓN:

* Graficando:



* ΔPCD: es isósceles
* ΔPDE : Equilátero
* ΔAPE : Isósceles

Luego: $x+66°=108° \Rightarrow x=42°$

RPTA : "E"

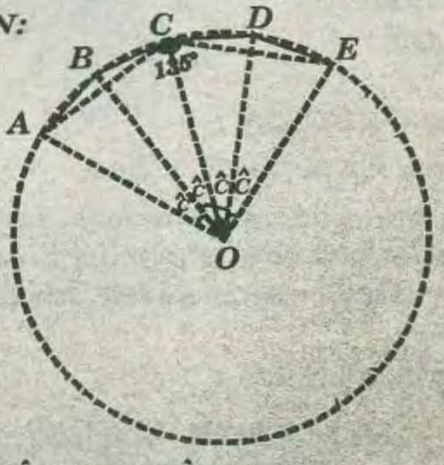
PROBLEMA 33 :

En un polígono regular $ABCDEF$..... de n lados , la medida del ángulo ACE mide $135°$. Calcular el número de diagonales medias.

A)100 B) 110 C) 120 D)105 E)136

RESOLUCIÓN:

* De la figura:



* Además: $4m\hat{C}=90° \Rightarrow m\hat{C}=22,5°$

$$m\hat{C}=\frac{360°}{n}\Rightarrow 22°,5=\frac{360°}{n}\Rightarrow n=16$$

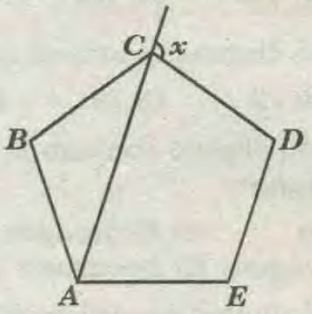
* Luego el número de diagonales medias será:

$$D_m=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{16\times 15}{2}=120$$

RPTA: "C"

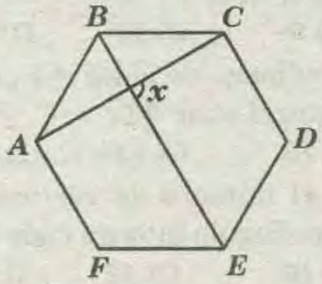
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 En la figura, **ABCDE** es un polígono regular. Hallar $\sphericalangle x$.



A) 108°
B) 105°
C) 112°
D) 115°
E) 106°

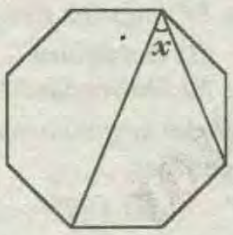
02 En la figura, **ABCDEF** es un polígono regular. Hallar $\sphericalangle x$.



A) 90°
B) 91°
C) 80°
D) 85°
E) 72°

03 En la figura, se tiene un octógono regular.

Hallar $\sphericalangle x$.



A) 36°
B) 45°
C) 32°
D) 60°
E) 30°

04 Hallar el perímetro de un hexágono regular, si su apotema mide $3\sqrt{3}$.

A) 42 B) 24 C) 48 D) 20 E) 36

05 ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos de un polígono regular de 18 lados?

A) 120° B) 160° C) 150° D) 145° E) 148°

06 Calcular la suma de ángulos interiores de un decágono.

A) 720° B) 1220° C) 1024° D) 540° E) 1440°

07 Calcular el número de diágonales de un heptágono.

A) 10 B) 20 C) 14 D) 17 E) 15

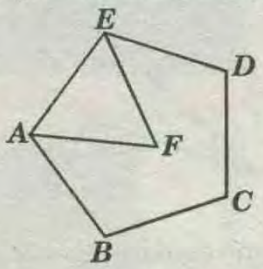
08 En que polígonos se cumple que la suma de los ángulos interiores, vértices y lados resulta 3280.

A) Icoságono B) Octágono C) Triángulo
D) Nonágono E) Pentágono

09 Calcular el número de diagonales de un polígono convexo, sabiendo que la suma de los ángulos internos es igual a 2340°.

A) 54 B) 72 C) 90 D) 110 E) 86

10 De la figura, calcular $m\sphericalangle FED$; si **ABCDE** es un pentágono regular y **AFE** es un triángulo equilátero.



A) 45°
B) 48°
C) 60°
D) 66°
E) 98°

11 ¿Cuál es el polígono que tiene 119 diagonales? Dar el número de lados.

A) 13 B) 18 C) 15 D) 20 E) 17

12 Se sabe que en un polígono convexo la suma de sus ángulos interiores es 540°. Con este dato se pide averiguar el número total de sus diagonales.

A) 6 B) 5 C) 7 D) 4 E) 8

13 La suma de los ángulos de cierto polígono regular excede a la suma de sus ángulos externos en 900° ¿cuántos lados tiene el polígono?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

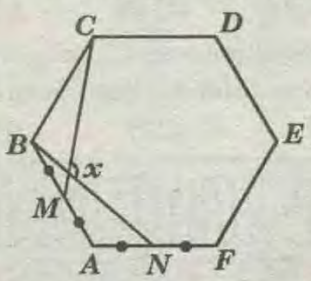
14 ¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuyo ángulo es $(p+15)$ veces el ángulo exterior? , además se sabe que el número de diagonales es $135p$.

A) 100 B) 90 C) 40 D) 48 E) 120

15 Calcular el número de lados de un polígono convexo, si se sabe que la suma de las medidas de sus ángulos internos es igual al séxtuplo de la suma de las medidas de sus ángulos externos.

A) 13 B) 14 C) 15 D) 12 E) 10

16 En la figura **ABCDEF** es un exágono regular. Calcular "x"



A) 90°
B) 105°
C) 120°
D) 150°
E) 144°

17 Se tienen dos polígonos convexos de modo que el número de lados de uno es el doble del otro. Si la diferencia entre los números de diagonales es 81, entonces el polígono de menor número de lados se llama:

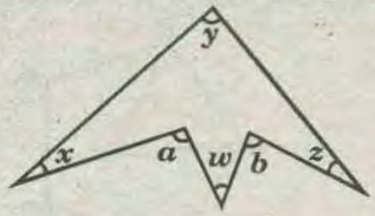
A) Hexágono B) Heptágono C) Octógno
D) Nonágono E) Decágono

(18) Calcular la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono convexo, si se sabe que desde *3* vértices consecutivos de dicho polígono, se han trazado *14* diagonales.

A) 900 B) 1980 C) 1800 D)1620 E) 1080

(19) En la figura, calcular $(a+b)$, si $x+y+z+w=200°$

A) 300°
B) 100°
C) 400°
D) 190°
E) 200°



(20) En un polígono equiángulo *ABCDE...*, se sabe que: el número total de diágonales es el triple de su número de lados; $BC=CD$ y $AB=BD$. Calcular la $m\sphericalangle ADE$.

A) 120° B) 80° C) 60° D) 40° E) 90°

TAREA DOMICILIARIA

(01) En un polígono regular *ABCDE...* las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ se cortan formando un ángulo de *135°*. Calcular el número total de diágonales del polígono.

A) 10 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

(02) Se tiene un decágono regular *ABCDEF....* Hallar la medida del menor ángulo que forman las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$.

A) 72° B) 36° C) 54° D)18° E) 9°

(03) ¿Cuál es el polígono cuyo número de diagonales es el doble del número de diagonales de otro polígono que tiene tres lados menos?

A) Pentágono B) Nonágono C) Icoságono
D) Decágono E) Dodécagono

(04) En un polígono regular *ABCDEF....* de *"n"* lados; la $m\sphericalangle ACE=135°$. Calcular su número de lados.

A) 8 B) 16 C) 24 D) 32 E) 30

(05) Cuántos lados tiene aquel polígono convexo si al quitarle un lado su total de diagonales disminuye en *7*.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 2 E) 9

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

(01) Calcular cuantas diagonales tiene un polígono de *18* lados.

A) 120 B) 126 C) 135 D) 138 E) 144

(02) Hallar la medida del ángulo interior de un polígono regular de *15* lados.

A) 144° B) 156° C) 140° D) 136° E) 162°

(03) Calcular el ángulo central de un polígono regular de *12* lados.

A) 20° B) 24° C) 28° D) 30° E) 32°

(04) ¿Cuánto suman el ángulo interior más el ángulo exterior de un endecágono regular?

A) 100° B) 200° C) 150° D) 160° E) 180°

(05) El ángulo central del icosángulo regular es de:

A) 18° B) 10° C) 20° D) 22° E) 15°

(06) ¿Cuántas diagonales tiene el octógono convexo?

A) 8 B) 12 C) 18 D) 32 E) 20

(07) ¿En qué polígono convexo la suma de ángulos internos es *1800°*?

A) Decágono B) Endecágono C) Dodecágono
D) Pentadecágono E) Eneágono

(08) Hallar el número de vértices del polígono convexo que tiene *44* diagonales.

A) 10 B) 9 C) 11 D) 12 E) 13

(09) Hallar el número de lados del polígono regular cuyo ángulo central mide *36°*.

A) 10 B) 12 C) 11 D) 9 E) 8

(10) Calcular el número de vértices del polígono equiángulo cuyo ángulo interno mide *160°*.

A) 20 B) 16 C) 18 D) 15 E) 22

(11) ¿En qué polígono convexo la suma de ángulos internos equivale a *14* ángulos rectos?

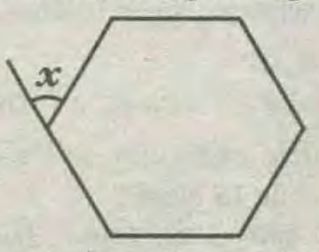
A) Nonágono B) Octógono C) Decágono
D) Endecágono E) Dodecágono

(12) Hallar la medida del ángulo interior de un polígono regular de *170* diagonales.

A) 144° B) 140° C) 162° D) 120° E) 156°

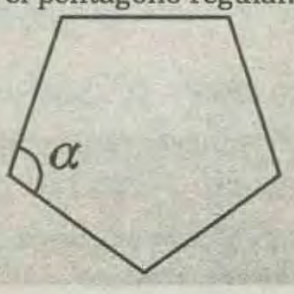
(13) Calcular *"x"*, en el hexágono regular.

A) 45°
B) 53°
C) 37°
D) 60°
E) 30°



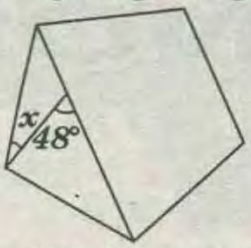
(14) Calcular "α" en el pentágono regular.

A) 120°
B) 115°
C) 72°
D) 100°
E) 108°



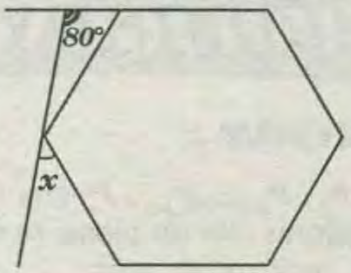
(15) Calcular *"x"*, en el pentágono regular.

A) 10°
B) 4°
C) 12°
D) 14°
E) 15°



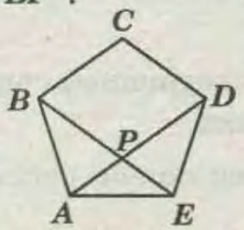
(16) Calcular *"x"*, en el hexágono regular.

A) 70°
B) 80°
C) 20°
D) 40°
E) 50°



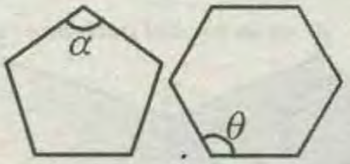
(17) Si *"ABCDE"* es un poligono regular de perímetro *30cm*. Hallar *"BP"*.

A) 5
B) 4
C) 7
D) 8
E) 6



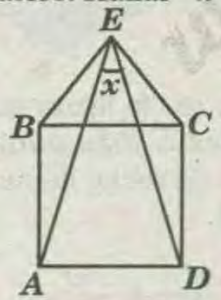
(18) La figura muestra dos polígonos regulares. Calcular "$\theta - \alpha$".

A) 16°
B) 18°
C) 20°
D) 12°
E) 15°



(19) Si *"ABCD"* es un cuadrado, *"BEC"* es un triángulo eǒuilátero. Hallar *"x"*.

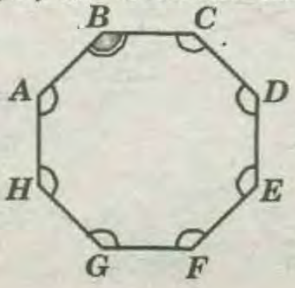
A) 20°
B) 24°
C) 30°
D) 32°
E) 45°



(20) En el octógono equiángulo mostrado:

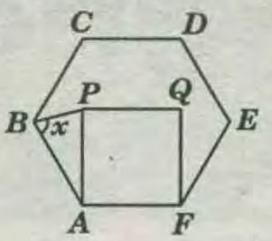
AB=2 ; BC=2√2 ; CD=1. Hallar *"AD"*.

A) 4
B) 3
C) 6
D) 5
E) 8



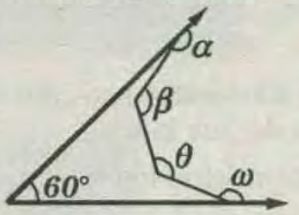
(21) Calcular *"x"*, si *ABCDEF* y *APQF* son polígonos regulares.

A) 60°
B) 80°
C) 75°
D) 50°
E) 67°30'



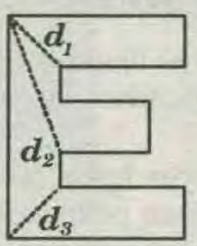
(22) En la figura, calcular: $\alpha+\beta+\theta+\omega$.

A) 450°
B) 500°
C) 550°
D) 600°
E) 650°



(23) ¿Cuántas diagonales faltan trazar en el polígono mostrado?

A) 54
B) 4
C) 6
D) 25
E) 51



(24) Si el número de lados de un polígono se duplica, entonces el número de diagonales aumenta en *18*, ¿cómo se llama el polígono?

A) Pentágono *B) Hexágono* *C) Octógono*
D) Nonágono *E) Cuadrilátero*

(25) ¿En qué polígono el número de diagonales es igual al triple del número de lados?

A) Hexágono *B) Nonágono*
C) Pentágono *D) Hexágono*

TAREA DOMICILIARIA

(01) ¿En qué polígono el número de diagonales es igual al cuádruple del número de lados?

A) Octógono *B) Heptágono* *C) Hexágono*
D) Endecágono *E) Decágono*

(02) ¿Cómo se llama el polígono cuyo número de lados es la mitad del número de diagonales?

A) Hexágono *B) Cuadrilátero* *C) Heptágono*
D) Pentágono *E) Octógono*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)A	2)A	3)B	4)E	5)B	6)E	7)C	8)A	9)C	10)D
11)E	12)B	13)B	14)B	15)B	16)C	17)C	18)E	19)E	20)E
01)B	02)A	03)E	04)B	05)E					

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)C	2)B	3)D	4)E	5)A	6)E	7)E	8)C	9)A	10)C
11)A	12)C	13)D	14)E	15)C	16)C	17)E	18)D	19)C	20)D
21)C	22)D	23)E	24)E	25)B	1)D	2)D			

POLIGONOS II

CAPITULO 14

OBJETIVOS :

* Conocer los conceptos fundamentales sobre polígonos.

* Reconocer a los polígonos , por el número , forma y distribución de sus lados.

* Conocer y demostrar los teoremas referentes a los polígonos .

INTRODUCCIÓN :

Un **polígono** es una figura geométrica limitada por segmentos consecutivos no alineados, llamados lados.

Los polígonos cuyos lados no están en el mismo plano, se denominan polígonos alabeados.

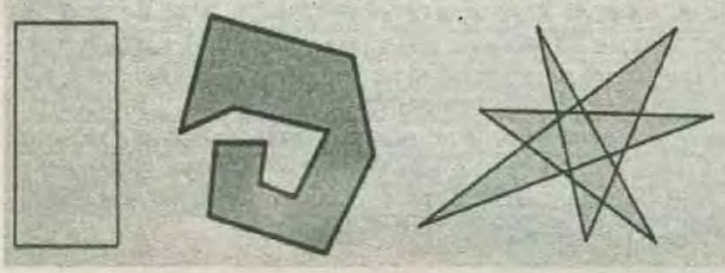
Existe la posibilidad de configurar polígonos en más de dos dimensiones. La generalización de un polígono en tres dimensiones se denomina poliedro, en cuatro dimensiones se llama polícoro, y en ***n*** dimensiones se denomina politopo.

Se denomina ***línea poligonal*** al conjunto ordenado de segmentos tales que, el extremo de uno de ellos coincide con el origen del segmento que le sigue. Un polígono está conformado por una línea poligonal cerrada.

Si analizanos la palabra ***polígono*** podríamos decir que proviene de dos raíces: ***poli*** que significa ***varios*** y ***gono*** que significa ***ángulo***, sin embargo, hoy aprenderás que dicha palabra encierra mucho más contenido de lo que te imaginas.

Para la construcción de algunos objetos que nos rodean se utilizan los polígonos regulares como estos dos balones de fútbol de ***32*** paños doce de los cuales tienen forma pentagonal y los veinte restantes formas hexagonal.

Si observas algunos seres vivos como la estrella de mar, tiene forma poligonal.



POLÍGONOS

DEFINICIÓN :

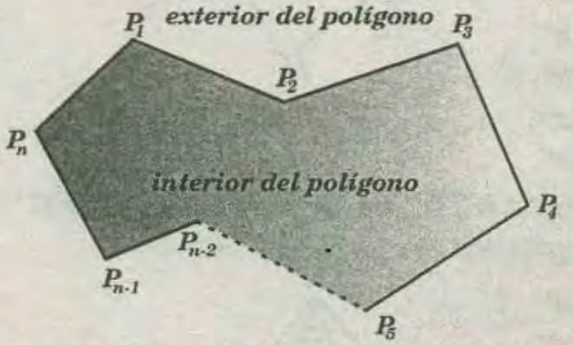
Sean P_1 , P_2 , P_3 ,.....,P_{n-1} , P_n una sucesión de «*n*» puntos distintos de un plano ($n<3$) y sean los *n* segmentos $\overline{P_1P_2}; \overline{P_2P_3}; \overline{P_3P_4}; .....; \overline{P_nP_1}$ tales que :

◆ Ningún par de segmentos se intersecan , excepto en sus extremos .

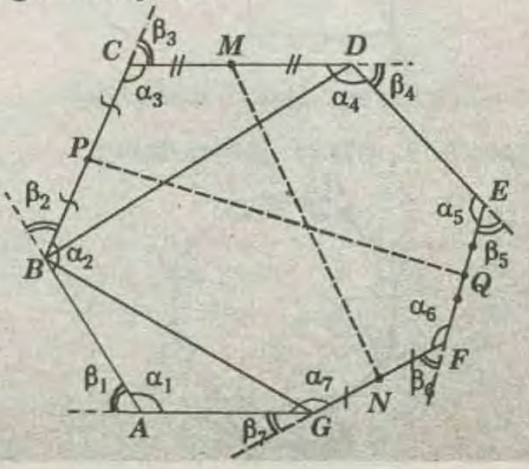
◆ Ningún par de segmentos con un exctremo común son colineales .

◆ En cada extremo común concurren solo dos segmentos .

Se dice entonces que la reunión de los *n* segmentos citados es un polígono .



Es decir un polígono es la figura geométrica , que se forma al unir tres o más puntos coplanares mediante segmentos de recta, de modo que limitan una región del plano.



ELEMENTOS :

* Vértice : *A, B, C, ...G*

* Lados : $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \ldots\ldots, \overline{GA}$

* Ángulos Interiores. : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots\ldots$

* Ángulos Exteriores. : $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\ldots\ldots$

* Diagonales : $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \ldots\ldots$

* Diagonales Medias : $\overline{MN}, \overline{MP}, \overline{MQ}, \ldots\ldots$

* Perímetro $2p = AB+BC+CD+DE+\ldots\ldots\ldots$

REGIÓN POLIGONAL :

Es la unión del polígono y su interior.

El polígono según la región que limita, se denomina polígono de región convexa y polígono de región no convexa.

NOTAS :

♠ Un polígono convexo , es interceptado en solo 2 puntos, por cualquier recta secante a dicho polígono.

♠ Un polígono no convexo, es interceptado en más de dos puntos por cualquier recta secante a dicho polígono.

♠ Todo polígono que limita una región convexa, en forma práctica le denominamos polígono convexo.

CLASIFICACIÓN DE POLIGONOS

I)POR LA REGIÓN QUE LIMITAN:

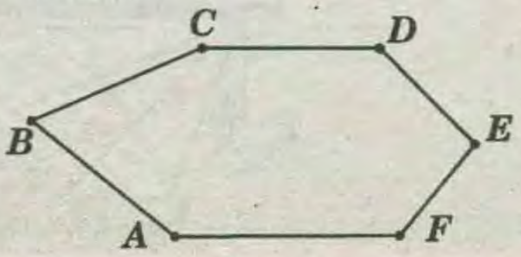
I-1) POLÍGONO CONVEXO :

Cuando todos sus ángulos son convexos.

$(0° < \measuredangle \text{convexo} < 180°)$.

EJEMPLO:

polígono *ABCDEF*

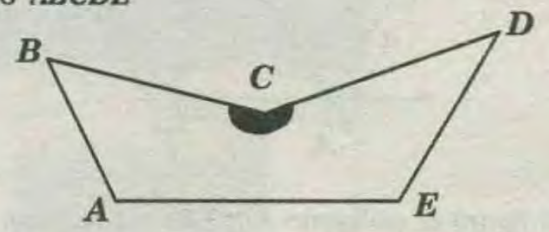


I-2) POLÍGONO NO CONVEXO (CÓNCAVO):

Cuando tiene un ángulo interior no convexo por lo menos ($0° < \measuredangle$ no convexo $< 360°$) ; una forma práctica es de trazar una recta y si la corta en más de dos puntos , entonces es un polígono cóncavo .

EJEMPLO:

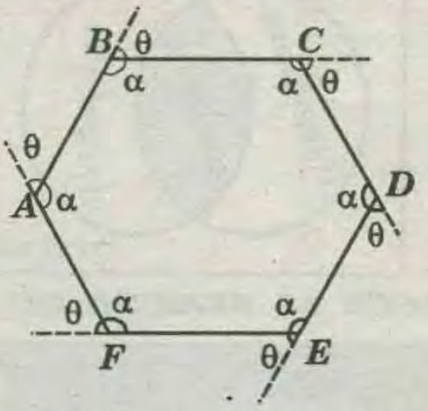
polígono *ABCDE*



II) POR LA MEDIDA DE SUS LADOS Y ANGULOS

II-1)POLÍGONO EQUIÁNGULO :

Es aquel polígono cuyos ángulos internos son de igual medida ; dicho polígono siempre es convexo. Además sus ángulos externos son de igual medida.



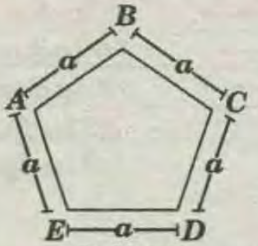
* En la figura el polígono *ABCDEF* , es equiángulo.

α : medida de sus ángulos interiores :

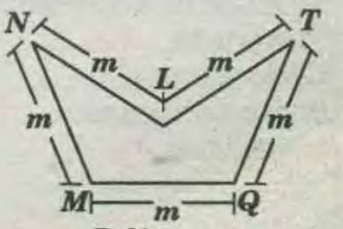
θ : medida de sus ángulos exteriores.

II-2)POLÍGONO EQUILÁTERO :

Es aquel polígono cuyos lados son de igual medida.



Polígono Convexo

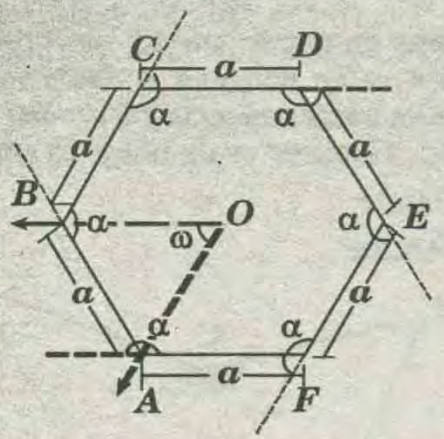


Polígono no Convexo o Concavo

En la figuras los polígonos *ABCDE* y *MNLTQ* son equiláteros.

II-3) POLÍGONO REGULAR :

Es aquel polígono equiángulo y equilátero a la vez.

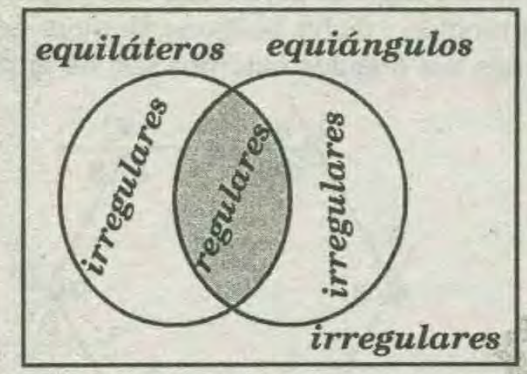


En la figura el polígono *ABCDEF* es regular.

O : Centro de polígono regular (punto de concurrencia de las mediatrices de los lados).

POLIGONO IRREGULAR :

Será cuando no es regular



III) SEGÚN EL NUMERO DE LADOS :

Nombre	Números de Lados
Triángulo	⟶ 3 lados
Cuadrilátero	⟶ 4 lados
Pentágono	⟶ 5 lados
Exágono	⟶ 6 lados
Heptágono	⟶ 7 lados
Octágono	⟶ 8 lados
Nonágono ó eneágono	⟶ 9 lados
Decágono	⟶ 10 lados
Endecágono	⟶ 11 lados
Pentadecágono	⟶ 15 lados
Icoságono	20 lados
. . . . .	
Polígono de n lados	⟶ n lados

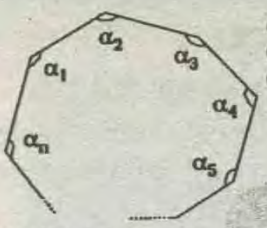
PROPIEDADES DEL POLIGONO

POSTULADO :

En todo polígono el número de vértices es igual al número de lados , e igual al número de ángulos internos , externos o centrales.

$$N°vértices = N°lados = N°de\ ángulos\ interiores = n$$

I)SUMA DE MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS INTERNOS (S_i):



"En la figura el polígono es convexo de "n" lados"

* Entonces :

$$S_i = \alpha_1 + \alpha_2 + ... \alpha_n = 180°(n-2)$$

También se cumple en polígonos no convexos

TEOREMA 1 :

En todo polígono convexo la suma de las medidas angulares internas es igual a *180°* multiplicado por el número de lados del polígono menos *2*.

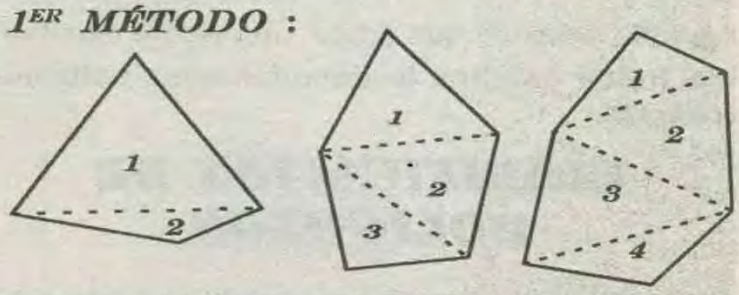
$$\sum n\sphericalangle s = 180°\ (n-2)$$

para todo $K \leq n$

n : número de lados

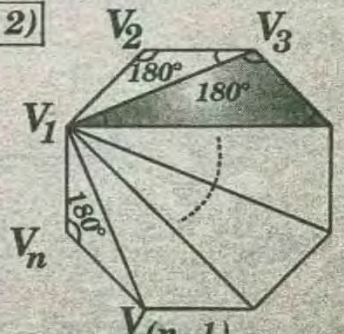
DEMOSTRACIÓN :

1ER MÉTODO :



En el cuadrilátero se forma *2* triángulos , en el pentágono *3* triángulos , en le hexágono *4* triángulos , es decir si el polígono tiene *«n»* lados se formarán *(n–2)* triángulos y como cada triángulo la suma de las medidas de sus ángulos internos es *180°* , luego:

$$\sum n\sphericalangle s = 180°\ (n-2)$$



2DO MÉTODO :

Como en todo polígono , desde un vértice se pueden trazar como máximo $n-3$ diagonales (n=número de lados del polígono). Si se forma $n-2$ triángulos y la suma de las medidas angulares en un triángulo es $180°$, concluimos que la suma de las medidas angulares en un polígono será igual a . $180°$ multiplicado por el número de triángulos que forman las diagonales.

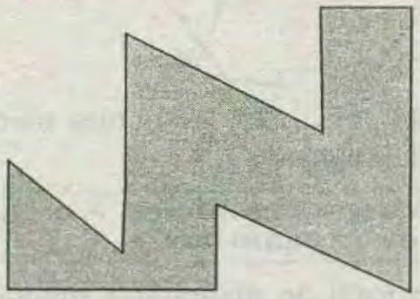
$\sum m\sphericalangle s = 180° \times$ (*número* de triángulos)

El número de triángulos es igual al número de diagonales trazados desde un vértice más 1 .

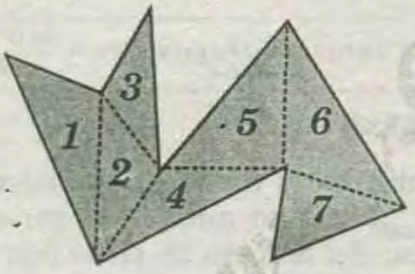
$$\#\triangle s = (n-3)+1 = n-2$$

$$\boxed{\sum m\sphericalangle s = 180°(n-2)}$$

Ésta fórmula para la suma de las medidas de los ángulos internos , también se para *POLÍGONOS CÓNCAVOS*.



EJEMPLO :

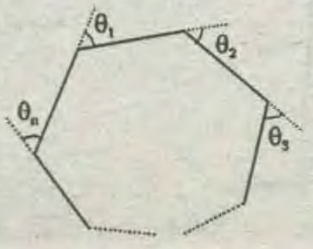


$S_i = 180°(9-2) \rightarrow S_i = 180°(7) \Rightarrow S_i = 126°$

NOTA :

El número de ángulos rectos a que equivale la suma de las medidas de las ángulos internos de un polígono es : $2(n-2)$

II) SUMA DE MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS EXTERNOS DE UN POLÍGONO CONVEXO TOMADOS UNO POR VÉRTICE (S_e) :



"En la figura se muestra un polígono convexo de "n" lados"

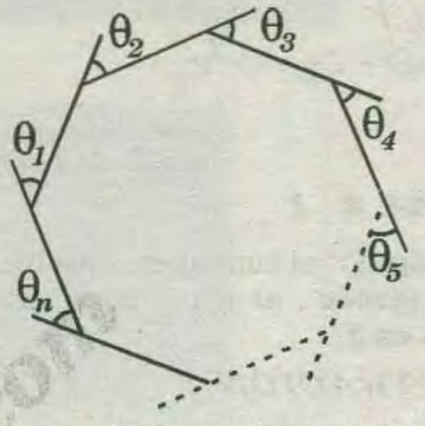
* Entonces : $\boxed{S_e = 360°}$

(***Solo para polígonos convexos***)

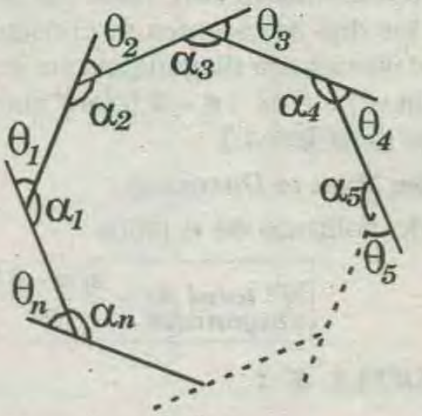
TEOREMA 2 :

La suma de las medidas de los ángulos externos de un polígono convexo de «*n*» lados tomados uno por vértice (S_e) es : $S_e = 360°$

$$\boxed{S_e = \theta_1+\theta_2+\theta_3+.....+\theta_n = 360°}$$



DEMOSTRACIÓN :



* De la figura :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1+\theta_1 = 180° \\ \alpha_2+\theta_2 = 180° \\ \alpha_3+\theta_3 = 180° \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ \alpha_n+\theta_n = 180° \end{array}\right\} +$$

* Sumando todo:

$$\underbrace{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+.....+\alpha_n}_{180°(n-2)} + \underbrace{\theta_1+\theta_2+\theta_3+.....+\theta_n}_{S_e} = 180°n$$

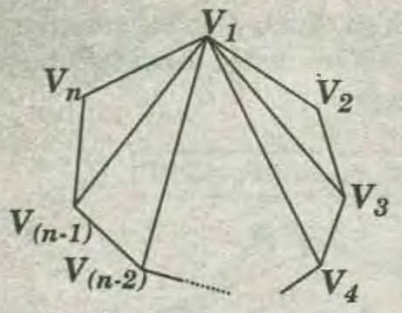
$$\Rightarrow 180°(n-2)+S_e = 180°n$$

$$\Rightarrow 180°n - 360° + S_e = 180°n$$

$$\Rightarrow \boxed{S_e = 360°} .....L.q.q.d$$

III) NÚMERO DE DIAGONALES DE UN POLÍGONO :

a) Número de Diagonales Trazadas Desde un Vértice:



"Polígono de "n" lados"

$$N°\ diagonales = n-3 \quad \text{de 1 vértice}$$

TEOREMA 3 :

En todo polígono , el número de diagonales trazadas desde un vértice , es igual al número de lados disminuido en *3* .

DEMOSTRACIÓN :

* De la figura anterior se puede apreciar que un vértice puede unirse con todos los demás vértices , menos los dos adyacentes ni consigo mismo , con lo que el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice es : $n-3$ (claro que se trata de un polígono de n lados)

b) Número Total de Diagonales :

* En todo polígono de n lados

$$N°\ total\ de\ diagonales = \frac{n(n-3)}{2}$$

TEOREMA 4 :

En todo polígono , el número total de diagonales $(\#_D)$ que se pueden trazar es igual al semiproducto del número de lados con el número de lados disminuido en tres .

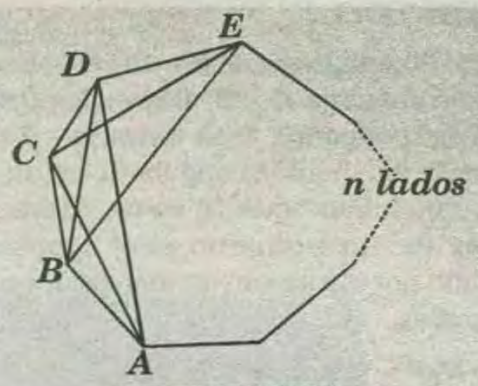
$$\#_D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Donde n es el número de lados .

DEMOSTRACIÓN :

* En la demostración anterior, hemos deducido que desde un vértice se pueden trazar $(n-3)$ diagonales, y como el polígono tiene n vértices, entonces $\#_D = n(n-3)$. Sin embargo, en la figura.

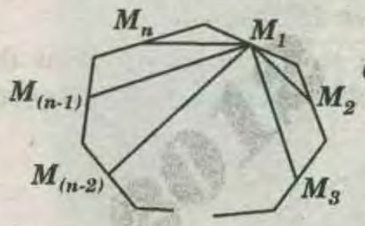
apreciamos que $\overline{CE}$ es diagonal y que es posible trazarlo de C a E o de E a C , lo cual indicaría que al contar las diagonales, se cuentan dos veces. De esta manera, el número total de diagonales es la mitad de $n(n-3)$.



$$\#_D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Donde: n es el número de lados .

c) Número de Diagonales Medias de un Polígono



"polígono de "n" lados"

Sean M_1, M_2, M_3,..... M_n los puntos medios de los lados del polígono.

$$N°diagonales\ medias\ de\ un\ punto\ medio = n-1$$

d) Número total de diagonales medias en todo polígono de n lados

$$N°total\ de\ diagonales\ medias = \frac{n(n-1)}{2}$$

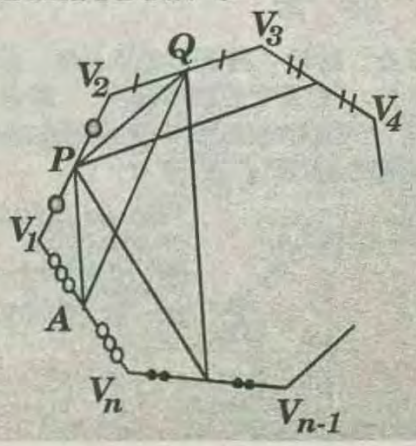
TEOREMA 5 :

En todo polígono el número total de diagonales medias $(\#_{DM})$ que se pueden trazar es igual al semiproducto del número de lados con el número de lados disminuido en *1* .

$$\#_{DM} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Donde n es el número de lados

DEMOSTRACIÓN :



* Como el número de diagonales medias que se pueden trazar desde un vértice es : $n-1$

Además el número de lados es igual al número de puntos medios , entonces $n(n-1)$, pero podemos apreciar de la figura que la diagonal media QA se ha podido trazar de Q a A o de A a Q, es decir, que toda la diagonal media ha sido contada dos veces, por lo cual el número total de diagonales medias es la mitad de $n(n-1)$.

$$\boxed{\#_{DM} = \frac{n(n-1)}{2}}$$

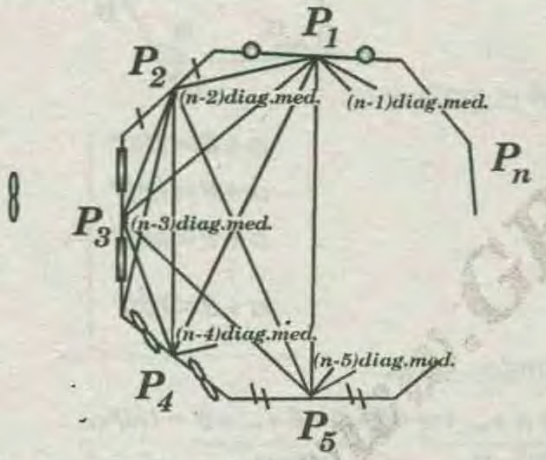
TEOREMA 6 :

En todo polígono de n lados, el número de diagonales medias que se pueden trazar desde K puntos medios respecto a lados consecutivos $(\# DM^n_{K.\ell.c})$ está dado por la siguiente expresión:

$$\boxed{\# DM^n_K = (n)(K) - \frac{(K)(K+1)}{2}}$$

para todo $K \leq TI$

DEMOSTRACIÓN :



Sean $P_1; P_2; P_3; P_4 ..... P_n$ los puntos medios de los lados del polígonos de n lados.

* Como el número de diagonales medias que se pueden trazar desde un vértice es : $n-1$. Entonces

Desde P_1 se trazan $(n-1)$ diagonales medias.

Desde P_2 se deberían trazar $(n-1)$ diagonales medias pero la diagonal media $\overline{P_2P_1}$ ya ha sido trazada desde P_1.

Dado que desde P_2 se trazan $(n-2)$ diagonales medias, desde P_3 se deberían trazar $(n-1)$ diagonales medias. No obstante, las diagonales medias $\overline{P_3P_1}$ y $\overline{P_3P_2}$ ya han sido trazadas desde $\overline{P_1P_2}$ respectivamente .

Entonces desde P_3 se trazan $(n-3)$ diagonales medias en forma análoga:

Desde P_4 se trazan $(n-4)$ diagonales medias

Desde P_5 se trazan $(n-5)$ diagonales medias

Desde P_K se trazan $(n-K)$ diagonales medias

$$\rightarrow \#DM^n_{K.\ell.c} = n-1+n-2+n-3+n-+...+n-K$$

$$\Rightarrow \#DM^n_{K.\ell.c} = n_K + (1+2+3+4+...+K)$$

$$\Rightarrow \boxed{\#DM^n_{K.\ell.c} = (n)(K) - \frac{K(K+1)}{2}}$$

para todo $K \leq n$

TEOREMA 7 :

NÚMERO DE DIAGONALES PARCIALES:

El número de diagonales trazadas desde «v» vértices consecutivos en un polígono de «n» lados.

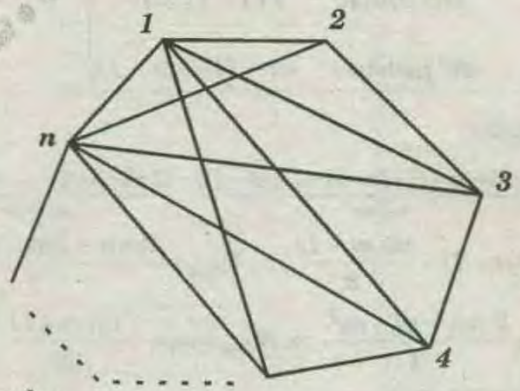
$$\#_D = vn - \frac{(v+1)(v+2)}{2}$$

$\#_D$ = Número de diagonales parciales

n = Número de lados

v = Número de vértices del cual se quiere trazar las diagonales.

DEMOSTRACIÓN :



Analizando:

Número de diagonales

$$\left.\begin{array}{ll} 1° \text{ vértice :} & (n-3) \\ 2° \text{ vértice :} & (n-3) \\ 3° \text{ vértice :} & (n-3)-1 \\ 4° \text{ vértice :} & (n-3)-2 \\ \vdots & \vdots \\ v° \text{ vértices :} & (n-3)-(v-2) \end{array}\right\} +$$

* Sumando :

$$\#_D = \underbrace{[(n-3)+(n-3)+.....+(n-3)]}_{v \text{ veces}} - \underbrace{[1+2+3+.....+(v-2)]}_{(v-2)(v-1)/2}$$

$$\Rightarrow \#_D = \frac{(n-3)v-(v-2)(v-1)}{2} \Rightarrow \#_D = \frac{2nv-6v-v^2+3v-2}{2}$$

$$\Rightarrow \#_D = \frac{2nv-v^2-3v-2}{2} \Rightarrow \#_D = nv - \frac{(v^2+3v+2)}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\#_D = vn - \frac{(v+1)(v+2)}{2}}$$

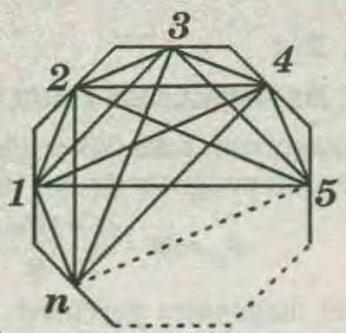
TEOREMA 8 :

NÚMERO DE DIAGONALES MEDIAS PARCIALES

Número de diagonales medias trazadas desde los «*m*» primeros lados consecutivos en un polígono de «*n*» lados.

$$\#_{Dm}=mn-\frac{m(m+1)}{2}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Analízando:

$$\left.\begin{array}{ll} 1er\ punto: & (n-1) \\ 2do\ punto: & (n-1)-1 \\ 3er\ punto: & (n-1)-2 \\ 4to\ punto: & (11-1)-3 \\ \vdots & \vdots \\ m°\ punto: & (n-1)-(m-1) \end{array}\right\}+$$

* Sumando:

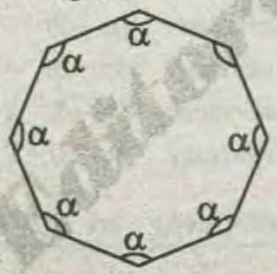
$$\#_{Dm}=\underbrace{\{(n-1)+(n-1)+(n-1)+...+(n-1)\}}_{m\ veces}-\underbrace{\{1+2+3+4+.....+(m-1)\}}_{(m-1)m/2}$$

$$\#_{Dm}=m(n-1)-\frac{m(m-1)}{2}\Rightarrow \#_{Dm}=\frac{2mn-2m-m^2+m}{2}$$

$$\Rightarrow \#_{Dm}=\frac{2mn-m-m^2}{2}\Rightarrow \boxed{\#_{Dm}=mn-\frac{m(m+1)}{2}}$$

TEOREMA 9 :

Medida de un ángulo interior en polígonos equiángulos.



En la figura se muestra un polígono equiángulo de «*n*» lados, «α» es la medida de un ángulo interior, cumpliéndose.

$$\boxed{\alpha=\frac{180°(n-2)}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN:

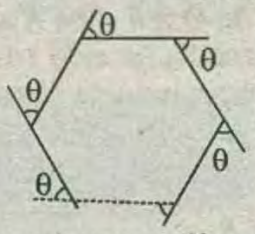
* Sumando todas las medidas iguales de los ángulos interiores del polígono equiángulo de «*n*» lados.

Así: $\underbrace{\alpha+\alpha+\alpha+.....+\alpha}_{n\ veces}=180°(n-2)$

$$\Rightarrow \alpha=180°(n-2)\Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{180°(n-2)}{2}}$$

TEOREMA 10 :

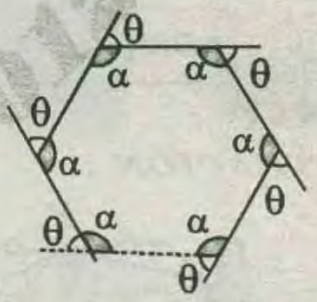
Medida de un ángulo exterior en polígonos equiángulos.



En la figura se muestra un polígono equiángulo de «*n*» lados. «θ» es la medida de un ángulo exterior, cumpliéndose:

$$\boxed{\theta=\frac{360°}{n}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Según el gráfico:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\theta=180° \\ \alpha+\theta=180° \\ \alpha+\theta=180° \\ \vdots \\ \alpha+\theta=180° \end{array}\right\}+$$

* sumando:

$$\underbrace{\alpha+\alpha+\alpha+...+\alpha}_{180°(n-2)}+\underbrace{\theta+\theta+\theta+...+\theta}_{n\ veces}=180°n$$

$$\Rightarrow 180°(n-2)+n\theta=180°n\Rightarrow 180°n-360°+n\theta=180°$$

$$\Rightarrow n\theta=360°\Rightarrow \boxed{\theta=\frac{360°}{n}}$$

PROPIEDADES ADICIONALES

PROPIEDAD 1 :

El número total de diagonales trazadas desde los vértices ***no consecutivos*** en un polígono cuyo número de lados ***par*** es :

$$\boxed{\#_D=\frac{n(3n-10)}{8}}$$

PROPIEDAD 2 :

El número total de diagonales trazadas desde los vértices ***no consecutivos*** en un polígono cuyo número de lados ***impar*** es :

$$\#_D=\frac{3(n-1)(n-3)}{8}$$

PROPIEDAD 3 :

El número total de diagonales trazadas desde *V* vértices ***no consecutivos*** en un polígono cuyo número de lados ***impar*** es :

$$\#_D=Vn-\frac{V(V-5)}{2}$$

PROPIEDAD 4 :

El número total de diagonales medias trazadas desde los puntos medios ***no consecutivos*** en un polígono cuyo número de lados ***impar*** es :

$$\#_D=\frac{(3n-1)(n-1)}{8}$$

PROPIEDAD 5 :

El número total de diagonales medias trazadas desde los *m* puntos medios ***no consecutivos*** en un polígono cuyo número de lados ***par*** es :

$$\#_D=\frac{n(3n-2)}{8}$$

PROPIEDAD 6 :

El número total de diagonales medias trazadas desde los *m* puntos medios ***no consecutivos*** en un polígono cuyo número de lados *n* es :

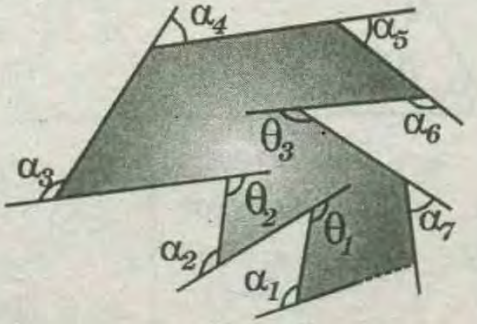
$$\#_D=mn-\frac{m(m+1)}{2}$$

PROPIEDAD 7 :

El número máximo de ángulos exteriores obtusos en un polígono convexo es *3*.

PROPIEDAD 8 :

En todo polígono no convexo, se cumple que la suma de las medidas de los ángulos externos que se ubican fuera del polígono, es igual a la suma de las medidas de los ángulos externos que se ubican dentro del polígono no convexo aumentado en *360°*.



$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+.....=360°+\theta_1+\theta_2+...$$

PROPIEDAD 8 :

En todo polígono convexo si el número de lados aumenta entonces el número total de diagonales aumenta

PROPIEDAD 9 :

El número de condiciones para que dos polígonos de *n* lados cada uno sean congruentes es ***2n – 3***

PROPIEDAD 10 :

El número de condiciones para que dos polígonos de *n* lados cada uno sean semejantes es ***2n - 4***

PROPIEDAD 11 :

En todo polígono convexo se cumple que el número de lados más el número de diagonales totales es igual al número de diagonales medias totales .

! RESUMEN :

1	*Suma de ángulos internos*	$180°\,(n-2)$
2	*Suma de ángulos externos (Polígono Convexo)*	$360°$
3	*Número total de diagonales*	$\frac{n(n-3)}{2}$
4	*Diagonales de un solo vértice*	$(n-3)$
5	*Diagonales medias*	$\frac{n(n-1)}{2}$
6	*Diagonales de "V" vértices: consecutivos*	$nV-\frac{(V+1)(V+2)}{2}$

POLÍGONOS REGULARES O EQUIÁNGULOS

7	*Un ángulo interno*	$\frac{180°(n-2)}{n}$
8	*Un ángulo externo*	$\frac{360°}{n}$

POLIGONOS REGULARES:

9	*Un ángulo central*	$\frac{360°}{n}$

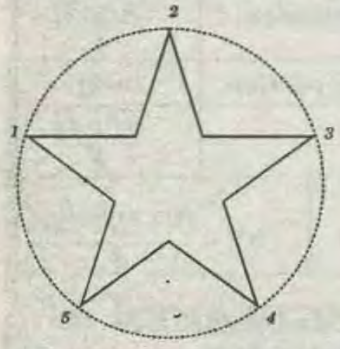
Donde ***"n"*** representa en número de :

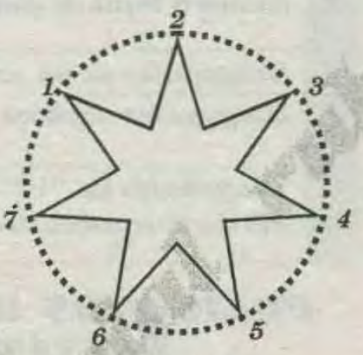
* Lados
* Vértices
* Ángulos internos
* Ángulos externos
* Ángulos centrales

POLÍGONOS ESTRELLADOS

Si al dividir una circunferencia en partes iguales unimos los puntos de división de dos en dos, de tres en tres, etc. y al cerrarse la poligonal hemos recorrido la circunferencia un número entero de veces, obtenemos un polígono regular estrellado. Puede probarse que para obtener un polígono regular estrellado de n lados (la circunferencia estará dividida en n partes iguales) uniendo las divisiones de a en a, es necesario (y suficiente) que a y n sean primos. Como unir divisiones de a en a es igual que dividirlas de $n-a$ en $n-a$ (es decir de a en a en sentido contrario), se podrán construir polígonos estrellados considerando los números menores que $n/2$, que sean primos con n.

El número primo con **5** menor que **5/2** es **2**; podemos construir el pentágono estrellado uniendo las divisiones de dos en dos. Obtenemos de esta forma el más popular de los polígonos estrellados y, posiblemente, el emblema de la escuela pitagórica. En él el número áureo aparece por doquier. No existen polígonos estrellados de **6** lados, ya que no existe ningún número primo con **6** menor que **6/2**.





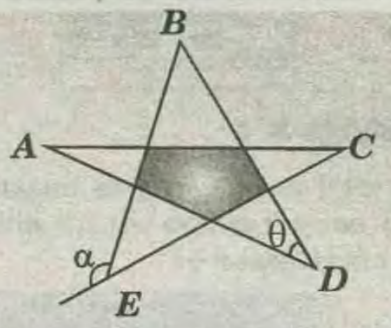
Existen dos números primos con **7** menores que **7/2**, el **2** y el **3**. Podemos, por tanto, construir dos heptágonos regulares estrellados uniendo las divisiones de **2** en **2** y otro de **3** en **3**.

3 es el único número primo con **8** menor que **8/2**. Uniendo las divisiones de **3** en **3** obtenemos el octógono regular estrellado.

2 y **4** son primos con **9** menores que **9/2**. Podemos construir dos polígonos regulares estrellados de **9** lados uniendo las divisiones de **2** en **2** y de **4** en **4**.

ESTRELLA

Una estrella se origina al prolongar los lados de un polígono convexo. Las estrellas de cinco lados, es el menor de todas las estrellas existentes.



ELEMENTOS :

Lados: $\overline{AC}$; $\overline{CE}$; $\overline{EB}$; $\overline{BD}$ y $\overline{DA}$

Vértices: **A; B; C; D** y **E** (puntas)

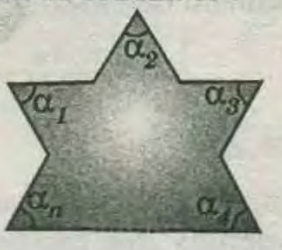
α : Medida de un ángulo exterior .

θ : Medida de ángulo interior .

TEOREMAS SOBRE ESTRELLAS

TEOREMA 1 :

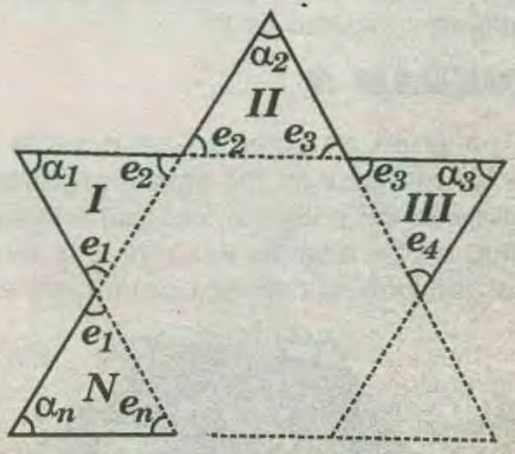
La suma de las medidas de los ángulos interiores en las puntas de toda estrella es :



$$S_i = 180°(n-4)$$

Donde : n es el número de lados del polígono convexo que dio origen a la estrella.

DEMOSTRACIÓN :



*En el I : $\alpha_1 + e_1 + e_2 = 180°$

*En el II : $\alpha_2 + e_2 + e_3 = 180°$

*En el III : $\alpha_3 + e_3 + e_4 = 180°$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

*En el N : $\alpha_n + e_1 + e_n = 180°$

$+$

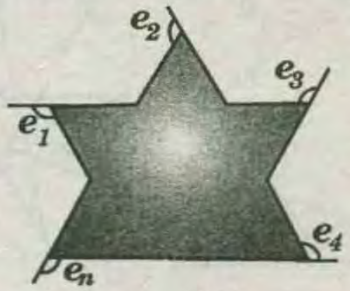
Sumando:

$$\underbrace{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+.....+\alpha_n}_{S_i}+2\underbrace{(e_1+e_2+e_3+.....+e_n)}_{360°}=180°n$$

$$\Rightarrow S_i+2(360°)=180°n \Rightarrow \boxed{S_i=180°(n-4)}$$

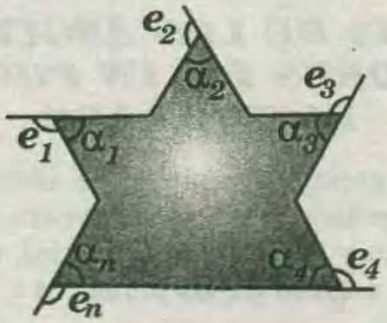
TEOREMA 2 :

La suma de las medidas de los ángulos externos en las puntas de toda estrella es :



$$S_e=720°$$

DEMOSTRACIÓN :



* De la figura :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1+e_1=180°\\ \alpha_2+e_2=180°\\ \alpha_3+e_3=180°\\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots\\ \alpha_n+e_n=180°\end{array}\right\}+\ n\ veces$$

* Sumando:

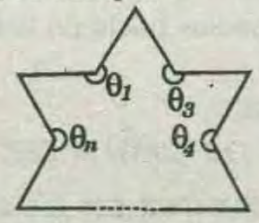
$$\underbrace{\alpha_1+\alpha_2+.....+\alpha_n}_{180°(n-4)}+\underbrace{(e_1+e_2+.....+e_n)}_{S_e}=180°n$$

$$\Rightarrow 180°(n-4)+S_e=180°n \Rightarrow 180°n-720°+S_e=180°n$$

$$\Rightarrow \boxed{S_e=720°}$$

TEOREMA 3 :

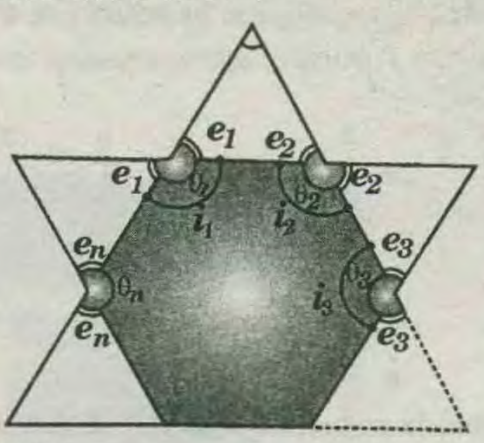
En toda estrella, se cumple :



$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\theta_k=180°(n+2)}$$

Donde: n es el número de ángulos internos no convexos de la estrella.

DEMOSTRACIÓN :



* De la figura:

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1=2e_1+i_1\\ \theta_2=2e_2+i_2\\ \theta_3=2e_3+i_3\\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots\\ \theta_n=2e_n+i_n\end{array}\right\}+$$

* Sumando:

$$\underbrace{\theta_1+\theta_2+\theta_3+...+\theta_n}_{\sum_{k=1}^{n}\theta_k}=2\underbrace{(e_1+e_2+e_3+...+e_n)}_{360°}+\underbrace{(i_1+i_2+i_3+...+i_n)}_{180°(n-2)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\theta_k=2(360°)+180°(n-2) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\theta_k=720°-360°+180°n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\theta_k=360°+180°n \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n}\theta_k=180°(n+2)}$$

REPRESENTACIÓN DE UN POLÍGONO ESTRELLADO

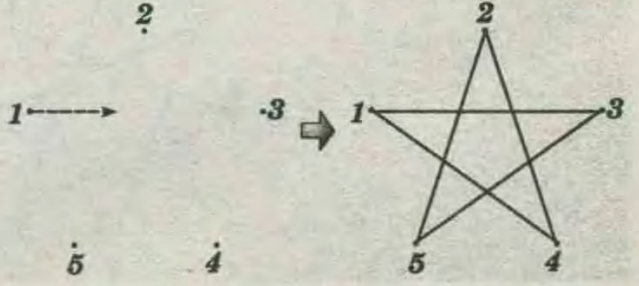
Un polígono estrellado se representa por el símbolo $\{n/a\}$, y se llama a veces n – grama.

Donde a y n son números primos entre sí y $n>4$.

Cuando $a=1$ tenemos un polígono convexo.

OBSERVACIÓN :

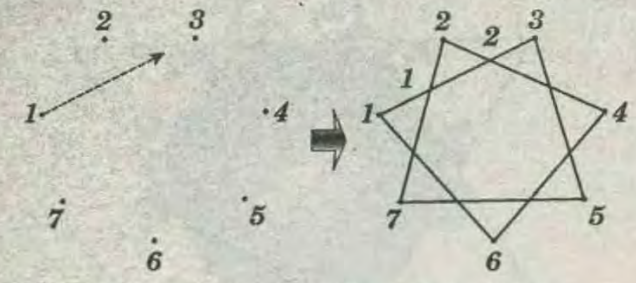
* Une mediante segmentos los puntos de la figura en el siguiente orden *1– 3 – 5 – 2 – 4 – 1*. ¿Qué figura se ha tomado? Acabas de dibujar un polígono estrellado de *5* puntas.



Libros GRATIS.com

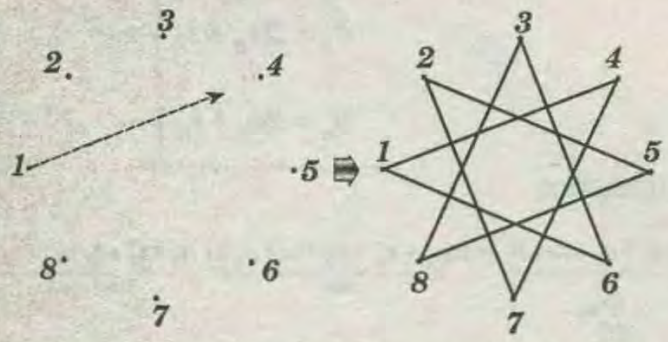
* En seguida dibuja **6** puntos en el plano y únelos siguiendo la misma secuencia anterior ¿Resulta un polígono estrellado? Habrás comprobado que no es posible dibujar un polígono estrellado de **6** puntas.

* Prueba con **7** puntas, aprovechando los puntos mostrados.



Has seguido la secuencia ***1–3–5–7–2–4–6–1.***

Ahora une los mismos puntos siguiendo la secuencia ***1 – 4– 7 –3– 6 – 2– 5 – 1.***

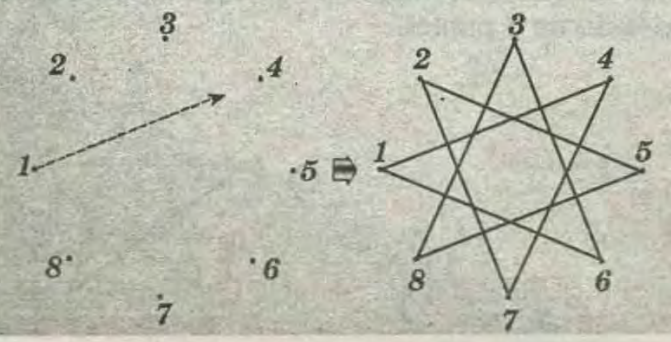


Habrás comprobado que es posible dibujar dos polígonos estrellados de **7** puntas. El primero se llama polígono estrellado de género **7** y de segunda especie, porque para construirlo, los puntos se unen de **2** en **2** ó dejando dos espacios. El segundo se llama polígono estrellado de género **7** y de tercera especie, porque se dibuja uniendo los puntos **3** en **3**, ó dejando **3** espacios.

¿Es posible predecir cuántos polígonos estrellados de **8** puntas (género **8**) existen , sin necesidad de dibujarlos?.

La mitad de **8** es **4**. Los números enteros positivos menores que **4** son **2** y **3**. De estos números sólo **3** es primo entre sí con **8** (***PESI*** con **8**), aparte de **1**.

Por consiguiente hay solo un polígono estrellados de género **8** y de tercera especie :



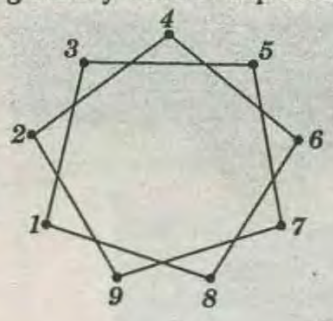
Género 8 (tercera especie)

Para dibujar polígonos estrellaos de **9** puntas :

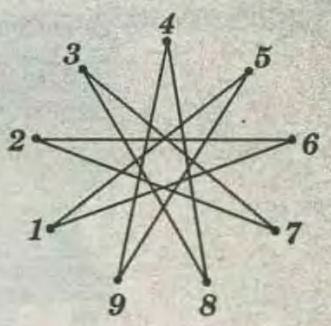
La mitad de ***9 = 4,5***

Números menores que ***4,5:1; 2; 3; 4 PESI*** con **9** a parte de ***1:2*** y **4** (**2** números)

Luego: hay dos polígonos de género **9**, que son de segunda y cuarta especie.



Género 9 (cuarta especie)



Género 9 (segunda especie)

SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN POLÍGONO ESTRELLADO

Si ***"n"***es el género(o número de vértices) de un polígono estrellado y ***"a"*** es el número de espacios entre un lado y los vértices (especie), entonces la suma de los ángulos de las puntas es :

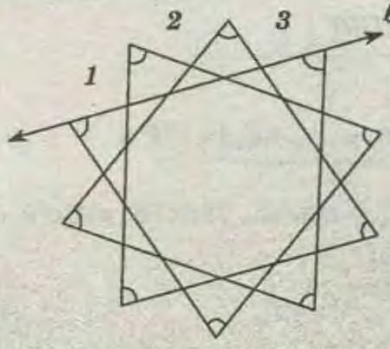
$$S = 180°(n - 2a)$$

* Donde :

$n \rightarrow$ género o número de vértices

$a \rightarrow$ especie

EJEMPLO:



*En la figura; contamos **10** puntas, entonces su género $\rightarrow n = 10$

*Al trazar la recta" ℓ "por uno de sus lados, observamos **3** espacios hacia un lado, entonces su especie es $a = 3$.

* Por consiguiente :

$$S = 180° (10 - 2(3)) = 720°$$

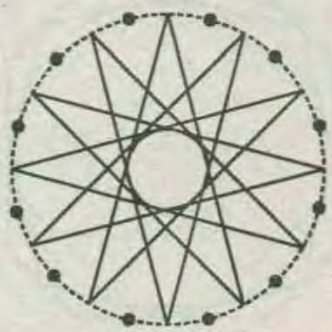
POLÍGONO REGULAR ESTRELLADO

Si dividimos una circunferencia en «**n**» partes congruentes, y las unimos, no consecutivamente,

sino de dos en dos, de tres en tres de cuatro en cuatro de a en a, llegaremos al punto de partida, en determinadas condiciones, después de dar varias vueltas, resultando en general un polígono regular cruzado, que se llama polígono regular estrellado.

EJEMPLOS :

En la figura que se muestra a continuación, observamos un polígono regular estrellado.



Este polígono regular estrellado de la izquierda se ha formado al dividir la circunferencia en ***12*** partes congruentes y se han unido de ***5*** en ***5***.

TEOREMA 4 :

Si el polígono convexo que da origen a la estrella regular es regular, entonces se cumple:

$$\boxed{\alpha=\frac{180°(n-4)}{n}}$$

DEMOSTRACIÓN:

* Del gráfico: $\underbrace{\alpha+\alpha+.....+\alpha}_{n\ veces}=180°(n-4)$

$$\Rightarrow n\alpha=180°(n-4)\Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{180°(n-4)}{n}}$$

Donde: ***n*** es el número de ángulos internos convexos es igual al número de lados del polígono regular que dio origen a la estrella regular .

TEOREMA 5 :

La medida de cada ángulo interno no convexo de la estrella regular es :

$$\boxed{\theta=\frac{180°(n+2)}{n}}$$

Donde: ***n*** es el número de ángulos internos no convexos, e igual al número de lados del polígono regular que dio origen a la estrella regular .

DEMOSTRACIÓN :

*Por un teorema anterior , tenemos :

$$\theta_1=\theta_2=\theta_3=...=\theta_n=e=\frac{180°(n+2)}{n}\Rightarrow \boxed{\theta=\frac{180°(n+2)}{n}}$$

TEOREMA 6 :

La medida de cada ángulo externo en las puntas; de toda estrella regular es :

$$e_1=e_2=e_3=...e_n=e=\frac{720°}{n}\Rightarrow \boxed{e=\frac{720°}{n}}$$

PENTAGRAMA

Los polígonos estrellados hicieron su aparición en la antigua escuela pitagórica, donde el polígono es estrellado {***5/2***}, ó pentagrama ,El pentagrama, o estrella de cinco puntas, ***no es Satánico***. Pitágoras lo usaba como un símbolo de salud y sus seguidores lo usaban para reconocerse entre ellos. En los tiempos Medievales, algunos caballeros Cristianos usaban el pentagrama como su símbolo Para los Wiccans modernos el pentagrama significa muchas cosas; Las cinco puntas corresponden a los elementos de Aire, Tierra, Fuego y Agua, con la de arriba correspondiendo a «Espíritu». El pentagrama en un circulo también puede representar a un humano con sus manos y piernas estiradas, rodeado por sabiduría universal o la «Diosa» – la humanidad en unión con su ambiente. Muchos Brujos y otros practicantes paganos no visten el pentáculo, pero tienen otros símbolos de significado especial para ellos.

NÚMERO DE POLÍGONOS ESTRELLADOS

El número de polígonos regulares estrellados de ***n*** lados es igual al número de números primos con ***n*** (excluida la unidad), menores que ***n/2***.

EJEMPLO :

El número de endecágonos estrellados es igual al de números primos comprendidos entre ***1*** y ***5,5*** ; y como entre ***1*** y ***5,5*** solo el ***2 ; 3 ; 4*** y ***5*** son primos con ***11*** , resulta que existe ***4*** endecágonos estrellados.

Donde: $n=11$ y $\alpha=4$

FUNCIÓN ϕ DE EULER

Sea $\phi(n)$, llamada la función ϕ de Euler, tal que represente el número de números menores que ***n/2***

y primos con n .

Se cumple: $\phi(n)=\langle 1; n/2\rangle$

Entre 1 y $n/2$ existen números enteros primos con «n». A estos números se dice que es de especie «a». Al número de lados del polígono estrellado se dice que es de género «n».

EJEMPLO :

Si el número de partes en que se divide la circunferencia fuese primo, por ejemplo 17, existirían tantos polígonos estrellados de diecinueve lados como enteros existen entre 1 y $17/2$; porque todos esos enteros serán primos con 17.

Es decir: $\phi(17)=(1;17/2) \Rightarrow \phi(17)=(1;8,5)$

En donde: $a=(2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\ \}$

Luego existirán 7 polígonos estrellados de 17 lados, cuya representación es :

$\{17/2\}$, $\{17/3\}$, $\{17/4\}$, $\{17/5\}$
$\{17/6\}$, $\{17/7\}$, $\{17/8\}$

PROPIEDAD :

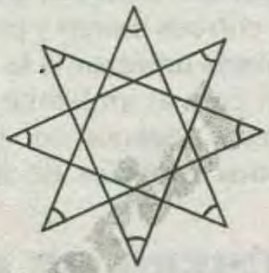
La suma de las medidas de los ángulos en las puntas del polígono estrellado $\{n/a\}$ regular está dada por:

$$\boxed{S_i = 180°(n - 2a)}$$

EJEMPLO :

Determinar la suma de las medidas de los ángulos en las puntas del octágono regular estrellado.

RESOLUCIÓN:



* Del gráfico:

$n=8 \wedge a=3$

* Por propiedad:

$S=180°(8-2\times3)$

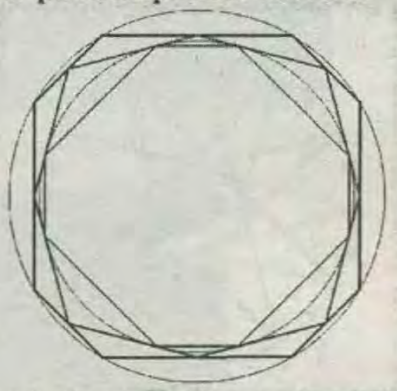
$\Rightarrow S=180°(2) \Rightarrow S=360°$

POLÍGONOS SEMIRREGULARES

¿Cuáles son los polígonos semirregulares? son los que tienen sus ángulos iguales y tienen circunferencia circunscrita (en particular el rectángulo). Es curioso resaltar que los semirregulares de un nº impar de lados son los regulares, mientras que los de un nº par incluyen a los que siendo inscriptibles tienen los lados alternos iguales (condición coherente con la idea de que los vértices deben ser indistinguibles).

Construimos el dual de un polígono semirregular tomando los puntos medios de sus lados y uniendo los que resultan contiguos. El dual de un polígono semirregular es un polígono que tiene todos sus lados iguales y además tiene circunferencia inscrita.

A partir de uno de estos duales podemos volver a obtener un polígono semirregular semejante al de partida, cambiando los lados por los puntos de tangencia, no por sus puntos medios.



Dual y bidual de un octógono semirregular

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Si un triángulo tiene dos ejes de simetría entonces el triángulo es equilátero.

II) Todos los polígonos regulares tienen centro de simetría.

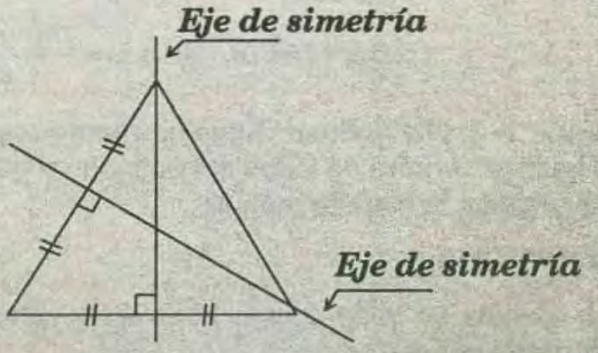
III) Sea las figuras F_1, F_2 y F_3 tal que F_1 es simétrico de F_2 y F_3 es simétrico de F_2, entonces F_1 (es congruente con F_3.

IV) Si F_1 es simétrico de F_2, entonces F_2 es simétrico de F_1.

A) VFVV B)VFVF C) VVVV D) VFFF E)VVFF

RESOLUCIÓN :

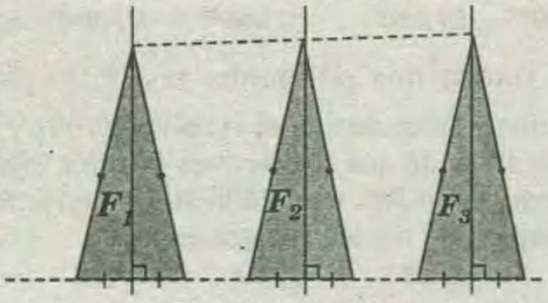
I)



La proposición es ***VERDADERA.***

II) El heptágono regular no tiene por ejemplo centro de simetría.

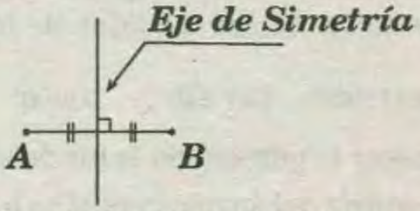
III)



F_1 sim. F_2 ; F_3 sim. $F_2 \Rightarrow F_1 \cong F_3$

La proposición es *VERDADERA*.

IV)

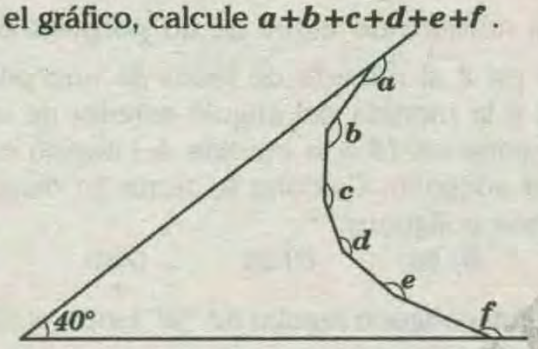


A es simétrico de $B \Rightarrow B$ es simétrico de *A*.

RPTA : "A"

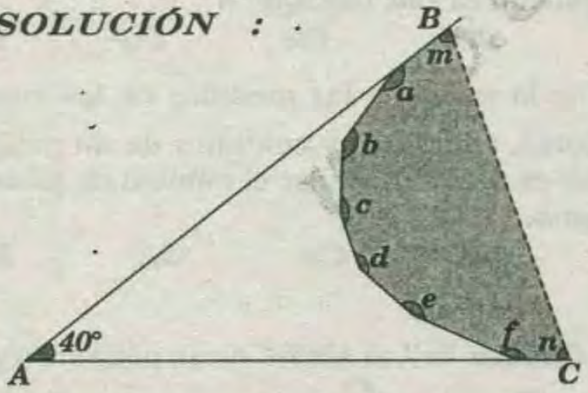
PROBLEMA 2 :

Según el gráfico, calcule $a+b+c+d+e+f$.



A) 940° B) 1 000° C) 980° D) 840° E) 1 020°

RESOLUCIÓN :



$*\Delta ABC: \quad 40° + m + n = 180°$

$\Rightarrow m + n = 140°$ ..... (I)

* En la región poligonal :

$$a+b+c+d+e+f+\underbrace{m+n}_{140°}=180°(8-2)$$

$$\Rightarrow a+b+c+d+e+f = 940°$$

RPTA : "A"

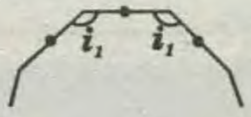
PROBLEMA 3 :

En un polígono regular de n lados , si el ángulo interno disminuye en $15°$ resultará otro polígono regular cuyo número de lados es $\frac{3}{4}n$. El valor de n es

A)4 B)16 C)12 D)8 E)20

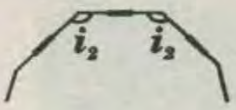
RESOLUCIÓN :

* En el polígono *1* de n lados



$$i_1=\frac{180°}{n}(n-2)$$

* En el polígono *2* de $\frac{3}{4}n$ lados



$$i_2=\frac{180°}{\left(\frac{3}{4}n\right)}\left(\frac{3}{4}n-2\right)$$

* Dato : $i_2=i_1-15°$

$$\Rightarrow \frac{180°}{\frac{3}{4}n}\left(\frac{3}{4}n-2\right)=\frac{180°(n-2)}{n}-15° \Rightarrow n=8$$

RPTA :"D"

PROBLEMA 4 :

En un hexágono equiángulo *ABCDEF*, demuestre que $CD-AF=FE-BC$

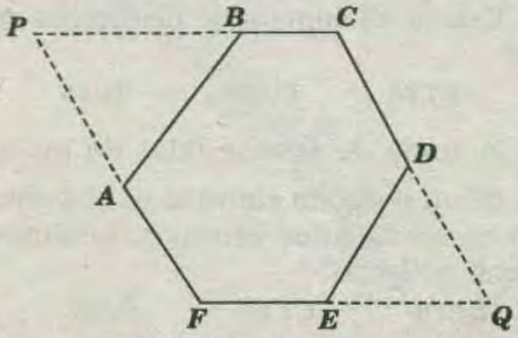
RESOLUCIÓN :

* Sea $m\sphericalangle int$: la medida de un ángulo interior del polígono equiángulo (todos sus ángulos son de igual medida).

* En un polígono equiángulo de n lados se cumple

$$m\sphericalangle int=\frac{180(n-2)}{n}$$

* Para el hexágono equiángulo $m\sphericalangle int=\frac{180(6-2)}{6}=120°$



* Prolongamos $\overline{FA}$ y $\overline{CB}$ hasta que se intersequen en p.

* Prolongamos $\overline{CD}$ y $\overline{FE}$ hasta que se intersequen en Q.

* $m\sphericalangle PBA+m\sphericalangle ABC=180°$, pero $m\sphericalangle ABC=120°$

$\rightarrow m\sphericalangle PBA=60°$

* $m\sphericalangle PAB+m\sphericalangle BAF=180°$, pero $m\sphericalangle BAF=120°$

$\rightarrow m\sphericalangle PAB=60°$

* De donde el ΔPAB es equilátero.

* Análogamente el ΔEDQ también es equilátero.

* Como :

$m\sphericalangle APB = m\sphericalangle EQD = 60°$ y $m\sphericalangle PCQ = m\sphericalangle QFP = 120°$

$\square PCQF$: paralelogramo

$\Rightarrow PB + BC = FE + EQ$ .....(I)

$PA + AF = CD + DQ$ .....(II)

* De los triángulos equiláteros :

$PB = PA = AB$.....(III)

$EQ = DQ = DE$.....(IV)

* Reemplazando (III) y (IV) en (I) y (II):

$PA + BC = FE + EQ$

$PA + AF = CD + EQ$

* Restando las ecuaciones :

$BC - AF = FE - CD \Rightarrow CD - AF = FE - BC$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 En un polígono de *"n"* lados calcule el número de triángulos que se pueden determinar al trazar las diagonales desde un mismo vértice.

A) n B) n – 2 C) n – 3 D) n(n – 2) E) n – 5

02 En un polígono la suma de sus números de lados, vértices y ángulos es *36*. Calcule su número de diagonales.

A) 27 B) 20 C) 54 D) 56 E) 44

03 En un polígono equiángulo, la medida de un ángulo interior es el triple de la medida de un ángulo exterior. Calcule el número de diagonales de dicho polígono.

A) 10 B) 15 C) 20 D) 16 E) 24

04 Si la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono convexo es el quíntuplo de la suma de los ángulos externos, ¿cuántos lados tiene dicho polígono?

A) 8 B) 10 C) 11 D) 12 E) 15

05 ¿Cuántos lados tiene el polígono convexo cuyo número de diagonales es igual al doble del número de lados?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

06 En un polígono convexo *ABCDEF* ... , las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{FE}$ se cortan en *P*. Si $m\sphericalangle APF = 60°$, calcular: $m\sphericalangle B + m\sphericalangle C + m\sphericalangle D + m\sphericalangle E$.

A) 180° B) 220° C) 240° D) 360° E) 600°

07 Dados dos polígonos regulares donde el número de lados de uno es el doble del otro y además las medidas de sus respectivos ángulos internos se diferencian en *30°*, calcule la suma de los números de diagonales de los polígonos.

A) 63 B) 22 C) 24 D) 36 E) 40

08 Al aumentar en *3* el número de lados de un polígono, el número de diagonales se duplica. Calcular la suma de las medidas de los ángulos internos.

A) 1 080° B) 1 260° C) 1 440° D) 900° E) 1 620°

09 Al triplicar el número de lados de un polígono regular, la medida del ángulo central es $n - 2$, siendo *"n"* el número de lados del polígono. Calcular la medida del ángulo interno de dicho polígono.

A) 108° B) 120° C) 140° D) 150° E) 144°

10 El número de lados de un polígono regular excede en *2* al número de lados de otro polígono regular, y la medida del ángulo exterior de uno de ellos excede en *15* a la medida del ángulo exterior del otro polígono. Calcular la suma de diagonales de ambos polígonos.

A) 20 B) 23 C) 26 D) 25 E) 29

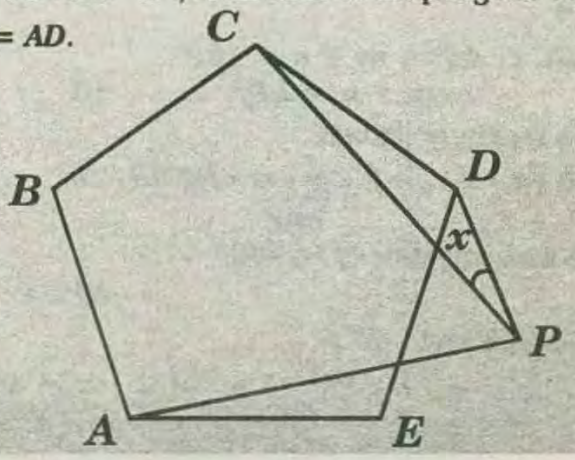
11 En un polígono regular de *"n"* lados, el número total de diagonales es igual a la medida del lado. Si el perímetro es *160*, calcular *"n"*.

A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

12 Si la suma de las medidas de los ángulos interiores, exteriores y centrales de un polígono regular es *1 260°*, calcular el número de lados del polígono.

A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

13 Calcular *"x"*, si *ABCDE* es un polígono regular y $AP = AD$.



A)18° B)27° C) 36° D)9° E)37°

14 En un polígono equiángulo, la suma de las medidas de cinco ángulos internos es 720°. Calcular la suma de medidas de nueve ángulos externos.

A) 300 ° B) 324 ° C) 330° D) 270° E) 264 °

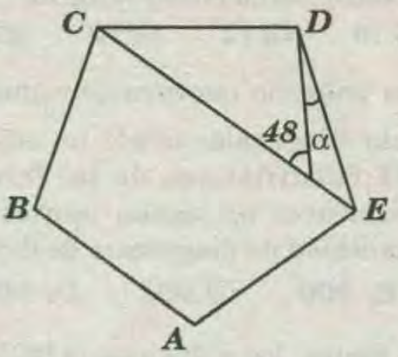
15 ¿Cuántos polígonos cumplen que al aumentar el número de lados en "2k" su número de diagonales aumenta en "13k"?

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

16 La diferencia de las medidas de los ángulos interiores de 2 polígonos regulares es 4 y la suma de las medidas de sus ángulos externos es 76°. Calcular el número de lados del polígono mayor.

A) 9 B) 10 C) 12 D)15 E)20

17 Si el pentágono es regular. calcular "α".

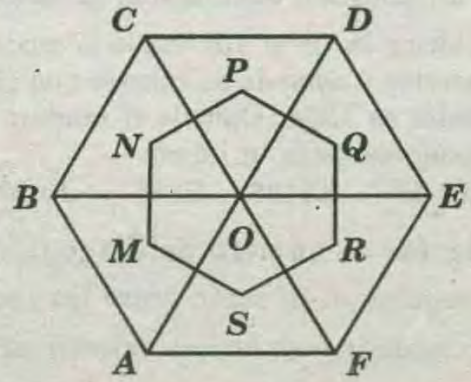


A)10° B) 11° C) 12° D)13° E)14°

18 El menor ángulo de un polígono convexo mide 139 y los otros forman una progresión aritmética de razón 2. Calcular el número de lados del polígono.

A)10 B)8 C)12 D)14 E) 16

19 En la figura se muestran a los hexágonos regulares ABCDEF y MNPQRS. Calcular el perímetro del segundo. si $AB = 2\sqrt{3}$ y M, N,P, ..., S son baricentros de los triángulos ABO, BCO, CDO, ..., AFO. respectivamente.



A)6 B)12 C)18 D)24 E)30

20 El número de triángulos que se obtienen al unirse un vértice de un polígono convexo con los otros vértices, es al número de triángulos que se forman al unir un punto interior con todos los vértices. como el número de ángulos rectos que contiene la suma de ángulos internos es al número total diagonales. Calcular el número de lados de dicho polígono.

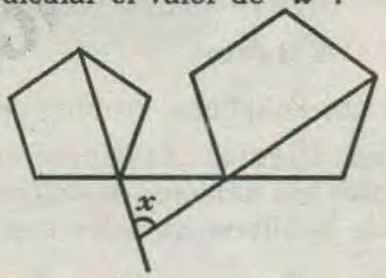
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 ¿Cuántos lados tiene el polígono en el cual el número de diagonales es mayor en 133 al número de lados?

A) 16 B) 25 C) 23 D) 24 E) 19

02 En el gráfico se muestran dos pentágonos regulares. Calcular el valor de "x".

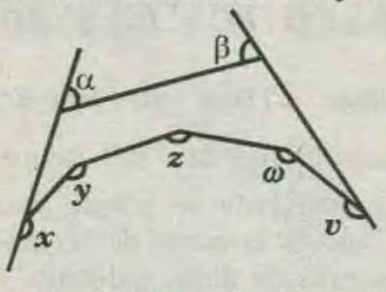


A) 50° B) 75° C) 60° D) 40° E) 72°

03 Si a la medida del ángulo exterior de un polígono regular se le disminuye en 60°, el resultado es numéricamente igual al número de diagonales aumentado en 7. Calcular su número de lados.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

04 Si $\alpha + \beta = 130°$. Calcular: $x + y + z + w + v$.

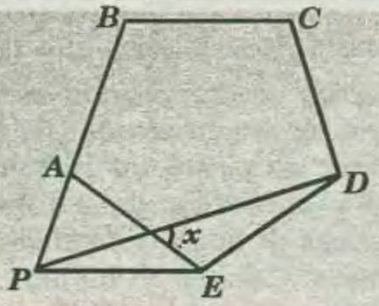


A) 920° B) 630° C) 860° D) 770° E) 550°

05 Al triplicar el número de lados de un polígono regular la medida de su ángulo interior aumenta en 40°. Calcular el número de diagonales del polígono de menor número de lados.

A) 9 B) 14 C) 2 D) 20 E) 6

06 ABCDE es un pentágono regular. $\overline{PE} \cong \overline{BC}$. Calcule "x".



A) 36° B) 18° C) 60° D) 54° E) 72°

07 En un polígono regular *ABCDE* .... : $m\measuredangle ABD = 7(m\measuredangle BCA)$. Calcular el número de diagonales medias de dicho polígono.

A) 45 B) 28 C) 66 D) 55 E) 36

08 Se tiene un hexágono regular *ABCDEF*, cuyo lado mide $8\,m$. Calcule la longitud del segmento que tiene por extremos al punto medio de $\overline{EF}$ y al punto de intersección de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$.

A) $4\sqrt{6}m$ B) $2\sqrt{6}m$ C) $4\sqrt{7}m$

D) $3\sqrt{7}m$ E) $3\sqrt{6}m$

09 Dados dos Polígonos, la diferencia entre las sumas de sus ángulos interiores es $540°$ y la diferencia entre sus números de diagonales medias es 24. Calcule la diferencia entre sus números de diagonales.

A) 12 B) 15 C) 18 D) 20 E) 21

10 Se tiene un polígono regular de *"n"* lados *ABCDE* ... y otro polígono regular de $(n-2)$ lados *ABPQR* ... interior al perímetro. Si $m\measuredangle CBP = 9°$, calcule *"n"*.

A) 13 B) 11 C) 10 D) 14 E) 12

11 En un octágono equiángulo *ABCDEFGH* en el cual: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ y $BD = 8\sqrt{2}\ cm$. Calcule *AE*.

A) 16cm B) 8cm C) 9cm D) 11cm E) 12cm

12 En un polígono de *"n"* lados, desde $n-9$ vértices consecutivos se puede trazar $9n+22$ diagonales. Calcule la suma de las medidas de los ángulos interiores de dicho polígono.

A) 4100° B) 1080° C) 720° D) 4220° E) 4140°

13 A un polígono de *"n"* lados, se le aumenta *"k"* lados$(k:\ impar)$ de tal modo que el número de diagonales aumenta en $n+2k$. Calcular *"n"*.

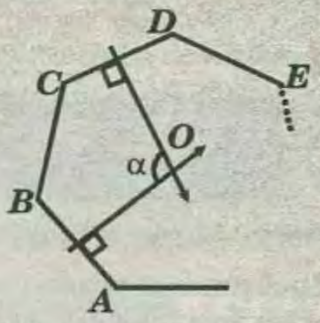
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

14 En un polígono equiángulo *ABCDE* ... en el cual $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, calcule el número de diagonales medias del polígono.

A) 16 B) 11 C) 9 D) 10 E) 15

15 Si $\alpha < 90°$ y *ABCDE* ... es un polígono equiángulo cuyo número de lados es mínimo, calcular el número de diagonales trazadas desde cinco vértices consecutivos.

A) 15
B) 24
C) 29
D) 23
E) 36



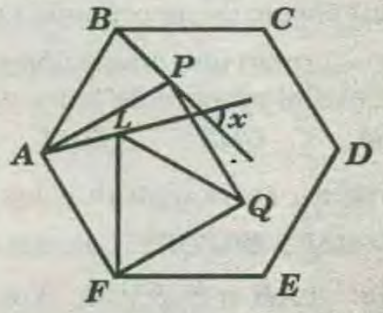
16 En un poligono equiángulo *ABCDE* ... cuyo número de lados es *"n"*, las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ se intersecan en *L*, de modo que el ángulo *ALE* es agudo. Calcule el máximo valor de *"n"*.

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

17 En un polígono convexo de número de lados par, al trazar diagonales desde un solo vértice se obtienen 21 cuadriláteros de tal forma que sus regiones interiores no tienen puntos en común. Calcule la cantidad de diagonales de dicho polígono.

A) 908 B) 900 C) 904 D) 906 E) 902

18 En la figura, los polígonos: *ABCDEF*, *APQF* y *FLQ* son regulares. Calcular *"x"*.



A) 30° B) 45° C) 60° D) 53° E) 75°

19 En un polígono equiángulo, la medida de su ángulo interior es $(p + 15)$ veces la medida de su ángulo exterior y además se cumple que el número de diagonales es $135p$. Calcule el número de lados de dicho polígono para p impar.

A) 48 B) 46 C) 135 D) 80 E) 90

20 Calcular el número de diagonales de un polígono regular, si la razón entre las medidas de su ángulo interior y su ángulo exterior es $\frac{7}{2}$.

A) 27 B) 35 C) 9 D) 14 E) 170

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 En un hexágono *ABCDF*: *BC=4u, AB=3u, CD=6u, DE=5u* . Hallar el perímetro del exágono equiángulo mencionado.

A) 24 B) 28 C) 32 D) 30 E) 31

02 En un polígono equiángulo *ABCDEF* ...las bisectrices de los ángulos *ABC* y *DEF* son perpendiculares. Calcular el número de diagonales de dicho polígono.

A) 58 B) 50 C) 52 D) 54 E) 51

03 Calcular la suma de ángulos internos de un polígono, sabiendo que si se aumenta en tres el número de lados, el número de diagonales aumenta en *27*.

A)1260° B)1360° C)1560° D)1460° E)1600°

04 En un polígono regular la diferencia de un ángulo interno y un ángulo externo está comprendido entre *30°* y *40°*. Calcular el número de lados de dicho polígono .

A)5 B)6 C)7 D)8 E)10

05 ¿Cuantos lados tiene el polígono regular cuyo ángulo interno es *(p+15)* veces el ángulo exterior , y ademas se sabe que el número de diagonales es *135p*?

A)80 B)85 C)90 D)95 E)100

06 Dadas las siguientes proporciones :

I) Cada ángulo interior de una hexágono regular mide *120°*.

II) En el decágono, se pueden trazar *36* diagonales.

III) El polígono regular cuyos ángulos exteriores miden *36°* es un decágono.

Son verdaderas :

A) Sólo I y III B) Sólo II C) Sólo II y II
D) Sólo III E) Sólo II y III

07 En un hexágono convexo , los ángulos internos están en progresión aritmética y :

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_5 > \alpha_6$$

¿Cuánto medirá el cuarto ángulo α_4, dado en radianes , si el mayor es igual a *125°*.

A) 750π *B)* $\frac{115}{180}\pi$ *C)* $\frac{119}{180}\pi$ *D)* 2π *E)* $\frac{121}{180}\pi$

08 Se tiene un polígono regular cuyo semiperímetro es *"p"* y el número que expresa su número de diagonales es igual al perímetro.

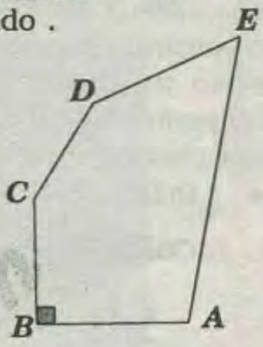
Además su ángulo interior es *"p"* veces su ángulo exterior . ¿Cuánto mide el lado del polígono regular?

A)1/3 B)1/5 C)1/4 D)1 E)1/2

09 En un polígono , la suma de sus ángulos internos es *540°*, el número de lados de dicho polígono es :

A) 3 B) 4 C) 9 D) 5 E) 6

10 En el polígono mostrado: *AB=BC=CD=DE=a*, $\overline{AC} \perp \overline{CD}$, $\overline{AD} \perp \overline{DE}$. Calcular el perímetro del polígono mostrado .



A) 4a B) 2a C) 6a D) 8a E) 10a

11 Si la suma de los ángulos internos de dos polígonos convexos difieren en *720°* y sus ángulos céntricos difieren en *7, 5°*.

Indicar si el cociente mayor que la unidad de los lados de los dos polígonos convexos es igual a :

A)1,53 B)1,23 C)1,23 D)1,43 E)1,33

12 El número de diagonales de un polígono convexo excede en *16* a la diferencia entre el número de ángulos rectos a que equivale la suma de sus ángulos interiores y el número de vértices del polígono. ¿De qué polígono se trata?

A)Octógono B)Pentágono C) Decágono D) Exágono

13 Los lados de un polígono regular de *"n"* lados, *n>4*, se prolongan para formar una estrella . El número de grados en cada vértice de la estrella , es :

A) $\frac{360}{n}$ *B)* $\frac{(n-4)180}{n}$ *C)* $\frac{(n-2)180}{n}$ *D)* $180-\frac{90}{n}$

14 ¿Cuál es el número de lados de aquel polígono cuyo número de diagonales se encuentra entre *22* y *34*?

A)8 B)10 C)60 D)11 E)12

15 *ABCDE* es un polígono convexo en *A*, en donde la $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle AED = 90°; AC = CD; m\sphericalangle ADE = 3m\sphericalangle BCA$; $m\sphericalangle DAC = 8m\sphericalangle BCA$; si : *AB=AE*.

Calcular la medida del ángulo *CAD*.

A)40° B)50° C)60° D)70° E)80°

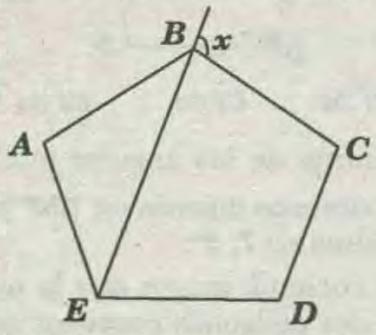
16 *ABCDEFGHIJ* es un polígono regular y *AB'C'D'E'FG'H* otro polígono regular . Hallar la medida del ángulo determinado por la bisectriz del ángulo exterior correspondiente al vertice *A*, del segundo polígono y el lado $\overline{JA}$ del primer polígono .

A)12,5 B)13,5 C)14, D)15,5 E)18,5

17 Dado un cuadrilátero convexo *ABCD*,sobre los lados se toman los puntos *M,N,P,Q,* tales que *M* está sobre el lado $\overline{BC}$,..., *etc*. y *AM=2.MB,BN= 2NC*,..., etc. Se repite esta construcción sobre el cuadrilátero *MNPQ* formándose un tercer cuadrilátero de perímetro *"p"* si el perímetro del cuadrilátero *ABCD* es *72 m*. ¿Que valor puede tomar *"p"*?.

A)25 m B)18 m C)12 m D)9 m E)T.A.

18 En la figura, *ABCDE* es un polígono regular. Hallar *"x"*.



A)108° B)144° C)72° D)36° E)120°

19 Calcular el máximo número de ángulos internos agudos que puede tener un polígono convexo de *"n"* lados.

A) n – 1 B)2 C)3 D)4 E) n – 3

20 En las siguientes proposiciones, indicar cuáles son verdaderas *(V)* cuáles son falsas *(F)* :

* En todo polígono, cuya región interior es convexa, la suma de las medidas de los ángulos externos es *360°*.

* Todo polígono es un conjunto convexo .

* Todo polígono, de región convexa , es siempre un polígono equilátero .

A) VVF B) VF V C) VFF D) FVF E) FFF

21 ¿Cuántos ángulos no convexos como máximo , puede tener un polígono de *6* lados?

A)1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

22 En polígono regular *ABCD* ... el ángulo que determinan *AB* y *CD* mide *36°*. Calcular la $m\sphericalangle ANM$, si la $m\sphericalangle ABC$ es mínimo y *M, N* son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ respectivamente.

A)18 B)15 C)12 D)36 E)24

23 En un rectángulo *ABCD*, se considera un punto *S* sobre $\overline{BD}$ y se prolonga $\overline{CS}$ hasta *P* , tal que *CS=SP* , se trazan las perpendiculares desde *P* a los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BA}$; $\overline{PH}$ y $\overline{PT}$ respectivamente. Calcular $m\sphericalangle HTS$.

A)120° B)160° C)180° D)110 E)170°

24 En la región interior a un hexágono equiángulo *ABCDEF* , se ubica el punto *P*, sobre los lados $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ se ubican los puntos *M, N* y *R* respectivamente de manera que :

$\overline{MP}//\overline{CD}$; $\overline{NP}//\overline{EF}$ y $\overline{RP}//\overline{AB}$.

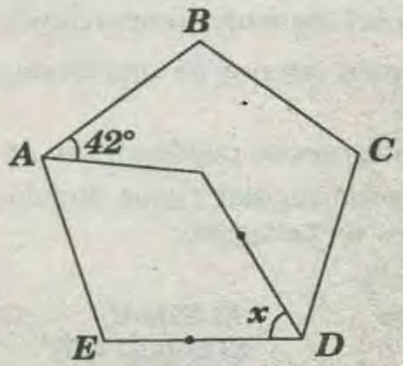
Calcular : *MP+NP+RP* ; siendo : *BC=4* ; *CD=8* y *DE=5*.

A)13 B)15 C) 17 D) 19 E) 21

25 Se tiene *3* polígonos equiángulos número de diagonales del primer y tercer polígono están en la relación de *1* a *6* , la suma de las medidas de los ángulos internos del segundo y primer polígono se diferencia en *360°* y las medidas de los ángulos externos del tercer y segundo polígono están en relación de *2* a *3*. Calcular la medida del ángulo interno del primer polígono.

A)135 B)150° C)120° D)109° E)144°

26 Calcular *x* , si *ABCDE* es un pentágono regular.



A)42° B)45° C)48° D)54° E)60°

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)B	2)C	3)C	4)D	5)E	6)E	7)A	8)B	9)D	10)E
11)C	12)A	13)A	14)B	15)E	16)B	17)C	18)C	19)B	20)C

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)E	2)E	3)C	4)D	5)A	6)D	7)B	8)C	9)B	10)C
11)A	12)E	13)C	14)E	15)B	16)C	17)E	18)C	19)E	20)A

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1)B	2)D	3)A	4)A	5)C	6)A	7)E	8)D	9)D	10)C
11)E	12)A	13)B	14)C	15)E	16)B	17)E	18)A	19)E	20)A
21)C	22)A	23)C	24)C	25)C	26)E	27)D	28)B	29)C	30)C

CUADRILATEROS
INTRODUCCION

CAPITULO 15

OBJETIVOS:

Al finalizar la unidad , el alumno será capaz de:

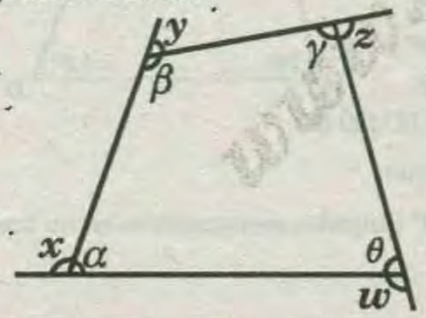
* *Definir al cuadrilátero.*
* *Conocer la clasificación del cuadrilátero convexo.*
* *Aprender los teoremas relacionados a dicho cuadrilátero y aplicados correctamente en la resolución de los problemas.*

INTRODUCCIÓN:

Desde hace mucho tiempo el hombre hizo demarcaciones en los terrenos dándoles ciertas formas geométricas entre los que destaca la forma rectangular por la facilidad en la que consistía realizarlas, distribución y medida además esa forma se usa en las construcciones con el objetivo de aprovechar la estabilidad que ofrecen, por ejemplo las paredes de la fortaleza de Ollantaytambo construidas con piedras o rocas de forma de trapecio isósceles.

CUADRILÁTEROS

Es un polígono de *4* lados.



* Suma de ángulos internos es igual a ***360°***, es decir

$$\alpha+\beta+\gamma+\theta=360°$$

* Suma de ángulos externos es igual a ***360°***, es decir

$$x+y+z+w=360°$$

CLASIFICACIÓN GENERAL

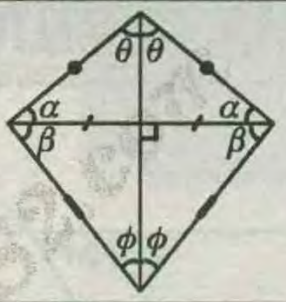
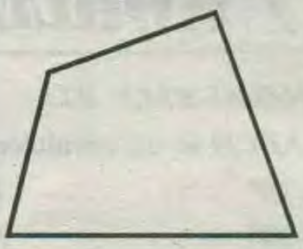
Convexo

No convexo

CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS

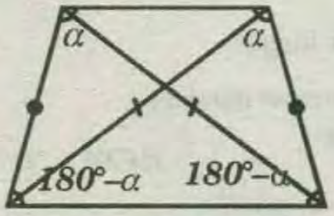
I) TRAPEZOIDE :

Aquellos que no tienen lados opuestos paralelos.

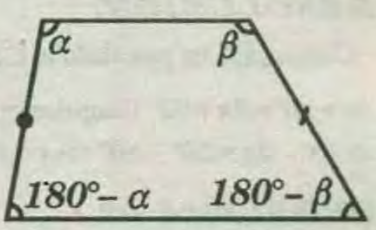
SIMÉTRICO	ASIMÉTRICO
	

II) TRAPECIOS :

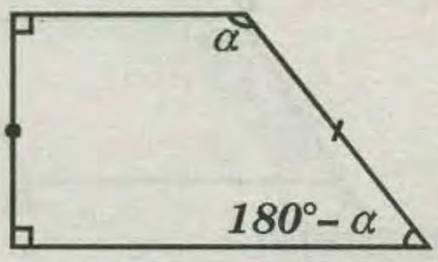
Tienen dos lados opuestos paralelos llamados bases y los otros lados, llamados lados no paralelos.



Trapecio isósceles



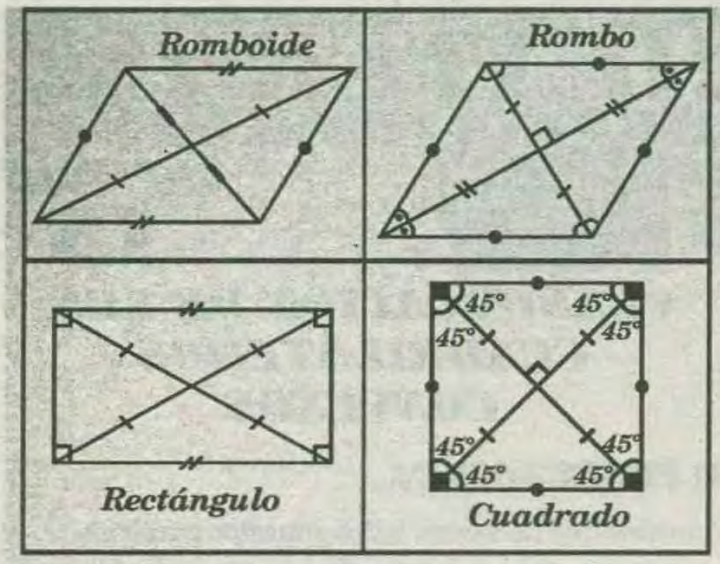
Trapecio escaleno



Trapecio rectángulo

III) PARALELOGRAMOS :

Aquellos de lados opuestos paralelos y congruentes; ángulos opuestos de igual medida y dos ángulos consecutivos siempre suplementarios. Sus diagonales se bisecan.

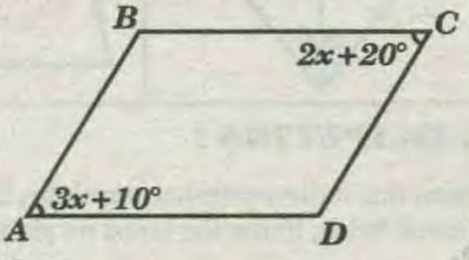


PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 01:

Si *ABCD* es un paralelogramo calcular *"x"*

A) 20°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 25°



RESOLUCIÓN:

* Como $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{CD}$ luego:

$3x+10°=2x+20°$ (ángulos opuestos iguales)

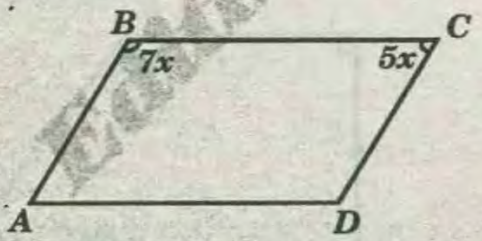
$\Rightarrow 3x-2x=20°-10° \Rightarrow x=10°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 02 :

En el romboide *ABCD*. Calcular *"x"*

A) 12°
B) 15°
C) 10°
D) 8°
E) 20°



RESOLUCIÓN:

* Como: $AB \parallel CD$ ($\overline{AB}$ paralelo a $\overline{CD}$), luego:

$7x+5x=180°$ (Ángulos conjugados)

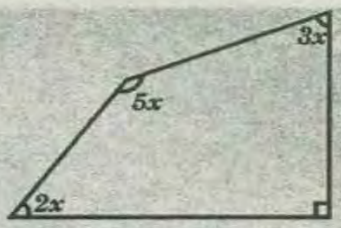
$\Rightarrow 12x=180° \Rightarrow x=\frac{180°}{12}=15°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 03 :

Calcular *"x"*

A) 12°
B) 13°
C) 17°
D) 14°
E) 27°



RESOLUCIÓN:

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero es $360°$

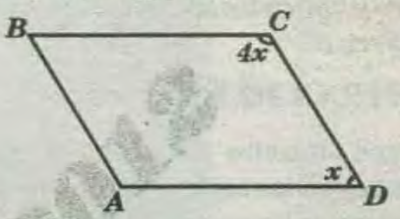
$\Rightarrow 10x=360°-90° \Rightarrow 10x=270° \Rightarrow x=\frac{270°}{10}=27°$

RPTA : "E"

PROBLEMA 04 :

Si *ABCD* es un paralelogramo, calcular *"x"*

A) 24°
B) 36°
C) 20°
D) 72°
E) 28°



RESOLUCIÓN:

Como: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, entonces:

$4x+x=180°$ (ángulos conjugados)

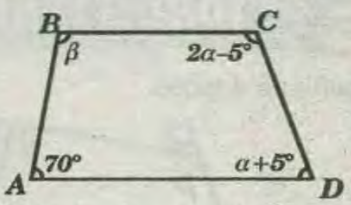
$\Rightarrow 5x=180° \Rightarrow x=36°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 05 :

En la figura: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, calcular "$\alpha$" y "$\beta$"

A) 124° y 12°
B) 36° y 20°
C) 120° y 70°
D) 110° y 60°
E) 120° y 50°



RESOLUCIÓN:

Se deduce que:

$70°+\beta=180°$ (ángulos consecutivos en un trapecio)

$\Rightarrow \beta=110°$

Además:

$2\alpha-5°+\alpha+5°=180°$ (ángulos consecutivos en un trapecio)

$\Rightarrow 3\alpha=180° \Rightarrow \alpha=60°$

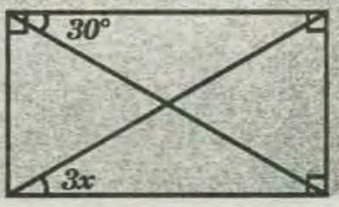
RPTA : "D"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

Calcular *"x"*, en cada caso:

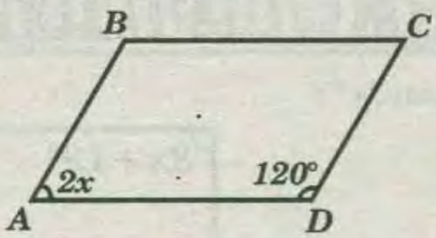
01

A) 30°
B) 5°
C) 15°
D) 8°
E) 10°



02 En el paralelogramo *ABCD:*

A) 15°
B) 30°
C) 12°
D) 40°
E) 20°



03

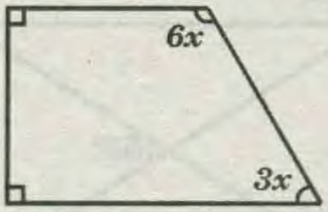
A) 45°
B) 9°
C) 5°
D) 8°
E) 2°

04

A) 12°
B) 6°
C) 15°
D) 30°
E) 12°

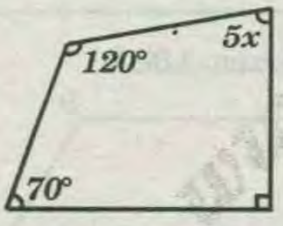
05

A) 10°
B) 20°
C) 15°
D) 12°
E) 30°



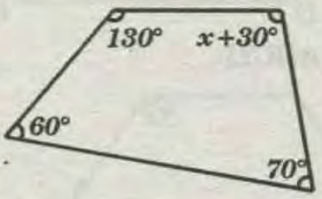
06

A) 16°
B) 20°
C) 12°
D) 18°
E) 14°



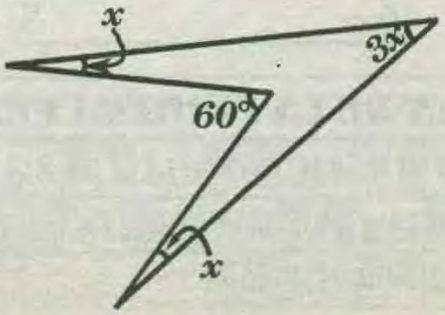
07

A) 60°
B) 70°
C) 50°
D) 40°
E) 30°



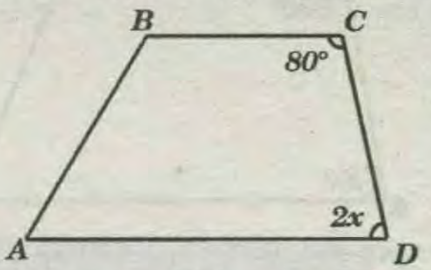
08

A) 12°
B) 10°
C) 20°
D) 15°
E) 8°



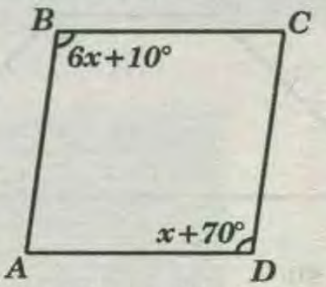
09 En el trapecio *ABCD* ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$), calcular *"x"*

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 80°
E) 150°



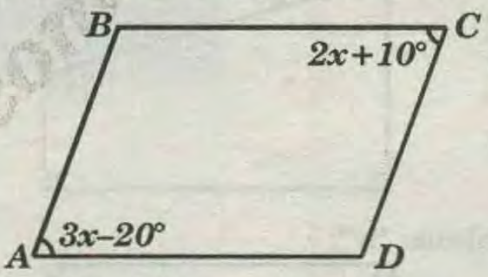
10 Si *ABCD* es un paralelogramo, calcular *"x"*

A) 10°
B) 11°
C) 12°
D) 13°
E) 15°



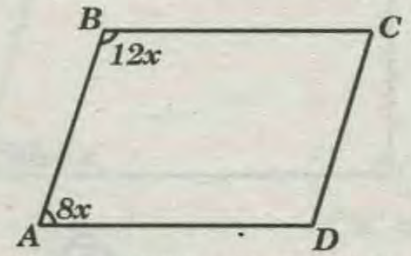
11 Si *ABCD* es un paralelogramo, calcular: *"x"*

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°



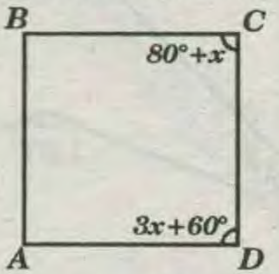
12 En el romboide *ABCD*, calcular: *"x"*

A) 8°
B) 9°
C) 10°
D) 12°
E) 15°



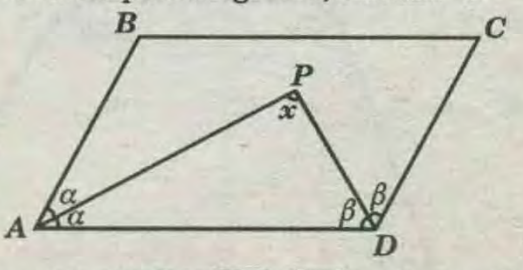
13 En el cuadrado *ABCD*, calcular: *"x"*

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 20°
E) 8°



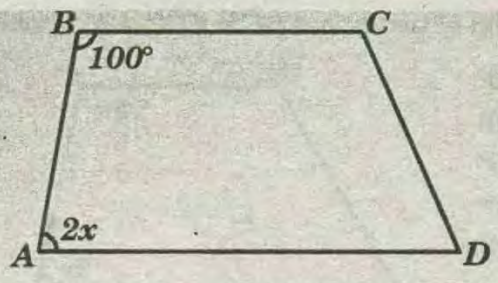
14 Si *ABCD* es un paralelogramo, calcular *"x"*

A) 50°
B) 60°
C) 80°
D) 100°
E) 90°



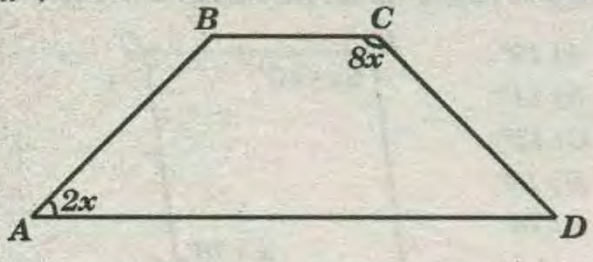
15 En el trapecio *ABCD* ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$), calcular *"x"*.

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 80°
E) 150°



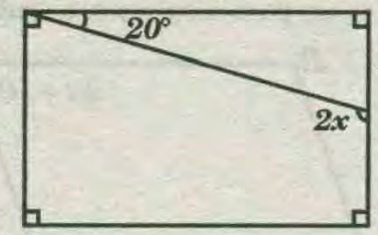
16 En el trapecio isósceles $ABCD$ ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$), calcular: "$x$".

A) 12°
B) 15°
C) 18°
D) 20°
E) 30°



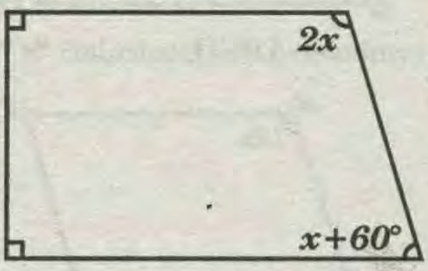
17 Calcular "x", en:

A) 30°
B) 40°
C) 55°
D) 65°
E) 80°



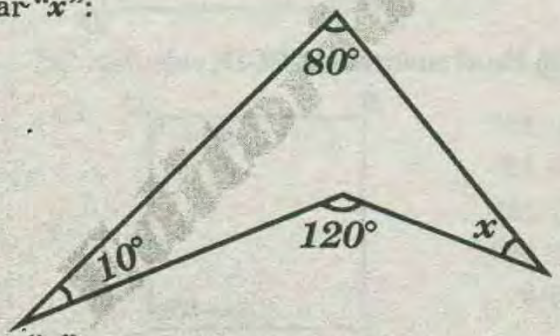
18 Calcular "x":

A) 40°
B) 20°
C) 12°
D) 30°
E) 38°



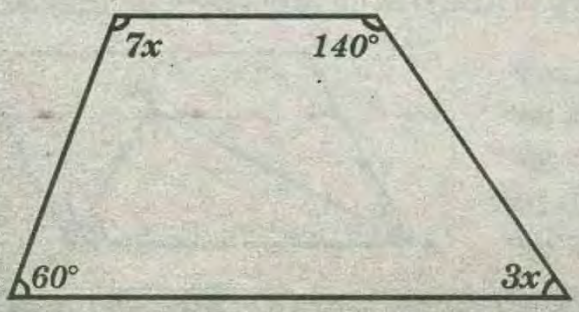
19 Calcular "x":

A) 30°
B) 20°
C) 40°
D) 60°
E) 50°



20 Calcular "x":

A) 8°
B) 12°
C) 16°
D) 10°
E) 40°



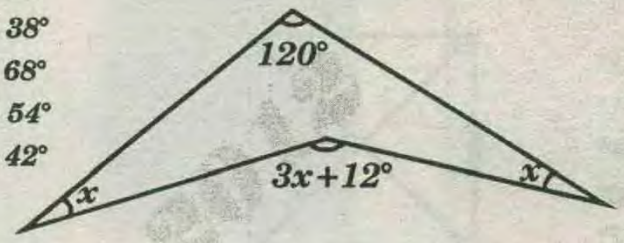
TAREA DOMICILIARIA

01 Calcular "x":

A) 26°
B) 22°
C) 18°
D) 40°
E) 14°

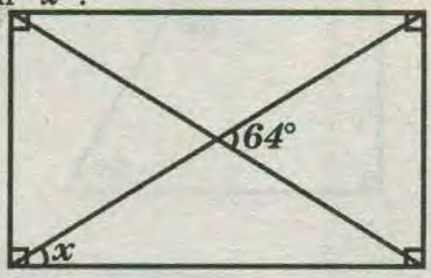
02 Calcular "x":

A) 24°
B) 38°
C) 68°
D) 54°
E) 42°



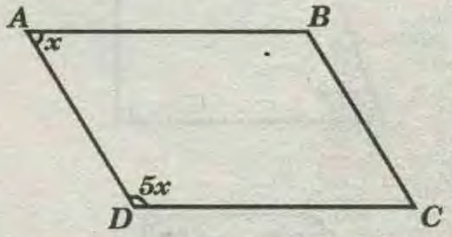
03 Calcular "x":

A) 64°
B) 32°
C) 34°
D) 40°
E) 30°



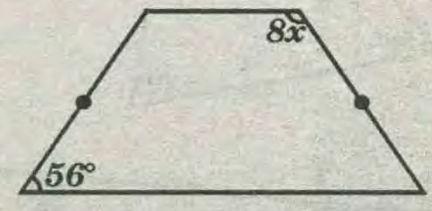
04 En el paralelogramo $ABCD$:

A) 20°
B) 30°
C) 36°
D) 40°
E) 35°



05 En el trapecio $ABCD$:

A) 30°
B) 15°
C) 15,5°
D) 32°
E) 17,2°



CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)E	2)B	3)C	4)C	5)B	6)A	7)B	8)A	9)B	10)C
11)C	12)B	13)A	14)E	15)A	16)C	17)C	18)A	19)A	20)C
01)A	02)D	03)B	04)B	05)C					

CUADRILATEROS I

CAPITULO 15B

OBJETIVOS :

Al finalizar este capítulo , el alumno será capaz de:

**Definir y clasificar correctamente a los cuadriláteros.*

**Clasificar los cuadriláteros convexos y precisar sus elementos*

**Graficar los diferentes tipos de cuadriláteros convexos*

** Aplicar las propiedades de cada uno de los cuadriláteros convexos .*

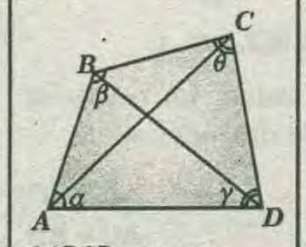
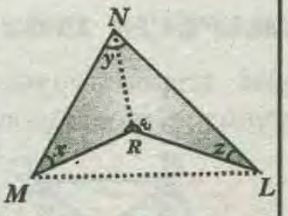
** Aplicar los diversos teoremas en la resolución de problemas de cuadriláteros.*

INTRODUCCIÓN:

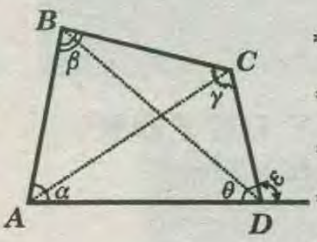
Si nos encontramos dentro de un campo deportivo observamos que dicho campo tiene forma rectangular, ósea cuatro lados ; y si observamos un libro nos damos con la sorpresa que también tiene cuatro lados, entonces nos encontramos con figuras geométricas que poseen cuatro lados, llamados cuadriláteros. En este capítulo estudiaremos estas figuras y sus propiedades, así como sus aplicaciones, además tendrán problemas con resolución, y finalmente nos encontramos con problemas propuestos.

CUADRILÁTEROS

Se llama cuadrilátero, al polígono de *4* lados. considerando la medida de sus ángulos internos pueden ser convexos o no convexos.

Convexo	*no convexo o cóncavo*
	
ABCD: convexo *$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$: diagonales* $\alpha+\beta+\theta+\gamma=360°$	*MNLR : cóncavo en R ($w > 180°$)* *ML y NR : diagonales* $x+y+z+w=360°$

ELEMENTOS :



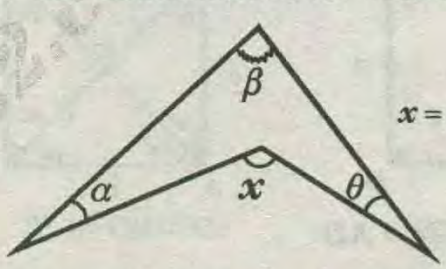
* Vértices: *A, B, C* y *D*
* Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ $\overline{CD}$ y $\overline{AC}$
* Ángulos internos: $\alpha ; \beta ; \gamma ; \theta$
* Ángulo externo: ω
* Diagonales: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

NOTA:

I) La suma de las medidas de los ángulos internos es 360°

$$\alpha+\beta+\theta+\gamma=360°$$

II) En un cuadrilátero no convexo se cumple que :



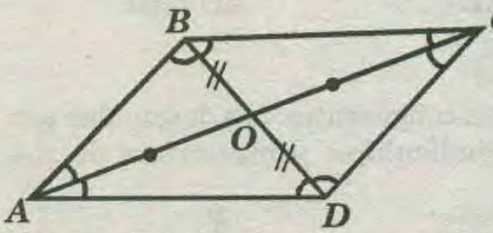
$x=\alpha+\beta+\theta$

CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS :

Los cuadriláteros se clasifican en paralelogramos, trapecios y trapezoides

I) PARALELOGRAMO :

Es el cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos , en todo paralelogramo se cumple que los lados opuestos son congruentes, los ángulos opuestos son congruentes y las diagonales se bisecan.



AO=OC
BO=OD

**** Las medidas de los ángulos opuestos son iguales.***

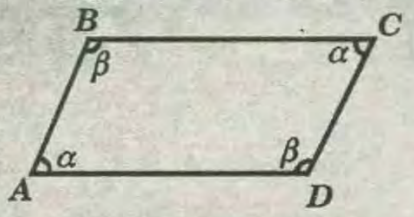
**** La suma de las medidas de dos ángulos consecutivos es 180°***

**** Las longitudes de las diagonales de un rectángulo , son iguales.***

Las diagonales del rombo son perpendiculares y bisectrices.

Las longitudes de las diagonales del cuadrado son iguales, perpendiculares y bisectrices.

Las diagonales se cortan en su punto medio.

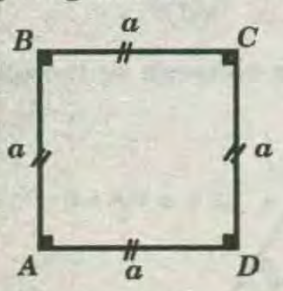


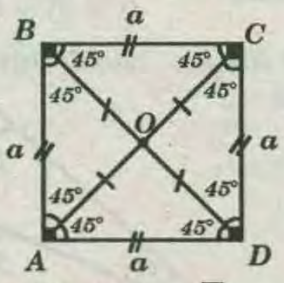
$\alpha+\beta=180°$

CLASIFICACIÓN DE LOS PARALELOGRAMOS

A) CUADRADO :

Tiene sus cuatro lados congruentes. Las diagonales son bisectrices de sus ángulos, Perpendiculares entre sí y congruentes.

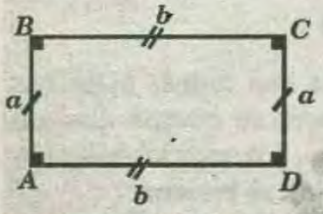


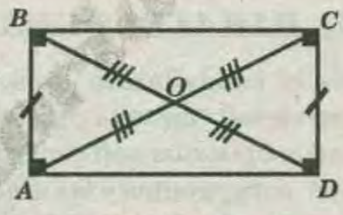


$AB = BC = CD = AD$; $AC=BD=a\sqrt{2}$

B) RECTÁNGULO :

Los lados consecutivos no son congruentes. Los ángulos interiores miden $90°$ cada uno. Las diagonales son congruentes.

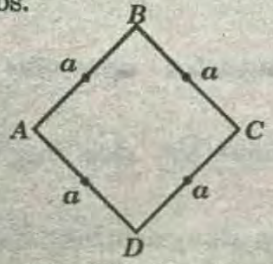




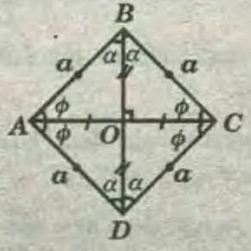
$AB = CD$; $BC=AD$ $\qquad$ $AC=BD$

C) ROMBO :

Los cuatro lados son congruentes. Las diagonales son desiguales, perpendiculares y bisectrices de sus ángulos.



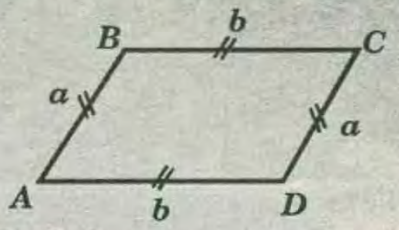
$AB=BC=CD=AD$



$\overline{AC}<\overline{BD}$

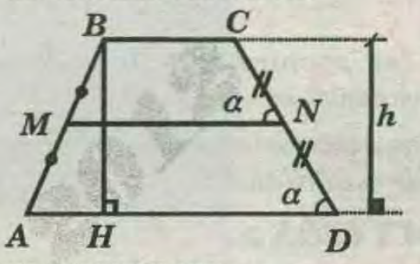
D) ROMBOIDE :

Es el paralelogramo que tiene sus lados consecutivos diferentes.



II) TRAPECIO :

Es el cuadrilátero que solo tiene dos lados paralelos, denominados bases. En todo trapecio el segmento perpendicular a sus bases recibe el nombre de altura y el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos se denomina mediana.



CARACTERISTICAS :

* Bases: $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$..... $(\overline{BC}//\overline{AD})$

* Lados no paralelos: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

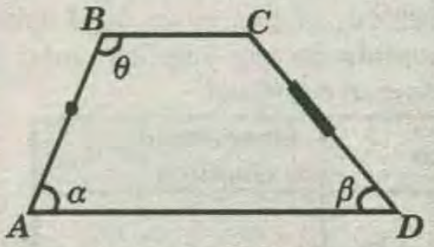
* Altura: $\overline{BH}$ ..... $(BH=h)$

* Mediana: $\overline{MN}$..... $(\overline{MN}//\overline{BC}//\overline{AD})$

CLASIFICACIÓN DE TRAPECIOS

I) TRAPECIO ESCALENO :

Es aquel cuyos lados no paralelos son diferentes.



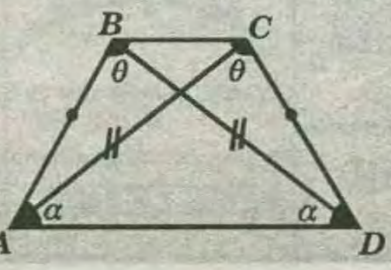
$\overline{AB} \neq \overline{CD}$

$\alpha \neq \beta$

$\alpha + \theta = 180°$

II) TRAPECIO ISÓSCELES :

Es aquel trapecio cuyos lados no paralelos son congruentes, al igual que sus diagonales.



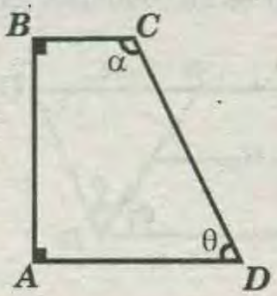
$AB=CD$

$AC=BD$

$\alpha + \theta = 180°$

III) TRAPECIO RECTÁNGULO :

Es aquel trapecio donde uno de los lados no paralelos es perpendicular a las bases.



$\overline{AB} \neq \overline{CD}$

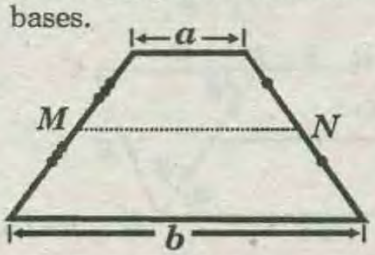
$\overline{AB} \perp \overline{AD}$

$AB < CD$

$\alpha + \theta = 180°$

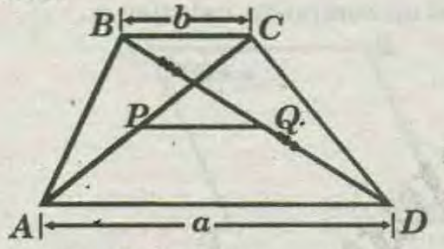
PROPIEDADES DE LOS TRAPECIOS

I) En todo trapecio, la mediana es paralela a sus bases y su mediana es igual a la semisuma de las medidas de sus bases.



$MN = \frac{a+b}{2}$

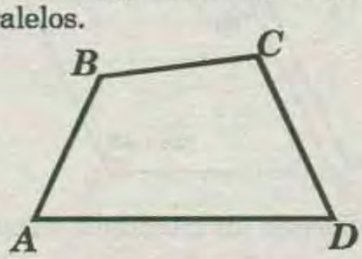
II) En todo trapecio el segmento que une los puntos medios de sus diagonales es paralelo a sus bases y su medida es igual a la semidiferencia de las medidas de sus bases.



$PQ = \frac{a-b}{2}$

III) TRAPEZOIDE :

Es aquel cuadrilátero que no tiene ningún par de lados opuestos paralelos.



PROBLEMAS RESUELTOS

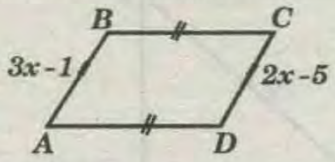
PROBLEMA 01:

En cada paralelogramo $ABCD$, $AB = 3x-1$ y $CD = 2x+5$; calcular "x"

A) 2 **B) 4** **C) 6** **D) 3** **E) 5**

RESOLUCIÓN:

Como los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes, entonces:



$AB = CD$

$3x - 1 = 2x + 5$

$\Rightarrow x = 6$

RPTA : "C"

PROBLEMA 02:

En un cuadrilátero $ABCD$.

$m\sphericalangle A = x$; $m\sphericalangle B = 130°$; $m\sphericalangle C = 80°$ y $m\sphericalangle D = 2x$.

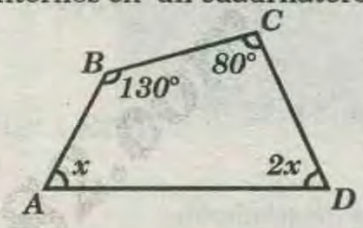
Calcular el valor de "x"

A) 40° **B) 30°** **C) 20°** **D) 50°** **E) 60°**

RESOLUCIÓN:

Graficando:

Pero sabemos que la suma de las medidas de los ángulos internos en un cuadrilátero, suman $360°$, entonces:



$x + 130° + 80° + 2x = 360°$

$\Rightarrow 3x + 210° = 360°$

$\Rightarrow 3x = 360° - 210°$

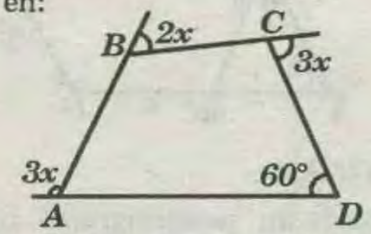
$\Rightarrow 3x = 150° \Rightarrow x = 50°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 03:

Calcular "x" en:

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 60°
E) 70°



RESOLUCIÓN:

Como el ángulo exterior en "D", mide $120°$, entonces aplicaremos la suma de medidas de ángulos exteriores en un polígono, ya que es igual a $360°$. Así:

$3x + 2x + 3x + 120° = 360° \Rightarrow 8x = 240° \Rightarrow x = 30°$

RPTA : "B"

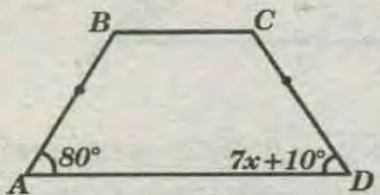
PROBLEMA 04 :

En un trapecio isósceles $ABCD$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$; $m\sphericalangle A = 80°$ y $m\sphericalangle D = 7x + 10°$. Calcular: "$x$".

A) 20° **B) 40°** **C) 30°** **D) 25°** **E) 10°**

RESOLUCIÓN:

Graficando el trapecio isósceles:



Luego

$m\sphericalangle A = m\sphericalangle D$

$7x + 10° = 80°$

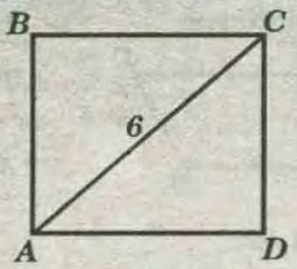
$\Rightarrow x = 10°$

RPTA : "E"

PROBLEMA 05:

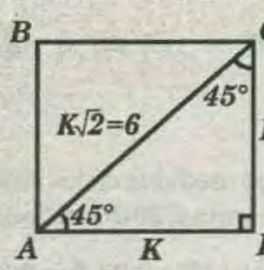
Calcular el perímetro del cuadrado **ABCD**.

A) $\sqrt{2}$
B) $2\sqrt{3}$
C) $12\sqrt{3}$
D) $12\sqrt{2}$
E) $\sqrt{5}$



RESOLUCIÓN:

Del cuadrado se deduce que:



Luego de la diagonal, se obtendrá :

$k\sqrt{2}=6 \Rightarrow k=\frac{6}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow k=\frac{6}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

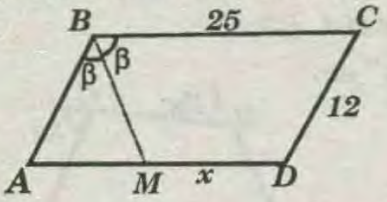
Se pide el perímetro, el cual será:

$\Rightarrow 4k=4\left(3\sqrt{2}\right)=12\sqrt{2}$ **RPTA : "D"**

PROBLEMA 06:

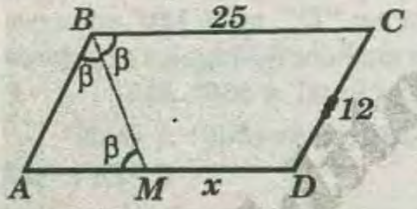
Calcular **"x"**, si **ABCD** es un romboide.

A) 13
B) 12
C) 11
D) 14
E) 9



RESOLUCIÓN:

Como se trata de un paralelogramo. Luego por los ángulos alternos internos se obtendrá que:



Ahora como :

$AD=BC$

$12+x=25$

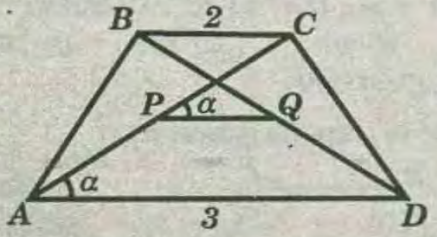
$\Rightarrow x=13$

RPTA : "A"

PROBLEMA 07:

En el trapecio **ABCD**, hallar **"PQ"**, si: $AP=PC$.

A) 1
B) 2
C) 1,5
D) 0,5
E) 0,2



RESOLUCIÓN:

"P" punto medio y $\overline{PQ}\,//\,\overline{AD}$ **"Q"** es punto medio

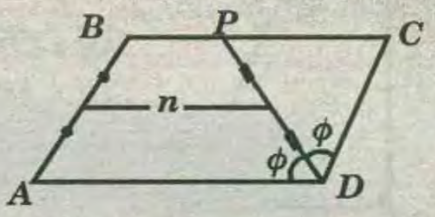
Por propiedad de los puntos medios de las diagonales:

$PQ=\frac{3-2}{2}=0,5$ **RPTA : "D"**

PROBLEMA 08:

Calcular **"n"**; si **ABCD** es un romboide. Si: $AD=14$ y $CD=6$

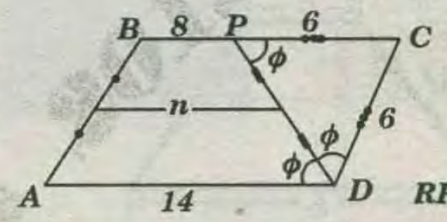
A) 12
B) 9
C) 10
D) 11
E) 8



RESOLUCIÓN:

* Como **ABCD** es un paralelogramo, luego se deduce que **ABPD** es un trapecio.

* Luego aplicamos la propiedad de la mediana en un trapecio, se obtendrá: $\Rightarrow n=\frac{14+8}{2}=11$

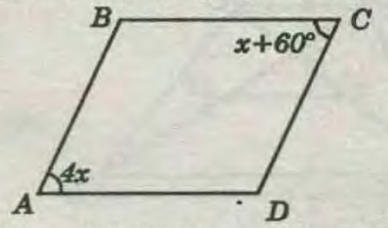


RPTA : "D"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

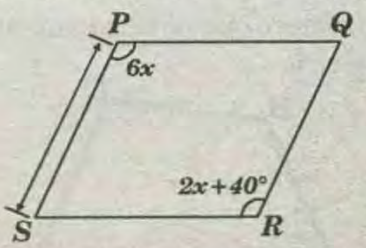
01 Si: **ABCD** es un romboide, calcular x.

A) 30°
B) 15°
C) 40°
D) 20°
E) 18°



02 En el gráfico, si **PQRS** es un rombo, calcular **RP**.

A) 1
B) $5\sqrt{2}$
C) $2\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{2}$
E) 2

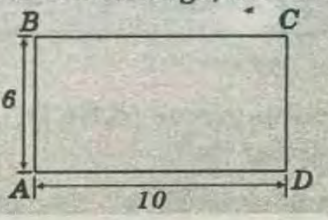


03 Las diagonales de un cuadrado forman un ángulo de:

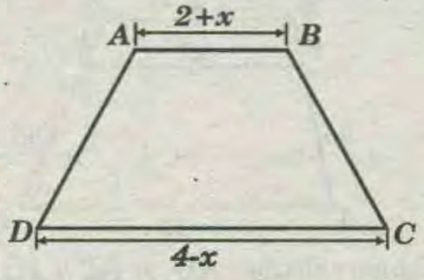
A) 0° B) 60° C) 90° D) 45° E) 180°

04 la figura es un cuadrilongo, calcular su perímetro.

A) 32
B) 29
C) 30
D) 40
E) 20

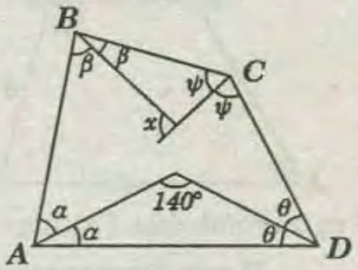


05 Si $\overline{AB} // \overline{CD}$, calcular la mediana del trapecio mostrado.



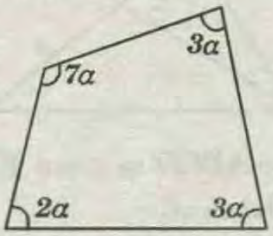
A) 4
B) 5
C) 3
D) 2
E) 1

06 De la figura; calcular x.



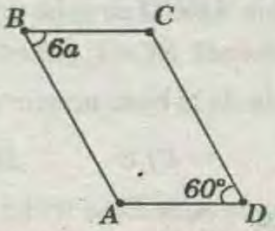
A) 120°
B) 60°
C) 40°
D) 70°
E) 140°

07 Según al gráfico, calcular α



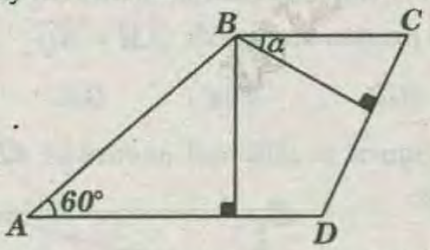
A) 26°
B) 35°
C) 30°
D) 24°
E) 46°

08 Del gráfico, calcular a. si $ABCD$ es un romboide.



A) 60°
B) 10°
C) 100°
D) 45°
E) 90°

09 De la figura, calcular a . si $ABCD$ es un romboide.

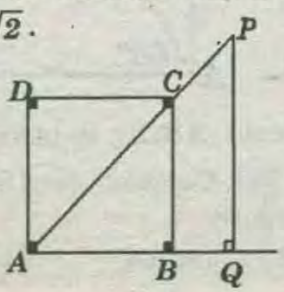


A) 50°
B) 75°
C) 20°
D) 60°
E) 30°

10 Las bases de un trapecio miden **9** y **15**. Calcular su mediana.

A) 3 B) 8 C) 10 D) 12 E) 9

11 Si el lado de un cuadrado $ABCD$ mide **8**, calcular BQ, si $AP=12\sqrt{2}$.

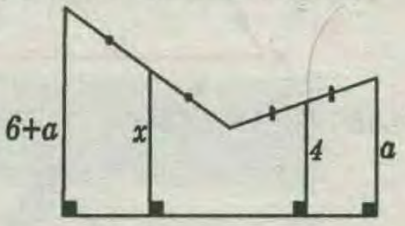


A) 2
B) 4
C) 1
D) 3
E) 6

12 En un trapecio $ABCD$, M es el punto medio de $\overline{AB}$, y N punto medio de la base mayor AD. Si $\overline{CN}$ biseca a $\overline{AD}$ en R, calcular RN; si $RC=6$.

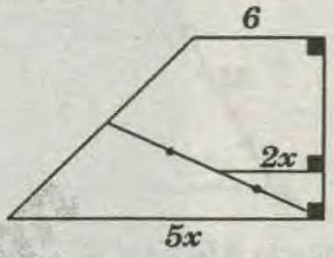
A) 1 B) 3 C) 2 D) 5 E) 7

13 En la figura mostrada; calcular «x»



A) 6
B) 7
C) 5
D) 5,5
E) 4,5

14 en la figura, calcular «x».



A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

15 Los ángulos consecutivos de un paralelogramo están en la relación de **2** a **3**. Entonces el mayor de ellos mide :

A) 72° B) 80° C) 108° D) 90° E) 76°

16 El perímetro de un rectángulo mide **24m** y su base es el doble de su altura. Halla la longitud de su base.

A) 4m B) 8m C) 6m D) 10m E) 15m

17 en un trapecio la suma de sus bases es **36m** ¿Cuántos metros miden su base media?

A) 18 B) 20 C)30 D) 20 E) 25

18 En un paralelogramo $ABCD$ $(AB > DC)$ se traza la bisectriz del ángulo D, qùe corta a AB en E. Si: $\overline{BC}=4cm$ y $\overline{DC}=6cm$. Entonces $\overline{EB}$ mide:

A) 1cm B) 3cm C) 4cm D) 2cm E) 6cm

19 En un trapecio la mediana mide **12cm**. Y la base menor **10cm**. ¿Cuántos **cm**. mide la base?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 13

20 la diagonal de un cuadrado mide **8cm**. ¿Cuántos **cm**. mide el lado del cuadrado?

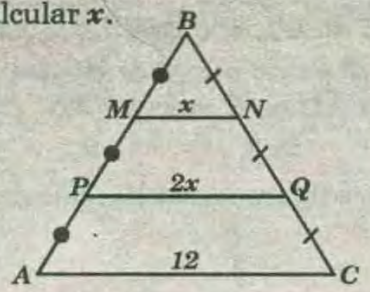
A) 1 B) 3 C) $2\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 En un cuadrilátero $ABCD$, $m\sphericalangle A=40°$, $m\sphericalangle C=60°$; las bisectrices de los ángulos B y D se cortan en "P", calcular el ángulo P.

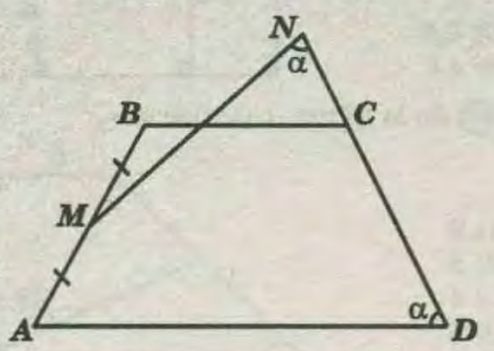
A) 170° B) 135° C) 170° D) 130° E) 140°

02 Del gráfico, calcular x.



A) 4
B) 2
C) 6
D) 8
E) 10

03 Si: $\overline{BC}//\overline{AD}$; $MN=8$ y $BC=6$; calcular : AD



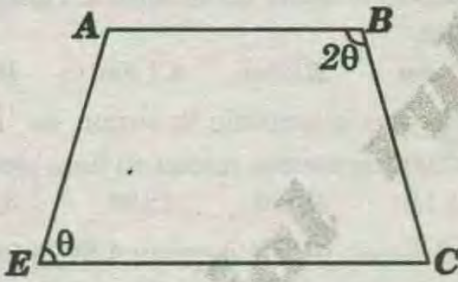
A) 10
B) 8
C) 12
D) 6
E) 7,5

04 En un trapecio $ABCD$, ($\overline{BC}//\overline{AD}$) el ángulo A mide $70°$ y el ángulo D mide $40°$; si $AD=12m$ y $CD=7\ m$. Calcular la medida del segmento BC.

A) 5 B) 8 C) 2 D) 6 E) 4

05 De la figura $\overline{AB}//\overline{CE}$; calcular EC.

Si $AB+BC=9$.



A) 9
B) 12
C) 8
D) 6
E) 4

06 En un cuadrado $ABCD$, se construye interiormente el triángulo equilátero AED. Calcular $m\sphericalangle AEB$

A) 76° B) 60° C) 50° D) 80° E) 90°

07 En un rombo $ABCD$, $AB=5$; $m\sphericalangle A=53°$.

¿Cuánto mide la altura $\overline{BH}$ relativa a $\overline{CD}$?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 1,5

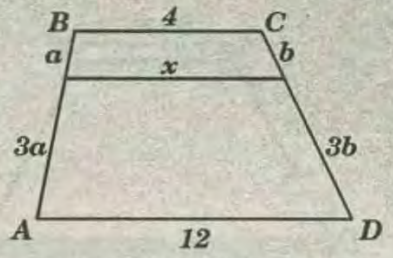
08 En un trapecio isósceles la diagonal mide el doble de su mediana. Calcular la medida del ángulo formado por las diagonales.

A) 45° B) 60° C) 30° D) 150° E) 90°

09 Las diagonales de un trapecio miden 10 y 12. Calcular el máximo valor entero que puede tomar la medida de su mediana.

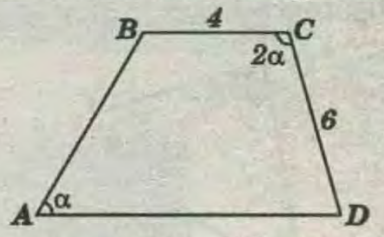
A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

10 Calcular x , si $\overline{BC}//\overline{AD}$



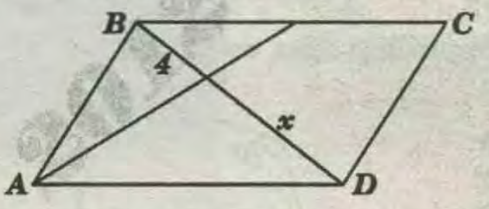
A) 6
B) 9
C) 13
D) 15
E) 27

11 En la figura calcular AD, si $\overline{BC}//\overline{AD}$



A) 10
B) 9
C) 7
D) 8
E) 6

12 Si $ABCD$ es un romboide. Calcular "x"



A) 10
B) 9
C) 13
D) 6
E) 8

13 En un rombo $ABCD$ se traza $\overline{BH}\perp\overline{AD}$, tal que $AH=HD$. Calcular $m\sphericalangle C$.

A) 30° B) 45° C) 40° D) 60° E) 75°

14 En un trapecio $ABCD$ se sabe que :

$m\sphericalangle B=2m\sphericalangle D$; $BC=4$; $AB=5$

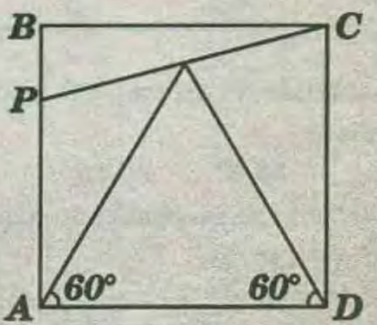
Calcular la medida de la base mayor $\overline{AD}$.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

15 En un romboide $ABCD$ se traza la bisectriz $\overline{DM}$ (M en $\overline{BC}$). Si $AB=6$, calcular la medida del segmento que une los puntos medios de $\overline{AM}$ y $\overline{BD}$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) $2\sqrt{3}$

16 En la figura el lado del cuadrado $ABCD$ es 2, calcular PB.



A) $\sqrt{3}-1$
B) $4-2\sqrt{3}$
C) $\sqrt{3}+1$
D) $2\sqrt{3}-2$
E) $2-\sqrt{2}$

17 En un trapecio $ABCD$, $m\sphericalangle A=m\sphericalangle D=90°$, M es punto medio de $\overline{BC}$. Calcular $m\sphericalangle ADM$, si $AD=2k$, $AB=k-a$ y $CD=k+a$.

A) 30° B) 60° C) 45° D) 53° E) 37°

18 En un trapecio $ABCD$, $\overline{BC}//\overline{AD}$:

$m\sphericalangle A=7\alpha$; $m\sphericalangle D=4\alpha$; $AB+BC=AD$.

Calcular: **a**

A)18° B)12° C)15° D)10° E)9°

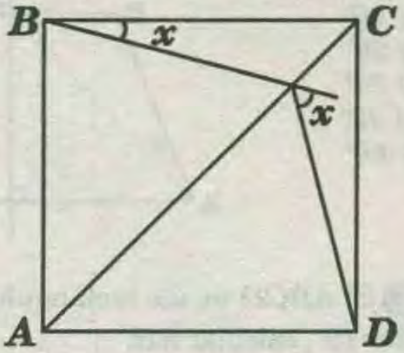
19 En un cuadrilátero $ABCD$

$m\sphericalangle A=80°$; $m\sphericalangle C=120$

¿Cuánto mide el mayor ángulo que forman las bisectrices de los otros dos ángulos?

A)100° B)110° C)120° D)150° E)170°

20 En la figura $ABCD$ es un cuadrado, calcular "x"



A) 30°
B) 45°
C) 15°
D) 37°
E) 53°

TAREA DOMICILIARIA

01 En el trapecio $ABCD$ $m\sphericalangle A=m\sphericalangle B=90°$, la mediatriz de $\overline{CD}$ intecepta en E, a la prolongación $\overline{BA}$, tal que: $AE=BC$. Calcular la $m\sphericalangle D$

A)15° B) 20° C) 30° D) 60° E) 45°

02 En un trapecio isósceles la base mayor mide 60 cm, y los lados no paralelos 30 cm. Si sus diagonales son perpendiculares a los lados no paralelos, la base menor mide:

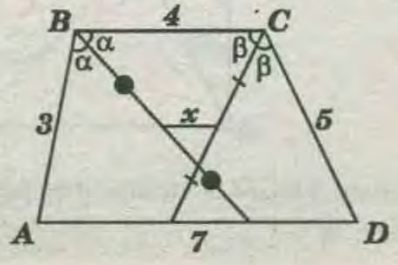
A) 60 B) 37 C) 20 D) 30 E) 40

03 En un trapecio $ABCD$ la base menor $\overline{AB}$ es igual a la altura $\overline{BM}$, el ángulo A mide 135° y el ángulo B mide 150°, calcular el perímetro de este trapecio, sabiendo que $AB=20$.

A)$130+\sqrt{2}$ B)$\sqrt{2}+10\sqrt{3}$ C)$200+10\sqrt{3}$

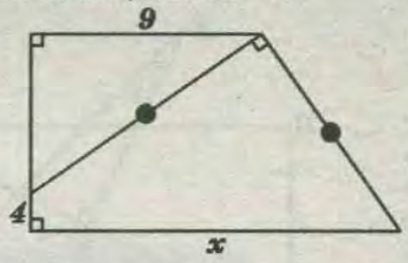
D)$100+20\sqrt{2}+20\sqrt{3}$ E)$20\sqrt{2}+40\sqrt{3}$

04 Si $ABCD$ es un trapecio, calcular "x"



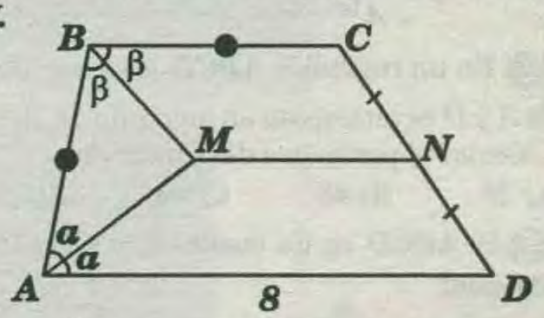
A) 1
B) 2
C) 1,5
D) 2,5
E) 3

05 En la figura mostrada, calcular "x"



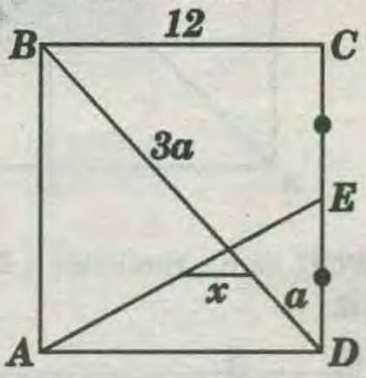
A) 11
B) 15
C) 14
D) 12
E) 13

06 En la figura mostrada, si $ABCD$ es un trapecio; calcular MN.



A) 7
B) 6
C) 5
D) 4
E) 3

07 Si $ABCD$ es un cuadrado, calcular "x"



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 6

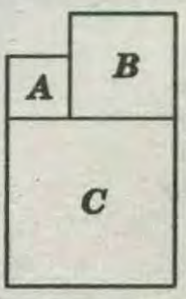
TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular la medida del lado de un cuadrado que tiene el mismo perímetro de un triángulo equilátero cuyo lado mide 12.

A)6 B)10 C)12 D)9 E) 8

02 "A", "B" y "C" son cuadrados. Calcular:

$$\frac{\text{Perímetro (A)}+\text{Perímetro (B)}}{\text{Perímetro (C)}}$$

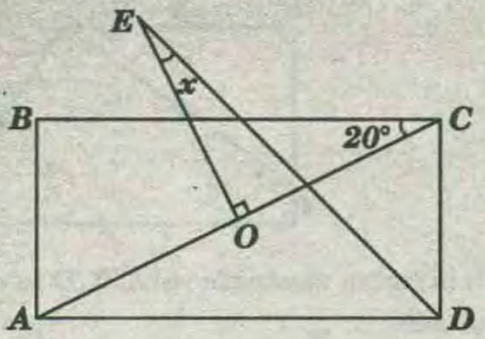


A) 1/2 B)1 C) 2 D) 3/2 E)4

03 En un rombo $ABCD$ se traza $\overline{BH}\perp\overline{AD}$, tal que $AH=HD$. Calcular la $m\sphericalangle C$

A)30° B)45° C) 40° D)60° E) 75°

04 *ABCD* : Rectángulo, *AO=OC=OE*. Calcular *"x"*

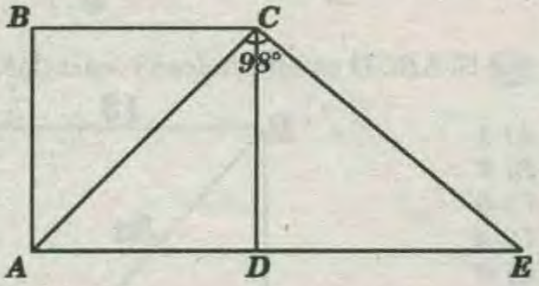


A) 20°
B) 25°
C) 30°
D) 35°
E) 40°

05 En un romboide *ABCD* las bisectrices interiores de *A* y *D* se intersecan en un punto de $\overline{BC}$. Si *AD=18*. Calcular el perímetro del romboide.

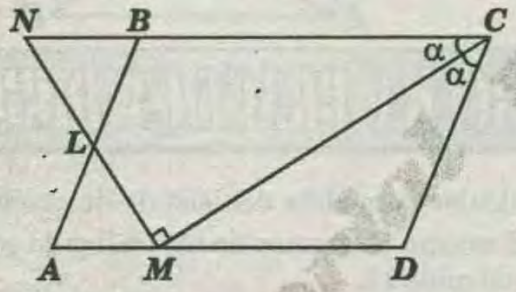
A) 28 B) 45 C) 54 D) 56 E) 60

06 Si *ABCD* es un cuadrado y *CE=15*, calcular la diagonal.



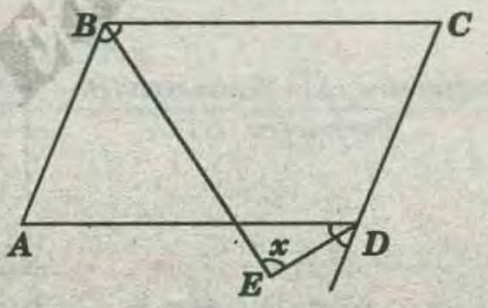
A) $15\sqrt{2}$
B) $9\sqrt{2}$
C) 36
D) $12\sqrt{2}$
E) 48

07 Si *ABCD* es un romboide ; *BC=8* y *CD=5*; calcular *NB*.



A) 1
B) 1,5
C) 2
D) 2,5
E) 3

08 En la figura ; $\overline{BE}$ y $\overline{DE}$ son bisectrices interior y exterior respectivamente. Calcular "x"



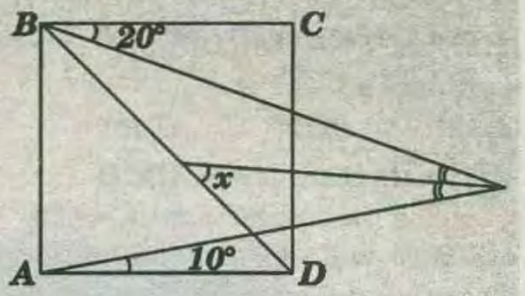
A) 75°
B) 45°
C) 90°
E) 60°
E) 120°

09 Se tiene un paralelogramo *ABCD* , sobre $\overline{CD}$ se ubica el punto medio *"M"* tal que $m\sphericalangle ABM=90°$.

Calcular *AD*, *AB=6* y *MB=4*.

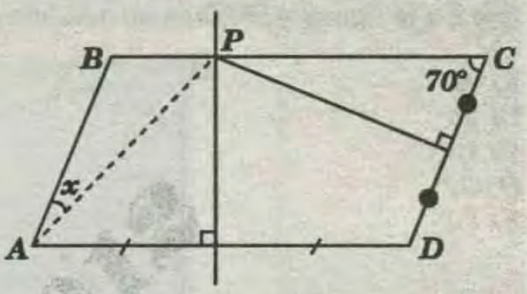
A)4 B)5 C)6 D)6,5 E) 7

10 Si *ABCD* es un cuadrado ; calcular *"x"*



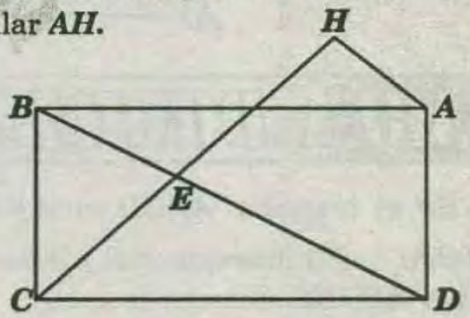
A) 30°
B) 40°
C) 45°
D) 50°
E) 55°

11 *ABCD* : Paralelogramo. Calcular *"x"*



A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°

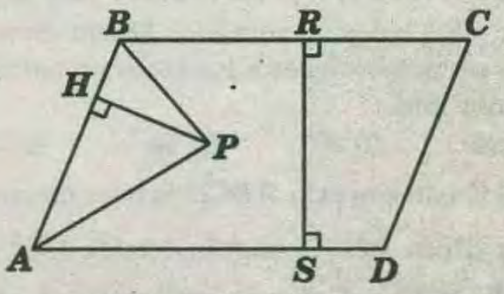
12 Si *ABCD* es un rectángulo : *HE=EC*, *BE=7* y *ED=13* , calcular *AH*.



A) 3
B) 4
C) 4,5
D) 5
E) 6

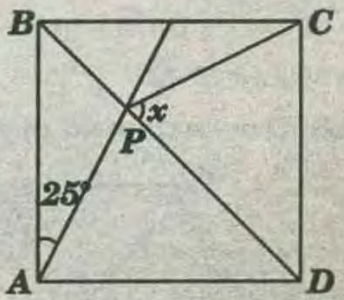
13 *ABCD* : Paralelogramo , *PH=6*.

Calcular *RS*.



A) 18
B) 6
C) 12
D) 16
E) 10

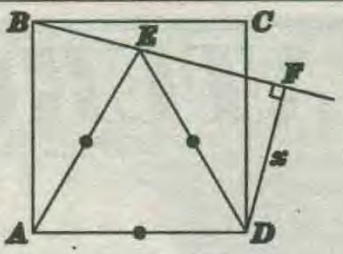
14 Si *ABCD* es un cuadrado , calcular *"x"*



A) 50°
B) 55°
C) 60°
D) 65°
E) 70°

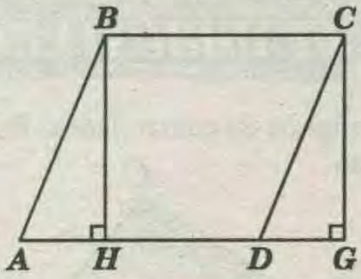
15 En la figura *ABCD* : Cuadrado de perímetro igual a *16*. Calcular *"x"*

A) $2\sqrt{2}$
B) $3\sqrt{2}$
C) $4\sqrt{2}$
D) 2
E) 3



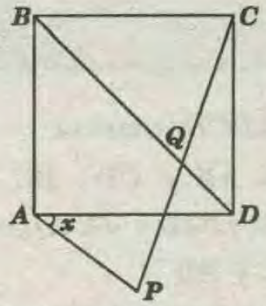
(16) en la figura $ABCD$: Rombo , $BC=10$ y $AG=16$. Calcular BH.

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10



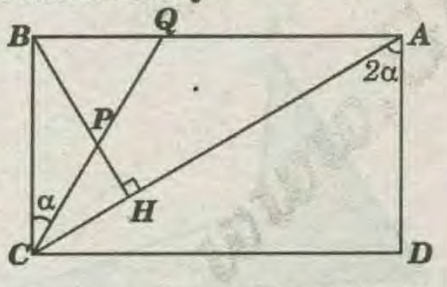
(17) En la figura $ABCD$: Cuadrado $CQ=QP$. Calcular "x"

A) 60°
B) 30°
C) 75°
D) 37°
E) 45°



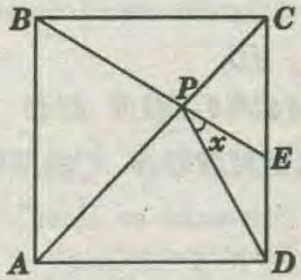
(18) En el rectángulo $ABCD$ si $BQ=6$,calcular el máximo valor entero de PQ.

A) 9
B) 10
C) 11
D) 12
E) 13



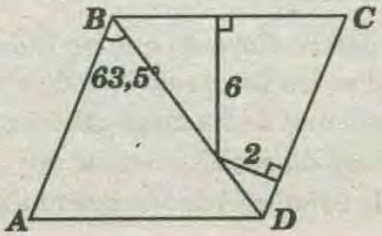
(19) Si $ABCD$ es un cuadrado y $DE=EP$, calcular "x"

A) 22,5°
B) 15°
C) 37°
D) 30°
E) 26,5°



(20) Calcular el perímetro del rombo.

A) 30
B) 40
C) 92
D) 36
E) 50



TAREA DOMICILIARIA

(01) Calcular la medida de uno de los ángulos de un rombo , si una de sus diagonales mide igual que uno de sus lados.

A)45° B)53° C)75° D)60° E)90°

(02) En un romboide $ABCD$ se traza la bisectriz $\overline{DM}$ ("M" en $\overline{BC}$). Si $AB=6$, calcular la medida del segmento que une los puntos medios de $\overline{AM}$ y $\overline{BD}$

A)2 B)3 C)4 D)6 E) $2\sqrt{3}$

(03) La diagonal de un cuadrado mide $6\sqrt{2}$. Calcular el perímetro del cuadrado.

A)18 B)20 C)24 D) 30 E) 36

(04) En un paralelogramo $ABCD$, $m\sphericalangle A=3x+20$ y $m\sphericalangle B=2x+30$. Calcular "x"

A)13° B)26° C)18° D)36° E) 40°

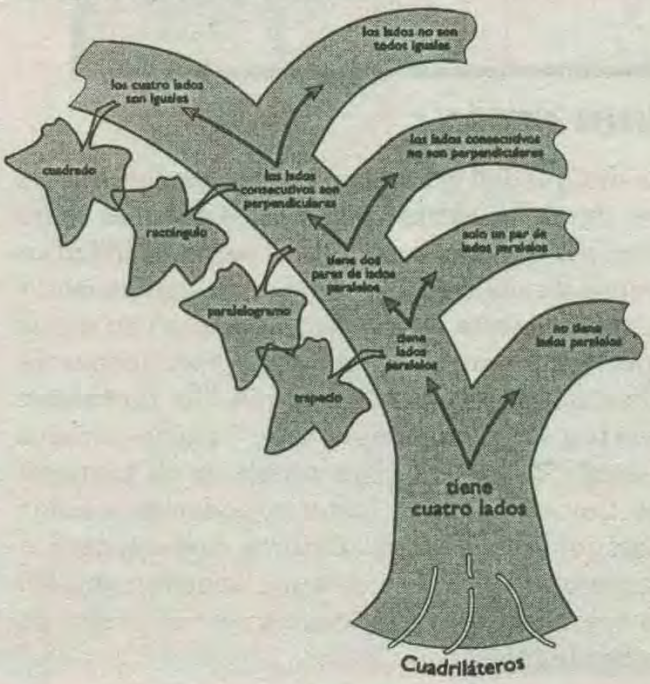
(05) Se tiene un romboide $ABCD$; $BC=5$. "M" es punto medio de $\overline{CD}$ y $m\sphericalangle ABM=90°$. Si $AB=6$, calcular $m\sphericalangle A$

A)37° B)45° C)53° D)30° E) 60°

PRIMERA PRACTICA					CUADRILÁTEROS				
1) D	2)E	3) C	4) A	5)C	6) E	7) D	8) B	9) E	10) D
11) B	12) C	13) B	14) A	15)C	16) B	17)A	18)D	19)C	20)D

SEGUNDA PRACTICA					CUADRILÁTEROS				
1) C	2)A	3) A	4) A	5) A	6) A	7) A	8) B	9) D	10) A
11) A	12) E	13) *	14) D	15)B	16) B	17) C	18) B	19) A	20) A
01) E	02) C	03) D	04)C	05) C					

TERCERA PRACTICA					CUADRILÁTEROS				
1) D	2)B	3) D	4) B	5) C	6) B	7) C	8) C	9) B	10) B
11) C	12) E	13) C	14) E	15)C	16) C	17)E	18) C	19) D	20) B
01) D	02) B	03) C	04)B	05) C					



CUADRILATEROS II

CAPITULO 15C

OBJETIVOS :

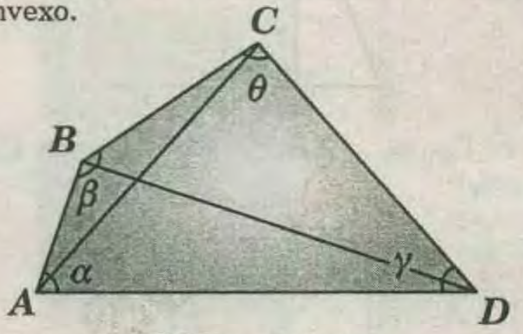
* Definir al cuadrilátero.
* Definir al paralelogramo.
* Conocer la clasificación del paralelogramo y sus teoremas.
* Aplicar los diversos teoremas en la resolución de problemas de cuadriláteros.

INTRODUCCIÓN :

Desde la antigüedad el hombre hizo demarcaciones de terrenos, dándoles ciertas formas geométricas entre la que destaca la forma rectangular por la facilidad en la que consistía realizarla y facilidad de distribución y medida. Además esta forma geométrica se uso en las construcciones con el objetivo de aprovechar la estabilidad que ofrecen. Por ejemplo ***"la fortaleza antisísmica de Ollantaytambo"*** cuyas paredes están hechas de piedra cuya forma es de trapecio isósceles. Con este análisis histórico podemos percibir que el estudio de los cuadriláteros nos ayudará a entender porque muchos objetos que vemos en nuestro entorno (paredes, pizarras, cuadernos, etc.) son de forma cuadrangular.

CUADRILÁTEROS

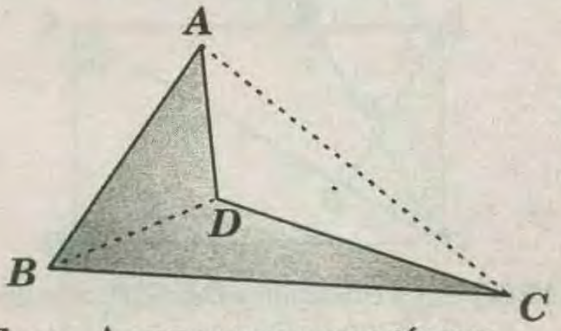
Es aquel polígono de cuatro lados. Puede ser convexo o no convexo.



En la figura, $\triangle ABCD$: convexo

* Lados opuestos: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$
* Ángulos opuestos: $\sphericalangle BAD$ y $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle ADC$.
* Diagonales: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.
* Suma de medidas de ángulos interiores.

$$\alpha+\beta+\theta+\gamma=360°$$



En la figura, $\wedge ABD$: no convexo o cóncavo.

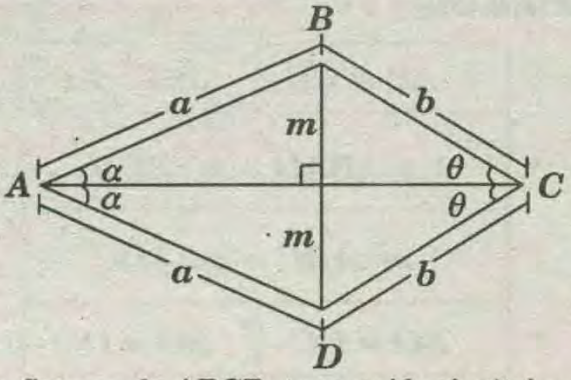
* Diagonales: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS.

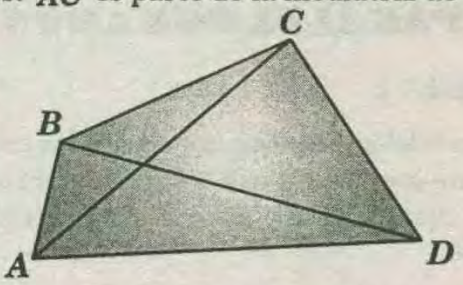
La cuadriláteros convexos se clasifican según el paralelismo de sus lados opuestos, en:

TRAPEZOIDE :

Es aquel cuadrilátero convexo que no presenta lados opuestos paralelos. Un trapezoide puede ser simétrico (trapezoide donde una de las diagonales es parte de la mediatriz de la otra diagonal) o asimétrico (trapezoide que no cumple la condición del trapezoide simétrico).



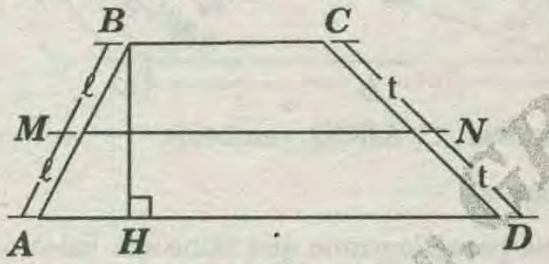
* En la figura, $\triangle ABCD$: trapezoide simétrico.
* Entonces: $\overline{AC}$ es parte de la mediatriz de $\overline{BD}$.



* En la figura, $\triangle ABCD$: trapezoide asimétrico.

TRAPECIO :

Es aquel cuadrilátero convexo que solo tiene un par de lados opuestos paralelos.



En la figura, si: $\overline{BC} // \overline{AD}$, $\overline{AB} \not// \overline{CD}$ entonces $\triangle ABCD$ es un trapecio.

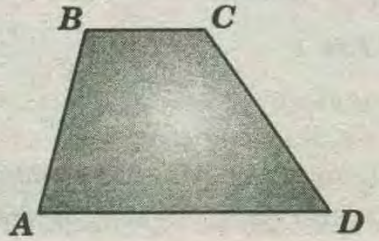
* Bases: $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$
* Laterales: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$
* Altura: $\overline{BH}$
* Base media: $\overline{MN}$

CLASIFICACION DE TRAPECIOS :

Los trapecios se clasifican de acuerdo a la longitud de sus lados laterales en:

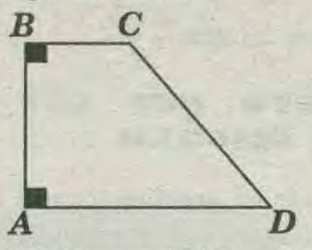
TRAPECIO ESCALENO :

Es aquel trapecio cuyos lados laterales tienen diferente longitud.



En la figura, si: $\overline{BC} // \overline{AD}$ y $\overline{AB} \neq \overline{CD}$

$\rightarrow \triangle ABCD$: trapecio escaleno.



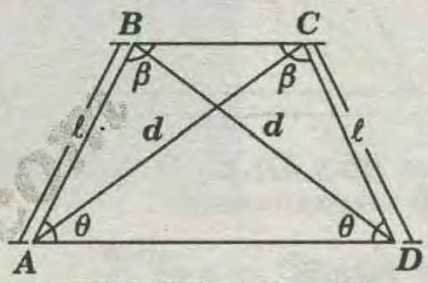
En la figura $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle BAD = 90°$

$\rightarrow \triangle ABCD$: trapecio rectángulo.

Recto en A y B. también es un trapecio escaleno.

TRAPECIO ISÓSCELES :

Es aquel trapecio cuyos lados laterales son de igual longitud.



En la figura, si: $\overline{BC} // \overline{AD}$ y $AB = CD$

$\rightarrow \triangle ABCD$: trapecio isósceles

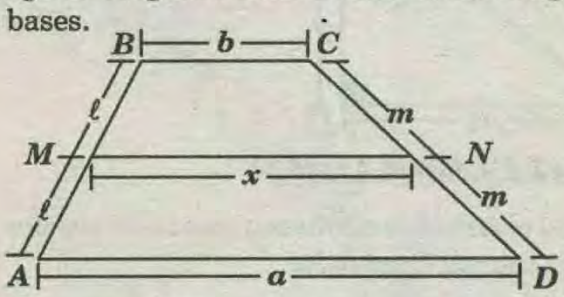
* *PROPIEDAD :*

$$m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle CDA \text{ y } AC = BD$$

PROPIEDADES EN TRAPECIOS

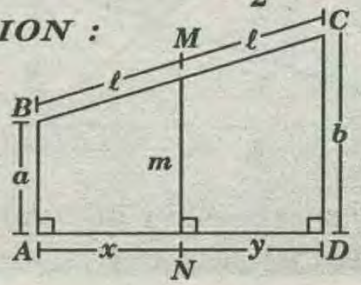
I) MEDIANA EN TRAPECIO :

En todo trapecio, la base media es paralela a sus bases y su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de sus bases.



* En la figura, $\overline{MN}$ es la base media del trapecio $ABCD$.
* Se cumple: $\overline{MN} // \overline{BC} \Rightarrow x = \dfrac{a+b}{2}$

OBSERVACION :



www.FREE2.com

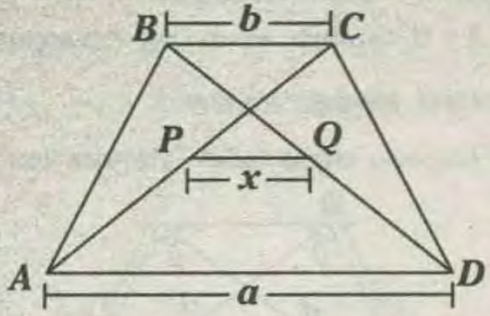
En la figura *ABCD*: Trapecio rectángulo.

Si: M es punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{MN} \perp \overline{AD}$

Se cumple: $x = y \Rightarrow m = \frac{a+b}{2}$

II) SEGMENTO QUE UNE EL PUNTO MEDIOS DE DIAGONAL :

En todo trapecio el segmento que une los puntos medios de sus diagonales es paralelo a sus bases y su longitud es igual a la semidiferencia de las longitudes de dichas bases.

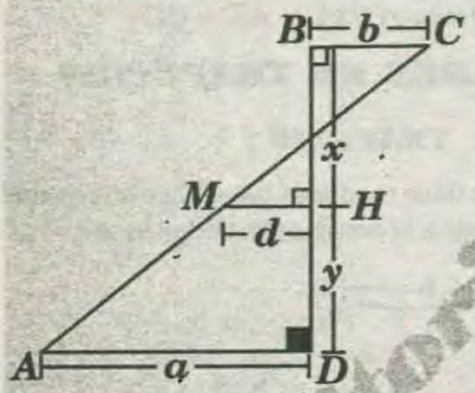


* En la figura $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, P y Q son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente.

* Se cumple: $\overline{PQ} \parallel \overline{BC} \Rightarrow x = \frac{a-b}{2}$

NOTA:

En la figura, M es punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{MH} \perp \overline{BD}$



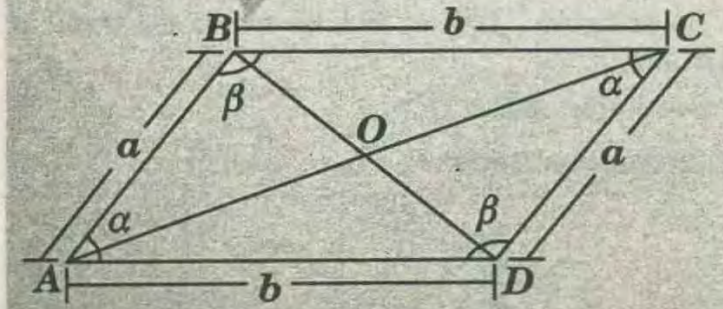
Se cumple:

$x = y$

$\Rightarrow d = \frac{a-b}{2}$

PARALELOGRAMO :

Es aquel cuadrilátero convexo que tiene sus dos pares de lados opuestos paralelos.



En la Figura, si: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

$\rightarrow$ $\square ABCD$: paralelogramo

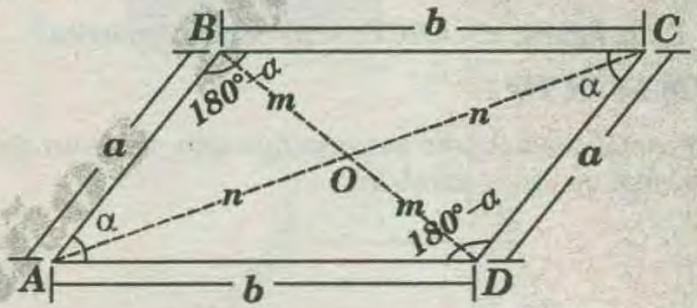
PROPIEDADES :

*	$AB = CD$	$BC = AD$
*	$m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle BCD$	
*	$m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle ADC$	
*	$AO = OC$	$BO = OD$

CLASIFICACION DE LOS PARALELOGRAMOS

ROMBOIDE :

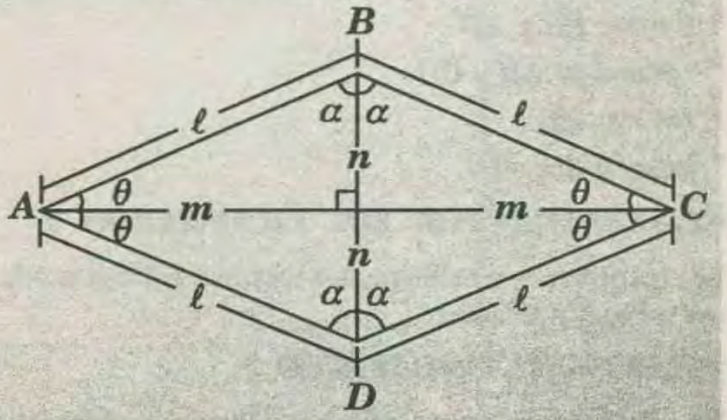
Es aquel paralelogramo que tiene los lados consecutivos de diferente longitud y sus ángulos interiores tienen medidas distintas de $90°$. No es equilátero ni equiángulo.



En la figura, $\square ABCD$: romboide

ROMBO :

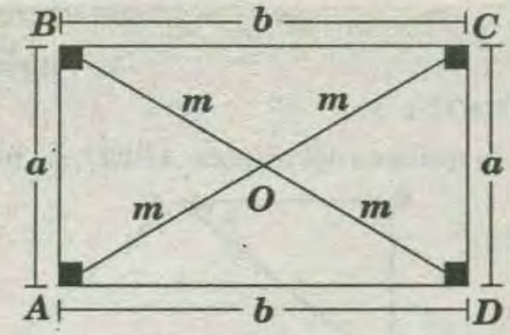
Es aquel paralelogramo que tiene sus lados de igual longitud y sus ángulos interiores tienen medidas distintas de $90°$. Es equilátero y no equiángulo.



En la figura, $\square ABCD$: rombo

RECTANGULO :

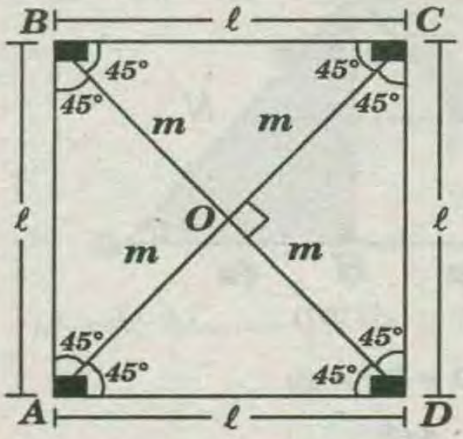
Es aquel paralelogramo que tiene sus lados consecutivos de diferente longitud y las medidas de sus ángulos son iguales a $90°$. Es equiángulo, pero no equilátero.



En la figura, $\square ABCD$: rectángulo

CUADRADO :

Es aquel paralelogramo que tiene sus lados de longitud y las medidas de sus ángulos igual a $90°$. Es equilátero y equiángulo, es decir que el cuadrado es un polígono regular.



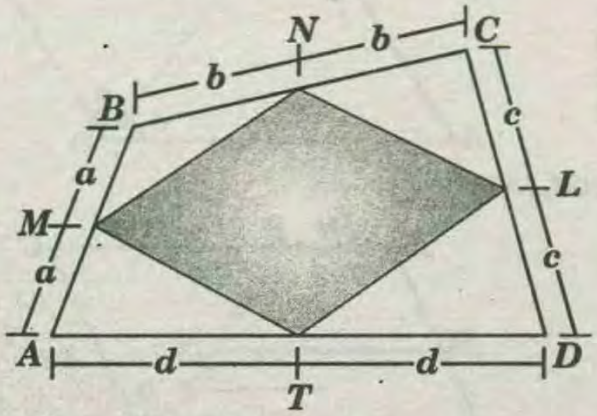
$AC = BD = \sqrt{2}$

* En la figura, $\square ABCD$: Cuadrado

O: Centro del cuadrado.

PROPIEDAD :

En un cuadrilátero convexo o no convexo, el cuadrilátero que tiene por vértices a los puntos medios de sus lados es un paralelogramo.



* En la figura, M, N, L y T: puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente.

* Se cumple:

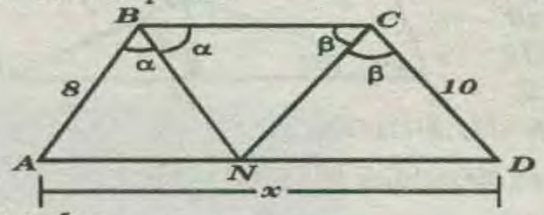
$\square MNLT$: Paralelogramo

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

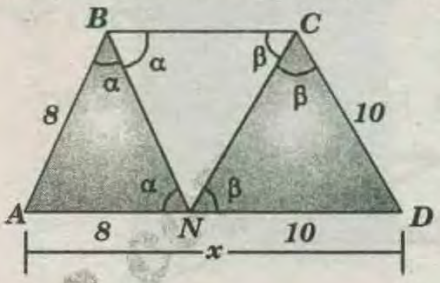
Calcular "x" en el trapecio :

A) 15
B) 18
C) 12
D) 17
E) 19



RESOLUCIÓN:

* Como las bases de un trapecio, son paralelas , luego completamos los ángulos (por alternos internos).



*Luego de formarse triángulos isósceles , se obtendrá :

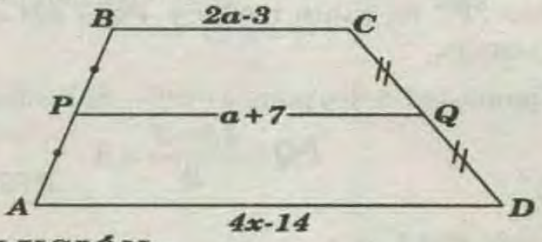
$x = 8 + 10 = 18$

RPTA : "B"

PROBLEMA 2:

En el trapecio, calcular "x".

A) 8
B) 15/2
C) 31/4
D) 6
E) 10



RESOLUCIÓN:

* Por la propiedad de la mediana , se obtendrá :

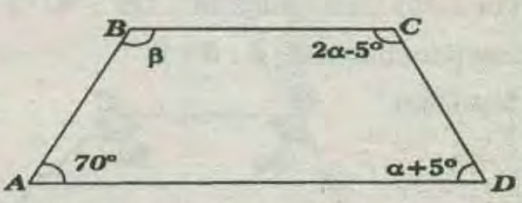
$$a+7 = \frac{2a-3+4x-14}{2} \Rightarrow 31 = 4x \Rightarrow x = \frac{31}{4}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

En la figura: $\overline{BC} \,//\, \overline{AD}$, calcular "$\alpha$" y "$\beta$"

A) 30° y 20°
B) 60° y 50°
C) 60° y 98°
D) 60° y 110°
E) 70° y 105°



RESOLUCIÓN:

* De la figura: $70° + \beta = 180°$ (ángulo consecutivo en un trapecio).

$$\Rightarrow \beta = 110°$$

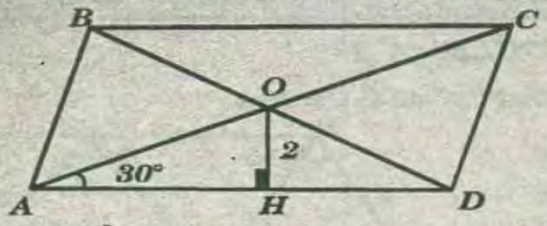
* Ahora: $2\alpha - 5° + \alpha + 5° = 180°$ (ángulo consecutivos en un trapecio). $\Rightarrow 3\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 60°$

RPTA : "D"

EDICIONES GRATIS

PROBLEMA 4:

Si $ABCD$ es un paralelogramo, calcular "AC".



A) 16
B) 8
C) 10
D) 12
E) 9

RESOLUCIÓN :

* Las diagonales BD y AC se bisecan:

* Entonces el $\triangle AOH$ es notable ($30°$ y $60°$)

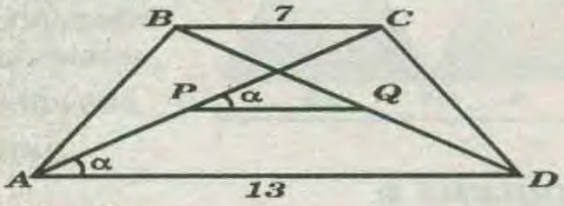
$$\Rightarrow AO=4 \Rightarrow AC=2(4)$$

* Luego: $AC = 8$

RPTA : "B"

PROBLEMA 5 :

En el trapecio $ABCD$, hallar "PQ", si : $AP = PC$



A) 4
B) 5
C) 10
D) 3
E) 2

RESOLUCIÓN:

* Como "P" es punto medio y $\overline{PQ} // \overline{AD} \Rightarrow$ "Q" es punto medio.

* Por propiedad de los puntos medios de las diagonales:

$$PQ = \frac{13-7}{2} = 3$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 6 :

En un trapecio de $ABCD$:

$$\frac{m\sphericalangle A}{3} = \frac{m\sphericalangle B}{5} = \frac{m\sphericalangle C}{6} = \frac{m\sphericalangle D}{2}$$

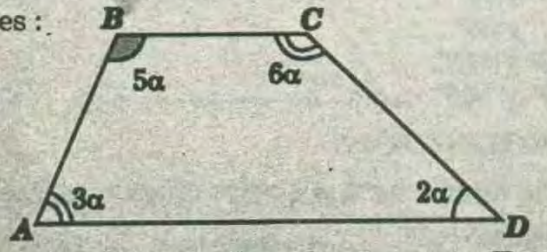
hallar: $m\sphericalangle D$

A) 20° B) 30° C) 40° D) 45° E) 60°

RESOLUCIÓN :

* Por datos los ángulos "A", "B", "C" y "D" son proporcionales a 3 ; 5 ; 6 y 2.

* Entonces :



$m\sphericalangle A=3\alpha; m\sphericalangle B= 5\alpha; m\sphericalangle C=6\alpha$ y $m\sphericalangle D=2\alpha$

* Como la suma de los ángulos internos es igual a $360°$

$\rightarrow 3\alpha + 5\alpha + 6\alpha + 2\alpha = 360°$

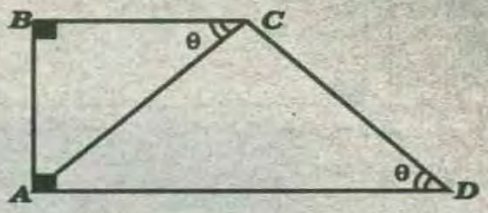
$\Rightarrow 16\alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 22{,}5°$

* Luego: $m\sphericalangle D = 2\alpha = 45°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 7 :

Calcular la mediana del trapecio $ABCD$, si : $BC = 4u$.



A) 3u
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

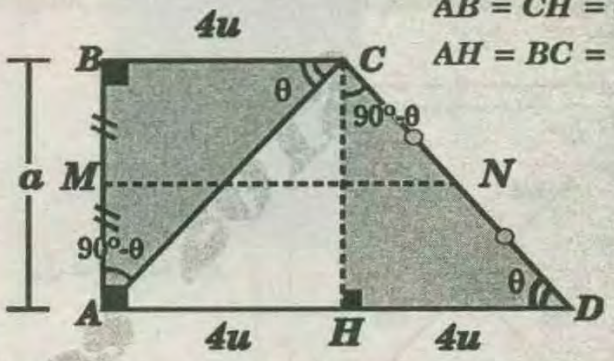
RESOLUCIÓN:

* Se traza $CH \perp AD$

$\rightarrow$ $ABCH$ es un rectángulo:

$AB = CH = a$

$AH = BC = 4u$



* Además : $\triangle ABC \cong \triangle CHD$ .....$(A - L - A)$

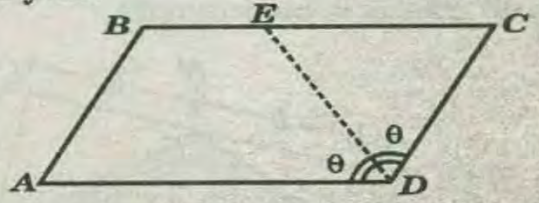
$\Rightarrow HD = BC = 4u$

* $ABCD$: $MN = \frac{4+8}{2} = 6u \Rightarrow$

RPTA : "D"

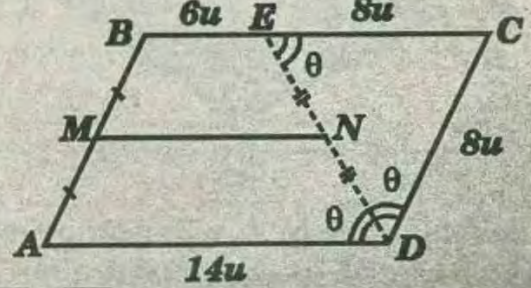
PROBLEMA 8 :

Si $ABCD$ es un romboide, tal que: $AD=14u$ y $CD=8u$. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de AB y ED.



A) 8u
B) 10
C) 12
D) 14
E) 9

RESOLUCIÓN:



* Como $\overline{BC} // \overline{AD}$

$\Rightarrow m\sphericalangle CED = m\sphericalangle EDA = \theta$

* Luego el ΔECD es isósceles $\Rightarrow EC = DC = 8u$

* $\square ABCD$: $BC = AD = 14 \Rightarrow BE = 14 - 8 = 6u$

* $\square ABED$: $MN = \frac{6+14}{2} = 10u$

RPTA: "B"

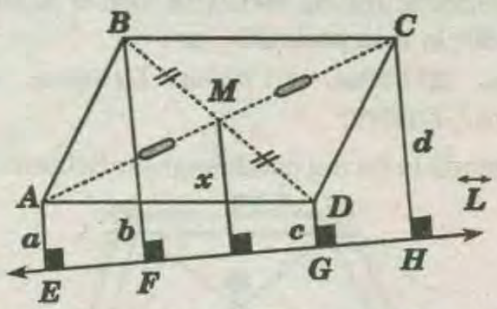
PROBLEMA 9 :

La suma de las distancias desde los vértices de un romboide a una recta exterior es $24u$. Calcular la distancia del punto de intersección de las diagonales a la misma recta exterior al romboide.

A) 6u B) 8 C) 10 D) 5 E) 4

RESOLUCIÓN:

* Sea $ABCD$ el romboide y $\overleftrightarrow{L}$ la recta exterior.



* Por dato del problema : $a + b + c + d = 24u$

* $\square ABCD$: $AM = MC$; $BM = MD$

* $\triangle ACHE$: $x = \frac{a+d}{2}$ .....(I)

* $\triangle BDGF$: $x = \frac{b+c}{2}$ .....(II)

* De (I) + (II) :

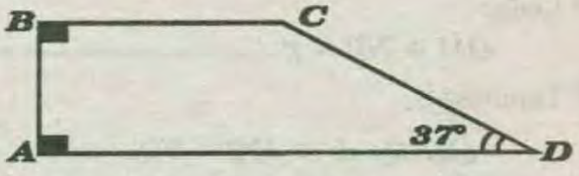
$$2x = \frac{a+b+c+d}{2} \Rightarrow x = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{24}{4} = 6u$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 10 :

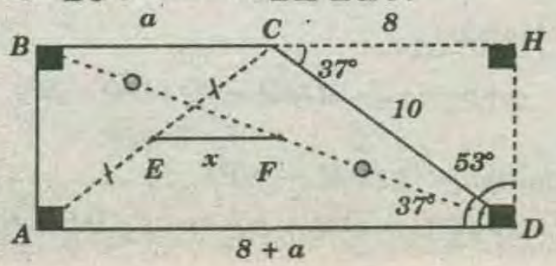
Si: $CD = 10u$, hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

A) 4u
B) 3
C) 3,5
D) 5
E) 6



RESOLUCIÓN:

* Se prolonga $\overline{BC}$ y se traza $\overline{DH} \perp \overline{BC}$.



$\Rightarrow m\sphericalangle CDH = 90° - 37° = 53°$

* $\triangle CHD$ ($\triangle$ de 37° y 53°): $CH = 10\left(\frac{4}{5}\right) = 8u$

* $\square ABHD$: $AD = BH = 8 + a$

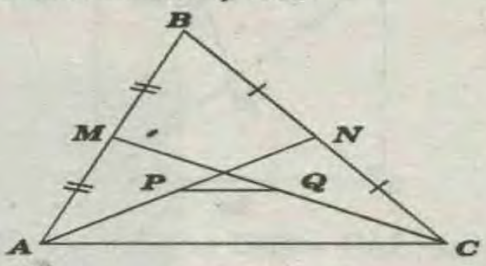
* $\triangle ABCD$: $x = \frac{8+a-a}{2} = 4u$

RPTA: "A"

PROBLEMA 11 :

Si : $AC = 24u$, calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AN}$ y $\overline{MC}$.

A) 6u
B) 5
C) 4
D) 3
E) 8



RESOLUCIÓN:

* Como: $AC = 24u \Rightarrow MN = \frac{AC}{2} = 12u$ ....(base media)

* $\triangle AMNC$: $PQ = \frac{AC - MN}{2} = \frac{24 - 12}{2} = 6u$

RPTA: "A"

ROBLEMA 12 :

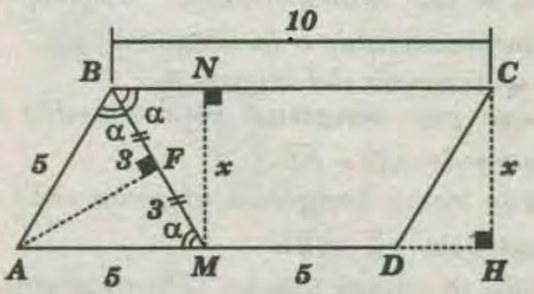
En un paralelogramo $ABCD$, se traza $\overline{BM}$ bisectriz del ángulo ABC ("M" en $\overline{AD}$) siendo :

$AM = MD$; $BC = 10u$ y $BM = 6u$.

Calcular la distancia de "C" al lado $\overline{AD}$.

A) 6u B) 5 C) 4,2 D) 5,4 E) 4,8

RESOLUCIÓN :



* $\square ABCD$:

$AD = BC = 10u \Rightarrow AM = MD = 5u$

* Como : $\overline{BC} // \overline{AD}$ $m\sphericalangle AMB = m\sphericalangle MBC = \alpha$

* $\triangle ABM$ (Isósceles): $AB = AM = 5u$

* Se traza: $\overline{AF} \perp \overline{BM} \Rightarrow BF = MF = \frac{BM}{2} = \frac{6}{2} = 3u$

* $\triangle ABF$: ($\triangle$ de 53° y 37°) $\Rightarrow \alpha = 53°$

* Se traza : $\overline{MN} \perp \overline{BC} \Rightarrow MN = CH = x$

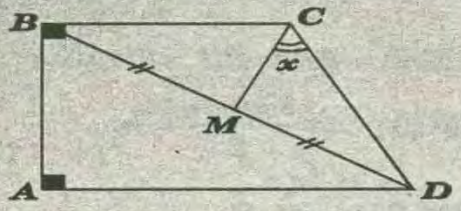
* $\triangle MBN$ ($\triangle$ de 53° y 37°) $x = \frac{6}{5}(4) = 4,8u$

RPTA: "E"

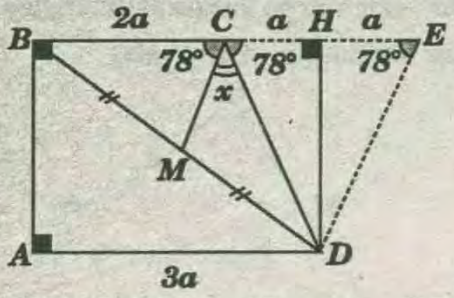
PROBLEMA 13:

Hallar *"x"*, si: $m\sphericalangle BCM = 78°$ y $2AD = 3BC$.

A) 32°
B) 24°
C) 36°
D) 42°
E) 54°



RESOLUCIÓN:



* Como : $2AD = 3BC \Rightarrow AD = 3a$ y $BC = 2a$
* Se traza : $\overline{DH} \perp \overline{BC}$
* $\square ABHD$: $BH = AD = 3a \Rightarrow CH = a$
* Se traza: $\overline{DE} \perp \overline{MC}$
* ΔDBE : Como $\overline{CM}$ es base media
  $\Rightarrow HE = a$ y $m\sphericalangle E = m\sphericalangle BCM = 78°$
* ΔCDE (Isósceles): $\Rightarrow m\sphericalangle C = m\sphericalangle E = 78°$
  $\Rightarrow x = 180° - 2(78°) \Rightarrow x = 24°$

RPTA : "B"

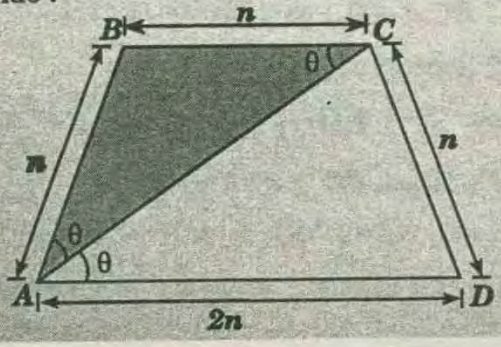
PROBLEMA 14 :

Los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ de un trapecio $ABCD$ son iguales. Si $\overline{AD}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y tiene el doble de la longitud de $\overline{BC}$; la diagonal $\overline{AC}$:

A) es perpendicular a la diagonal $\overline{BD}$.
B) Es la bisectriz del ángulo A.
C) Tiene por longitud el promedio de las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$.
D) Tiene como longitud el promedio de las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$.
E) Divide en partes iguales a la diagonal.

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Sea : $m\sphericalangle BAC = \theta$
* De la figura: ΔABC : isósceles
* Luego : $m\sphericalangle BCA = \theta$
* ΔACD: (Por alternos internos)
  $m\sphericalangle CAD = m\sphericalangle BCA = \theta$
* En $ABCD$: AC : Bisectriz del ángulo A.

RPTA : "B"

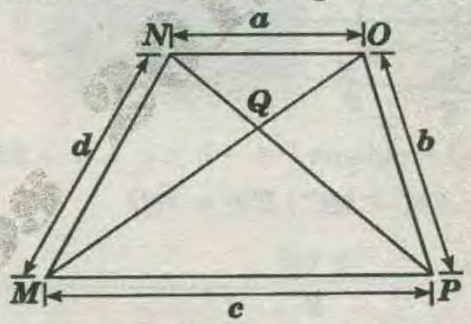
PROBLEMA 15:

Dado un terreno cuadrangular , cuyas diagonales miden ***80m*** y ***100m*** respectivamente ; se pregunta el propietario del mismo por la magnitud del perímetro y este contesta que no recuerda bien si la longitud es ***370*** ó ***380***. lo más probable , es :

A) 380m. B) 370m. C) 220m. D) 160m. E)420m.

RESOLUCIÓN:

* Graficando la forma cuadrangular del terreno.



* Sea el perímetro : $P = a + b + c + d$
* Por dato : $OM = 80$, $NP = 100$
* De la figura ; por desigualdad triangular :

$\Delta MNO: OM < a + d$
$\Delta MPO: OM < c + b$
$\Delta ONP: NP < a + b$
$\Delta NMP: NP < a + b$

* Sumando $2(OM + NP) < 2\underbrace{(a+b+c+d)}_{\text{Perímetro}}$
* Luego :

$OM + NP < p$.....(I)

* También :

$\Delta MNQ: d < MQ + NQ$
$\Delta OQP: b < OQ + QP$
$\Delta NQO: a < OQ + NQ$
$\Delta MQC: c < MQ + QP$

* Sumando :

$$\underbrace{a+b+c+d}_{OM} < 2(\underbrace{MQ+NQ}_{NP}+\underbrace{OQ+QP}_{NP})$$

Perímetro $< 2\,(OM + NP)$.....(II)

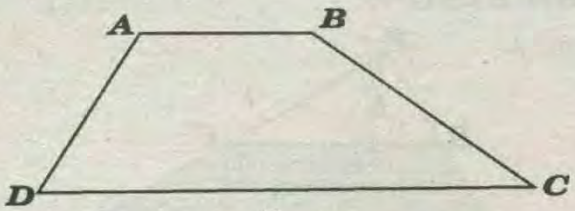
* De (I) y (II) : $OM + NP < p < 2(OM + NP)$

* Reemplazando : $180 < p < 360 \Rightarrow p = 220$

RPTA : "C"

PROBLEMA 16:

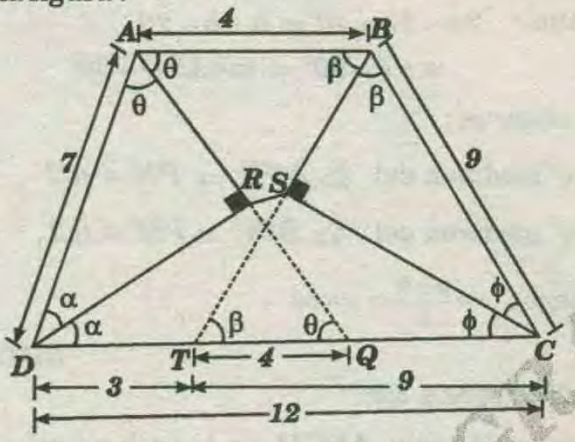
En un trapecio $ABCD$, de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, se trazan las bisectrices de los ángulos A y D que se cortan en R y las bisectrices de los ángulos B y C que se cortan en S. Hallar RS, si $AB = 4$, $CD=12$, $AD=7$ y $BC = 9$.



A) 0 B) 4 C) $\frac{7}{4}$ D) 1 E) 3

RESOLUCIÓN:

* Dada la figura :



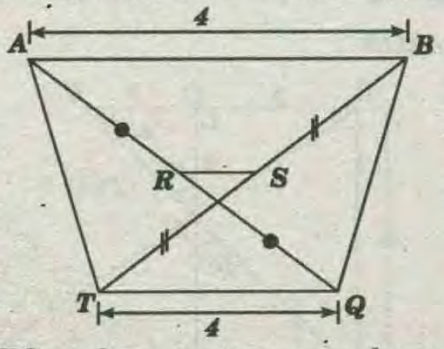
* Prolongamos BS y AR hasta que corten a DC en "T" y "Q" respectivamente.

* De la figura :

ΔTCB: isósceles $BC=TC=9$ $BS=ST$

* ΔADQ: Isósceles $AD=DQ=7$ $AR=RQ \Rightarrow TQ=4$

* Unimos AT y BQ y observamos el siguiente trapecio:



* Como RS es el segmento que une los puntos medios de las diagonales :

$$RQ = \frac{AB - TQ}{2} = \frac{4-4}{2} = 0$$

NOTA:

* Del primer gráfico :

R y S miden $90°$ porque son bisectrices de ángulos conjugados internos.

RPTA : "A"

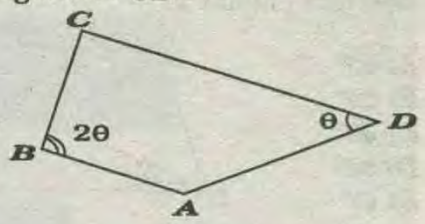
PROBLEMA 17:

En la figura , los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos.

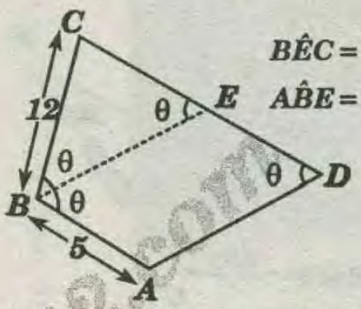
Si : $AB = 5$ y $BC = 12$.

Hallar la longitud del segmento $\overline{CD}$

A) 17
B) 12
C) 20
D) 10
E) 18



RESOLUCIÓN:



$B\hat{E}C = \hat{D} = \theta$.....*(correspondientes)*

$A\hat{B}E = \hat{D}$.....*(Lados paralelos)*

* Luego , $C\hat{B}E = \theta$ y el ΔBEC es isósceles

$\Rightarrow CE = BC = 12$

* Además en el paralelogramo $ABED$:

$ED = AB = 5$

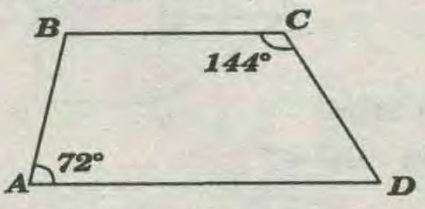
* Finalmente : $CD = CE + ED = 12 + 5 = 17$

RPTA : "A"

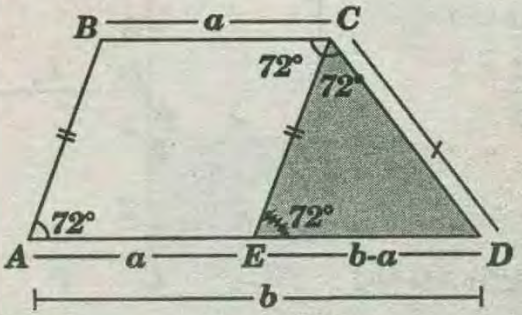
PROBLEMA 18 :

En el trapecio $ABCD$ mostrando , los ángulos $\hat{C}$ y $\hat{A}$ miden $144°$ y $72°$ respectivamente. Si la diferencia de las bases es 24. Hallar CD.

A) 30
B) 18
C) 24
D) 12
E) 6



RESOLUCIÓN:



* Se traza :

$\overline{CE} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \square ABCE$ es paralelogramo

$\Rightarrow AB = CE \wedge BC = AE = a$

Pide GRATIS.com

* Además : $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCE \Rightarrow \sphericalangle BCE = 72°$

* Luego :

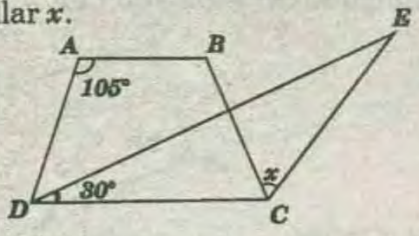
ΔCDE (isósceles) $\Rightarrow CD = ED \Rightarrow x = b - a = 24$

RPTA : "C"

PROBLEMA 19:

Si $ABCD$ es un trapecio isósceles y CDE un triángulo isósceles , hallar x.

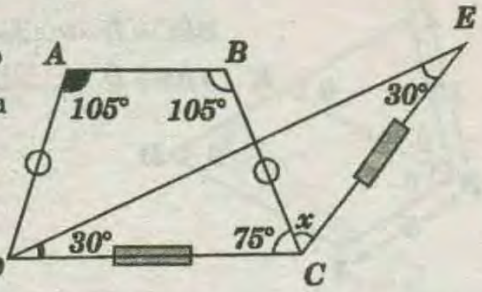
A) 45°
B) 50°
C) 60°
D) 55°
E) 47°



RESOLUCIÓN:

* En todo trapecio isósceles: La suma de dos ángulos opuestos es $180°$.

$\Rightarrow m\hat{C} = 75°$



* Luego : ΔCDE :

$30° + 30° + 75° + x = 180° \Rightarrow x = 45°$

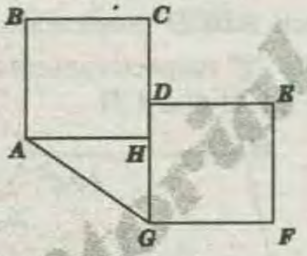
RPTA : "A"

PROBLEMA 20:

$ABCH$ y $GDEF$ son 2 cuadrados iguales , $BC = 4\,cm$. y $GC = 7cm$.

Hallar el perímetro de $ABCDEFGA$.

A) 24cm.
B) 28
C) 36
D) 30
E) 32



RESOLUCIÓN:

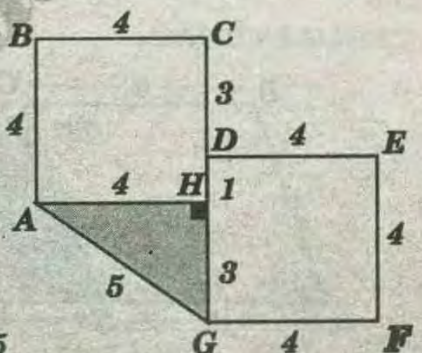
* De la figura : $GC = 7$

* Además:

$CH + HG = 7$

$\Rightarrow 4 + HG = 7$

$\Rightarrow HG = 3$



* En $\triangle AHG$: $AG = 5$

* Se pide el perímetro , que será :

$4 + 4 + 3 + 4 + 4 + 4 + 5 = 28$

RPTA : "B"

PROBLEMA 21:

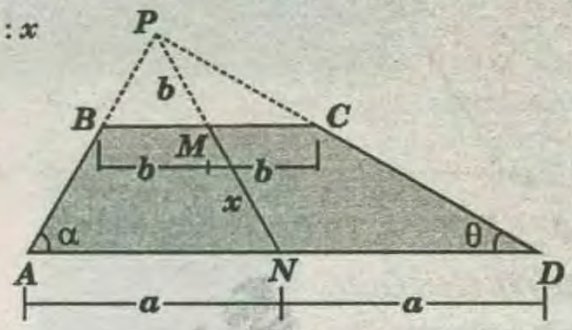
En un trapecio escaleno $ABCD$, las bases AD y BC se diferencia en $40\,cm$, M es punto medio de la base menor BC y N de la base mayor AD. Además la suma de las medidas de los ángulos: BAD y CDA es $90°$.

La medida del segmento MN es centímetros es :

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

RESOLUCIÓN:

* Piden : x



* Datos : $2a - 2b = 40 \Rightarrow a - b = 20$

$\alpha + \theta = 90° \Rightarrow m\sphericalangle APD = 90°$

* Se observa :

* $\overline{PN}$ mediana del $\triangle APD \Rightarrow PN = a/2$

* $\overline{PN}$ mediana del $\triangle BPC \Rightarrow PM = b/2$

* Luego : $x = \frac{a-b}{2} \Rightarrow x = 20$

RPTA : "B"

PROBLEMA 22:

En un rectángulo $ABCD$, en la prolongación de $\overline{AD}$ se ubica el punto M, tal que $AD = DN = 3$, $\overline{BM} \cap \overline{CD} = \{N\}$: las prolongaciones de $\overline{AN}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en F . Si: $NF = 2\sqrt{2}$. Calcular AB.

A)2 B)3 C)5 D) 4 E)7

RESOLUCIÓN:

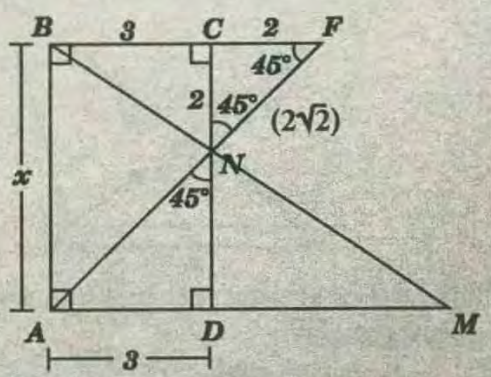
* Piden = $AB = x$

$AD = DN \Rightarrow ADN$:

notable $45°$

* $\triangle NCF$:

notable



$45° \Rightarrow NC = CF = 2$

* $\square ABCD$: rectángulo $\Rightarrow AB = x = 3 + 2 \Rightarrow x = 5$

RPTA : "C"

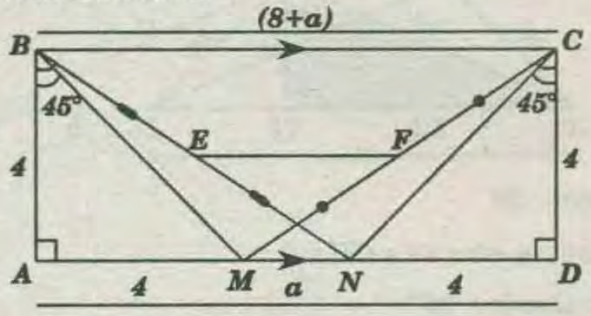
PROBLEMA 23:

En un rectángulo $ABCD$, en AD se ubican los puntos M y $N(M \in \overline{AN})$ tal que $AB=4$ y $m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle NCD = 45°$.

Calcular la longitud del segmento que tiene por extremos los puntos medios de $\overline{BN}$ y $\overline{CM}$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:



* Piden : EF

* De la figura $\triangle BAM$ y $\triangle NDC$: notable $45°$

$\Rightarrow AB = AM = ND = CD = 4$

* $\square BMNC$: Por propiedad $EF = \dfrac{(8+a)-a}{2} = 4$

RPTA : "D"

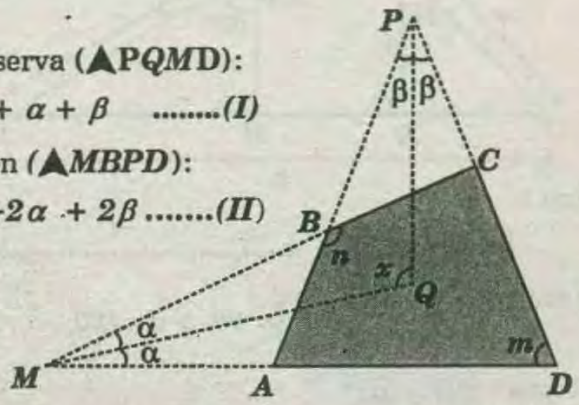
PROBLEMA 24:

Se tiene un cuadrilátero convexo $ABCD$; se prolonga los lados AB y DC cortándose en P de la misma manera se prolonga los lados CB y DA cortándose en M. Si $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 196°$ entonces el ángulo que forman las bisectrices de los ángulos M y P al intersectarse es:

A)102° B)100° C)96° D)98° E)86°

RESOLUCIÓN:

* Piden : x



* Se observa ($\blacktriangle PQMD$):

$x = m + \alpha + \beta$ .....(I)

También ($\blacktriangle MBPD$):

$n = m + 2\alpha + 2\beta$ .....(II)

* Luego $(2(I) - (II))$: $2x - n = m \Rightarrow x = \dfrac{m+n}{2}$

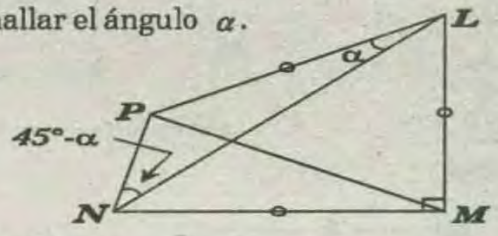
* Del dato : $m+n = 196° \Rightarrow x = \dfrac{196°}{2} = 98°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 25:

En la figura , hallar el ángulo α.

A) 20°
B) 10°
C) 12°
D) 30°
E) 15°



RESOLUCIÓN :

* Piden: α

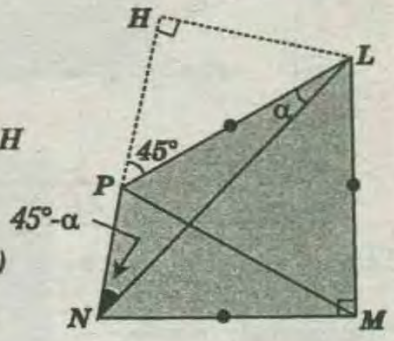
* Se traza: $\overline{LH} \perp \overline{NP}$

$\Rightarrow m\sphericalangle LPH = 45° = m\sphericalangle PLH$

* Luego : $PH = HL$

* Sea : $HL = a$ .....(I)

$\Rightarrow LP = a\sqrt{2} = LM = MN$



* $\triangle NML$: $NL = 2a$ .....(II)

* De (I) y (II): $\triangle NHL$ notable de $30°$ y $60°$

$\Rightarrow 45° - \alpha = 30° \Rightarrow \alpha = 15°$

RPTA : "E"

PROBLEMA 26:

En un trapecio rectángulo las bases miden 4 y 10 cm. respectivamente. Si un lado no paralelo determina un ángulo de $60°$ con la base mayor ¿Cuándo es el perímetro del trapecio?.

A) $5+\sqrt{23}$ cm. B) $4\sqrt{3}$cm. C) $26+6\sqrt{3}$cm.
D) $13+2\sqrt{3}$cm. E) $8+5\sqrt{3}$cm.

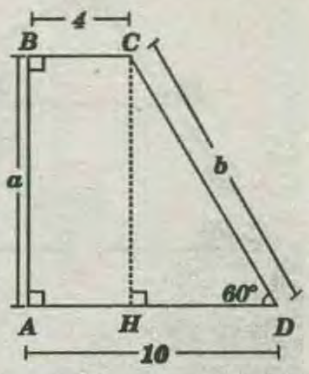
RESOLUCIÓN:

* Piden :

$2p_{\square ABCD} = a+b+14$ .....(I)

* Se traza: $\overline{CH} \perp \overline{AD}$

$\Rightarrow AH = 4 \wedge CH = AB = a$



* Luego : $HD = 6$

* $\triangle CHD$: notable de $30°$ y $60°$

$CH = a = 6\sqrt{3} \wedge CD = b = 12$

* Reemplazando en (I):

$2p_{\square ABCD} = 6\sqrt{3} + 12 + 14$

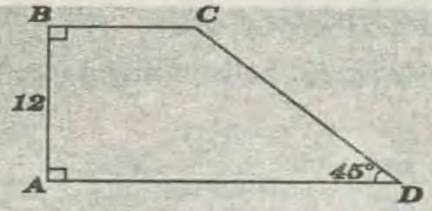
$\rightarrow 2p_{\square ABCD} = 26 + 6\sqrt{3}$

RPTA : "C"

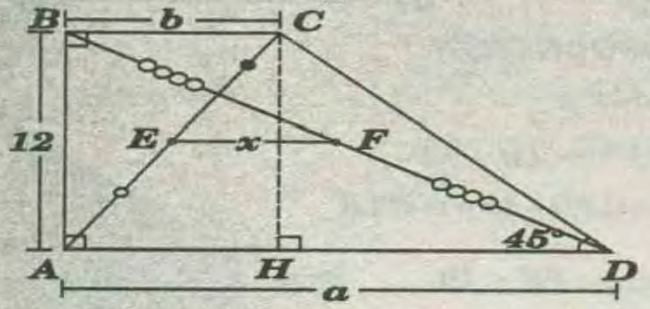
PROBLEMA 27:

En la figura hallar la longitud del segmento que une los puntos de las diagonales.

A) 12m.
B) 4
C) 2
D) 6
E) 10



RESOLUCIÓN:



* De la figura , piden : x

* Propiedad: $x=\frac{a-b}{2}$

* Se observa: $CH=AB=12 \wedge AH=b$

* También: $HD=12$ .....($\triangle CHD$ isósceles)

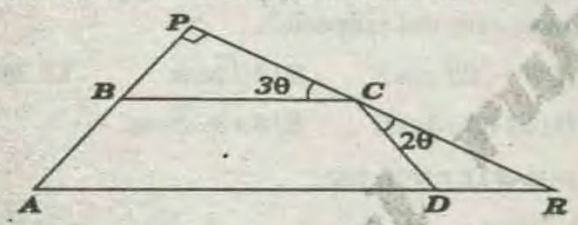
$$\Rightarrow a-b=12 \Rightarrow x=\frac{12}{2}=6$$

RPTA : "D"

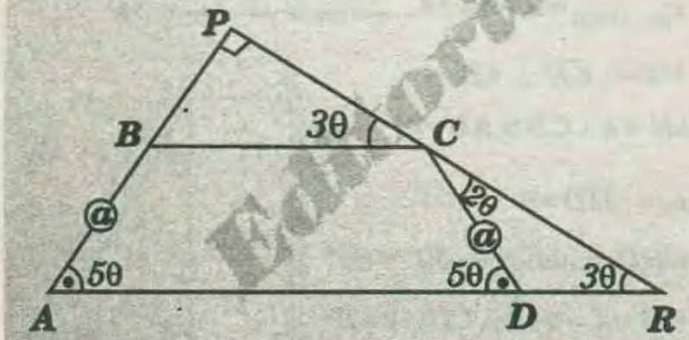
PROBLEMA 28:

Calcular 2θ, si $ABCD$ es un trapecio isósceles.

A) 36°
B) 45°
C) 15°
D) 20°
E) 22°30'



RESOLUCIÓN :



* Piden: 2θ

* $\overline{BC} // \overline{AD}$: $m\sphericalangle ARP=3\theta$.....($\sphericalangle$ s correspondientes)

* $\triangle CDR$: $m\sphericalangle CDA=5\theta$.....($\sphericalangle$ exterior)

* $\square ABCD$: $m\sphericalangle BAD=m\sphericalangle ADC=5\theta$ (trapecio isósceles)

* $\triangle APR$: $8\theta+90°=180°$ .....($S_{m\sphericalangle internos}$)

$$\Rightarrow 2\theta=22°30'$$

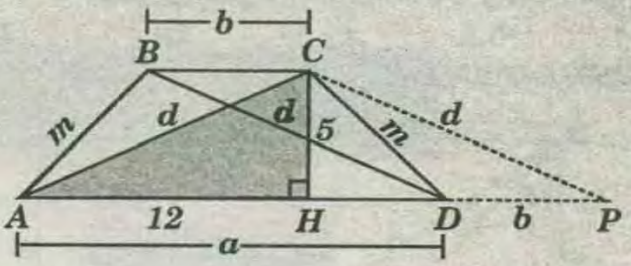
RPTA : "E"

PROBLEMA 29:

En un trapecio isósceles la suma de las bases es $24u$ y la altura $5u$. La suma de las longitudes de las diagonales es:

A) 13u B) 14 C) 26 D) 28 E) 18

RESOLUCIÓN:



* Piden : $2d$

* Datos : $a+b=24 \wedge CH=5$

* Calculando : "d"

* Se prolonga :

$\overline{AD}$ hasta P ; $DP=BC=b \Rightarrow BD=CP=d$

* $\triangle ACP$: $AH=HP=12$.....(propiedad)

* $\triangle AHC$ (teorema de Pitágoras) :

$$d^2=12^2+5^2 \Rightarrow d=13$$

* Entonces : $2d=2(13)=26$

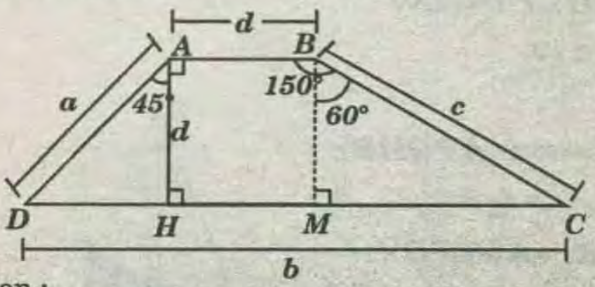
RPTA : "C"

PROBLEMA 30:

En un trapecio $ABCD$, la base menor AB es igual a la altura AH, el ángulo en A mide $135°$ y en B mide $150°$. Calcular el perímetro del trapecio , sabiendo que la mitad de la tercera parte de la base menor vale $20m$.

A)600m B)120 C)$120\sqrt{3}$ D)$120(5+\sqrt{2}+\sqrt{3})$ E)$200(5+\sqrt{3})$

RESOLUCIÓN :



* Piden :

$$k=a+b+c+d \text{ .....(I)}$$

* Del enunciado: $\frac{1}{2}\left(\frac{d}{3}\right)=20 \Rightarrow d=120$

* Se traza : $\overline{BH} \perp \overline{HC}$

$\Rightarrow m\sphericalangle MBC=60°, HM=AB=120 \wedge BM=AH=120$

* $\triangle BMC$: notable de $30°$ y $60°$

$$\Rightarrow MC=120\sqrt{3} \wedge BC=c=240$$

Editorial Rubiños 2012

* $\triangle AHD$: notable de $45°$ y $45°$

$$DH = 120 \wedge AD = a = 120\sqrt{2}$$

* Luego :

$$b = DH + HM + MC = 120 + 120 + 120\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow b = 240 + 120\sqrt{3}$$

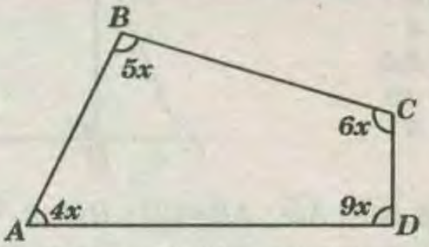
* Reemplazando en *(I)* :

$$k = 120\sqrt{2} + 240 + 120\sqrt{3} + 240 + 120 = 120(5 + \sqrt{3} + \sqrt{2})$$

RPTA : "D"

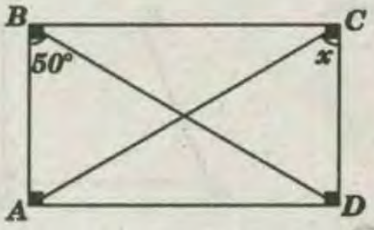
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular "x".



A) 18°
B) 20°
C) 15°
D) 30°
E) 17°

02 Calcular "x".

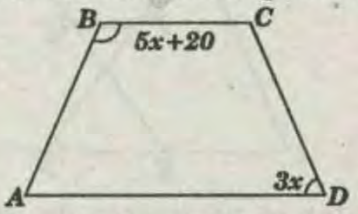


A) 40°
B) 30°
C) 60°
D) 50°
E) 70°

03 Si $ABCD$ es un romboide , calcular "x".

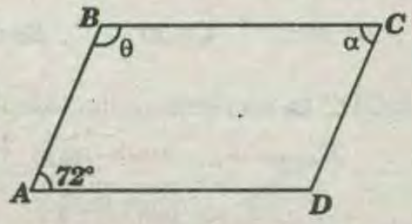
A) 8°
B) 7°
C) 10°
D) 9°
E) 12°

04 Calcular "x", si **ABCD** es un trapecio isósceles.



A) 30°
B) 15°
C) 20°
D) 16°
E) 24°

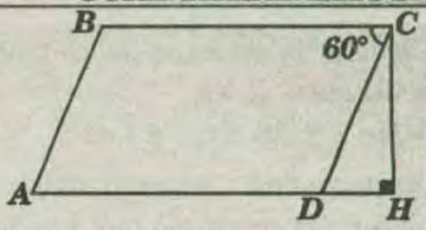
05 Si "$ABCD$" es un paralelogramo , calcular "$\theta - \alpha$"



A) 18°
B) 20°
C) 24°
D) 36°
E) 32°

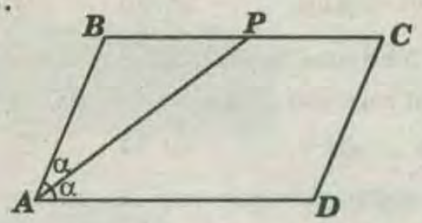
06 Hallar el perímetro del romboide **"ABCD"** .

Si: $AD = 8$; $CH = 3\sqrt{3}$.



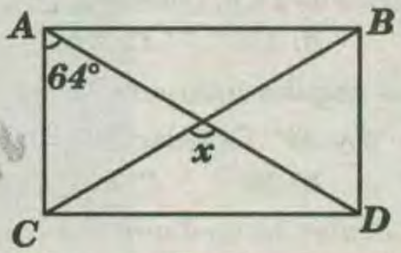
A) 32
B) 28
C) 36
D) 49
E) 40

07 Hallar **"PC"**, si "$ABCD$" es un romboide , $AD = 13$; $CD = 6$.



A) 6
B) 6,5
C) 7
D) 7,5
E) 8

08 Si "$ABCD$" es un rectángulo , calcular "x".



A) 118°
B) 114°
C) 124°
D) 128°
E) 132°

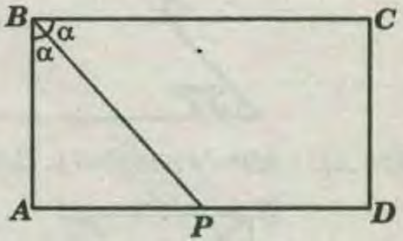
09 Hallar dos lados de un rectángulo cuyo perímetro es 48 y la relación entre sus lados es de 3 a 5.

A) 9 y 15 B) 6 y 10 C) 18 y 30
D) 12 y 20 E) 16 y 32

10 Calcular el perímetro de un rectángulo cuya diagonal mide **20 cm** y la relación de sus lados es de 3 a 4 .

A) 48 B) 52 C) 64 D) 62 E) 56

11 Hallar **"BP"**, si **"ABCD"** es un rectángulo , $BC = 9$; $PD = 3$.

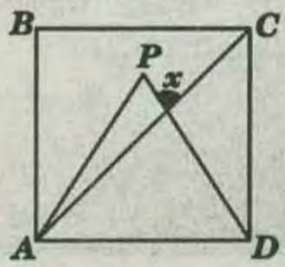


A) 12
B) 10
C) $10\sqrt{2}$
D) 15
E) $6\sqrt{2}$

12 Hallar la diagonal de un cuadrado , si su perímetro es 48μ.

A) $12\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{2}$ C) 12 D) 24 E) 18

13 Si "$ABCD$" es un cuadrado y "APD" es un triángulo equilátero , calcular "x".



A) 60°
B) 75°
C) 70°
D) 50°
E) 90°

www.CRATIS.com

(14) Calcular la mediana de un trapecio cuyas bases miden 24 cm y 48 cm.

A) 36cm B) 32 C) 48 D) 42 E) 34

(15) Las bases de un trapecio miden 10 y 28. Calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

A) 7 B) 6 C) 10 D) 12 E) 9

(16) La mediana de un trapecio mide 18μ. Si las bases están en relación de 1 a 3, calcular la base mayor.

A) 27μ B) 9 C) 24 D) 18 E) 25

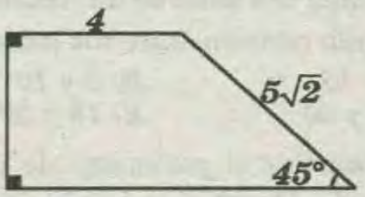
(17) El segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio mide 6μ. Si las bases están en relación de 2 a 5, calcular la base mayor.

A) 12 B) 18 C) 24 D) 30 E) 20

(18) Los ángulos interiores de un trapecio isósceles miden "θ y 3θ". Calcular "θ".

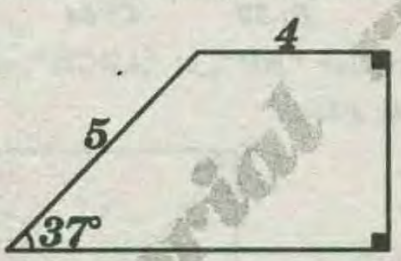
A) 30° B) 36° C) 45° D) 37° E) 60°

(19) Calcular la mediana del trapecio rectángulo mostrado.



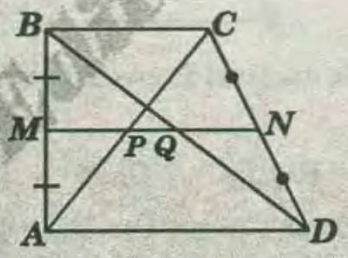
A) 7
B) 8
C) 6
D) 6,5
E) 8,5

(20) Calcular la mediana del trapecio rectángulo mostrado.



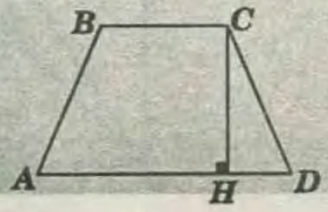
A) 5
B) 6
C) 7
D) 5,5
E) 6,5

(21) Si: $\overline{BC} // \overline{AD}$; $MP=4$; $MN=11$. Hallar: "PQ".



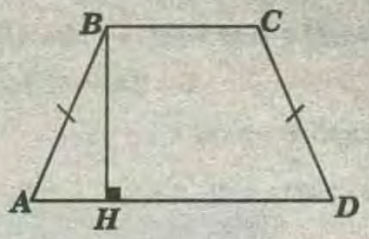
A) 2
B) 3
C) 1
D) 4
E) 5

(22) $\overline{BC} // \overline{AD}$; $AH=13$. Calcular la mediana del trapecio isósceles "ABCD".



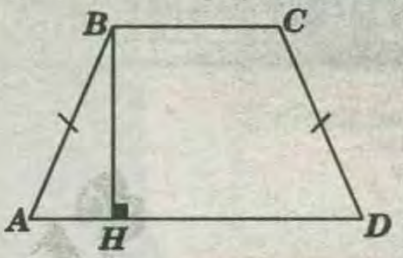
A) 11
B) 6,5
C) 8
D) 13
E) 7,5

(23) Si la mediana del trapecio isósceles "ABCD" mostrado mide 17μ. Calcular: "HD".



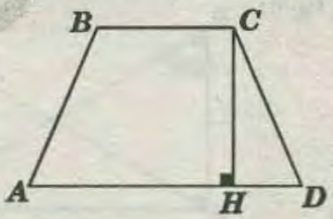
A) 16
B) 34
C) 17
D) 32
E) 30

(24) $AB=CD$; $\overline{BC} // \overline{AD}$; $AH=5$. Calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.



A) 5
B) 4
C) 2,5
D) 10
E) 6

(25) $\overline{BC} // \overline{AD}$; $AB=CD$; $HD=9$. Calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

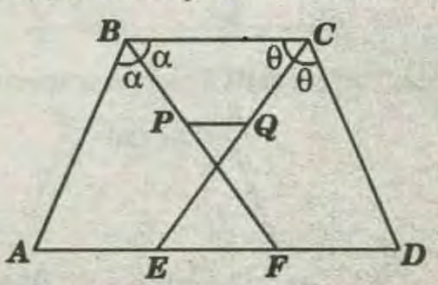


A) 4,5
B) 9
C) 6
D) 5
E) 5,5

TAREA DOMICILIARIA

(01) $\overline{BC} // \overline{AD}$; $BP=PF$; $CQ=EQ$

$AB=8$; $CD=10$; $AD=14$ y $BC=5$. Hallar "PQ".

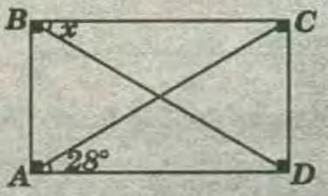


A) 1
B) 1,5
C) 0,5
D) 2
E) 3

(02) Calcular el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 6 y 8.

A) 20 B) 25 C) 30 D) 15 E) 14

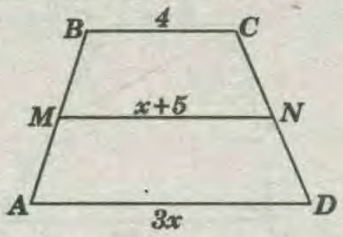
(03) Si "ABCD" es un rectángulo, calcular "x".



A) 26°
B) 50°
C) 30°
D) 28°
E) 30°

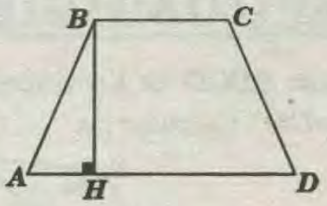
04 $\overline{BC}//\overline{AD}$; $AM=BM$; $CN=ND$. Hallar "x".

A) 6
B) 5
C) 4
D) 8
E) 7



05 $\overline{BC}//\overline{AD}$; $BC=6$; $AD=18$. Hallar "AH".

A) 5
B) 6
C) 7
D) 4
E) 8



SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

TRAPECIOS

01 En un trapecio rectángulo la altura mide $2\sqrt{3}$ y la base menor 4. Si la base mayor determina con uno de los lados un ángulo que mide $30°$, calcular la mediana.

A)4 B)5 C)6 D)7 E) 8

02 En un trapecio , los lados no paralelos tienen medidas que suman 16. Las bisectrices interiores de los ángulos adyacentes a la base menor se intersecan en un punto que pertenece a la base mayor. Calcular la base mayor.

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

03 La mediana de un trapecio mide 10 y la distancia entre los puntos medios de sus diagonales es 4. Calcular la base menor.

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

04 En un trapecio $ABCD$, $\overline{AB}//\overline{DC}$, $BC=5$ y $CD=6$. Si la $m\sphericalangle A=6°$ y $m\sphericalangle C=127°$, calcular AB.

A) $24\sqrt{5}$ B) $11\sqrt{2}/2$ C) 12 D) 13 E) 15

05 En un romboide $ABCD$ se traza la bisectriz $\overline{DM}$ ("M" en $\overline{BC}$). Si $AB=6$, calcular la medida del segmento que une los puntos medios de $\overline{AM}$ y $\overline{BD}$.

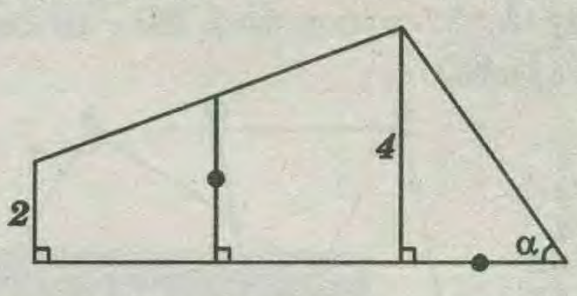
A)2 B)3 C)4 D)6 E) $2\sqrt{3}$

06 Se tiene un trapecio $ABCD$ de base mayor $\overline{AD}$. Las bases miden 6 y 8, luego en la prolongación de $\overline{DC}$ se ubica un punto "M". Si $m\sphericalangle NMD=m\sphericalangle ADC$, calcular "$M$" (N es punto medio de $\overline{AB}$)

A) 6 B) 8 C) 7 D) 9 E) 3

07 En la figura calcular "α"

A) 53°
B) 37°
C) 30°
D) 45°
E) 60°



08 Se tiene un trapecio rectángulo $ABCD$; $\overline{BC}$: base menor y su altura $\overline{CD}$, $m\sphericalangle BAD=45°$.

Si $BC=6$ y $CD=4$. Calcular la mediana del trapecio.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

09 Se tiene un trapecio cuyas diagonales se intersecan perpendicularmente en "O", siendo $\overline{MN}$ la mediana. Calcular el perímetro del triángulo MON siendo el perímetro del trapecio 36.

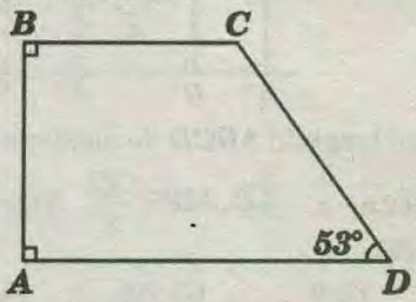
A) 20 B) 16 C) 18 D) 22 E) 24

10 El perímetro de un trapecio isósceles mide 40, las medidas de sus bases están en relación de 4 a 5, y cada lado no paralelo mide la semidiferencia de las bases. Calcular la medida de la mediana.

A)12 B)14 C)16 E)18 E) 20

11 Si el segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ mide 3, calcular $AB + CD$.

A) 10
B) 12
C) 14
D) 16
E) 18

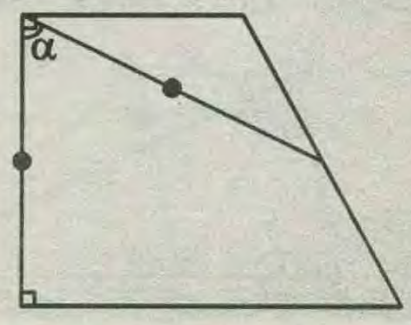


12 Se tiene un trapecio rectángulo $ABCD$ ($\overline{BC}$: base menor y $\overline{AB}$: altura) , se traza $\overline{CH}$ perpendicular a $\overline{BD}$. Si $m\sphericalangle BCH=2(m\sphericalangle CDB)$ y $AD=3(CH)$, calcular $m\sphericalangle CDB$.

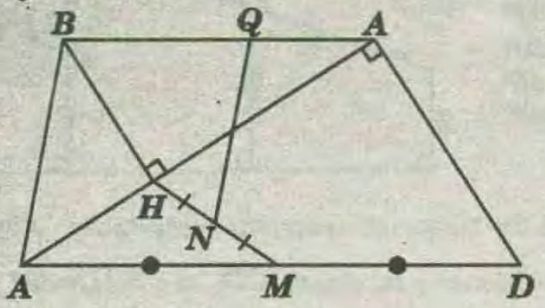
A)15° B)45° C)30° D)60° E) 37°

13 En la figura calcular "α"

A) 45°
B) 75°
C) 53°
D) 60°
E) 37°

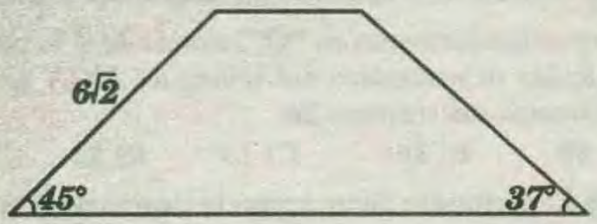


(14) En la figura $ABCD$ es un trapecio $BQ=6$, $QC=2$, $AD=12$, "N" punto medio de $\overline{HM}$ y $AM=MD$. Calcular NQ.



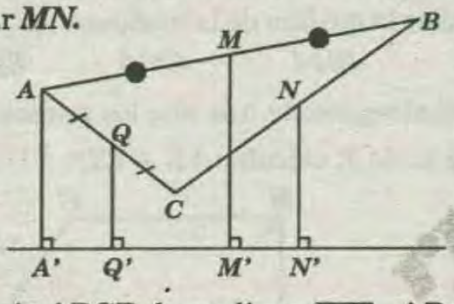
A) 5
B) 4
C) 6
D) 5,5
E) 6,5

(15) Calcular la medida del segmento que une los puntos medios de las diagonales del trapecio.



A) 6
B) 7
C) 8
D) 5
E) 4

(16) Si M, N y Q son puntos medios, $AA'=5$, $QQ'=4$, $MM'=7$, calcular MN.



A) 7,5
B) 6,5
C) 6
D) 7
E) 5

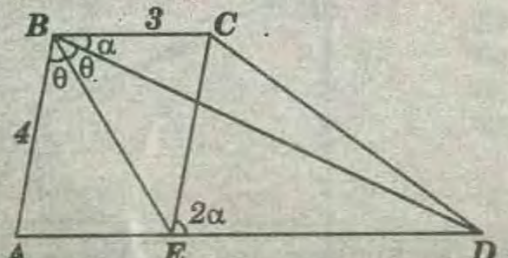
(17) En un trapecio $ABCD$ de mediana $\overline{MN}$, si P y Q pertenecen a $\overline{AD}$, $MP=\frac{CD}{2}$, $NQ=\frac{AB}{2}$ y $PQ=5$, calcular BC.

A) 2,5 B) 5 C) 7,5 D) 10 E) 2

(18) En un romboide $ABCD$ se traza $\overline{AH}$ perpendicular a $\overline{BM}$, "M" es punto medio de $\overline{CD}$. Si $BC=8$, calcular la medida del segmento que une los puntos medios de $\overline{AH}$ y $\overline{AD}$.

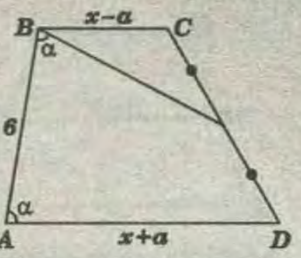
A) 2 B) 4 C) $4\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{3}$ E) 8

(19) En el trapecio $ABCD$, $\overline{AB}//\overline{CE}$. Calcular: BD



A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

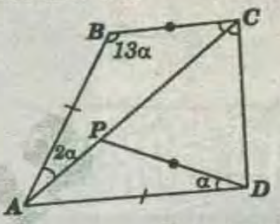
(20) $ABCD$ es trapecio. Calcular el menor valor entero de "x"



A) 1
B) 3
C) 4
D) 5
E) 2

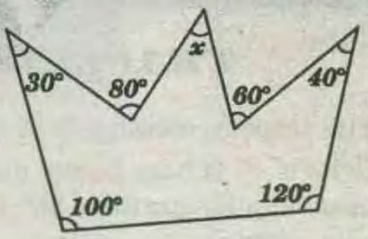
TAREA DOMICILIARIA

(01) En la figura $ABCD$ es un trapezoide simétrico $AB=AD$, $PD=CD$. Calcular: α



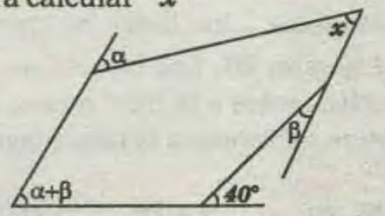
A) 8°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°

(02) Calcular "x"



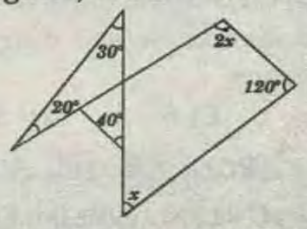
A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 60°

(03) En la figura calcular "x"



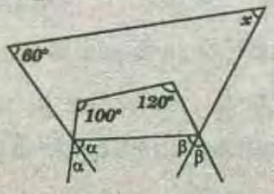
A) 90°
B) 60°
C) 40°
D) 75°
E) 65°

(04) Según la figura, calcular "x"



A) 35°
B) 40°
C) 50°
D) 60°
E) 55°

(05) Según la figura, calcular "x"



A) 40°
B) 30°
C) 50°
D) 60°
E) 70°

PRIMERA PRACTICA					CUADRILÁTEROS				
1) C	2) D	3) D	4) C	5) D	6) B	7) C	8) D	9) A	10) E
11) E	12) A	13) B	14) A	15) E	16) A	17) E	18) C	19) D	20) B
21) B	22) D	23) C	24) A	25) B	01) C	02) A	03) D	04) A	05) B

SEGUNDA PRACTICA					CUADRILÁTEROS				
1) D	2) E	3) C	4) A	5) B	6) C	7) A	8) C	9) C	10) D
11) E	12) C	13) D	14) *	15) A	16) B	17) C	18) B	19) C	20) E
01) B	02) B	03) C	04) C	05) C					

CAPÍTULO 16

CUADRILATEROS (REPASO)

OBJETIVOS :

* Conocer la definición de cuadrilátero.

*Comprender los conceptos fundamentales sobre los cuadriláteros .

* Estudiar su clasificación y diferenciarlos adecuadamente en base a sus características.

* Aplicar de manera adecuada los teoremas en cada clase de cuadriláteros.

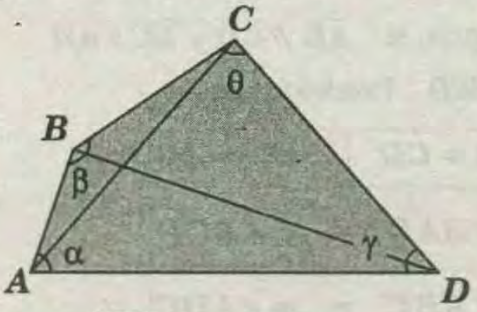
INTRODUCCIÓN :

Desde la antigüedad, el uso de la forma rectangular fue muy común, por ejemplo en la agrimensura permitió mayor facilidad en delimitar, medir y distribuir terrenos. La forma cuadrada fue usada en las bases de las famosas pirámides egipcias Keops. Kefren y Micerino, así como en diversas edificaciones, debido a la estabilidad que ofrecían. La forma trapecial fue usada en las paredes de la fortaleza antisísmica de Ollantaytambo.

También podemos destacar entre los aportes de los matemáticos, el teorema del francés Pierre Varignon ***(1654 – 1722)***, en el cual plantea que los puntos medios de los lados de todo cuadrilátero serán los vértices de un paralelogramo.

CUADRILÁTEROS

Es aquel que resulta de la reunión de cuatro segmentos de recta , unidos en sus extremos de tal forma que cualquier par de segmentos no es colineal , los segmentos solo tienen en común sus extremos. Pueden ser convexo o no convexo.



En la figura , $\square ABCD$: convexo

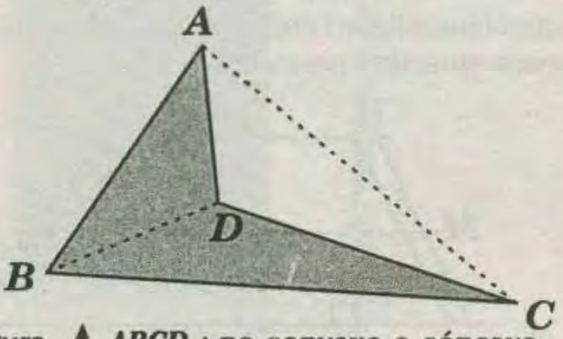
* Lados opuestos : $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$

Ángulos opuestos : $\sphericalangle BAD$ y $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle ADC$.

* Diagonales : $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

*Suma de medidas de ángulos interiores.

$$\alpha+\beta+\theta+\gamma=360^\circ$$



En la figura, ▲ $ABCD$: no convexo o cóncavo.

* Diagonales : $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

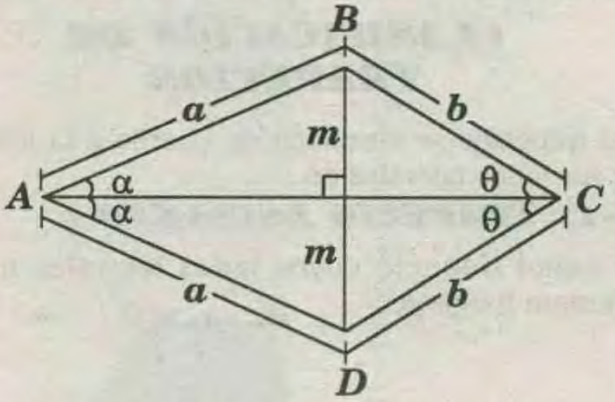
CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS

La cuadriláteros convexos se clasifican según el paralelismo de sus lados opuestos , en :

I) TRAPEZOIDE :

Es aquel cuadrilátero convexo que no presenta lados opuestos paralelos.

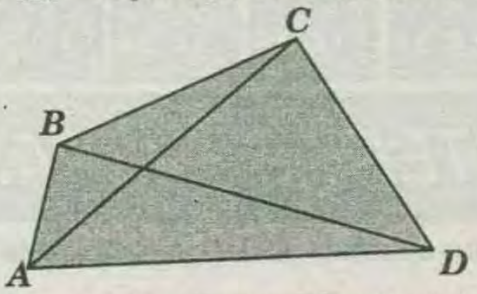
Un trapezoide puede ser simétrico (trapezoide donde una de las diagonales es parte de la mediatriz de la otra diagonal) o asimétrico (trapezoide que no cumple la condición del trapezoide simétrico).



* En la figura, $\square ABCD$: trapezoide simétrico.

$$\overline{AB}\not\parallel\overline{CD} \wedge \overline{BC}\not\parallel\overline{AD}$$

* Entonces : $\overline{AC}$ es parte de la mediatriz de $\overline{BD}$.

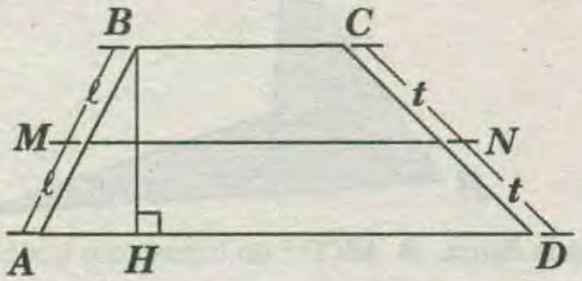


* En la figura , $\square ABCD$: Trapezoide asimétrico.

$$\overline{AB} \not\parallel \overline{CD} \wedge \overline{BC} \not\parallel \overline{AD}$$

II) TRAPECIO :

Es aquel cuadrilátero convexo que solo tiene un par de lados opuestos paralelos.



En la figura, si: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ entonces $\square$ *ABCD* es un trapecio.

* **BASES** : $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$

Son los lados paralelos del trapecio

* **LADOS LATERALES** : $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

Son los lados no paralelos

* **ALTURA** : $\overline{BH}$

Es la distancia entre las bases del trapecio

* **BASE MEDIA** : $\overline{MN}$

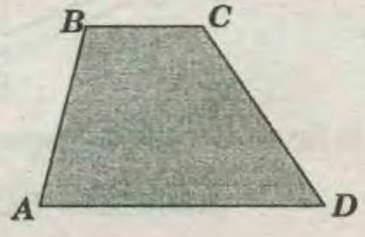
Es aquel segmento que tiene por extremos los puntos medios de los lados laterales

CLASIFICACION DE TRAPECIOS

Los trapecios se clasifican de cuerdo a la longitud de sus lados laterales en :

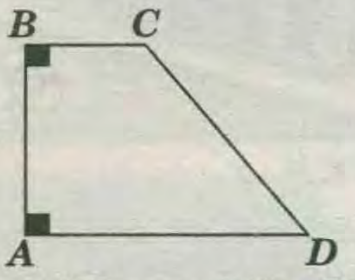
II-1) TRAPECIO ESCALENO :

Es aquel trapecio cuyos lados laterales tienen diferente longitud.



En la figura , si : $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ y $\overline{AB} \neq \overline{CD}$

$\rightarrow \square ABCD$: trapecio escaleno.



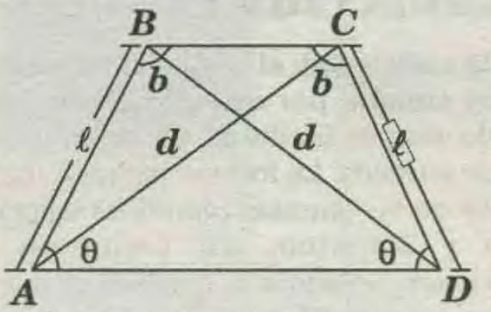
En la figura $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle BAD = 90°$

$\rightarrow \square ABCD$: Trapecio rectángulo.

Recto en *A* y *B*. también es un trapecio escaleno.

II-2)TRAPECIO ISÓSCELES :

Es aquel trapecio cuyos lados laterales son de igual longitud.



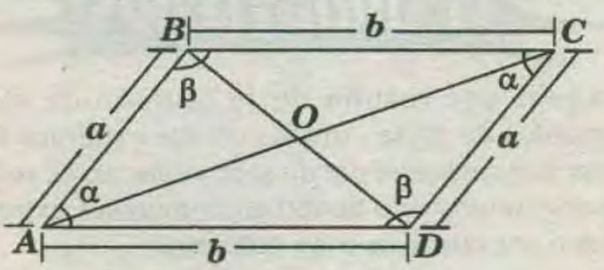
En la figura, si : $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ y $AB = CD$

$\rightarrow \square$ *ABCD :* Trapecio isósceles

$$\boxed{m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle CDA} \quad \text{y} \quad \boxed{AC = BD}$$

III)PARALELOGRAMO :

Es aquel cuadrilátero convexo que tiene sus dos pares de lados opuestos paralelos.



En la Figura, si : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

$\rightarrow \square ABCD$: Paralelogramo

*	$AB = CD$	$BC = AD$
*	$m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle BCD$	
*	$m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle ADC$	
*	$AO = OC$	$BO = OD$

* Las propiedades características de los paralelogramos son:

- los pares de lados opuestos son iguales;
- los pares de ángulos opuestos son iguales;
- cada dos ángulos contiguos son suplementarios;
- sus dos diagonales se cortan en sus puntos medios.

Los cuadrados, los rectángulos, los rombos y los romboides son paralelogramos, y sus características son:

CUADRADOS: sus cuatro lados son iguales y sus cuatro ángulos son rectos.

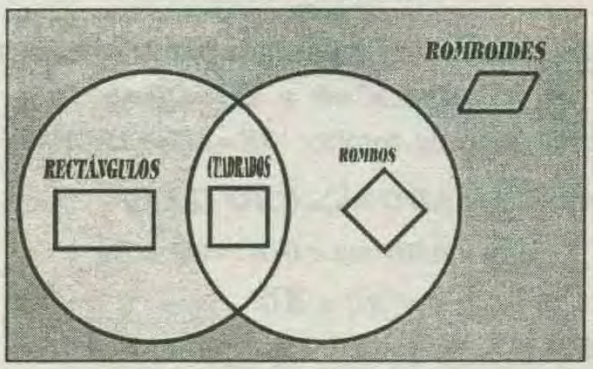
RECTÁNGULOS: sus cuatro ángulos son rectos.

ROMBOS: sus cuatro lados son iguales.

ROMBOIDES: sus cuatro lados no son iguales y no tienen ningún ángulo recto.

Según la clasificación anterior, los cuadrados son rectángulos y rombos.

PARALELOGRAMOS

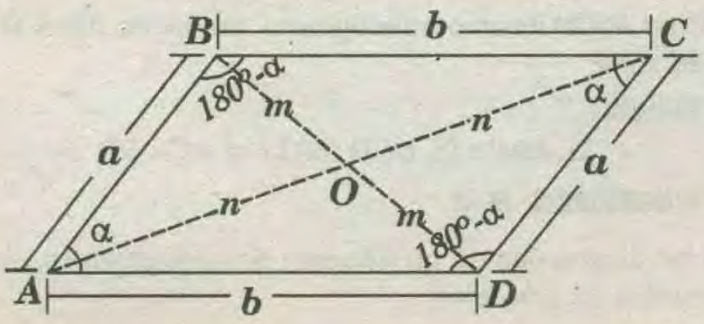


En un paralelogramo se llama base a cualquiera de sus lados y altura a la distancia entre la base y su lado paralelo. El área del paralelogramo es el producto de la base por la altura.

CLASIFICACION DE LOS PARALELOGRAMOS

III-1) ROMBOIDE :

Es aquel paralelogramo que tiene los lados consecutivos de diferente longitud y sus ángulos interiores tienen medidas distintas de ***90°***. ***No es equilátero ni equiángulo.***



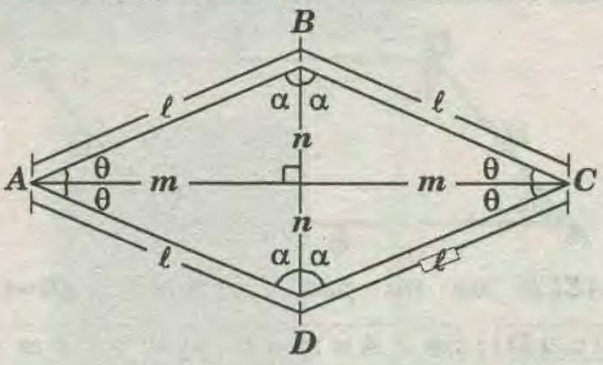
En la figura, $\square ABCD$: romboide

* En un romboide las diagonales no son bisectrices de los pares angulares internos .

III-2) ROMBO :

Es aquel paralelogramo que tiene sus lados de igual longitud y sus ángulos interiores tienen medidas distintas de ***90°***.

Es equilátero y no equiángulo.

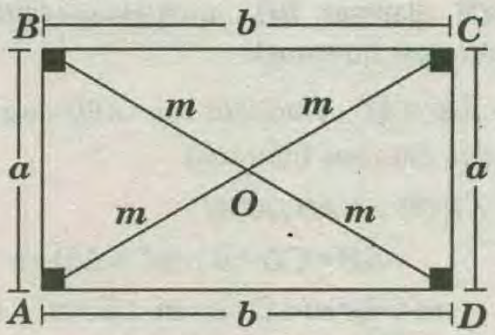


* En la figura , $\square ABCD$: Rombo

A este cuadrilátero, se le llama también losange .

III-3) RECTÁNGULO :

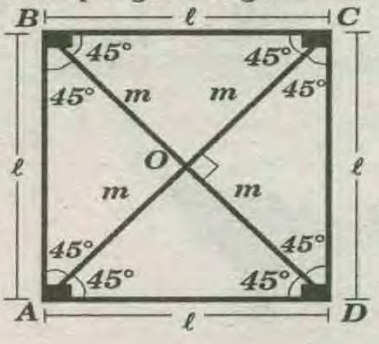
Es aquel paralelogramo que tiene sus lados consecutivos de diferente longitud y las medidas de sus ángulos son iguales a ***90°***. Es equiángulo , pero no equilátero.



* En la figura , $\square ABCD$: Rectángulo

III-4) CUADRADO :

Es aquel paralelogramo que tiene sus lados de longitud y las medidas de sus ángulos igual a ***90°***. Es equilátero y equiángulo , es decir que el cuadrado es un polígono regular.



$$\boxed{AC = BD = \ell\sqrt{2}}$$

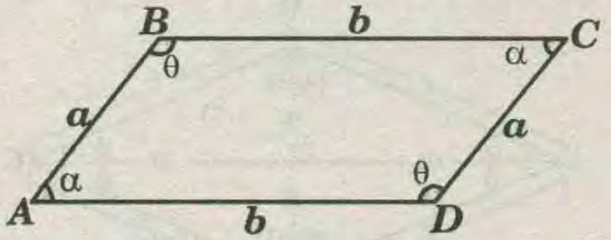
* En la figura, $\square ABCD$: cuadrado

O : centro del cuadrado.

TEOREMAS SOBRE CUADRILÁTEROS

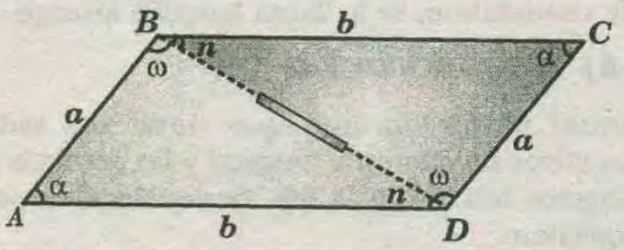
TEOREMA 1 :

En un paralelogramo, dos lados opuestos y dos ángulos opuestos cualesquiera son congruentes .



Si $ABCD$ es un paralelogramo $\Rightarrow AB=CD$; $\boxed{BC=AD}$; $\boxed{m\sphericalangle A=m\sphericalangle C}$ y $\boxed{m\sphericalangle B=m\sphericalangle D}$

DEMOSTRACIÓN :



* Si $\overline{BC}\parallel\overline{AD}$, al trazar $\overline{BD}$: $m\sphericalangle BDA=m\sphericalangle CBD=n$ (por ángulos alternos internos)

También: $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$, entonces : $m\sphericalangle ABD=m\sphericalangle BDC=\omega$ (por ángulos alternos internos)

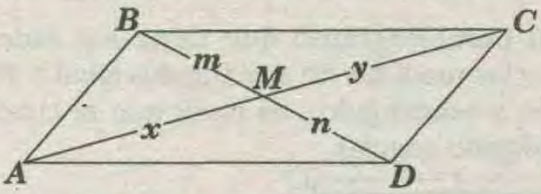
* Luego: $\Delta RCD\cong\Delta AB$ (ALA)

$$AB=CD=a\,;\,BC=AD=b$$

$$m\sphericalangle A=m\sphericalangle C=\alpha\,;\,m\sphericalangle B=m\sphericalangle D=\theta$$

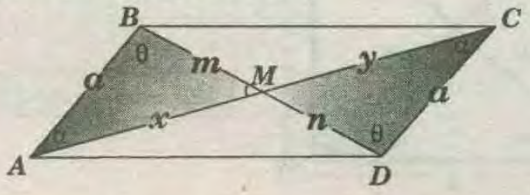
TEOREMA 2 :

Las diagonales de un paralelogramo se bisecan .



Si $ABCD$ es un paralelogramo $\Rightarrow \boxed{x=y}\ \wedge\ \boxed{m=n}$

DEMOSTRACIÓN :



* En el paralelogramo $ABCD$, se cumple $m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle ACD=\alpha\ \wedge\ m\sphericalangle ABD=m\sphericalangle BDC=\theta$

* También se cumple: $AB=CD=a$

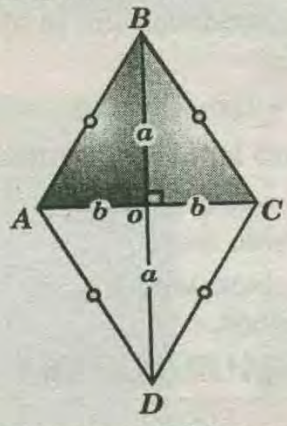
* Luego: $\Delta ABM\cong\Delta CDM$ (ALA)

$$\Rightarrow x=y\ \wedge\ m=n$$

TEOREMA 3 :

Las diagonales de un rombo son perpendiculares.

DEMOSTRACIÓN :



* Las diagonales en un paralelogramo se bisecan:

$$AO=OC=b \text{ y } BO=OD=a$$

* Por definición de rombo: $AB=BC=CD=AD$

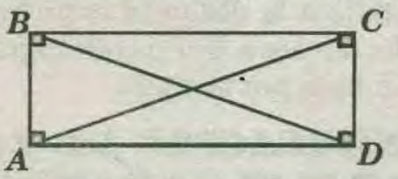
* Entonces: $\triangle ABO\cong\triangle CBO$ (LLL)

$$\Rightarrow m\sphericalangle AOB=m\sphericalangle BOC=90^\circ$$

$$\Rightarrow \overline{AC}\perp\overline{BD}$$

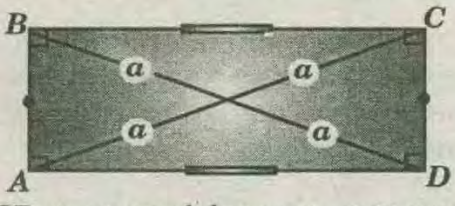
TEOREMA 4 :

Las diagonales de un rectángulo son congruentes .



Si $ABCO$ es un rectángulo . $\Rightarrow AC=BD$

DEMOSTRACIÓN :



Como $ABCD$ es un paralelogramo, entonces: $AB=CD$ y $BC=AD$

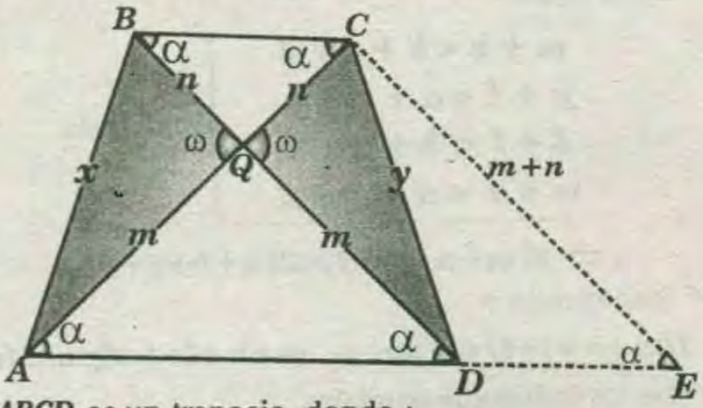
* Luego:

$$\triangle ABC\cong\triangle BCD\ (LAL)\Rightarrow AC=BD$$

TEOREMA 5 :

Si las diagonales de un trapecio son congruentes, el trapecio es isósceles.

DEMOSTRACIÓN :



* *ABCD* es un trapecio, donde :

$$\overline{BC} \parallel \overline{AD} \text{ y } AC = BD$$

* Se quiere demostrar que : $x = y$

* Si $AQ = m$ y $QC = n$

$$\Rightarrow AC = BD = m + n$$

* Se traza $\overline{CE} \parallel \overline{BD}$ $(E \in \overrightarrow{AD})$

$$\Rightarrow \quad CE = BD = AC = m + n \text{ y}$$

$$m\sphericalangle E = m\sphericalangle BDA = m\sphericalangle CAE = \alpha$$

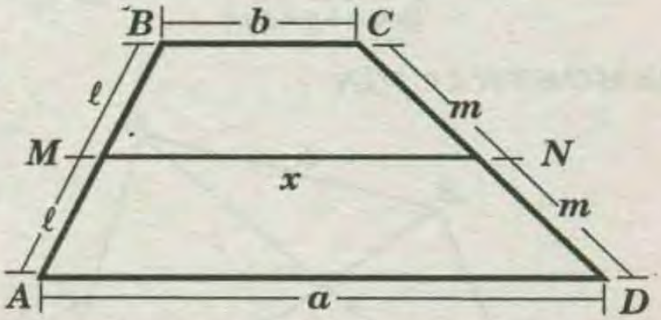
* El $\triangle AQD$ es isósceles :

$$AQ = QD = m \quad \Rightarrow \quad BQ = QC = n$$

* Luego : $\triangle AQB \cong \triangle DQC$ *(LAL)* $\Rightarrow \quad x = y$

TEOREMA 6 : MEDIANA EN EL TRAPECIO

En todo trapecio la base media es paralela a las bases y su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de dichas bases.



* En la figura , $\overline{MN}$ es la base media del trapecio *ABCD*.

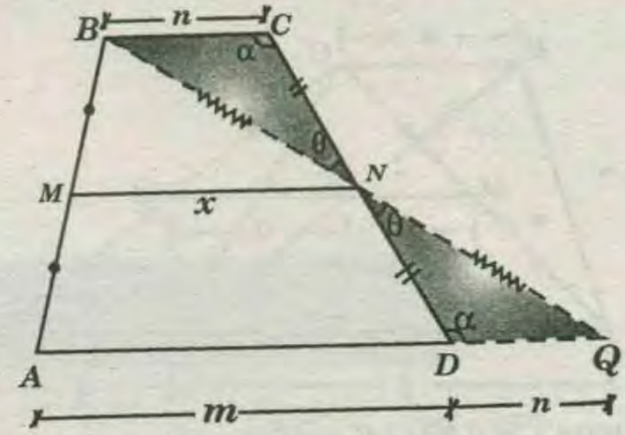
* Se cumple :

$$\boxed{\overline{MN} \parallel \overline{BC}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{a + b}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Trazamos $\overline{BN}$ y lo prolongamos hasta que interseque a la prolongación de $\overline{AD}$ en Q.



• $\Delta BCN \cong \Delta QDN$ *(A.L.A)*

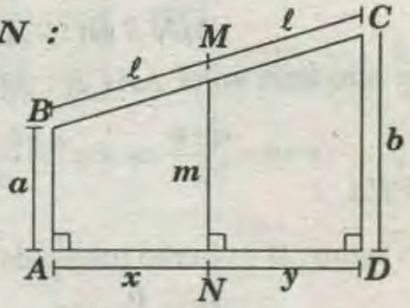
$$\Rightarrow BN = NQ \text{ y } QD = BC = n$$

$\overline{MN}$: Base media del *ABC*.

$$\Rightarrow MN \parallel AD \parallel BC$$

$$MN = \frac{AQ}{2} = \frac{m+n}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{m+n}{2}}$$

OBSERVACION :



En la figura *ABCD* : trapecio rectángulo.

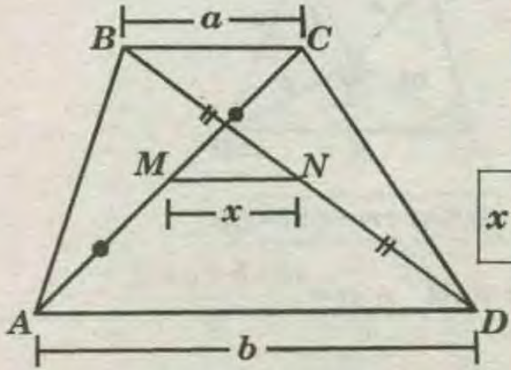
* Si: *M* es punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{MN} \perp \overline{AD}$

Se cumple :

$$x = y \rightarrow \boxed{m = \frac{a+b}{2}}$$

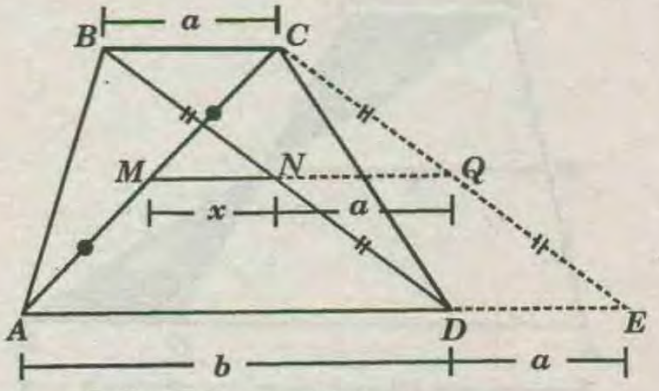
TEOREMA 7 : SEGMENTO QUE UNE PUNTO MEDIOS DE LA DIAGONAL

En todo trapecio el segmento que une los puntos medios de sus diagonales es paralelo a sus bases y su longitud es igual a la semidiferencia de las longitudes de dichas bases.



$$\boxed{x = \frac{b-a}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Se traza $\overline{CE} // \overline{BD}$ $(E \in \overline{AD})$

* En el $\triangle ACE$, por el punto medio M de $\overline{AC}$ se traza $\overline{MN} // \overline{AE}$, de modo que $\overline{MN} \cap \overline{CE} = (Q)$.

* Por el teorema de los puntos medios : $CQ = QE$.

* En el trapecio $ABCE$:

$$BN = ND \text{ y } \overline{BC} // \overline{NQ} // \overline{DE}$$

* En consecuencia :

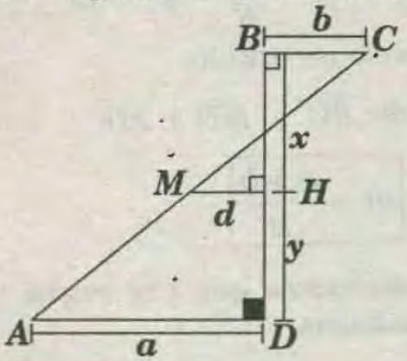
$$\overline{MN} // \overline{BC} // \overline{AD}$$

* Por otro lado en el $\triangle ACE$; $\overline{MQ}$ es base media :

$$x + a = \frac{a+b}{2} \Rightarrow x = \frac{a+b-2a}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{b-a}{2}}$$

NOTA :

En la figura , M es punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{MH} \perp \overline{BD}$



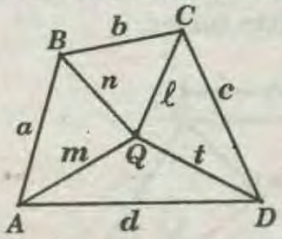
* Se cumple :

$$\boxed{x = y}$$

$$\rightarrow \boxed{d = \frac{a-b}{2}}$$

TEOREMA 8 :

En todo cuadrilátero convexo se cumple :



$$\boxed{p < m+n+\ell+t < 3p}$$

Donde :

$$2p = a+b+c+d \ \wedge \ p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

DEMOSTRACION :

* De la figura :

$$\left.\begin{array}{l} m+n < b+c+d \\ n+\ell < a+d+c \\ \ell+t < b+a+d \\ m+t < a+b+c \end{array}\right\} \text{sumando}$$

$$\Rightarrow 2(m+n+\ell+t) < 3(a+b+c+d)$$

* Despejando :

$$2(m+n+\ell+t) < 3(2p) \Rightarrow m+n+\ell+t < 3p \ldots\ldots (I)$$

* De los triángulos parciales :

$$\left.\begin{array}{l} a < m+n \\ b < n+\ell \\ c < \ell+t \\ d < t+m \end{array}\right\} \text{sumando}$$

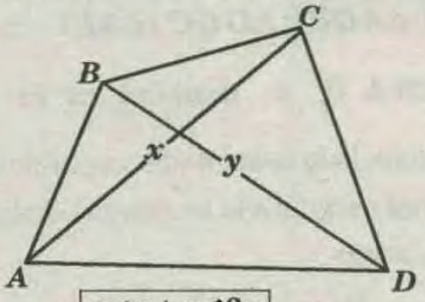
$$\Rightarrow (a+b+c+d) < 2(m+n+\ell+t)$$

$$\Rightarrow 2p < 2(m+n+\ell+t) \Rightarrow p < m+n+\ell+t \ldots\ldots (I)$$

* *de (I) y (II) :* $\boxed{p < m+n+\ell+t < 3p}$

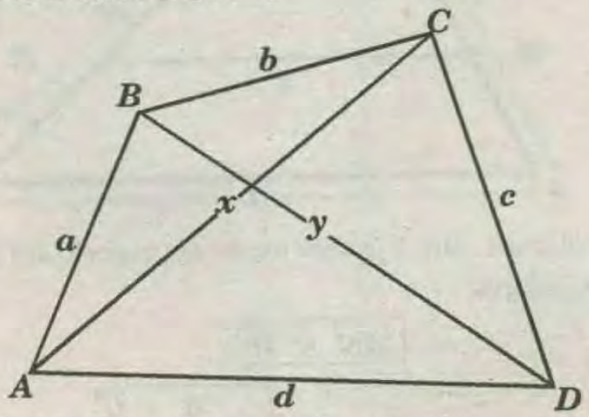
TEOREMA 9 :

Si «$2p$» es perímetro del trapezoide $ABCD$, se cumple:



$$\boxed{p < x+y < 2p}$$

DEMOSTRACIÓN :



Según el postulado de la mínima distancia.

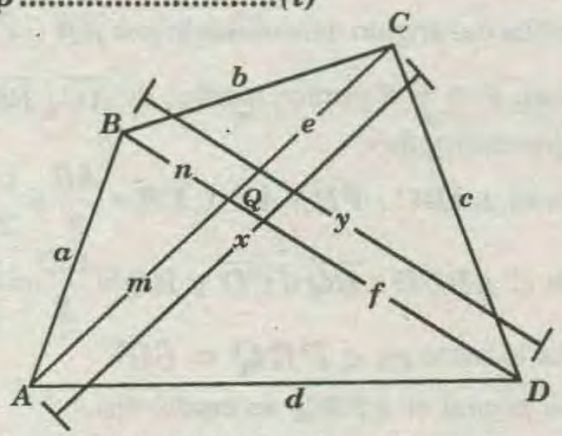
En el $\triangle ABC$: $x < a+b$ En el $\triangle BCD$: $y < b+c$

En el $\triangle ACD$: $x < c+d$ En el $\triangle ABD$: $y < a+d$

* Sumando miembro a miembro :

$2(x+y)<2\underbrace{(a+b+c+d)}_{2p}$

$x+y<2p$ .....(i)



* Según el postulado del la mínima distancia :

En el $\triangle AQB$: $a < m + n$

En el $\triangle QCD$: $c < e + f$

* Sumando miembro a miembro :

$$a+c<\underbrace{(m+e)}_{x}+\underbrace{(n+f)}_{y}$$

$a+c<x+y$ .....(I)

* Análogamente :

$b+d<x+y$ .....(II)

* Sumando miembro a miembro (I) y (II) :

$$\underbrace{a+b+c+d}_{2p}<2(x+y)$$

$\Rightarrow p<x+y$ ...(ii)

* De (i) y (ii) : $p<x+y<2p$

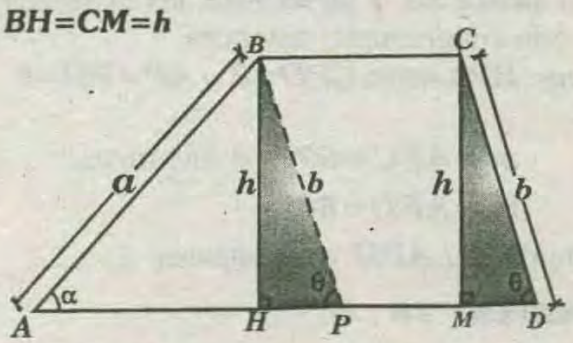
TEOREMA 10 :

En todo trapecio escaleno la medida de los ángulos determinados por una de las bases con los lados laterales son de diferente medida.

DEMOSTRACIÓN :

Trazamos BH y CM perpendiculares a AD

$\Rightarrow BH=CM=h$



Trazamos $BP//CD$

$\Rightarrow m\sphericalangle BPH=m\sphericalangle CDM=\theta$

$\triangle BHP \equiv CMD$ (A.L.A.)

$\Rightarrow BP=CD=b$

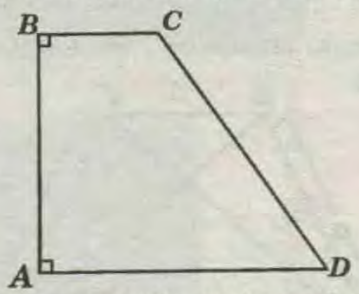
$\triangle ABP$ (correspondencia)

Como $a \neq b$ (trapecio escaleno) $\Rightarrow \alpha \neq \theta$

También : $m\sphericalangle ABC \neq m\sphericalangle BCD$

NOTA:

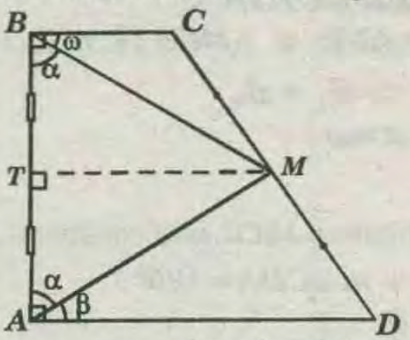
Si en un trapecio escaleno, uno de los lados laterales es perpendicular a las bases, a dicho trapecio escaleno se le denomina ***trapecio rectángulo*** .



En la figura , se presenta un trapecio escaleno. Si $AB \perp BC$ lo designamos ***trapecio rectángulo.***

TEOREMA 11 :

En todo trapecio rectángulo el punto medio del lado lateral no perpendicular a las bases está a igual distancia de los extremos del lado opuesto.



En la figura , se cumple $\boxed{BM = MA}$

DEMOSTRACIÓN :

* Trazamos la base media MT

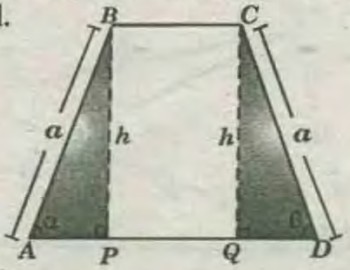
$\Rightarrow BT=TA$ y $TM \perp AB$

$\triangle BMA$: isoscéles $\Rightarrow BM=MA$

* Además : $m\sphericalangle MBA = m\sphericalangle MAB \Rightarrow \omega=\beta$

TEOREMA 12 :

En todo trapecio isósceles , la medida de los ángulos determinados por una de las bases con los lados laterales es igual.



Se cumple : $\alpha=\theta$

DEMOSTRACIÓN :

* Trazamos BP y CQ perpendiculares a AD

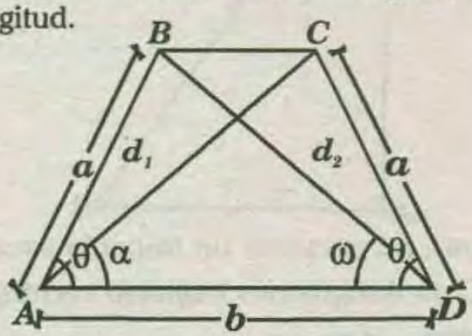
$$\Rightarrow BP=CQ=h$$

$\triangle BPA \equiv \triangle CQD$ *(L.L.L)* $\Rightarrow \alpha=\theta$

* Además : $AP=QD$

TEOREMA 13 :

En todo trapecio isósceles , las diagonales tienen igual longitud.



Sea $AC=d_1$ y $BD=d_2$

se cumple $d_1=d_2$

DEMOSTRACIÓN :

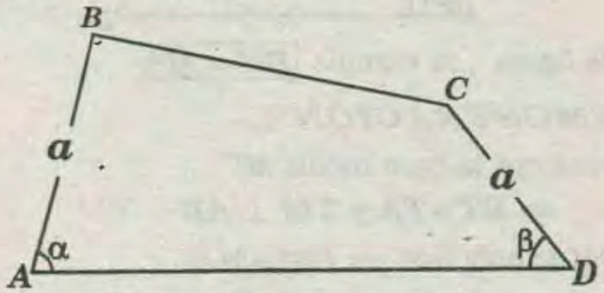
$$\triangle ABD \cong \triangle DCA \text{ (L.A. L.)}$$

$$\Rightarrow d_1 = d_2$$

* Además : $\alpha=\omega$

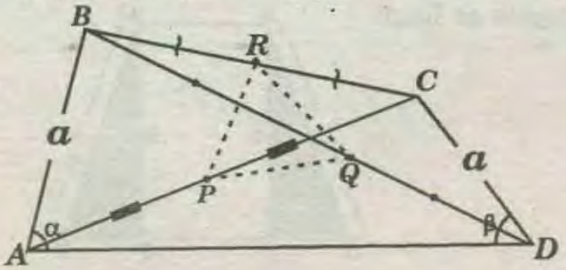
NOTA :

Sea un cuadrilátero $ABCD$, *será equilátero si :* $AB=CD$ y $m\sphericalangle BAD + m\sphericalangle CDA=120°$.



TEOREMA 14 :

Los puntos medios de las diagonales y del lado BC de un cuadrilátero equilátero $ABCD$, son los vértices de un triángulo equilátero.



DEMOSTRACIÓN :

Sean $AB=CD=a$ y $\alpha+\beta=120°$, resulta que la medida del ángulo determinado por $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es $60°$.

* Sean P, Q y R puntos medios de $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

* En el $\triangle ABC$: $\overline{PR} // \overline{AB}$ y $PR=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$

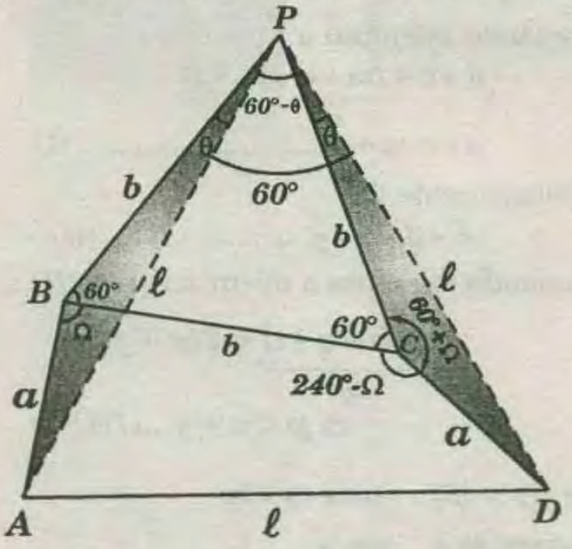
* En el $\triangle BCD$: $\overline{RQ} // \overline{CD}$ y $RQ=\dfrac{CD}{2}=\dfrac{a}{2}$

* Por lo tanto $m\sphericalangle PRQ = 60°$

* De lo cual el $\triangle PRQ$ es equilátero .

TEOREMA 15 :

Al trazar exteriormente el triángulo equilátero BCP, el triángulo APD también es equilátero.



DEMOSTRACIÓN :

Si : $m\sphericalangle BAD+m\sphericalangle ADC=120°$

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAD=m\sphericalangle ADC=240°$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ABP=m\sphericalangle DCP=60°+\Omega$$

y como $AB=DC=a$ y $BP=CP=b$, los triángulos ABP y DCP son congruentes, entonces

$$m\sphericalangle BPA=m\sphericalangle CPD=\theta \text{ y } AP=PD=\ell$$

Como :

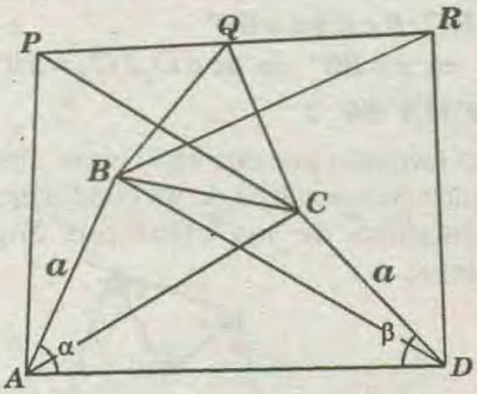
$$m\sphericalangle APC=60°-\theta \text{ entonces}$$

$$m\sphericalangle APD=60°$$

Por lo tanto el $\triangle APD$ es equilátero.

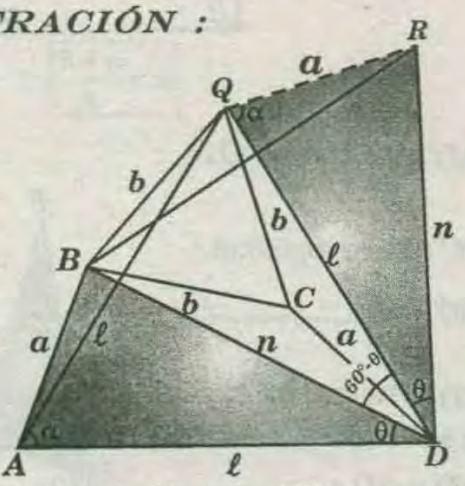
TEOREMA 16 :

Si se trazan los triángulos equiláteros APC; BQC y BRD en un cuadrilátero equilátero $ABCD$, en un mismo semiplano determinado por $\overrightarrow{AD}$.



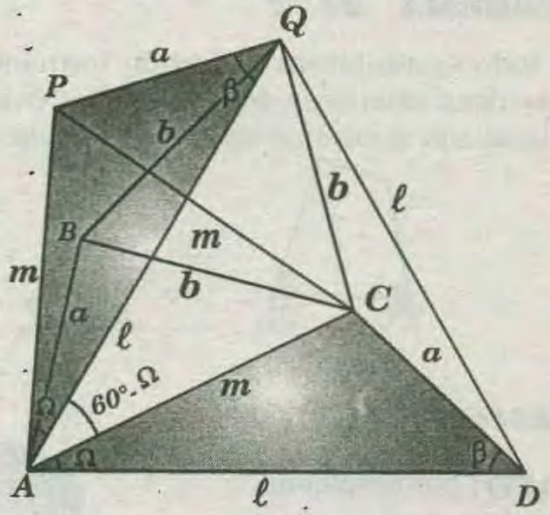
Se deduce que P, Q y R son colineales y Q es punto medio de $\overline{PR}$.

DEMOSTRACIÓN :



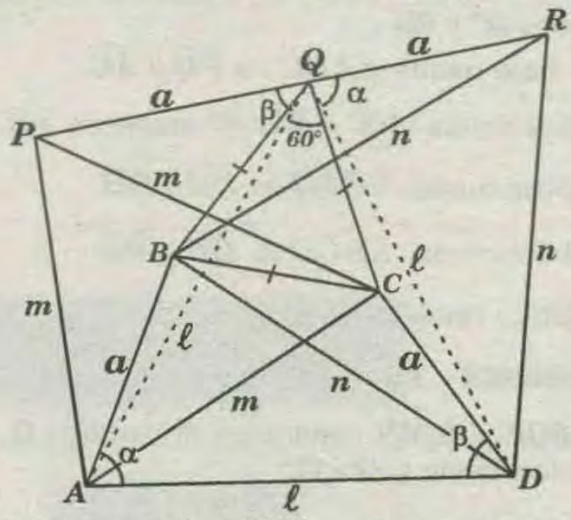
Por el teorema ***15*** , el triángulo AQD es equilátero y así $m\sphericalangle ADB = m\sphericalangle QDR = \theta$ .Por lo tanto, los triángulos ABD y QRD son congruentes (postulado de congruencia).

$\Rightarrow QR = AB = a$ y $m\sphericalangle RQD = m\sphericalangle BAD = \alpha$



Análogamente al caso anterior, el $\triangle AQD$ es equilátero por lo tanto $m\sphericalangle PAQ = m\sphericalangle CAD$ y los triángulos PAQ y CAD son congruentes (postulado de congruencia)

$\Rightarrow PC = CD = a$ y $m\sphericalangle PQA = m\sphericalangle CDA = \beta$



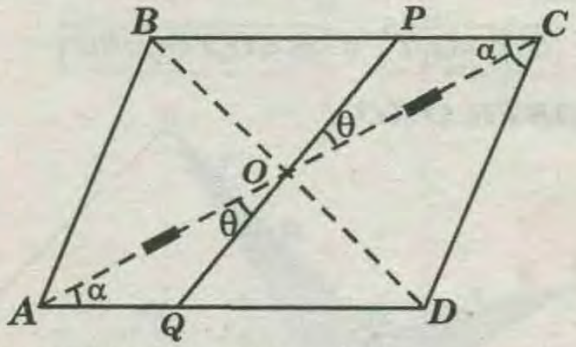
Si $ABCD$: $\alpha+\beta=120°$, de esta manera $\alpha+\beta+60°=180°$.

$\Rightarrow P, Q$ y R son colineales.

TEOREMA 17 :

En un paralelogramo $ABCD$ se cumple :

$PO = OQ$ y $PC = AQ$



DEMOSTRACIÓN :

* Se observa : $m\sphericalangle OAQ + m\sphericalangle OCP$

$m\sphericalangle AOQ = m\sphericalangle POC$ y $AO = OC$

$\triangle AQO \cong \triangle CPO$ (A.L.A)

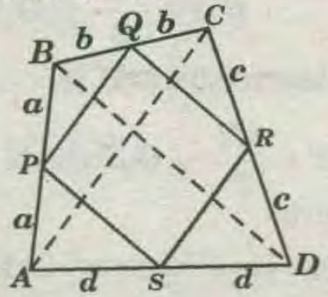
$\Rightarrow OP = OQ$ y $AQ = PC$

* Por lo visto que O es el centro de simetría del paralelogramo.

TEOREMA18 : TEOREMA DE VARIGNON

En todo cuadrilátero , los puntos medios de sus lados son los vértices de un paralelogramo.

DEMOSTRACIÓN :



Trazamos AC y BD .

$\overline{PQ}$: base media $\triangle ABC \Rightarrow \overline{PQ} // \overline{AC}$

$\overline{RS}$: base media $\triangle ADC \Rightarrow \overline{RS} // \overline{AC}$ entonces $\overline{PQ} // \overline{RS}$.

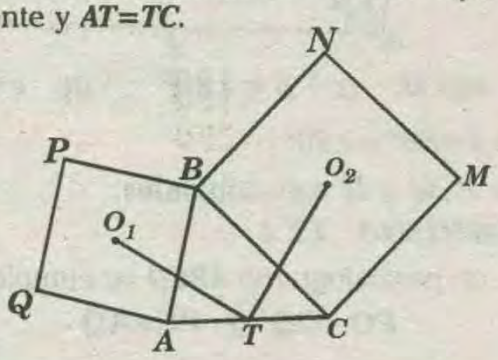
$\overline{PS}$: base media $\triangle BAD \Rightarrow \overline{PS} // \overline{BD}$

$\overline{QR}$: base media $\triangle BCD \Rightarrow \overline{QR} // \overline{BD}$

$\square PQRS$: Paralelogramo .

TEOREMA 19 :

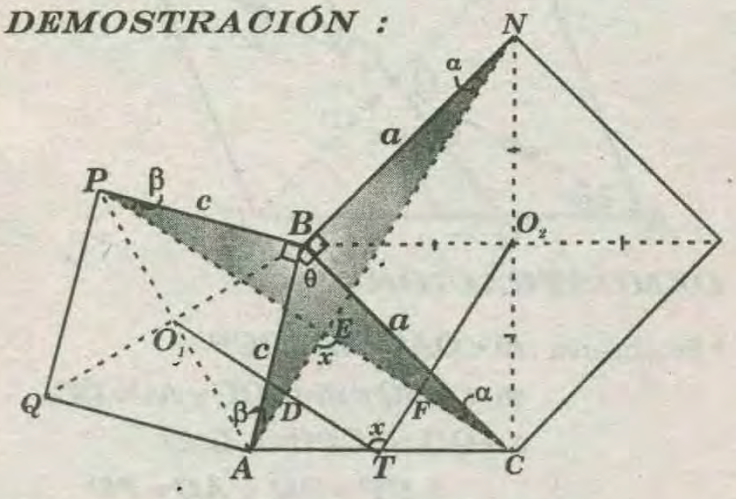
Sea $ABQP$ y $BCMN$ cuadrados de centros O_1 y O_2 respectivamente y $AT=TC$.



Se cumple :

$$\boxed{O_1T=O_2T} \text{ y } \boxed{m\sphericalangle O_1TO_2=90^\circ}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Sea $m\sphericalangle ABC=\theta$

$\triangle PBC \equiv \triangle ABN (L.A.L)$

$\Rightarrow PC=AN$

$m\sphericalangle BPC=mBAN$ y $m\sphericalangle BCP=m\sphericalangle BNA$

$\overline{O_1T}$: Base media $\triangle PAC$

$$O_1T=\frac{PC}{2} \text{ y } \overline{O_1T} // \overline{PC}$$

$\overline{O_2T}$: Base media $\triangle ACN$

$$O_2T=\frac{AN}{2} \text{ y } \overline{O_2T} // \overline{AN} \Rightarrow O_1T=O_2T$$

Se observa :

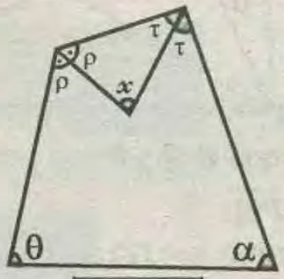
$\square DEFT$: Paralelogramo. $\square ABCE : \beta+\theta+\alpha=x$

* En $\triangle PBC : \beta+\theta+\alpha=90^\circ$

$\Rightarrow x=90^\circ \Rightarrow m\sphericalangle O_1TO_2=90^\circ$

TEOREMA 20 :

El ángulo formado por dos bisectrices interiores de dos ángulos consecutivos de un cuadrilátero es igual a la semisuma de los otros dos ángulos del cuadrilátero .



$$\boxed{x=\frac{\alpha+\theta}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :

$\triangle BFC$: Por propiedad :

$$x=90^\circ-\frac{\omega}{2} \text{ .....(I)}$$

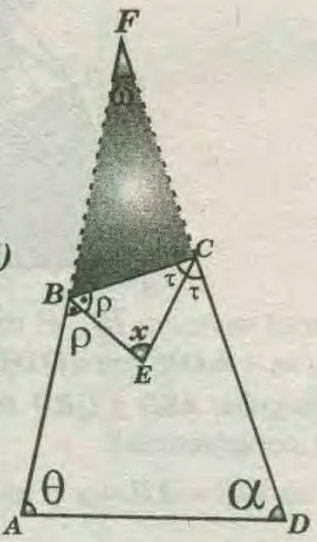
$\triangle AFD$: Por teorema ::

$\omega+\alpha+\theta=180^\circ$ .....(II)

* De (I) y (II) :

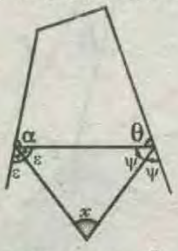
$180^\circ-2x+\alpha+\theta=180^\circ$

$\Rightarrow 2x=\alpha+\theta \Rightarrow \boxed{x=\frac{\alpha+\theta}{2}}$



TEOREMA 21 :

En todo cuadrilátero el ángulo formado por las bisectrices exteriores de dos ángulos consecutivos es igual a la semisuma de éstos 2 ángulos .



$$\boxed{x=\frac{\alpha+\theta}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :

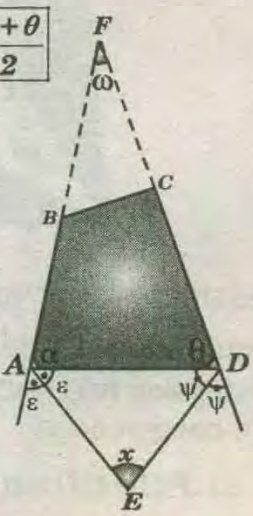
$\triangle AFD$; por propiedad

$$x=90^\circ-\frac{\omega}{2} \text{ .....(I)}$$

$\triangle AFD$; por teorema :

$\omega+\alpha+\theta=180^\circ$.....(II)

* De (I) y (II) :

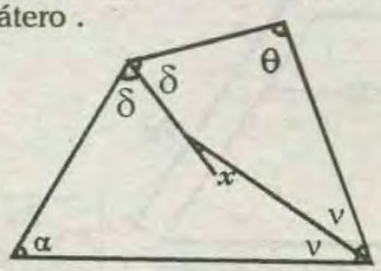


$$180° - 2x + \alpha + \theta = 180°$$

$$\Rightarrow 2x = \alpha + \theta \Rightarrow \boxed{x = \frac{\alpha+\theta}{2}}$$

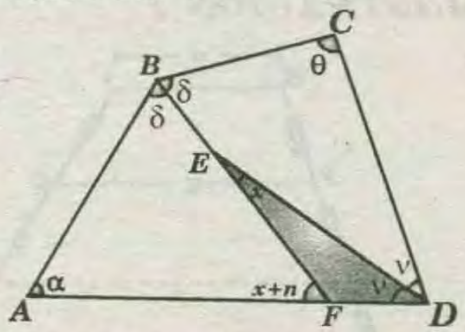
TEOREMA 22 :

El ángulo formado por las bisectrices interiores de dos ángulos opuestos de un cuadrilátero es igual a la semidiferencia de los otros dos ángulos del cuadrilátero .



$$\boxed{x = \frac{\theta-\alpha}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :



$\triangle ABCD$: $2\delta + 2\nu + \alpha + \theta = 360°$

$$\Rightarrow \delta + \nu = 180° - \frac{(\alpha+\theta)}{2} \quad \text{.....(I)}$$

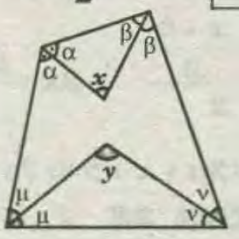
$\triangle ABF$: $\delta + \nu + \alpha + x = 180°$ .....(II)

* Reemplazando (I) en (II) :

$$180° - \frac{(\alpha+\theta)}{2} + \alpha + x = 180°$$

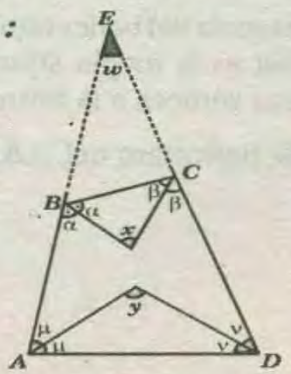
$$\Rightarrow x = \frac{\alpha+\theta}{2} - \alpha \Rightarrow x = \frac{\alpha+\theta-2\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\theta-\alpha}{2}}$$

TEOREMA 23 :



$\boxed{x + y = 180°}$

DEMOSTRACIÓN :



$\triangle BEC$: por propiedad :

$$x = 90° - \frac{w}{2} \quad \text{.....(I)}$$

$\triangle AED$; por propiedad :

$$y = 90° + \frac{w}{2} \quad \text{.....(II)}$$

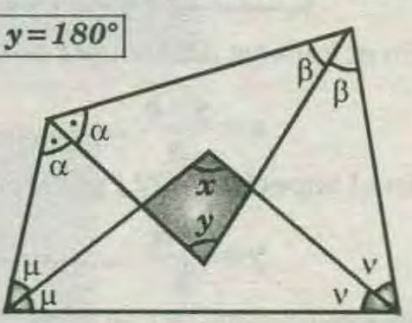
* sumando (I) y (II) :

$$x + y = 90° + 90°$$

$$\Rightarrow \boxed{x + y = 180°}$$

TEOREMA 24 :

La suma de dos ángulos opuestos del cuadrilátero formado al trazar las bisectrices interiores de un trapezoide es : $\boxed{x + y = 180°}$



DEMOSTRACIÓN :

$\triangle BEC$; por propiedad :

$$y = 90° - \frac{w}{2} \quad \text{.....(I)}$$

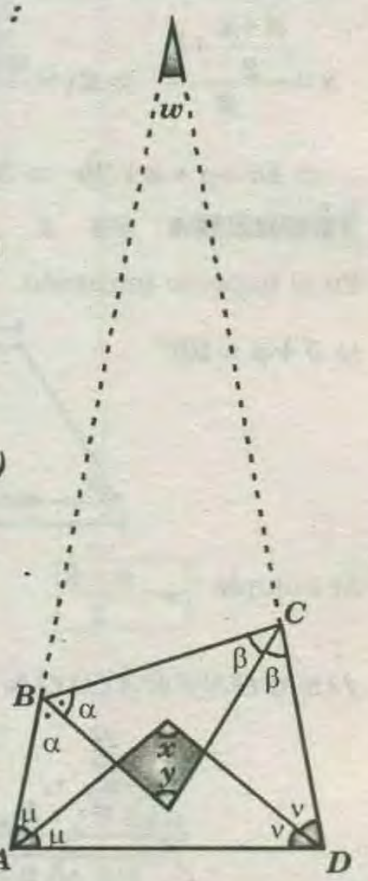
$\triangle AED$; por propiedad :

$$x = 90° + \frac{w}{2} \quad \text{.....(II)}$$

* sumando (I) y (II) :

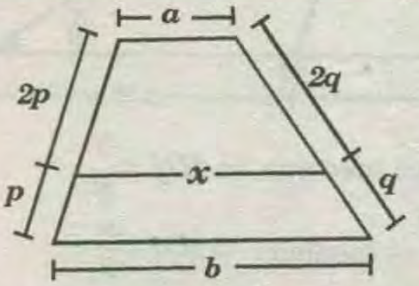
$$x + y = 90° + 90°$$

$$\Rightarrow \boxed{x + y = 180°}$$



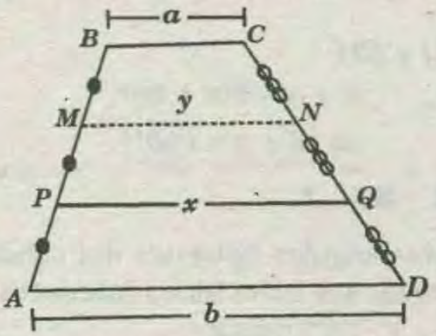
TEOREMA 25 :

En el trapecio mostrado.



$$\boxed{x = \frac{a+2b}{3}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* En el trapecio ***AMND*** ; por teorema :

$$x=\frac{y+b}{2} \quad \text{.....(I)}$$

* En el trapecio ***PBCQ*** ; por teorema :

$$y=\frac{a+x}{2} \quad \text{.....(II)}$$

* Reemplazando ***(II)*** en ***(I)***:

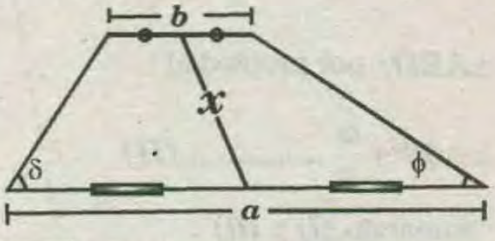
$$x=\frac{\frac{a+x}{2}+b}{2} \Rightarrow 2x=\frac{a+x+2b}{2}$$

$$\Rightarrow 4x=a+x+2b \Rightarrow 3x=a+2b \Rightarrow \boxed{x=\frac{a+2b}{2}}$$

TEOREMA 26 :

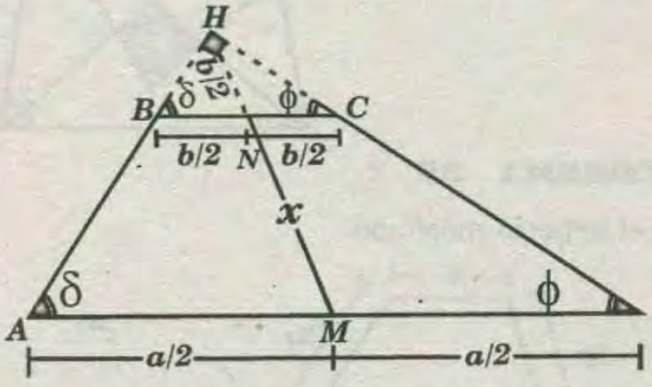
En el trapecio mostrado.

Si $\delta+\phi=90°$



Se cumple : $\boxed{x=\frac{a-b}{2}}$

DEMOSTRACIÓN :



$\triangle BHC$: $\overline{HN}$ es mediana $\Rightarrow HN=\frac{b}{2}$

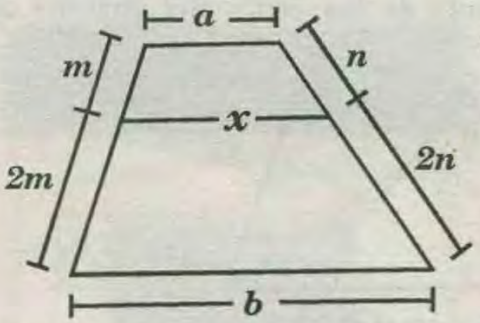
$\triangle AHD$: $\overline{HM}$ es mediana $\Rightarrow HM=\frac{a}{2}$

* Pero : ***H; N*** y ***M*** son colineales .

$$\Rightarrow HM=\frac{b}{2}+x=\frac{a}{2} \quad \Rightarrow \boxed{x=\frac{a-b}{2}}$$

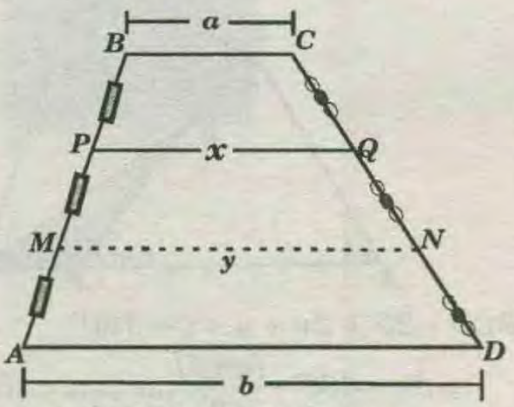
TEOREMA 27 :

En el trapecio mostrado .



$\boxed{x=\frac{2a+b}{3}}$

DEMOSTRACIÓN :



* En el trapecio ***MBCN*** ; por teorema :

$$x=\frac{a+y}{2} \quad \text{.....(I)}$$

* En el trapecio ***APQD***; por teorema :

$$y=\frac{x+b}{2} \quad \text{.....(II)}$$

* Reemplazando ***(II)*** en ***(I)***:

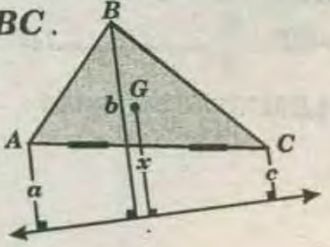
$$x=\frac{a+\frac{x+b}{2}}{2} \Rightarrow 2x=\frac{2a+x+b}{2}$$

$$\Rightarrow 4x=2a+x+b \Rightarrow 3x=2a+b \Rightarrow \boxed{x=\frac{2a+b}{3}}$$

TEOREMA 28 :

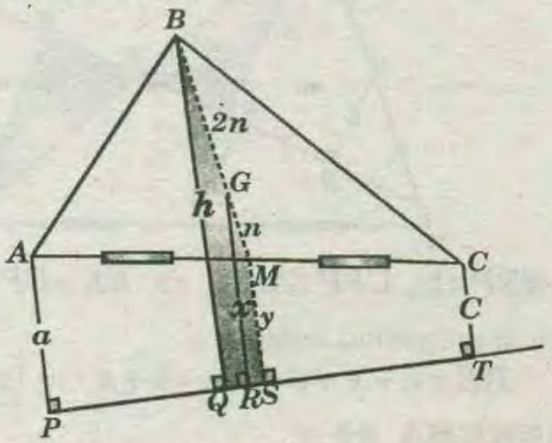
La distancia del baricentro de un triángulo a una recta exterior es la media aritmética de las distancias de los tres vértices a la misma recta .

Si «***G***» baricentro del $\triangle ABC$.



$$x=\frac{a+b+c}{3}$$

DEMOSTRACIÓN :



* En el trapecio ***BMSQ*** , por propiedad anterior :

$$x=\frac{2y+b}{3} \quad .....(I)$$

* En el trapecio ***ACTP*** , por teorema :

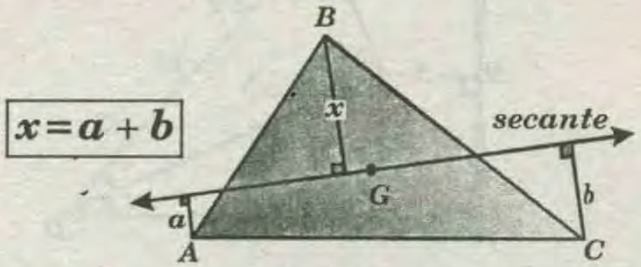
$$y=\frac{a+c}{2} \quad .....(II)$$

* Reemplazando ***(II)*** en ***(I)*** :

$$3x=a+b+c+b \Rightarrow \boxed{x=\frac{a+b+c}{3}}$$

TEOREMA 29 :

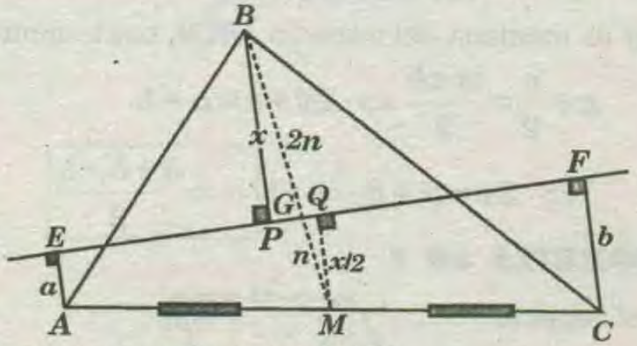
Si ***«G»*** baricentro del $\triangle ABC$



$$\boxed{x=a+b}$$

La distancia de ***B*** a la secante que pasa por el baricentro es igual a la semisuma de las distancias de ***A*** y ***C*** a dicha secante .

DEMOSTRACIÓN :



* Si ***«G»*** baricentro del $\triangle ABC$.

$$\Rightarrow BG=2GM=2n$$

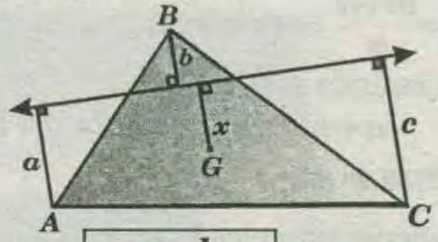
* Luego : $PB=2QM=x$

* En el trapecio ***AEFC***, por teorema :

$$\frac{x}{2}=\frac{a+b}{2} \Rightarrow \boxed{x=a+b}$$

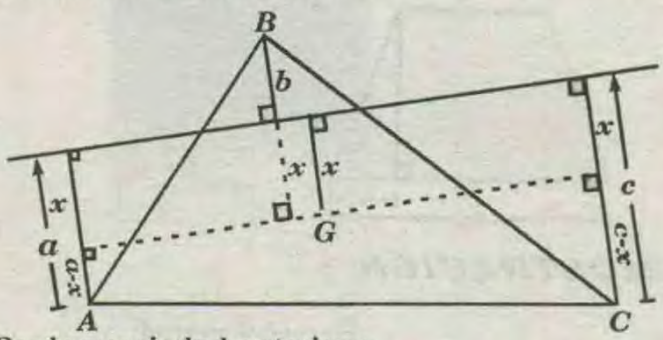
TEOREMA 30 :

Si ***«G»*** baricentro del $\triangle ABC$.



$$\boxed{x=\frac{a-b+c}{3}}$$

DEMOSTRACIÓN :

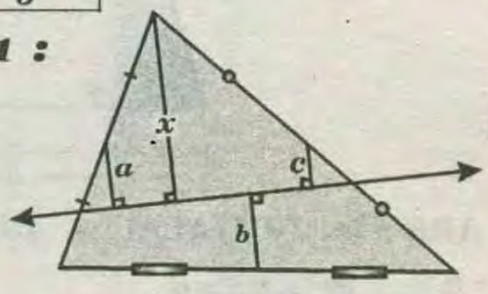


*Por la propiedad anterior :

$$b+x=a-x+c-x \Rightarrow 3x=a-b+c$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{a-b+c}{3}}$$

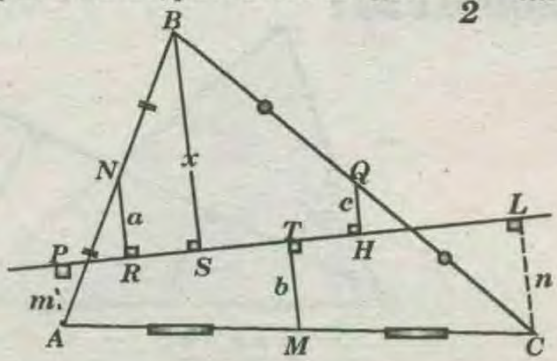
TEOREMA 31 :



$$\boxed{x=a+b+c}$$

DEMOSTRACIÓN :

* En el trapecio ***PBSA***, por teorema : $a=\frac{x-m}{2}$ ....***(I)***



* En el trapecio *SBLC*, por teorema :

$$c=\frac{x-n}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* Sumando *(I)* y *(II)*:

$$2(a+c)=2x-(m+n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

* En el trapecio *APLC* , por teorema :

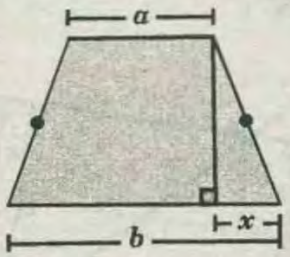
$$b=\frac{m+n}{2} \Rightarrow m+n=2b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV)$$

* Reemplazando *(IV)* en *(III)* :

$$a+c=x-b \quad \Rightarrow x=a+b+c$$

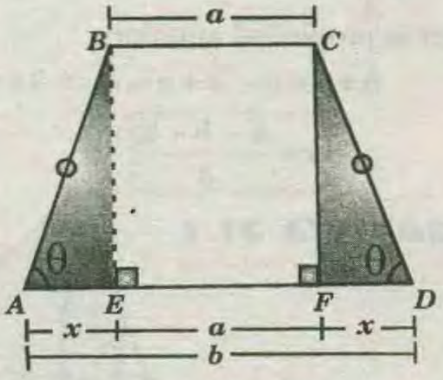
TEOREMA 32 :

En el trapecio isósceles la proyección de los lados oblicuos sobre la base es igual a la semidiferencia de las bases .



$$\boxed{x=\frac{b-a}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :



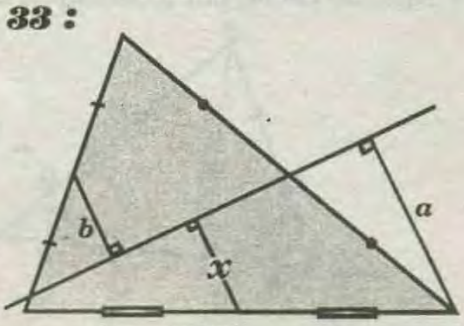
$\triangle ABE \cong \triangle DCF (ALA) \Rightarrow AE=FD=x$

* Pero : $BC=EF=a$

* Luego : $x+a+x=b \Rightarrow 2x=b-a$

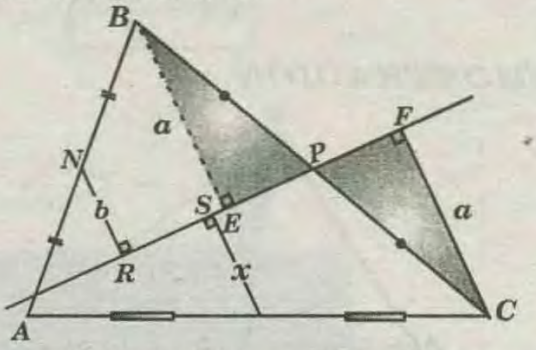
$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{b-a}{2}}$$

TEOREMA 33 :



$\boxed{x=a-b}$

DEMOSTRACIÓN :

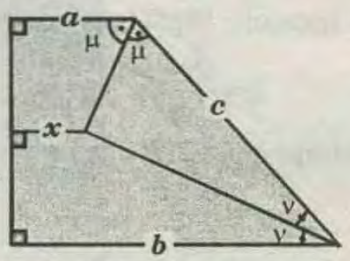


$\triangle BEP \cong \triangle CFP (ALA) \Rightarrow BE=CF=a$

* Por la propiedad anterior :

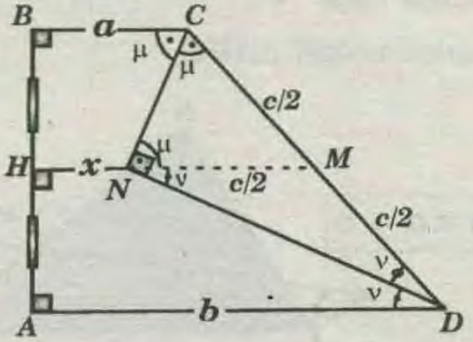
$$BE=b+x+0 \Rightarrow a=b+x \Rightarrow \boxed{x=a-b}$$

TEOREMA 34 :



$$\boxed{x=\frac{a+b-c}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* De la figura : $2\mu+2\nu=180°$

$$\Rightarrow \mu+\nu=90°$$

* $\triangle CND$; $\overline{MN}$ es mediana, por teorema :

$$CM=MD=MN=c/2$$

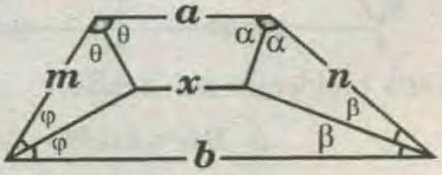
$\overline{HM}$ es mediana del trapecio *ABCD*, por teorema:

$$x+\frac{c}{2}=\frac{a+b}{2} \Rightarrow 2x+c=a+b$$

$$\Rightarrow 2x=a+b-c \Rightarrow \boxed{x=\frac{a+b-c}{2}}$$

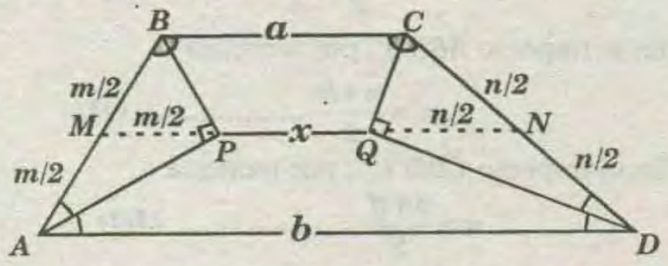
TEOREMA 35 :

En el trapecio :



$$\boxed{x=\frac{(a+b)-(m+n)}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Sabemos que : $m\sphericalangle APB = m\sphericalangle CQD = 90°$

$\triangle APB$; $\overline{MP}$ es mediana, entonces :

$$AM=MB=MP=m/2$$

$\triangle CQD$; $\overline{QN}$ es mediana, entonces :

$$CN=ND=QN=n/2$$

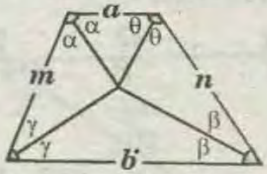
* Luego ; $\overline{MN}$ es mediana del trapecio $ABCD$, por teorema :

$$\frac{m}{2}+x+\frac{n}{2}=\frac{a+b}{2} \Rightarrow 2x+m+n=a+b$$

$$\Rightarrow 2x=(a+b)-(m+n) \Rightarrow \boxed{x=\frac{(a+b)-(m+n)}{2}}$$

ESCOLIO :

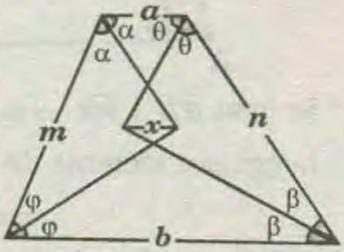
En el trapecio si $x=0$, se cumple ;



$\boxed{a+b=m+n}$ TEOREMA DE PITHOT

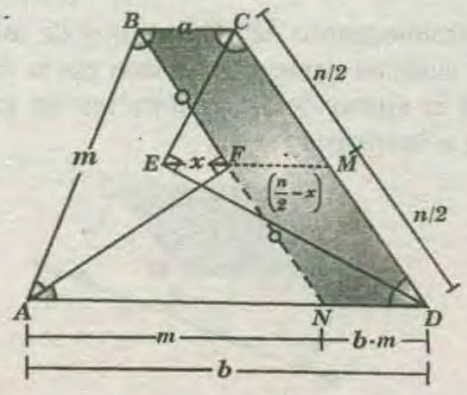
TEOREMA 36 :

En el trapecio :



$$\boxed{x=\frac{(m+n)-(a+b)}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :



Se prolonga $\overline{BF}$ hasta N $(N \in \overline{AD})$.

* El $\triangle ABN$ es isósceles :

$$AB=AN=m \quad \text{y} \quad BF=FN$$

* Pero los puntos E, F y M son colineales.

* Luego $\overline{FM}$ es la mediana del trapecio $NBCD$, por teorema :

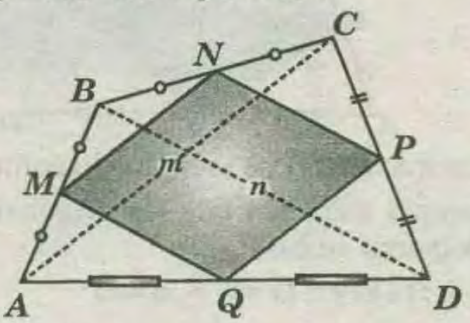
$$\frac{n}{2}-x=\frac{a+b-m}{2} \Rightarrow n-2x=a+b-m$$

$$\Rightarrow m+n=a+b+2x \Rightarrow 2x=(m+n)-(a+b)$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{(m+n)-(a+b)}{2}}$$

TEOREMA 37 :

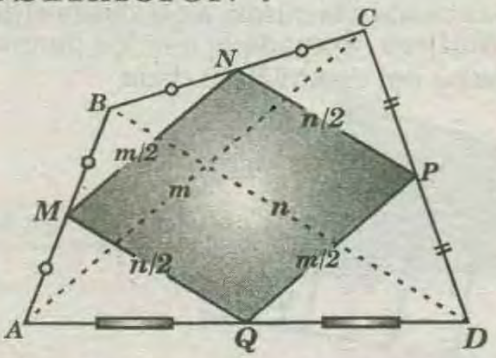
En todo trapezoide asimétrico , si se unen los puntos medios de sus lados se forman un paralelogramo, cuyo perímetro es igual a la suma de las longitudes de sus diagonales del trapezoide .



perímetro de $MNPQ=m+n$

Cuadrilátero $MNPQ$ es un paralelogramo .

DEMOSTRACIÓN :



$\triangle ABC$; $\overline{MN}$ es base media , por teorema : $MN=\frac{m}{2}$

$\triangle ACD$; $\overline{PQ}$ es base media, por teorema: $PQ=\frac{m}{2}$

$$\overline{MN} \parallel \overline{PQ} \text{ y } MN=PQ=\frac{m}{2}$$

$\triangle BCD$; $\overline{NP}$ es base media, por teorema : $NP=\frac{n}{2}$

$\triangle ABD$; $\overline{MQ}$ es base media, por toerema: $MQ=\frac{n}{2}$

$$\Rightarrow \overline{NP} \parallel \overline{MQ} \ \wedge \ NP=MQ=\frac{n}{2}$$

En consecuencia : $AC=MN+PQ$ y $BD=NP+MQ$

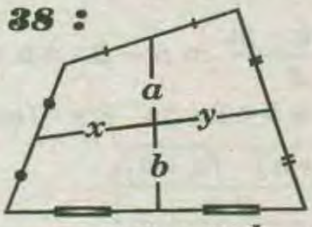
* Perímetro de $MNPQ = AC + BD = m + n$

Cuadrilátero $MNPQ$ es un paralelogramo

CONSECUENCIAS :

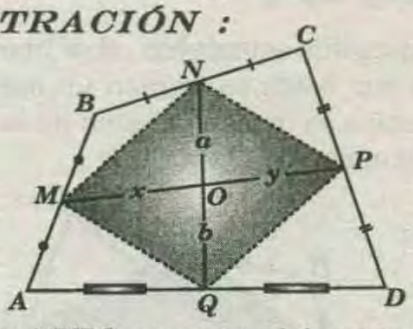
* Si $m = n$: $MNPQ$ es un rombo..
* Si $\overline{AC} \perp \overline{BD}$: $MNPQ$ es un réctángulo.
* Si $m = n$ y $\overline{AC} \perp \overline{BD}$: $MNPQ$ es un cuadrado .

TEOREMA 38 :



$x = y \wedge a = b$

DEMOSTRACIÓN :



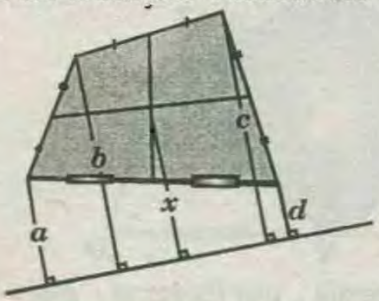
Por teorema: $MNPQ$ es un paralelogramo .

Por teorema sabemos que las diagonales de todo paralelogramo se bisecan.

En consecuencia: $(x = y \wedge a = b)$

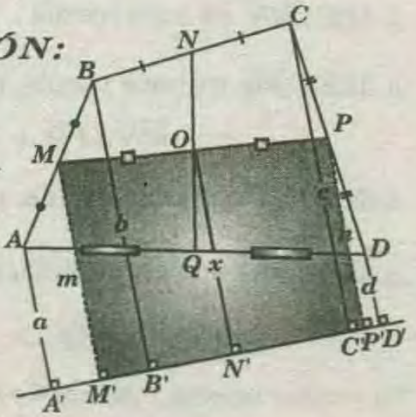
TEOREMA 39 :

El promedio de las distancias de los cuatro vértices de un cuadrilátero a una recta exterior es igual a la distancia trazada a la misma recta desde el baricentro del cuadrilátero formado al unir los puntos medios de los lados del cuadrilátero dado



$$\boxed{x = \frac{a+b+c+d}{4}}$$

DEMOSTRACIÓN:



*Por la propiedad : $MO = OP$

* En el trapecio $MPP'M'$; por teorema:

$$x = \frac{m+n}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

* En el trapecio $ABB'A'$; por teorema :

$$m = \frac{a+b}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

* En el trapecio $CDD'C'$; por teorema :

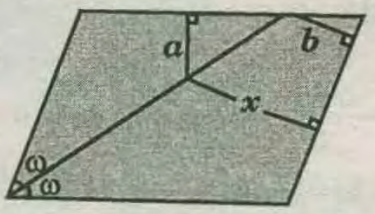
$$n = \frac{c+d}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (III)$$

* Reemplazando *(II)* y *(III)* en *(I)* :

$$x = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a+b+c+d}{4}}$$

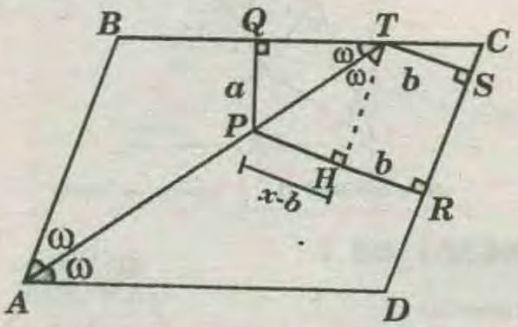
TEOREMA 40 :

En el paralelogramo :



$$\boxed{x = a + b}$$

DEMOSTRACIÓN:



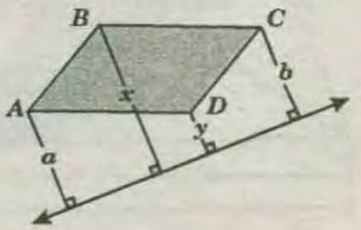
* Se traza $\overline{TH} \perp \overline{PR} \Rightarrow m\sphericalangle ATB = m\sphericalangle ATH = \omega$.

* Luego por teorema de la bisectríz de un ángulo:

$$a = x - b \rightarrow \boxed{x = a + b}$$

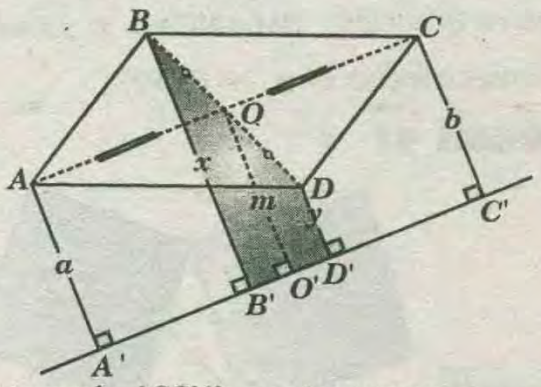
TEOREMA 41 :

En el paralelogramo $ABCD$ la suma de las distancias de dos vértices opuestos a una recta exterior , es igual a la suma de las distancias de los otro dos vértices a la misma recta .



$$\boxed{x+y=a+b}$$

DEMOSTRACIÓN :



* En el trapecio *ACC'A'*; por teorema :

$$m=\frac{a+b}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textit{(I)}$$

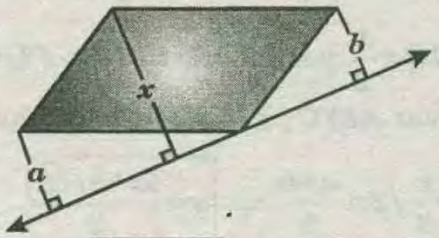
* En el trapecio *BDD'B'* ; por teorema:

$$m=\frac{x+y}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textit{(II)}$$

* De *(I)* y *(II)* : $\frac{x+y}{2}=\frac{a+b}{2} \Rightarrow \boxed{x+y=a+b}$

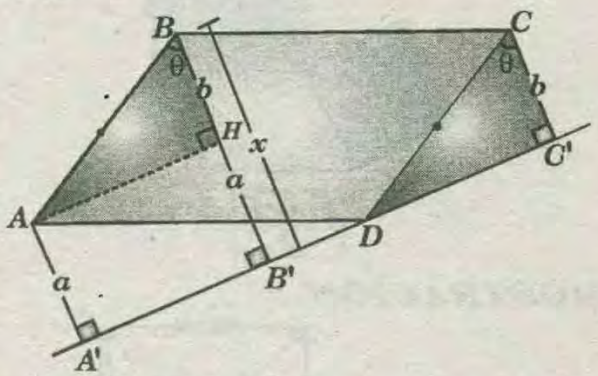
TEOREMA 42 :

En el paralelogramo sombreado :



$$\boxed{x=a+b}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Se traza $\overline{AH} \perp \overline{BB'}$
* En el rectángulo *AHB'A': AA' = HB'=a* .
* Pero por ángulos de lados paralelos :

$$m\sphericalangle ABH = m\sphericalangle DCC' = \theta$$

* Luego : $\triangle ABH \cong \triangle DCC'(ALA) \rightarrow BH=CC'=b$
* En consecuencia: $\boxed{x=a+b}$

NOTA :

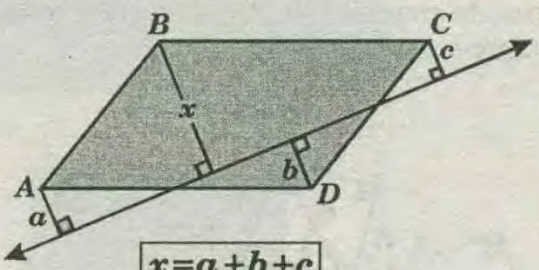
Por propiedad:

$$x+y=a+b \Rightarrow x+0=a+b$$

$$\Rightarrow \boxed{x=a+b} \quad Lqqd$$

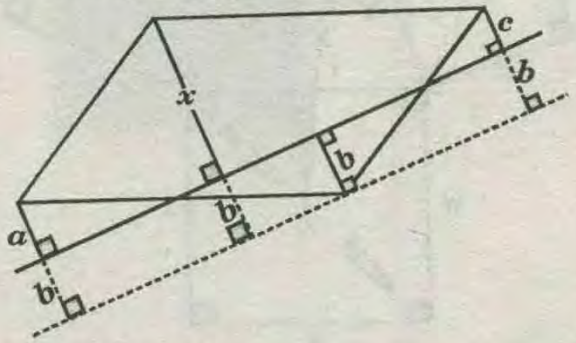
TEOREMA 43 :

En el paralelogramo *ABCD* :



$$\boxed{x=a+b+c}$$

DEMOSTRACIÓN :

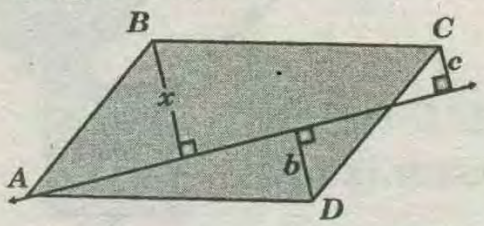


Por propiedad anterior:

$$x+b=a+b+c+b \Rightarrow \boxed{x=a+b+c}$$

TEOREMA 44 :

En el paralelogramo *ABCD* :



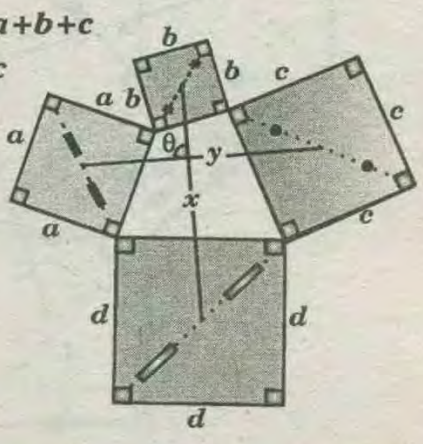
$$\boxed{x=b+c}$$

DEMOSTRACIÓN :

Por propiedad : $x=a+b+c$

Pero : $a=0 \Rightarrow x=b+c$

TEOREMA 45 :



$\boxed{x=y} \wedge \boxed{\theta=90°}$

DEMOSTRACIÓN :

Por teorema ***19*** :

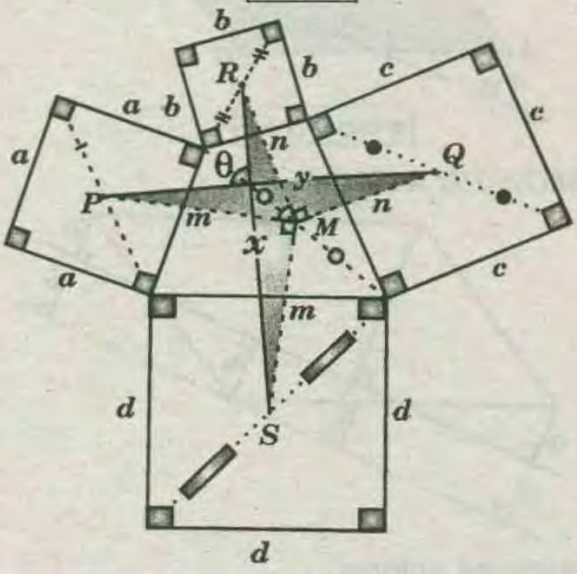
$*\ RM=MQ \wedge m\sphericalangle RMQ=90°$

$*\ PM=MS \wedge m\sphericalangle PMS=90°$

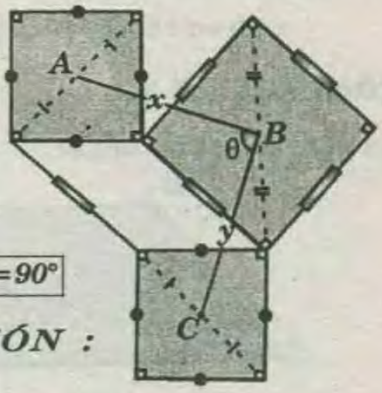
* Luego: $\Delta RMS \cong \Delta QMP\ (LAL) \rightarrow x=y$

Por suma de medidas de ángulos correspondientes de triángulos congruentes :

$\boxed{\theta=90°}$

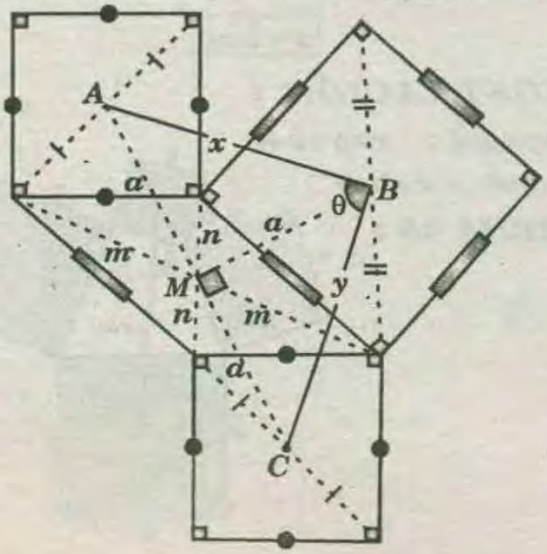


TEOREMA 46 :



$\boxed{x=y} \wedge \boxed{\theta=90°}$

DEMOSTRACIÓN :



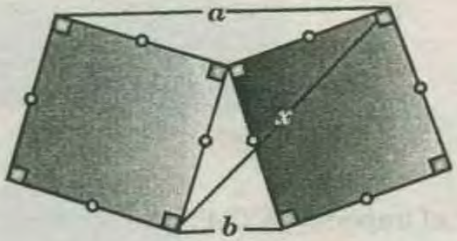
Por teorema ***19*** :

$\triangle AMB$ es isósceles : $AM=MB=a \Rightarrow x=a\sqrt{2}$

$\triangle BMC$ es isósceles : $BM=MC=a \Rightarrow y=a\sqrt{2}$

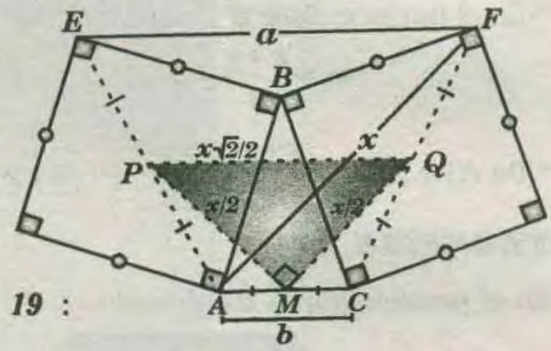
* En consecuencia: $x=y \wedge \theta=90°$

TEOREMA 47 :



$\boxed{x=\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}}$

DEMOSTRACIÓN :



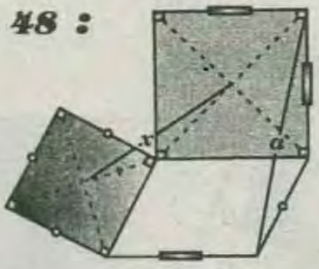
Por teorema ***19*** :

$$PM=MQ=\frac{x}{2} \text{ y } m\sphericalangle PMQ=90° \Rightarrow PQ=\frac{x}{2}\sqrt{2}$$

En el trapecio $AEFC$, $\overline{PQ}$ es mediana, por teorema:

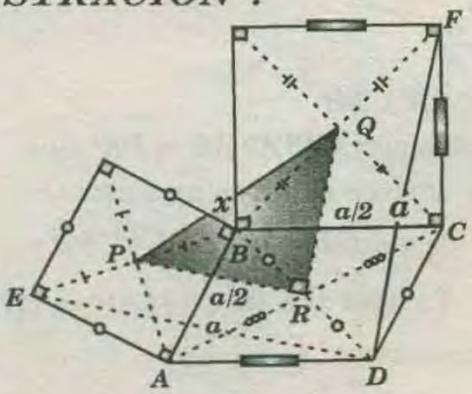
$$\frac{x}{2}\sqrt{2}=\frac{a+b}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}}$$

TEOREMA 48 :



$\boxed{x=\frac{a}{2}\sqrt{2}}$

DEMOSTRACIÓN :



$\Delta EAD \cong \Delta DCF$ (LAL) $\Rightarrow ED=FD=a$

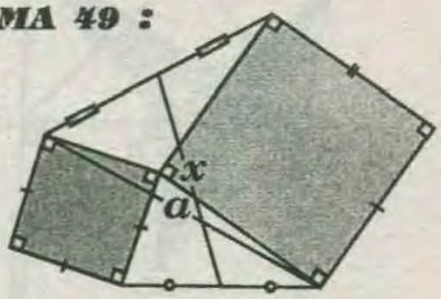
ΔEBD; $\overline{PR}$ es base media, por teorema: $PR=a/2$.

ΔDBF; $\overline{RQ}$ es base media, por teorema: $RQ=a/2$

Por teorema *19* : $m\sphericalangle PRQ=90°$

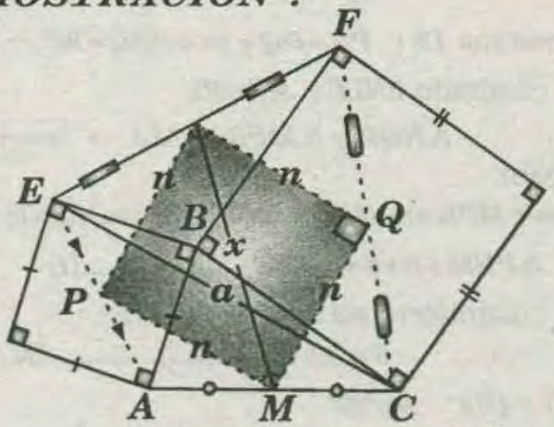
* Luego : $PQ=\frac{a}{2}\sqrt{2}$

TEOREMA 49 :



$\boxed{x=\frac{a}{2}\sqrt{2}}$

DEMOSTRACIÓN :



* Por teorema *19* : $EC=AF=a$ y $\overline{EC} \perp \overline{AF}$

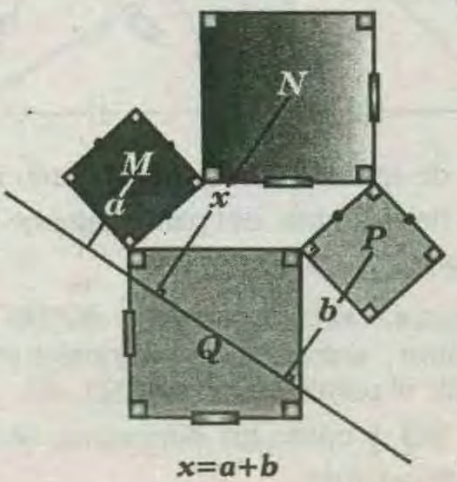
* Luego: *MPNQ* es un cuadrado *(Teorema)*

* Además: $2n=a \rightarrow n=a/2$

$$\Rightarrow x=n\sqrt{2} \Rightarrow x=\frac{a}{2}\sqrt{2}$$

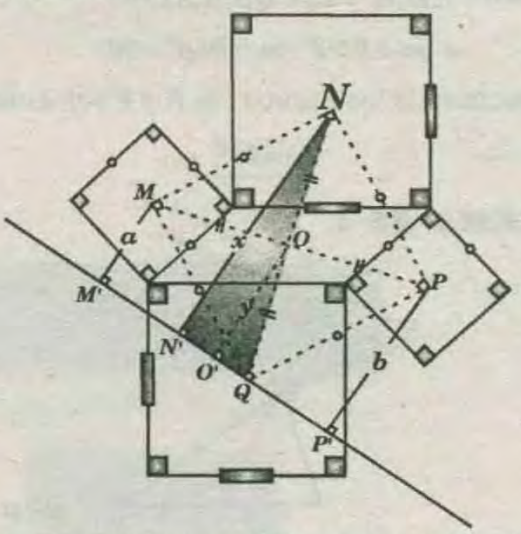
TEOREMA 50 :

Si *M; N; P* y *Q* son centros de los cuadrados, se cumple :



$x=a+b$

DEMOSTRACIÓN :



Por teorema anterior : *MNPQ* es un cuadrado .

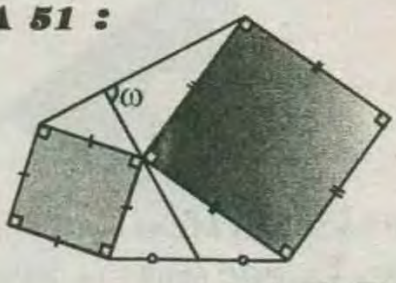
En el trapecio *MPP'M'* por teorema:

$$y=\frac{a+b}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textit{(I)}$$

En el $\triangle N'NQ$. Por teorema : $y=\frac{x}{2}$ ..... *(II)*

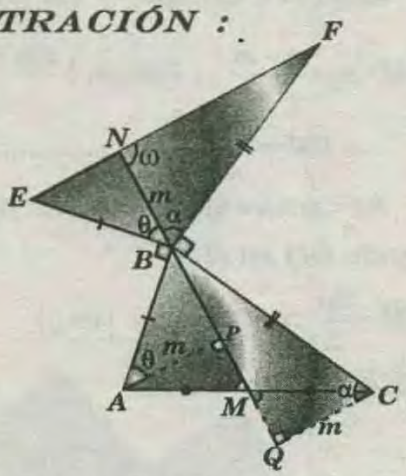
De *(I)* y *(II)* : $\frac{x}{2}=\frac{a+b}{2} \Rightarrow \boxed{x=a+b}$

TEOREMA 51 :



$\boxed{\omega=90°}$

DEMOSTRACIÓN :



$\triangle APM \cong \triangle CQM$ (ALA) $\Rightarrow AP=CQ=m$

A continuación se prolonga $\overline{MB}$ hasta *N*, de manera que: $BN=m$

* Luego: $\triangle ENB \cong \triangle BPA$ (LAL)

$\rightarrow m\sphericalangle ENB=m\sphericalangle BPA=90°$

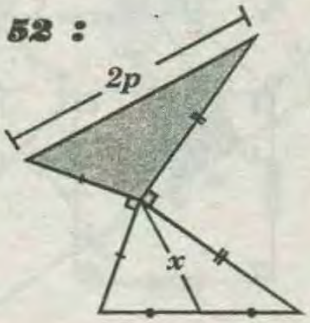
* También : $\triangle BNF \cong \triangle CQB$ (LAL)

$\rightarrow m\sphericalangle BNF = m\sphericalangle BQC = 90°$

En consecuencia los puntos : **E, N** y **F** son colineales.

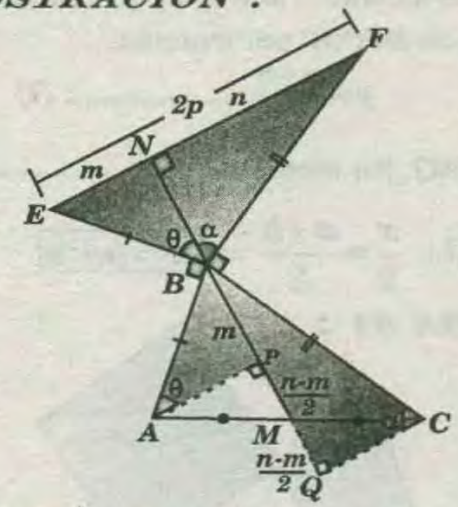
$\boxed{\omega = 90°}$

TEOREMA 52 :



$x = p$

DEMOSTRACIÓN :



$ENB \cong \triangle BPA$ (ALA) $\rightarrow EN = BP = m$

$BNF \cong \triangle BQC$ (ALA) $\rightarrow NF = BQ = n$

*Pero como. $\triangle APM \cong \triangle CQM \rightarrow PM = MQ = \dfrac{n-m}{2}$

*Luego : $BM = m + \dfrac{n-m}{2} \Rightarrow BM = m + \dfrac{2m+n-m}{2}$

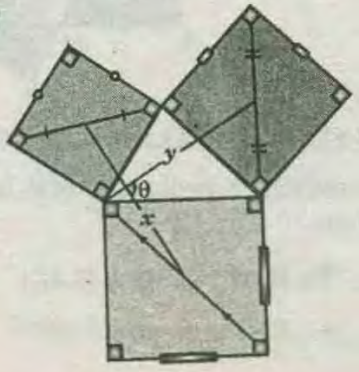
$\therefore BM = \dfrac{m+n}{2}$ ..... (I)

*Por dato : $EF = m + n = 2p$ ..... (II)

* Reemplazando (II) en (I) :

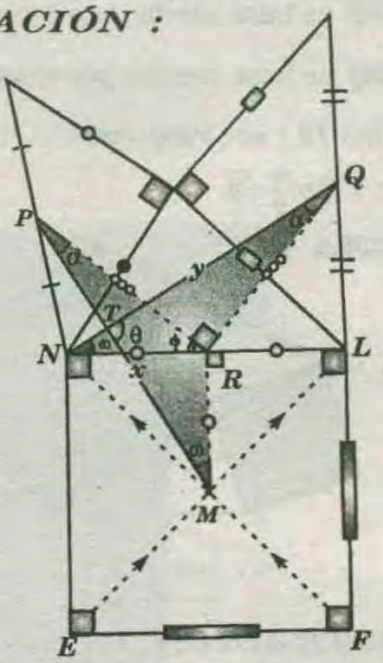
$BM = \dfrac{2p}{2} \Rightarrow BM = p \Rightarrow \boxed{x = p}$

TEOREMA 53 :



$\boxed{x = y} \wedge \boxed{\theta = 90°}$

DEMOSTRACIÓN :



* Por teorema **19** : $PR = RQ$ y $m\sphericalangle PRQ = 90°$

* En el cuadrado **ENLF** : $NR = RL$

$\triangle NQR \cong \triangle MPR$ (LAL) $\rightarrow \boxed{x = y}$

* También:

$m\sphericalangle MPR = m\sphericalangle NQR \quad m\sphericalangle PMR = m\sphericalangle QNR = \omega$

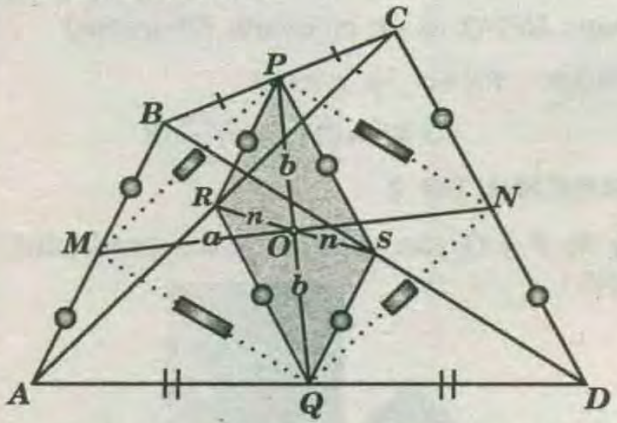
* En el $\triangle PRM : \alpha + \phi + \omega = 90°$ .....(I)

* En el cuadrilátero no convexo **PRNT** :

$\theta = \alpha + \phi + \omega$ .....(II)

* De (I) y (II) : $\theta = 90°$

TEOREMA 54 :



O : centro de sismetría del paralelogramo **RPSQ** .

O : centro de sismetría del paralelogramo **MPNQ** .

DEMOSTRACIÓN :

Por teorema, sabemos que **MPNQ** es un paralelogramo , entonces sus diagonales se bisecan en «**O**». En el paralelogramo **RPSQ**, «**O**» es punto medio de $\overline{PQ}$ y como las diagonales se bisecan, entonces: $RO = OS = n$.

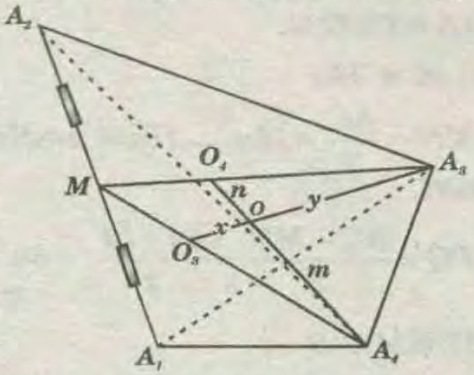
EN CONSECUENCIA :

O es el centro de sismetría de los paralelogramos , *RPSQ* y *MPNQ*

BARICENTRO DE UN CUADRILÁTERO .

MEDIANAS DE UN CUADRILÁTERO :

Consideremos en nombrar ***medianas del cuadrilátero*** a los segmentos rectilíneos que mencionen los vértices del cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$ con los baricentros O_1; O_2; O_3; O_4 de los triángulos compuestos de los tres vértices restantes . Las medianas de un cuadrilátero concurren en un punto común y que este punto divide a cada una de ellas en la razón ***3: 1***, con la porción más larga hacia el vértice .



* O_3: baricentro del $\Delta A_1A_2A_4$

* O_4: baricentro del $\Delta A_1A_2A_3$

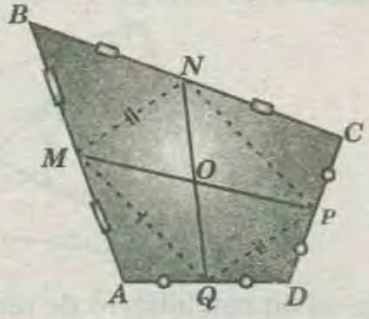
* $\overline{A_3O_3}$ y $\overline{A_4O_4}$ son medianas del cuadrilátero *ABCD*

O es baricentro del cuadrilátero *ABCD* .

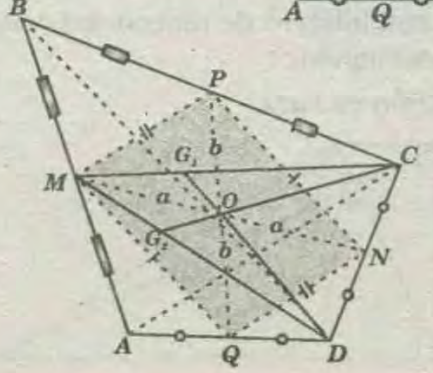
$$y=3x \ \wedge \ m=3n$$

NOTA :

O es baricentro del cuadrilátero *ABCD* y centro de simetría del paralelogramo *MNPQ*.



TEOREMA 55 :

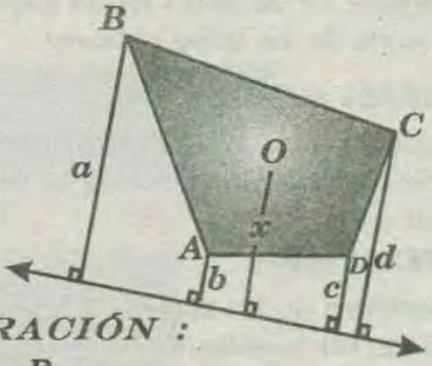


El baricentro *"O"* del cuadrilátero *ABCD*, coincide con el centro de simetría *"O"* del paralelogramo *MPNQ*

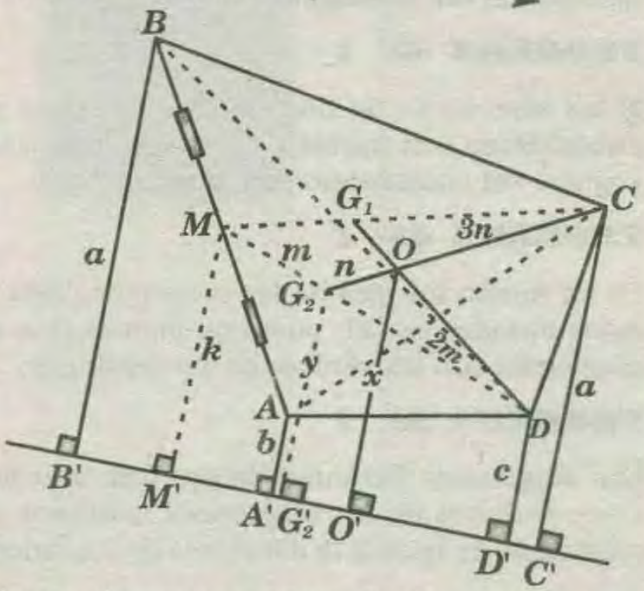
TEOREMA 56 :

Si *O* es baricentro del cuadrilátero *ABCD,* se cumple:

$$x=\frac{a+b+c+d}{4}$$



DEMOSTRACIÓN :



* En el trapecio $BAA'B'$, por teorema:

$$2k=a+b \quad \ldots\ldots (I)$$

* En el trapecio *MDD'M'*, por teorema anterior :

$$3y=2k+c \quad \ldots\ldots (II)$$

* Reemplazando *(I)* en *(II)*: $3y=a+b+c$ ...*(III)*

* En el trapecio $G_2CC'G_2'$, por teorema anterior :

$$4x=3y+d \quad \ldots\ldots (IV)$$

* Reemplazando *(III)* en *(IV)*: $4x=a+b+c+d$

$$x=\frac{a+b+c+d}{4}$$

TEOREMA 57 :

Al unir los ortocentros de los triángulos rectángulos isósceles construidos exteriormente sobre los lados de un romboide , se obtiene un cuadrado .

TEOREMA 58 :

Las mediatrices de los lados de un trapecio isósceles concurren en un punto .

TEOREMA 59 :

La suma de las medidas de las diagonales de un trapecio es mayor que la suma de las medidas de las longitudes de las bases .

TEOREMA 60 :

La diferencia de las bases de un trapecio es menor que la suma de los lados oblicuos .

TEOREMA 61 :

La recta determinada por los puntos medios de las bases de un trapecio isósceles es perpendicular a las bases .

TEOREMA 62 :

Las bisectrices de los ángulos de un paralelogramo determinan un rectángulo.

TEOREMA 63 :

Si las bisectrices de dos ángulos opuestos de un cuadrilátero son paralelos , luego los otros dos ángulos del cuadrilátero son iguales .

TEOREMA 64 :

En un rombo los pies de las perpendiculares a los lados trazadas por el punto de intersección de las diagonales son los vértices de un rectángulo .

TEOREMA 65 :

Las diagonales del cuadrilátero formado por las intersecciones de las bisectrices interiores de un rectángulo es igual a la diferencia de los lados .

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

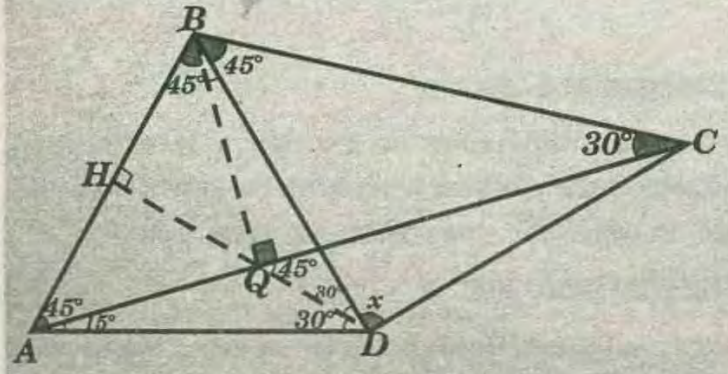
ABCD es un cuadrilátero tal que :

$m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle BDA = 60°$, $mDBC = 45°$, $mBCA = 30°$.

Halle $m\sphericalangle BDC$

A) 45° B) 60° C) 70° D) 72° E) 90°

RESOLUCIÓN :



* Se traza el cuadrilátero *DQBC* tiene :

$m\sphericalangle QDB = m\sphericalangle BCQ = 30°$

$\Rightarrow m\sphericalangle CQD = m\sphericalangle DBC = 45°$

* ΔAQD : $m\sphericalangle BQC = 45° + 45° \Rightarrow m\sphericalangle BQC = 90°$

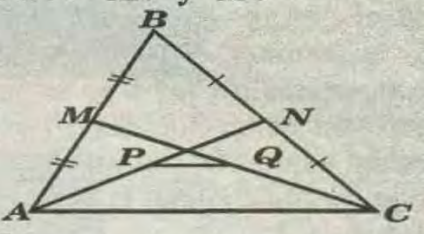
* En el cuadrilátero *DQBC* : $x = 90°$

RPTA : "E"

PROBLEMA 2 :

Si : $AC = 24u$, calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AN}$ y $\overline{MC}$.

A) 6u
B) 5
C) 4
D) 3
E) 8



RESOLUCIÓN:

* Como : $AC = 24u$

$$\rightarrow MN = \frac{AC}{2} = 12u \text{.....(base media)}$$

* $\triangle AMNC$:

$$PQ = \frac{AC - MN}{2} = \frac{24 - 12}{2} = 6u$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 3 :

Determine el valor de verdad (*VoF*) de las proposiciones:

I) Un cuadrilátero de diagonales congruentes, es un rectángulo.

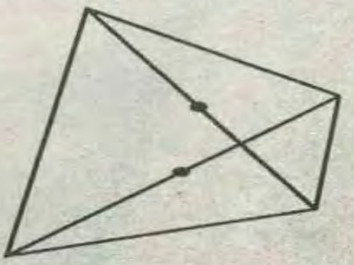
II) Un cuadrilátero de diagonales perpendiculares, es un trapezoide simétrico.

III) Un cuadrilátero de lados congruentes es un rombo.

A) FFF B) FFV C) FVV D) VVV

RESOLUCIÓN :

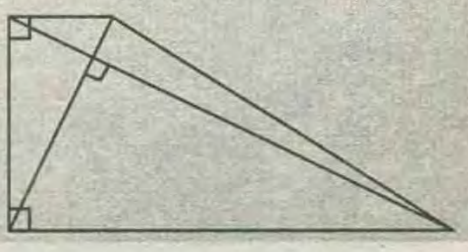
I)



Este es un cuadrilátero de diagonales congruentes y no es un rectángulo.

La proposición es *FALSA*.

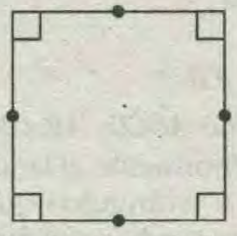
II)



Este es un trapecio rectángulo de diagonal perpendiculares y no es un trapezoide simétrico.

La proposición es *FALSA*.

III)



* Este es un cuadrado, tiene lados congruentes y no es un rombo.

La proposición es *FALSA*.

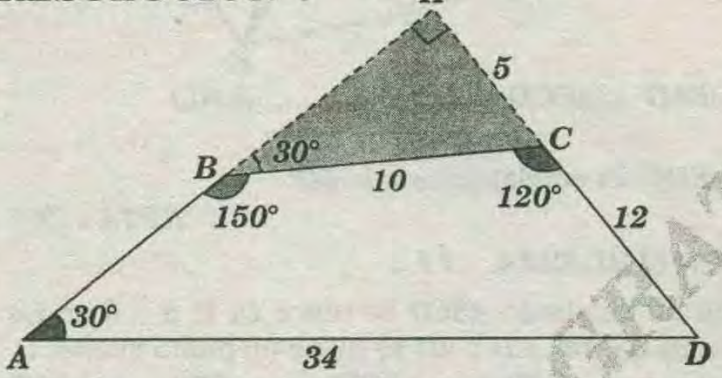
RPTA : "A"

PROBLEMA 4 :

Se tiene un cuadrilátero $ABCD$ en el cual $m\sphericalangle BAD = 30°$, $m\sphericalangle ABC = 150°$, $m\sphericalangle BCD = 120°$, $BC = 10$ y $CD = 12$. Halle AD

A) 34° B) 32° C) 30° D) 28° E) 26°

RESOLUCIÓN :



* BHC notable de $30°$ y $60°$: $HC = 5$

* AHD notable de $30°$ y $60°$: $AD = 34$

RPTA : "A"

PROBLEMA 5 :

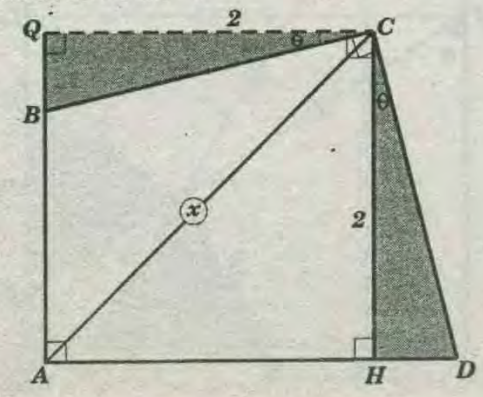
En el cuadrilátero

$ABCD$, $m\sphericalangle DAB = m\sphericalangle BCD = 90°$, $BC = CD$

Halle AC sabiendo que la distancia de C a $\overline{AD}$ es 2.

A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{8}$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle BQC \cong \triangle DHC$ (ALA) $\Rightarrow CH = QC = 2$

* $AQCH$ es un cuadrado : $x = 2\sqrt{2}$

RPTA : "C"

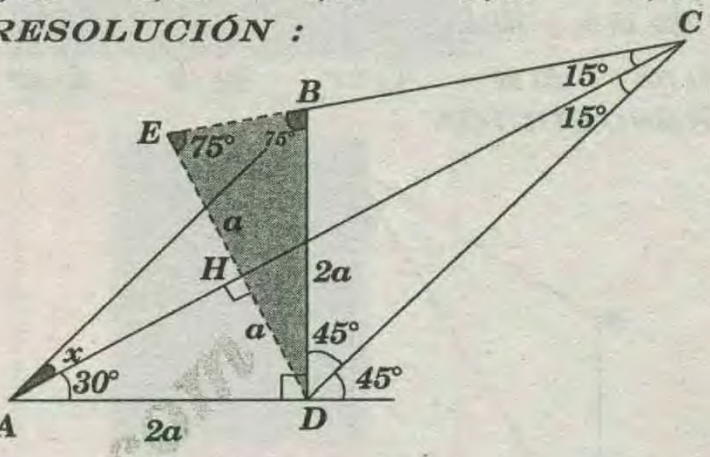
PROBLEMA 6 :

En el cuadrilátero

$ABCD$, $m\sphericalangle ADB = 90°$, $m\sphericalangle BCA = m\sphericalangle ACD = 15°$ y $m\sphericalangle CAD = 30°$. Halle $m\sphericalangle BAC$

A) 10° B) 15° C) 20° D) 25° E) 30°

RESOLUCIÓN :



* Se traza $\overline{DE} \perp \overline{AC}$; $E \in \overline{BC}$

* ΔECD isósceles : $m\sphericalangle E = 75°$

* ΔDBC: $m\sphericalangle EBD = 45° + 30° = 75°$

* ΔDEB isósceles :

$$ED = BD = 2a$$

* $\triangle AHD$ notable : $AD = 2a$

* $\triangle ABD$ isósceles : $x + 30° = 45° \Rightarrow x = 15°$

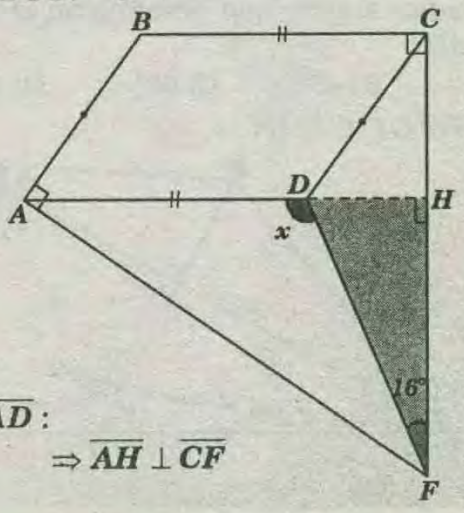
RPTA : "B"

PROBLEMA 7 :

En un paralelogramo $ABCD$, por las vértices A y C se trazan perpendiculares a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, las que se intersecan en F. Halle la $m\sphericalangle ADF$, si $m\sphericalangle DFC = 16°$.

A)106° B) 105° C) 104° D) 103° E) 102°

RESOLUCIÓN :



* Como $\overline{BC} // \overline{AD}$:

$$\Rightarrow \overline{AH} \perp \overline{CF}$$

* $\triangle DHF: x = 90° + 16°$

$\Rightarrow x = 106°$

RPTA : "A"

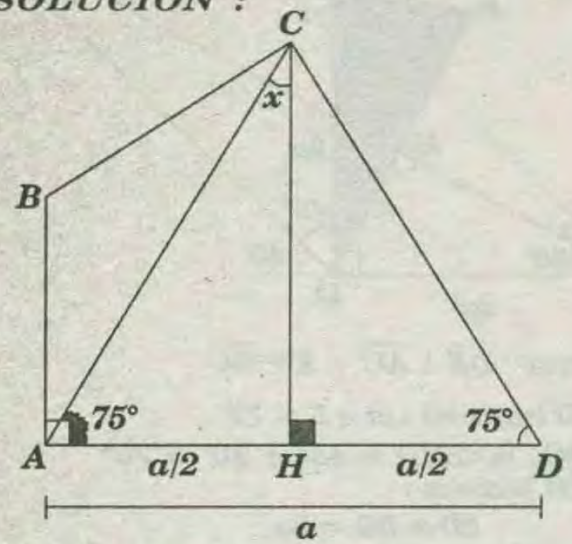
PROBLEMA 8 :

$ABCD$ es un trapezoide. Se traza $\overline{CH} \perp \overline{AD} (H \in \overline{AD})$ y $AH = \frac{AD}{2}$. Si $m\sphericalangle CDA = 75°$, $m\sphericalangle BAD = 90°$.

Halle la $m\sphericalangle HCA$.

A) 15° B) 30° C) 37° D) 45° E) 60°

RESOLUCIÓN :



* Si $AD = a$ y $AH = a/2 \Rightarrow HD = a/2$

$\overline{CH}$ es mediatriz de $\overline{AD}$.

$\triangle ACD$ es isósceles :

$m\sphericalangle CAD = m\sphericalangle CDA = 75°$

$\Rightarrow x = 15°$

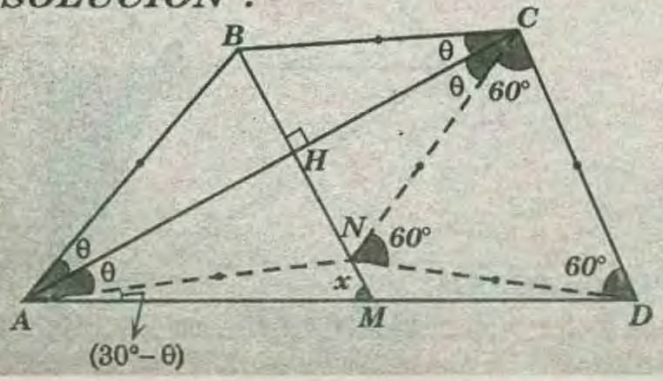
RPTA : "A"

PROBLEMA 9 :

En un cuadrilátero convexo $ABCD$, $AB = BC = CD$ y además $m\sphericalangle ACD - m\sphericalangle ACB = 60$. Se traza lamediatriz de $\overline{AC}$ que intersecta a $\overline{AD}$ en M. Halle la medida del menor ángulo que determinan la mediatriz y el lado AD.

A) 30° B) 45° C) 60° D) 72° E) 80°

RESOLUCIÓN :



* Se construye el rombo $ABCN$ $\triangle NCD$ es equilátero.

N es circuncentro del $\triangle ACD$.

$\Rightarrow m\sphericalangle NAM = 30° - \theta$

* $\triangle AHM$: $x = 60°$

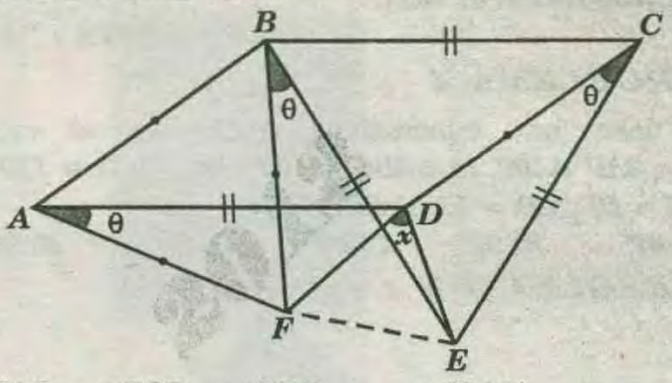
RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

En un paralelogramo $ABCD$; $AB < BC$ y $m\sphericalangle BAC$ es menor que 45, exteriormente al lado AD se ubican F y E de modo los triángulos ABF y BEC son equiláteros. Halle la medida del ángulo FDE.

A)40° B)45° C)60° D)75° E)80°

RESOLUCIÓN :



$\triangle FAD \cong \triangle ECD \cong \triangle EBF$ .....(LAL)

$\Rightarrow FD = ED = EF$

$\triangle EDF$ es equilátero $\Rightarrow x = 60°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

En un cuadrado $ABCD$ se ubica Q, P, S y R en los lados AB, BC, CD y AD se ubica un punto interior O, tal que $m\sphericalangle OSD = m\sphericalangle AQO = m\sphericalangle CPO = m\sphericalangle ORD$ y $OQ = 5$, $OP = 4$, $OS = 2{,}5$.

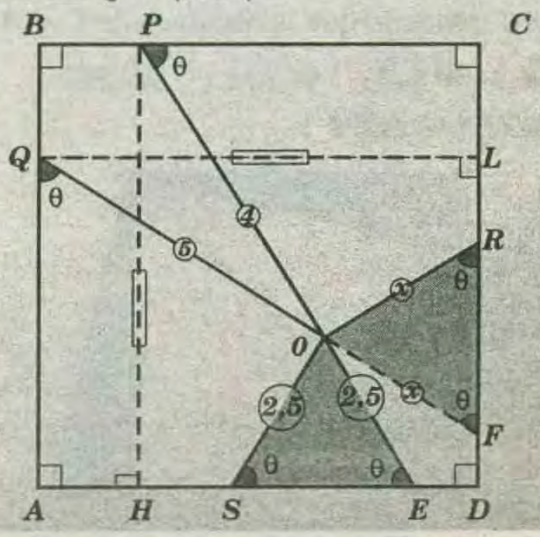
Halle OR.

RESOLUCIÓN :

$\triangle SOE$ isósceles : $SO = OE = 2{,}5$

$\triangle FOR$ isósceles : $OF = OR = x$

$\triangle PHE \cong \triangle QLF$ (ALA)

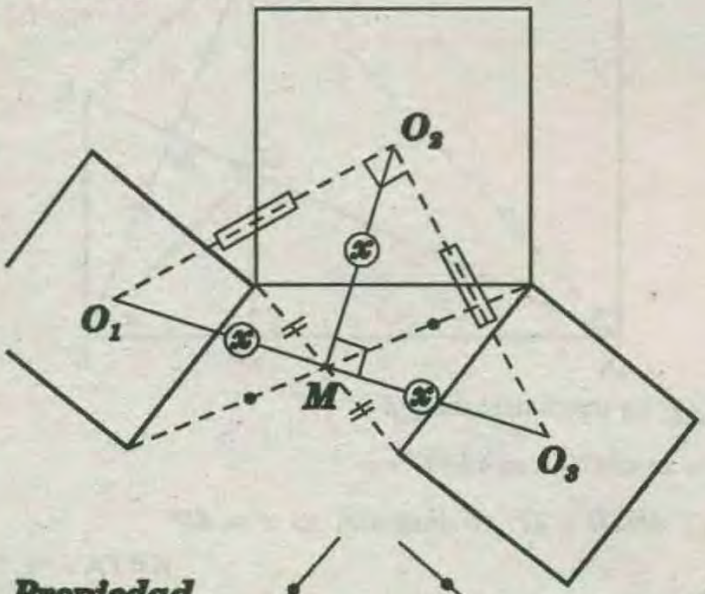


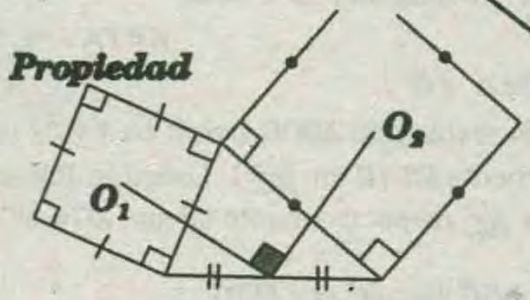
$\Rightarrow x + 5 = 4 + 2{,}5 \Rightarrow x = 6{,}5 - 5 \Rightarrow x = 1{,}5\mu$

PROBLEMA 12 :

Exteriormente al paralelogramo *ABCD* y considerando los lados *AB*, *BC* y *CD* se construyen cuadrados cuyos centros son O_1, O_2 y O_3 respectivamente. Si $O_1O_3 = a$. Halle la distancia de O_2 a la recta que contiene a la recta O_1O_3.

RESOLUCIÓN :





* Según la propiedad :

$$m\sphericalangle O_1MO_2 = m\sphericalangle O_2MO_3 = 90°$$

* $\triangle O_1O_2O_3$ isósceles : $O_1O_2 = O_2O_3$

$$\Rightarrow O_1M = MO_3 = MO_2 = x$$

* Por dato : $O_1O_3 = a = x + x$

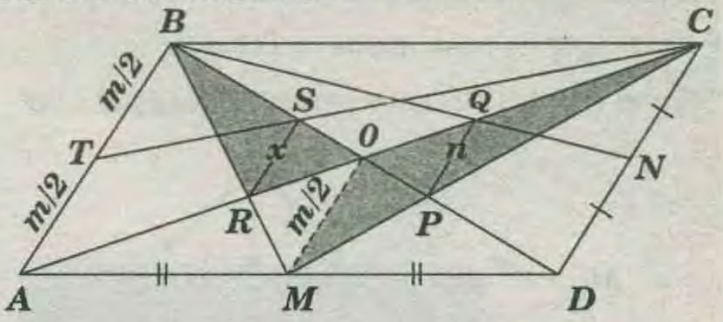
$$\Rightarrow 2x = a \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

PROBLEMA 13 :

ABCD es un paralelogramo *(AB<BC)*. Se traza $\overline{BN}$ y a $\overline{CM}$, tal que *N* y *M* son puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$, $\{P\} = \overline{CM} \cap \overline{BD}$, $\{Q\} = \overline{BN} \cap \overline{AC}$, $\{R\} = \overline{AQ} \cap \overline{BM}$, *T* es punto medio de $\overline{AB}$ y $\{S\} = \overline{BD} \cap \overline{CT}$. Si $AB = m$ y $QP = n$. Halle *RS*.

A) $\frac{3n+m}{6}$ B) $\frac{m-n}{2}$ C) $\frac{m+n}{2}$ D) $\frac{2m-n}{3}$ E) $\frac{m-n}{4}$

RESOLUCIÓN :



$\triangle RSO \cong \triangle QPO$ (ALA) $\Rightarrow x = n$

* $\triangle MBO$:

$$x = \frac{m}{3} \Rightarrow 2x = n + \frac{m}{3} \Rightarrow x = \frac{3n+m}{6}$$

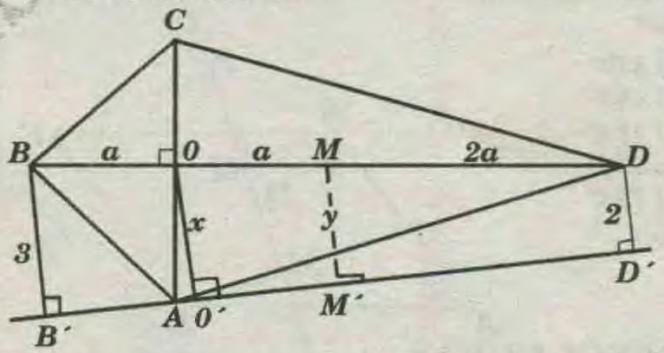
RPTA : "A"

PROBLEMA 14 :

En un trapezoide simétrico *ABCD (BD > AC)*, las diagonales se entersecan en *0*, tal que *OD= 3(OB)*. Calcule la distancia de *O* a la recta que contiene al vértice *A*, si las distancias de los vértices *B* y *D* a dicha recta miden *3* y *2* respectivamente.

A) 1,75 B) 2,75 C) 1,25 D) 2,25 E) A y B

RESOLUCIÓN :



* En el trapecio rectángulo *B'BOD'*; por teorema:

$$y = \frac{3+2}{2} \rightarrow y = \frac{5}{2}$$

* El trapecio rectángulo *B'BMM'*; por teorema:

$$x = \frac{3+5/2}{2} \Rightarrow x = \frac{11}{4} \Rightarrow x = 2{,}75\mu$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 15 :

Sobre los lados *AB* y *BC* de un triángulo se trazan exteriormente los cuadrados *ABMN* y *BCQR* . ¿Qué tipo de cuadrilátero tiene como vértices los puntos medios de los lados del cuadrilátero *AMRC*?

A) Rectángulo B) Trapecio isósceles
C) Rombo D) Trapezoide simétrico
E) Cuadrado

RESOLUCIÓN :

* $\triangle MBC \cong \triangle ABR$ (LAL)

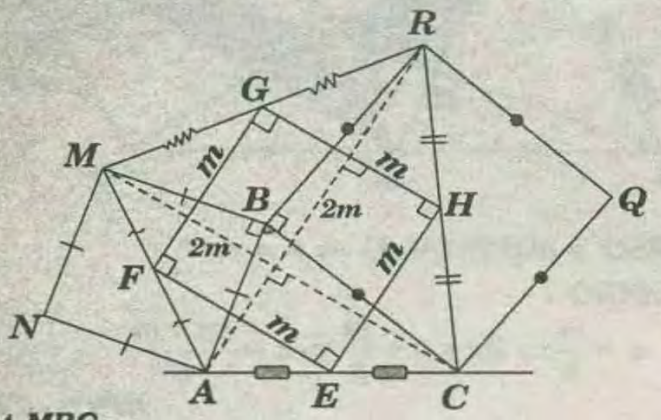
$\Rightarrow AMC = AR = 2m$ y $\overline{MC} \perp \overline{AR}$

Com.GRATIS

* ΔAMC : $\overline{EF}$ es base media $\Rightarrow EF = m$

* ΔARC : $\overline{EH}$ es base media $\Rightarrow EH = m$

* Por el ángulos de lados paralelos. $m\sphericalangle FEH = 90°$



* ΔMRC:

$\overline{GH}$ es base media $\Rightarrow GH = m$ $\overline{GH} \parallel \overline{MC}$

* ΔAMR : $\overline{FG}$ es base media $\Rightarrow FG = m$ $\overline{FG} \parallel \overline{AR}$

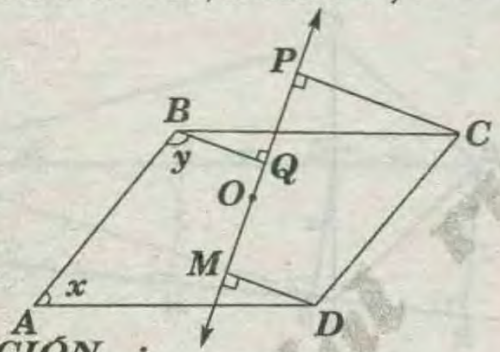
* En consecuencia : $EFGH$ es un cuadrado

RPTA : "E"

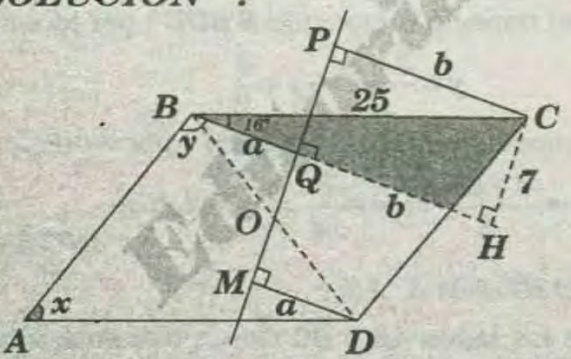
PROBLEMA 16 :

En el gráfico O es centro del paralelogramo $ABCD$. Si $AD = 25$ y $DM + CP = 24$, calcule $x + y$.

A) 172°
B) 168°
C) 164°
D) 136°
E) 154°

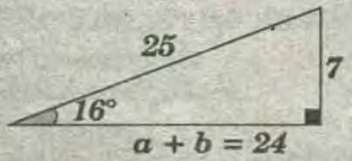


RESOLUCIÓN :



* Dato : $a + b = 24$ y $AD = BC = 25$

* $\triangle DHC$:



* Luego : $x + y + 16° = 180° \Rightarrow x + y = 164°$

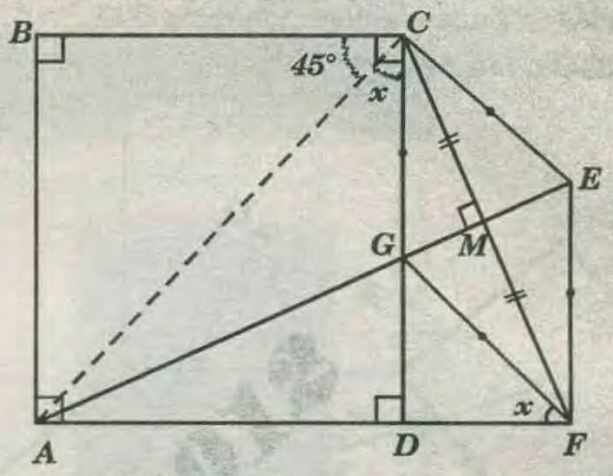
RPTA : "C"

PROBLEMA 17 :

En un cuadrado $ABCD$ se ubica G en $\overline{CD}$ y F en la prolongación de $\overline{AD}$, luego se traza el rombo $CGFE$. Si A, G y E son colineales, calcule $m\sphericalangle GFD$.

A) 30° B) 53° C) 45° D) 60° E) 37°

RESOLUCIÓN :



$\overline{AE}$ es mediatriz de $\overline{CF}$

$\Rightarrow m\sphericalangle ACQ = m\sphericalangle AFG = x$

$\square ABCD$: $\overline{AC}$ es diagonal $\Rightarrow x = 45°$

RPTA : "C"

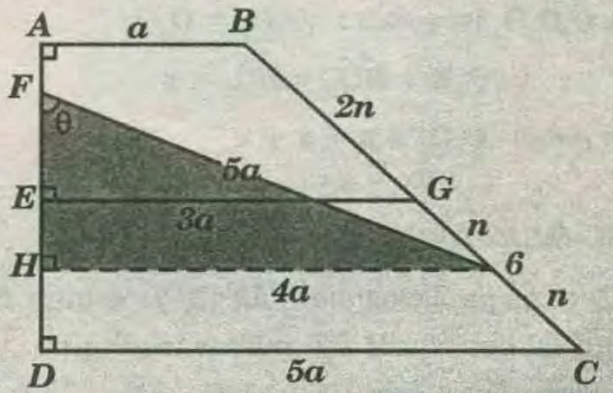
PROBLEMA 18 :

En un trapecio rectángulo $ABCD$ (recto en A y D) se traza la base media ER (R en $\overline{BC}$). Luego se ubican F y G en $\overline{AE}$ y $\overline{RC}$ respectivamente tal que $RG = GC$.

Si $\frac{FG}{5} = \frac{ER}{3} = AB$ calcule $m\sphericalangle DFG$

A) 37° B) 30° C) 53° D) 74° E) 45°

RESOLUCIÓN :



* $\square ABCD$: $3a = \frac{a + CD}{2} \rightarrow CD = 5a$

* $\square DERC$: $HG = \frac{3a + 5a}{2} \rightarrow HG = 4a$

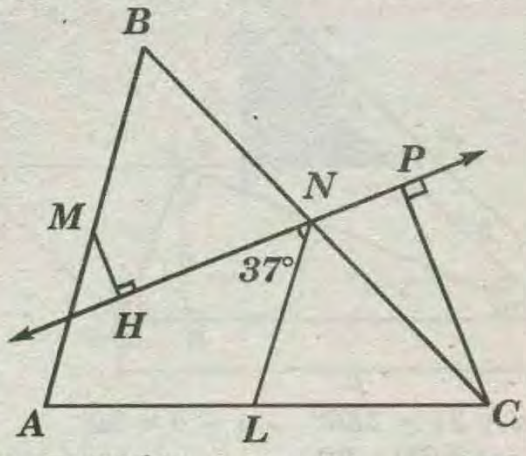
* $\triangle FHG$; notable aproximado : $\theta = 53°$

RPTA : "C"

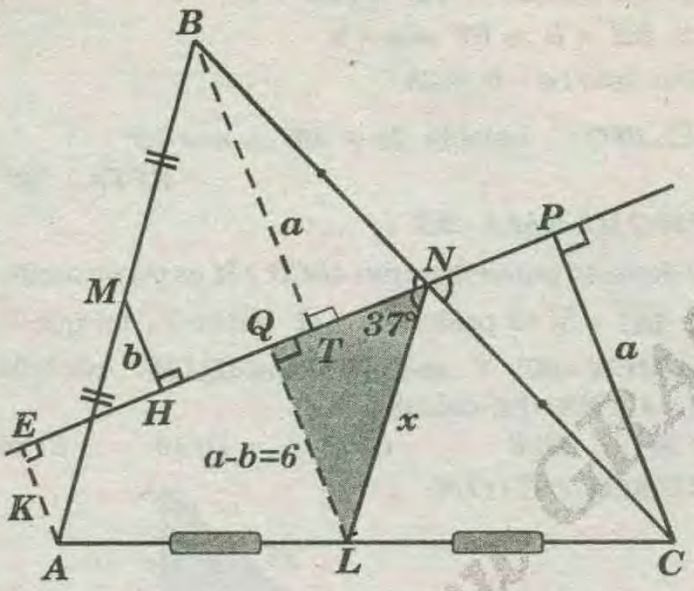
PROBLEMA 19 :

En el gráfico M, N y L son puntos medios de los lados del triángulo ABC. Si $CP - MH = 6$, calcule NL.

A) 6
B) 8
C) 10
D) 5
E) 12



RESOLUCIÓN :



* Dato : $a - b = 6$
* $\triangle BTN \cong \triangle CPN$ (AL) $\Rightarrow BT = CP = a$
* En el trapecio $AEBT$:

$$b = \frac{a - K}{2} \rightarrow K = a - 2b$$

* En el trapecio $AEPC$:

$$LQ = \frac{a + a - 2b}{2} = a - b$$

* $\triangle LQN$ notable aproximado : $x = 10$

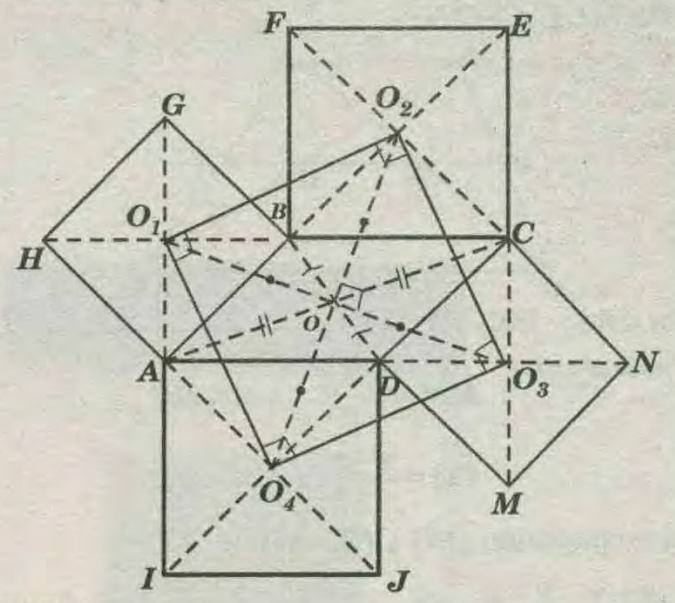
RPTA : "C"

PROBLEMA 20 :

Sobre los lados de un paralelogramo $ABCD$ se construyen cuadrados en la región exterior $BCEF$, $ABGH$, $AIJD$ y $DMNC$. ¿Qué tipo de cuadriláteros tiene por vértices los centros de dichos cuadrados?

A) Rectángulo B) Cuadrado C) Rombo
D) Trapecio isósceles E) Trapezoide simétrico

RESOLUCIÓN :



$\triangle BCD$:

$m\sphericalangle O_2OO_3 = 90°$ y $OO_2 = OO_1$ (propiedad)

Análogamente en los otros casos.

En consecuencia , el cuadrilátero $O_1O_2O_3O_4$ es cuadrado.

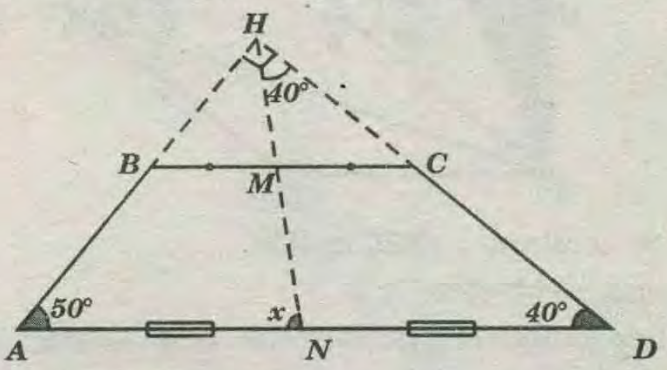
RPTA : "B"

PROBLEMA 21 :

$ABCD$ es un trapecio tal que $m\sphericalangle A + m\sphericalangle D = 90°$ $(\overline{BC} \parallel \overline{AD}, BC < AD)$. Si M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente y $m\sphericalangle D = 40°$, halle la $m\sphericalangle MNA$.

A) 60° B) 66° C) 70° D) 76° E) 80°

RESOLUCIÓN :



$\triangle AHD$: $\overline{HMN}$ es mediana.

$\Rightarrow m\sphericalangle NHD = m\sphericalangle D = 40°$

* $\triangle NHD$; por el teorema del ángulo exterior :

$x = 40° + 40° \Rightarrow x = 80°$

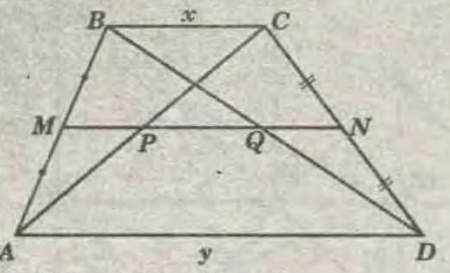
RPTA : "E"

PROBLEMA 22 :

En un trapecio la diferencia de la longitud de la mediana y del segmento que une los puntos medios de las diagonales es 12. Halle la longitud de la base menor.

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

RESOLUCIÓN :



* Por dato : $MN - PQ = 12$ .....(I)

* Por teorema:

$$MN = \frac{x+y}{2} \quad .....(II)$$

$$PQ = \frac{y-x}{2} \quad .....(III)$$

* Reemplazando (III) y (II) en (I):

$$\frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2} = 12 \Rightarrow \frac{x+y-y+x}{2} = 12$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{2} = 12 \Rightarrow x = 12\mu$$

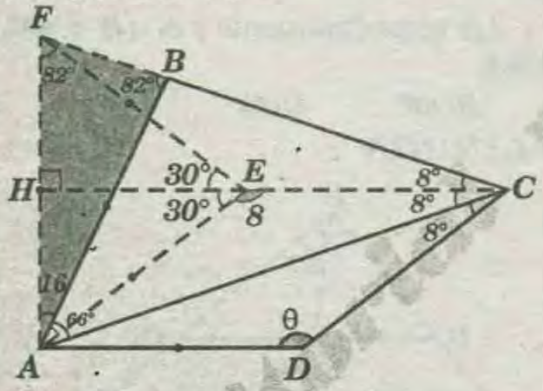
RPTA : "D"

PROBLEMA 23 :

En un cuadrilátero $ARCD$, $AR=AD$, $m\sphericalangle BAC=66°$ y $m\sphericalangle BCA=2(m\sphericalangle ACD)=16°$. Calcule $m\sphericalangle ADC$.

A) 120° B) 160° C) 100° D) 105° E) 150°

RESOLUCIÓN :



* Se construye : $\Delta REC \cong \Delta ADC$

$\Rightarrow \overline{CE}$ es bisectriz

* Se construye el ΔAFC isósceles : $m\sphericalangle F = m\sphericalangle FAC = 82°$

* ΔABC : $m\sphericalangle ABF = 66° + 16° = 82°$

* ΔABF es isósceles: $AF = AB$

* En consecunecia , el ΔAEF es equilátero :

$$AE = EF = AF \Rightarrow \theta = 180° - 30° \Rightarrow \theta = 150°$$

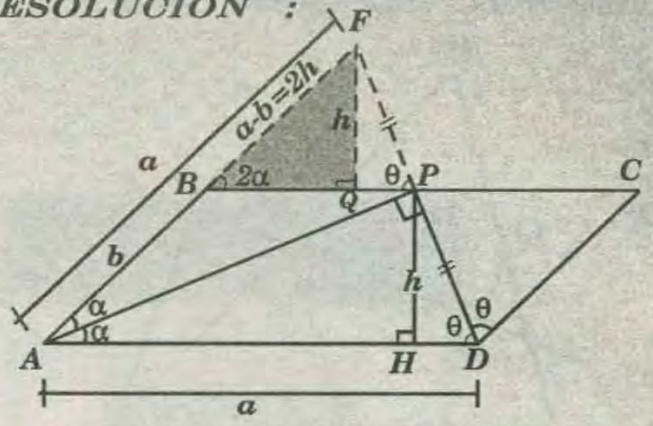
RPTA : "E"

PROBLEMA 24 :

En un paralelogramo $ABCD$ las bisectrices de los ángulos BAD y ADC se intersectan en P tal que P se encuentra en $\overline{BC}$. Si se traza $\overline{PH}$ perpendicular a $\overline{AD}$ (H en $\overline{AD}$) y $AD-AB=2(PH)$, calcule $m\sphericalangle PAD$.

A) 30° B) 15° C) 22°30' D) 26°30' E) 18°30'

RESOLUCIÓN :



$$2\alpha + 2\theta = 180° \rightarrow \alpha + \theta = 90°$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle APD = 90°$$

* ΔAFD isósceles : $AF = AD = a$

Si $AB = b \Rightarrow BF = a - b$

* Por dato : $a - b = 2h$

* $\triangle BFQ$: notable $2a = 30° \Rightarrow a = 15°$

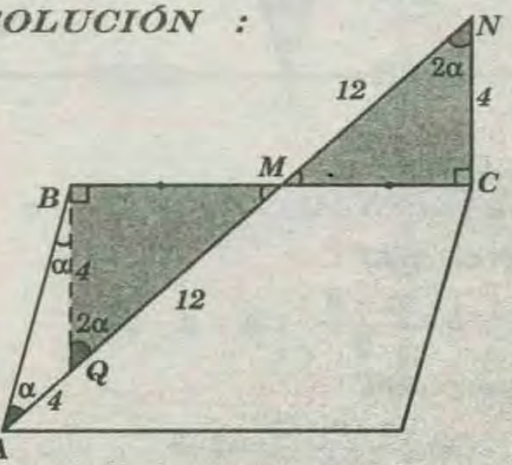
RPTA : "B"

PROBLEMA 25 :

Se tiene un paralelogramo $ABCD$ y M es punto medio de $\overline{BC}$. Si se prolonga $\overline{AM}$ hasta N , tal que la $m\sphericalangle MCN=90°$ y $m\sphericalangle MNC=2m\sphericalangle BAM$, además $NC=4$ y $MN=12$, calcule AM.

A) 10 B) 8 C) 12 D) 16 E) 20

RESOLUCIÓN :



$\triangle QBM \cong \triangle NCM$ (ALA)

$\Rightarrow BQ = CN = 4$; $QM = MN = 12$

* Luego :

$$AM = 4 + 12 \Rightarrow AM = 16$$

RPTA : "D"

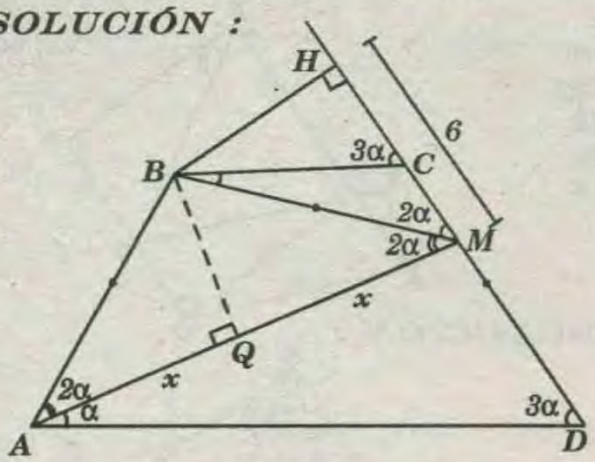
PROBLEMA 26 :

Se tiene un trapecio isósceles $ABCD$, $\overline{BC} // \overline{AD}$. Si en $\overline{CD}$ se ubica M, tal que $AB=MB$ y

$m\sphericalangle CBM = m\sphericalangle MAD$, además se traza $\overline{BH} \perp \overline{DC}$ $(H \in \overline{DC})$ y $MH=6$, calcule AM.

A)14 B) 12 C) 15 D) 16 E) 20

RESOLUCIÓN :



* $ABCD$ trapecio isósceles :

$$\Rightarrow m\sphericalangle A = m\sphericalangle D \text{ y } AB = CD$$

* Por dato : $m\sphericalangle MBC = m\sphericalangle MAD = \alpha$

$$\Rightarrow m\sphericalangle AMB = 2\alpha$$

* ΔAMB isósceles : $AB = BM$ (dato)

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAM = m\sphericalangle BMA = 2\alpha$$

$$m\sphericalangle BCH = 3\alpha \Rightarrow m\sphericalangle BMH = 2\alpha$$

* Por teorema de la bisectriz de un ángulo :

$$HM = QM = 6$$

* Luego :

$$AM = 2(6) \Rightarrow AM = 12$$

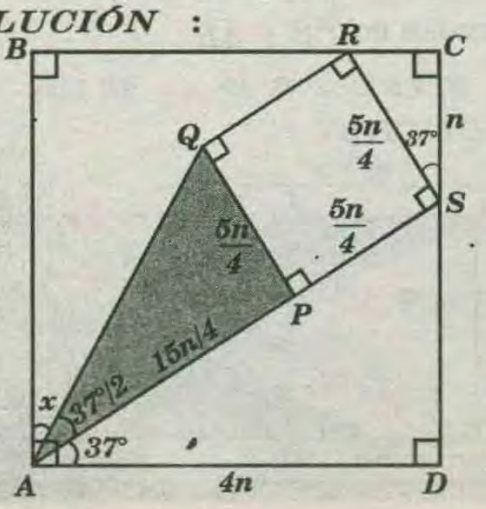
RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

Se tiene un cuadrado $ARCD$, en $\overline{CD}$ se ubica S y en $\overline{AS}$ el punto P, tal que $PQRS$ es un cuadrado, $(R \in \overline{BC})$. Si $DS = 3\,(SC)$, calcule la $m\sphericalangle BAQ$.

A) 37°/2 B) 53°/2 C) 69°/2 D) 16° E) 30°

RESOLUCIÓN :



* $\triangle ASD$ notable aproximado.

$$AD = 4n \; ; \; SD = 3n \text{ y } AS = 5n$$

* $\triangle RCS$ notable aproximado.

$$Si \;\; SC = n \Rightarrow SR = \frac{5n}{4}$$

* $\triangle APQ$ notable aproximado.

$$m\sphericalangle QAP = 37°/2$$

* Luego :

$$x + \frac{37°}{2} + 37° = 90° \Rightarrow x = \frac{69°}{2}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 28 :

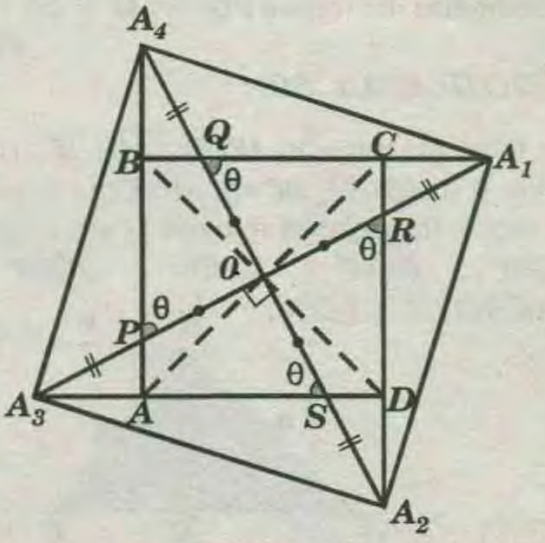
En un cuadrado $ABCD$, se ubican en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ los puntos P, Q, R y S respectivamente tal que $\overline{QS}$ es perpendicular a $\overline{PR}$, determinando cuatro cuadriláteros congruentes con $BQ \neq QC$.

Si $\overrightarrow{RP} \cap \overrightarrow{CB} = \{A_1\}$, $\overrightarrow{SQ} \cap \overrightarrow{DC} = \{A_2\}$.

$\overrightarrow{RP} \cap \overrightarrow{AD} = \{A_3\}$ y $\overrightarrow{QS} \cap \overrightarrow{BA} = \{A_4\}$ ¿qué tipo de cuadrilátero es $A_1A_2A_3A_4$?

A)Rombo B) Cuadrado C) Rectángulo
D) Romboide E) Trapecio

RESOLUCIÓN :



$\overline{QS} \cap \overline{PR} = \{O\}$ donde O es centro del cuadrado, para que las cuatros regiones determinados por los cuadriláteros sean congruentes.

$$\Rightarrow OP = OQ = OR = OS$$

$$m\sphericalangle BPO = m\sphericalangle CQO = m\sphericalangle DRO = m\sphericalangle ASO = \theta$$

$$\triangle A_1OQ \cong \triangle A_2OR \cong \triangle A_3OS \cong \triangle A_4OP$$

$$\Rightarrow OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4$$

* En consecuencia $A_1A_2A_3A_4$ es un cuadrado.

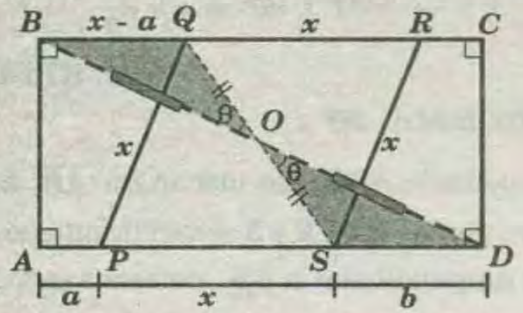
RPTA : "B"

PROBLEMA 29 :

En un rectángulo *ARCD* y un rombo *PQRS* tal que $\overline{QR}$ está en $\overline{BC}$, $\overline{PS}$ en $\overline{AD}$ y tienen el mismo centro *O* luego se ubica *M* en $\overline{AB}$ tal que *MOSP* es un paralelogramo. Si *AP+SD=5*, calcule el perímetro de la región rombal *PQRS* .

A) 10 B) 15 C)20 D) 25 E)40

RESOLUCIÓN :



O : Centro del rombo y del rectángulo Por dato:

$AP = a$ y $SD = b \Rightarrow BQ = x - a$

$\Delta BQO \cong \Delta DSO$ *(LAL)*

$\Rightarrow \underbrace{BQ} = \underbrace{SD}$

$x - a = b \Rightarrow x = a + b$

* Por dato : $a + b = 5$

* Luego : $x = 5$

* Perimetro del rombo *PQRS* : $4x = 20$

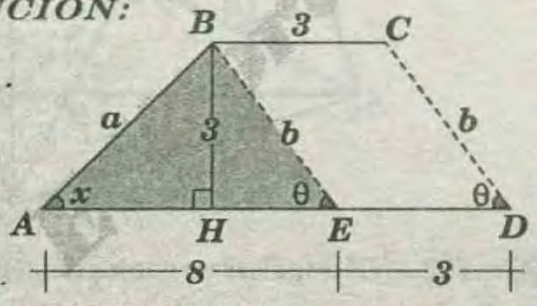
RPTA : "C"

PROBLEMA 30 :

Se tiene un trapecio *ARCD*, $(\overline{AD} // \overline{BC})$ cuya altura mide *3*. Si *AD=11*; *BC=3*, *AB>CD* y el perímetro de la región trapecial es mínimo , calcule $m\angle BAD$.

A) 60° B) 45° C) 53° D) 37° E) 75°

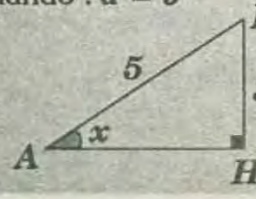
RESOLUCIÓN:



* ΔABE ; por teorema : $a - b < 8 < a + b$

* Para que el perímetro del trapecio sea mínimo , entonces: $a + b = 9$; $a - b = 1$

* Efectuando : $a = 5$



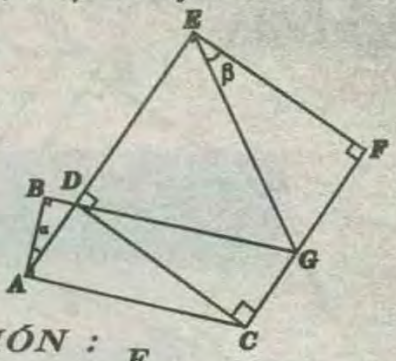
$\Rightarrow x = 37°$

RPTA : "D"

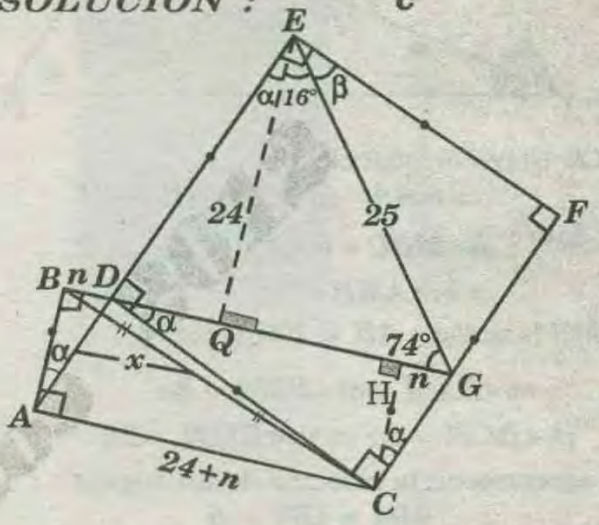
PROBLEMA 31 :

Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, si *EG=25*, $\alpha + \beta = 74°$ y *EFCD* es un cuadrado.

A) 10
B) 12,5
C) 13
D) 12
E) 15



RESOLUCIÓN :



* $\triangle EQD \cong \triangle DHC$ *(AL)* $\Rightarrow EQ = DH = 24$

* $\triangle ABD \cong \triangle CHG$ *(AL)* $\Rightarrow BD = HG = n$

* Luego : $AC = 24 + n$

* El trapecio rectángulo *ABDC* ; por teorema se cumple:

$$x = \frac{24 + n - n}{2} \Rightarrow x = 12$$

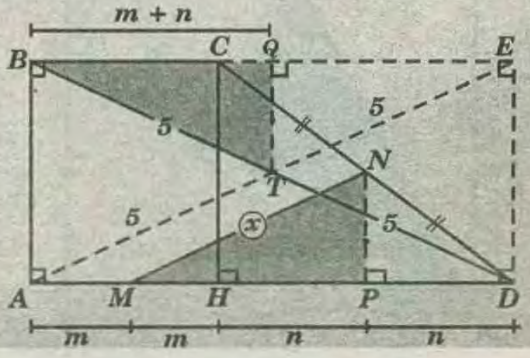
RPTA : "D"

PROBLEMA 32 :

En un trapecio rectángulo (recto en *A* y *B*) se traza la altura *CH*. Si *BD=10*, calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{CD}$ y $\overline{AH}$.

A) 5 B) 7,5 C) 10 D) 12,5 E) 15

RESOLUCIÓN :



* En la figura observamos que : $TQ = NP$
* También : $BQ = MP = m+n$
* Luego : $\triangle BQT \cong \triangle MPN$ (LAL)
$\Rightarrow MN = BT \Rightarrow x = 5$

RPTA : "A"

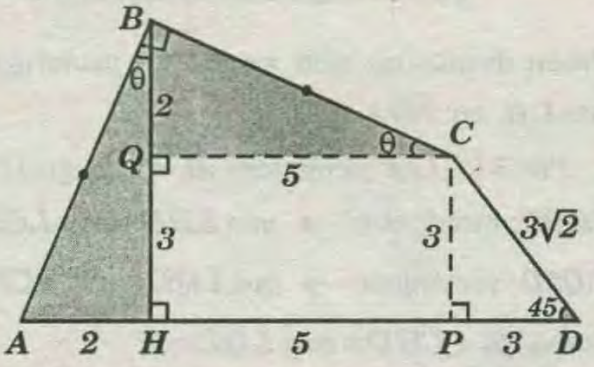
PROBLEMA 33 :

En el cuadrilátero $ABCD$, $AB=BC$, $m\sphericalangle ABC=90°$, $CD=3\sqrt{2}$ y $m\sphericalangle CDA=45°$.

Si se traza $\overline{BH}$ perpendicular a $\overline{AD}$ (H en $\overline{AD}$) y $AH=2$, calcule AD.

A) 9 B) 10 C) 7 D) 8 E) 12

RESOLUCIÓN :



* $\triangle CPD$ isósceles : $CP = PD = 3$
$\Rightarrow QH = CP = 3$
* $\triangle BQC \cong \triangle BHA$ (ALA)
$\Rightarrow BQ = AH = 2$ y $BH = QC = 5$
* Finalmente : $AD = 2 + 5 + 3 \Rightarrow AD = 10$

RPTA : "B"

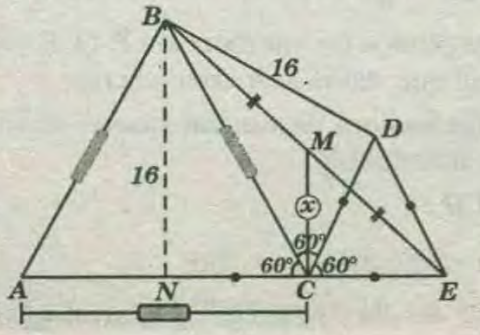
PROBLEMA 34 :

Se tienen los triángulos equiláteros ABC y CDE, tal que A, C y E son colineales . Si los puntos B y D se encuentran en el mismo semiplano respecto de $\overleftrightarrow{AE}$ y $BD=16$, calcule la longitud de la mediana CM del triángulo BCE .

A) 8 B) $4\sqrt{3}$ C) $8\sqrt{3}$ D) 16 E) 12

RESOLUCIÓN :

* Se traza $\overline{BN}$, de modo que $NC = CE$. Pero la $m\sphericalangle BCD = 60°$
* Luego : $\Delta NBC \cong \Delta DBC$ (LAL) $\Rightarrow BN = 8D = 16$



* Por el teorema de los puntos medios en el ΔNBE.

$$x = \frac{16}{2} \Rightarrow x = 8$$

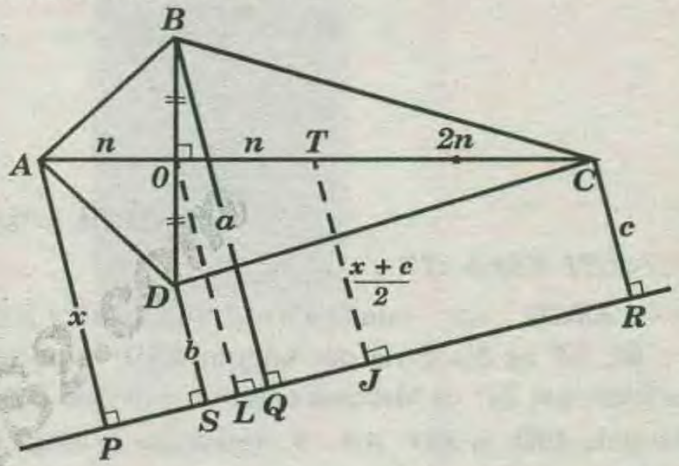
RPTA : "A"

PROBLEMA 35 :

Las diagonal es de un trapezoide simétrico $ARCD$ se intersecan en O, tal que $OC=3(OA)$. Si se trazan las perpendiculares $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$ y $\overline{DS}$ hacia una recta exterior (P, Q, R y S en dicha recta) y $2(BQ)+2(DS)=12+CR$, calcule AP .

A) 4 B)6 C) 8 D) 4,5 E) 6,5

RESOLUCIÓN :



* Por condición :

$$2a + 2b = 12 + c \quad \text{.....(I)}$$

* Por teorema en el trapecio rectángulo.

PACR : $TJ = \dfrac{x+c}{2}$

PATJ : $OL = \dfrac{x+(x+c)/2}{2} \rightarrow OL = \dfrac{3x+c}{4}$

DSBQ : $OL = \dfrac{a+b}{2}$

* Igualando :

$$\frac{a+b}{2} = \frac{3x+c}{4}$$

$$\Rightarrow 2a + 2b = 3x + c \quad \text{.....(II)}$$

* De (I) y (II): $3x = 12 \Rightarrow x = 4$

RPTA : "A"

PROBLEMA 36 :

En un rombo $ABCD$, M es punto medio de $\overline{CD}$ y la diagonal $\overline{BD}$ corta a $\overline{AM}$ en un punto R. Si $RM=5u$ y la medida del ángulo DRM es $53°$, halle BD.

A)18u B)30u C)35u D)36u E)40u

RESOLUCIÓN :

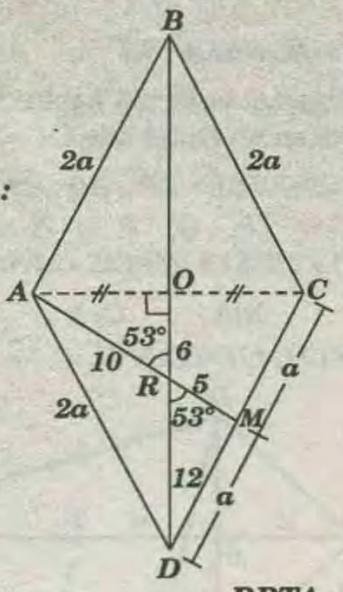
* Piden : BD
* Al trazar $\overline{AC}$, R es baricentro de la región ACD

$\Rightarrow AR=2(5)=10$ y $DR=2(RO)$.....(I)

$\triangle AOR$: NOT. 37°, 53° $\Rightarrow RO=6$

* En (I) : $DR = 12$

* En el rombo $ABCD$:
$BO=OD= 18$
$\rightarrow BD=36$



RPTA : "D"

PROBLEMA 37 :

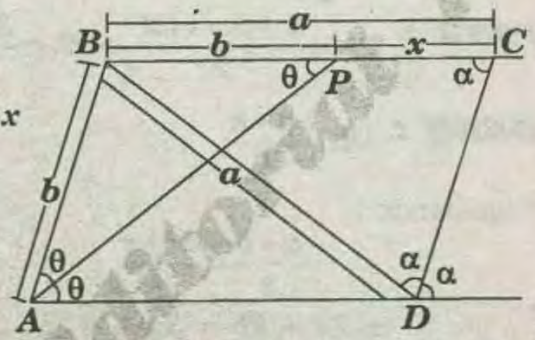
Sea $ABCD$ un cuadrilátero, donde $\overline{BC} // \overline{AC}$; $P \in \overline{BC}$, $\overline{AP}$ es bisectriz del ángulo BAD; suponga también que $\overline{DC}$ es bisectriz exterior al ángulo D del triángulo ABD. Si $BD - AB = 3$, determine la longitud de $\overline{PC}$.

A)3 B)6 C)9 D)12 E)15

RESOLUCIÓN :

* Datos :

* $\overline{BC} // \overline{AD}$
* $a - b = 3$.
* Piden : $PC=x$



* $\triangle DBC$ isóceles $\Rightarrow BC = BD = a$
* $\triangle ABP$ isóceles $\Rightarrow BP = AB = b$

* Del gráfico : $x=a-b \rightarrow x = 3$

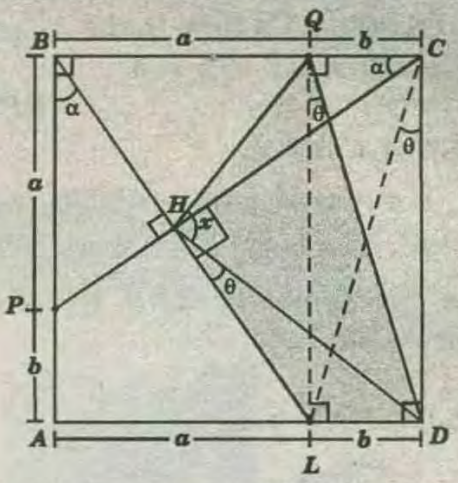
RPTA :"A"

PROBLEMA 38 :

Se tiene un cuadrado $ABCD$, P y Q pertenecen a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, tal que $BP=BQ$. H es el pie de la perpendicular trazada de B sobre $\overline{PC}$. Demuestre que el ángulo DHQ es recto.

RESOLUCIÓN :

* Sea : $BP=BQ=a$ y $QC=b$
* En el cuadrado : $ABCD$: $PA=QC=b$



* Piden demostrar que $x=90°$, se prolonga $\overline{BH}$ hasta L.(L en $\overline{AD}$)

* $\triangle PBC \cong \triangle LAB$, entonces $AL=a$, luego $LD=b$.

$\triangle HLDC$: inscriptible $\rightarrow m\sphericalangle LHD=m\sphericalangle LCD=\theta°$

$\square LQCD$: rectángulo $\rightarrow m\sphericalangle LQD=m\sphericalangle LCD=\theta°$

* Como $m\sphericalangle LHD=m\sphericalangle LQD=\theta°$

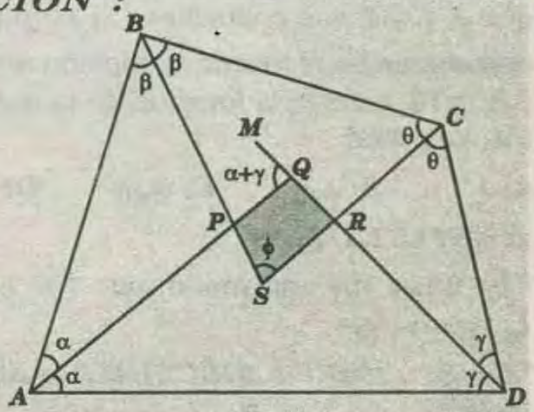
$\rightarrow \triangle LHQD$:Inscriptible

$\rightarrow m\sphericalangle QHD =m\sphericalangle QLD=90° \Rightarrow x=90°$

PROBLEMA 39 :

En un cuadrilátero $ABCD$, se trazan las bisectrices interiores de los cuatro ángulos que determinan sus lados. Demuestre que los cuatro puntos de intersección de las bisectrices son concíclicos.

RESOLUCIÓN :



* Sean los puntos de intersección P, Q, R y S, se pide demostrar que estos son concíclicos.

* Para ello bastará demostrar que el cuadrilátero , $PQRS$ es inscriptible.

* En $ABCD$:

$2\alpha+2\beta+2\theta+2\gamma=360°$

$\Rightarrow \alpha+\beta+\theta+\gamma=180°$.....(I)

* En el ΔBSC :

$$\beta+\theta+\phi=180°\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

* En el ΔAQD :

$$m\sphericalangle MQA=\alpha+\gamma\ldots\ldots\ldots\ldots(III)$$

* De *(I)*, *(II)* y *(III)*: $\phi=\alpha+\gamma$

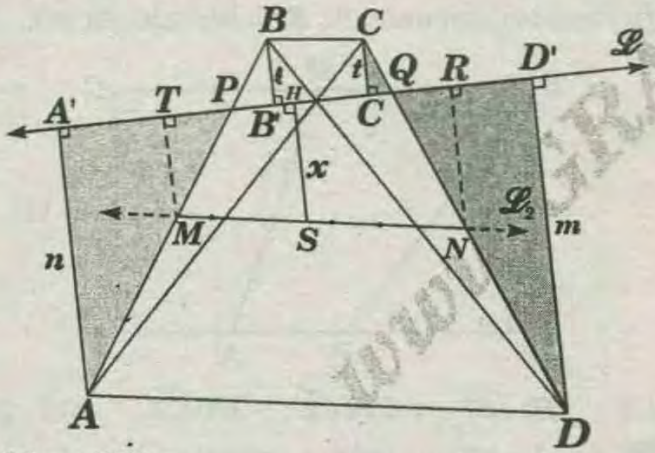
→ $\square PQRS$: inscriptible → *P,Q,R* y *S* son conciclícos

PROBLEMA 40 :

Sea el trapecio *ABCD* ($\overline{BC}\ //\ \overline{AD}$ y $BC < AD$) Por el punto de intersección de las diagonales del trapecio se traza una recta $\mathscr{L}$. que interseca a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en *P* y *Q* respectivamente,que se encuentran en el mismo semiplano con respecto a la recta que contiene a la mediana del trapecio. Si *AA', BB', CC'* y *DD'* son las distancias de los vértices a la recta $\mathscr{L}$. y $AA'+DD'=a$. $BB'+CC'=b$; calcule la distancia del punto medio de la mediana del trapecio a la recta $\mathscr{L}$.

A) $\frac{a+b}{8}$ B) $\frac{a-b}{8}$ C) $\frac{a+b}{4}$ D) $\frac{a-b}{4}$ E) $\frac{a+b}{6}$

RESOLUCIÓN :



* Piden : $SH = x$

* Según el enunciado , $\overline{MN}$ es base media de $\square ABCD$; además , *P* y *Q* se encuentran en un mismo semiplano respecto de $\overrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

* Datos : $\left.\begin{matrix} m+n=a \\ \ell+t=b \end{matrix}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$

* Como *M* y *N* son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se trazan $\overline{MT}$ y $\overline{NR}$ perpendiculares a $\overrightarrow{\mathscr{L}}$.

* Por el teorema de trapecios :

$$MT=\frac{n-\ell}{2}\ y\ NR=\frac{m-t}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

* En $\square MTRN$ ($\overline{SH}$: base media) :

$$x=\frac{MT+NR}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots(III)$$

* Reemplazando *(II)* en *(III)* :

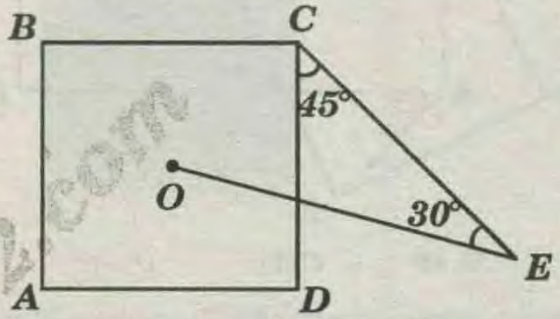
$$x=\frac{m+n-(\ell+t)}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots(IV)$$

* Reemplazando *(I)* en *(IV)* : $x=\frac{a-b}{4}$

RPTA : "D"

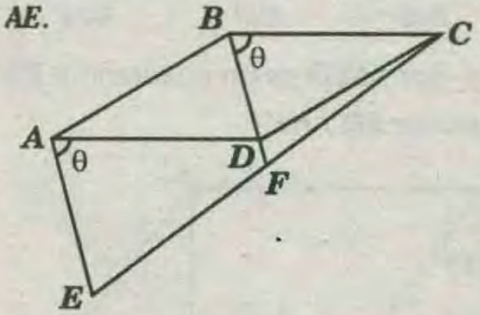
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si *O* es centro del cuadrado *ABCD*, además: $OE = 10$, calcular *CE*.



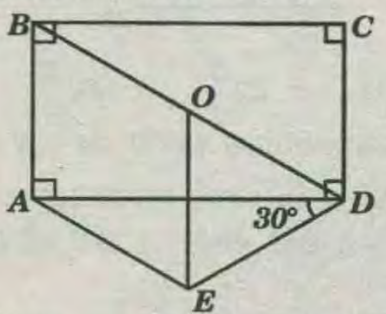
A) $5\sqrt{3}$ B) 10 C) 5 D) 6 E) 8

02 Si *ABCD* es un romboide, $BD=4$ y $DF=1$, calcular *AE*.



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

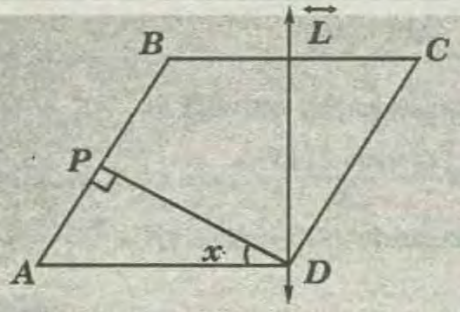
03 En el gráfico el triángulo *ODE* es equilátero y $CD = 6$. Calcular *AE*, si: $BO = OD$.



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

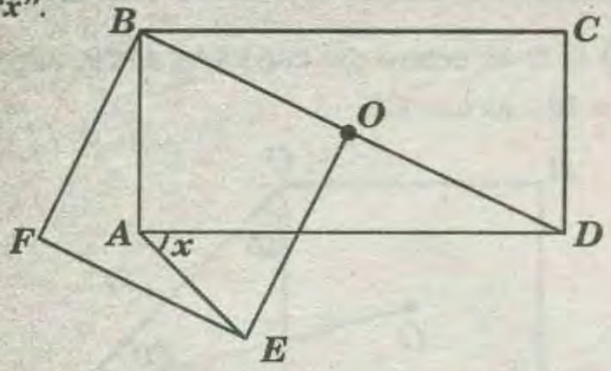
04 Si *ABCD* es un romboide, $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{BC}$ y además $3(AP)=2(PB)$, calcular el valor de "*x*".

WWW.GRATIS2.COM



A)18,5° B) 26,5° C)30° D) 37° E)45°

05 En la figura: *ABCD* es un rectángulo, donde: *BO = OD* y *FBOE* es un cuadrado. Calcular el valor de "*x*".

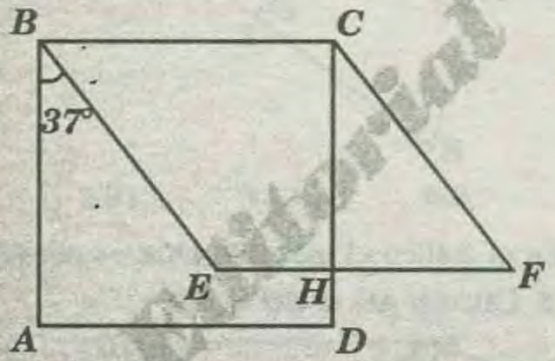


A)30° B) 45° C)60° D) 75° E)53°

06 En un paralelogramo *ABCD* se ubica *M* en $\overline{AD}$, $m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle MBC$ y $CD = 4$. Calcular la distancia entre los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{MC}$.

A)1 B)2 C)3 D) 4 E)5

07 Dado que *ABCD* es un cuadrado y *EBCF* es un rombo, calcular *EH / HF*.

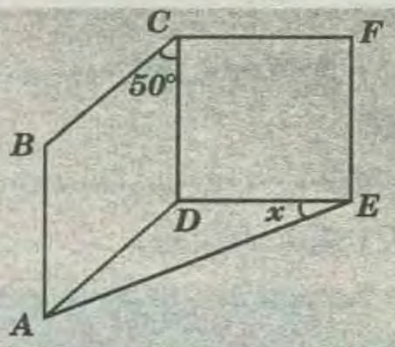


A)1 B)2 C)$\frac{3}{2}$ D)$\frac{2}{3}$ E)$\frac{1}{2}$

08 En un romboide *ABCD*: *M* y *N* son puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Si: *AC = 36*, $\overline{AC}$ interseca a $\overline{BM}$ en *P* y a $\overline{DN}$ en *Q*, calcular *PQ*.

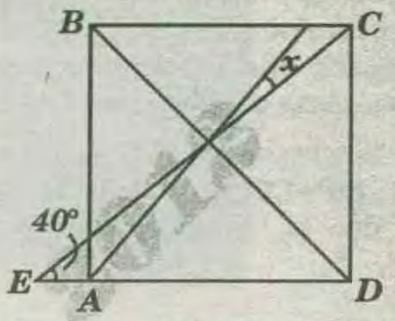
A) 10 B) 12 C) 15 D)16 E)18

09 En la figura: *ABCD* es un romboide y *CDEF* es un rectángulo. Si: *AD = DE*, calcular el valor de "*x*".



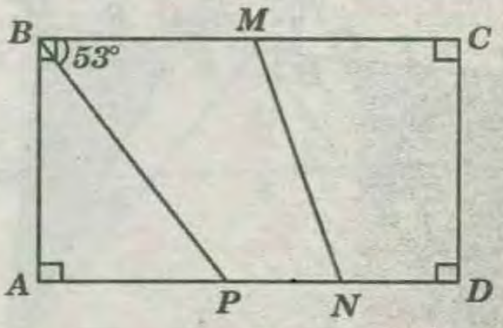
A)16° B) 18° C) 20° D) 22° E) 25°

10 En la figura: *ABCD* es un cuadrado. Calcular el valor de "*x*".



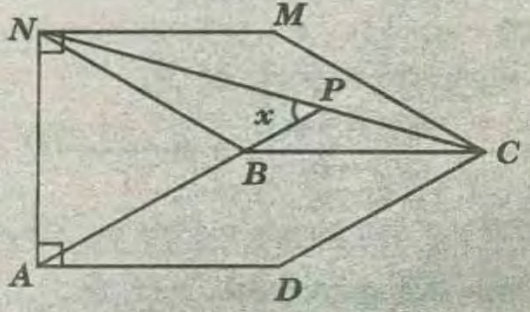
A)10° B)15° C)20° D)30° E)40°

11 En el gráfico: *M* y *N* son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{PD}$, respectivamente. Si: *BP=10*, calcular *MN*.



A) 9 B)$\sqrt{67}$ C)$4\sqrt{2}$ D)$\sqrt{73}$ E)$6\sqrt{2}$

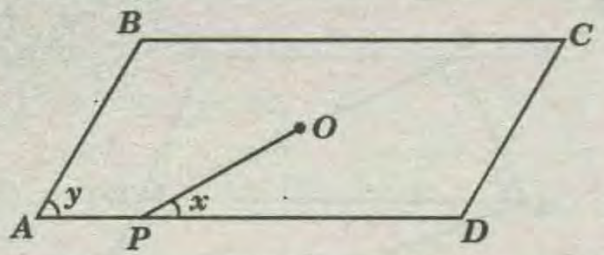
12 En el gráfico: *ABCD* y *BCMN* son rombos. Si: *AN = AD*, calcular "*x*".



A)30° B)37° C)45° D)53° E)60°

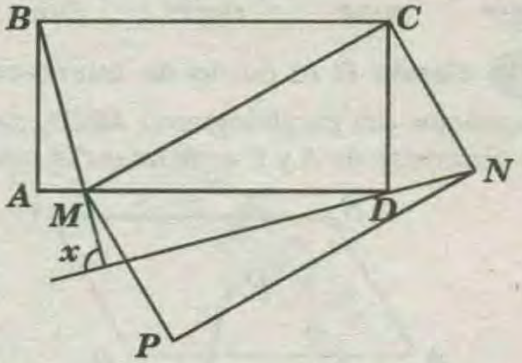
13 En el gráfico: *ABCD* es un paralelogramo. Si: *3(AB) = 2(PD) = 6(AP)* y *O* es punto medio de

BD, calcular *x/y*.



A)1 *B)1/2* *C)2/3* *D) 1/3* *E)1/4*

14 Si los rectángulos *ABCD* y *MCNP* son congruentes, calcular el valor de "*x*".



A) 60°

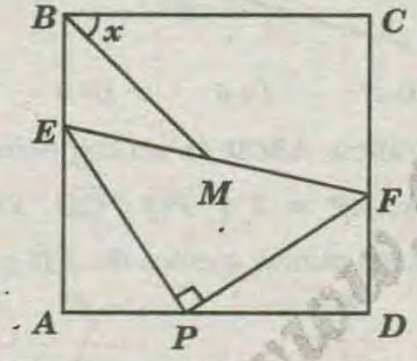
B)72°

C)75°

D) 82°

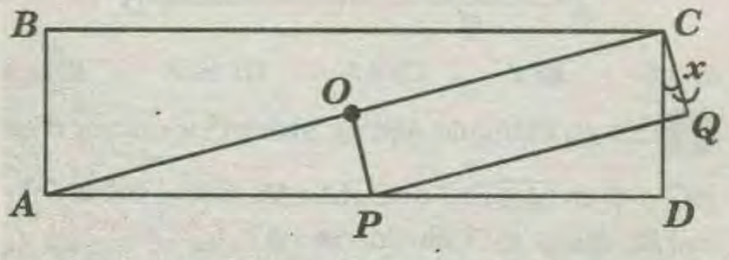
E)90°

15 En el gráfico: *ABCD* es un cuadrado. Si: *EP = PF* y *EM = MF*, calcular el valor de "*x*".



A) 30° *B) 37°* *C) 45°* *D) 53°* *E)60°*

16 *ABCD* y *POCQ* son rectángulos, donde: *AP = 2(CD)* y *AO = OC*. Calcular el valor de "*x*".

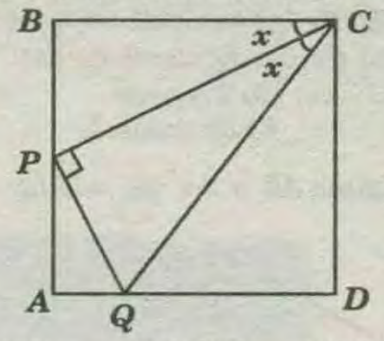


A) 15° *B) 18°* *C) 30°* *D) 36°* *E)37°*

17 Se tiene un paralelogramo *ABCD*, en $\overline{BD}$ se ubica el punto *P*, tal que: $m\sphericalangle BCP = 10°$, $m\sphericalangle ABD = 70°$ y *AB = PD*. Calcular $m\sphericalangle A$.

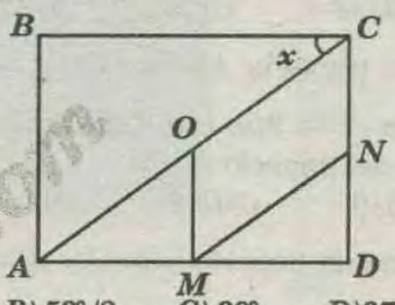
A) 55° *B) 65°* *C) 70°* *D)80°* *E)85°*

18 Calcular "*x*", si *ABCD* es un cuadrado.



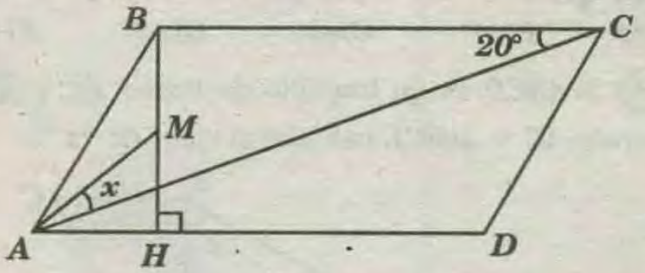
A) 15° *B)30°* *C) 37°/2* *D)53°/2* *E)37°*

19 *ABCD* es un rectángulo; *OCNM* es un paralelogramo y *3(MN) = 5(OM)*. Calcular el valor de "*x*", si: *AO = OC*.



A) 37°/2 *B) 53°/2* *C) 30°* *D)37°* *E)53°*

20 *ABCD* es un paralelogramo, donde: *BM = MH* y *HD = 2(AM)*. Calcular el valor de "*x*".

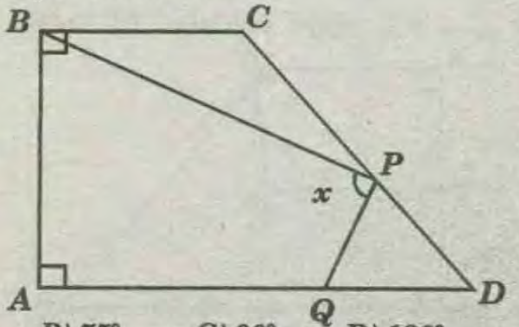


A) 10° *B) 15°* *C) 20°* *D) 25°* *E)18°*

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 En la figura: *BC = CP* y *PD = QD*.

Calcular el valor de "*x*".



A) 60° *B) 75°* *C) 90°* *D) 120°* *E)135°*

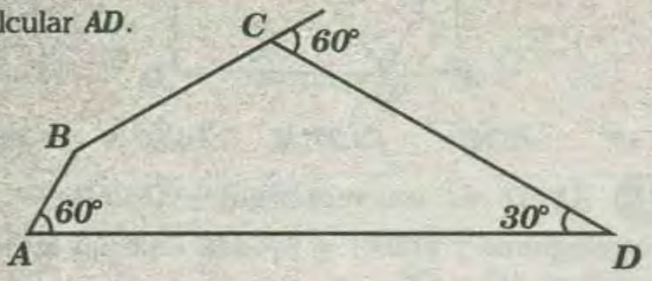
WWW.GRATIS2.COM

02 El cuadrilátero que se determina al unir los puntos medios de los lados de un trapecio isósceles de diagonales perpendiculares es un:

A) Cuadrado *B) Trapecio* *C) Romboide*
D) Rombo *E) Rectángulo*

03 En la figura: $AB = 3$ y $BC = 4\sqrt{3}$.

Calcular AD.



A)14 *B) 15* *C) 16* *D) 17* *E)18*

04 En un trapecio $ABCD$ $(\overline{BC} \parallel \overline{AD})$: $BC=5$, $CO = 8$ y $m\sphericalangle C = 2(m\sphericalangle A)$. Calcular la longitud de la mediana del trapecio.

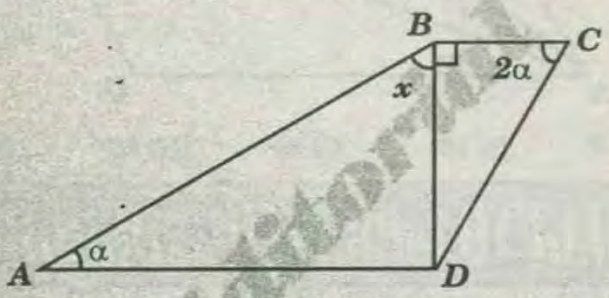
A)9 *B)10* *C)13,5* *D)17,5* *E)18*

05 Se tiene un trapecio isósceles $ABCD$ de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, en los cuales se ubican los puntos P y Q respectivamente. Si:

$PB = PC = 2$, $AQ = 3$, $QD = 9$ y $PQ = 5$, calcular la $m\sphericalangle PQD$.

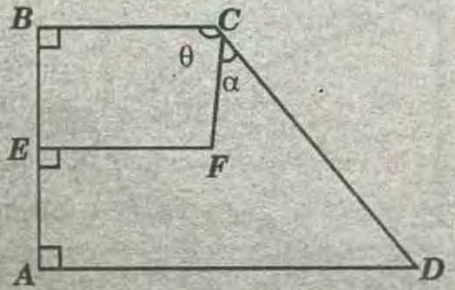
A)30° *B)37°* *C)45°* *D) 53°* *E) 60°*

06 Si $ABCD$ es un trapecio de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, además $AD = 3(BC)$, calcular el valor de "x".



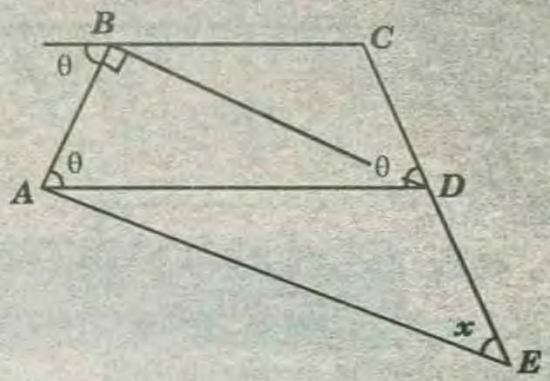
A) 30° *B) 45°* *C) 60°* *D) 37°* *E) 53°*

07 Si: $\overline{EF} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $AE = EB$, $EF = 5$ y $FG = 3$, además $\alpha + \theta = 180°$, calcular: $BC + AD$.



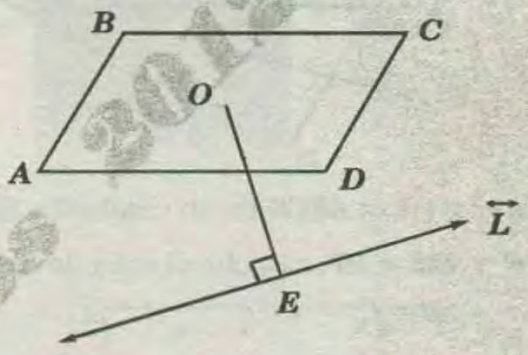
A)8 *B)10* *C)12* *D)16* *E) 20*

08 Si: $BD = CE$, calcular el valor de "x".



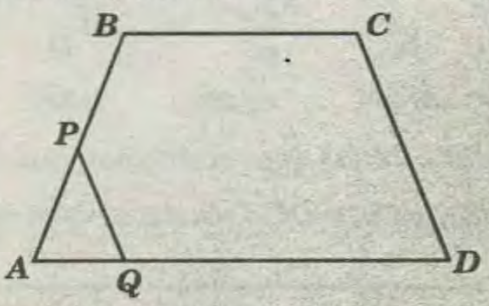
A)30° *B)36°* *C)37°* *D)45°* *E) 60°*

09 Siendo O el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo $ABCD$, calcule OE, si las distancias de A y C a dicha recta suman 12.



A) 3 *B) 4* *C) 6* *D) 8* *E) 12*

10 Del gráfico: $ABCD$ es un trapecio isósceles $(\overline{BC} \parallel \overline{AD})$, $BP = 7$ y $\overline{PQ} \parallel \overline{CD}$. Calcular la distancia de los puntos medios de $\overline{PD}$ y $\overline{QC}$.



A) 3,5 *B) 7* *C) 4,5* *D) 10,5* *E)11,5*

11 En un triángulo ABC se ubican los puntos D en $\overline{BC}$ y E en $\overline{AC}$, tal que: $AB=AE$, $BD = DE = EC$ y $m\sphericalangle B=6(m\sphericalangle A)$. Calcular $m\sphericalangle A$.

A) 10° *B) 12°* *C) 15°* *D)18°* *E)20°*

12 Se tiene el trapezoide $ABCD$, en $\overline{AD}$ se ubica el punto E, tal que: $m\sphericalangle BEA = m\sphericalangle CED = 60°$, además:

$AE=EB$ y $CE = ED$. Si: $AD = 12$, calcular la distancia

del punto medio de $\overline{BC}$ a $\overline{AD}$.

A) $2\sqrt{3}$ B) 4 C) 6 D) $6\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

13 En un trapecio $ABCD$, $\overline{AD} // \overline{BC}$, en $\overline{AD}$ se ubica el punto E, de modo que $BCDE$ es un ronbo, $AD=10$ y $CE=6$. Calcular $m\sphericalangle BDA$, si $m\sphericalangle ABD=90°$

A) 15° B) 30° C) 37° D) 45° E) 53°

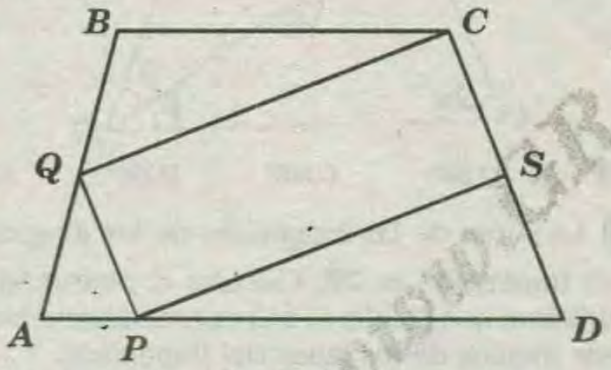
14 En un trapecio $ABCD$, $\overline{AD} // \overline{BC}$, se ubica M en $\overline{CD}$, $CM=MD=5$, $m\sphericalangle MAD=32°$, $m\sphericalangle CBM=58°$ y $m\sphericalangle BMC=6°$. Calcular la longitud de la mediana del trapecio

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

15 En un cuadrilátero $ABCD$, $m\sphericalangle BAD=m\sphericalangle BCD=90°$ y $BC = CD$, se traza $\overline{CH} \perp \overline{AD}$ $(H \in \overline{AD})$, $CH = 12$ y $AD = 7$. Calcular CD.

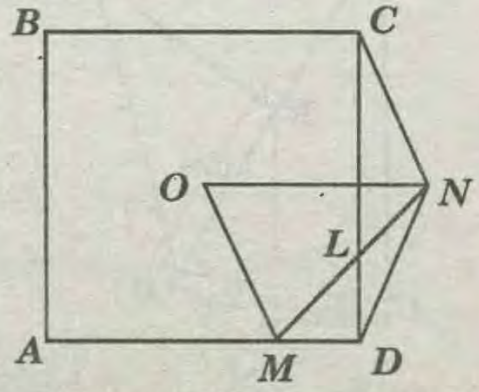
A) $\sqrt{15}$ B) 15 C) $2\sqrt{5}$ D) $4\sqrt{5}$ E) 13

16 Según el gráfico: $PQCS$ es un rectángulo y $ABCD$ es un trapecio. Si: $QS = 4$ y $CS = SD$, calcular: $BC + AP$



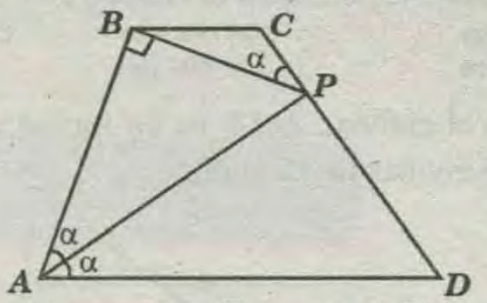
A) 2 B) 3 C) 4 D) 4,5 E) 5

17 En el gráfico: O es centro del cuadrado $ABCD$. Si $OMDN$ es un trapecio isósceles $(\overline{ON} // \overline{MD})$, calcular OL/CN.



A) 0,5 B) 2,5 C) 0,75 D) 1,5 E) 1

18 En el gráfico: $\overline{BC} // \overline{AD}$ y $AB = 6$. Calcule la longitud del segmento que tiene por extremos los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

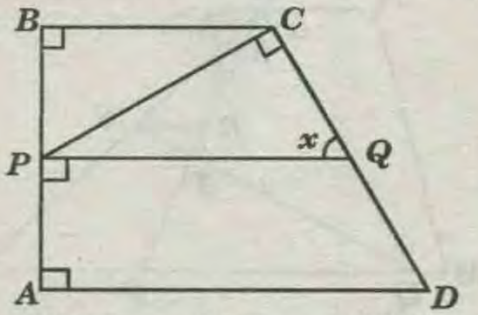


A) 2 B) 3 C) $3\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{3}$ E) 4

19 En un trapecio isósceles $ABCD$ $(\overline{BC} // \overline{AD})$, la mediatriz de $\overline{CD}$ interseca a $\overline{AD}$ en el punto P. Si: $2(AP)=3(BC)=6(PD)$, calcular $m\sphericalangle ADC$.

A) 30° B) 53°/2 C) 37° D) 53° E) 45°

20 En el gráfico mostrado, las longitudes de $\overline{BC}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{AD}$ son números consecutivos. Si: $CD = PQ$, calcular el valor de "x".



A) 37° B) 53° C) 45° D) 60° E) 30°

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 En un cuadrado $ABCD$, se prolonga $\overline{AD}$ hasta «P». Luego se traza la perpendicular $\overline{AQ}$ hacia $\overline{PC}$ que corta a $\overline{CD}$ en M. Calcular: $m\sphericalangle DPM$.

A) 45° B) 30° C) 60° D) 53° E) 75°

02 En los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ del cuadrado $ABCD$, se ubican los puntos M y P, respectivamente, tal que: $CP = PD$ y $m\sphericalangle APM = 90°$.

Calcule: $m\sphericalangle AMB$.

A) 37° B) 45° C) 53° D) 60° E) 69°

03 En la prolongación del lado $\overline{AD}$ de un rectángulo $ABCD$, se ubica el punto E, tal que: $m\sphericalangle ADB = m\sphericalangle DCE$, $BD=4$ y $CE=3$.

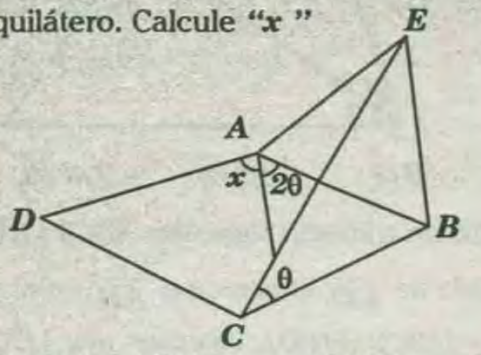
Calcule *AE*.

A) 3 *B)4* *C) 5* *D) 7* *E) $2\sqrt{3}$*

04 Las diagonales de un rombo miden *20 dm* y *48 dm* Hallar el perímetro del rombo .

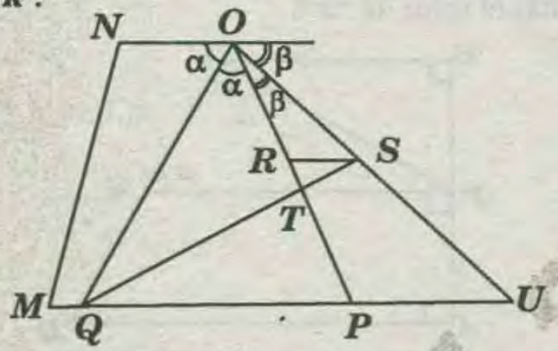
A) 102 dm *B)104 dm* *C) 106 dm*
D) 114 dm *E) 401 dm*

05 En el gráfico , *ABCD* es un rombo y *ABE* un triángulo equilátero. Calcule *"x "*



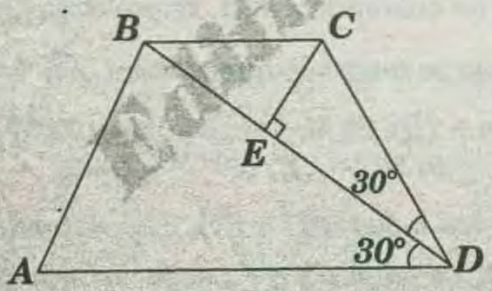
A) 30° *B) 45°* *C) 53°* *D) 60°* *E) 90°*

06 En la figura mostrada , *MNOP* es un trapecio, si: *S* punto de $\overline{OU}$ y $\overline{RS} \parallel \overline{QU}$. Siendo: *QU=12m*, hallar *TR* .



A)1m *B)1,5m* *C)2m* *D)3m* *E)4m*

07 Si : $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ y *ABCD*, es un trapecio isósceles. Hallar *AD, EC=5 m.*



A) 8 m *B) 10 m* *C) 15 m* *D) 20 m* *E) 30 m*

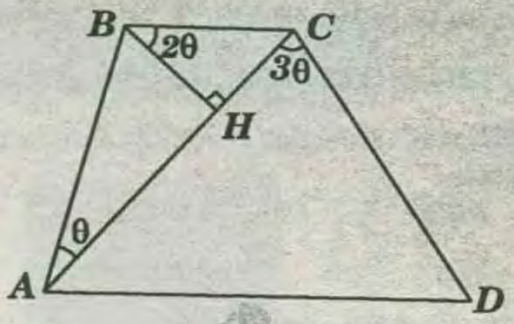
08 En un trapecio , la suma entre la mediana y el segmento que une los puntos medios de las diagonales es *32 cm*. Calcular la longitud de la base mayor.

A) 16 cm *B) 32 cm* *C) 18 cm*
D) 34 cm *E) 24 cm*

09 Las diagonales de un trapecio son perpendiculares y miden *6u* y *8u*. Calcular su mediana.

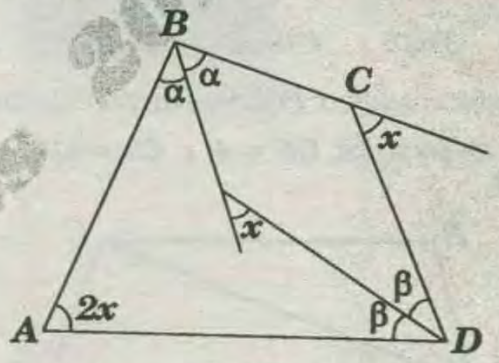
A) 7 u *B) 5u* *C) 6u* *D) 9u* *E) 10u*

10 En la figura: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, *BC=5* y *AD=9*. Hallar *BH* .



A)1 *B)2* *C)4* *D)7* *E)5*

11 De la figura, calcular «*x*».

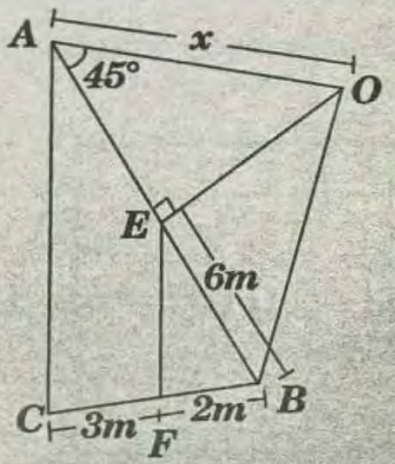


A) 15° *B) 36°* *C)45°* *D)60°* *E)75°*

12 La suma de las longitudes de las diagonales de un trapezoide es *20*. Calcular el perímetro del cuadrilátero que resulta al unir consecutivamente los puntos medios de los lados del trapezoide.

A) 10 *B) 15* *C) 20* *D) 30* *E)40°*

13 El gráfico , $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$. Hallar «*x*».



A) $8\sqrt{2}m$ *B)*$18\sqrt{2}m$ *C)*$\frac{9}{2}\sqrt{2}m$ *D)*$9\sqrt{2}m$ *E)*$18m$

14 En un trapecio *ABCD* la base menor $\overline{AB}$ es igual a la altura $\overline{AH}$; el ángulo :

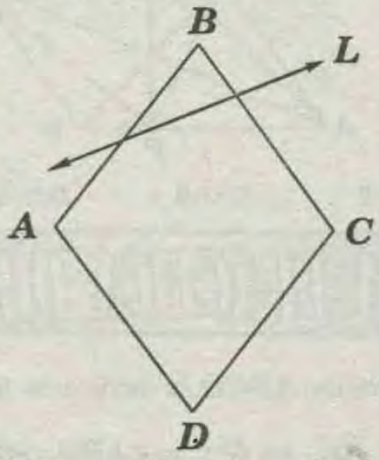
$m\sphericalangle A=135°$ y el ángulo $B=150°$. Hallar el perímetro de este trapecio, teniendo presente $AB=AH=20cm$.

A)195,920cm B)200cm C)182,920 cm
D)162,920cm E)170,500 cm

15 En un cuádrilatero convexo *ABCD*, el ángulo $m\sphericalangle A=9°$ y $m\sphericalangle B=4°$. Calcular el valor del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos *C* y *D* .

A)6°30' B)7°20' C) 7°55'
D)9°00' E)12°00'

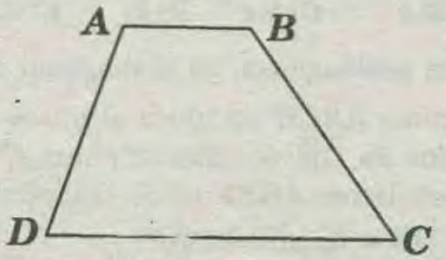
16 Tenemos el romboide *ABCD*. Si las longitudes de las distancias de *B*, *A* y *D* a la recta son *2,4m ; 3,6m; 7,9 m*, respectivamente, hallar la longitud de la distancia de *C* a la recta *L* .



A) 1 m B) 1,5 m C) 1,9 m D) 2 m E) 2,5 m

17 En un trapecio *ABCD*, las base menor $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se trazan las bisectrices de los ángulos *A* y *D* que se cortan en *R*, y las bisectrices de los ángulos *B* y *C* que se cortan en *S*.

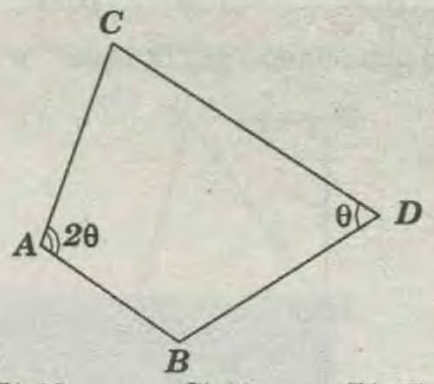
Hallar *RS* , si : $AB=4$, $CD=12$, $AD=7$ y $BC=9$.



A) 0 B) 8 C) 19/2 D) 13/2 E) 3/2

18 en la figura hallar $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos.

Si : $AB=5$ y $AC=12$, hallar la longitud del segmento $\overline{CD}$.



A) 15 B) 16 C) 18 D) 17 E)10

19 Se tiene un paralelogramo *ABCD.* Se construyen exteriormente los triángulos equiláteros *ABM* y *BCN*. Por *M* se traza la perpendicular $\overline{MH}$ a $\overline{ND}$, calcular la medida del ángulo *HMB*, si el ángulo *NDC* mide *46°*.

A)16° B)14° C)18° D)11° E)20°

20 En un trapecio *ABCD* ($\overline{AB}$ // $\overline{CD}$) . Si: $AB=8m$; $BC=6m$; $AD=10m$ y $CD=18\ m$; las bisectrices de los ángulos *A* y *D* se intersectan en el punto *M* y las bisectrices de los ángulos *B* y *C* se intersectan en el punto *N*. Hallar la longitud del segmento *MN* .

A) 4m B) 5m C) 6m D) 4,5m E) 5,5m

21 De las siguientes proposiciones. ¿Cuáles son verdaderas *(V)* o falsas *(F)*?

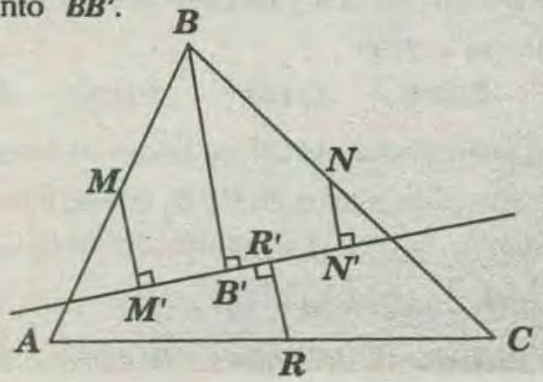
I) Si el trapecio tiene sus diagonales congruentes; entonces , es necesariamente inscriptible a una circunferencia.

II) En un trapecio escaleno, una diagonal puede ser también altura.

III) Si un polígono equiángulo está escrito en una circunferencia es necesariamente un polígono regular.

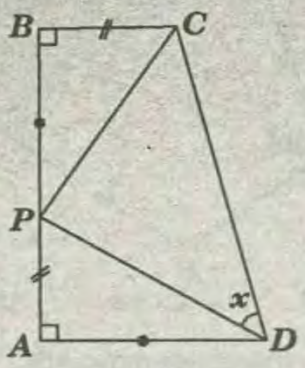
A) VVF B) FVF C) VFV D) FFF E) VVV

22 En la figura mostrada , los puntos *M, N* y *R* son puntos medios de los lados *AB,BC* y *CA*. $MM'+RR'+NN'=25m$, hallar la longuitud del segmento *BB'*.



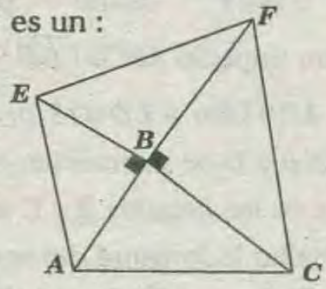
A) 20 B) 22 C) 23 D)24 E)25

23 En el cuadrilátero *ABCD*, hallar "*x*".



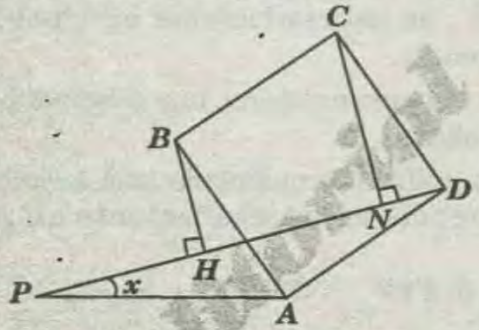
A) 53° B) 30° C) 60° D)45° E)37°

24 En el gráfico *ABC* es un triángulo escaleno : *ABE* y *FBC* son isósceles . Luego el cuadrilátero que se forma al unir los puntos medios es un: $\overline{AE}, \overline{EF}, \overline{FC}$, y $\overline{AC}$ es un :



A) Romboide B) Tectángulo C) Rombo
D)Cuadrado E) Trapecio isósceles

25 Del gráfico mostrado , *ABCD* es un cuardrado. Si: *BH=2* , *ND=3* y *NP=11*, calcular el valor de "*x*".



A) 16° B) 30° C) 37/2° D)26°30' E)15°

26 En un trapecio *ABCD* ($\overline{AB} \parallel \overline{AD}$); se sabe que:

$$AD - BC = 2.AB \text{ y } m\sphericalangle ABC = 4m\sphericalangle ADC$$

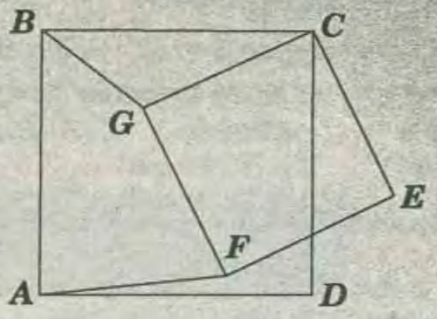
Calcular : $m\sphericalangle BCD$.

A)160° B)127° C)143° D)150° E)135°

27 En un romboide *ABCD*, se trazan las bisectrices exteriores de los ángulos en *C* y *D*, que se intersecan en *P*. Además, $\overline{BP}$ y $\overline{CD}$ se intersectan en *Q*. Calcular *AB*, si : *BQ=2u* , *QP=3u* y $\overline{BP} \perp \overline{CD}$

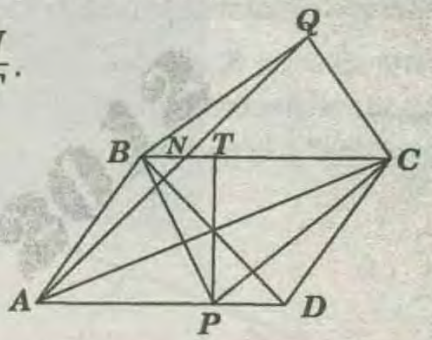
A) 4u B) 5u C) 7,5u D) 5,5u E) 6,5u

28 En el gráfico *ABCD* y *CEFG* son cuadrados , *BG+ED=2*. Calcule *AF* .



A)1 B)2 C) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

29 Según el gráfico: *ABCD* y *PBQC* son romboides. Calcule : $\frac{BN}{NT}$.



A)1 B)2 C)3/2 D)2/3 E)1/3

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

01 En un rombo *ABCD*,la mediatriz del lado $\overline{BC}$ interseca al $\overline{AC}$ en *Q* y $m\sphericalangle ABQ = 90°$. Calcule la $m\sphericalangle CQD$.

A) 130° B) 150° C) 120° D) 135° E) 143°

02 En un paralelogramo *ABCD* se traza la bisectriz *BM* del $\sphericalangle ABC\left(M \text{ en } \overline{AD}\right)$. Si: *AM = MD*, *BC = 5* y *BM = 3*, calcular la distancia de *C* al lado $\overline{AD}$.

A) 1 B) 2 C) 2,4 D) 3 E) 3,2

03 En la prolongación de la diagonal $\overline{BD}$ de un paralelogramo *ABCD* se ubica el punto *E* y en la prolongación de $\overline{CE}$ se ubica el punto *F* , de modo que el cuadrilátero *ABEF* es un trapecio. Si: *BD = 7* y *DE = 5*, calcular *AF*.

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E)17

04 En el paralelogramo *ABCD*: *M* es el punto medio de $\overline{CD}$ y en $\overline{BM}$ se ubica el punto *P* tal que la $m\sphericalangle ADP = 90$. Si: *BP=6* y *PM = 2*, calcular *AP*.

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

05 En un cuadrilátero convexo $ABCD$ las bisectrices de sus ángulos interiores A, B y C son concurrentes en un punto P. Si $AB = 3$, $BC = 4$ y $CD = 7$, calcular AD.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 10

06 En un trapecio rectángulo $ABCD$, recto en A y B, M es el punto medio de $\overline{CD}$ y P es un punto de $\overline{AM}$, tal que: $\overline{BP} \cong \overline{AM}$. Si $m\sphericalangle MAD = 40°$, calcular la medida de $m\sphericalangle ABP$

A) 30° B) 20° C) 40° D) 45° E) 25°

07 El ángulo A de un romboide $ABCD$ mide 70°; las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en un punto interior O. Si $OC = AB$, calcular la $m\sphericalangle COD$.

A) 70° B) 75° C) 80° D) 85° E) 84°

08 En un romboide $ABCD$: $m\sphericalangle BDC = 90°$ y M es el punto medio de $\overline{AD}$. Por A y B se trazan paralelas a $\overline{BM}$ y $\overline{CM}$ las cuales se intersecan en N. Calcular AN, si $BC = 18$.

A) 3 B) 4,5 C) 6 D) 6,5 E) 9

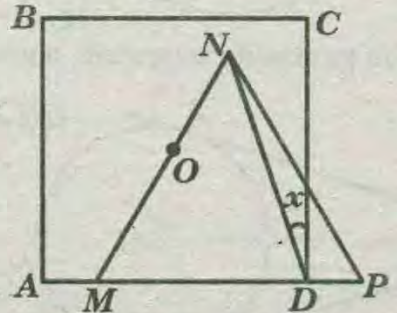
09 En un cuadrado $ABCD$: M y F son puntos de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Calcular la $m\sphericalangle MDA$ $\overline{DM}$ biseca a $\overline{AF}$ y $m\sphericalangle AFC = 105°$

A) 15° B) 22,5° C) 30° D) 36° E) 37°

10 En un trapezoide $ABCD$, sobre $\overline{AD}$ se ubica el punto P, tal que: $AB = BP$ y $CP = CD$. Si $BC = 6$, calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

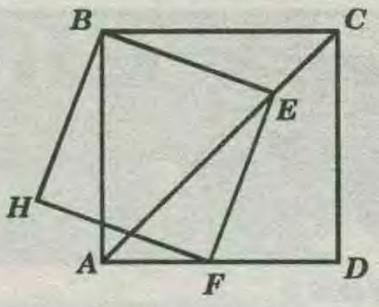
A) $2\sqrt{3}$ B) 3 C) $3\sqrt{12}$ D) 6 E) 12

11 Los lados del triángulo equilátero MNP y del cuadrado $ABCD$, del centro O, son congruentes. Calcular el valor de "x"



A) 15° B) 18° C) 26,5° D) 18,5° E) 22,5°

12 En la figura: $ABCD$ y $BEFH$ son cuadrados. Calcular la $m\sphericalangle BDE$, si $m\sphericalangle HFA = 20°$.



A) 30° B) 15° C) 20° D) 35° E) 25°

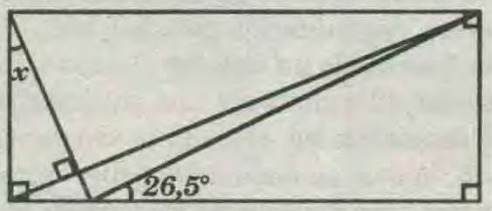
13 En un romboide, donde M es punto medio de $\overline{AB}$, se traza $\overline{CH} \perp \overline{DM}\left(H \in \overline{DM}\right)$. Calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CH}$, si $AD = 12$.

A) 4 B) 5 C) 4,5 D) 3,5 E) 6

14 En un trapecio isósceles $ABCD$ $(\overline{BC} \parallel \overline{AD})$ se construyen exteriormente los triángulos equiláteros CED y ADF, tal que: $\overline{AE} \cap \overline{BF} = \{0\}$ Calcular BO, si: $AO = 3$, $OE = 4$ y $OF = 5$.

A) 3 B) 2 C) 4 D) 2,5 E) 5

15 Del gráfico, calcular "x".



A) 15° B) 18,5° C) 22,5° D) 26,5° E) 53°/4

16 En un trapezoide $ABCD$: $\sphericalangle B \cong \sphericalangle D$. La bisectriz del ángulo A interseca en P a $\overline{CD}$ y la bisectriz del ángulo C interseca en Q a $\overline{AB}$. Sobre $\overline{AP}$ se ubica el punto L, tal que: $AD = LP$. $\overline{DL}$ prolongado interseca en M a $\overline{QC}$. Si: $AL = QM$ y, $m\sphericalangle B = 9\left(m\sphericalangle LDP\right)$ calcular la $m\sphericalangle LDP$

A) 10° B) 12° C) 15° D) 20° E) 25°

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)A	2)B	3)D	4)B	5)B	6)B	7)D	8)B	9)C	10)A
11)D	12)C	13)B	14)E	15)C	16)A	17)B	18)D	19)D	20)C

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)C	2)A	3)E	4)A	5)D	6)C	7)D	8)D	9)C	10)A
11)D	12)E	13)C	14)B	15)E	16)C	17)E	18)B	19)E	20)D

TERCERA PRACTICA — CUADRILÁTEROS

1) A	2)C	3)C	4) B	5) D	6) A	7) D	8) B	9) B	10) B
11)B	12)C	13)D	14) D	15)A	16)C	17)A	18)D	19)A	20) E
21) C	22)E	23)D	24)D	25)C	26)D	27)C	28)C	29)A	

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA

1)C	2)C	3)E	4)B	5)B	6)A	7)C	8)B	9)C	10)B
11)D	12)E	13)E	14)B	15)C	16)D				

CIRCUNFERENCIA

INTRODUCCION

CAPITULO 17

OBJETIVOS :

Al finalizar esta unidad, el alumno será capaz de:

* *Reconocer la circunferencia y cada uno de sus elementos*

* *Resolver problemas, utilizando las fórmulas de ángulos en la circunferencia*

INTRODUCCIÓN :

Las necesidades que el hombre tiene, hace que descubra o invente cosas, es así como generó la rueda, la cual fue y es de mucha utilidad: ella tiene forma de una circunferencia.

La circunferencia es una figura cuya forma y perfección es de mucha utilidad, ella a favorecido a diversos progresos de la humanidad como por ejemplo: cuando se quiere trasladar una carga extremadamente pesada (cajas fuertes, maquinarias pesadas, etc.), todavía se utiliza con frecuencia un sistema que los egipcios ya lo habían usado al construir sus pirámides: dichos sistemas consisten en colocar la carga sobre una plataforma, la cual se encuentra sobre unos rodillos: cuando se tira de la plataforma los rodillos que quedan rezagados son recogidos y vueltos a colocar por delante.

Esto permite darnos cuenta de la importancia de esta figura, para un estudiante de geometría el conocerla le permitirá entender otras propiedades que más adelante se estudiarán.

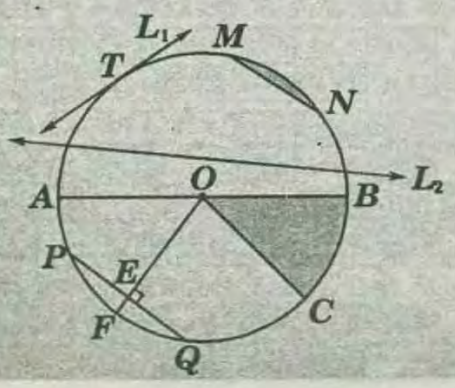
CIRCUNFERENCIA:

Es un conjunto infinito de puntos de un plano, que equidistan de otro punto fijo del mismo plano llamado centro.

CÍRCULO :

Es la reunión de una circunferencia y su región interior.

ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA



1	Centro	: O
2	Radio	: $\overline{OA}$
3	Diámetro	: $\overline{AB}$
4	Cuerda	: $\overline{PQ}$
5	Arco	: $\overset{\frown}{BC}$
6	Flecha o sagita	: $\overline{EF}$
7	Recta tangente	: $\overleftrightarrow{L_1}$
8	Recta secante	: $\overleftrightarrow{L_2}$
9	Punto de tangencia	: "T"
10	Sector circular	: $\sphericalangle BOC$
11	Segmento circular	: $\overset{\frown}{MN}$

RADIO :

Segmento que une el centro de la circunferencia con cualquiera de sus puntos.

CUERDA:

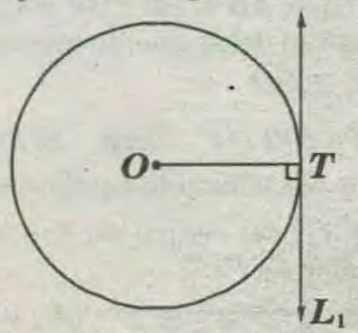
Segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.

DIAMETRO O CUERDA MÁXIMA :

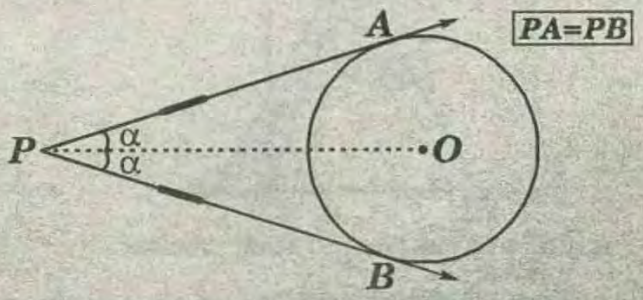
Es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

PROPIEDADES

1) Si *"T"* es un punto de tangencia, entonces: $\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{L_1}$



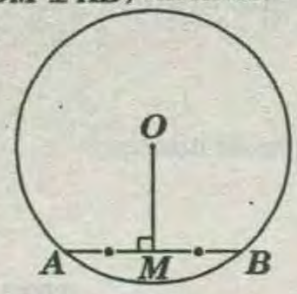
2) Si *A* y *B* son puntos de tangencia, entonces:



* También: Si *"O"* es centro, entonces:

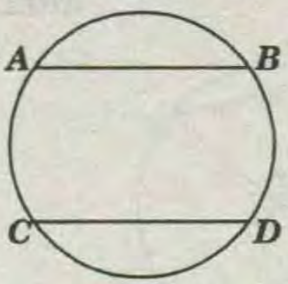
$\overline{PO}$ es bisectriz de $\sphericalangle APB$

3) Si $\overline{OM} \perp \overline{AB}$; entonces:



$\boxed{AM=MB}$

4)

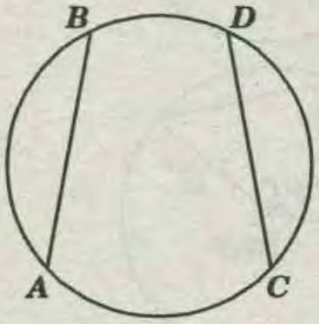


* Si: $\overline{AB} // \overline{CD}$

Entonces

$\boxed{m\widehat{AC}=m\widehat{BD}}$

5)



* Si: $AB = CD$

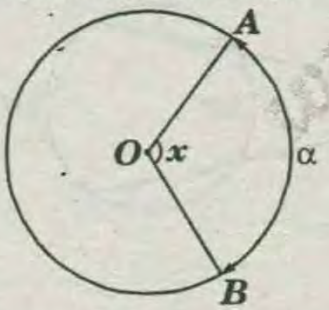
Entonces:

$m\widehat{AB}=m\widehat{CD}$

ÁNGULOS EN LA CIRCUFERENCIA

1) ÁNGULO CENTRAL :

El vértice se encuentra en el centro de la circunferencia, sus lados son dos radios. La medida del ángulo central es igual a la medida del arco comprendido entre sus lados.

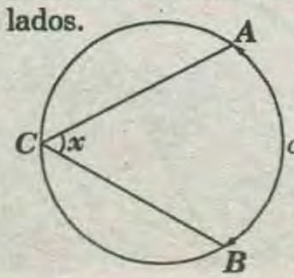


$x=m\widehat{AB}$

$\Rightarrow x=\alpha$

2) ÁNGULO INSCRITO:

Su vértice se encuentra sobre la circunferencia, sus lados son dos cuerdas. La medida del ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del arco comprendido entre sus lados.

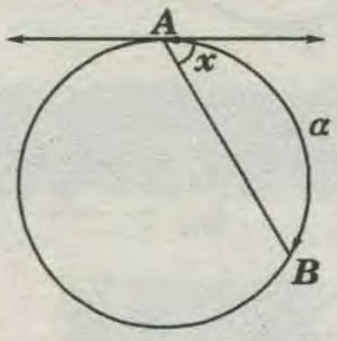


$x=\dfrac{m\widehat{AB}}{2}$

$\Rightarrow x=\dfrac{\alpha}{2}$

3) ÁNGULO SEMINSCRITO :

El vértice se encuentra sobre la circunferencia, sus lados son una tangente y una cuerda. La medida del ángulo seminscrito es igual a la mitad del arco correspondiente a la cuerda.

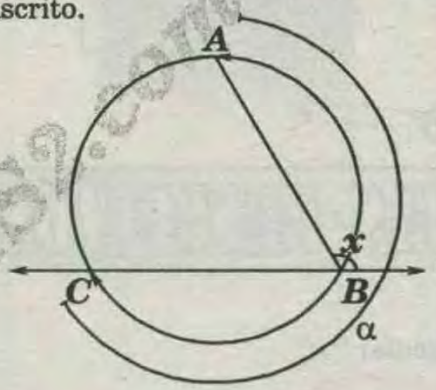


$x=\dfrac{m\widehat{AB}}{2}$

$\Rightarrow x=\dfrac{\alpha}{2}$

4) ÁNGULO EXINSCRITO :

Su vértice se encuentra sobre la circunferencia, este ángulo es el adyacente suplementario de un ángulo inscrito.

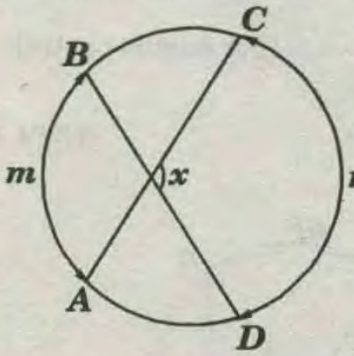


$x=\dfrac{m\widehat{ABC}}{2}$

$\Rightarrow x=\dfrac{\alpha}{2}$

5) ÁNGULO INTERIOR :

El vértice se encuentra en el interior de la circunferencia, sus lados son dos segmentos de cuerda. La medida del ángulo interior es igual a la semisuma de las medidas de los arcos comprendidos entre sus lados y las prolongaciones de los lados.

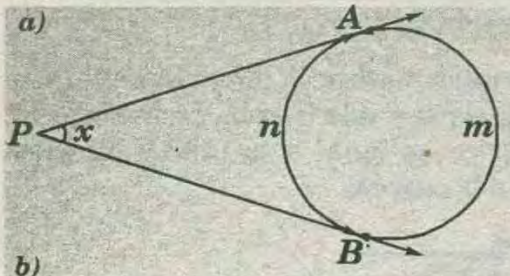


$\boxed{x=\dfrac{m+n}{2}}$

6) ÁNGULO EXTERIOR :

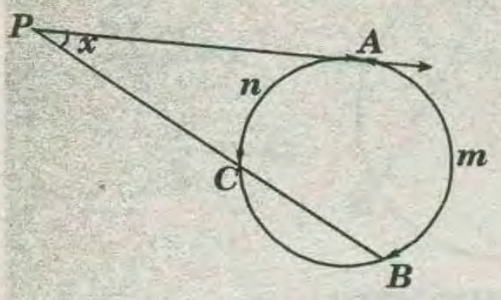
Su vértice es exterior a la circunferencia, sus lados pueden ser dos secantes, una tangente y una secante o dos tangentes. La medida del ángulo exterior es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos comprendidos entre sus lados.

a)



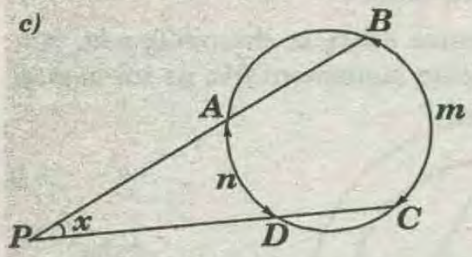
$$x=\frac{m-n}{2}$$

b)



$$x=\frac{m-n}{2}$$

c)



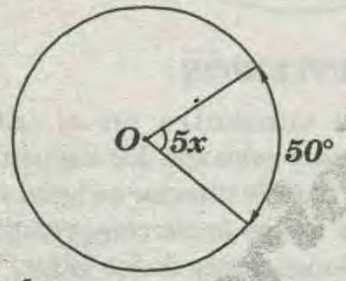
$$x=\frac{m-n}{2}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Si *"O"* es centro, calcular *"x"*

A) 10°
B) 20°
C) 50°
D) 25°
E) 5°



RESOLUCIÓN :

* Se deduce: $5x=50°$ ..... (por ángulo central)

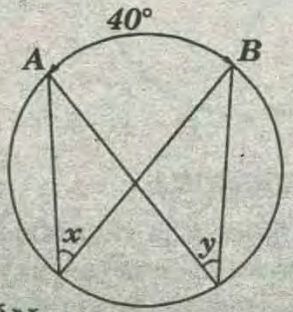
$$\Rightarrow x=10°$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 2 :

Calcular *"x+y"*

A) 50°
B) 60°
C) 70°
D) 30°
E) 40°



RESOLUCIÓN :

* Se deduce que:

$$x=\frac{40°}{2} \text{ ..... (por ángulo inscrito)}$$

$$\Rightarrow x=20°$$

* Además:

$$y=\frac{40°}{2} \text{ ..... (por ángulo inscrito)}$$

$$\Rightarrow y=20°$$

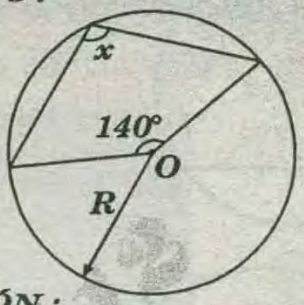
* Se pide: $x+y=40°$

RPTA : "E"

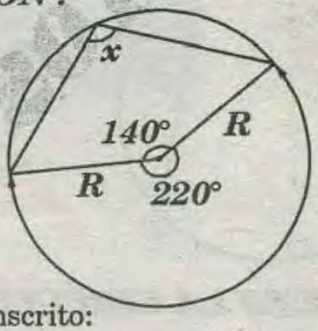
PROBLEMA 3 :

Hallar *"x"*

A) 80°
B) 70°
C) 60°
D) 105°
E) 110°



RESOLUCIÓN :



* Por ángulo inscrito:

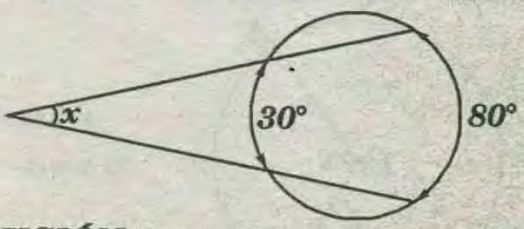
$$x=\frac{220°}{2}\Rightarrow x=110°$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 4 :

Calcular *"x"*.

A) 20°
B) 25°
C) 15°
D) 40°
E) 32°



RESOLUCIÓN :

* Se deduce:

$$x=\frac{80°-30°}{2} \text{ ..... (por ángulo exterior)}$$

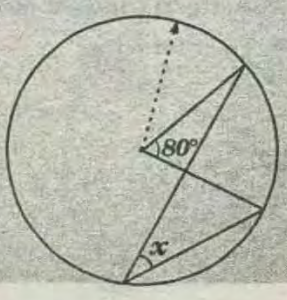
$$\Rightarrow x=25°$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 5 :

Calcular *"x"*, en:

A) 20°
B) 40°
C) 30°
D) 18°
E) 80°



RESOLUCIÓN:

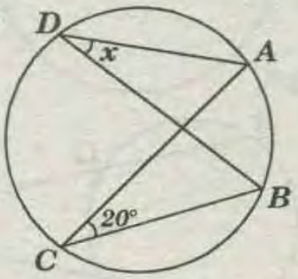
* Por ◁ Central: $m\widehat{BC}=80°$

* Por ◁ Inscrito: $x=\frac{80°}{2}=40°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 6 :

Calcular "x" en:



A) 10°
B) 20°
C) 40°
D) 30°
E) 15°

RESOLUCIÓN :

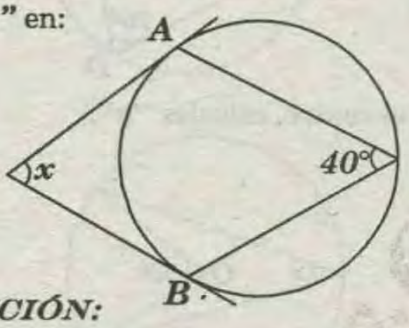
* Por ◁ inscrito: $20°=m\frac{\widehat{AB}}{2}$

* Por ◁ inscrito: $x=m\frac{\widehat{AB}}{2}\Rightarrow x=20°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 7 :

Calcular "x" en:



A) 80°
B) 90°
C) 100°
D) 85°
E) 105°

RESOLUCIÓN:

* Se deduce que:

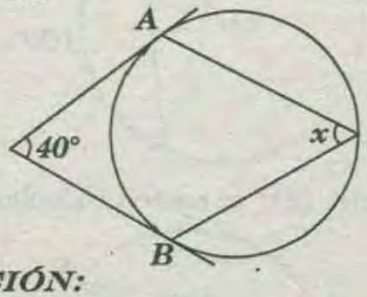
$$m\widehat{AB}=2\times 40°=80°$$

$$\Rightarrow x=\frac{280°-80°}{2}=100°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

Calcular "x" en:



A) 20°
B) 80°
C) 70°
D) 90°
E) 110°

RESOLUCIÓN:

* Se deduce:

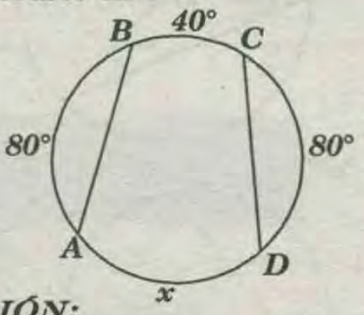
$$m\widehat{AB}=180°-40°=140°$$

$$\Rightarrow x=\frac{140°}{2}=70°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 9 :

Si las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son iguales, la medida del arco $\widehat{AB}$ es 80° y la amplitud del arco $\widehat{BC}$ es 40°, calcular la amplitud del arco $\widehat{AD}$.



A) 120°
B) 200°
C) 160°
D) 180°
E) 90 °

RESOLUCIÓN:

* Como $CD=AB\Rightarrow m\widehat{CD}=m\widehat{AB}$

$$\Rightarrow m\widehat{CD}=80°$$

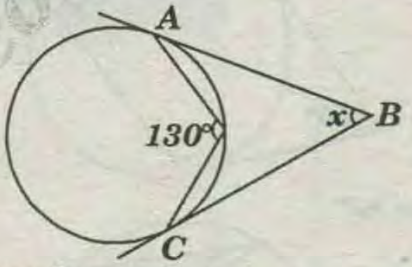
$$\Rightarrow 80°+40°+80°+x=360°$$

$$\Rightarrow x=160°$$

RPTA : "C"

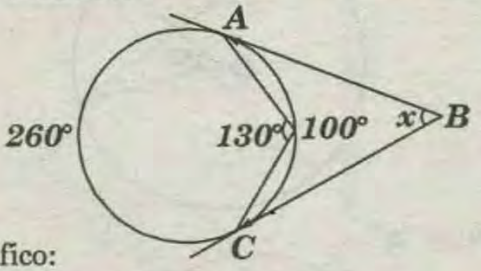
PROBLEMA 10 :

Hallar "x"



A) 20°
B) 30°
C) 70°
D) 80°
E) 100°

RESOLUCIÓN:



* Del gráfico:

$$m\widehat{AC}=360°-260°$$

$$\Rightarrow m\widehat{AC}=100°$$

* Por ángulo exterior:

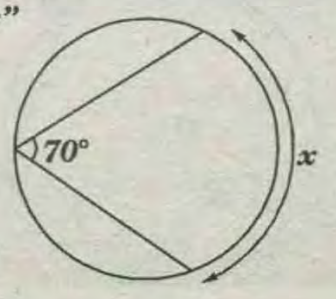
$$x+100°=180°$$

$$\Rightarrow x=80°$$

RPTA "D"

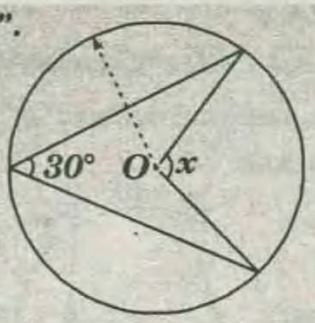
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

(01) Calcular "x"



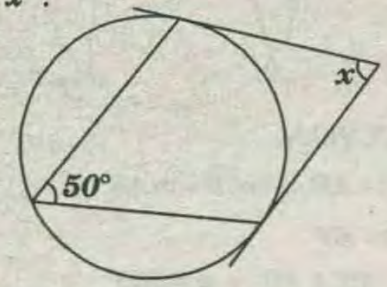
A) 140°
B) 100°
C) 70°
D) 100°
E) 80°

02 Calcular "x".



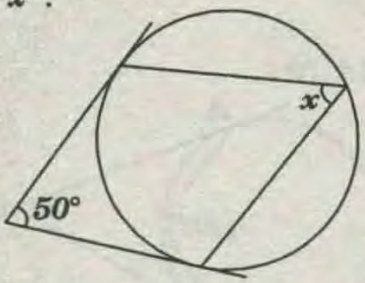
A) 30°
B) 20°
C) 60°
D) 40°
E) 90°

03 Calcular "x".



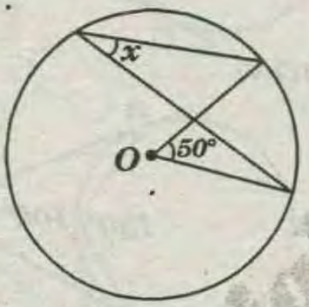
A) 80°
B) 60°
C) 70°
D) 66°
E) 90°

04 Calcular "x".



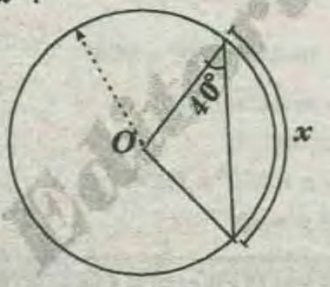
A) 55°
B) 65°
C) 75°
D) 60°
E) 50°

05 Calcular "x".



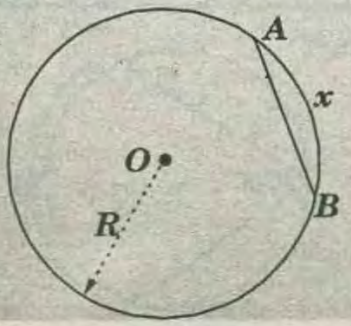
A) 20°
B) 24°
C) 25°
D) 30°
E) 36°

06 Calcular "x".



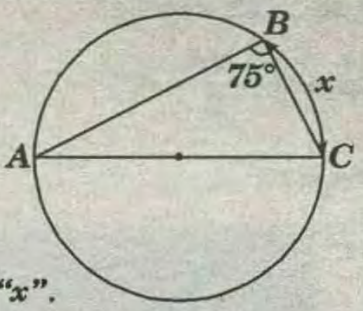
A) 100°
B) 90°
C) 120°
D) 110°
E) 108°

07 Si "O" es centro y $AB = R$, calcular "x".



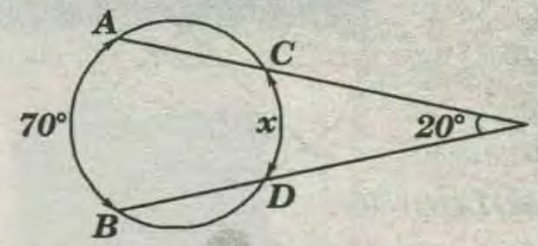
A) 30°
B) 15°
C) 45°
D) 60°
E) 90°

08 Si: $AB = AC$, calcular $\widehat{BC}$.



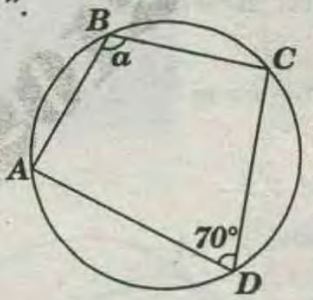
A) 60°
B) 80°
C) 50°
D) 70°
E) 30°

09 Calcular "x".



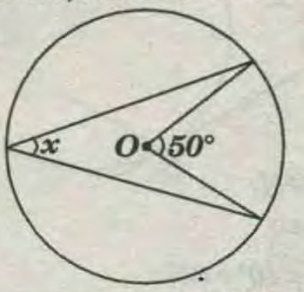
A) 30°
B) 20°
C) 15°
D) 25°
E) 40°

10 Calcular "α".



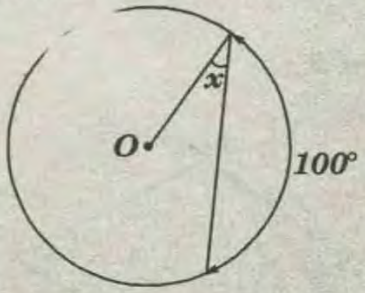
A) 100°
B) 105°
C) 110°
D) 120°
E) 150°

11 Si "O" es centro, calcular "x".



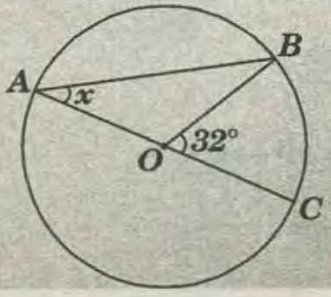
A) 20°
B) 25°
C) 30°
D) 35°
E) 50°

12 De la figura, calcular "x", si "O" es el centro.



A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°

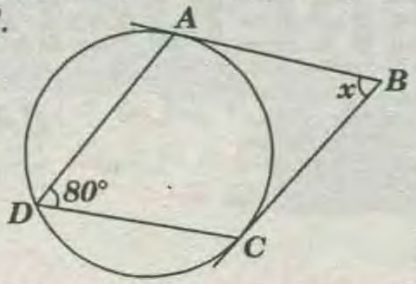
13 En la figura, "O" es centro. Calcular "x".



A) 16°
B) 32°
C) 8°
D) 15°
E) 30°

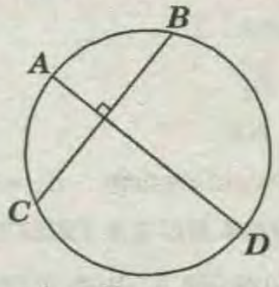
14 En el gráfico A y C son puntos de tangencia. Calcular "x".

A) 20°
B) 10°
C) 16°
D) 8°
E) 5°



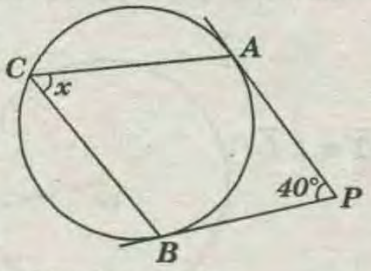
15 En el gráfico, $m\widehat{BD}=100°$. Calcular $m\widehat{AC}$.

A) 85°
B) 80°
C) 70°
D) 60°
E) 40°



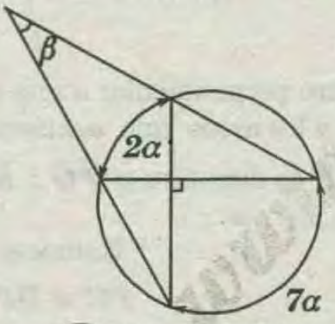
16 En la figura, A y B son puntos de tangencia. Calcular "x".

A) 40°
B) 60°
C) 50°
D) 70°
E) 80°



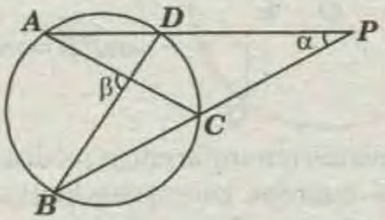
17 En la figura, calcular: $\alpha+\beta$

A) 70°
B) 30°
C) 40°
D) 60°
E) 80°



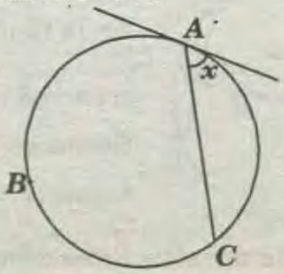
18 En la figura $m\widehat{AB}=70°$. Calcular $\alpha+\beta$

A) 70°
B) 30°
C) 40°
D) 60°
E) 50°



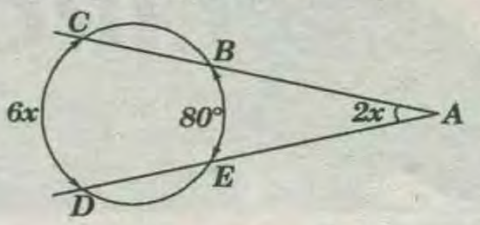
19 En el gráfico, "A" es punto de tangencia y $m\widehat{ABC}=240°$. Calcular "x".

A) 50°
B) 40°
C) 60°
D) 42°
E) 30°



20 En la figura, calcular "x".

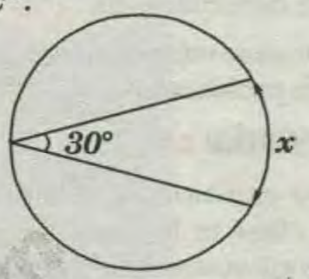
A) 20°
B) 40°
C) 30°
D) 28°
E) 50°



TAREA DOMICILIARIA

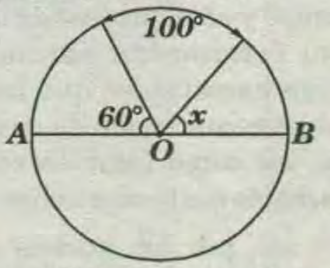
01 Calcular "x".

A) 15°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 60°



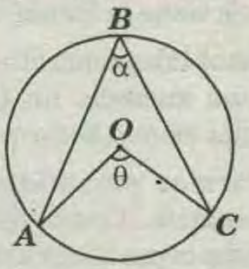
02 Si "O" es centro, calcular "x".

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°



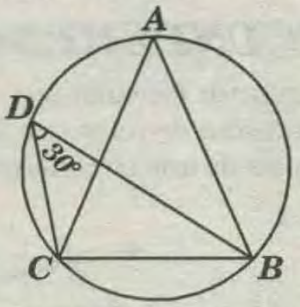
03 En el gráfico, "O" es centro. Calcular la relación entre θ y α

A) 1
B) 2
C) 3
D) 1/2
E) 1/3



04 En la figura: $AC=AB$. Calcular $m\widehat{AB}$

A) 120°
B) 130°
C) 140°
D) 150°
E) 160°



PRIMERA PRACTICA	CIRCUNFERENCIA								
1) A	2) C	3) A	4) B	5) B	6) A	7) D	8) A	9) D	10) C
11) B	12) D	13) A	14) A	15) B	16) D	17) A	18) A	19) C	20) B
01) E	02) B	03) B	04) D						

CIRCUNFERENCIA I

CAPITULO 18

OBJETIVOS :

* Establecer la importancia de la circunferencia en el desarrollo de la geometría.

* Conocer las líneas en la circunferencia , y sus ángulos con relación a la circunferencia

* *Utilizar los teoremas relacionados a la circunferencia, en la solución de problemas.*

INTRODUCCIÓN :

En el presente capítulo se estudia y analiza la circunferencia. ¿Qué es la circunferencia?. ¿Por qué estudiarla?, que aportes se han obtenido a partir de su estudio y análisis.

A través del tiempo y en el proceso de la evolución del hombre, de su interacción permanente con la naturaleza surge necesidades que hace posible la invención de objetos con forma de circunferencia tal como la rueda: así como también crear Valdes de manera rustica donde sus bordes tienen forma circular.

Al observar el sol, por las noches de luna llena instantáneamente indicamos que éste la forma circular. También el arco iris tiene la forma de un arco.

Al observar los objetos tales como el aro de una bicicleta o de los carros, una moneda, un *CD*, el aro de un ventilador, etc. Estas tienen la forma circular.

Luego de esas formas percibidas de los objetos materiales la geometría. Como ciencia inductiva y deductiva las estudia como la circunferencia y círculo respectivamente.

CIRCUNFERENCIA

Es el lugar geométrico formado por un conjunto de puntos que equidistan de un punto llamado centro. La longitud angular de una circunferencia es *360°*.

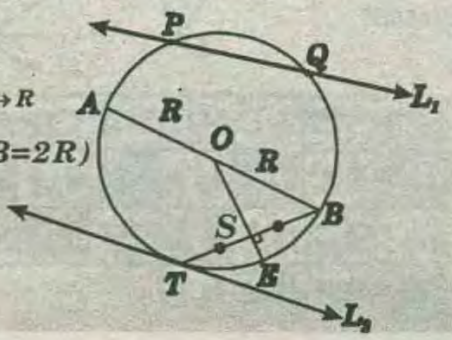
ELEMENTOS :

Centro : O

Radio : $\overline{AO}=\overline{OB} \longleftrightarrow R$

Diametro : $\overline{AB}=(AB=2R)$

Cuerda : $\overline{PQ}$



Arco : $\overset{\frown}{PQ}$

Recta Tangente : $\overleftrightarrow{L_1}$

Punto de tangencia : T

Recta secante : $\overleftrightarrow{L_2}$

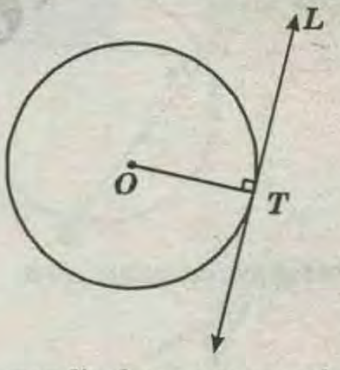
Flecha o sagita : $\overline{SE}$

Longitud de la circunferencia : $L_C=2\pi R$

PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA

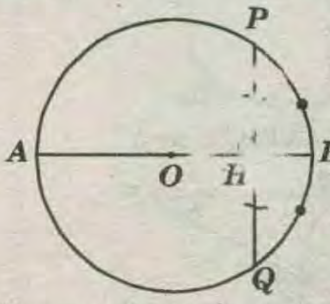
1) La recta tangente a una ***circunferencia*** es perpendicular al radio trazado en el punto de tangencia.

$\overline{OT} = \perp \overleftrightarrow{L}$



2) Todo diámetro perpendicular a una cuerda, biseca a dicha cuerda y los arcos que subtiende.

En la figura $\overline{AB}$ es diámetro si $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$



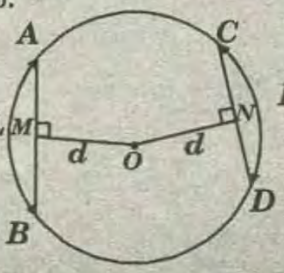
* Entonces:

$PH = HP$

* Además:

$m\overset{\frown}{PB} = m\overset{\frown}{BQ}$

3) En una misma circunferencia ; si dos arcos de igual medida, sus cuerdas correspondientes son iguales longitud y además dichas cuerdas equidistan del centro.



En la figura : si:

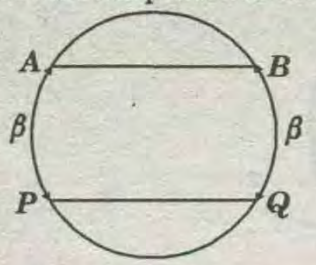
si : $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$

Entonces : $AB = CD$

Además : $OM = ON$

4) En una circunferencia los arcos comprendidos entre

dos cuerdas paralelas son de igual medida.

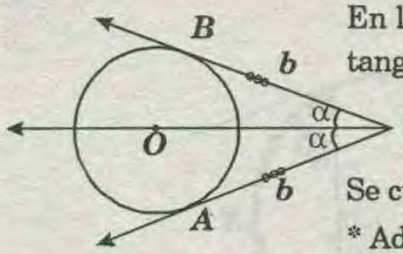


En la figura :

Si : $\overline{AB} // \overline{PQ}$

Entonces : $m\widehat{AP} = m\widehat{BQ}$

5) Los segmentos tangentes a una circunferencia trazada desde un punto exterior son de igual longitud.

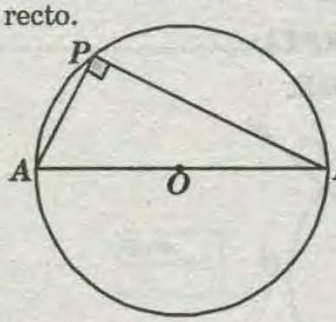


En la figura $\overline{PB}$ y $\overline{PA}$; son tangentes a la circunferencia

Se cumple : $PB = PA$

* Además : $\overline{PO}$ es Bisectriz.

6) En una circunferencia; al unir los extremos del diámetro con un punto de ella, el ángulo que se forma es recto.

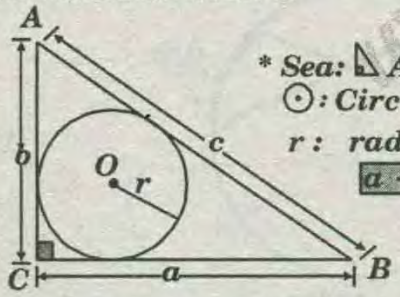


En la figura : Si: $\overline{AB}$ es Diámetro y P pertenece a la circunferencia, entonces :

$m\sphericalangle APB = 90°$

7) TEOREMA DE PONCELET :

En todo triángulo rectángulo , la suma de las longitudes de los catetos es igual a la suma de la hipotenusa más la longitud del diámetro de la circunferencia inscrita.



* Sea: $\triangle ABC$

$\odot$: Circunferencia inscrita

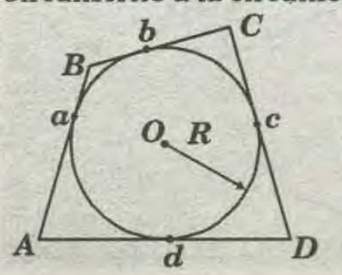
r : radio

$\boxed{a + b = c + 2r}$

8) TEOREMA DE PITHOT :

En la figura $\square ABCD$.

Circunscrito a la circunferencia :



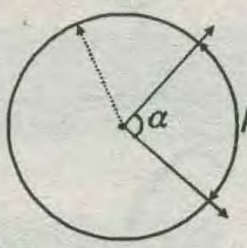
*(O;R) : Circuferencia inscrita

* se cumple : $a+c=b+d$

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

I) ÁNGULO CENTRAL :

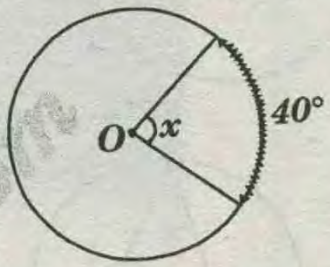
El vértice se encuentra en el centro de la circunferencia, sus lados son dos radios. La medida del ángulo central Es igual a la medida del arco comprendido entre sus lados.



$\boxed{\alpha = \beta}$

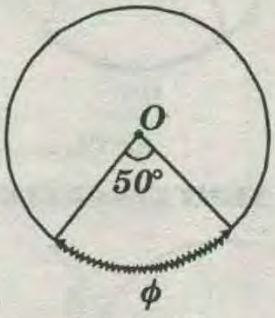
EJEMPLOS :

1) Calcular x ; si "O" es centro



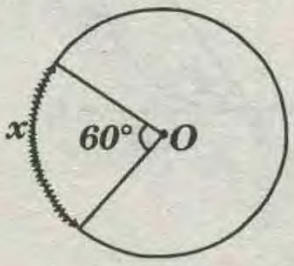
RPTA: .....

2) Calcular ϕ, si "O" es centro.



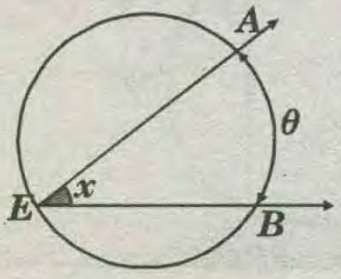
RPTA:.....

3) Calcular x ; si "O" es centro.



RPTA:.....

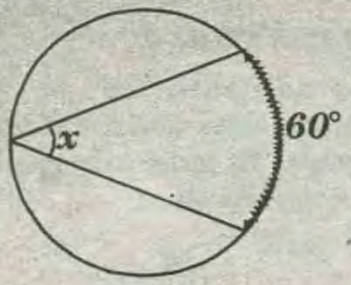
II) ÁNGULO INSCRITO :



$\boxed{x = \frac{\theta}{2}}$

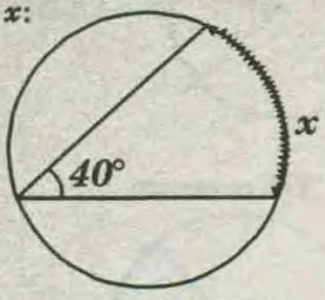
EJEMPLOS :

1) Calcular x:



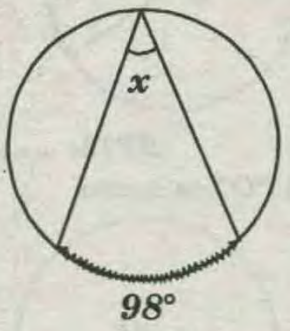
RPTA:.....

2) Calcular x:



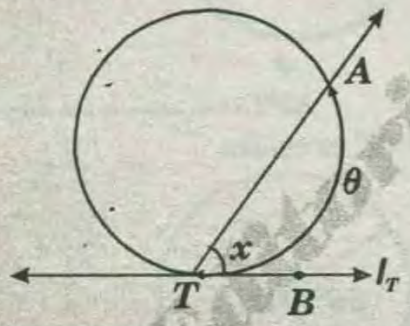
RPTA:.....

3) Calcular x:



RPTA:.....

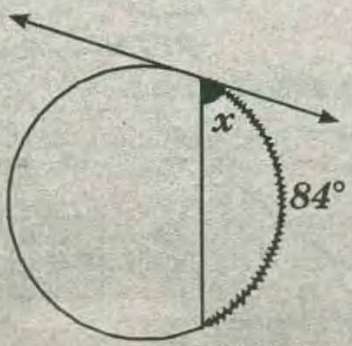
III) ÁNGULO SEMI INSCRITO :



$$x = \frac{\theta}{2}$$

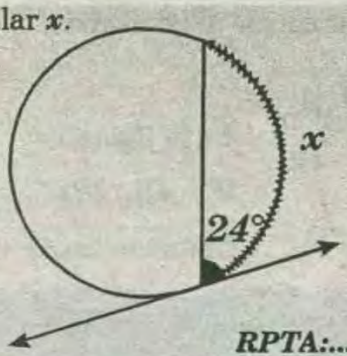
EJEMPLOS :

1) Calcular x.



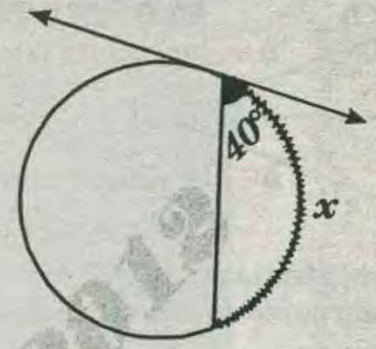
RPTA:.....

2) Calcular x.



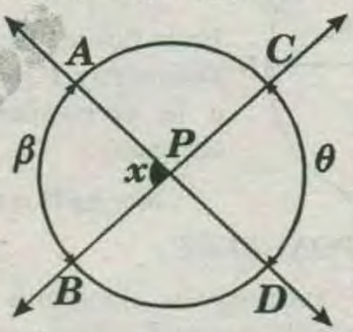
RPTA:.....

3) Calcular x.



RPTA:.....

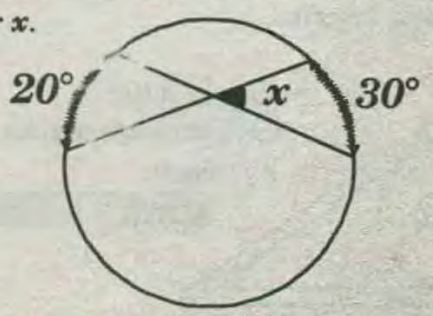
IV) ÁNGULO INTERIOR



$$x = \frac{\theta + \beta}{2}$$

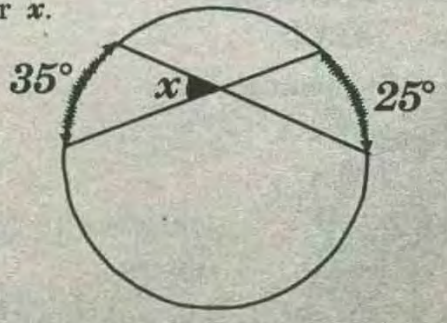
EJEMPLOS:

1) Calcular x.



RPTA:.....

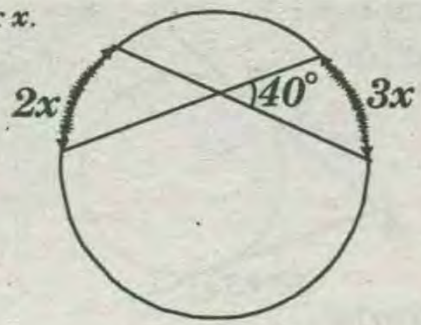
2) Calcular x.



RPTA:.....

Editorial rubiños 2012

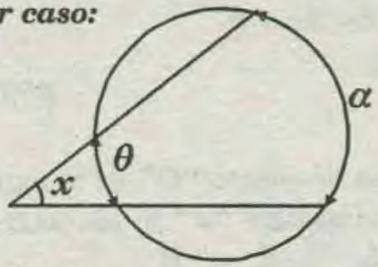
3) Calcular x.



RPTA:.....

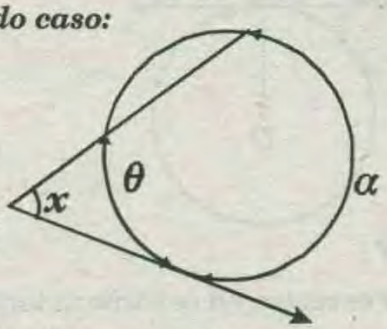
V) ÁNGULO EXTERIOR :

Primer caso:



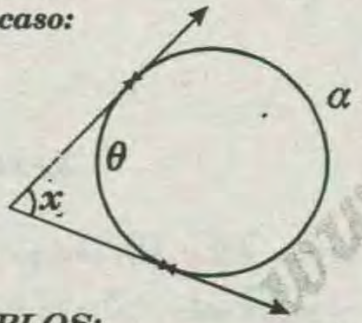
$$x=\frac{\alpha-\theta}{2}$$

Segundo caso:



$$x=\frac{\alpha-\theta}{2}$$

Tercer caso:

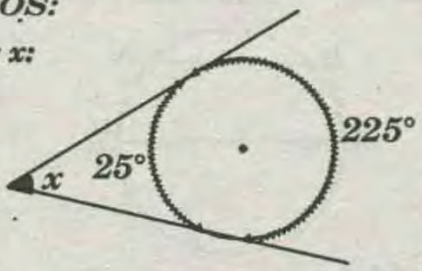


$$x=\frac{\alpha-\theta}{2}$$

$$x+\theta=180°$$

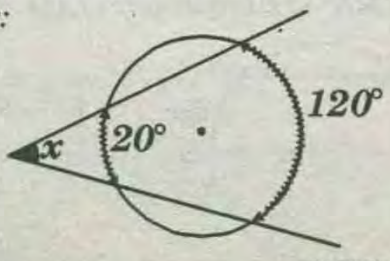
EJEMPLOS:

1) Calcular x:



RPTA:.....

2) Calcular x:



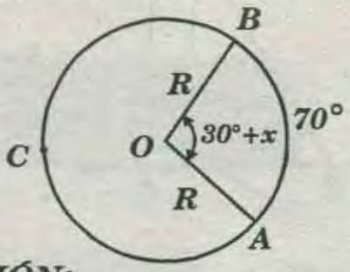
RPTA:.....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Calcular "x" ; (O: centro)

A) 40°
B) 8°
C) 35°
D) 15°
E) 12°



RESOLUCIÓN:

* Como "O" es el centro, entonces el $\sphericalangle AOB$ en un ángulo central,

Luego : $m\sphericalangle AOB = m\overset{\frown}{AB}$

$30°+x=70°$

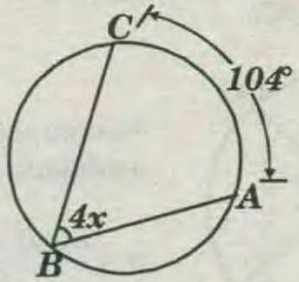
$\Rightarrow x=40°$

RPTA : "A"

PROBLEMA 2:

Calcular "x", si $m\overset{\frown}{AC}=104°$

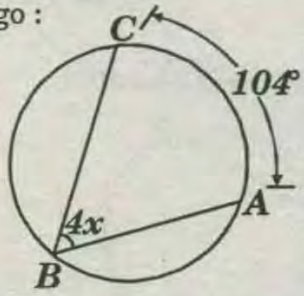
A) 26°
B) 52°
C) 34°
D) 13°
E) 18°



RESOLUCIÓN:

* Como el $\sphericalangle CAB$, es un ángulo inscrito,

* Luego :



$$m\sphericalangle CAB=\frac{m\overset{\frown}{AC}}{2}$$

$$\Rightarrow 4x=\frac{104°}{2}$$

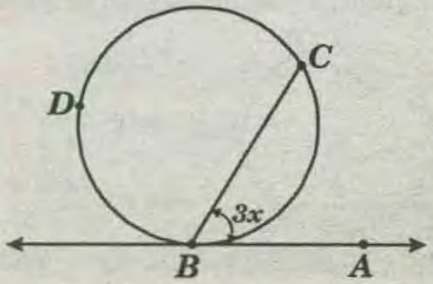
$$\Rightarrow x=13°$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3:

Calcular "x", si $m\overset{\frown}{BC}=120°$

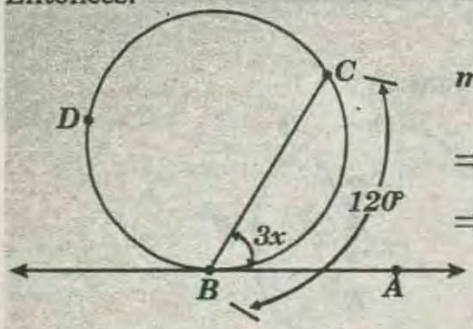
A) 24°
B) 30°
C) 20°
D) 12°
E) 10°



RESOLUCIÓN:

* Como el, $\sphericalangle ABC$ es un ángulo seminscrito,

Entonces:



$$m\sphericalangle ABC = \frac{m\overset{\frown}{BC}}{2}$$

$$\Rightarrow 3x = \frac{120°}{2}$$

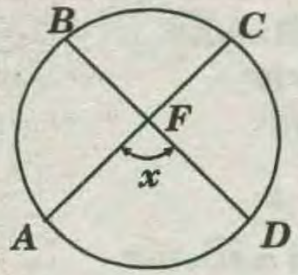
$$\Rightarrow x = 20°$$

RPTA : "C"

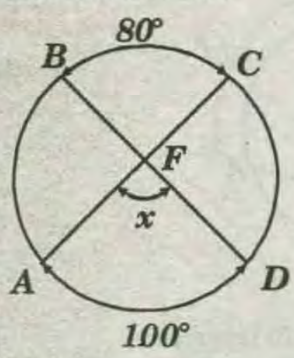
PROBLEMA 4:

Calcular **"x"**, si $m\overset{\frown}{AD} = 110°; m\overset{\frown}{BC} = 80°$

A) 75°
B) 85°
C) 95°
D) 100°
E) 80°



RESOLUCIÓN :



* Como el ángulo **"x"**, es un ángulo interior, luego:

$$x = \frac{m\overset{\frown}{AD} + m\overset{\frown}{BC}}{2}$$

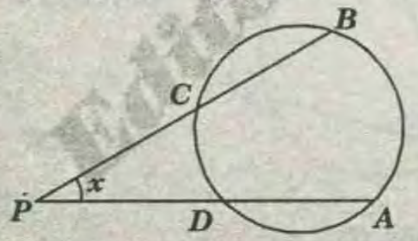
$$\Rightarrow x = \frac{110° + 80°}{2} = 95°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

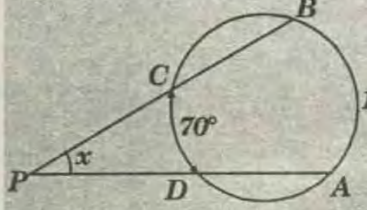
Calcular **"x"** si $m\overset{\frown}{AB} = 120°;\ m\overset{\frown}{CD} = 70°$

A) 30°
B) 15°
C) 25°
D) 35°
E) 10°



RESOLUCIÓN :

* Como el ángulo **"x"** es un ángulo exterior,



* Luego :

$$m\sphericalangle P = \frac{m\overset{\frown}{AB} - m\overset{\frown}{CD}}{2}$$

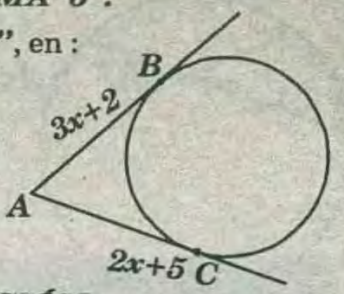
$$\Rightarrow x = \frac{120° - 70°}{2} = 25°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

Calcular **"x"**, en :

A) 5
B) 4
D) 1
D) 2
E) 3



RESOLUCIÓN :

* Como las tangentes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son congruentes, entonces : $AB = AC$

$$\Rightarrow 3x + 2 = 2x + 5$$

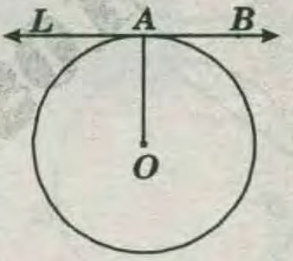
$$\Rightarrow x = 3$$

RPTA "E"

PROBLEMA 7:

En la circunferencia de centro **"O"** de la figura, la recta **L** es tangente. Calcular **"x"** ;si $m\sphericalangle OAB = 5x$

A) 50°
B) 10°
C) 20°
D) 22°
E) 18°



RESOLUCIÓN :

* Sabemos que si **O** es centro y **A** es punto de tangencia, Entonces :

$$m\sphericalangle OAB = 90°$$

$$\Rightarrow 5x = 90°$$

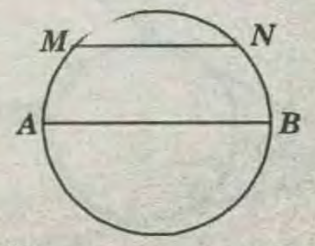
$$\Rightarrow x = 18°$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 8 :

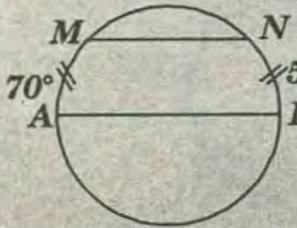
En la figura, las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$ son paralelos, además $m\overset{\frown}{AM} = 7^{\circ}$ y $m\overset{\frown}{BN} = 5x$: Calcular **"x"**

A) 20°
B) 12°
C) 14°
D) 24°
E) 15°



RESOLUCIÓN:

* Al ser $\overline{AB} // \overline{MN}$ se cumple que: $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{NB}$



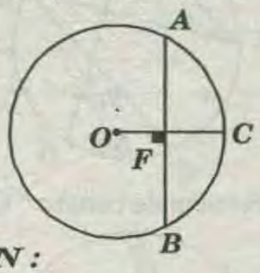
$$\Rightarrow 70° = 5x$$

$$\Rightarrow 14° = x$$

RPTA : "C"

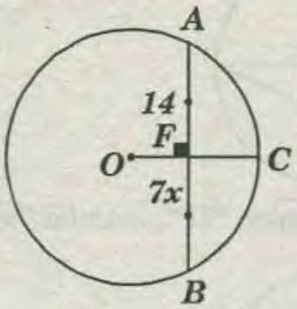
PROBLEMA 9:

En la circunferencia de centro *"O"* si $\overline{OC} \perp \overline{AB}$, $AF = 7x$ y $FB = 14$; Calcular "x".



A) 1
B) 2
C) 3
D) 1,2
E) 1,5

RESOLUCIÓN :



*Como $\overline{OC} \perp \overline{AB}$, se cumple que :

$AF = FB$

$\Rightarrow 7x = 14$

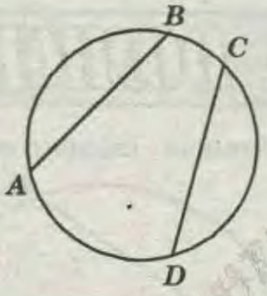
$\Rightarrow x = 2$

RPTA : "B"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si $\overline{AB} = \overline{CD}$, $m\overset{\frown}{AB} = 120°$ y $m\overset{\frown}{BC} = 20°$.

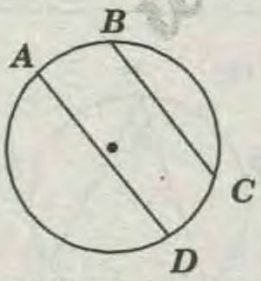
Calcular $m\overline{AD}$



A) 100°
B) 120°
C) 140°
D) 160°
E) 180°

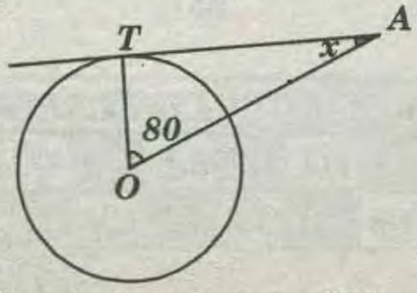
02 Si $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $m\overset{\frown}{AB} = 30°$ y $m\overset{\frown}{BC} = 140°$.

Calcular : $\overline{AD}$



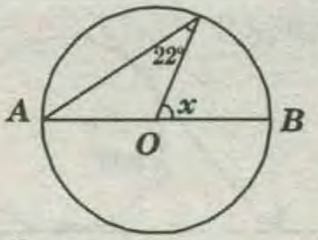
A) 140°
B) 160°
C) 180°
D) 200°
E) 100°

03 Calcular x. Si O es centro y T es punto de tangencia.



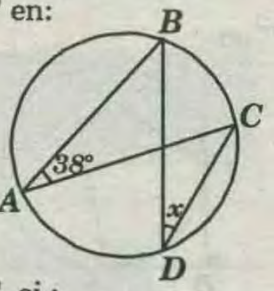
A) 5°
B) 80°
C) 10°
D) 15°
E) 20°

04 En la circunferencia de centro *"O"*, calcular "x"



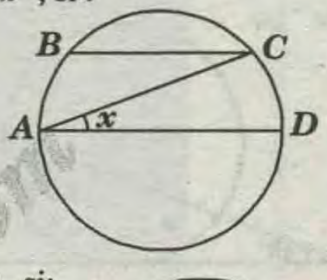
A) 44°
B) 42°
C) 22°
D) 45°
E) 34°

05 Calcular "x" en:



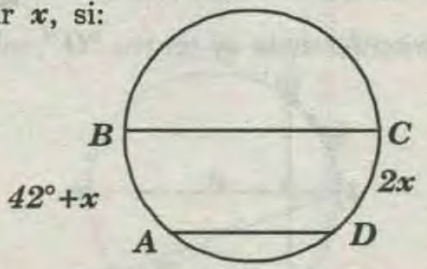
A) 19°
B) 36°
C) 38°
D) 32°
E) 76°

06 Calcular "x", si :



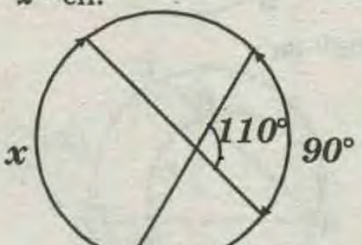
A) 55°
B) 30°
C) 40°
D) 45°
E) 35°

07 Calcular x, si:



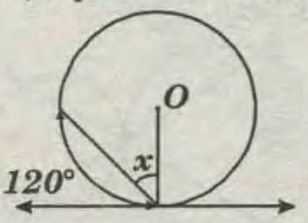
A) 42°
B) 21°
C) 84°
D) 46°
E) 36°

08 Calcular "x" en:



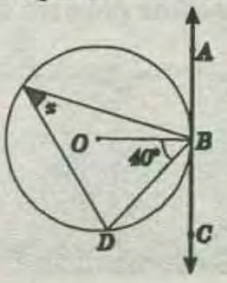
A) 110°
B) 120°
C) 130°
D) 100°
E) 90°

09 Calcular "x"; el punto *"O"* es centro.



A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 15°
E) 10°

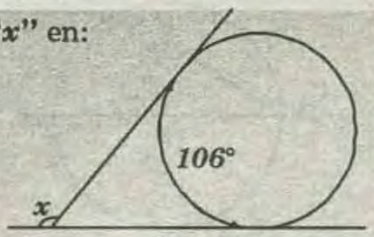
10 Calcular "x", el punto *"O"* es centro.



A) 30°
B) 80°
C) 60°
D) 50°
E) 70°

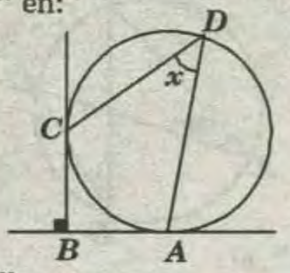
11 Calcular "x" en:

A) 60°
B) 54°
C) 53°
D) 50°
E) 106°



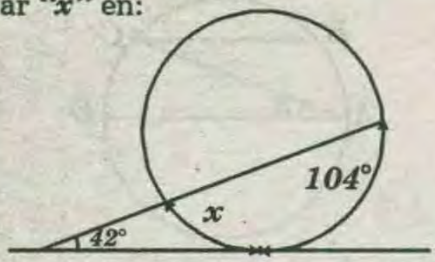
12 Calcular "x" en:

A) 25°
B) 30°
C) 45°
D) 35°
E) 50°



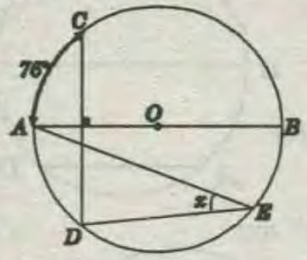
13 Calcular "x" en:

A) 24°
B) 20°
C) 22°
D) 12°
E) 26°



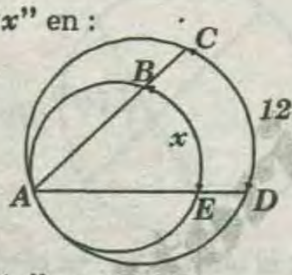
14 En la circunferencia de centro "O", calcular "x".

A) 38°
B) 36°
C) 42°
D) 32°
E) 34°



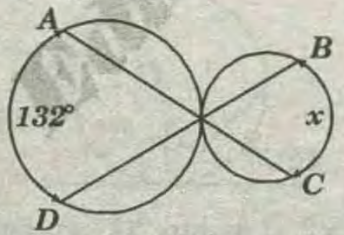
15 Calcular "x" en :

A) 132°
B) 120°
C) 124°
D) 62°
E) 60°



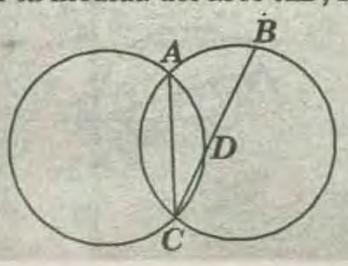
16 Calcular "x" en:

A) 66°
B) 134°
C) 130°
D) 132°
E) 142°



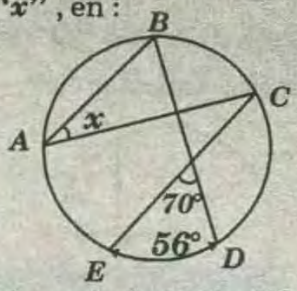
17 Encontrar la medida del arco AB, si:

A) 156°
B) 96°
C) 76°
D) 88°
E) 78°



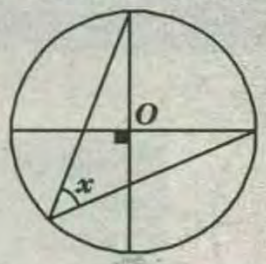
18 Encontrar "x" , en :

A) 44°
B) 40°
C) 42°
D) 41°
E) 45°



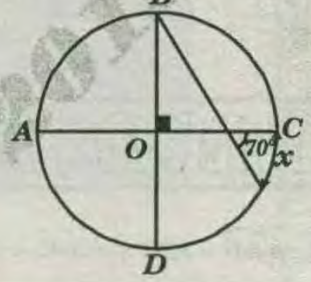
19 En la circunferencia de centro "O", calcular "x".

A) 30°
B) 60°
C) 45°
D) 25°
E) 40°



20 En la circunferencia de centro "O", calcular "x"

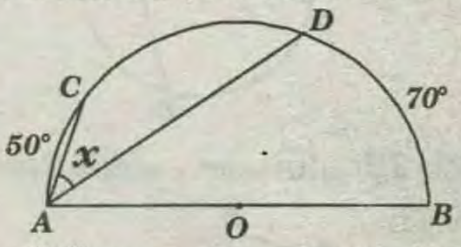
A) 30°
B) 50°
C) 40°
D) 60°
E) 45°



TAREA DOMICILIARIA

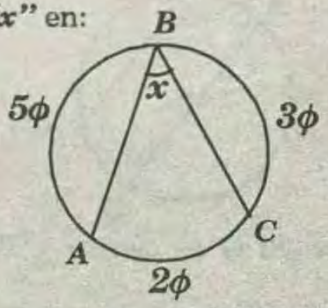
01 En la circunferencia , calcular el valor de "x".

A) 20°
B) 40°
C) 25°
D) 30°
E) 60°

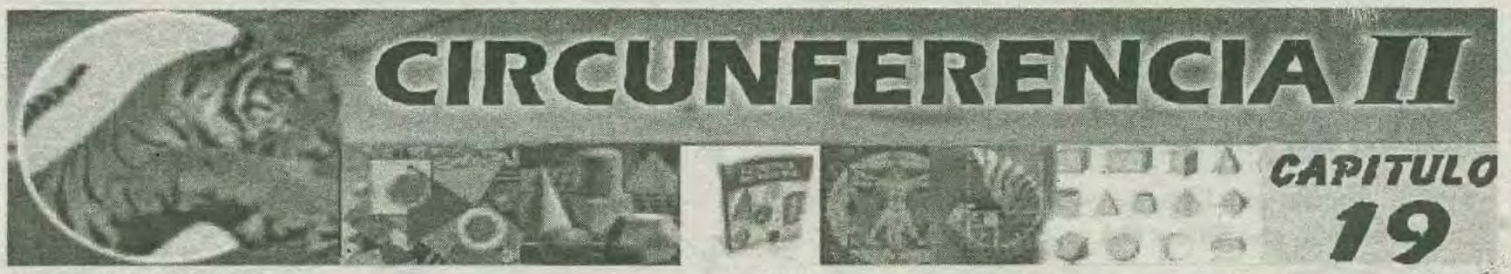


02 Calcular "x" en:

A) 50°
B) 42°
C) 34°
D) 40°
E) 36°



PRIMERA PRACTICA									CIRCUNFERENCIA
1) A	2)B	3) C	4)A	5)C	6)E	7)A	8)C	9)B	10)D
11)E	12)C	13)B	14)A	15)C	16)D	17)E	18)C	19)C	20)B
01)D	02)E								



CIRCUNFERENCIA II

CAPITULO 19

OBJETIVOS :

* Conocer y utilizar elementos geométricos asociados al estudio de la circunferencia y sus ángulos.

* Explorar intuitivamente la relación existente entre estos elementos.

* Conocer las relaciones entre la circunferencia y otras figuras planas.

INTRODUCCION :

Una ***circunferencia*** es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de otro fijo, llamado centro; esta distancia se denomina radio. Sólo posee longitud. Se distingue del círculo en que este es el lugar geométrico de los puntos contenidos en una circunferencia determinada, es decir, la circunferencia es el perímetro del círculo cuya superficie contiene.

La palabra circunferencia proviene del latín ***circumferenta*** que a su vez deriva de ***circumferre***, que significa llevar alrededor.

Durante mucho tiempo, se empleó el término círculo para designar tanto la superficie, como a la curva que lo delimita: la circunferencia. Actualmente, en idioma castellano, el círculo define la superficie, y a la curva se le llama circunferencia.

En castellano, se suele utilizar el término geométrico disco, asociado al concepto círculo, en textos de topología, una rama de las matemáticas. En cartografía se utiliza el término círculo como sinónimo de circunferencia, en expresiones como círculo polar ártico.

No ocurre lo mismo en otros idiomas. En inglés, ***circle*** expresa el concepto de circunferencia (curva cerrada plana equidistante del centro), mientras que ***circumference*** significa perímetro del círculo (la longitud de la circunferencia). Sin embargo, ***disk*** se asocia al concepto de círculo (superficie plana limitada por una circunferencia).

En términos coloquiales (no estrictamente matemáticos) el uso de círculo y circunferencia es indistinto en algunas zonas geográficas por lo arraigado que está en la tradición, no obstante se encuentra que circunferencia se asocia más frecuentemente con los conceptos de aro o anillo en tanto que círculo se asocia más frecuentemente con los conceptos de disco o plato.

Existen varios puntos, rectas y segmentos, singulares en la circunferencia:

* ***CENTRO***, el punto interior equidistante de todos los puntos de la circunferencia.

* ***RADIO*** , el segmento que une el centro con un punto de la circunferencia.

* ***DIÁMETRO***, el mayor segmento que une dos puntos de la circunferencia, y lógicamente, pasa por el centro.

* ***CUERDA***, el segmento que une dos puntos de la circunferencia; las cuerdas de longitud máxima son los diámetros.

* ***RECTA SECANTE***, la que corta a la circunferencia en dos puntos.

* ***RECTA TANGENTE***, la que toca a la circunferencia en un sólo punto.

* ***PUNTO DE TANGENCIA***, el de contacto de la tangente con la circunferencia.

*__ARCO__, segmento curvilíneo de puntos pertenecientes a la circunferencia;

* ***SEMICIRCUNFERENCIA***, cada uno de los dos arcos delimitados por los extremos de un diámetro.

Un punto en el plano puede ser:

* ***Exterior a la circunferencia***, si la distancia del centro al punto es mayor que la longitud del radio.

* ***Sobre la circunferencia***, si la distancia del centro al punto es igual a la longitud del radio.

* ***Interior a la circunferencia***, si la distancia del centro al punto es menor a la longitud del radio.

Una recta , respecto de una circunferencia, puede ser :

* ***EXTERIOR***, si no tienen ningún punto en común con ella y la distancia del centro a la recta es mayor que la longitud del radio.

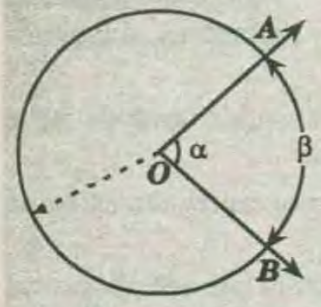
* ***TANGENTE***, si la toca en un punto (el punto de tangencia) y la distancia del centro a la recta es igual a la longitud del radio. Una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que une el punto de tangencia con el centro.

* ***SECANTE*** , si tiene dos puntos comunes, es decir, si la corta en dos puntos distintos y la distancia del centro a la recta es menor a la longitud del radio.

ÁNGULOS RELACIONADOS EN LA CIRCUNFERENCIA

I) ÁNGULO CENTRAL :

Es aquel ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia, sus lados OA y OB.

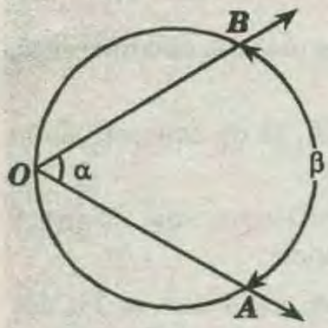


*$\sphericalangle AOB$: ángulo central

*Se cumple: $\alpha = \beta$

II) ÁNGULO INSCRITO :

Es aquel cuyo vértice es un punto de la circunferencia, sus lados contienen cada uno una cuerda y su medida es igual a la mitad de la medida del arco que subtiende sus lados.

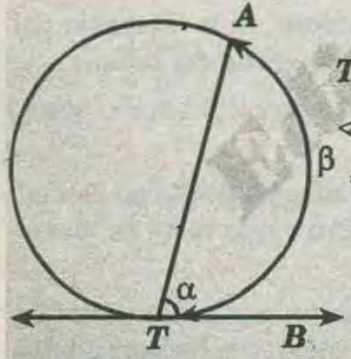


* $\sphericalangle AOB$: ángulo inscrito

* Se cumple: $\alpha = \frac{\beta}{2}$

III) ÁNGULO SEMI-INSCRITO :

Su vértice se encuentra en la circunferencia, un lado es una cuerda y su medida es igual a la mitad a la medida del arco que subtiene sus lados.



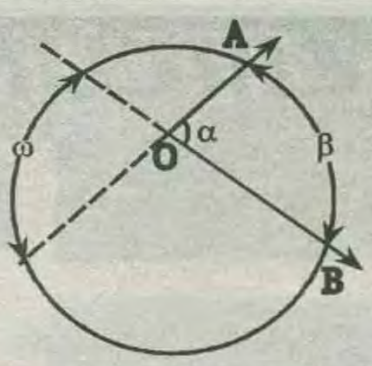
T: punto de la tangencia

$\sphericalangle ATB$: ángulo semi-inscrito

* Se cumple : $\alpha = \frac{\beta}{2}$

IV) ÁNGULO INTERIOR :

Su vértice se encuentra en el interior de la circunferencia, esta formado por dos secantes que contienen dos cuerdas que se cortan y su medida es igual a la semi suma de los arcos interceptados por el y por su opuesto por el vértice.



O: punto interior

$\sphericalangle AOB$: ángulo interior

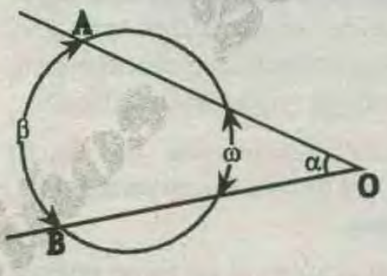
Se cumple: $\alpha = \frac{\beta + \omega}{2}$

V) ÁNGULO EXTERIOR :

Su vértice se encuentra en el exterior de la circunferencia, pudiendo ser sus lados dos secantes, una secante y una tangente o dos tangentes. En este último caso se llama ángulo circunscrito.

La medida del ángulo exterior es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos que subtienden sus lados.

A) Lados Secantes :

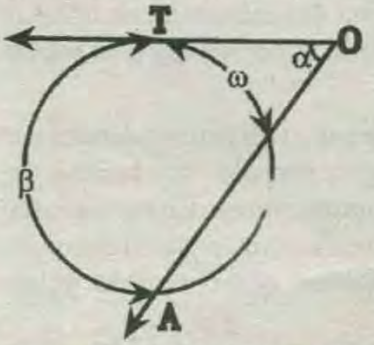


O: punto interior

$\sphericalangle AOB$: ángulo exterior

$\alpha = \frac{\beta - \omega}{2}$

B) Lados Tangente y Secante



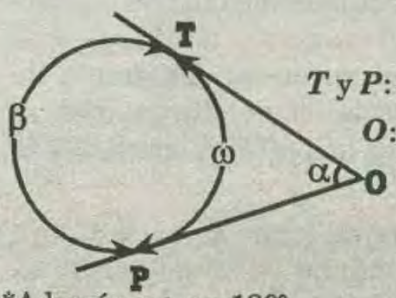
T: punto de tangencia

O: punto exterior

$\sphericalangle AOT$: ángulo exterior

$\alpha = \frac{\beta - \omega}{2}$

C) Lados Tangentes (ángulo circunscrito)



T y P: son puntos de tangencia

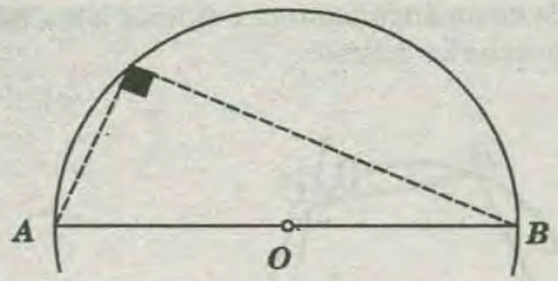
O: punto exterior.

$\alpha = \frac{\beta - \omega}{2}$

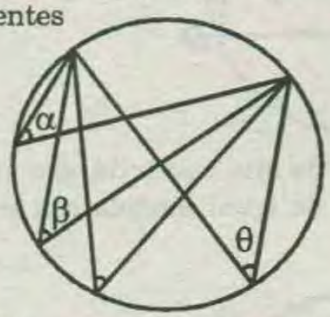
*Además $\alpha + \omega = 180°$

PROPIEDADES ADICIONALES

1) Un ángulo cualquiera inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

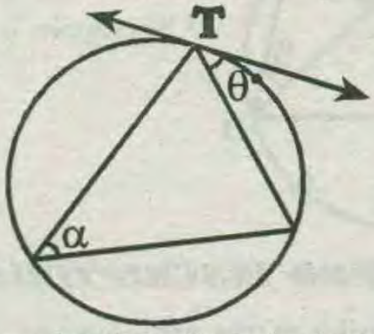


2) Todos los ángulos inscritos en el mismo arco son congruentes



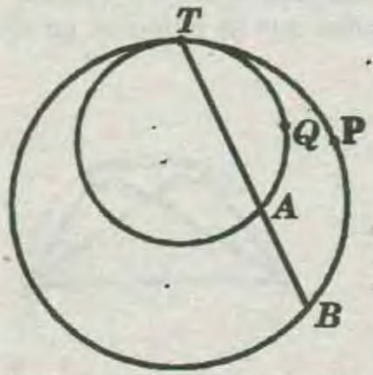
$\alpha = \beta = ... = \theta$

3) Si "*T*" es punto de tangencia:



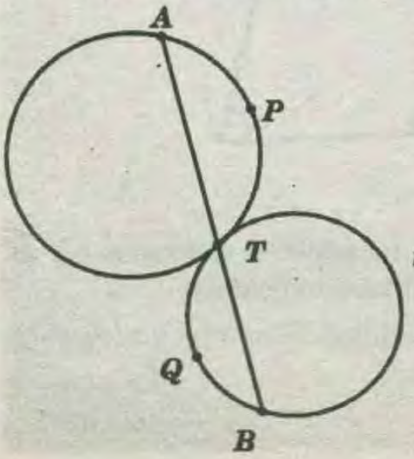
$\alpha = \theta$

4) Para dos circunferencias tangentes interiores.



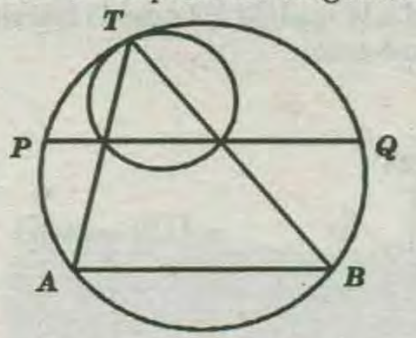
$m\widehat{TPB} = m\widehat{TQA}$

5) Para dos circunferencias tangentes exteriores.



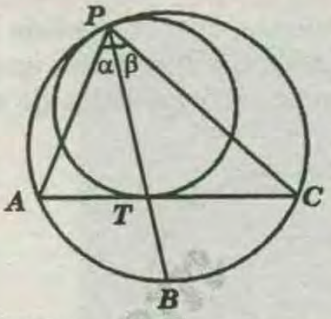
$m\widehat{APT} = m\widehat{TQB}$

6) Si "*T*" es punto de tangencia.



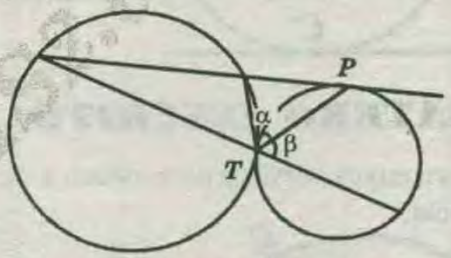
$\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$

7) Si "*P*" y "*T*" son puntos de tangencia.



$\alpha = \beta$

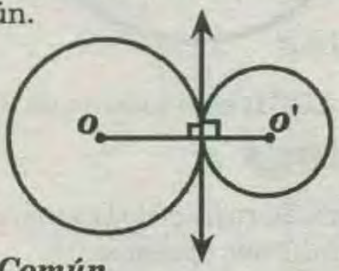
8) Si "*P*" y "*T*" son puntos de tangencia.



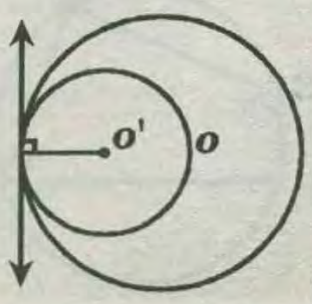
$\alpha = \beta$

RECOMENDACIONES PARA RESOLVER PROBLEMAS DE ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

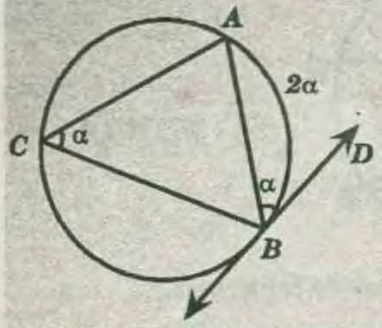
1) Se tiene dos circunferencia tangentes interiormente o tangentes exteriormente, por lo general los datos están en una circunferencia y la incógnita están en la otra, trace en estos casos por el punto de contacto una tangente común.



L: Tangente Común

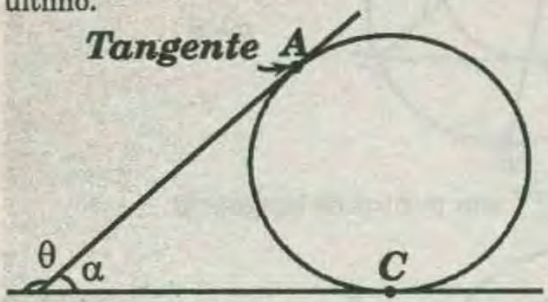


2) Debemos tener en cuanta que la medida del ángulo semi–inscrito es igual a la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco.



$m\widehat{ACB}=m\widehat{ABD}$

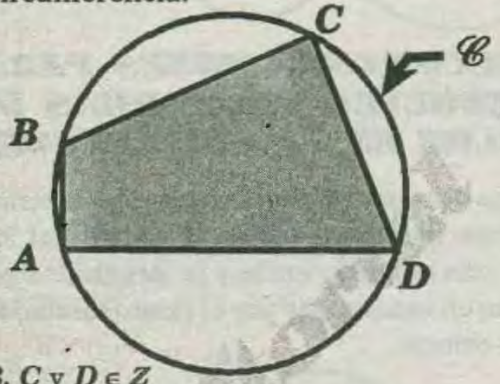
3) Debemos tener en cuenta que la medida del ángulo adyacente a un ángulo circunscrito es igual a la medida del arco que subtiende los lados de este ultimo.



$\theta=m\widehat{AC}$

CUADRILÁTERO INSCRITO

Es aquel cuadrilátero cuyos vértices pertenecen a una misma circunferencia.



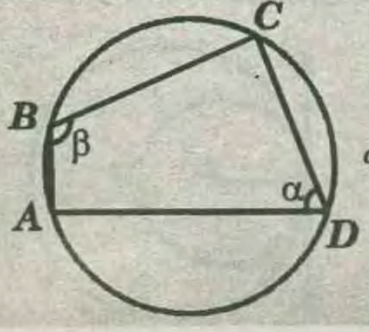
* Si A, B, C y $D \in Z$

$\Rightarrow$ ▱ ABCD está inscrito en C.

PROPIEDADES :

1) En todo cuadrilátero inscrito la suma de las medidas de dos ángulos internos opuestos.

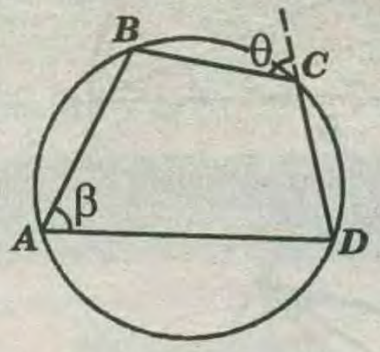
Se cumple:



$\alpha+\beta=180°$

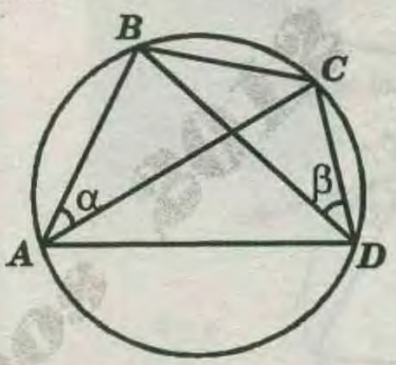
La medida de un ángulo interior es igual a la medida del ángulo exterior opuesto.

Es decir



$\beta=\theta$

3) Las diagonales de un cuadrilátero inscrito determinan ángulos de igual medida con los lados opuestos.

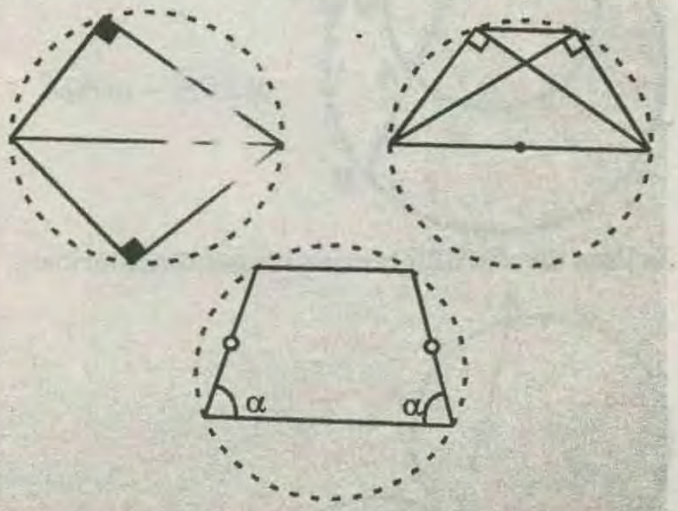


* Se cumple: $\alpha=\beta$

CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE

Es el que se puede inscribir en una circunferencia, para que esto suceda, dicho cuadrilátero deberá cumplir cualquiera de las propiedades que se cumplen en el cuadrilátero inscrito.

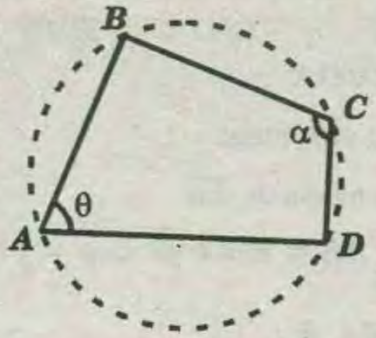
EJEMPLOS:



* Un cuadrilátero será inscriptible si cumple por lo menos una de las siguientes condiciones:

1) Que la suma de las medidas de los ángulos internos opuestos sea *180°*.

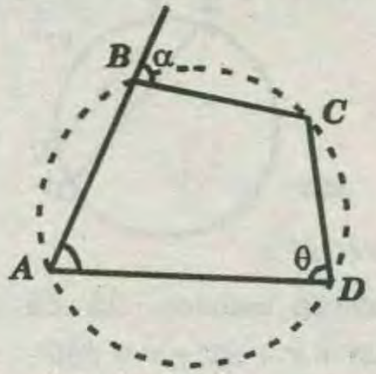
Es decir:



Si, $\theta+\alpha=180°$, entonces el $\square$ *ABCD* es inscriptible.

2) Que la medida de un ángulo interior sea igual a la medida del ángulo exterior opuesto.

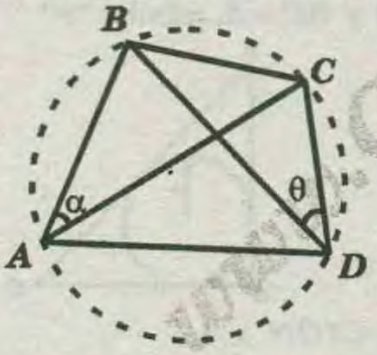
Es decir:



Si, $\theta=\alpha$, entonces el $\square$ *ABCD* es inscriptible.

Que las medidas de los ángulos determinados por las diagonales con los lados opuestos sean de igual medida.

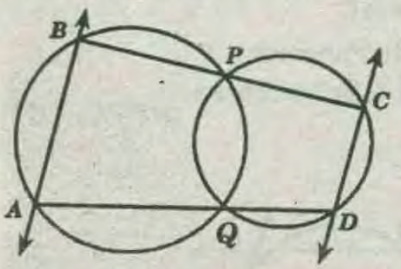
Es decir :



Si, $\alpha=\theta$, entonces el $\square$ *ABCD* es inscriptible.

PROPIEDAD :

Para dos circunferencia secantes



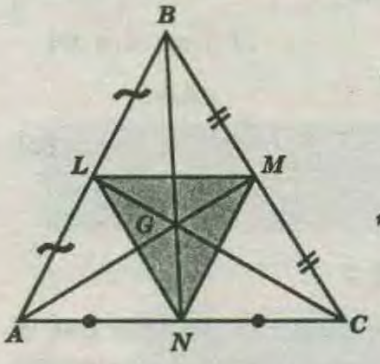
$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

TRIÁNGULO MEDIANO COMPLEMENTARIO

El triángulo mediano o complementario se obtiene al unir los puntos medios de los lados de un triángulo.

El baricentro de un triángulo es a la vez baricentro de su triángulo mediano.

El circuncentro de un triángulo es a la vez ortocentro de su triangulo mediano.

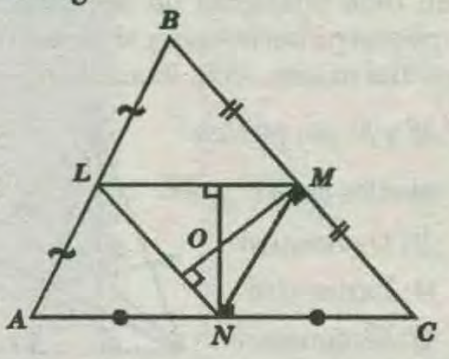


* $\triangle MNL$:Δmediano complementario

* **G**: Baricentro del $\triangle MNL$

* **O**: Circuncentro del $\triangle ABC$

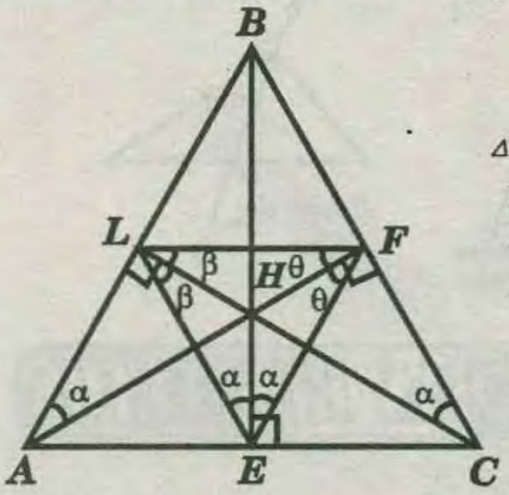
* **O**: Ortocentro del $\triangle MNL$



TRIÁNGULO ÓRTICO O PEDAL

El triángulo órtico o pedal se obtiene al unir los pies de las alturas de un triángulo oblicuángulo.

El ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo pedal y cada vértice del triángulo acutángulo es excentro del triangulo pedal.



$\triangle LFE$: $\triangle$ Ortico o pedal

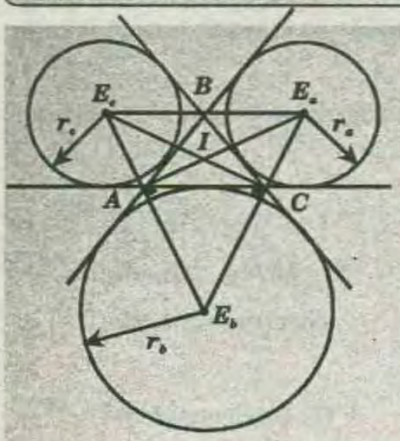
H: Es incentro del $\triangle LFE$

Observación: *A*, *B* y *C* son excentros del triángulo *LFE*

TRIANGULO EX – INCENTRAL :

El triángulo ex – incentral se determina al unir los excentros de un triángulo.

El incentro de un triángulo es a la vez ortocentro de su triángulo ex – incentral



$\triangle E_aE_bE_c$:

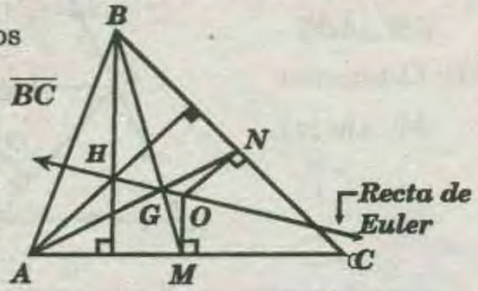
$\triangle$Ex – incentral

I: Incentro del $\triangle ABC$

I: Ortocentro del $\triangle E_aE_bE_c$

RECTA DE EULER :

En todo triangulo no equilátero se cumple que el ortocentro, baricentro y el circucentro están contenidos en una misma recta llamada la Recta de Euler.



* *M* y *N* son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$

H: Ortocentro

G: Baricentro

O: Circucentro

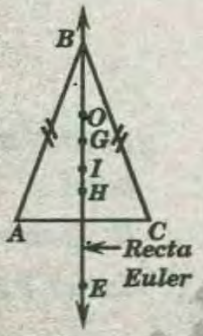
* Se cumple: $HG = 2(GO)$

$HB = 2(OM)$

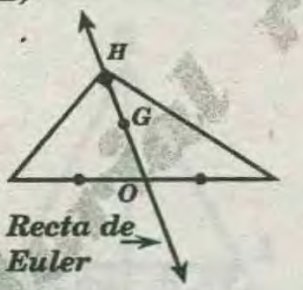
$HA = 2(ON)$

OBSERVACION :

A) Si: $AB = BC$



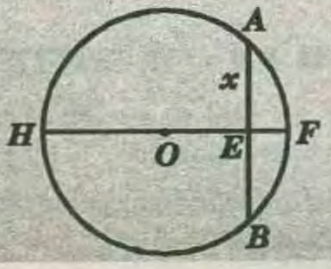
B)



PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Si : $\overline{HF} \perp \overline{AB}$ y $AB = 22$, calcular *"x"*



A)9 B)10 C)11 D)12 E) 22

RESOLUCIÓN :

* Como $\overline{OF} \perp \overline{AB}$, luego :

"E" es punto medio de $\overline{AB}$

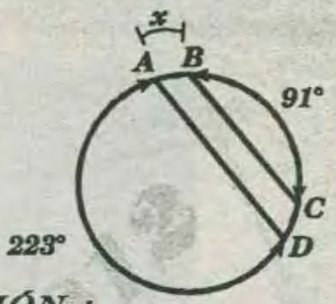
* Entonces : $AE = EB = x \Rightarrow x = 11$

RPTA: "C"

PROBLEMA 2 :

Si : $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, calcular *"x"*.

A) 37°
B) 31°
C) 23°
D) 19°
E) 13°



RESOLUCIÓN :

* Dado que $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, entonces : $\widehat{AB} = \widehat{CD} = x$

* Luego : $223° + x + 91° + x = 360°$

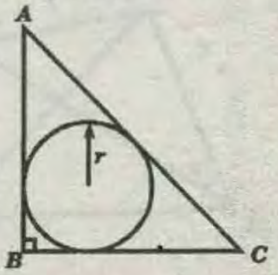
$\Rightarrow 2x = 46° \Rightarrow x = 23°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

Si : $AB = 4$ y $BC = 3$, calcular *"r"*

A) 2
B) 1
C) 3
D) 4
E) 5



RESOLUCIÓN :

* Por el teorema de Pitágoras en el $\triangle ABC$:

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\Rightarrow 4^2 + 3^2 = AC^2$

$\Rightarrow 5 = AC$

* Ahora por el teorema de Poncelet :

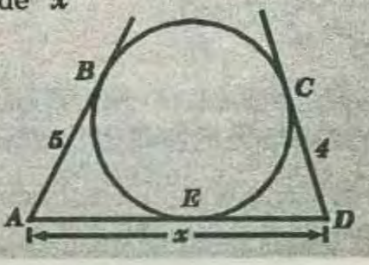
$4 + 3 = 5 + 2r \Rightarrow 1 = r$

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

Hallar el valor de *"x"*

A) 8
B) 7
C) 9
D) 6
E) 11



RESOLUCIÓN :

* Considerando el teorema de las tangentes , se obtendrá que : $AB = AE = 5$

$CD = DE = 4$

* Luego : $x = AE + ED$

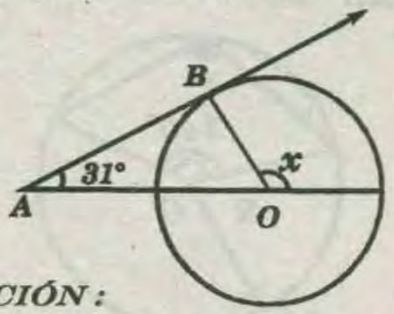
$\Rightarrow x = 5 + 4 = 9$

RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

Hallar el ángulo ***"x"*** en la siguiente figura:

A)98°
B)105°
C)120°
D)132°
E)121°



RESOLUCIÓN :

* Como el radio trazado respecto al punto de tangencia, es perpendicular , es decir : $OB \perp AB$; entonces :

$31° + 90° = x$.... (por ángulo exterior)

$\Rightarrow 121° = x$

RPTA : "E"

PROBLEMA 6 :

En una circunferencia de radio ***13 m***, se tiene una cuerda ***AB*** que mide ***24*** m. Hallar la sagita de $\overline{AB}$.

A) 5m ***B) 8*** ***C) 7*** ***D) 6*** ***E)4***

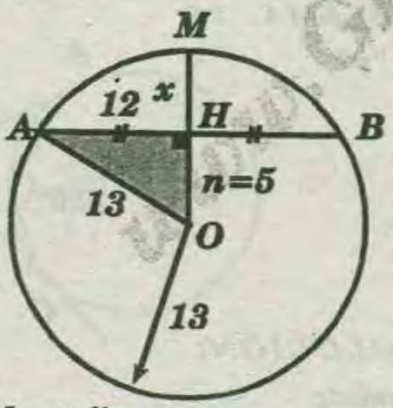
RESOLUCIÓN :

* Graficando :

* Por , el teorema de Pitágoras en el $\triangle AHO$:

$n^2 + 12^2 = 13^2$

$\Rightarrow n = 5$.



* Del gráfico : OM = radio

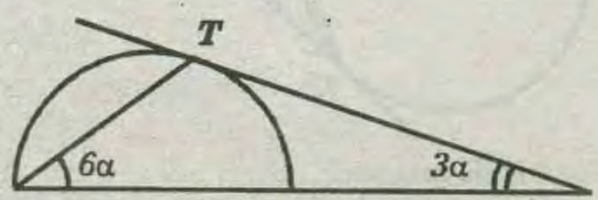
$\Rightarrow x + 5 = 13 \Rightarrow x = 8$

RPTA : "B"

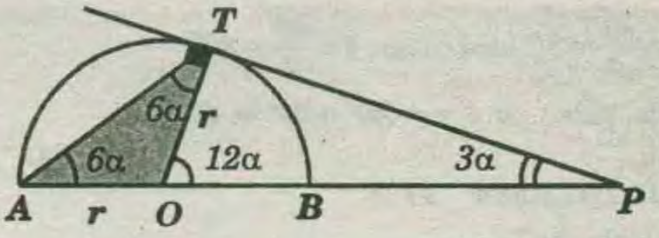
PROBLEMA 7 :

Calcular " α ", si ***"O"*** es centro .

A) 5°
B) 6°
C)12°
D)10°
E)20°



RESOLUCIÓN :



* Del $\triangle PTO$:

$12\alpha + 3\alpha = 90°$

$\Rightarrow 15\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 6°$

RPTA: "B"

PROBLEMA 8 :

En un triángulo rectángulo sus catetos miden ***15m*** y ***20***m. Hallar su inradio.

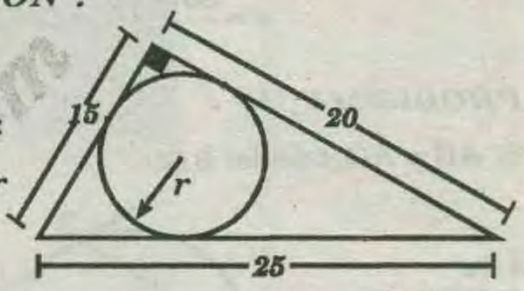
A) 5 ***B) 5*** ***C) 6*** ***D) 8*** ***E) 12***

RESOLUCIÓN :

* Por Poncelet :

$15 + 20 = 25 + 2r$

$\Rightarrow 5 = r$

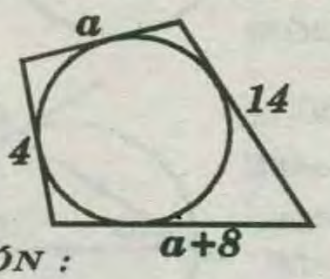


RPTA : "B"

PROBLEMA 9:

En la figura mostrada, hallar el valor ***"a"***.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6



RESOLUCIÓN :

* Por Pithot :

$a + a + 8 = 4 + 14$

$\Rightarrow 2a = 10$

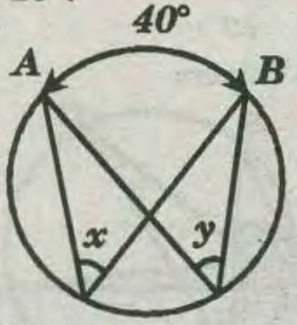
$\Rightarrow a = 5$

RPTA: "D"

PROBLEMA 10 :

Calcular: ***"x+y"***

A) 20°
B) 30°
C) 15°
D) 40°
E) 25°



RESOLUCIÓN :

* por la propiedad del ángulo inscrito, se obtendrá que:

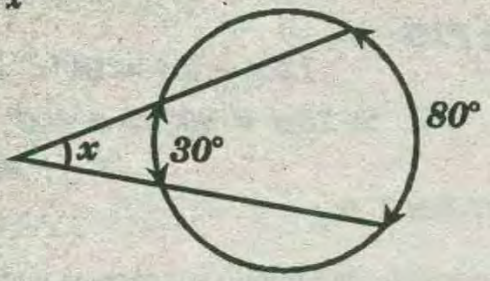
$x=\frac{40^\circ}{2}=20^\circ$, así como: $y=\frac{40^\circ}{2}=20^\circ$

* Se pide : $x+y=20^\circ+20^\circ=40^\circ$

RPTA: "D"

PROBLEMA 11 :

Calcular "x"



A) 15°
B) 25°
C) 30°
D) 40°
E) 35°

RESOLUCIÓN:

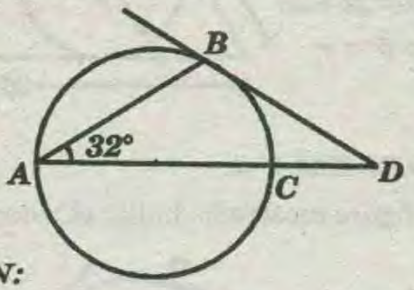
* Por la propiedad del ángulo exterior, se obtendrá:

$$x=\frac{80^\circ-30^\circ}{2}=25^\circ$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 12 :

Si: $AB = AC$, calcular $B\widehat{D}C$

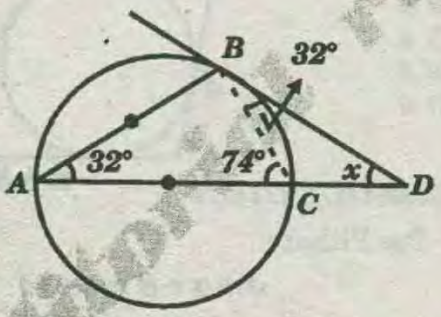


A) 24°
B) 32°
C) 42°
D) 38°
E) 29°

RESOLUCIÓN:

* Trazando $\overline{BC}$, se obtiene el $\triangle ABC$ isósceles, lúego:

$B = C = 74^\circ$



* Además: $\widehat{BC}=64^\circ$

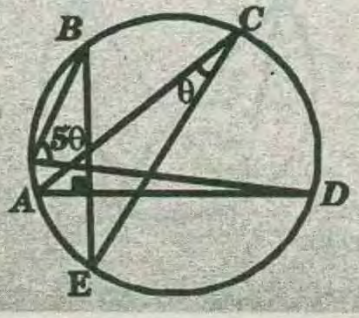
* Ahora por ángulo semi-inscrito: $D\widehat{B}C = 32^\circ$

$\Rightarrow x + 32^\circ = 74^\circ \Rightarrow x = 42^\circ$

RPTA: "C"

PROBLEMA 13 :

Calcular "θ" en la figura.



A) 10°
B) 15°
C) 12°
D) 24°
E) 18°

RESOLUCIÓN:

* Por ángulo inscrito, se obtendrá:

$\widehat{BD}=10\theta$ y $\widehat{AE}=2\theta$

* Ahora por ángulo interior:

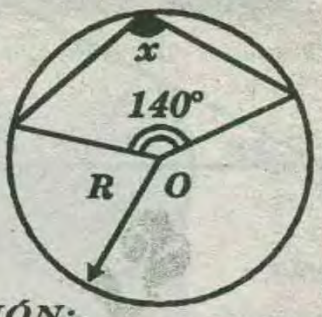
$$90^\circ=\frac{\widehat{BD}+\widehat{AE}}{2}\Rightarrow 90^\circ=\frac{10\theta+2\theta}{2}$$

$$\Rightarrow 90^\circ=6\theta\Rightarrow 15^\circ=\theta$$

RPTA: "B"

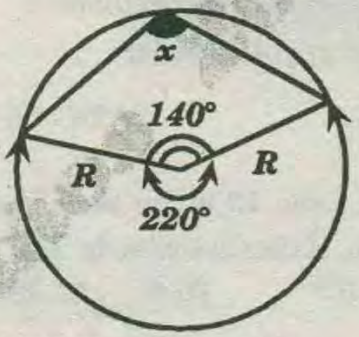
PROBLEMA 14 :

Hallar "x"



A) 120°
B) 100°
C) 110°
D) 105°
E) 140°

RESOLUCIÓN:



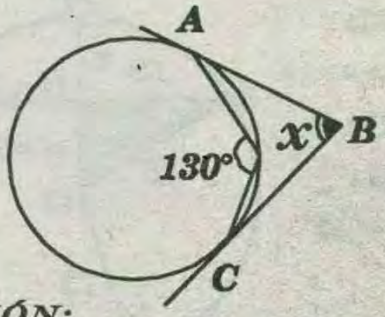
* Por ángulo inscrito:

$x=\frac{220^\circ}{2}\Rightarrow x=110^\circ$

RPTA: "C"

PROBLEMA 15:

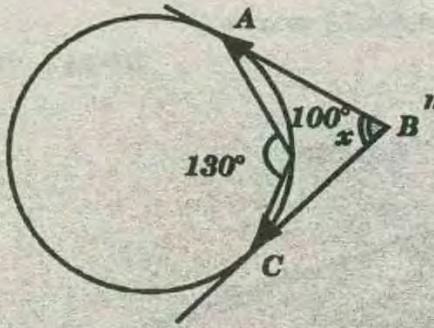
Hallar "x"



A) 60°
B) 80°
C) 90°
D) 100°
E) 110°

RESOLUCIÓN:

*Del grafico:



$m\widehat{AC}=360^\circ-260^\circ$

$\Rightarrow m\widehat{AC}=100^\circ$

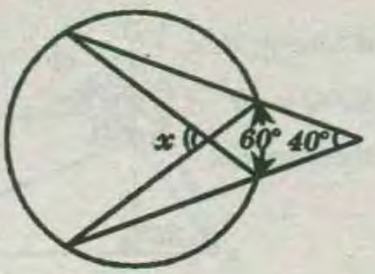
*Por ángulo exterior:

$x+100^\circ=180^\circ\Rightarrow x=80^\circ$

RPTA: "B"

PROBLEMA 16 :

Hallar "x"



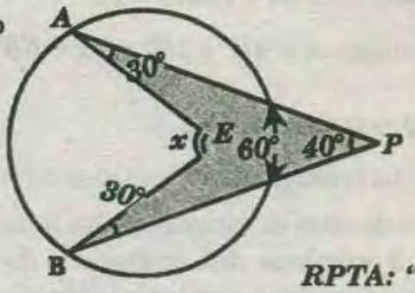
A) 80°
B) 90°
C) 100°
D) 75°
E) 110°

RESOLUCIÓN:

* En el cuadrilátero sombreado:

$x = 30° + 30° + 40°$

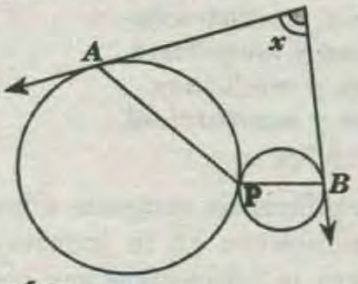
$\Rightarrow x = 100°$



RPTA: "C"

PROBLEMA 17 :

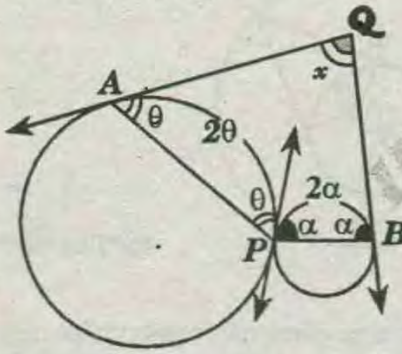
Hallar "x", si: $m\sphericalangle APB = 140°$



A) 60°
B) 70°
C) 80°
D) 90°
E) 75°

RESOLUCIÓN:

* En el $\Diamond APBQ$:



$x + \theta + \theta + \alpha + \alpha = 360°$

$\Rightarrow x + 2\theta + 2\alpha = 360°$

$\Rightarrow x + 2(\theta + \alpha) = 360°$

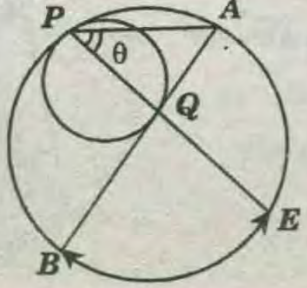
$\Rightarrow x + 2(140°) = 360°$

$\Rightarrow x = 80°$

RPTA: "C"

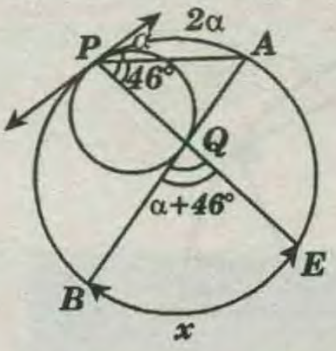
PROBLEMA 18 :

Si: $\theta = 46°$, hallar $m\widehat{BE}$. Además "P" y "Q" son puntos de tangencia.



A) 78°
B) 82°
C) 64°
D) 92°
E) 44°

RESOLUCIÓN:



* Por ángulo interior:

$$\alpha + 46° = \frac{2\alpha + x}{2}$$

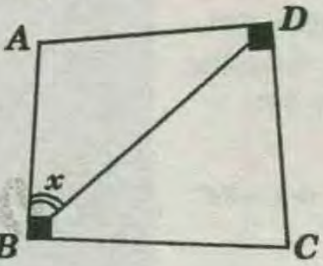
$\Rightarrow 2\alpha + 92° = 2\alpha + x$

$\Rightarrow 92° = x$

RPTA: "D"

PROBLEMA 19 :

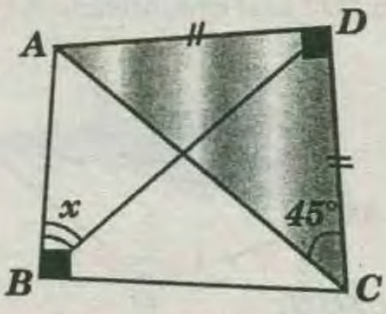
Si: $AD = DC$, hallar "x"



A) 25°
B) 45°
C) 30°
D) 60°
E) 90°

RESOLUCIÓN:

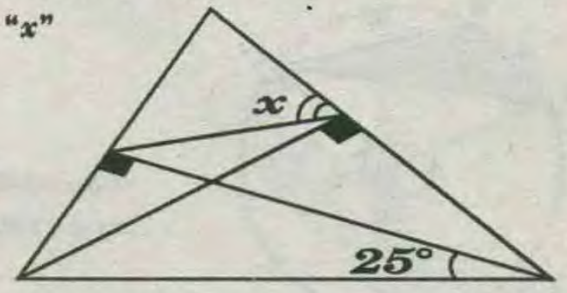
* En el $\square_{ABCD}$ inscriptible: $x = 45°$



RPTA: "B"

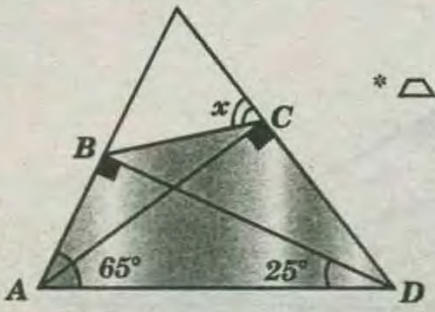
PROBLEMA 20 :

Hallar "x"



A) 60°
B) 20°
C) 65°
D) 35°
E) 80°

RESOLUCIÓN:



* $\square_{ABCD}$ es inscriptible.

$\Rightarrow x = 65°$

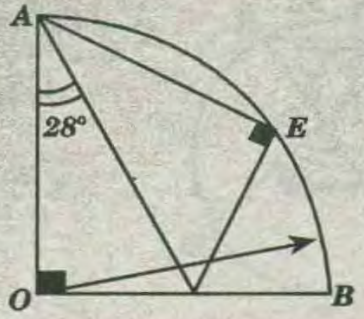
RPTA: "C"

WWW.GRATIS2.COM

PROBLEMA 21 :

Hallar: $m\widehat{EB}$

A) 24°
B) 35°
C) 64°
D) 34°
E) 81°



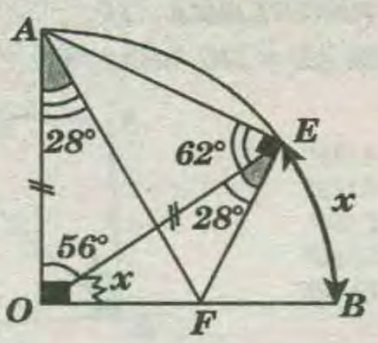
RESOLUCIÓ N:

*$\triangle_{AOFE}$ es inscriptible:
$\Rightarrow m\sphericalangle OEF = 28°$

* En el Δ_{AOE} isósceles:
$m\sphericalangle AOE = 56°$

* Luego:

$x + 56° = 90° \Rightarrow x = 34°$

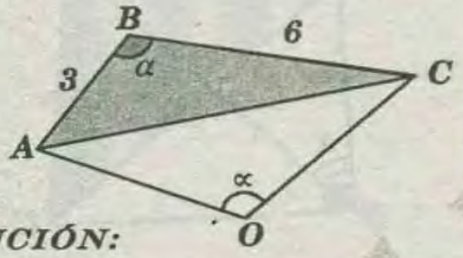


RPTA: "D"

PROBLEMA 22 :

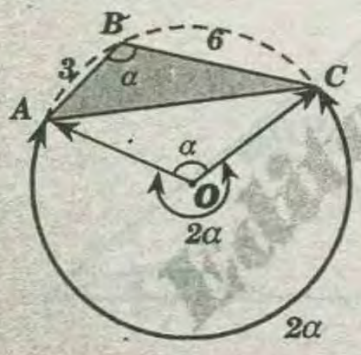
Hallar "α", si "O" es el circuncentro del ΔABC.

A) 110°
B) 120°
C) 98°
D) 135°
E) 142°



RESOLUCIÓN:

*Del gráfico:



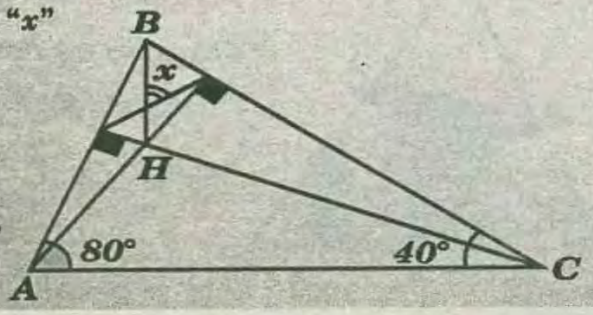
$3\alpha = 360°$
$\Rightarrow \alpha = 120°$

RPTA: "B"

PROBLEMA 23 :

Hallar "x"

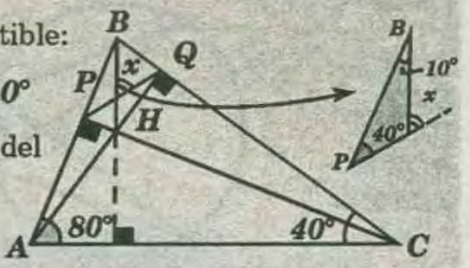
A) 40°
B) 30°
C) 50°
D) 60°
E) 45°



RESOLUCIÓN :

*$\triangle_{APQC}$ es inscriptible:
$\Rightarrow m\sphericalangle BPQ = 40°$

*"H" es ortocentro del



ΔABC: $\Rightarrow m\sphericalangle ABH = 10°$

* Luego: $x = 40° + 10° \Rightarrow x = 50°$

RPTA: "C"

PROBLEMA 24 :

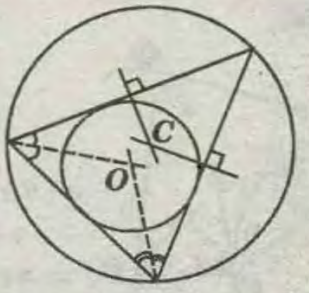
En un triángulo se traza dos circunferencias.

Una de ellas es tangente a los 3 lados y la otra pasa por los 3 vértices del triángulo. Los centros de tales circunferencias, son las intersecciones respectivamente de:

A) Mediatrices y medianas.
B) Medianas y mediatrices.
C) Mediatrices y bisectrices.
D) Bisectrices y medianas.
E) Bisectrices y mediatrices.

RESOLUCIÓN :

* Para la circunferencia tangente a los tres lados el centro se encuentra en la intersección de las bisectrices.Para la circunferencia circunscrita al triángulo el centro se encuentra en la intersección de las mediatrices.



RPTA: "E"

PROBLEMA 25 :

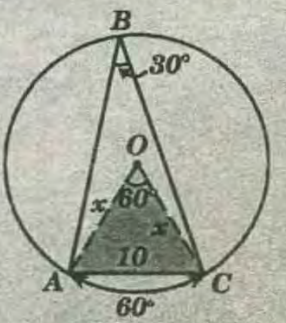
A, B y C son puntos de una circunferencia tales que AC es igual a 10m y el ángulo ABC = 30°. Hallar el radio de la circunferencia

A) 5 m B) 10 m C) 20 m D) 25m E) N.A.

RESOLUCIÓN :

*Se sabe que $m\widehat{AC} = 60°$

*Luego el ΔAOC es equilátero: $\Rightarrow x = 10$



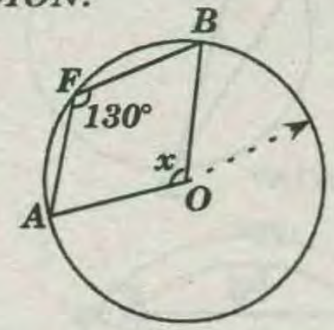
RPTA: "B"

PROBLEMA 26 :

En una circunferencia de centro O se trazan los radios OA y OB, sobre el menor arco AB se ubica el punto F tal que el ángulo AFB mide $130°$, calcular la medida del ángulo AOB.

A) 80° B) 100° C) 50° D) 65° E) 70°

RESOLUCIÓN:



* Piden: x

* De la figura: $x = m\widehat{AFB}$.....(∢ central)

* Se observa:

$$m\widehat{AB} = 2(m\sphericalangle AFB) = 260°....(\sphericalangle \text{ inscrito})$$

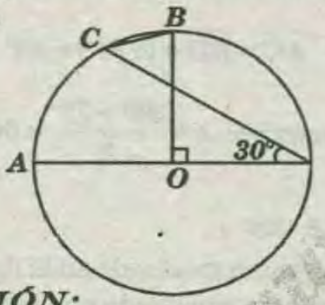
* Luego: $m\widehat{AFB} = 100° \Rightarrow x = 100°$

RPTA: "B"

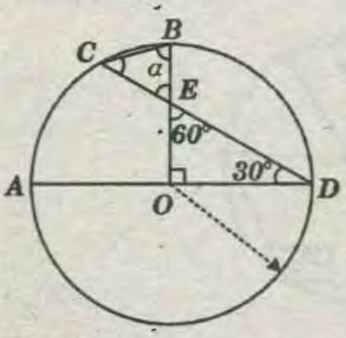
PROBLEMA 27 :

Hallar el ángulo CBO, si O es centro de la circunferencia.

A) 75°
B) 50°
C) 65°
D) 40°
E) 70°



RESOLUCIÓN:



* Del gráfico, piden: α

* De la figura:

$$m\sphericalangle BEC = m\sphericalangle OED = 60°$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle BCE = \frac{m\widehat{BD}}{2} = 45°$$

* $\triangle EBC$: (suma de las medidas de ángulos internos)

$$\alpha + 60° + 45° = 180° \Rightarrow \alpha = 75°$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 28 :

Un cuadrilátero inscrito en una circunferencia tiene tres lados iguales, cada uno de los cuales subtiende un arco de $80°$. ¿Cuánto mide el mayor de los ángulos internos del cuadrilátero?

A) 116° B) 100° C) 90° D) 150° E) 200°

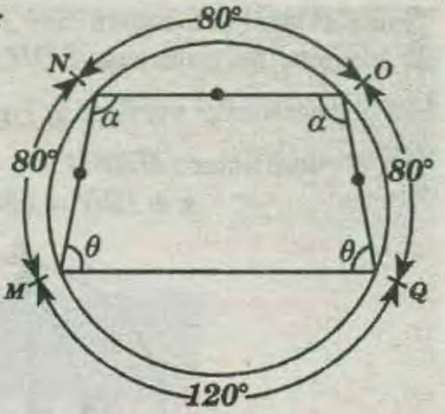
RESOLUCIÓN :

*De la figura:

$$m\widehat{MQ} = 120°$$

$$m\sphericalangle\theta = \frac{m\widehat{NQ}}{2} = 80°$$

$$m\sphericalangle\alpha = \frac{m\widehat{OM}}{2} = 100°$$



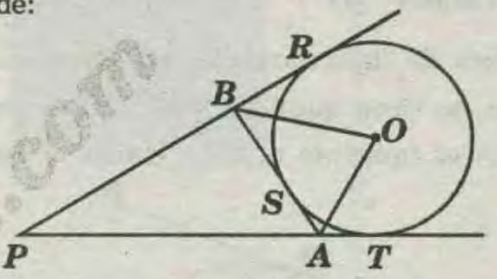
*Se pide el mayor de los ángulos internos, que es $100°$.

RPTA: "B"

PROBLEMA 29 :

El triangulo PAB esta formado por tres tangentes a la circunferencia como indica la figura: entonces el ángulo AOB mide:

A) 45°
B) 50°
C) 55°
D) 60°
E) 70°

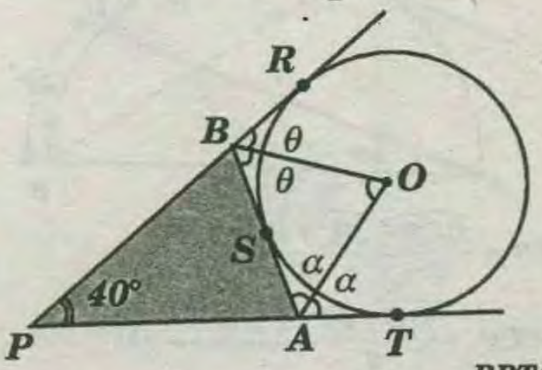


RESOLUCIÓN :

* De los datos, se deduce que $\overline{BO}$ y $\overline{AO}$ son bisectrices exteriores del $\triangle PBA$

* Por propiedad: $A\widehat{O}B = 90° - \frac{\widehat{P}}{2}$

$$\Rightarrow AOB = 90° - \frac{40°}{2} = 70°$$



RPTA: "E"

PROBLEMA 30 :

Un triángulo ABC esta inscrito en un círculo. Se trazan las alturas $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$, que se cortan en D.

Si $A\widehat{D}C = 125°$, ¿cuánto mide el triángulo $A\widehat{B}E$?.

A) 70° B) 50° C) 76° D) 55° E) 60°

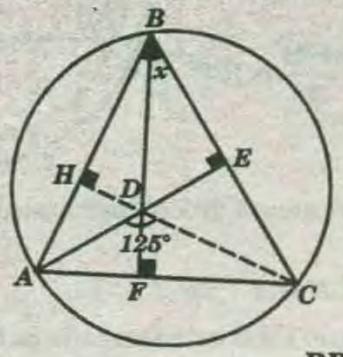
RESOLUCIÓN:

*Como D es el ortocentro del $\triangle ABC$, dado que AE y BF son alturas, entonces CDH también es altura.

* Por opuestos del vértice: $H\hat{D}E = A\hat{D}C = 125°$

* En el cuadrilátero $HBED$:

$$x + 125° = 180° \Rightarrow x = 55°$$

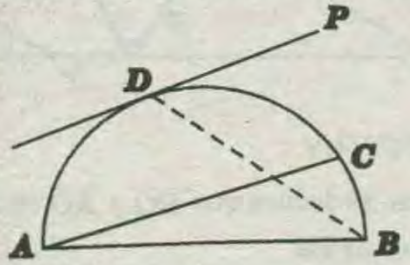


RPTA: "D"

PROBLEMA 31 :

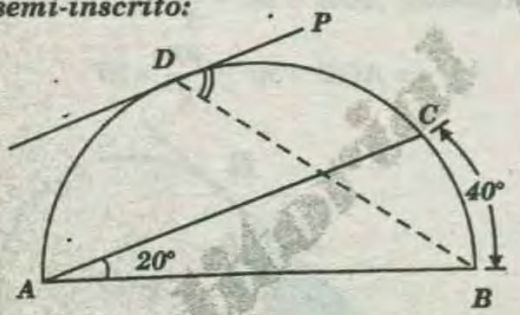
En un arco de circunferencia $\overset{\frown}{AB}$, donde $\overline{AB}$ es el diámetro, se tiene que $CAB = 20°$, $\overline{DP}$ es paralelo a $\overline{AC}$ y $\overline{DP}$ es tangente al arco. Hallar el ángulo del PDB.

A) 45°
B) 55°
C) 25°
D) 65°
E) 35°



RESOLUCIÓN :

*Por $\sphericalangle$ semi-inscrito:



$$m\sphericalangle PDB = \frac{\overset{\frown}{DCB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{CB}}{2}$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle PDB = \frac{\overset{\frown}{DC} + 40°}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Además, como $\overline{DP}$ es tangente paralela a $\overline{AC}$:

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DC}$$

*También: $\overset{\frown}{ADCB} = 180° \Rightarrow \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} = 140°$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DC} = 70°$$

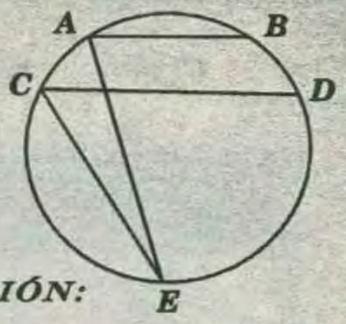
* En (I): $m\sphericalangle PDB = \frac{70° + 40°}{2} = 55$

RPTA: "B"

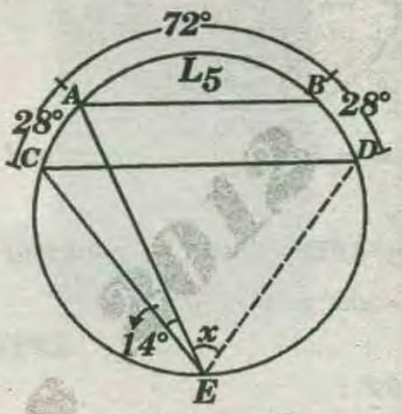
PROBLEMA 32 :

En la figura se tiene $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $A\hat{E}C = 14°$ y $\overline{AB}$ es el lado del pentágono regular inscrito. Hallar el ángulo AED.

A) 39.5°
B) 43°
C) 50°
D) 32°
E) F.D



RESOLUCIÓN:



* Como $AB = L_5$, luego : $\overset{\frown}{AB} = 72°$

* De la figura: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} = 2(14°) = 28°$

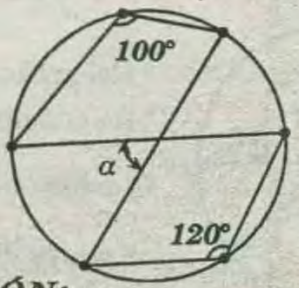
* Por ángulo inscrito: $x = \frac{28° + 72°}{2} = 50°$

RPTA: "C"

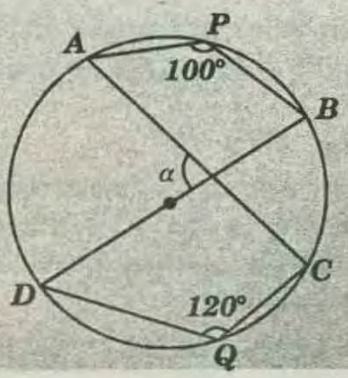
PROBLEMA 33 :

Considere el diagrama mostrado en la figura. Entonces, el valor del ángulo α mostrado en el diseño, vale:

A) 40°
B) 50°
C) 55°
D) 11°
E) 120°



RESOLUCIÓN:



* Se puede observar que el arco:

$A\hat{P}B = 160°$; $D\hat{Q}C = 120°$

$\overset{\frown}{BC} = 180° - 120° = 60°$ .....(I)

$\overset{\frown}{AD} = 180° - 160° = 20°$ .....(II)

* Finalmente: $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{2}$

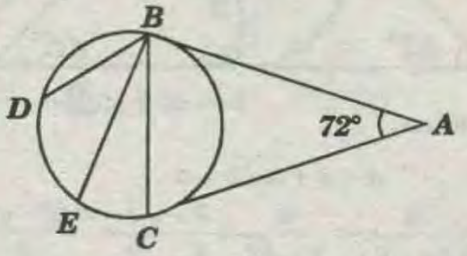
* Remplazando: $\alpha = \dfrac{20° + 60°}{2} = 40°$

RPTA: "A"

PROBLEMA 34 :

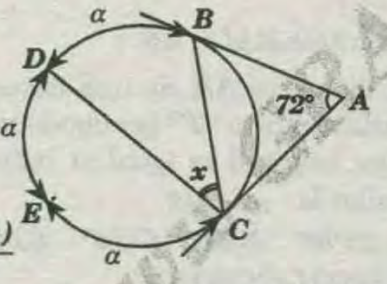
En la siguiente figura, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son tangentes a la circunferencia. Si $B\hat{A}C = 72°$ y los arcos $\overset{\frown}{BD}$, $\overset{\frown}{DE}$ y $\overset{\frown}{EC}$ son iguales, hallar el ángulo DCB.

A) 28°
B) 36°
C) 40°
D) 42°
E) 48°



RESOLUCIÓN :

* Se tiene:



$\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BDEC} - \overset{\frown}{BC}}{2}$

$\Rightarrow 72° = \dfrac{3\alpha - (360° - 3\alpha)}{2}$

$144° = 6\alpha - 360° \Rightarrow \alpha = 84°$

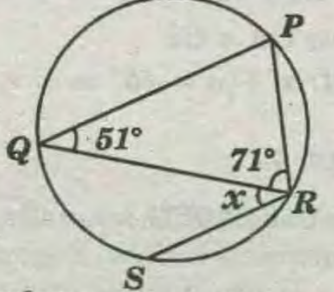
* Luego: $x = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow x = 42°$

RPTA: "D"

PROBLEMA 35 :

En la siguiente figura, S es el punto medio del arco QR. Calcular la medida del ángulo QRS.

A) 61°
B) 58°
C) 29.5°
D) 29°



RESOLUCIÓN :

* Incógnita: $Q\hat{R}S = x$

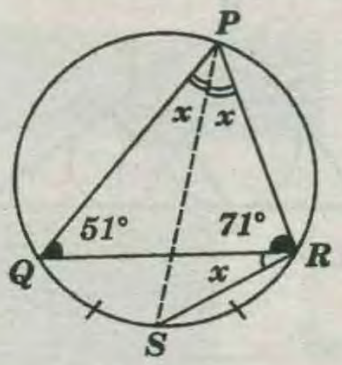
* Del gráfico: $Q\hat{P}S = QRS = x$

* También: $S\hat{P}R = x$

* Luego, en $\triangle PQR$:

$2x = 180° - (51° + 71°)$

$\Rightarrow x = 29° \Rightarrow Q\hat{R}S = 29°$

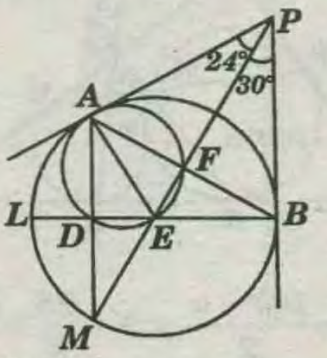


RPTA: "D"

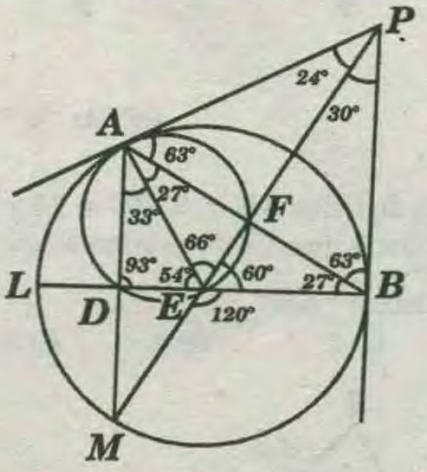
PROBLEMA 36 :

En la figura mostrada A y B son puntos de tangencia. Hallar la medida del arco ML, si los ángulos APF y FPB son 24° y 30°, respectivamente.

A) 63°
B) 53°
C) 60°
D) 45°
E) 75°



RESOLUCIÓN :



$m\overset{\frown}{AB} = 126°$

$m\overset{\frown}{MB} = 120°$

$m\overset{\frown}{AB} = 180° - 24° - 30° = 126°$

* Por ángulo interior

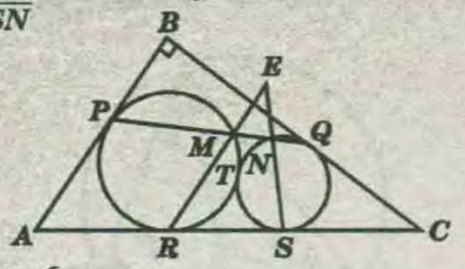
$93° = \dfrac{m\overset{\frown}{ML} + 126°}{2} \Rightarrow m\overset{\frown}{ML} = 60°$

RPTA: "C"

PROBLEMA 37 :

En la figura mostrada se tiene dos circunferencias tangentes exteriormente en T, y tangentes a dos de los lados del triángulo rectángulo ABC, siendo los puntos de tangencia P, R, S y Q. Hallar la medida del ángulo REN, siendo E el punto común a las rectas que pasan por $\overline{RM}$ y $\overline{SN}$

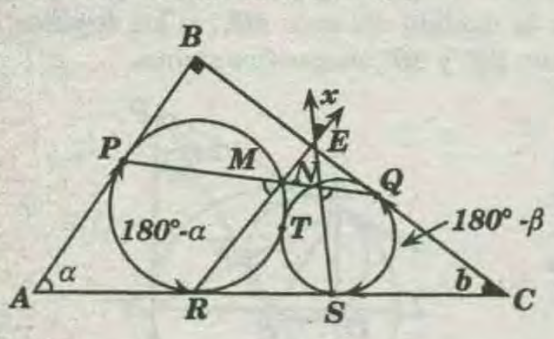
A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°



RESOLUCIÓN:

* $x = ?$
* $\triangle ABC: \alpha + \beta = 90°$ .....(I)
* $\triangle MEN:$

$x + \widehat{M} + \widehat{N} = 180°$ .....(II)



* Pero:

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{PR}}{2} = \frac{180° - \alpha}{2} \text{ y } \widehat{N} = \frac{QS}{2} = \frac{180° + \beta}{2}$$

* En (II): $x + \frac{180° - \alpha}{2} + \frac{180° - \beta}{2} = 180° \Rightarrow x = \frac{\alpha + \beta}{2}$

* Con (I): $x = \frac{90°}{2} = 45°$

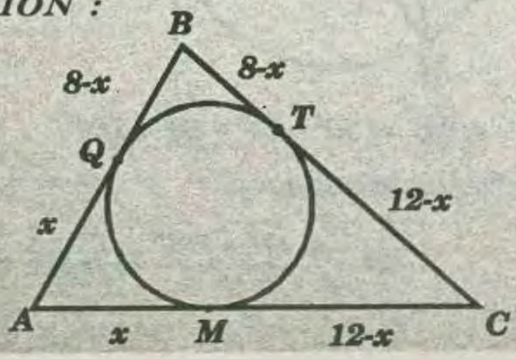
RPTA: "C"

PROBLEMA 38 :

En un triángulo ABC, de lados $AB = 8$, $BC = 10$ y $AC = 12$. La circunferencia inscrita determina sobre $\overline{AC}$ el punto "M". Calcular "AM"

A) 5 B) 3 C) 7 D) 1 E) 9

RESOLUCIÓN :



* Del grafico:

$$8 - x + 12 - x = 10 \Rightarrow 10 = 2x \Rightarrow 5 = x$$

RPTA : "A"

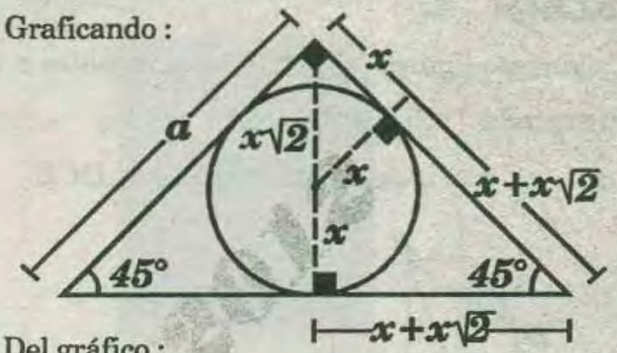
PROBLEMA 39 :

En un triángulo rectángulo isósceles el cateto mide "a" cm. Hallar el radio de la circunferencia inscrita.

A) $a(2 - \sqrt{2})$ B) $(2a - \sqrt{2})$ C) $a(1 - \sqrt{2})$
D) $\frac{a(2 - \sqrt{2})}{2}$ E) $\frac{a(2 - \sqrt{2}}{2}$ cm

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Del gráfico :

$$x + x + x\sqrt{2} = a$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{(2 + \sqrt{2})} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2}$$

RPTA: "D"

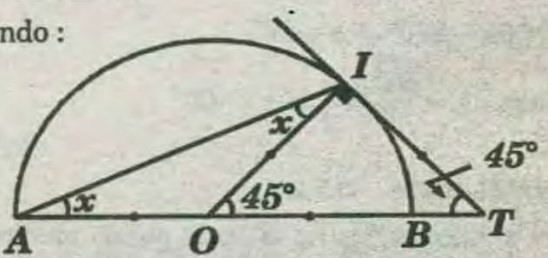
PROBLEMA 40 :

El diámetro AB de una circunferencia se prolonga hasta el punto "T" por donde se traza la tangente "T", cuya longitud es igual al radio de la circunferencia. Hallar la $m\sphericalangle TAI$

A) 22°30' B) 30° C) 15° D) 45° E) Faltan datos

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Se sabe que $\overline{OI} \perp \overline{TI}$ luego $OI = IT$
* Análogamente $OA = OI$

$$\triangle AOI: x + x = 45° \Rightarrow x = 22°30'$$

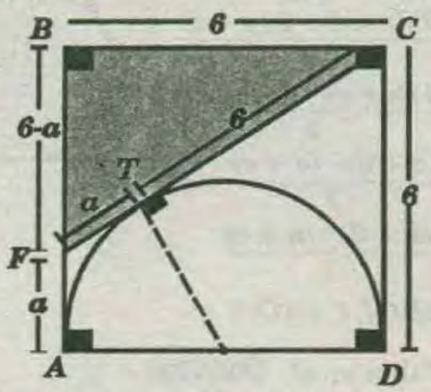
RPTA : "A"

PROBLEMA 41 :

Se tiene un cuadrado $ABCD$, sobre el lado $\overline{AD}$ se traza una semicircunferencia interior, luego desde C se traza una tangente a la semicircunferencia la cual corta a $\overline{AB}$ en F. Hallar el perímetro del triángulo BCF si el lado del cuadrado es igual a 6.

A) 8 B) 8 C) 18 D) 15 E) 20

RESOLUCIÓN :



Por Tangente :

*CD = CT = 6

*FA = FT = a

⇒ BF = 6 – a

* Luego el perímetro es : $2p = BF + BC + FC$

$\Rightarrow 2p=(6-a)+6+(a+6)$

$\Rightarrow 2p=6-a+6+a+6=18$

RPTA: "C"

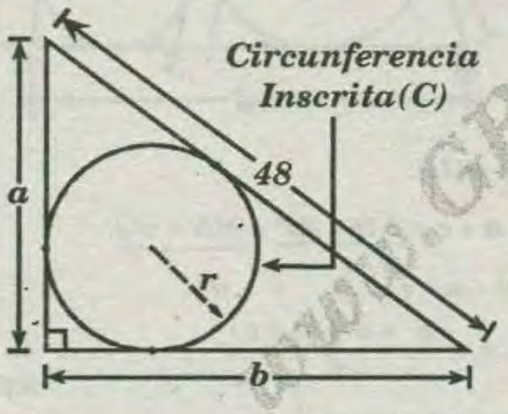
PROBLEMA 42 :

En un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide *48 cm*. se inscribe una circunferencia de longitud *24 πcm*. ¿Cuál es el perímetro de dicho triángulo?

A) 120cm B) 144 C) 96 D) 72 E) 60

RESOLUCIÓN :

* Del enunciado , se tiene el siguiente gráfico :



* Piden :

$2p_{\Delta}=a+b+48$ ..... (I)

* Del dato: $\ell_c = 2\pi r = 24\pi \Rightarrow r = 12$

* Por teorema de Poncelet :

$a + b = 48 + 2r$

$\Rightarrow a + b = 72$..... (II)

* Reemplazando (II) en (I): $2p_{\Delta} = 120\ cm$.

RPTA : "A"

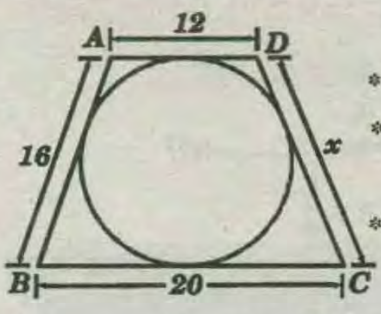
PROBLEMA 43 :

Un cuadrilátero *ABCD* esta circunscrito a una circunferencia. Si *AB = 16; BC = 20* y *AD = 12* hallar la longitud de $\overline{CD}$.

A) 18 B) 12 C) 16 D) 20 E) 14

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* De la figura:

* Por el teorema del Pitot:

$AB + DC = AD$

* Reemplazando :

$16 + x = 12 + 20 \Rightarrow x = 16$

RPTA : "C"

PROBLEMA 44 :

Un triángulo *ABC* recto en *B* esta inscrito en una circunferencia. Calcular la longitud del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo *ABC* en función de las longitudes de los radios r_1 y r_2 de las circunferencias máximas inscritas a los segmentos circulares determinados por los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, y de la longitud *r* del radio de la circunferencia inscrita al triángulo *ABC*.

A) $r + r_1 + r_2$ B) $2\ (r + r_1 + r_2)$

C) $r + 2\ (r_1 + r_2)$ D) $3r\ (r_1 + r_2)$

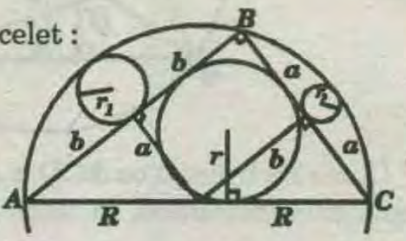
E) $r+3(r_1+r_2)$

RESOLUCIÓN :

* Por el teorema de Poncelet :

$AB + BC = AC + 2r$

$\Rightarrow a + b = R + r$.....(I)



*Además, se observa :

$$\left.\begin{matrix} R = a + 2r_2 \\ R = b + 2r_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2R = a+b+2r_1 + 2r_2$$

*Con (I) : $2R = R + r + 2r_1 + 2r_2$

$\Rightarrow R = r + 2\ (r_1 + r_2)$

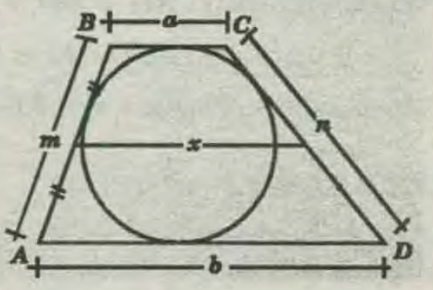
RPTA : "C"

PROBLEMA 45 :

Si el perímetro de un trapecio circunscrito a una circunferencia es *k* , entonces la mediana del trapecio mide :

A) $\frac{k}{10}$ B) $\frac{k}{2}$ C) $\frac{k}{5}$ D) $\frac{k}{4}$ E) $\frac{k}{3}$

RESOLUCIÓN :



* Por base media : $a + b = 2x$.....(I)

* Por Pithot: $a+b=m+n$

* Por dato : $\underbrace{a+b}_{a+b}+m+n=k$

$\Rightarrow 2(a+b) = k$.....(II)

* (I) en (II): $2(2x) = k \Rightarrow x = \frac{k}{4}$

RPTA: "D"

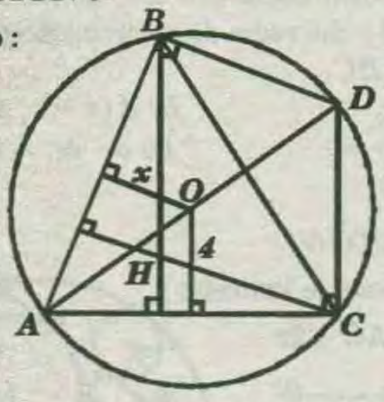
PROBLEMA 46 :

Un triangulo ABC esta inscrito en una circunferencia de centro O, en la cual se traza el diámetro $\overline{AD}$. H es el ortocentro del triángulo. Hallar la distancia de O. al lado $\overline{AB}$, sabiendo que el perímetro del cuadrilátero $HBDC$ es de 30 m y la distancia de O al lado $\overline{AC}$ es 4m

A) 2,5m B)5,0m C) 6,5m D) 4m E) 3,5m

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Como los triángulos ACD y ABD están inscritos en semicircunferencias, se tiene respectivamente :

$$\hat{C} = 90°; \hat{B} = 90°$$

* Por el teorema de los puntos medios , en el triángulo ACD. $\overline{DC} = 2\,(4) = 8m$

* Del gráfico : $\overline{BD} \parallel \overline{HC}$, $\overline{BH} \parallel \overline{DC}$

*Por lo anterior se deduce que $HBDC$ es un paralelogramo , donde : $\overline{BD} = \overline{HC}, \overline{BH} = \overline{DC}$

* Por el teorema de lo puntos medios, en el triángulo ABD.

$$x = \frac{BD}{2} = \frac{HC}{2} \Rightarrow HC = 2x$$

* En la condición : $BH + BD + DC + HC = 30$

$\Rightarrow 2\,(DC) + 2\,(HC) = 30 \Rightarrow 2\,(8) + 2\,(2x) = 30$

* De donde se obtiene : $x = 3{,}5\ m$

RPTA : "E"

PROBLEMA 47 :

Si en la siguiente figura : $MN=a, NP=b, PQ=c, MQ = d$, entonces RS es :

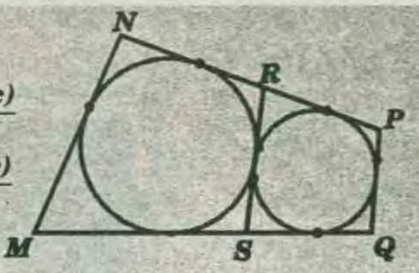
A) $\frac{2\,(b+d)-(a+c)}{2}$

B) $\frac{3\,(b+d)-2\,(a+c)}{2}$

C) $\frac{4\,(b+d)-3\,(a+c)}{2}$

D) $\frac{(b+d)-(a+c)}{2}$

E) $\frac{(b+d)-(a+c)}{2}$



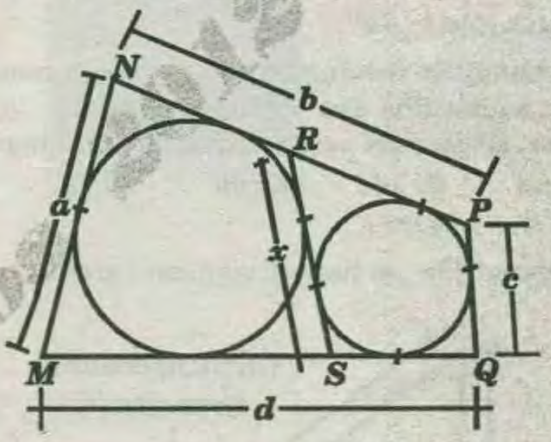
RESOLUCIÓN :

* Pithot en el $\square MNRS$:

$a + x = NR + MS$.....(I)

* En $\square SRPQ$:

$x + c = RP + SQ$ ..... (II)



* De (I) +(II):

$2x + a + c = \underbrace{NR + RP} + \underbrace{MS + SQ}$

$\Rightarrow 2x + a + c = b + d$

$\Rightarrow x = \frac{b + d - (a+c)}{2}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 48 :

Sea el cuadrilátero $ABCD$ convexo , $M \in \overline{AB}$ y $N \in \overline{DC}$, sea O_1 el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero $AMND$, O_2 el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero $NMBC$.

Si $AB + CD = 40m$, $AD + BC = 24\ m$.

Halle MN

A)8m B)9m C)10m D) 11m E)12m

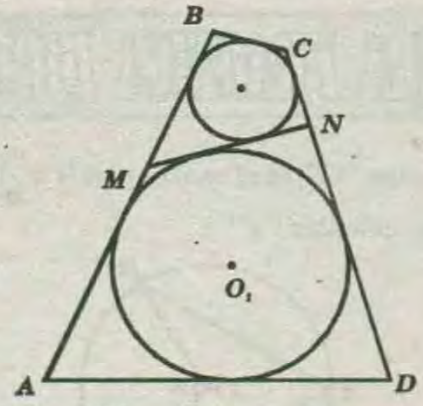
RESOLUCIÓN :

* Dato : $AB+CD=40$ y $AD+BC=24$

* Por Pithot :

* En $AMND$: $AM+ND=AD+MN$...(I)

* En $MBCN$: $MB+NC=BC+MN$....(II)



* Sumando *(I)* y *(II)*

$$(\underline{AM + MB}) + (\underline{ND + NC}) = AD + BC + 2.MN$$

$$\Rightarrow \underline{AB + CD} = 24 + 2MN$$

$$\Rightarrow 40 = 24 + 2MN$$

$$\Rightarrow MN = 8$$

RPTA : "A"

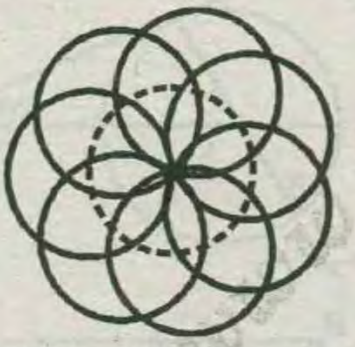
PROBLEMA 49 :

El lugar geométrico de los centros de todos los círculos de radio dado ***"r"***, en el mismo plano y que pasan por un punto fijo , es :

A) Dos rectas ***B) Una circunferencia***
C) Una recta ***D) Un punto***
E) Dos circunferencias

RESOLUCIÓN :

*Graficando :



Lugar Geométrico : Conjunto ordenado de puntos que gozan de una misma propiedad.

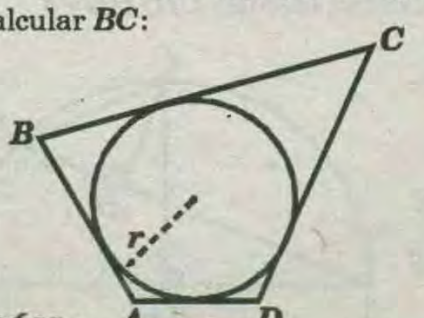
* Para este problema el lugar geométrico es una circunferencia de radio ***"r"*** y centro en el punto fijo :

RPTA : "B"

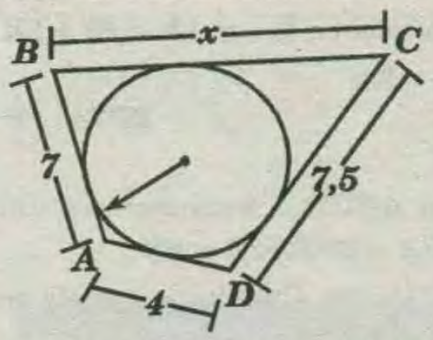
PROBLEMA 50 :

De la figura $r = 3cm$, $AB = 7cm$., $CD = 7{,}5\ cm$. y $AD = 4\ cm$. Calcular BC:

A)10,6 cm
B)10,5
C)10,3
D)10,7
E)11



RESOLUCIÓN :



* Piden: x
* Se observa :

$\square ABCD$

cuadrilátero circunscrito

* Por teorema de Pitot : $x + 4 = 7 + 7{,}5 \Rightarrow x = 10{,}5$

RPTA : "B"

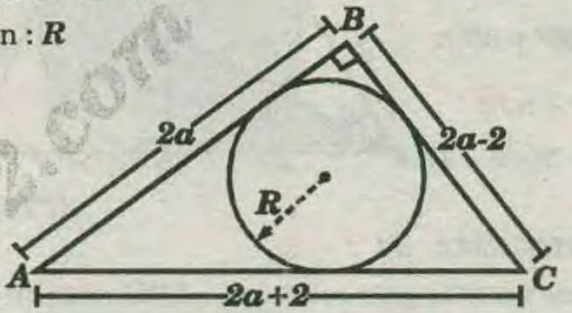
PROBLEMA 51 :

Las medidas de los lados de un triángulo rectángulo son números pares consecutivos , el radio del círculo inscrito mide:

A) 12 ***B) 4*** ***C) 10*** ***D) 2*** ***E) $2\sqrt{2}$***

RESOLUCIÓN :

* Piden : R



* En $\triangle ABC$ (Teorema de Poncelet) :

$$(2a) + (2a - 2) = (2a + 2) + 2R \Rightarrow a - 2 = R$$

* Calculando : ***"a"***

* En $\triangle ABC$ (Teorema de Pitágoras):

$$(2a)^2 + (2a - 2)^2 = (2a + 2)^2 \Rightarrow a = 4 \text{ y } R = 2$$

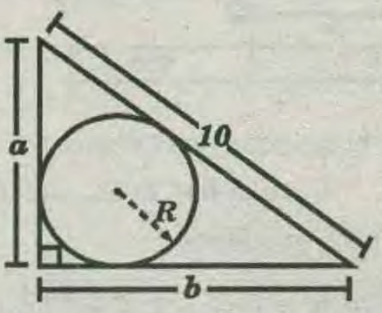
RPTA : "D"

PROBLEMA 52 :

El perímetro de un triángulo rectángulo es $24m$ y su hipotenusa mide $10m$.Hallar el radio de la circunferencia inscrita:

A)1m ***B) 2*** ***C)3*** ***D)4*** ***E) 5***

RESOLUCIÓN :



* Piden: R

* Dato : $2p_{\triangle} = a + b + 10 = 24 \Rightarrow a + b = 14$

WWW.GRATIS2.COM

* Por Teorema de Poncelet en $\triangle$: $a + b = 10 + 2R$

* Reemplazando : $R = 2m$

RPTA : "B"

PROBLEMA 53 :

En un cuadrilátero $ABCD$, circunscrito a una circunferencia si $m\sphericalangle A = 60°$, $m\sphericalangle B = 90°$;

$AD + BC = 15u$, $CD = 9u$. Calcular la medida del radio de la circunferencia (en u).

A) 3 B) $3(\sqrt{2}-1)$ C) $3(\sqrt{2}-1)$

D) $3(\sqrt{3}-1)$ E) $3\sqrt{3}-2$

RESOLUCIÓN :

* Si : $AD + BC = 15$

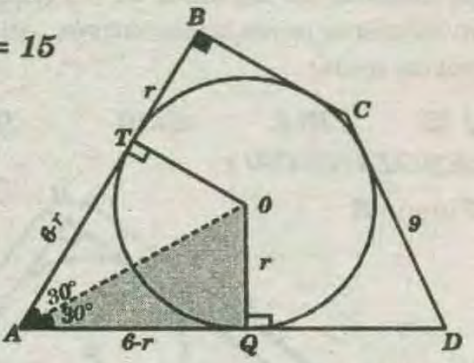
$\Rightarrow AB + 9 = 15$

$\Rightarrow AB = 6$

* $\triangle$ $(30°$ y $60°)$:

$6 - r = r\sqrt{3}$

$\Rightarrow r = 3(\sqrt{3}-1)$



RPTA: "D"

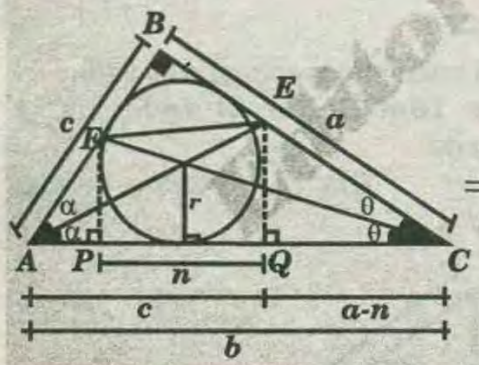
PROBLEMA 54 :

Se tiene un triángulo rectángulo ABC recto en B, en el cual las bisectrices de los ángulos internos de A y C cortan a los catetos $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ en E y F respectivamente. Si la proyección de $\overline{EF}$ sobre la hipotenusa mide $5,4u$. Halle la medida del radio del triángulo ABC (en u).

A) 2,0 B) 2,5 C) 2,7 D) 2,75 E) 2,8

RESOLUCIÓN :

* De la figura :



$c + a - n = b$

$\Rightarrow a + c = b + n$...(I)

* Pero por el teorema de Poncelet.:

$a + c = b + 2r$ .....(II)

* De (I) y (II), se obtiene :

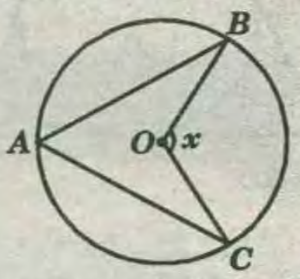
$$b + 2r = b + n \Rightarrow r = \frac{n}{2} = \frac{5,4}{2} = 2,7$$

RPTA : "C"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

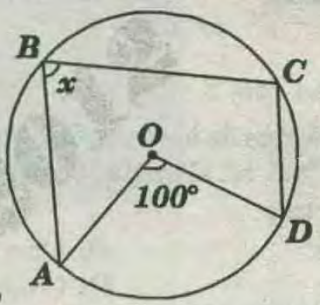
01 En la figura "O" es el centro y $AB = AC$. Siendo $m\overset{\frown}{AB} = 100°$, calcular "$x$"

A) 100° B) 120° C) 135° D) 160° E) 150°



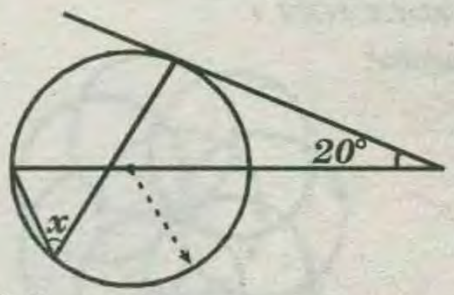
02 En la figura "O"; centro, $CD = OD$, calcular "x"

A) 60° B) 80° C) 50° D) 70° E) 90°



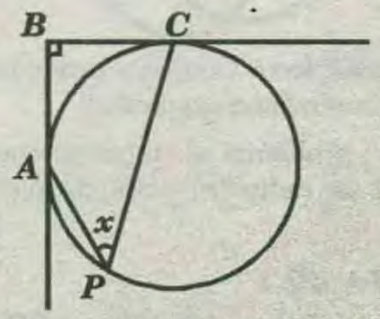
03 Calcular "x"

A) 50° B) 55° C) 60° D) 65° E) 80°



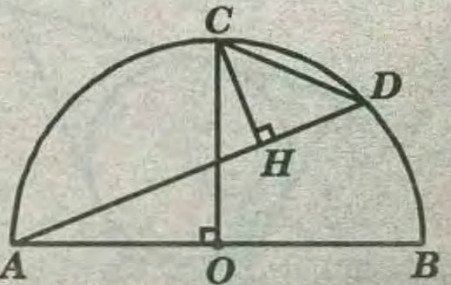
04 Calcular "x"

A) 40° B) 45° C) 50° D) 55° E) 60°

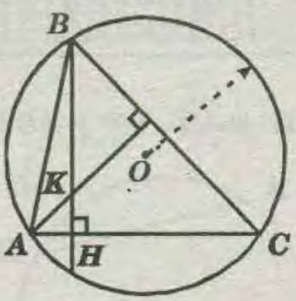


05 O: Centro, calcular CH; $HD = 8$

A) 6 B) 8 C) $4\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{3}$ E) 10

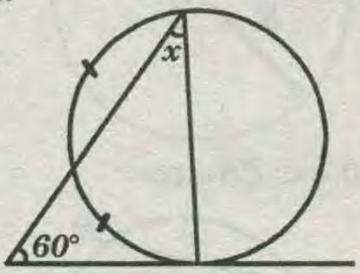


06 Si: $KH = 4$; calcular: HD



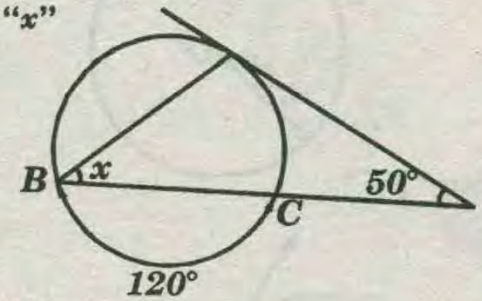
A) 4
B) 5
C) 6
D) $4\sqrt{2}$
E) 8

07 Hallar "x"



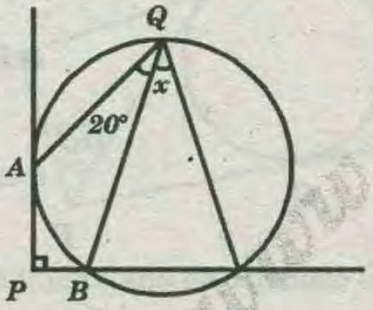
A) 80°
B) 70°
C) 60°
D) 40°
E) 50°

08 Hallar "x"



A) 25°
B) 40°
C) 35°
D) 30°
E) 45°

09 Hallar "x"

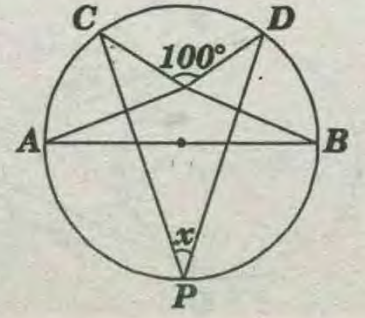


A) 40°
B) 50°
C) 30°
D) 45°
E) 35°

10 Calcular "$x + y$"

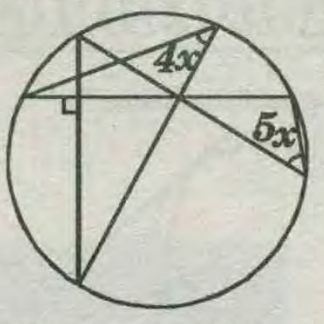
A) 60°
B) 65°
C) 70°
D) 75°
E) 80°

11 Calcular "x"



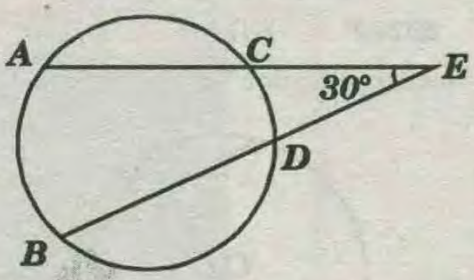
A) 10°
B) 8°
C) 16°
D) 14°
E) 12°

12 En la figura mostrada, calcular "x"



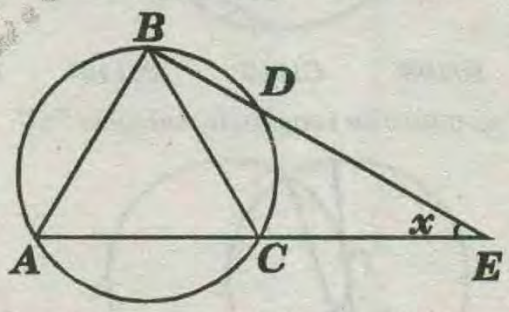
A) 8°
B) 12°
C) 15°
D) 10°
E) 20°

13 $m\widehat{AB} = 2m\widehat{CD}$. Calcular $\widehat{CD}$



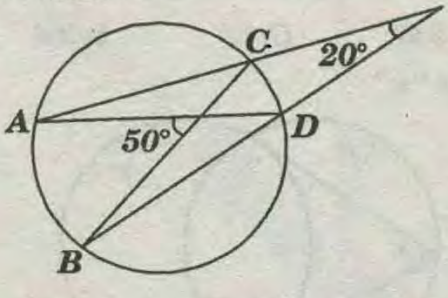
A) 75° B) 60° C) 45° D) 53° E) 37°

14 Si: $AB = BC$, $\widehat{BD} = 80°$, calcular "x"



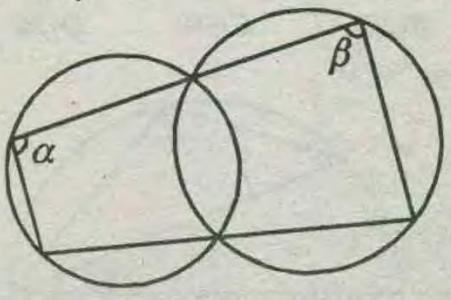
A) 60° B) 20° C) 30° D) 40° E) 50°

15 Calcular $m\widehat{AB}$:



A) 40° B) 80° C) 90° D) 50° E) 70°

16 Calcular "$\alpha+\beta$"

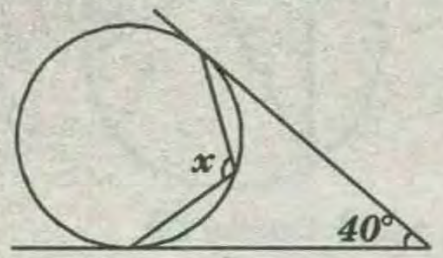


A) 90° B) 120° C) 180° D) 130° E) 60°

WWW.GRATIS2.COM

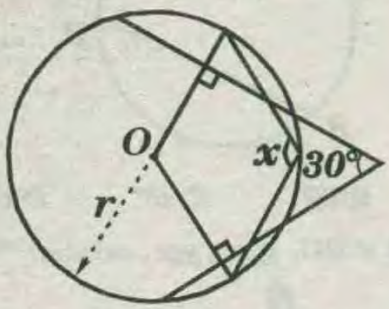
TAREA DOMICILIARIA

01 Del gráfico adjunto calcular "x"



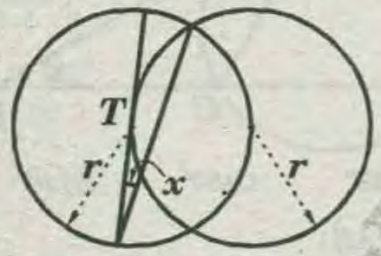
A)80° B)100° C)110° D)120° E)130°

02 "O" centro, calcular "x"



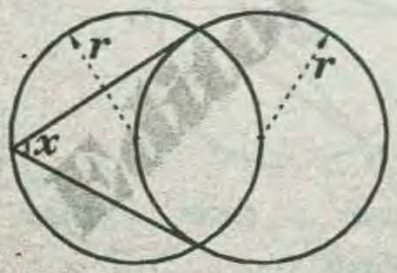
A)100° B)105° C)110° D)115° E)120°

03 "T" es punto de tangencia, calcular "x"



A)10° B)5° C)15° D)20° E)30°

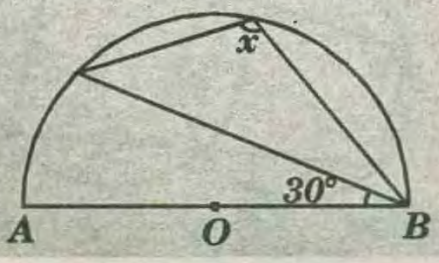
04 Calcular "x"



A)30° B)45° C)60° D)75° E)80°

05 Calcular "x"

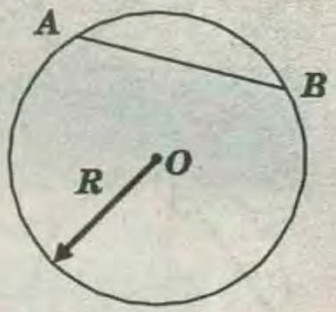
A)120°
B)130°
C)90°
D)110°
E)135°



SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

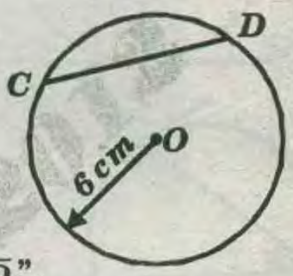
01 Hallar "R", si: $m\widehat{AB} = 90°$ y $AB = 4\sqrt{2}\ cm$.

A) 8 cm
B) $4\sqrt{2}$
C) 4
D) 3
E) 6



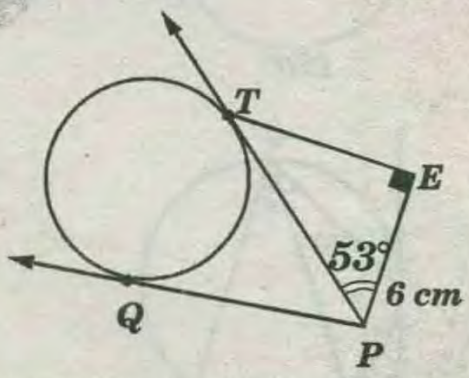
02 Hallar "$\overline{CD}$", si: $\overline{CD} = 60°$.

A) 2 cm
B) 8
C) 5
D) 3
E) 6



03 Hallar: "$\overline{PQ}$".

A) 8 cm
B) 6
C) 4
D) 10
E) 15



04 Calcular el diámetro de una circunferencia, si su radio mide 8μ.

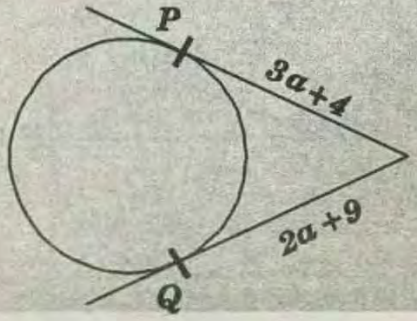
A)24μ B)32 C)16 D)12 E)18

05 El radio más el diámetro de una circunferencia suman 6μ. Calcular la longitud del diámetro.

A)18μ B)20 C)12 D)24 E)16

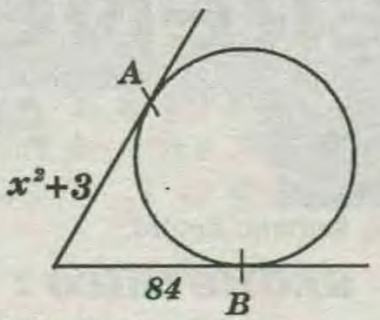
06 Si "P" y "Q" son puntos de tangencia, calcular "a".

A) 5
B) 4
C) 3
D) 6
E) 8



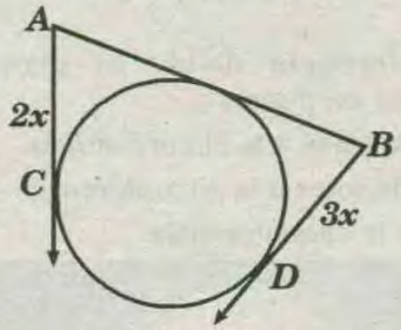
07 Hallar "x", si "A" y "B" son puntos de tangencia.

A)2
B)1
C)3
D)4
E)8



08 Calcular "x", si: $AB = 20$.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E)6

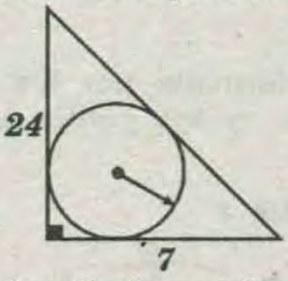


09 El perímetro de un triángulo rectángulo es 12μ y su inradio es 1μ. Calcular la hipotenusa.

A)2 B)3 C 4 D)6 E)5

10 Calcular el inradio en el gráfico mostrado.

A)2
B)3
C)4
D)5
E)6

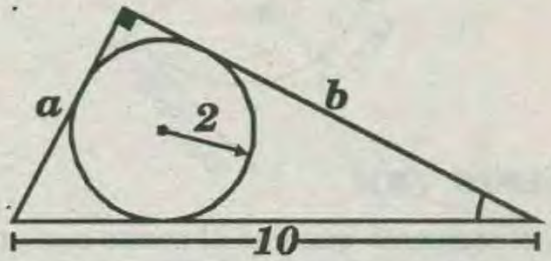


11 Calcular el inradio de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 12.

A)1 B)2 C)1,5 D)3 E)2,5

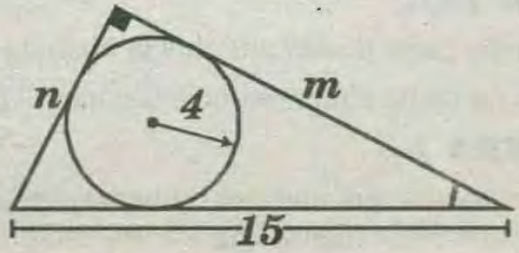
12 Hallar "$a+b$".

A) 14
B) 12
C) 16
D) 18
E) 20



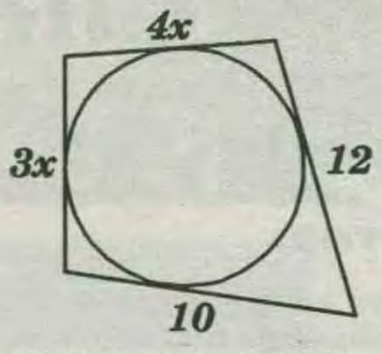
13 Hallar "$n+m$".

A)21
B)30
C)23
D)20
E)25



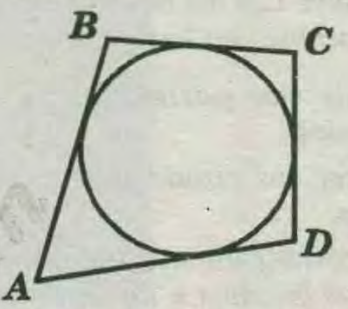
14 Si el cuadrilátero está circunscrito, calcular "x".

A)1
B)3
C)2
D)5
E)4



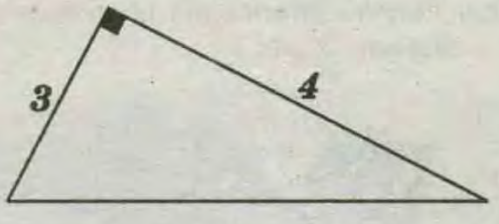
15 Si: $AB = 12$; $CD = 8$. Calcular el perímetro del cuadrilátero circunscrito.

A)30
B)36
C)40
D)48
E)42



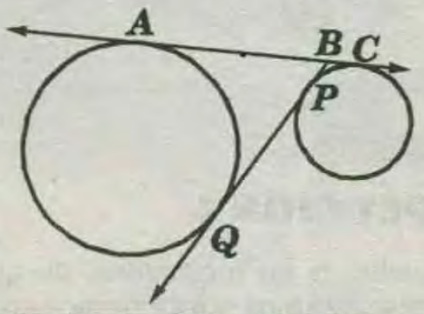
16 Calcular el inradio del triángulo rectángulo mostrado.

A)2
B)1
C)0,5
D)1,5
E)3



17 Si $AB=12$ y $BC=2$. Calcular "PQ".

A)8
B)10
C)11
D)9
E)7



PRIMERA PRACTICA	CIRCUNFERENCIA								
1) D	2)B	3) B	4)B	5)B	6)A	7)D	8)C	9)B	10)C
11)A	12)D	13)B	14)D	15)E	16)C				
01)C	02)B	03)C	04)C	05)A					

SEGUNDA PRACTICA	CIRCUNFERENCIA								
1) C	2)E	3) E	4)C	5)D	6)A	7)A	8)C	9)E	10)B
11)B	12)A	13)C	14)C	15)A	16)B	17)B			

WWW.GRATIS.COM

CIRCUNFERENCIA

CAPITULO 20

OBJETIVOS:

**Comprender los fundamentos y conocer los teoremas fundamentales sobre la circunferencia .*

** Diferenciar la circunferencia del círculo*

**Familiarizarse con los ángulos en la circunferencia y sus aplicaciones en la solución de problemas .*

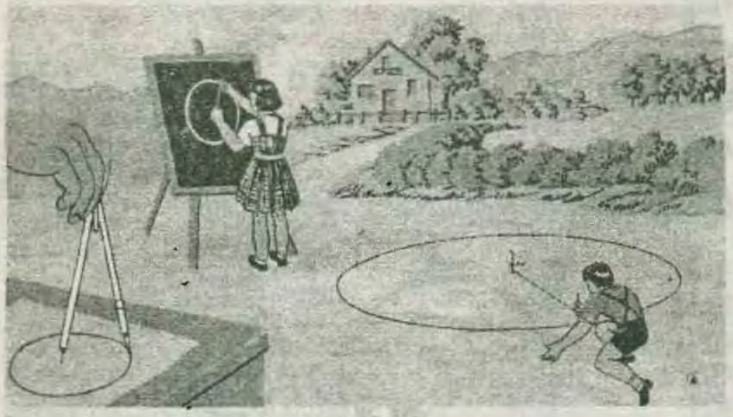
**diferenciar las posiciones relativas de dos circunferencias .*

** Reconocer los cuadriláteros inscritos de los inscriptibles.*

** Aplicar correctamente las propiedades de los cuadriláteros inscritos e inscriptlbles.*

** Identificar las propiedades de los polígonos inscritos, ex inscritos y circunscritos.*

** Aplicar correctamente los teoremas (Poncelet, Plthot , Steiner , ...,etc.)*



INTRODUCCIÓN :

Las necesidades y los momentos en que se vive, hace que descubramos o inventemos cosas , es así como nace la rueda la cual se caracteriza por tener la forma de una circunferencia. Dicho objeto fue y es de mucha utilidad y así como él, hay otros objetos que adoptan esa misma forma tales como: los ventiladores, los timones de los carros, etc. En base a ello podemos notar que la circunferencia es una figura geométrica de mucha importancia.

CIRCUNFERENCIA

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto del mismo plano llamado centro.

LUGAR GEOMÉTRICO :

Es el conjunto de puntos que gozan de una misma propiedad.

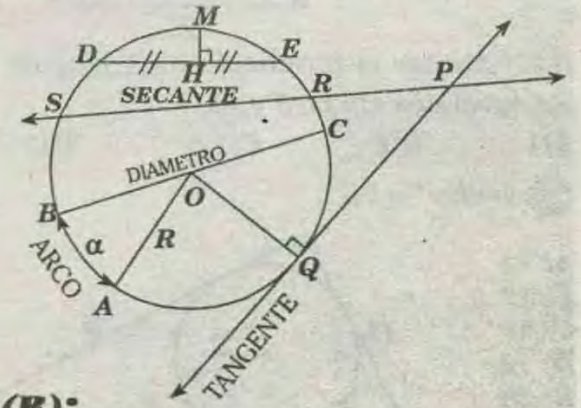
La circunferencia divide al plano en tres subconjuntos de puntos :

* Puntos interiores a la circunferencia.
* Puntos exteriores a la circunferencia.
* Puntos de la circunferencia.

CÍRCULO :

Es la figura formada por los puntos de la circunferencia y los puntos interiores a la circunferencia.

ELEMENTOS :



RADIO (R):

Es el segmento que une el centro con un punto de la circunferencia (Figura $\overline{OQ}$, $\overline{OA}$).

ARCO (A):

Es aquella parte de circunferencia limitada por dos puntos de dicha circunferencia (figura : $\overset{\frown}{AB}$).

CUERDA :

Es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia (figura $\overline{DE}$).

DIÁMETRO O CUERDA MAYOR (2R):

Es la cuerda que pasa por el centro y es el doble del radio (figura $BC=2R$).

RECTA SECANTE :

Es cualquier recta que corta a la circunferencia en dos puntos (figura $\overleftrightarrow{RS}$).

RECTA TANGENTE :

Es aquella recta que tiene un sólo punto en común con la circunferencia (figura : $\overleftrightarrow{PQ}$).

FLECHA O SAGITA :

Es el segmento que une a los puntos medios de la cuerda y el arco de menor longitud que subtiende dicha cuerda (figura : $\overline{MH}$).

NOTA :

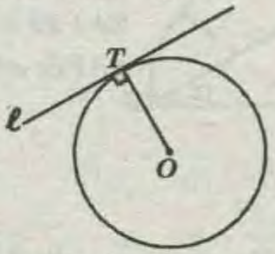
Los arcos de circunferencia son líneas y como tales tienen una longitud. Sin embargo también se pueden medir en grados , al igual que los ángulos.

Medida del $\overset{\frown}{AB}$: $m\overset{\frown}{AB}$ $\boxed{m\overset{\frown}{AB}=\alpha}$

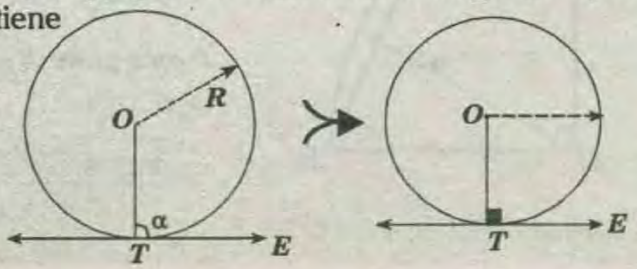
* La medida de una circunferencia en grados es $360°$.
* A la región limitada por una circunferencia se le denomina región interior.
* A la unión de la circunferencia con la región interior se le denomina círculo. El perímetro de un círculo es igual a $2\pi R$
* Donde $\pi \approx \frac{22}{7}$

TEOREMA :

Todo radio trazado hacia el punto de tangencia es perpendicular a la recta tangente .



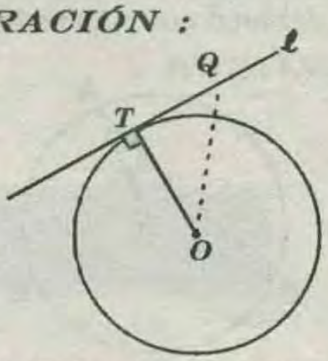
Es decir el radio trazado con respecto al punto de tangencia es perpendicular a la recta tangente que la contiene



* Si : O centro y T es punto de tangencia.

$$\boxed{\overline{OT}\perp\overline{TE}} \wedge \boxed{\alpha=90°}$$

DEMOSTRACIÓN :



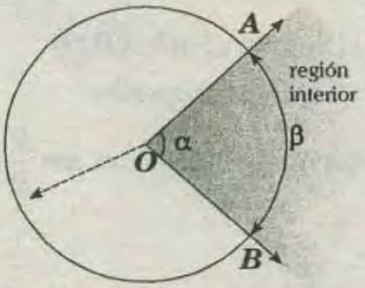
Como T es el único punto de R común con la circunferencia, para cualquier otro punto Q se verifica: "$OT<OQ$" puesto que Q es exterior a la circunferencia . Resulta , pues, que $\overline{OT}$ es el menor segmento comprendido entre O y ℓ ; luego :

$$\overline{OT}\perp\ell \wedge \ell\perp\overline{OT}$$

ÁNGULOS RELACIONADOS EN LA CIRCUNFERENCIA

I) ÁNGULO CENTRAL :

Es aquel ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia , sus lados contienen cada uno un radio y su medida es igual al arco comprendido entre sus lados ; siempre y cuando esta medida del arco sea angular.



* $\sphericalangle AOB$: ángulo central
* Se cumple :

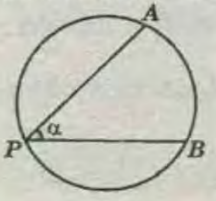
$$\boxed{\alpha=\beta}$$

El conjunto de puntos de la circunferencia interiores al ángulo central se llama ***arco*** correspondiente al ángulo .

ÁNGULO INSCRITO

Se llama ángulo inscrito, al que tiene su vértice en la circunferencia y cada uno de sus lados la intersecta en otro punto .

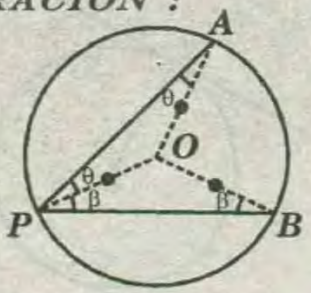
La medida de todo ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del arco comprendido por sus lados .



$$\boxed{\alpha=\frac{m\overset{\frown}{AB}}{2}}$$

Es decir un ángulo inscrito es aquel cuyo vértice es un punto de la circunferencia , sus lados contienen cada uno una cuerda y su medida es igual a la mitad de la medida del arco que subtiende sus lados.

DEMOSTRACIÓN :



* $\triangle POA$ isósceles : $OA=OP$
  $\triangle POB$ isósceles : $OP=OB$
* En el cuadrilátero no convexo $APBO$:

$$m\sphericalangle AOB=2(\theta+\beta)$$

* Pero: $m\sphericalangle AOB=m\overset{\frown}{AB}=2(\theta+\beta)$

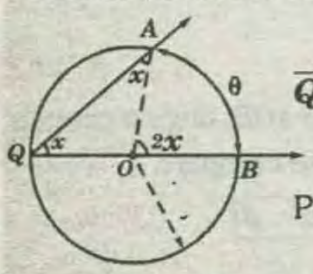
* Luego: $m\sphericalangle APB=\dfrac{m\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha=\dfrac{m\overset{\frown}{AB}}{2}}$

TEOREMA :

La medida del ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del arco correspondiente.

DEMOSTRACIÓN :(OTRO MÉTODO)

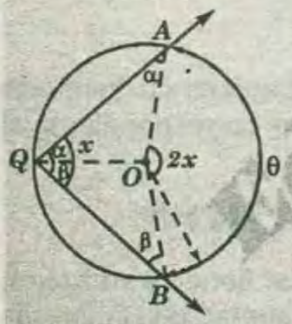
* Consideremos los tres casos siguientes :



$\overline{QB}$: Diámetro; $m\sphericalangle\overline{AB}=\theta$

$\triangle QOA$: isósceles

Por $\sphericalangle$central : $2x=\theta \Rightarrow x=\dfrac{\theta}{2}$

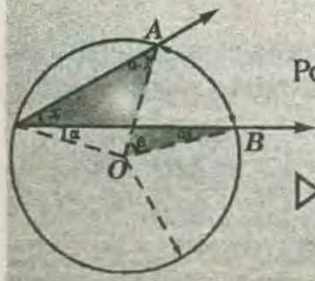


$\triangle OQB$ y OQA :isósceles;

$x=\alpha+\beta$

$\sphericalangle AQBO : m\sphericalangle AOB$

$=x+\alpha+\beta=2x$



Por $\sphericalangle$ central: $2x=\theta \Rightarrow x=\dfrac{\theta}{2}$

$\triangle OQB$ y $\triangle OQA$: isósceles

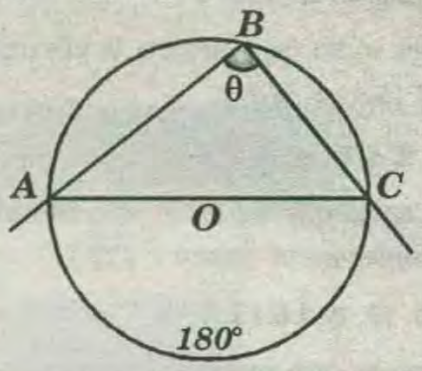
$\bowtie QAOB: x+\alpha+x=\theta+\alpha$

$\Rightarrow x=\dfrac{\theta}{2}$

CONSECUENCIAS :

♠ Todos los ángulos inscritos en un mismo arco son congruentes.

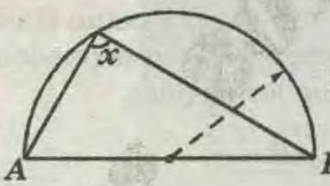
♠ Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.



* Sabemos que : $m\overset{\frown}{AC}=180° \Rightarrow m\sphericalangle ABC=\dfrac{180°}{2}$

$\Rightarrow m\sphericalangle ABC=90° \Rightarrow \boxed{\theta=90°}$

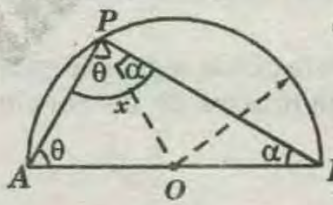
TEOREMA :



Si $\overline{AB}$: Diámetro se cumple

$\boxed{x=90°}$

DEMOSTRACIÓN :



* En la figura :

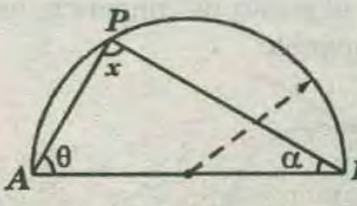
$x=\alpha+\theta$

$\triangle APB$: $x+\alpha+\theta=180°$

$\Rightarrow x=90°$

OTRO MÉTODO :

En la figura , por ángulo inscrito



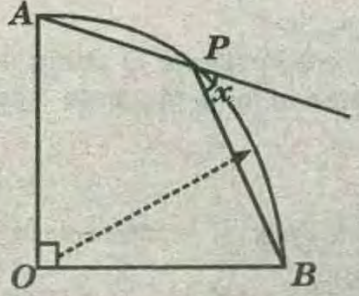
$m\overset{\frown}{AP}=2\alpha; m\overset{\frown}{PB}=2\theta$

$2\alpha+2\theta=180° \Rightarrow \alpha+\theta=90°$

$\triangle APB: \alpha+\theta+x=180°$

$\Rightarrow x=90°$

TEOREMA :



Si $\overset{\frown}{AB}$: cuandrante

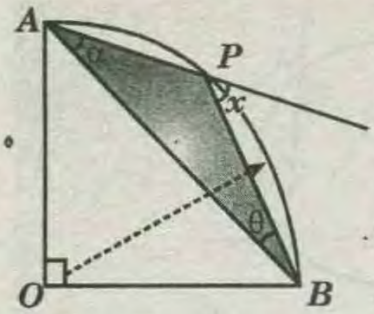
$(m\overset{\frown}{AB}=90°)$

P esta entre A y B

se cumple :

$\boxed{x=45°}$

DEMOSTRACIÓN :



$\triangle APB : x=\alpha+\theta$

Por ángulo inscrito:

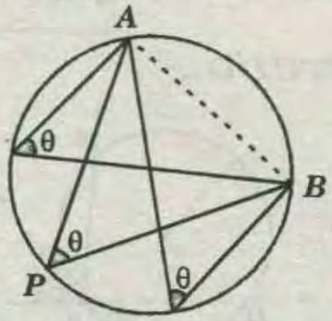
$m\widehat{PB}=2\alpha ; m\widehat{AP}=2\theta$

$\Rightarrow 2\alpha+2\theta=90°$

$\Rightarrow \alpha+\theta=45° \Rightarrow x=45°$

ARCO CAPAZ DE UN ÁNGULO

Como todos los ángulos inscritos en un mismo arco son congruentes , según acabamos de ver , a este arco se le llama arco capaz de esos ángulos o de cualquier ángulo igual a ellos .

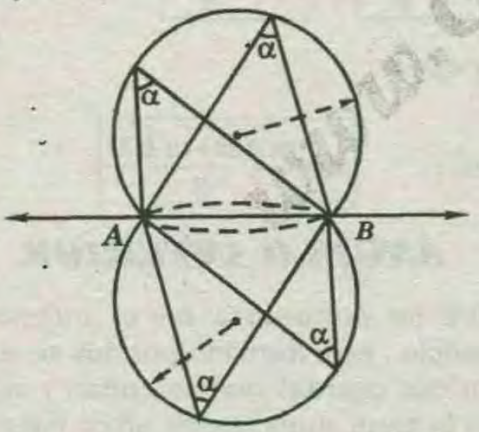


* $\widehat{APB}$: Es el arco capaz de todos los ángulos que miden θ .

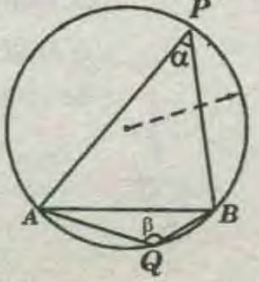
* $\overline{AB}$: cuerda capaz .

* $m\widehat{AB}=2\theta \Rightarrow \boxed{m\widehat{APB}=360°-2\theta}$

NOTA :



Para cada semiplano limitado por $\overleftrightarrow{AB}$ se puede construir un arco capaz ; en la figura se muestran arcos capaces del ángulo de medida α.



$\widehat{APB}$: Arco capaz del ángulo de medida α.

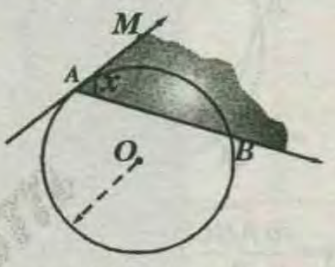
$\widehat{AQB}$: Arco capaz del ángulo de medida β.

$\sphericalangle \widehat{AQB}$ y $\sphericalangle \widehat{APB}$ son suplementarios.

* Es decir : $\alpha+\beta = 180°$

ÁNGULO SEMI INSCRITO

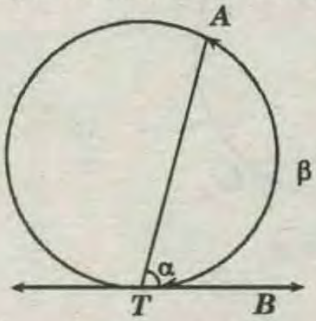
Es aquel ángulo cuyo vértice se ubica en la circunferencia y sus lados están determinados por una ***tangente*** y una ***secante***. El arco , cuyos puntos son interiores al ángulo semi-inscrito , es correspondiente al ángulo.



En la figura , A es punto de tangencia $\sphericalangle MAB$: Ángulo semi-inscrito.

$\widehat{AB}$: Arco correspondiente al $\sphericalangle MAB$.

Su medida es igual a la mitad a la medida del arco que subtienden sus lados.



T: punto de la tangencia

$\sphericalangle ATB$: ángulo semi-inscrito

* Se cumple :

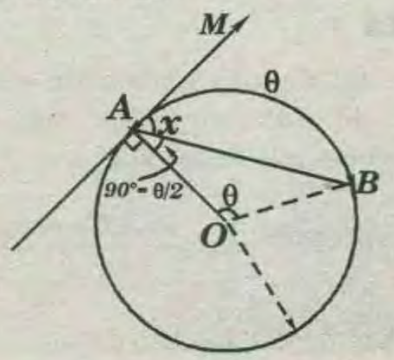
$$\boxed{\alpha=\frac{\beta}{2}}$$

TEOREMA :

La medida del ángulo semi-inscrito es igual a la mitad de la medida del arco correspondiente .

En la figura siguiente : $x=\dfrac{m\widehat{AB}}{2}$

DEMOSTRACIÓN :



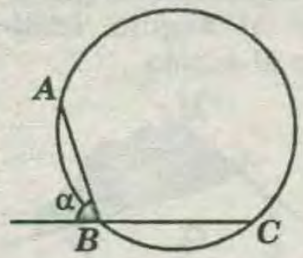
* Por teorema $\overline{OA} \perp \overline{AM}$ por $\sphericalangle$ central : $m\sphericalangle AOB=\theta$

$\triangle AOB$ es isósceles: $m\sphericalangle OAB = 90° - \frac{\theta}{2}$

En A : $x=\frac{\theta}{2}$

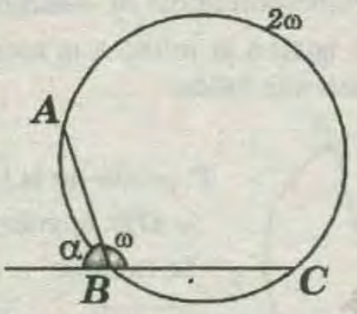
ÁNGULO EXINSCRITO

Se llama ángulo exinscrito , al adyacente de un ángulo inscrito . La medida del ángulo exinscrito es igual a la mitad de la medida de todo el arco que no corresponde al ángulo inscrito adyacente .



Se cumple : $\boxed{\alpha=\frac{m\widehat{ABC}}{2}}$

DEMOSTRACIÓN :



* Si : $m\widehat{AC}=2\omega \Rightarrow m\sphericalangle ABC=\omega$

* Luego: $\alpha+\omega=180°$

$\Rightarrow \alpha=180°-\omega$ .....(I)

* Pero : $m\widehat{ABC}=360°-2\omega$

$\Rightarrow \frac{m\widehat{ABC}}{2}=180°-\omega$..... (II)

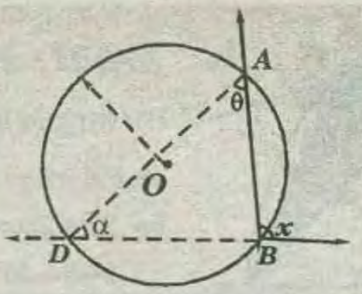
* De (I) y (II) : $\alpha=\frac{m\widehat{ABC}}{2}$

TEOREMA :

La medida del ángulo exinscrito es igual a la semisuma de las medidas de los arcos correspondientes por dicho ángulo.

En la figura siguiente : $\boxed{x=\frac{m\widehat{AB}+m\widehat{BD}}{2}}$

DEMOSTRACIÓN :



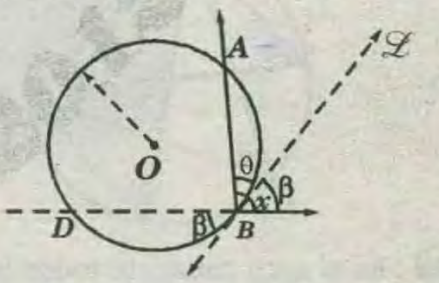
* En la figura: $x=\alpha+\theta$.....(I)

* Por ángulo inscrito.,

$\alpha=\frac{m\widehat{AB}}{2} \wedge \theta=\frac{m\widehat{BD}}{2}$.....(II)

* Reemplazando (II) en (I) : $\boxed{x=\frac{m\sphericalangle\widehat{AB}+m\sphericalangle\widehat{BD}}{2}}$

OTRA MÉTODO :



Se traza por B la recta tangente $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$. Por ángulo semiinscrito

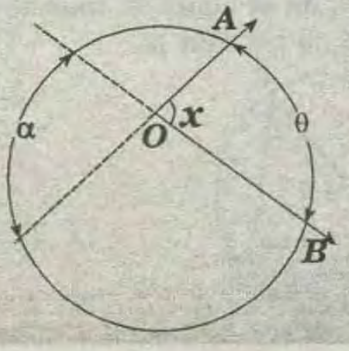
$\boxed{\theta=\frac{m\widehat{AB}}{2}}$ y $\boxed{\beta=\frac{m\widehat{BD}}{2}}$

* En B: $x=\beta+\theta$

* entonces : $\boxed{x=\frac{m\widehat{AB}+m\widehat{BD}}{2}}$

ÁNGULO INTERIOR

Su vértice se encuentra en el interior de la circunferencia , esta formado por dos secantes que contienen dos cuerdas que se cortan y su medida es igual a la semi suma de los arcos interceptados por él y por su opuesto por el vértice.



O: punto interior

$\triangle AOB$: ángulo interior

Se cumple :

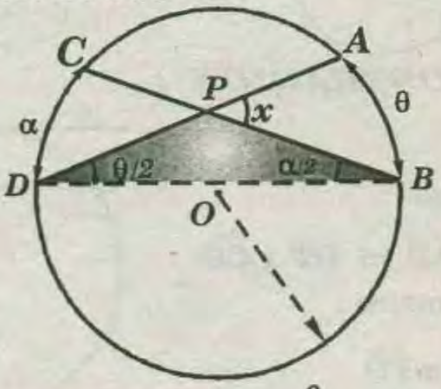
$\boxed{x=\frac{\theta+\alpha}{2}}$

TEOREMA :

La medida del ángulo interior es igual a la semisuma de las medidas de los arcos correspondientes por dicho ángulo y el ángulo opuesto por el vértice.

$$\boxed{x=\frac{m\widehat{AB}+m\widehat{CD}}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Por ángulo inscrito: $m\sphericalangle ADB=\frac{\theta}{2}; m\sphericalangle CBD=\frac{\alpha}{2}$

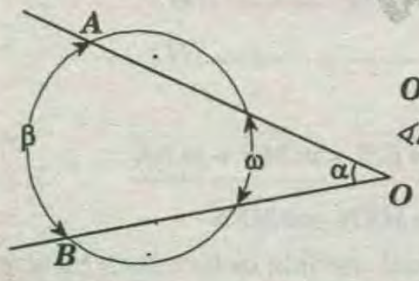
* $\triangle DPB$: $x=\frac{\theta}{2}+\frac{\alpha}{2} \Rightarrow x=\frac{m\widehat{AB}+m\widehat{CD}}{2}$

ÁNGULO EXTERIOR

Su vértice se encuentra en el exterior de la circunferencia , pudiendo ser sus lados dos secantes, una secante y una tangente o dos tangentes. En este último caso se llama ángulo circunscrito.

La medida del ángulo exterior es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos que subtienden sus lados.

I) LADOS SECANTES :

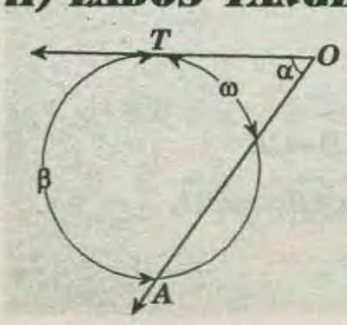


O: punto interior

$\sphericalangle AOB$: ángulo exterior

$$\boxed{\alpha=\frac{\beta-\omega}{2}}$$

II) LADOS TANGENTE y SECANTE :



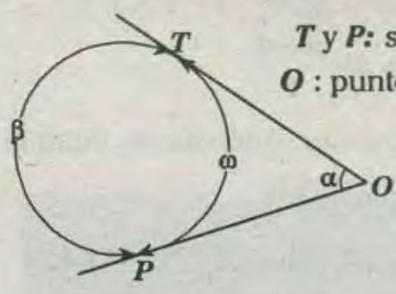
T: punto de tangencia

O: punto exterior

$\sphericalangle AOT$: ángulo exterior

$$\boxed{\alpha=\frac{\beta-\omega}{2}}$$

III) LADOS TANGENTES (ÁNGULO CIRCUNSCRITO):



T y *P*: son puntos de tangencia

O : punto exterior.

$$\boxed{\alpha=\frac{\beta-\omega}{2}}$$

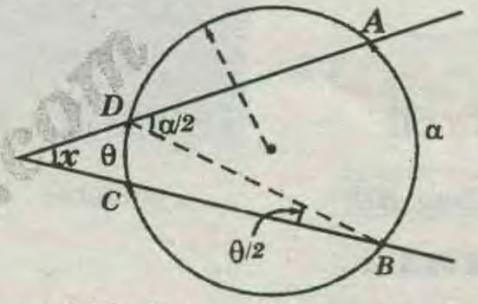
* Además

$$\boxed{\alpha+\omega=180°}$$

TEOREMA :

La medida del ángulo exterior es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos correspondientes por dicho ángulo.

DEMOSTRACIÓN :

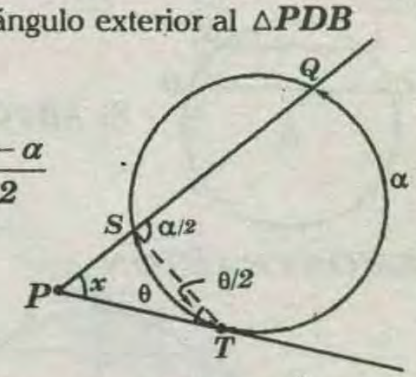


θ y α son medidas de los arcos correspondientes al ángulo *APB*.

* Por ángulo inscrito $m\sphericalangle CBD=\frac{\theta}{2}\, m\sphericalangle BDA=\frac{\alpha}{2}$

* Por medidas de ángulo exterior al $\triangle PDB$

$$\frac{\alpha}{2}=x+\frac{\theta}{2} \Rightarrow x=\frac{\theta-\alpha}{2}$$

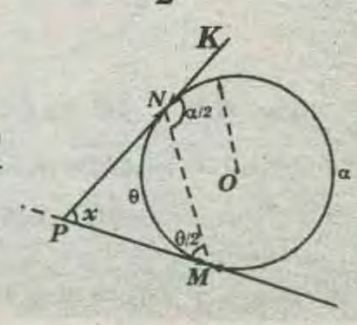


* Por ángulo semi-inscrito : $m\sphericalangle PTS=\frac{\theta}{2}$

* Por ángulo inscrito: $m\sphericalangle TSQ=\frac{\alpha}{2}$

$\triangle PNM$

$$x+\frac{\theta}{2}=\frac{\alpha}{2} \Rightarrow x=\frac{\alpha-\theta}{2}$$



* Por ángulo semiinscrito :

$$m\sphericalangle PMN=\frac{\theta}{2};\ m\sphericalangle KNM=\frac{\alpha}{2}$$

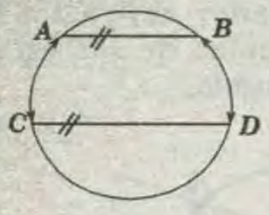
$$\bullet\triangle PMN:\ x+\frac{\theta}{2}=\frac{\alpha}{2}\quad\Rightarrow x=\frac{\alpha-\theta}{2}$$

También $\triangle PMN$ es isósceles. Además, se cumple

$$\boxed{x+\theta=180^\circ}$$

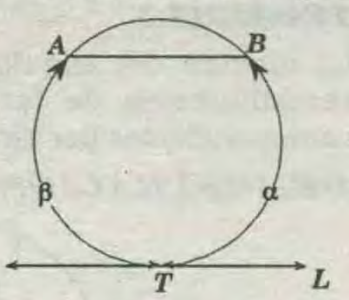
PROPIEDADES FUNDAMENTALES

I) Dos cuerdas paralelas subtienden arcos de igual medida.



* Si: $\overline{AB}\ //\ \overline{CD}$

$\rightarrow\boxed{m\widehat{AC}=m\widehat{BD}}$



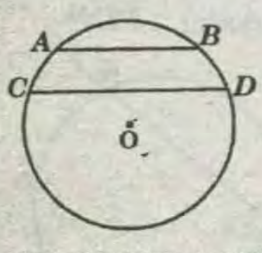
* Si: $\overline{AB}\ //\ \overline{L}$

entonces : $\boxed{\beta=\alpha}$

TEOREMA :

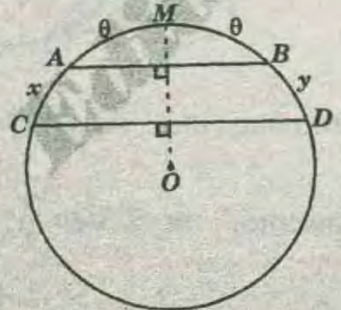
Los arcos de una circunferencia comprendidos entre paralelas , son congruentes . Consideremos los tres casos siguientes .

PRIMER CASO : Las paralelas son secantes .



Si $\overline{AB}//\overline{CD}\Rightarrow\widehat{AC}\cong\widehat{BD}$

DEMOSTRACIÓN :



* Se traza $\overline{OM}\perp\overline{AB}\ \Rightarrow\overline{OM}\perp\overline{CD}$

* Por teorema : $m\widehat{AM}=m\widehat{MB}=\theta$

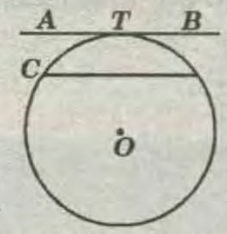
$$\Rightarrow\underbrace{m\widehat{MC}}=\underbrace{m\widehat{MD}}$$

$$\Rightarrow\theta+x=\theta+y$$

$$\Rightarrow x=y$$

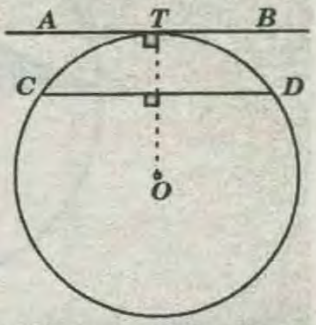
$$\Rightarrow m\widehat{AC}=m\widehat{BD}\ \vee\ \widehat{AC}\cong\widehat{BD}$$

SEGUNDO CASO: Una de las dos paralelas es secante y la otra tangente .



Si $\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{CD}\Rightarrow\widehat{TC}\cong\widehat{TD}$

DEMOSTRACIÓN :



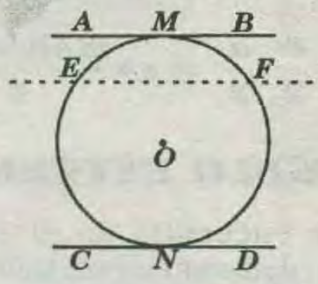
* Se traza

$\overline{OT}\perp\overleftrightarrow{AB}\ \Rightarrow\ \overline{OT}\perp\overline{CD}$

* Por teorema :

$m\widehat{TC}=m\widehat{TD}$

TERCER CASO : Las dos paralelas son tangentes .



Si $\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{CD}\ \Rightarrow\ m\widehat{MEN}=m\widehat{MFN}$

DEMOSTRACIÓN :

* Se traza la recta $\overleftrightarrow{EF}\ //\ \overleftrightarrow{AB}$, será también $\overleftrightarrow{EF}\ //\ \overleftrightarrow{CD}$.

* Por el segundo caso:

$m\widehat{ME}=m\widehat{MF}$.....*(I)*

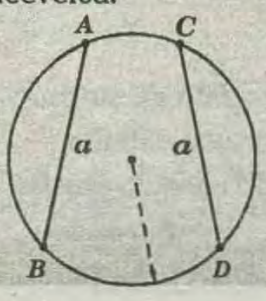
$m\widehat{EN}=m\widehat{FN}$.....*(II)*

* Sumando *(I)* y *(II)*:

$$\underbrace{m\widehat{ME}+m\widehat{EN}}=\underbrace{m\widehat{MF}+m\widehat{FN}}$$

$$\Rightarrow m\widehat{MEN}=m\widehat{MFN}$$

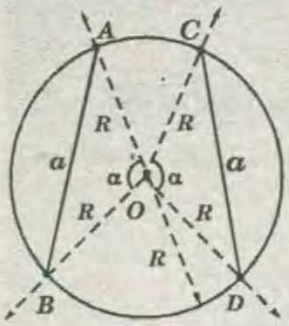
II) Dos cuerdas de igual medida determinan en una misma circunferencia, arcos de igual medida y viceversa.



Si $AB=CD$

$\Rightarrow m\widehat{AB}=m\widehat{CD}$

DEMOSTRACIÓN :



Si $AB=CD=a$ trazamos

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$

$\Rightarrow OA=OB=OC=OD=R$

$\Rightarrow \triangle AOB \cong \triangle COD$ (caso L.L.L)

$\Rightarrow m\sphericalangle AOB = m\sphericalangle COD = \alpha$

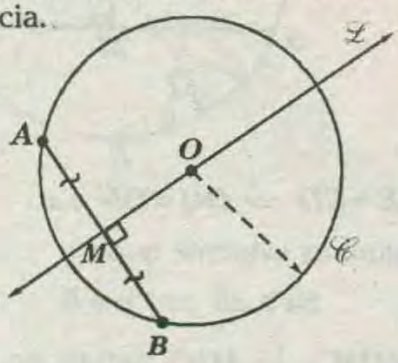
$\Rightarrow m\overset{\frown}{AB} = m\sphericalangle AOB = \alpha$ ($\sphericalangle$ central)

$m\overset{\frown}{CD} = m\sphericalangle COD = \alpha$ ($\sphericalangle$ central)

$\Rightarrow m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$

Análogamente al caso anterior se demuestra que si $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$, entonces $AB=CD$.

III) La mediatriz de toda cuerda de una circunferencia contiene al centro de dicha circunferencia.



Sea $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ mediatriz de $\overline{AB}$ y O : centro de $\mathscr{C}$.

$\Rightarrow O \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

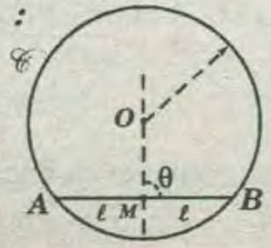
DEMOSTRACIÓN :

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AB}$ entonces todo punto que equidista de A y B pertenece a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, así $PA=PB=d$.

Si O es centro de $\mathscr{C} \Rightarrow OA=OB=R$, es decir, O equidista de A y B, O pertenece a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

$\Rightarrow O \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

NOTA :



Si $AM=MB=\ell$

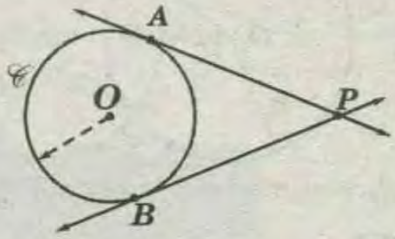
O : centro de $\mathscr{C}$

$\Rightarrow \overline{OM} \perp \overline{AB}$

$\Rightarrow \theta = 90°$

POSTULADO :

Desde un punto exterior a una circunferencia solo se pueden trazar dos rectas tangentes a dicha circunferencia.

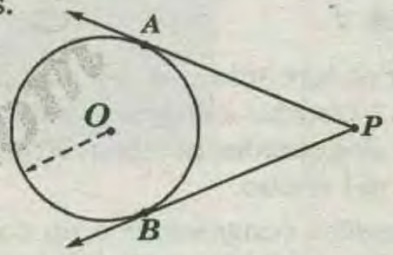


P : punto exterior a $\mathscr{C}$.

$\overline{PA}$ y $\overline{PB}$: rectas tangentes a $\mathscr{C}$.

A y B : puntos de tangencia.

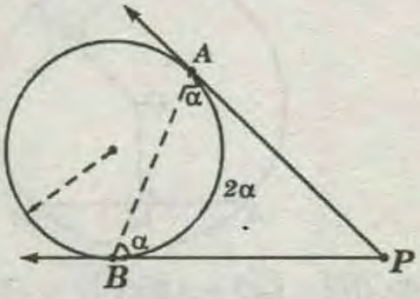
IV) Los segmentos tangentes trazados desde un punto exterior a una misma circunferencia son congruentes.



Sean A y B puntos de tangencia

$\Rightarrow \boxed{PA=PB}$

DEMOSTRACIÓN :

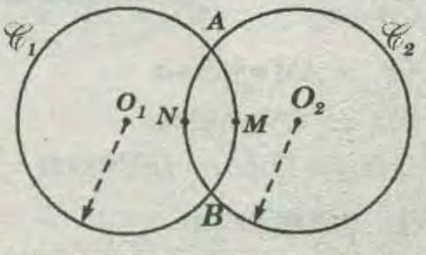


$\sphericalangle PAB$: ángulo semiinscrito $\Rightarrow m\sphericalangle PAB = \dfrac{m\overset{\frown}{AB}}{2} = \alpha$

$\sphericalangle PBA$: ángulo semiinscrito $\Rightarrow m\sphericalangle PBA = \dfrac{m\overset{\frown}{AB}}{2} = \alpha$

$\sphericalangle APB$: isosceles $\Rightarrow PA=PB$

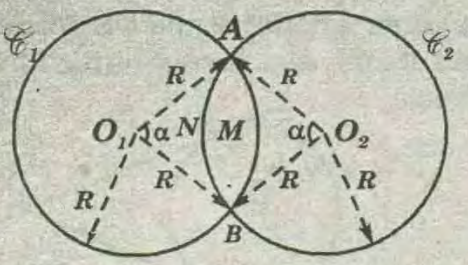
V) Dos circunferencias congruentes que se intersecan determinan dos arcos congruentes.



Si $\mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2 \Rightarrow \boxed{m\overset{\frown}{AMB} = m\overset{\frown}{ANB}}$

WWW.GRATIS2.COM

DEMOSTRACIÓN :



Si $\mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2$ entonces sus radios son de igual longitud, por lo tanto :

$$O_1A=O_1B=R \qquad O_2A=O_2B=R$$

* luego O_1AO_2B es un rombo

$$\Rightarrow m\sphericalangle AO_1B=m\sphericalangle AO_2B$$

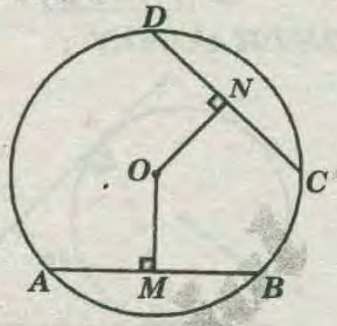
$$\Rightarrow m\overset{\frown}{AMB}=m\overset{\frown}{ANB}$$

TEOREMA :

En una circunferencia , o en circunferencias congruentes , cuerdas congruentes equidistan del centro , y de dos cuerdas no congruentes , la mayor dista menos del centro.

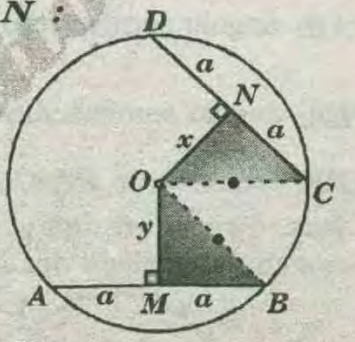
Según las cuerdas congruentes o no congruentes , la demostración se divide en dos partes .

PRIMERA PARTE :



Si $\overline{OM} \perp \overline{AB}$; $\overline{ON} \perp \overline{CD}$ y $AB=CD \Rightarrow OM=ON$

DEMOSTRACIÓN :



Dato : $AB=CD=2a$

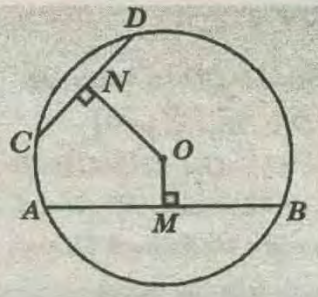
* Si $\overline{OM} \perp \overline{AB} \Rightarrow AM=MB=a$

* Si $\overline{ON} \perp \overline{CD} \Rightarrow CN=ND=a$

$\triangle OMB \cong \triangle ONC\ (LL) \Rightarrow ON=OM \Rightarrow x=y$

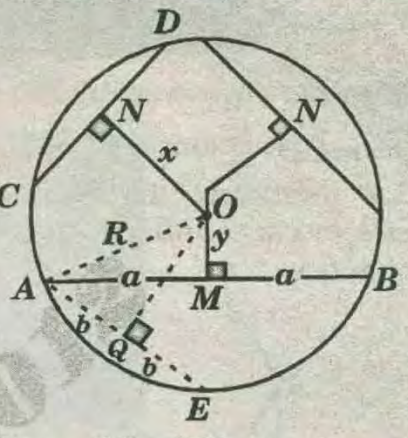
SEGUNDA PARTE :

Si $AB>CD$; $\overline{OM} \perp \overline{AB}$; $\overline{ON} \perp \overline{CD}$



$\Rightarrow$ $\boxed{OM<ON}$

DEMOSTRACIÓN :



* Se traza $AE=CD \Rightarrow OQ=ON=x$

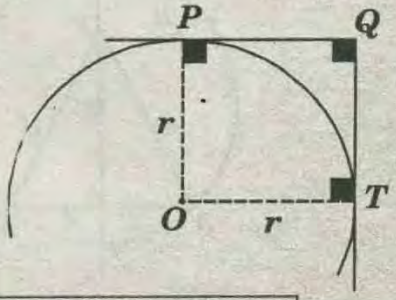
* Según la figura es evidente que :

$$2a>2b \Rightarrow a>b$$

* En el $\triangle AOM$ y $\triangle AOQ$ tienen en común la hipotenusa y como a $a>b \rightarrow \boxed{x>y}$

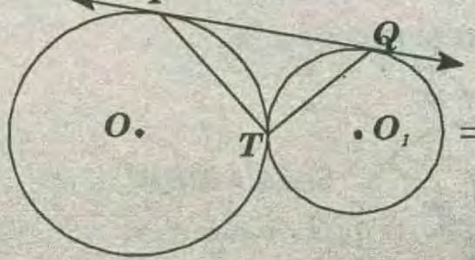
OBSERVACIONES :

♣ Tangentes a una circunferencia que forman ángulo recto.



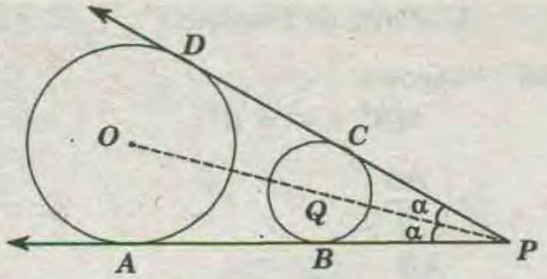
$\boxed{\square OPQT: \text{cuadrado}}$

♣ Si "P", "Q" y "T" son puntos de tangencia:



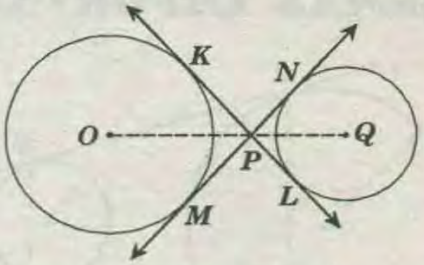
$\Rightarrow$ $\boxed{m\sphericalangle PTQ = 90°}$

♣ $\overline{AB} \wedge \overline{CD}$: tangentes comunes exteriores , "O" "Q" y "P" son colineales.



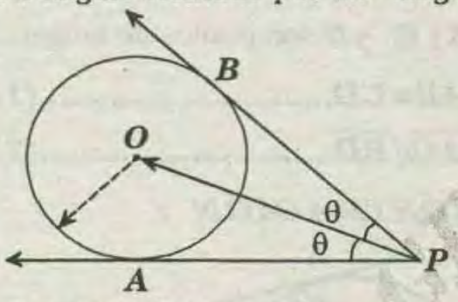
$\rightarrow \boxed{AB = CD}$

♣ $\overline{MN}$ y $\overline{KL}$: tangentes comunes interiores , "O" "P" y "Q" son colineales.



$\rightarrow \boxed{MN = KL}$

♣ La línea que une el centro con el punto exterior es bisectriz del ángulo formado por las tangentes.



* Si : A y B son puntos de tangencia.

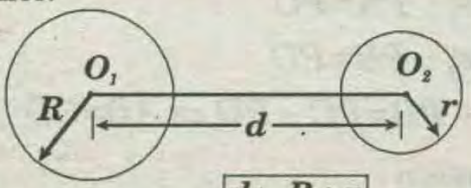
$\rightarrow \boxed{\overline{PO} \text{ es bisectriz del } \sphericalangle APB}$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS

Dos circunferencias de centro O_1 y O_2 en un mismo plano y radios R y r respectivamente, pueden tener las siguientes posiciones.

I) CIRCUNFERENCIAS EXTERIORES :

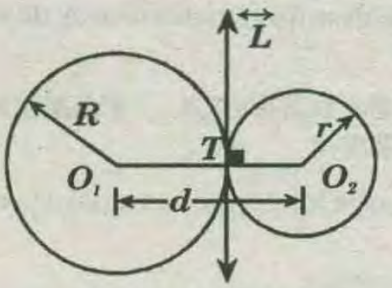
Si la distancia entre los centros es mayor que la suma de sus radios.



$\boxed{d > R + r}$

II) CIRCUNFERENCIAS TANGENTES EXTERIORES :

Si la distancia entre los centros es igual a la suma de los radios.



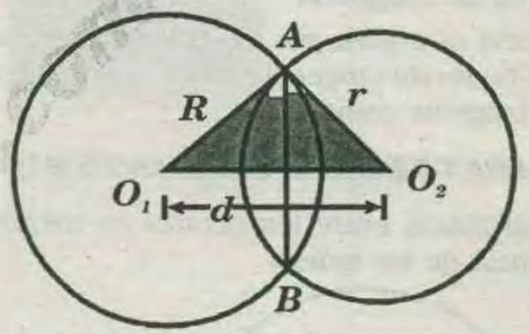
T : Punto de Tangencia

* El segmento que une los centros pasa por el punto de tangencia.

*La recta tangente común interior a ambas circunferencias es perpendicular al segmento que une sus centros.

III) CIRCUNFERENCIA SECANTES :

Si la distancia entre los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.



$\boxed{R - r < d < R + r}$

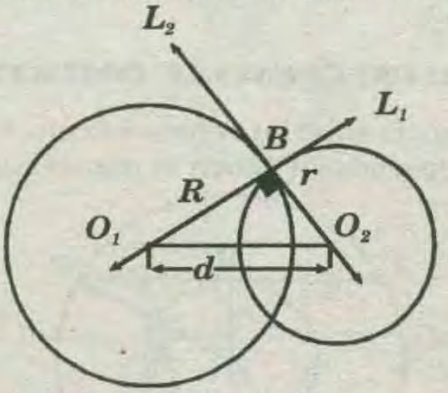
.....(Por existencia de triángulos)

* Tiene dos puntos comunes (A y B)

* La cuerda común $\overline{AB}$ es perpendicular al segmento que une los centros.

IV) CIRCUNFERENCIAS ORTOGONALES:

Si el cuadrado de la distancia entre los centros es igual a la suma de los cuadrados de los radios.



$\boxed{d^2 = R^2 + r^2}$

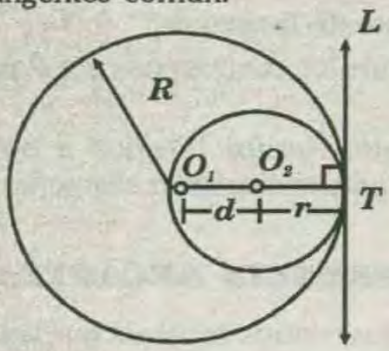
$\boxed{m\hat{O_1BO_2} = 90°}$

L_1: Recta tangente a la circunferencia de centro O_2 en el punto B.

V) CIRCUNFERENCIA TANGENTES INTERIORES :

Si la distancia entre los centros es igual a la diferencia de los radios.

L: Tangentes común.



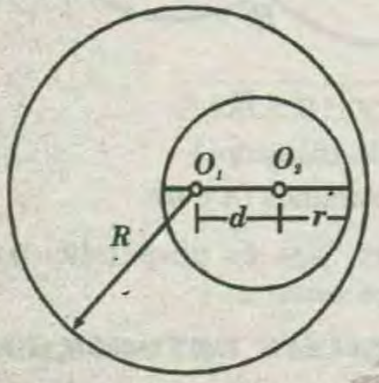
$$\boxed{d = R - r}$$

T: Punto de Tangencia

*La recta que pasa por los centros , también pasa por el punto de tangencia y es perpendicular a la recta tangente común.

VI) CIRCUNFERENCIAS INTERIORES :

Si la distancia entre los centros es menor que la diferencia de los radios.



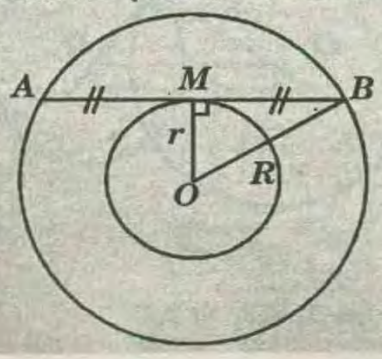
$$d + r < R$$

$$\boxed{d < R - r}$$

*Los puntos de una de ellas (circunferencia de centro O_2) son los interiores a la otra.(Circunferencia de centro O_1).

VII) CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS :

Si la distancia entre los centros es cero, es decir, sus centros coinciden. (Tienen el mismo centro).



M: Punto de tangencia

* $\triangle OMB$: Pitágoras

$$MB^2 + r^2 = R^2$$

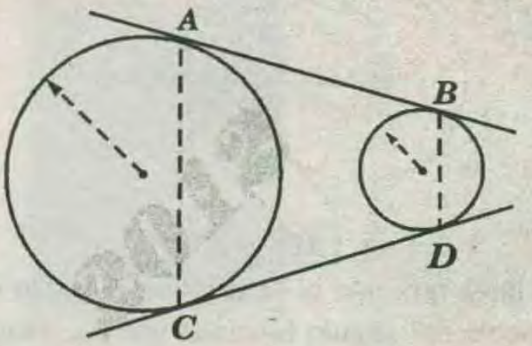
$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2 - r^2$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{2} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{AB = 2\sqrt{R^2 - r^2}}$$

TEOREMAS IMPORTANTES

A

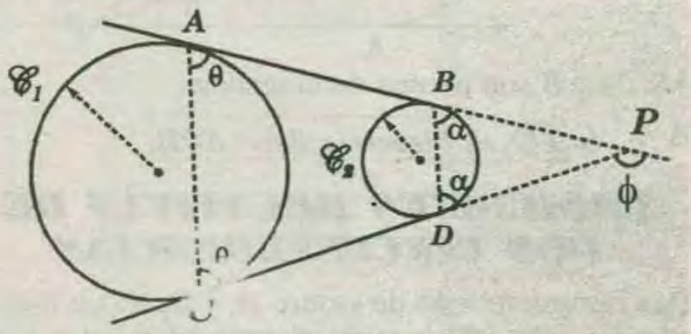


Si A ; B ; C; y D son puntos de tangencia .

$$\overline{AB} = \overline{CD} \quad \text{.....(1)}$$

$$\overline{AC} \parallel \overline{BD} \quad \text{.....(2)}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Prolongamos las tangentes comunes exteriores $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ hasta P .

* Por propiedad de la circunferencia.

* Para $\mathscr{C}_1$: $PA = PC$

* Para $\mathscr{C}_1$: $PB = PD$

$$\Rightarrow PA - PB = PC - PD \Rightarrow AB = CD$$

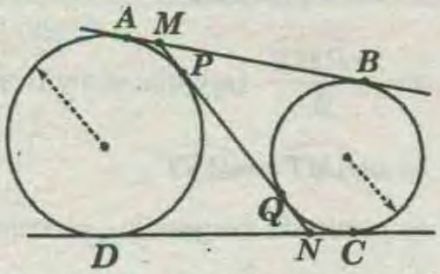
* Así también :

$m\sphericalangle PBD = m\sphericalangle PDB = \alpha$ y $m\sphericalangle PAC = m\sphericalangle PCA = \theta$

$\triangle BPD$: $\phi = 2\alpha$ $\quad$ $\triangle APC$: $\phi = 2\theta$

$$\Rightarrow \alpha = \theta \Rightarrow \overline{AC} \parallel \overline{BD}$$

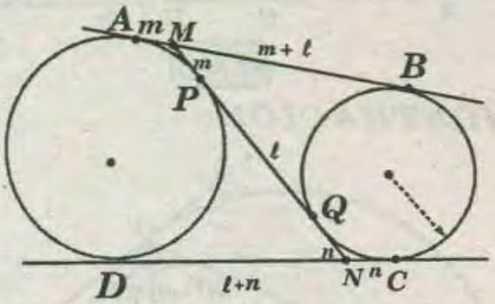
B



Si *A; B; C; D; P* y *Q* son puntos de tangencia .
Entonces :

$$AB=CD=MN \text{ y } AM=MP=QN=NC$$

DEMOSTRACIÓN :



* Por propiedad de la circunferencia .

$MA=MP=m$ $\quad NQ=NC=n$

$NP=ND=n+\ell$ $\quad MB=MD=m+\ell$

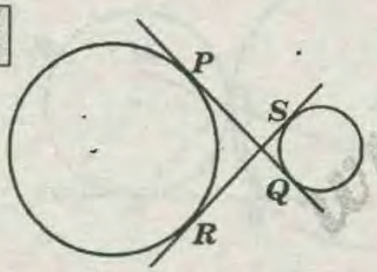
* De la propiedad anterior :

$$AB=CD \Rightarrow 2m+\ell=\ell+2n$$

* Simplificando $m=n$

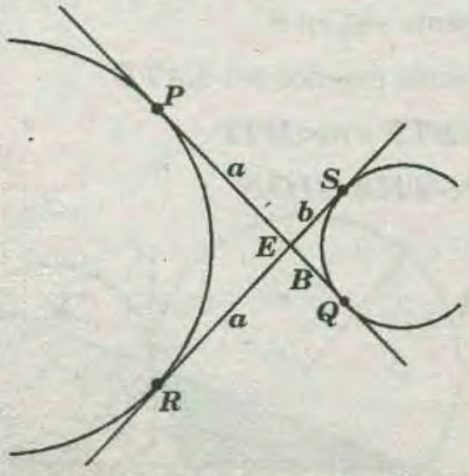
$\Rightarrow AM=MP=QN=NC$ y $AB=CD=MN$

C



$\boxed{PQ=RS}$

DEMOSTRACIÓN :



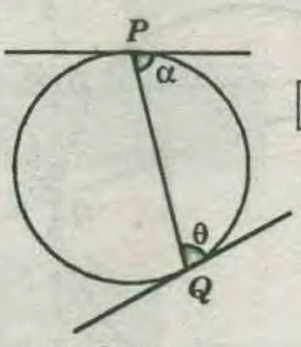
* Por teorema : $PE=ER=a \wedge SE=EQ=b$

* Luego : $PQ=a+b$ .....(I)

$RS=a+b$ .....(II)

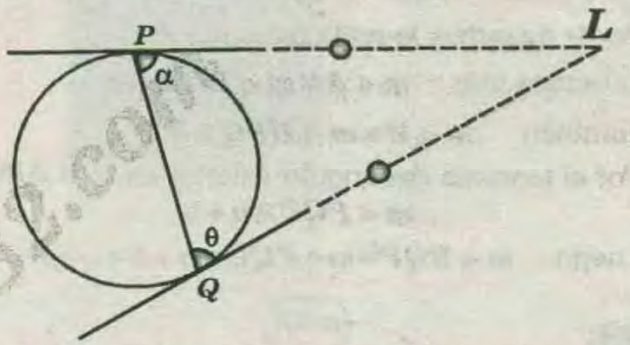
* De *(I)* y *(II)*: $PQ=RS$

D En la figura ; *P* y *Q* son puntos de tangencia , se cumple :



$\boxed{\alpha=\theta}$

DEMOSTRACIÓN :

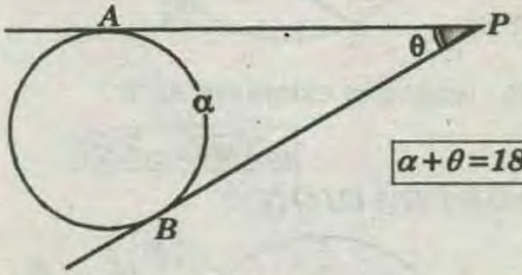


* Las prolongaciones de las tangentes se intersectan en *L* .

* Por teorema : $PL=QL$

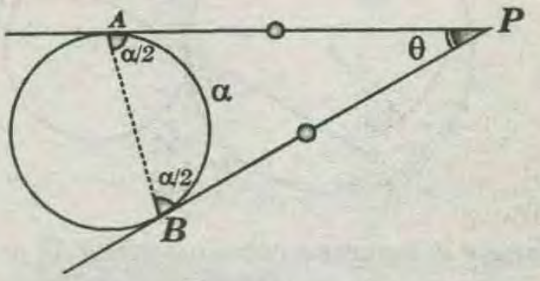
ΔPLQ isósceles $\Rightarrow \alpha=\theta$

E Si *A* y *B* son puntos de tangencia , se cumple:



$\boxed{\alpha+\theta=180°}$

DEMOSTRACIÓN :



* Si $m\overset{\frown}{AB}=\alpha \Rightarrow m\sphericalangle A=m\sphericalangle B=\alpha/2$

* En el ΔAPB isósceles:

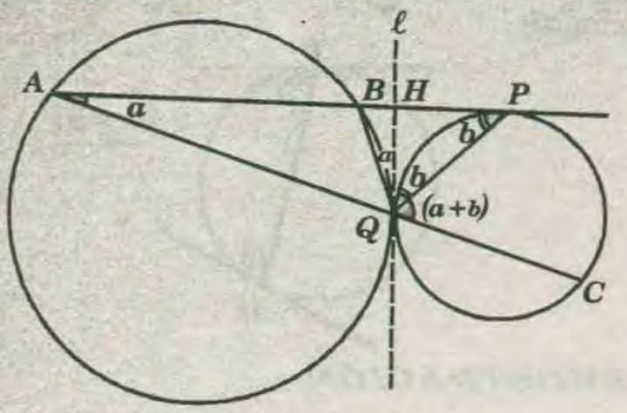
www.GRATIS2.com

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}+\theta=180^\circ \Rightarrow \alpha+\theta=180^\circ$$

F Si P y Q son puntos de tangencia, se cumple:

$\boxed{\alpha=\beta}$

DEMOSTRACIÓN :



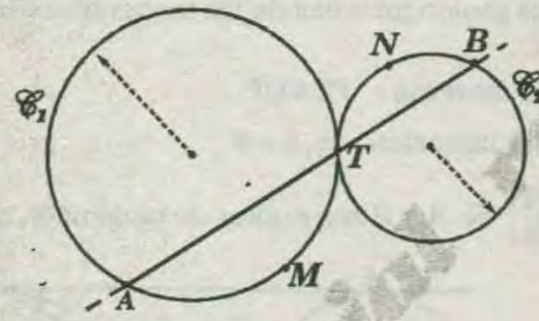
* Por Q trazamos la recta tangente ℓ
* Sabemos que : $m\sphericalangle A=m\sphericalangle BQH=a$
* También : $m\sphericalangle P=m\sphericalangle HPQ=b$
* Por el teorema del ángulo exterior en el $\triangle APQ$:

$$m\sphericalangle PQC=a+b$$

* Luego : $m\sphericalangle BQP=m\sphericalangle PQC=a+b=\alpha=\beta$

G

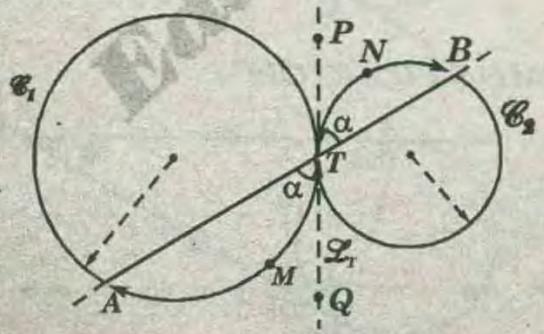
$\boxed{\alpha=\beta}$



$\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: tangentes exteriores en T.

$\boxed{m\widehat{AMT}=m\widehat{BNT}}$

DEMOSTRACIÓN :



* Trazamos la tangente común interior $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

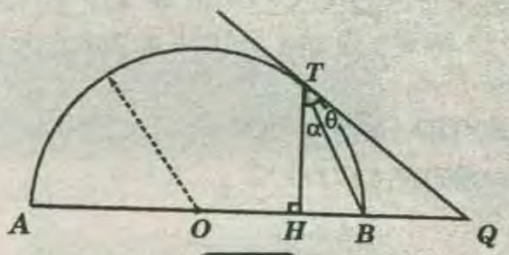
$$\Rightarrow m\sphericalangle PTB=m\sphericalangle QTA=\alpha$$

* En $\mathscr{C}_1$: $\alpha=\dfrac{m\widehat{AMT}}{2}$ (ángulo semiinscrito)

* En $\mathscr{C}_2$: $\alpha=\dfrac{m\widehat{BMT}}{2}$ (angulo semiinscrito)

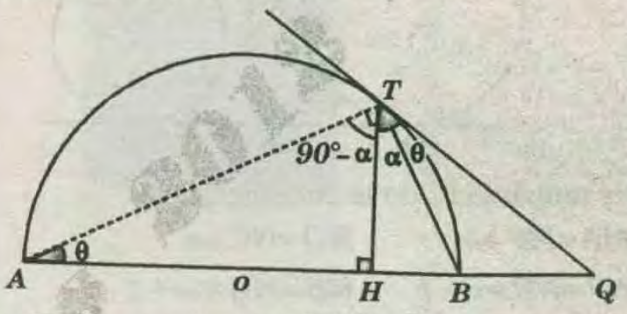
$$\Rightarrow m\widehat{AMT}=m\widehat{BNT}$$

H Si T es punto de tangencia, se cumple :



$\boxed{\alpha=\theta}$

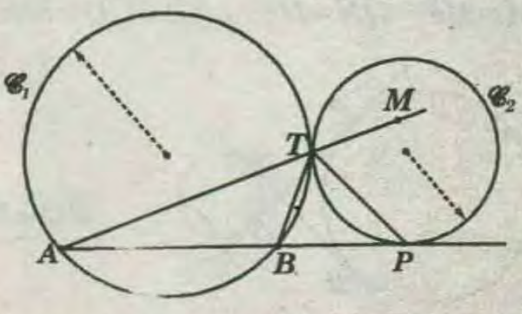
DEMOSTRACIÓN:



* Por teoría: $m\sphericalangle A=m\sphericalangle BTQ=\theta$
* $\triangle ATH$: $\theta+90^\circ-\alpha=90^\circ$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha=\theta}$$

I



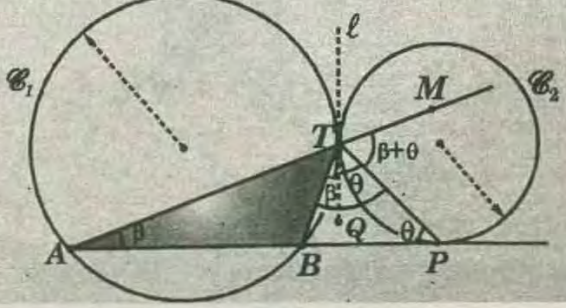
Si $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes exteriores en T.

$\overline{AB}$ tangente a $\mathscr{C}_2$ en P.

$\overline{TP}$: bisectriz exterior del $\triangle ATB$.

$$m\sphericalangle BTP=m\sphericalangle MTP$$

DEMOSTRACIÓN :



* Trazamos $\overleftrightarrow{\ell}$ tangente común interior a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

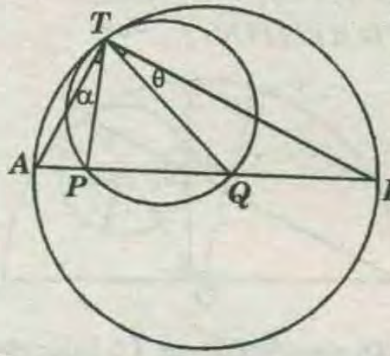
$\Rightarrow m\sphericalangle QTB = m\sphericalangle TAB = \beta$

$m\sphericalangle QTP = m\sphericalangle BPT = \theta$

$\Rightarrow$ En el $\triangle APT$:

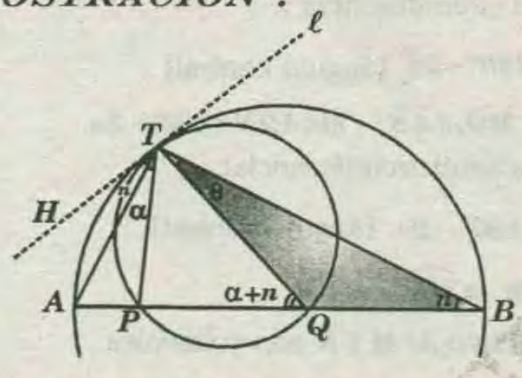
$m\sphericalangle PTM = \beta + \theta \Rightarrow m\sphericalangle BTP = m\sphericalangle PTM$

J Si T es punto de tangencia, se cumple :



$\boxed{\alpha = \theta}$

DEMOSTRACIÓN :



* Por T se traza la recta tangente ℓ .

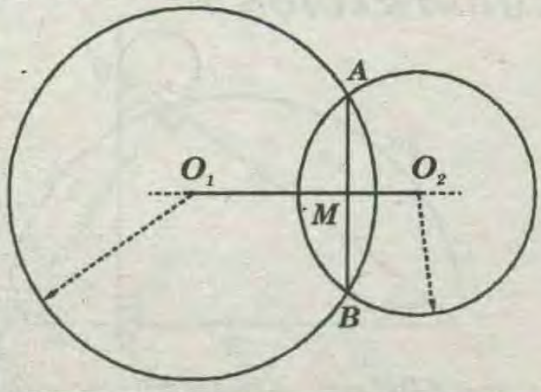
* Por teoría : $m\sphericalangle HTA = m\sphericalangle B = n$

* También : $m\sphericalangle HTP = m\sphericalangle TQA = \alpha + n$

* En el $\triangle QTB$; por el teorema del ángulo exterior :

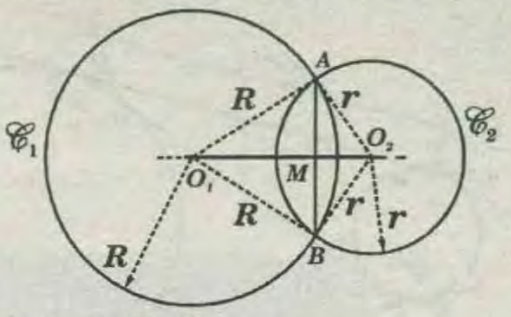
$\alpha + n = \theta + n \Rightarrow \alpha = \theta$

K En dos circunferencias secantes el segmento une los centros es parte de la mediatriz de la cuerda común a las circunferencias .



$\boxed{\overline{O_1O_2} \perp \overline{AB}}$ y $\boxed{AM = MB}$

DEMOSTRACIÓN :



* En $\mathscr{C}_1$: $O_1A = O_1B = R$

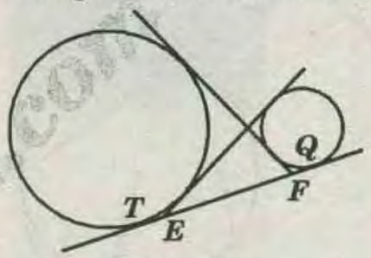
* En $\mathscr{C}_2$: $O_2A = O_2B = r$

$\Rightarrow O_1AO_2B$: trapezoide simétrico

$\Rightarrow$ Por propiedad $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ mediatriz de $\overline{AB}$.

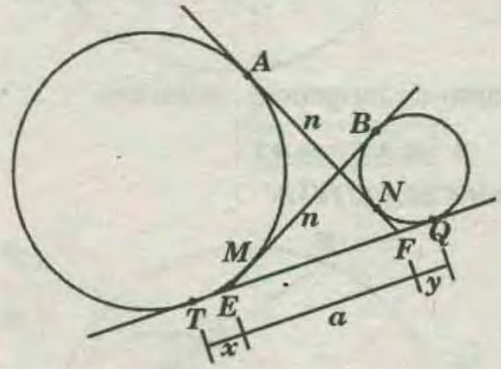
$\Rightarrow AM = MB$

L En la figura mostrada se cumple :



$\boxed{TE = FQ}$

DEMOSTRACIÓN :



* Por propiedad : $AN = BM = n$

* Por teorema : $EB = EQ$

$x + n = a + y$ .....(I)

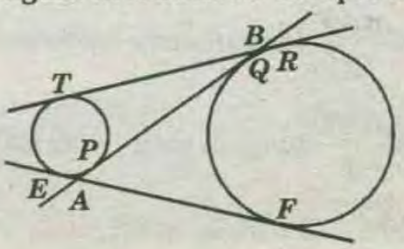
* También : $AF = FT$

$n + y = a + x$ .....(II)

* (I) – (II) : $x + n - n - y = a + y - a - x \Rightarrow 2x = 2y$

$\Rightarrow x = y$

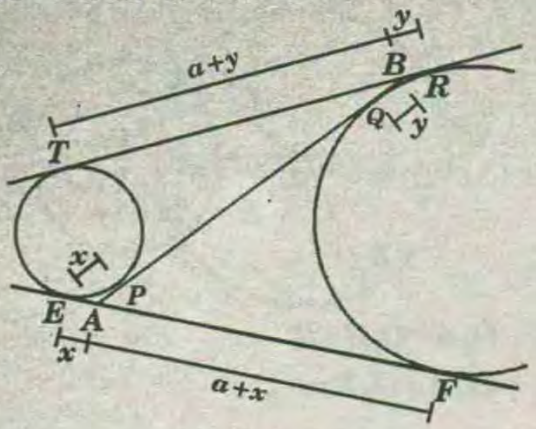
M En la figura mostrada se cumple :



$EA = BQ$

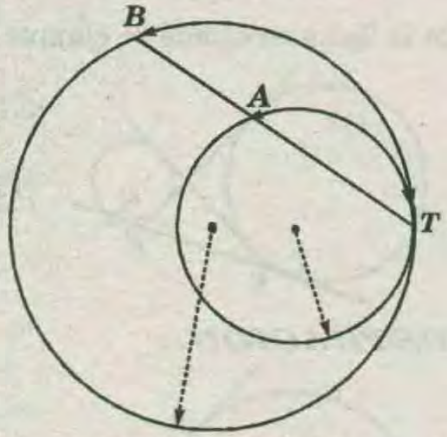
GRATIS2.com

DEMOSTRACIÓN :



* Por propiedad : $AE=AP=x$; $RB=BQ=y$
* También : $BP=BT=a+y$; $AQ=AF=a+x$
* Pero: $TR=EF \Rightarrow a+2y=a+2x \Rightarrow x=y$

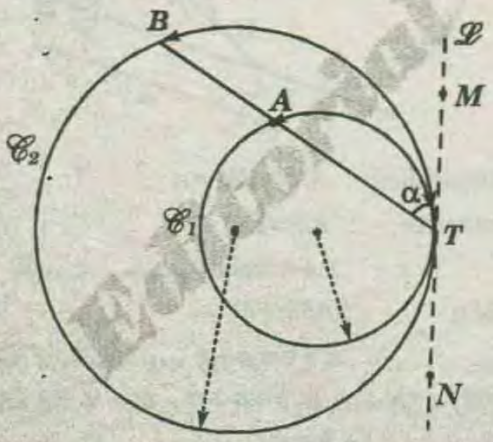
IV



Si T es punto de tangencia , entonces .

$$\Rightarrow \boxed{m\widehat{AT}=m\widehat{BT}}$$

DEMOSTRACIÓN :



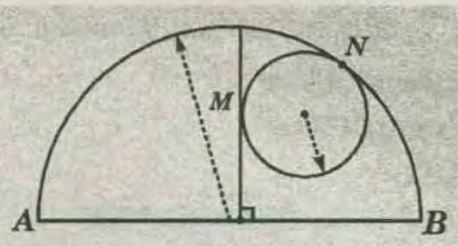
Por T trazamos $\overrightarrow{\mathscr{L}}$ tangente común exterior a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

* En $\mathscr{C}_1$: $\alpha=\dfrac{m\widehat{AT}}{2}$ *(ángulo semi - inscrito)*

* En $\mathscr{C}_2$: $\alpha=\dfrac{m\widehat{BT}}{2}$ *(ángulo semi - inscrito)*

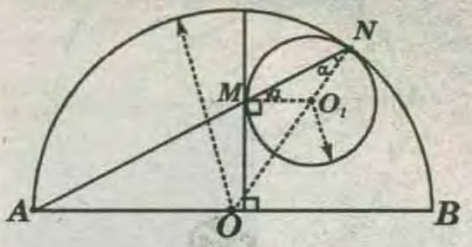
$\Rightarrow m\widehat{AT}=m\widehat{BT}$

V



Si M y N son puntos de tangencia .
Entonces A, M y N son colineales .

DEMOSTRACIÓN :



* Sea $m\sphericalangle MNO_1=m\sphericalangle NMO_1=\alpha$ ($\triangle$ isósceles)
* Para la circunferencia :

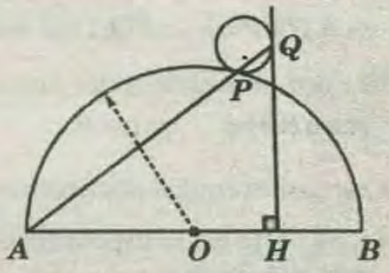
$m\widehat{AN}=180°-2\alpha$ (ángulo central)

* Como $\overline{MO_1}\,//\,\overline{AB}$: $m\sphericalangle AON=180°-2\alpha$
* Para la semicircunferencia:

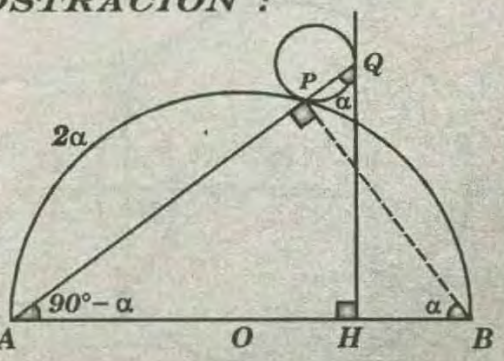
$m\widehat{AN}=180°-2\alpha$ (ángulo central)

* Se nota $m\widehat{MN}=m\widehat{AN}$
* Por lo tanto A; M y N son colineales .

VI Si P y Q son puntos de tangencia, entonces los puntos A, P y Q son colineales .



DEMOSTRACIÓN :



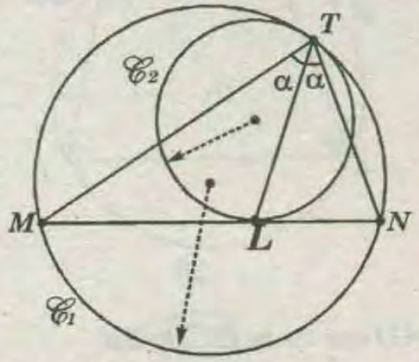
* Si : $m\sphericalangle AQH=\alpha \Rightarrow m\sphericalangle B=\alpha$
* Luego: $m\widehat{AP}=2\alpha$.

* Observamos que : $m\widehat{AP}=m\widehat{PQ}=2\alpha$

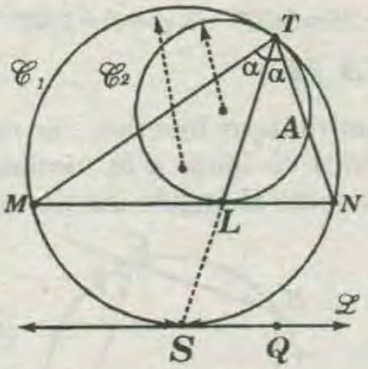
* Esto demuestra que :

Los puntos A; P y Q son colineales

P Si T y L son puntos de tangencia , consideramos así que $m\sphericalangle MTL=m\sphericalangle NTL$.



DEMOSTRACIÓN :



* Se prolonga $\overline{TL}$ hasta S $(S \in \mathscr{C}_1)$

* Luego se traza la recta $\mathscr{L}'$ (tangente a $\mathscr{C}_1$ en S).

* Por propiedad :

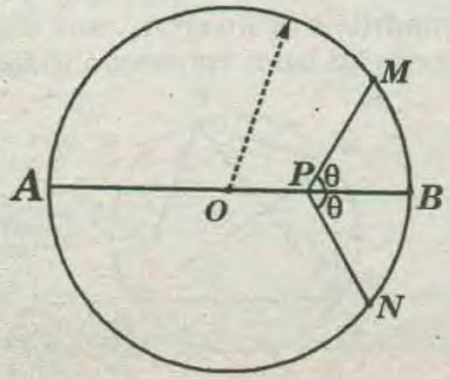
$$m\widehat{TAL}=m\widehat{TNS} \Rightarrow m\sphericalangle NLT=m\sphericalangle QST$$

(ángulo semi-inscrito) por lo cual $\overline{MN} \parallel \overrightarrow{\mathscr{L}}$.

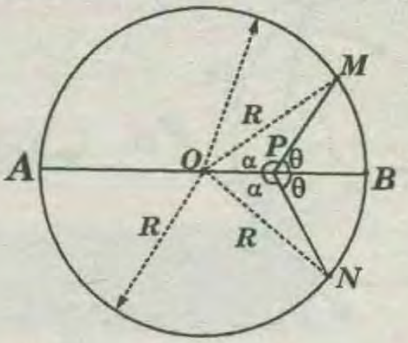
* Por propiedad de la circunferencia .

$$m\widehat{MS}=m\widehat{SN} \Rightarrow m\sphericalangle MTS=m\sphericalangle STN$$

Q Si $\overline{AB}$ es diámetro y $m\sphericalangle MPB=m\sphericalangle NPH$ obtenemos que $m\widehat{MB}=m\widehat{NB}$



DEMOSTRACIÓN :



* Sea $m\sphericalangle MPB=m\sphericalangle NPB=\theta$

$\rightarrow m\sphericalangle OPM=m\sphericalangle OPN=\alpha$

* Además $OM=ON=R$

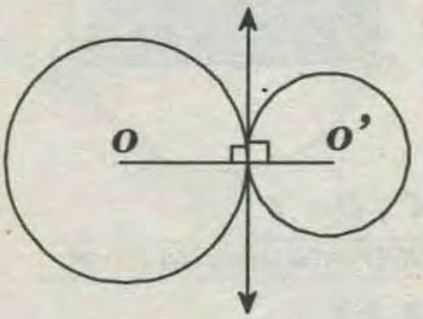
* Por lo tanto $\triangle OPM$ y $\triangle OPN$ son congruentes (Criterio $L.L.A_{mayor}$)

* Entonces :

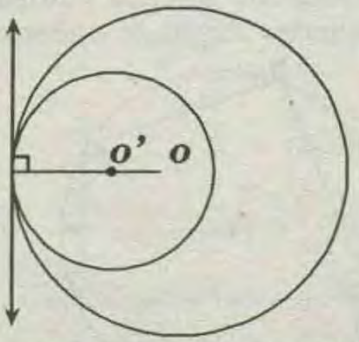
$$m\sphericalangle MOP=m\sphericalangle NOP \Rightarrow m\widehat{MB}=m\widehat{BN}$$

RECOMENDACIONES PARA RESOLVER PROBLEMAS DE ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

♠ Se tiene dos circunferencia tangentes interiormente o tangentes exteriormente, por lo general los datos están en una circunferencia y la incógnita están en la otra, trace en estos casos por el punto de contacto una ***tangente común***.

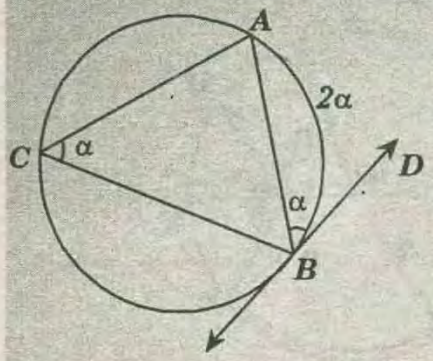


L: Tangente Común



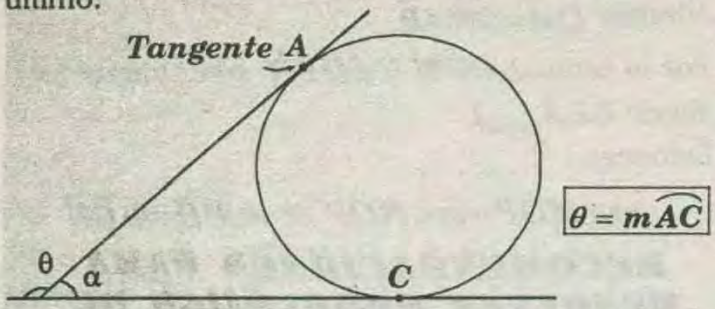
♠ Debemos tener en cuenta que la medida del ángulo semi-inscrito es igual a la medida del ángulo

inscrito que subtiende el mismo arco.



$\boxed{m\widehat{ACB}=m\widehat{ABD}}$

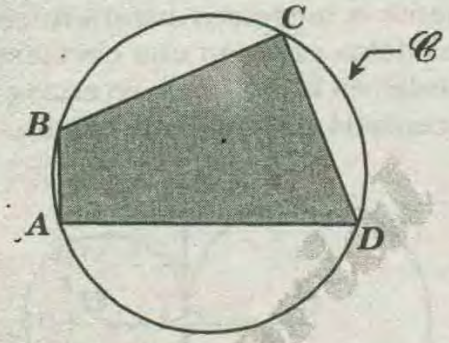
♠ Debemos tener en cuenta que la medida del ángulo adyacente a un ángulo circunscrito es igual a la medida del arco que subtiende los lados de este último.



$\boxed{\theta = m\widehat{AC}}$

CUADRILÁTERO INSCRITO

Es aquel cuadrilátero cuyos vértices pertenecen a una misma circunferencia.

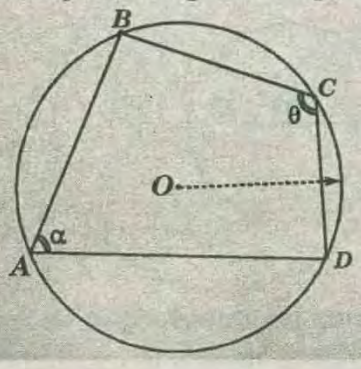


* Si A , B , C y $D \in \mathscr{C}$

$\boxed{\rightarrow \quad ABCD \text{ está inscrito en } \mathscr{C}.}$

TEOREMA I :

En todo cuadrilátero inscrito , la suma de las medidas de los pares angulares opuestos es *180°*.

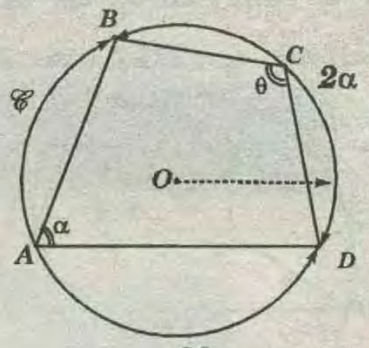


Sean: $m\sphericalangle BAD = \alpha$ y $m\sphericalangle BCD = \theta$

$\Rightarrow \boxed{\alpha + \theta = 180°}$

DEMOSTRACIÓN :

* Por ángulo inscrito en una circunferencia :



2θ

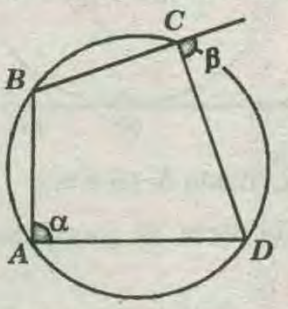
Si $m\sphericalangle BAD=\alpha \Rightarrow m\widehat{BCD}=2\alpha$

y $m\sphericalangle BCD=\theta \Rightarrow m\widehat{BAD}=2\theta$

en $\mathscr{C}$: $2\alpha+2\theta=360° \Rightarrow \alpha+\theta=180°$

TEOREMA II :

En todo cuadrilátero inscrito , la medida de un ángulo interior es igual a la medida del ángulo exterior adyacente al ángulo interior opuesto .



$\boxed{\alpha = \beta}$

DEMOSTRACIÓN :

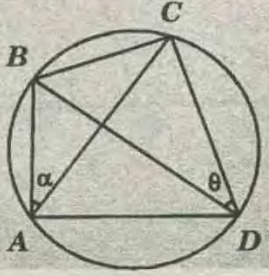
$\alpha = \dfrac{m\widehat{BCD}}{2}$ *(ángulo inscrito)* .....**(I)**

$\beta = \dfrac{m\widehat{BCD}}{2}$ *(ángulo exinscrito)*.....**(II)**

* De **(I)** y **(II)**: $\boxed{\alpha = \beta}$

TEOREMA III :

En todo cuadrilátero inscrito , sus diagonales determinan con los lados opuestos ángulos de igual medida .



$\boxed{\alpha = \theta}$

DEMOSTRACIÓN :

$$\alpha = \frac{m\widehat{BC}}{2} \quad \text{.....(I)}$$

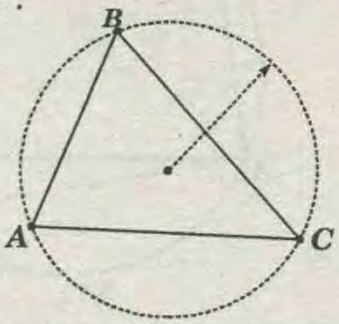
$$\theta = \frac{m\widehat{BC}}{2} \quad \text{.....(II)}$$

* De *(I)* y *(II)* : $\boxed{\alpha = \theta}$

TRIÁNGULO INSCRIPTIBLE EN UNA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA :

Todo triángulo es inscriptible en una circunferencia. Sea el triángulo *ABC*, por *A ; B* y *C* se puede trazar una circunferencia .



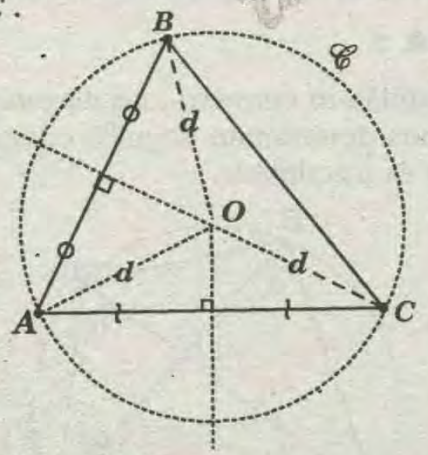
DEMOSTRACIÓN :

* En el triángulo *ABC* , trazamos las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ las cuales se intersecan en *O*.

* Del teorema de la mediatriz , $OA=OB=d$.

Aunque también $OA=OC=d$.

* Por lo tanto , $OA=OB=OC=d$; y así con centro en radio de longitud *d* se puede trazar una circunferencia $\mathscr{C}$, la cual va a contener a los puntos *A ; B ;* y *C* .



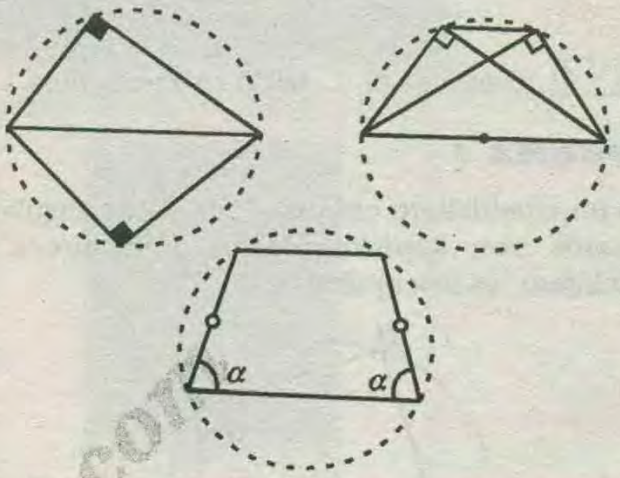
NOTA :

En el triángulo *OBC*, la altura trazada desde *O* es mediana , bisectriz y parte de la mediatriz , de ahí que , en todo triángulo las mediatrices de sus tres lados son concurrentes (concurrentes significa que se intersecan en único punto).

CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE

Es el que se puede inscribir en una circunferencia, para que esto suceda , dicho cuadrilátero deberá cumplir cualquiera de las propiedades que se cumplen en el cuadrilátero inscrito.

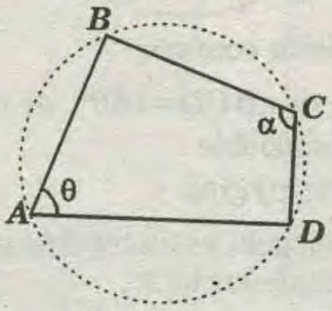
EJEMPLOS :



Un cuadrilátero será inscriptible si cumple por lo menos una de las siguientes condiciones:

1) Que la suma de las medidas de los ángulos internos opuestos sea *180°*.

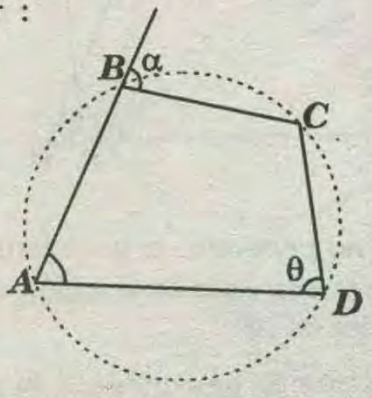
Es decir :



Si , $\boxed{\theta+\alpha=180°}$,entonces el ⏢*ABCD* es inscriptible.

2) Que la medida de un ángulo interior sea igual a la medida del ángulo exterior opuesto.

Es decir :

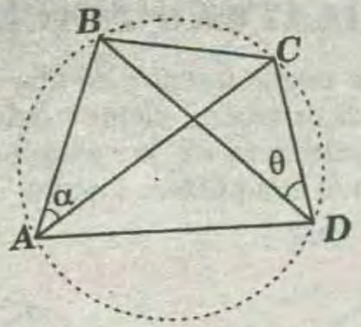


Si, $\boxed{\theta=\alpha}$, entonces el ⏢*ABCD* es inscriptible.

3) Que las medidas de los ángulos determinados

por las diagonales con los lados opuestos sean de igual medida.

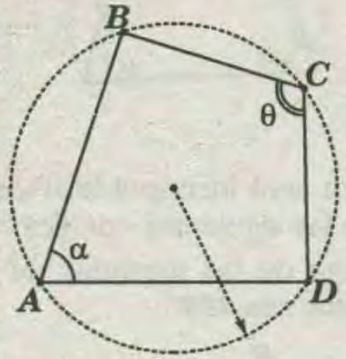
Es decir :



Si, $\boxed{\alpha = \theta}$, entonces el $\square ABCD$ es inscriptible.

TEOREMA :

Si en un cuadrilátero convexo , los pares angulares opuestos son suplementarios , entonces el cuadrilátero es inscriptible .

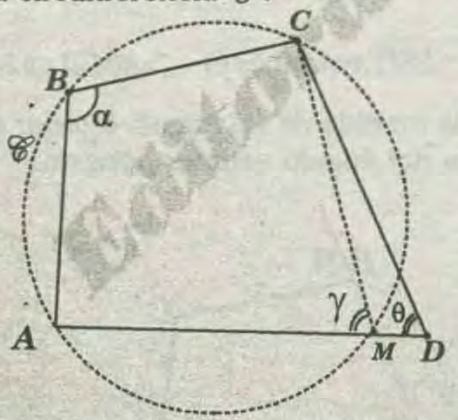


ABCD : cuadrilátero convexo .

Si $m\sphericalangle BAD + m\sphericalangle BCD = 180°$, el cuadrilátero ***ABCD*** resulta inscriptible .

DEMOSTRACIÓN :

* Como todo triángulo es inscriptible por ***A ; B*** y ***C***, trazamos la circunferencia $\mathscr{C}$.



Asumiendo que ***D*** no pertenece a $\mathscr{C}$ tenemos dos posibilidades : este puede estar en la región exterior o en la región interior de $\mathscr{C}$.

$\boxed{1^{ro}}$ Suponiendo que ***D*** pertenece a la región exterior , entonces $\overline{AD}$ interseca a $\mathscr{C}$ en ***M*** y en el cuadrilátero inscrito ***ABCM*** .

$$\alpha + \gamma = 180°$$

* Pero de la condición :

$$\alpha + \theta = 180°$$

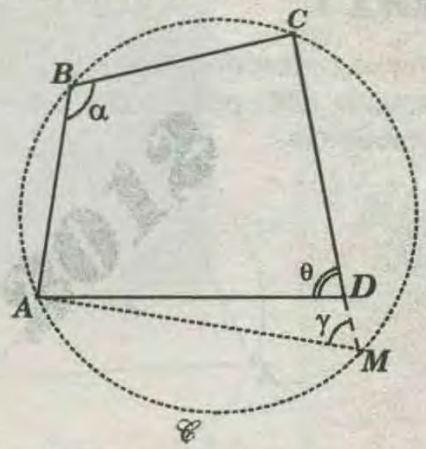
$$\Rightarrow \gamma = \theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Luego en el $\triangle MCD$: $\gamma \geq \theta$ ..... *(II)*

de *(I)* y *(II)* la $m\sphericalangle MCD = 0°$ entonces ***D*** pertenece a $\mathscr{C}$ $(M = D)$

* Por lo tanto , ***A; B; C*** y ***D*** pertenecen a $\mathscr{C}$.

$\boxed{2^{do}}$ Ahora suponiendo que ***D*** pertenece a la región interior , prolongamos $\overline{CD}$ hasta intersección a $\mathscr{C}$ en ***M*** .



* En el cuadrilátero inscrito ***ABCM*** : $\alpha + \gamma = 180°$

* Pero de la condición :

$$\alpha + \theta = 180°$$

$$\Rightarrow \theta = \gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Luego en el $\triangle AMD$: $\theta \geq \gamma$ ..... *(II)*

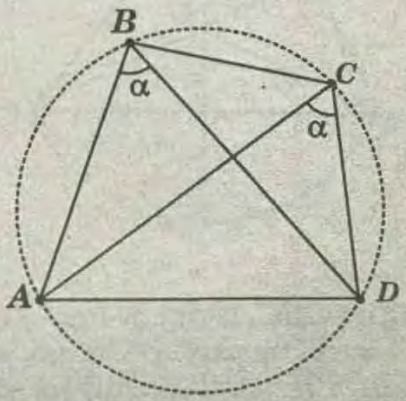
de *(I)* y *(II)* la $m\sphericalangle MAD = 0°$

* Entonces ***D*** pertenece $\mathscr{C}$ $(M = D)$

* Por lo tanto, ***A; B;*** C y ***D*** pertenecen a $\mathscr{C}$.

TEOREMA :

Si en un cuadrilátero convexo , las diagonales y los lados opuestos determinan ángulos congruentes ; significa que es inscriptible.



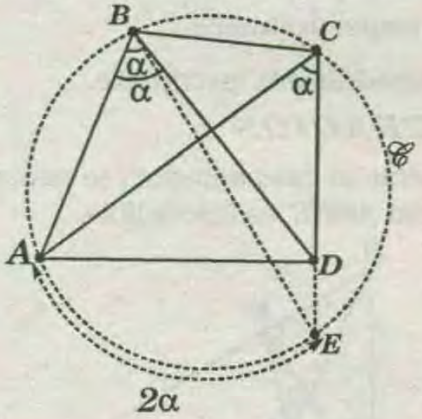
ABCD : cuadrilátero convexo.

Si $m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle ACD$, entonces el cuadrilátero *ABCD* es un cuadrilátero inscriptible .

DEMOSTRACIÓN :

* Asumiendo que la circunferencia contiene a los puntos *A ; B ; C* y no contiene a *D*, tenemos dos posibilidades :

1ro Suponiendo que el punto *D* pertenece a la región interior de dicha circunferencia .



Entonces la prolongación de $\overline{CD}$ interseca a $\mathscr{C}$ en *E* y , por la propiedad del ángulo inscrito .

$$m\sphericalangle ABE = m\sphericalangle ACE = \alpha$$

* Pero por la condición :

$$m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle ACD = \alpha$$
$$\Rightarrow m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle ABE$$

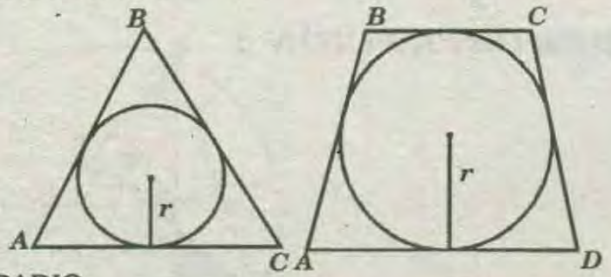
lo cual solamente sucede si $D = E$; así que $D \in \mathscr{C}$.

NOTA:

Dado un cuadrilátero *ABCD*, al prolongar el lado *AD* hasta el punto *E* , tal que $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle CDE$, determinamos que el cuadrilátero es inscriptible.

CIRCUNFERENCIA INSCRITA

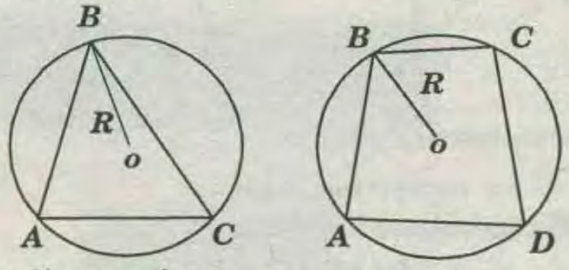
Se dice que una circunferencia esta inscrita en un polígono , si se encuentra en el interior de éste y sus lados son tangentes a dicha circunferencia. A su radio se le llama *INRADIO*.



* *r* : INRADIO
* $\triangle ABC$: Triángulo.
* $\square ABCD$: Cuadrilátero circunscrito.
* La circunferencia es inscrita.

CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA

Es aquella circunferencia que pasa por todos los vértices de un polígono. A su radio se le llama *CIRCUNRADIO.*

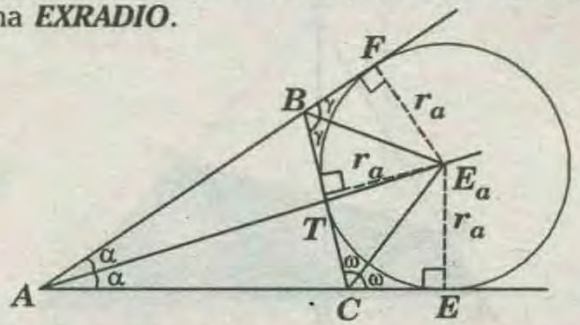


* *R* : Circunradio
* *O*: Circuncentro
* $\triangle ABC$: Triángulo Inscrito
* $\square BCD$: Cuadrilátero Inscrito

La circunferencia es circunscrita.

CIRCUNFERENCIA EXINSCRITA

Se dice que una circunferencia es exinscrita a un triangulo , si se encuentra en el exterior de dicho triángulo y es tangente a un lado y a las prolongaciones de los otros dos lados. A su radio se le llama *EXRADIO*.



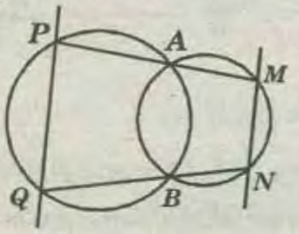
F, T y *E:* son puntos de tangencia

* r_a: exradio Relativo al lado *BC*.
* $\triangle ABC$: Triángulo exinscrito.
* En todo triángulo , hay tres circunferencias exinscritas.

TEOREMAS IMPORTANTES

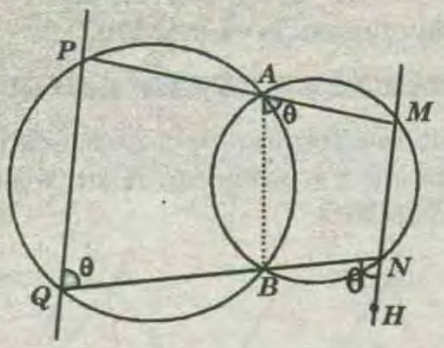
TEOREMA 1 :

En la figura , se tienen dos circunferencias secantes en *A* y *B*. Se cumple :



$\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{MN}$

DEMOSTRACIÓN :



* ***PABQ*** cuadrilátero inscrito :

$$\Rightarrow m\sphericalangle Q = m\sphericalangle BAM = \theta$$

* ***AMNB*** cuadrilátero inscrito :

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAM = m\sphericalangle BNH = \theta$$

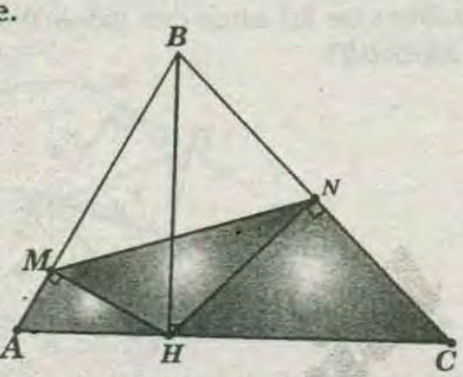
* Los ángulos alternos internos ***PQB*** y ***BNH*** tienen igual medida .

* En consecuencia : $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{MN}$

TEOREMA 2 (DE TAYLOR) :

En todo triángulo oblicuángulo , las proyecciones ortogonales del pie de una de sus alturas , sobre sus lados adyacentes y los extremos del lado relativo a dicha altura, son vértices de un cuadrilátero inscriptible.

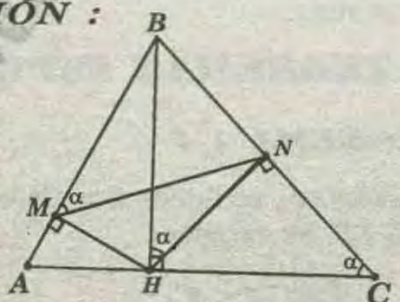
I



Sean ***M*** y ***N*** proyección ortogonal de ***H*** sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente .

$\square$ ***AMNC*** : cuadrilátero inscriptible .

DEMOSTRACIÓN :



* En el $\triangle BHC$:

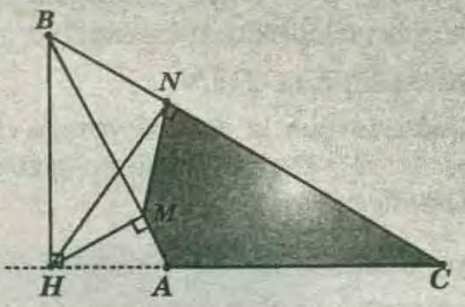
$$m\sphericalangle BHN = m\sphericalangle BCH = \alpha$$

$\square$***MBNH:*** inscriptible . $m\sphericalangle BMN = m\sphericalangle BHN = \alpha$

$$\Rightarrow m\sphericalangle BMN = m\sphericalangle ACB = \alpha$$

Por lo tanto , ***AMNC :*** cuadrilátero inscriptible.

II

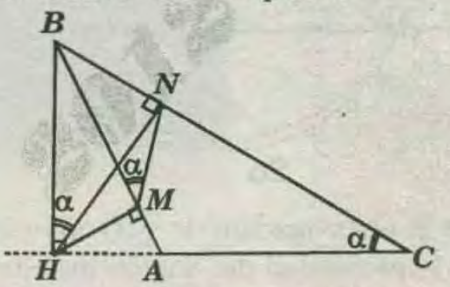


Sean ***M*** y ***N*** proyección ortogonal de ***H*** sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente .

$\square$ ***AMNC:*** cuadrilátero inscriptible.

DEMOSTRACIÓN :

* Análogamente al caso anterior , se demuestra que el cuadrilátero ***AMNC*** es inscriptible.



* En el $\triangle BHC$: $m\sphericalangle BHN = m\sphericalangle BCH = \alpha$

* $\square$ ***MNBH***: inscriptible

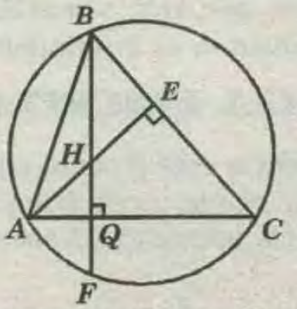
$$m\sphericalangle BHN = m\sphericalangle BMN = \alpha$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle BMN = m\sphericalangle BCA = \alpha$$

* Por lo tanto , ***AMNC:*** cuadrilátero inscriptible.

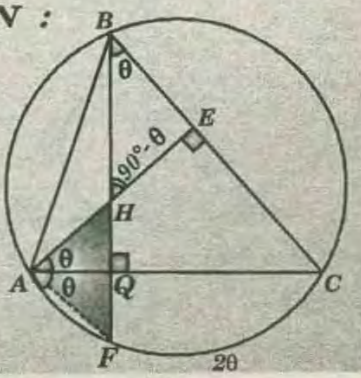
TEOREMA 3 :

Si $\overline{AE} \wedge \overline{BQ}$ son alturas , se cumple :



$\boxed{HQ = QF}$

DEMOSTRACIÓN :



Si : $m\sphericalangle HAQ=\theta \Rightarrow m\sphericalangle HBE=\theta$

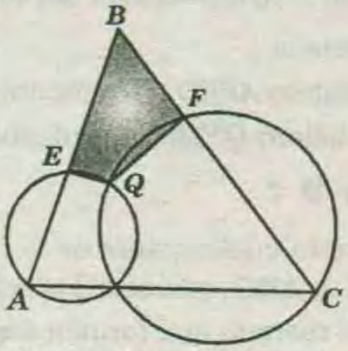
$m\overset{\frown}{FC}=2\theta \Rightarrow m\sphericalangle CAF=\theta$

ΔFAH isósceles : $\overline{AQ}$ es mediatriz de $\overline{HF}$

$\Rightarrow \boxed{HQ=QF}$

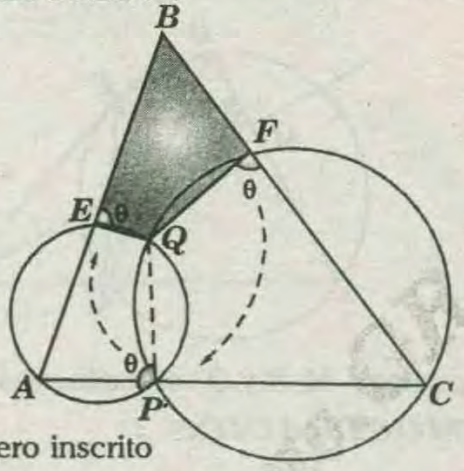
TEOREMA 4 :

Si ABC es un triángulo cualesquiera



Cuadrilátero $EBFQ$ es inscriptible

DEMOSTRACIÓN :



En el cuadrilátero inscrito

* $PQFC$: $m\sphericalangle QFC=m\sphericalangle APQ=\theta$

* $AEQP$: $m\sphericalangle BEQ=m\sphericalangle APQ=\theta$

El cuadrilátero $EBFQ$ es inscriptible

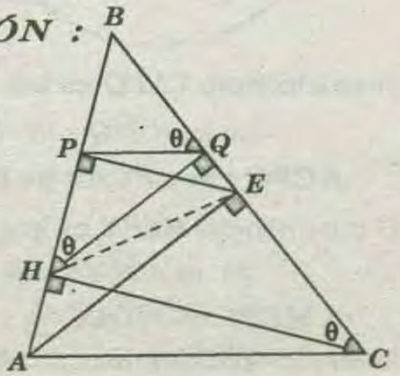
TEOREMA 5 :

En un triángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AE}$ y $\overline{CH}$

Luego se trazan $\overline{HQ}\perp\overline{BC}$ y $\overline{EP}\perp\overline{AB}$

Entonces : $\overline{PQ}\,//\,\overline{AC}$

DEMOSTRACIÓN :



* Cuadrilátero $AHEC$ inscriptible :

$m\sphericalangle PHE=m\sphericalangle C=\theta$

* Cuadrilátero $HPQE$ inscriptible:

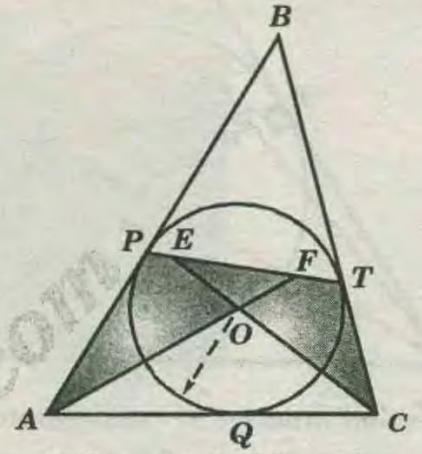
$m\sphericalangle PQB=m\sphericalangle PHE=\theta$

* Los ángulos correspondientes PQB y ACB tienen igual medida.

* En consecuencia: $\overline{PQ}\,//\,\overline{AC}$

TEOREMA 6 :

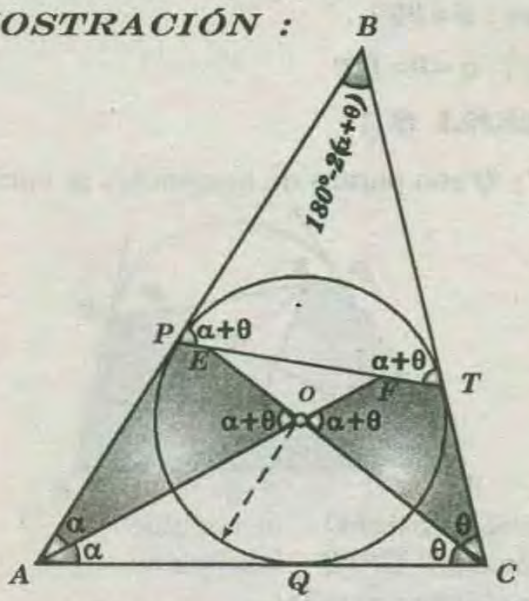
Si P; T y Q son puntos de tangencia, se cumple:



Cuadrilátero $APEO$: Inscriptible

Cuadrilátero $OFTC$: Inscriptible

DEMOSTRACIÓN :



ΔAOC: $m\sphericalangle EOA=m\sphericalangle FOC=\alpha+\theta$

ΔABC: $m\sphericalangle ABC=180°-2(\alpha+\theta)$

ΔBPT: $m\sphericalangle BPT=m\sphericalangle BTP=\alpha+\theta$

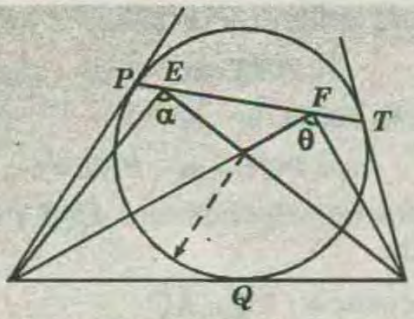
* En consecuencia :

Cuadrilátero $APEO$: Inscriptible

Cuadrilátero $OFTC$: Inscriptible

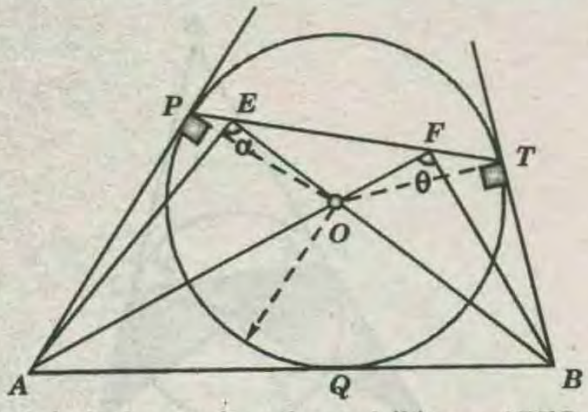
TEOREMA 7 :

Si P; T y Q son puntos de tangencia, se cumple:



$\boxed{\alpha=\theta=90^\circ}$

DEMOSTRACIÓN :



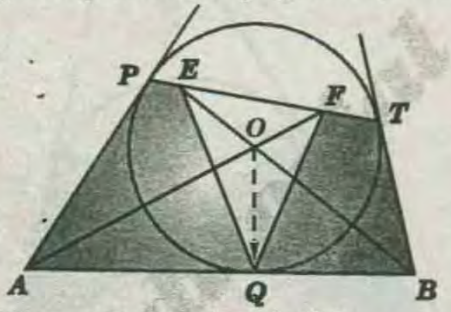
* Por propiedad anterior el cuadrilátero ***APEO*** es inscriptible , entonces : $\alpha=90^\circ$

* El cuadrilátero ***OFTB*** tambien es inscriptible , entonces : $\theta=90^\circ$

* Luego : $\alpha=\theta=90^\circ$

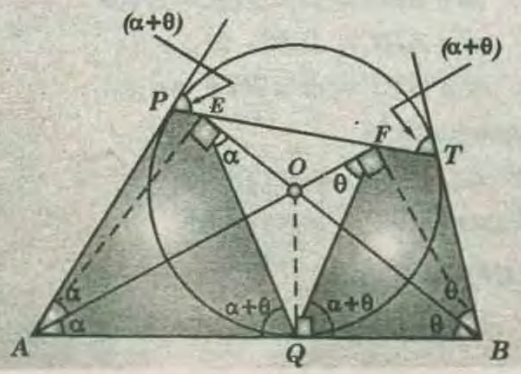
TEOREMA 8 :

Si ***P ; T*** y ***Q*** son puntos de tangencia , se cumple :



Cuadrilátero ***APEO*** : Inscriptible
Cuadrilátero ***QFTB*** : Inscriptible

DEMOSTRACIÓN :



* Por propiedad anterior :

$$m\sphericalangle AEB=m\sphericalangle AFB=90^\circ$$

AEOT : Incriptible $\Rightarrow$ $m\sphericalangle OEQ=\alpha$

QOFB : Incriptible $\Rightarrow$ $m\sphericalangle OFQ=\theta$

$\Delta AFO : m\sphericalangle FQB=\alpha+\theta$

$\Delta QEB : m\sphericalangle EQA=\alpha+\theta$

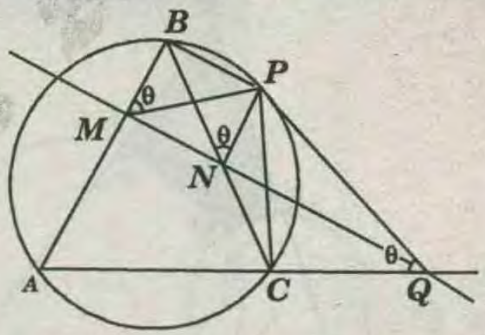
* Sabemos que : $m\sphericalangle P=m\sphericalangle T=\alpha+\theta$

* En consecuencia :

Cuadrilátero ***APEO*** : Inscriptible
Cuadrilátero ***QFTB*** : Inscriptible

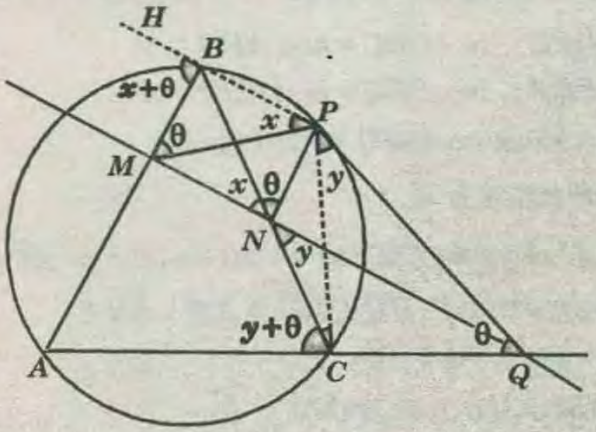
TEOREMA 9 :

Si ***P*** , es un punto cualesquiera de la circunferencia circunscrita al ΔABC , se trazan los segmentos $\overline{PM}$, $\overline{PN}$ y $\overline{PQ}$ de manera que formen ángulos de igual medida con los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente , se cumple :



Los puntos : ***M, N*** y ***Q*** son colineales .

DEMOSTRACIÓN :



* El cuadrilátero ***CNPQ*** es inscriptible .

$$\Rightarrow m\sphericalangle CNQ=m\sphericalangle CPQ=y$$

$\Delta CPQ : m\sphericalangle PCA=y+\theta$

* El cuadrilátero ***MBPN*** es inscriptible :

$$\Rightarrow m\sphericalangle MNB=m\sphericalangle MPB=x$$

$\Delta MBP:\ m\sphericalangle HBM=x+\theta$

* En el cuadrilátero inscrito ***ABPC***; cumple :

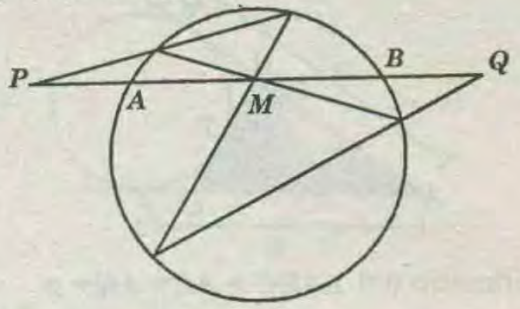
$$x+\theta=y+\theta \Rightarrow x=y$$

* Esto demuestra que :

Los puntos M, N y Q son colineales

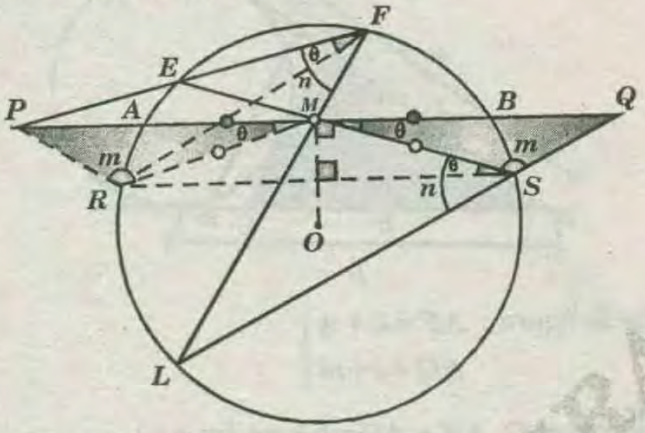
TEOREMA 10 :

Si $AM=MB$, se cumple :



$$AP=BQ$$

DEMOSTRACIÓN :



* Se traza $\overline{RS} \perp \overline{OM} \Rightarrow \overline{PQ} // \overline{RS}$;

$RM=MS$ y $m\sphericalangle AMR=m\sphericalangle BMS=\theta$

* Además como : $m\sphericalangle BMS=m\sphericalangle MSR=m\sphericalangle EFR=\theta$

* Luego el cuadrilátero $PFMR$ es inscriptible .

* En donde : $m+n=180°$

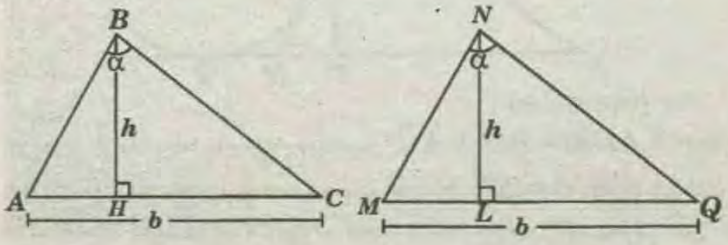
Pero como : $m\sphericalangle EFL=m\sphericalangle ESL=n$

* entonces : $\triangle RPM \cong \triangle SQM$ (ALA)

$$\Rightarrow AP+AM=MB+BQ \Rightarrow \boxed{AP=BQ}$$

TEOREMA 11 :

Si dos triángulos tienen respectivamente un ángulo de igual medida y sus lados opuestos de igual longitud , además las alturas relativas a dichos lados son congruentes , entonces dichos triángulos son congruentes.



Si $m\sphericalangle ABC=m\sphericalangle MNQ=\alpha$

$AC=MQ=b$ y $BH=NL=h$

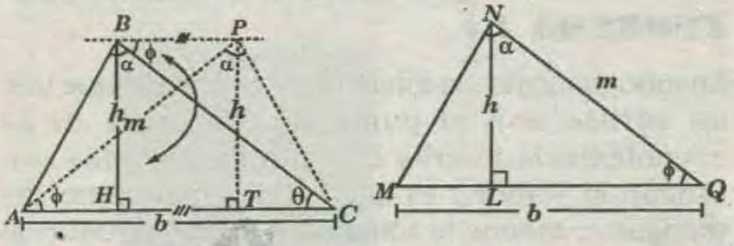
$\Rightarrow$ el $\triangle ABC$ y el $\triangle MNQ$ son congruentes.

DEMOSTRACIÓN :

* La demostración de este teorema necesita una consideración muy importante ya que existen dos posibilidades.

$$\triangle ABC \cong \triangle MNQ \text{ o } \triangle ABC \cong \triangle QNM$$

* Si consideramos $BC>BA$ y $NQ>NM$, solo se cumple el primer caso.



Al ser $m\sphericalangle NQM=\phi$; $m\sphericalangle BCA=\theta$ si $\phi=\theta$, quedará demostrado el teorema.

Trazamos el triángulo APC congruente al triángulo QNM , es decir :

$$AP=QN=m \text{ y } m\sphericalangle PAC=m\sphericalangle NQM=\phi$$

* Como $BH=PT=h \Rightarrow \overline{BP} // \overline{AC}$

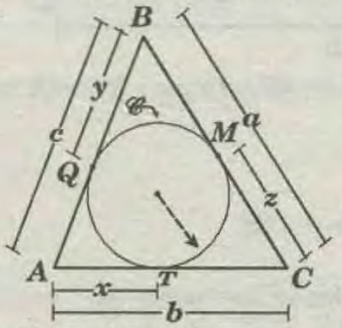
* Pero también el cuadrilátero $ABPC$ es inscriptible.

$\Rightarrow m\sphericalangle PBC=m\sphericalangle PAC=\phi$ y como $\overline{BP} // \overline{AC}$, entonces $m\sphericalangle ACB=m\sphericalangle PBC \Rightarrow \theta=\phi$

* con lo cual queda demostrado el teorema debido a que la $m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle NMQ$ y se cumple el caso (A.L.A)

CIRCUNFERENCIA INSCRITA AL TRIÁNGULO

Es aquella circunferencia cuyo centro es el incentro del triangulo y es tangente a los lados del triángulo.



* se cumple :

$$\boxed{\begin{array}{l} x=p-a \\ y=p-b \\ z=p-c \end{array}}$$

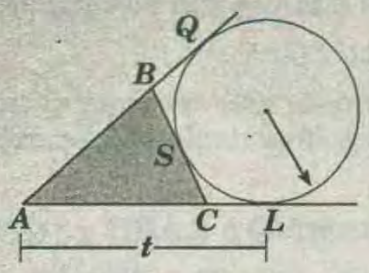
$\mathscr{C}$: Circunferencia.

M, Q y T: puntos de tangencia.

Donde "p" es semiperímetro de la región triangular ABC.

PROPIEDAD :

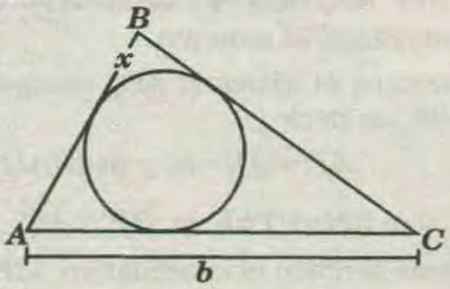
Q, S y L son puntos de tangencia.



$$\boxed{t = p_{\Delta ABC}}$$

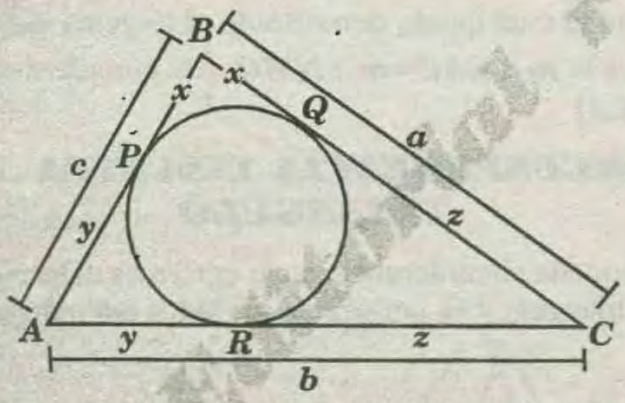
TEOREMA I :

En todo triángulo , la longitud del segmento que une un vértice con el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con uno de los lados que forman el vértice , es igual al semiperímetro del triángulo ; menos la longitud del lado opuesto al vértice mencionado.



$$\boxed{x = p - b}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Por teorema: $BP=BQ=x$; $AP=AR=y$; $RC=QC=z$
* Pero: $\left.\begin{array}{l} y = c - x \\ z = a - x \end{array}\right\}$
* Sumando: $\underbrace{y + z} = a + c - 2x$

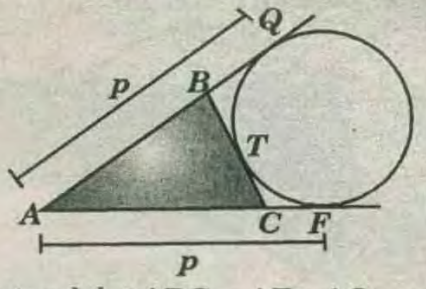
$$\Rightarrow b = a + c - 2x \Rightarrow 2x = a + c - b$$
$$\Rightarrow 2x = \underbrace{a + c + b} - 2b$$
$$\Rightarrow 2x = 2p - 2b \Rightarrow x = p - b$$

* Análogamente se puede demostrar:

$$y = p - a \quad \wedge \quad z = p - c$$

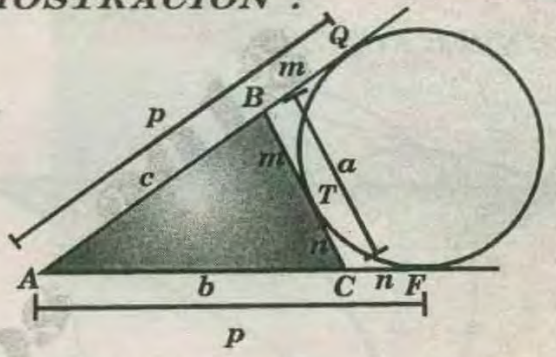
TEOREMA II :

En un triángulo ABC, la prologación de $\overline{AC}$ es tangente en F, a la circumferencia exinscrita , relativa a $\overline{BC}$. Entonces $\overline{AF}$ mide igual que el semiperímetro del triángulo del triángulo ABC .



Semiperímetro del $\Delta ABC = AF = AQ = p$

DEMOSTRACIÓN :

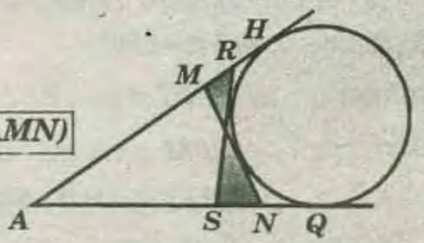


* De la figura : $\left.\begin{array}{l} AF = b + n \\ AQ = c + m \end{array}\right\}$
* Sumando : $AF + AQ = b + c + (m + n)$
* Pero : $AF = AQ$

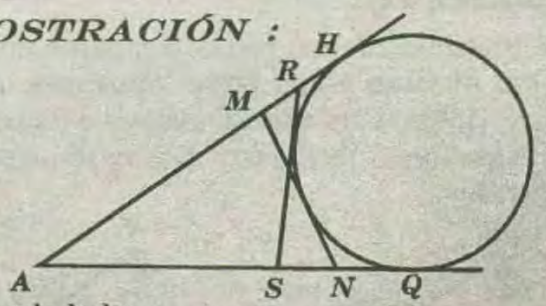
$$\Rightarrow 2AF = a + b + c = 2p \quad \Rightarrow AF = p$$

TANGENTES ISOPERIMÉTRICOS :

$$\boxed{2p(\Delta ARS) = 2p(AMN)}$$



DEMOSTRACIÓN :



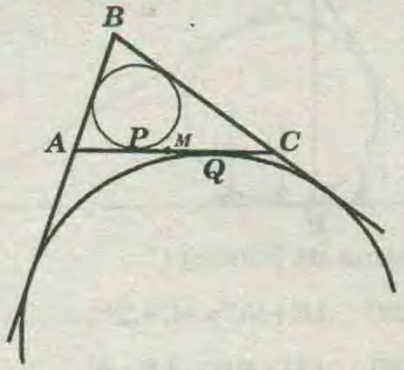
* Por propiedad :

$$2p(\Delta ARS) = AH + AQ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$
$$2p(\Delta AMN) = AH + AQ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* De (I) y (II): $(2p(\Delta ARS) = 2p(\Delta AMN)$

TEOREMA III :

En todo triángulo , el punto medio de un lado , es también el punto medio del segmento determinado por los puntos de tangencia de dicho lado con la circunferencia inscrita y la correspondiente exinscrita.



M punto medio de $\overline{AC} \Rightarrow \boxed{PM = MQ}$

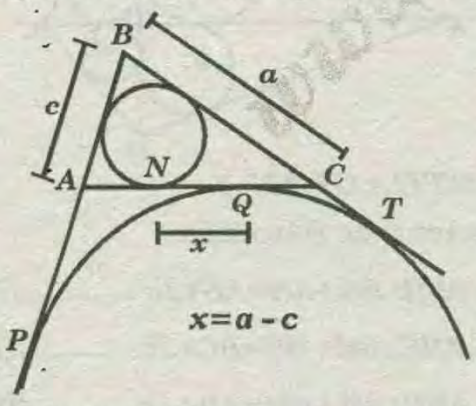
DEMOSTRACIÓN :

* Por dato : $AM=MC$
* Por propiedad : $\left.\begin{aligned} AP &= p - BC \\ QC &= p - BC \end{aligned}\right\}$
* Luego : $AP=QC$
* Pero : $PM = \underline{AM} - \underline{AP}$

$MQ = MC - QC \Rightarrow \boxed{PM=MQ}$

TEOREMA IV :

En todo triángulo , la longitud del segmento determinado por los puntos de tangencia de un lado con la circunferencia inscrita y con la circunferencia exinscrita relativa a dicho lado es igual a la diferencia de las longitudes de los otros dos lados .



DEMOSTRACIÓN :

* Por teorema : $BP=BT$
* Pero: $BP=c+AQ$ y $BT=a+CQ$

Igualando : $c+AQ=a+CQ$

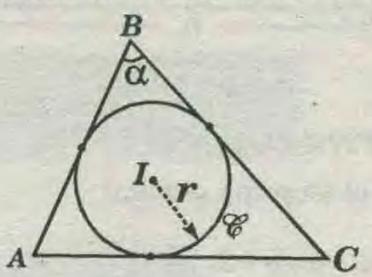
$$AQ - CQ = a - c$$

$$\underbrace{AQ - AN}_{x} = a - c$$

$$\Rightarrow x = a - c$$

TEOREMA DE PONCELET

En todo triángulo se cumple que la suma de las longitudes de dos lados es igual a la suma de la longitud del tercer lado y dos veces el inradio multiplicado por la cotangente de la mitad de la medida del ángulo que se opone al tercer lado.

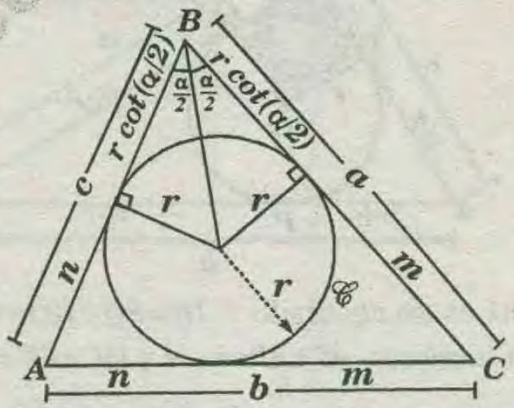


$\mathscr{C}$: circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$.

r : inradio del $\triangle ABC$.

$$\boxed{AB+BC=AC+2r\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

DEMOSTRACIÓN :



$$AB=n+r\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)=c \quad \text{.....(I)}$$

$$BC=m+r\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)=a \quad \text{.....(II)}$$

$$AC=n+m=b$$

* Sumando *(I)* y *(II)* :

$$a+c=\underbrace{m+n}+2r\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

* De *(III)* :

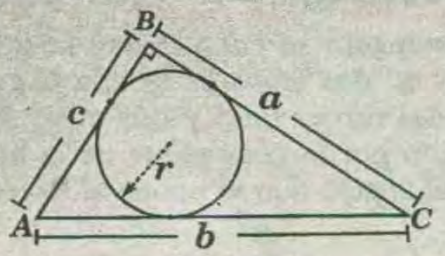
$$\Rightarrow a+c=b+2r\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow AB+BC=AC+2r\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

CASO PARTICULAR DEL TEOREMA DE PONCELET

En todo triángulo rectángulo , la suma de las longitudes de los catetos es igual a la suma de la

longitud de la hipotenusa y dos veces el inradio .



$\boxed{a+c=b+2r}$

DEMOSTRACIÓN :

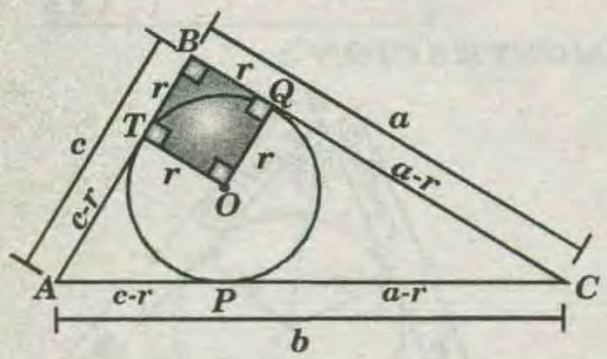
* Aplicando el teorema general :

$$a+c=b+2r\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

* Donde $\alpha=90°$

$$\Rightarrow a+c=b+2r$$

OTRO MÉTODO DE DEMOSTRAR:



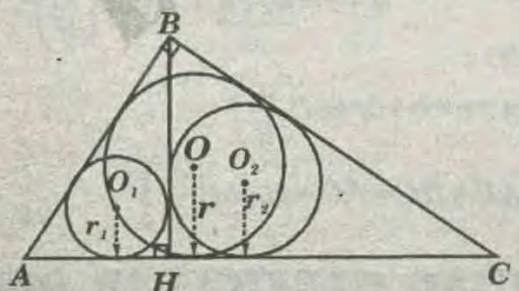
$TBQO$ es un cuadrado : $TB=BQ=QO=OT=r$

* Por teorema: $AT=AP=c-r$ y $QC=PC=a-r$

* Luego: $c-r+a-r=b$ $\boxed{a+c=b+2r}$

APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PONCELET

A En todo triángulo rectángulo, si se traza la altura relativa a la hipotenusa, la longitud de esta altura es igual a la suma de las longitudes de los inradios de los triángulos rectángulos parciales y el del inicial.



$\overline{BH}$: altura relativa a $\overline{AC}$.

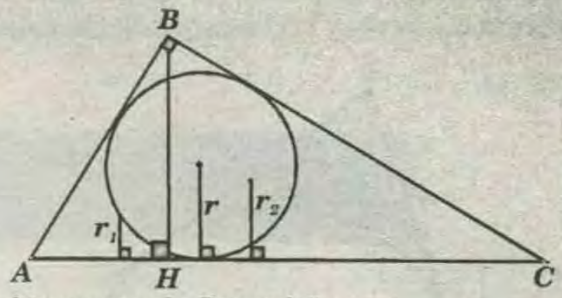
r_1 : inradio del $\triangle ABH$

r_2 : inradio del $\triangle HBC$

r : inradio del $\triangle ABC$

$(BH=r_1+r_2+r)$

DEMOSTRACIÓN :



* Por el teorema de Poncelet .

* En el $\triangle ABC$: $AB+BC=AC+2r$ .....(I)

*En el $\triangle AHB$: $AH+BH=AB+2r_1$ .....(II)

*En el $\triangle BHC$: $BH+HC=BC+2r_2$ .....(III)

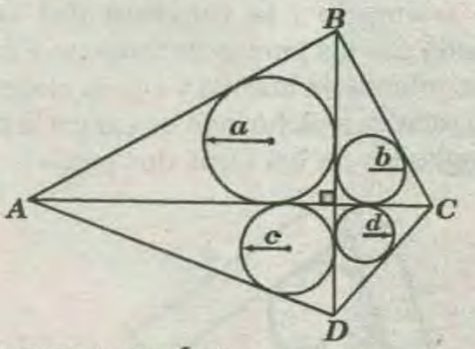
* Sumando (II) y (III):

$$\underbrace{(AH+HC)}_{AC}+2BH=\underbrace{(AB+BC)}_{AC+2r}+2(r_1+r_2)$$

$$\Rightarrow AC+2BH=AC+2r+2(r_1+r_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{BH=r+r_1+r_2}$$

B En la figura $ABCD$ es un cuadrilátero circunscriptible . La relación que existe entre las longitudes de los radios a; b; c y d , es : $a+d=b+c$



DEMOSTRACIÓN :

* Por el teorema de Poncelet :

* En el $\triangle ABH$: $BH+AH=AB+2a$ .....(I)

* En el $\triangle BHC$: $BH+HC=BC+2b$ .....(II)

* En el $\triangle AHD$: $AH+HD=AD+2c$.....(III)

* En el $\triangle DHC$: $DH+HC=CD+2d$.....(IV)

* Sumamos (I) y (IV):

$AH+BH+CH+DH=AB+CD+2(a+d)$..... (α)

* Sumamos (II) y (III):

$AH+BH+CH+DH=BC+AD+2(b+c)$..... (θ)

* Igualando (α) y (θ):

$$(AB+CD)+2(a+d)=(BC+AD)+2(b+c)$$

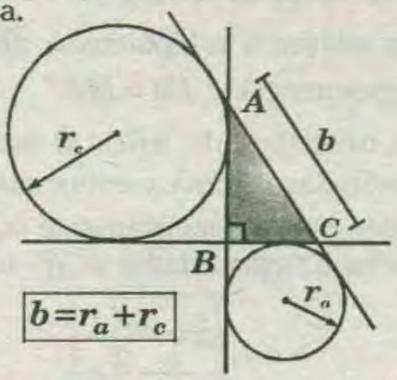
* Pero si el cuadrilátero *ABCD* es circunscriptible, entonces cumple el teorema de Pithot :

$$AB+CD=BC+AD$$

* Quedando sólo: $2(a+d)=2(b+c)$

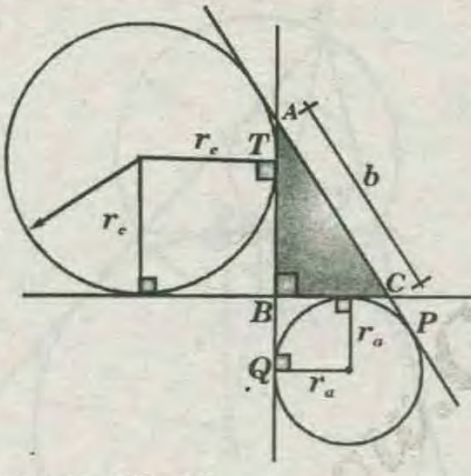
$$\Rightarrow a+d=b+c$$

C En todo triángulo rectángulo, la suma de las longitudes de los radios de las circunferencias exinscritas relativa a los catetos es igual a la longitud de la hipotenusa.



$b=r_a+r_c$

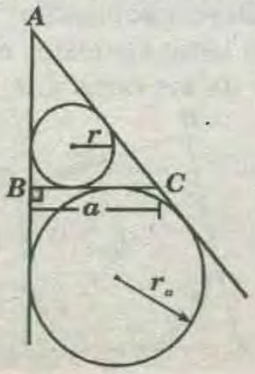
DEMOSTRACIÓN :



* Por teorema : $AQ=AP$
* De la figura : $AQ=AT+r_c+r_a$; $AP=b+CP$
* Igualando : $AT+r_c+r_a=b+CP$
* Pero : $AT=CP$

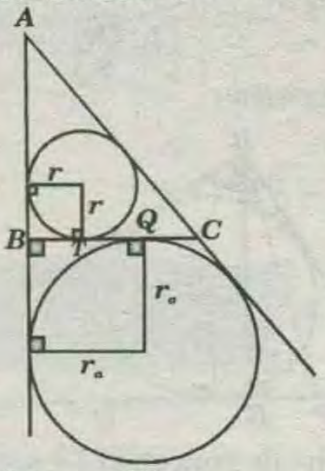
$$\Rightarrow b=r_a+r_c$$

D En todo triángulo rectángulo , la suma de las longitudes del inradio y el exradio relativo a un cateto es igual a la longitud de dicho cateto.



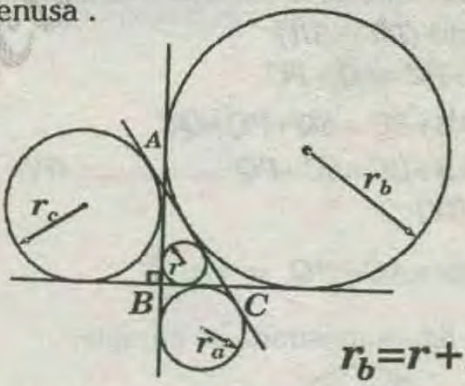
$a=r+r_a$

DEMOSTRACIÓN :



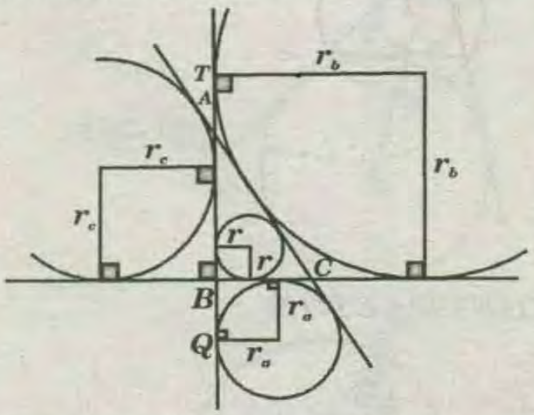
* En la figura : $BC=r_a+QC$ ..... *(I)*
* Pero : $BT=QC=r$ ..... *(II)*
* *(II)* en *(I)* : $BC=r+r_a$

E En todo triángulo rectángulo , la suma de las longitudes del inradio y de los exradios relativos a los catetos es igual a la longitud del exradio relativo a la hipotenusa .



$r_b=r+r_a+r_c$

DEMOSTRACIÓN :



* De la figura : $r_b=TA+AB$ ..... *(I)*
* Por propiedad : $TA=BQ=r_a$ ..... *(II)*
* Por propiedad anterior: $AB=r+r_c$ ..... *(III)*
* Reemplazando *(II)* y *(III)* en *(I)*:

$$r_b=r+r_a+r_c$$

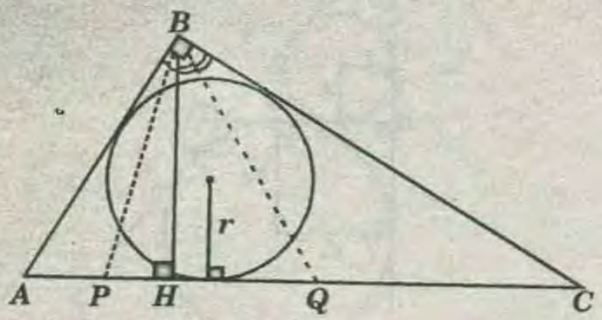
F En todo triángulo rectángulo *ABC*, el inradio mide la mitad del segmento comprendido entre los pies *P* y *Q* de las bisectrices de los ángulos *ABH* y *HBC*

WWW.GRATIS2.COM

respectivamente, H es el pie de la altura trazada por B.

$$r=\frac{PQ}{2}$$

DEMOSTRACIÓN:



* Por el teorema de Poncelet .

* En el $\triangle ABC$: $AB+BC=AC+2r$ .....*(I)*

* ΔABQ isósceles :

$m\sphericalangle ABQ=m\sphericalangle BQA \Rightarrow AB=AQ$.....*(II)*

* ΔBCP isósceles :

$m\sphericalangle PBC=m\sphericalangle BPC \Rightarrow BC=PC$.....*(III)*

* Sumando *(II)* y *(III)*:

$AB+BC=AQ+PC$

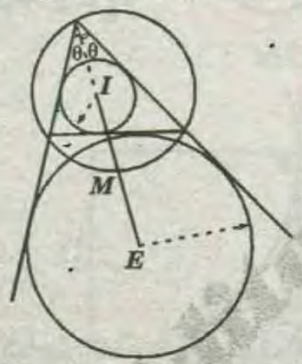
$\Rightarrow AB+BC=AQ+PQ+QC$

$\Rightarrow AB+BC=AC+PQ$ .....*(IV)*

* *(I)* en *(IV)*:

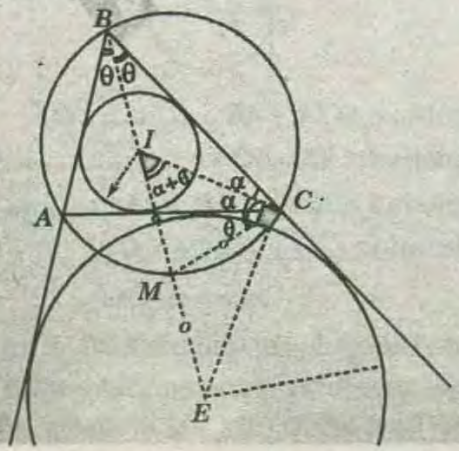
$$AC+2r=AC+PQ \Rightarrow r=\frac{PQ}{2}$$

G En la figura mostrada se cumple :



$IM=ME$

DEMOSTRACIÓN :



* En el ΔABC *"I"*es incentro.

* En el ΔIBC, por teorema del ángulo exterior :

$$m\sphericalangle MIC=\alpha+\theta$$

* Por otro lado: $m\sphericalangle ACM=\theta$

* El ΔIMC es isósceles :

$$m\sphericalangle MIC=m\sphericalangle ICM=\alpha+\theta \Rightarrow IM=MC$$

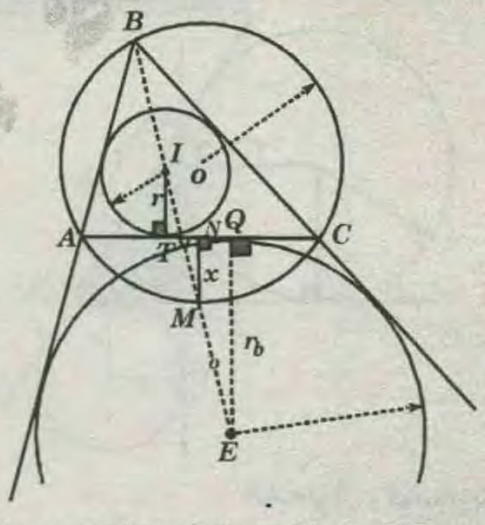
* Pero como la $m\sphericalangle ICE=90°$, entonces $\overline{CM}$ es mediana relativa a la hipotenusa $\overline{IE}$.

* En consecuencia : $IM=ME$

H En un triángulo ABC, si los radios de las circunferencias inscrita y exinscrita relativo a lado $\overline{AC}$, miden r y r_b respectivamente $(r_b>r)$, la longitud de la flecha o sagita relativa a $\overline{AC}$ es :

$$x=\frac{r_b-r}{2}$$

DEMOSTRACIÓN :



$\overline{DM}$: Flecha o sagita relativa al lado $\overline{AC}$.

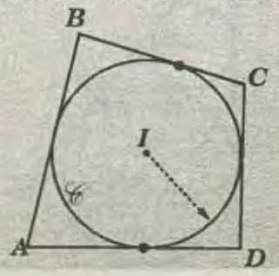
Por propiedad: $IM = ME$

*En el trapecio rectángulo $ETIQ$, por teorema :

$$x=\frac{r_b-r}{2}$$

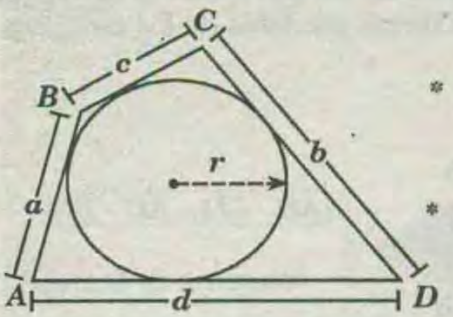
TEOREMA DE PITOT

En todo cuadrilátero circunscrito , la suma de las longitudes de dos lados opuestos es igual a la suma de las longitudes de los otros dos.



$ABCD$: ⏢ circunscrito a la circunferencia $\mathscr{C}$.

$$\Rightarrow AB+CD=BC+AD$$



* □ $ABCD$:

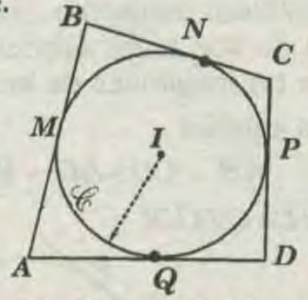
□ circunscrito

* p: semiperímetro

$$\boxed{a+b=c+d=p}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Sean M; N; P y Q los puntos de tangencia de la circunferencia $\mathscr{C}$ con $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$; y $\overline{AD}$ respectivamente.



* Entonces $AM=AQ$; $BM=BN$; $CN=CP$; $DP=DQ$
* Como: $AB+CD=(AM+MB)+(CP+PD)$
* Por lo tanto , reemplazando tenemos :

$$AB+CD=(AQ+BN)+(NC+QD)$$

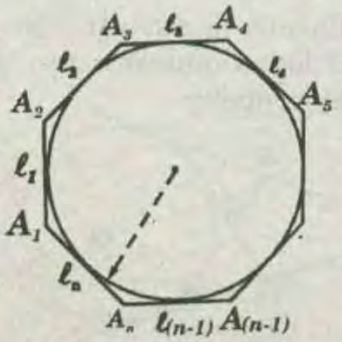
* Agrupando convenientemente :

$$AB+CD=(AQ+QD)+(BN+NC)$$

$$\Rightarrow AB+CD=AD+BC$$

TEOREMA :

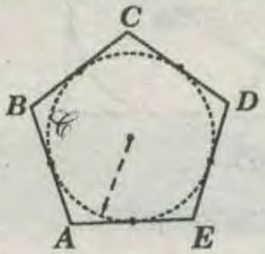
En todo polígono circunscrito cuyo número de lados es par , la suma de las longitudes de los lados tomados en forma alternada y consecutivamente es igual a la suma de las longitudes de los otros lados restantes. $n=2k$; $(\forall k \in \mathbb{N})$



$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=\frac{n}{2}} \ell(2i-1)=\sum_{j=1}^{j=\frac{n}{2}} \ell(2j)}$$

POLÍGONO CIRCUNSCRIPTIBLE A UNA CIRCUNFERENCIA

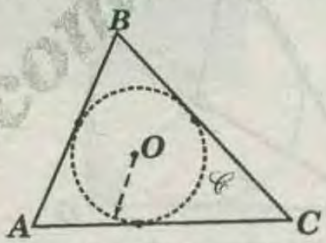
Es aquel polígono al que se le se puede trazar una circunferencia tangente a todos sus lados.



Dado el polígono $ABCDE$, se puede trazar una circunferencia $\mathscr{C}$ tangente a todos los lados del polígono . De esta manera , asumimos que el polígono $ABCDE$ es circunscriptible.

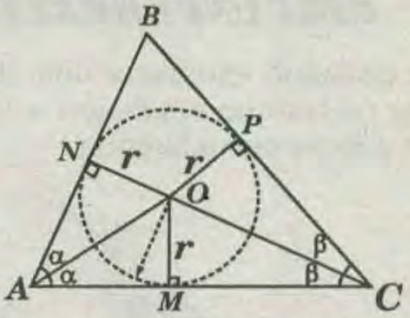
TEOREMA :

Todo triángulo es circunscriptible.



Dado un $\triangle ABC$, siempre se puede trazar una circunferencia tangente a sus tres lados.

DEMOSTRACIÓN :



* Por A y C trazamos las bisectrices interiores que se intersecan en O .
* Del teorema de la bisectriz de un ángulo :

$$ON=OM=r \text{ y } OM=OP=r$$

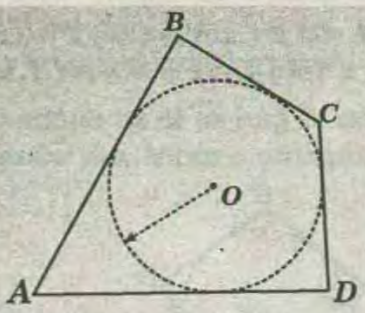
$$\Rightarrow ON=OP=OM=r$$

* Es decir , O equidista de los tres lados , por lo que con centro en O y radio r , se puede trazar una circunferencia que será tangente a los tres lados .

TEOREMA :

Si en un cuadrilátero la suma de las longitudes de dos lados opuestos es igual a la suma de las longitudes de los otros dos , se da que el cuadrilátero es circunscriptible .

WWW.GRATIS2.COM

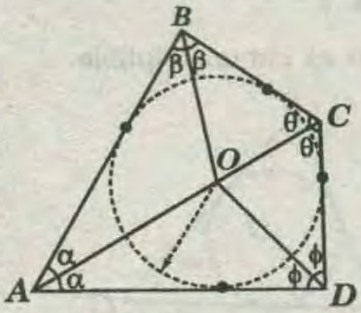


Si $AB+CD=BC+AD$

$\Rightarrow \square ABCD$ es circunscriptible .

NOTA :

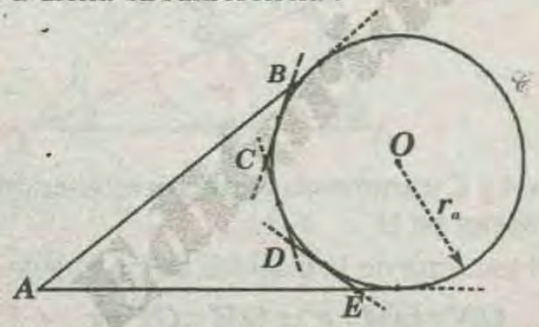
Si en un polígono se puede inscribir una circunferencia , determinamos que el centro de dicha circunferencia es punto de concurrencia de las bisectrices trazadas desde los vértices del polígono.



Si las bisectrices interiores de un polígono son concurrentes , dicho polígono es circunscriptible .

POLÍGONO EXINSCRITO A UNA CIRCUNFERENCIA

Es aquel polígono exterior a una circunferencia donde las rectas que contienen a sus lados son tangentes a dicha circunferencia .



El polígono *ABCDE* está exinscrito a la circunferencia $\mathscr{C}$ que a la vez está exinscrita al polígono *ABCDE* .

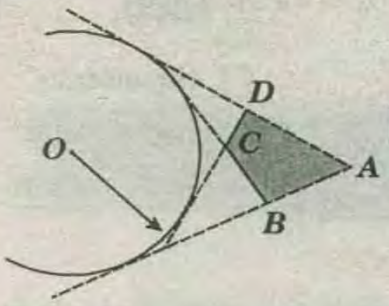
* Al centro de la circunferencia exinscrita a la circunferencia $\mathscr{C}$ se le denominará excentro .

* Al radio de la circunferencia exinscrita se le denominará exradio.

CUADRILÁTERO EX- INSCRITO :

Un cuadrilátero se dice que esta ex inscrito a una circunferencia , si las prolongaciones de sus cuatro lados son tangentes a dicha circunferencia.

En todo cuadrilátero ex inscrito se cumple que la diferencia de las medidas de dos lados opuestos es igual a la diferencia de las medidas de los otros dos lados.



$\boxed{AB-CD=AD-BC}$

"teorema de Steiner"

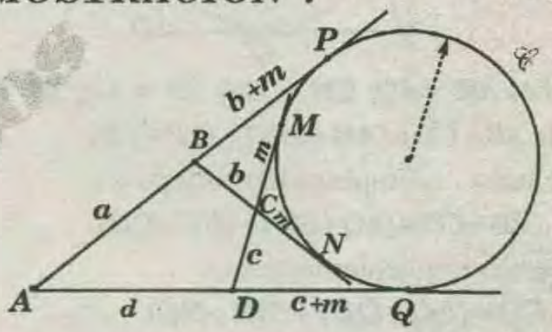
TEOREMA DE STEINER

En todo cuadrilátero exinscrito , la sustracción de las longitudes de dos lados opuestos es igual a la sustracción de las longitudes de los otros dos.

Así en la figura anterior .

$$AB - CD = AD - BC$$

DEMOSTRACIÓN :



* De la figura : $CM=CN=m$

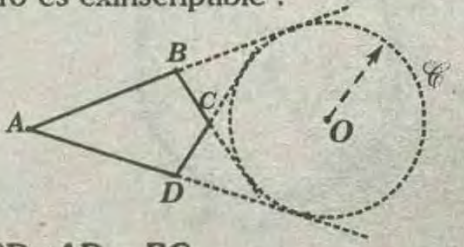
$$BP=BN=b+m \ \wedge \ DM=DQ=c+m$$

* Por teorema : $AP=AQ \Rightarrow a+b+m=d+c+m$

* eliminado m : $a+b=d+c \Rightarrow a-c=d-b$

TEOREMA RECÍPROCO DE STEINER

Si en un cuadrilátero la sustracción es de las longitudes de sus lados opuestos son iguales , el cuadrilátero es exinscriptible .



Si $AB - CD=AD - BC$

$\Rightarrow \exists$ una circunferencia $\mathscr{C}$ exterior , que es tangente a las prolongaciones de todos los lados del $\square ABCD$.

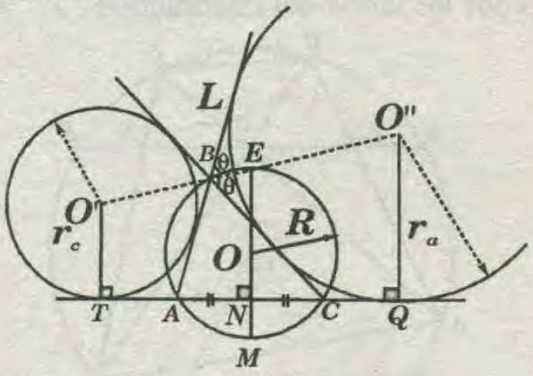
Por lo tanto , el cuadrilátero *ABCD* es exinscriptible .

SEGUNDO TEOREMA DE STEINER

En todo triángulo , la suma de las longitudes de los tres exradios , es igual a la suma del inradio y cuatro veces el circunradio.

$$\boxed{r_a+r_b+r_c=4R+r}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Si : $m\sphericalangle EBC=\theta \Rightarrow m\overset{\frown}{EC}=2\theta$

* Pero: $\overline{EN}\perp\overline{AC} \Rightarrow m\overset{\frown}{AE}=m\overset{\frown}{EC}=2\theta$

* En el ángulo exinscrito *LBE* :

$$m\sphericalangle LBE=\frac{m\overset{\frown}{ABE}}{2}=\frac{2\theta}{2}=\theta$$

* Esto demuestra que los puntos *O', B, E* y *O''* son colineales.

* Por propiedad: $TA=CQ$

* Luego: $TN=NQ$

* En el trapecio rectángulo $TO'O''Q$, $\overline{EN}$ es mediana.

* Por teorema : $EN=\frac{r_a+r_c}{2}$

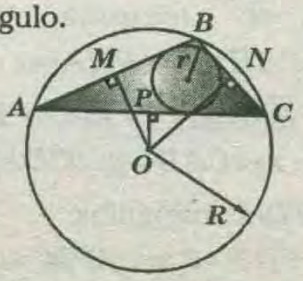
* Pero por propiedad : $MN=\frac{r_a-r}{2}$

* Luego : $\underbrace{EN}=2R-\left(\frac{r_b-r}{2}\right)\Rightarrow \frac{r_a+r_c}{2}=\frac{4R-r_b+r}{2}$

$$\Rightarrow r_a+r_b+r_c=4R+r$$

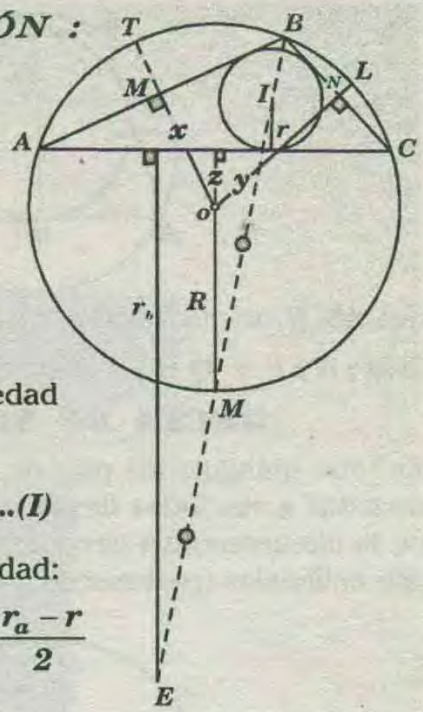
TEOREMA :

En un triángulo obtusángulo.



$$\boxed{OM+ON-OP=R+r}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Sabemos por propiedad que : $IM=ME$

* Luego : $R+z=\frac{r_b-r}{2}$...*(I)*

* También por propiedad:

$$TM=\frac{r_c-r}{2} \quad ; \quad LN=\frac{r_a-r}{2}$$

* Luego: $R=TM+x$

$$R=\frac{r_c-r}{2}+x \wedge R=LN+y \wedge R=\frac{r_a-r}{2}+x \Rightarrow 3R+z=\frac{r_a+r_b+r_c}{2}+x+y$$

* Pero : $r_a+r_b+r_c=4R+r$ .....(2do *T* . Steiner)

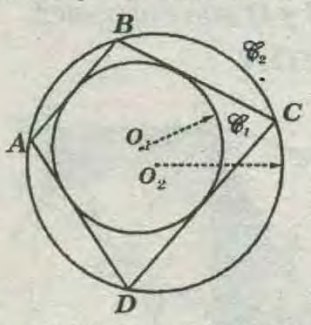
* Reemplazando :

$$3R+z=2\frac{4R+r-3r}{2}+x+y \Rightarrow 3R+z=2R-r+x+y$$

$$\Rightarrow \boxed{x+y-z=R+r}$$

CUADRILÁTERO BICÉNTRICO

Es aquel cuadrilátero que está inscrito en una circunferencia y circunscrito a otra .



$\square ABCD$: cuadrilátero bicéntrico.

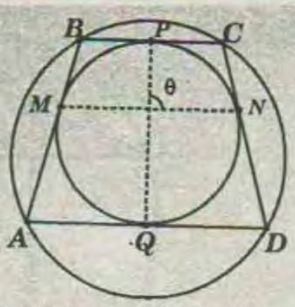
* Está circunscrito a $\mathscr{C}_1$.

* Está inscrito en $\mathscr{C}_2$.

* Cuando un cuadrilátero es inscriptible y circunscriptible a la vez , también se le llama cuadrilátero bicéntrico .

PROPIEDAD :

En todo cuadrilátero bicéntrico , los dos segmentos que tienen como extremos los puntos de tangencia de lados opuestos , del cuadrilátero circunscrito, son perpendiculares.

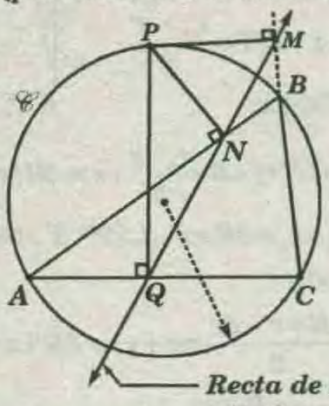


Sea **ABCD** un cuadrilátero bicéntrico .

Si **M ; N ; P** y **Q** son puntos de tangencia, $\boxed{\theta=90°}$.

RECTA DE SIMPSON

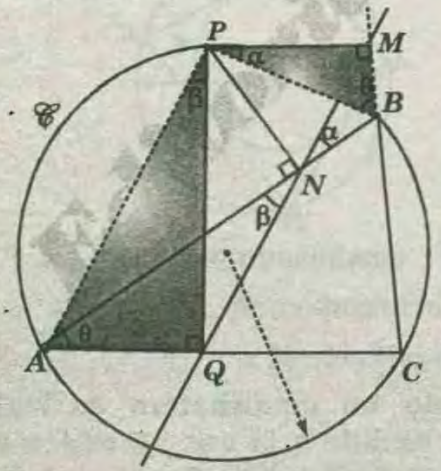
En todo triángulo los pies de las perpendiculares , trazados a sus lados desde un punto cualesquiera de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo , son colineales (pertenecen a la recta de Simpson).



$\mathscr{C}$: circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$.

Sean **M; N** y **Q** los pies de las perpendiculares trazadas desde **P** a $\overline{BC}$; $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, afirmamos que **M; N** y **Q** son colineales.

DEMOSTRACIÓN :



* Trazamos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$, entonces :

* **APBC**: $\square$ inscrito $\Rightarrow m\sphericalangle PBM=m\sphericalangle PAC=\theta$

* $\square$ **NBMP** : inscriptible $\Rightarrow m\sphericalangle MPB=m\sphericalangle MNB=\alpha$

* $\square$ **AQNP** : inscriptible $\Rightarrow m\sphericalangle APQ=m\sphericalangle ANQ=\beta$

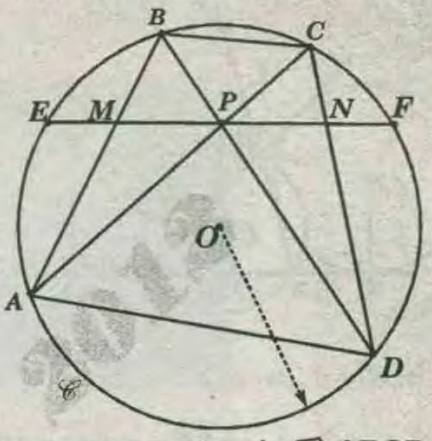
* En el $\triangle APQ$: $\theta+\beta=90°$

* En el $\triangle BPM$: $\theta+\alpha=90°$

* Por lo tanto, **M ; N** y **Q** son colineales .

TEOREMA DE PAPILLÓN

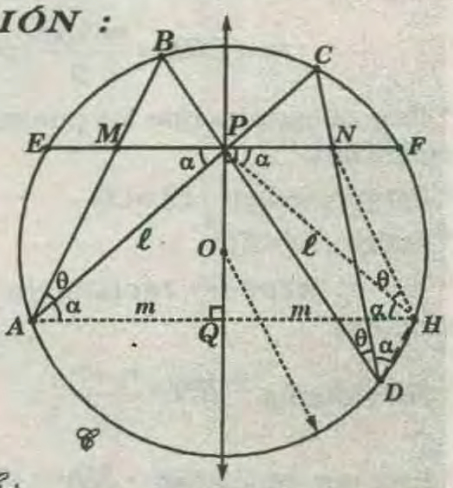
Si el punto de intersección de las diagonales de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia biseca a una cuerda de dicha circunferencia , entonces también biseca al segmento de dicha cuerda limitado por los lados del cuadrilátero .



$\mathscr{C}$: circunferencia circunscrita al $\square ABCD$.

Si $EP=PF$, entonces $MP=NP$.

DEMOSTRACIÓN :



* Sea **O** centro de $\mathscr{C}$.

* Como $EP=PF$, entonces la recta **OP** es perpendicular a $\overline{EF}$

* Trazamos $\overline{AH} \perp \overrightarrow{OP}$

$\Rightarrow AQ=QH=m \Rightarrow AP=PH=\ell$

(por el teorema de la mediatriz)

y $m\sphericalangle PAH=m\sphericalangle PHA=\alpha$

como $\overline{EF}//\overline{AH} \Rightarrow m\sphericalangle APE=m\sphericalangle HPF=\alpha$

* En $\mathscr{C}$: $m\sphericalangle CAH=m\sphericalangle CDH=\alpha$ ($\sphericalangle$ inscrito)

* $\square$ **NPDH**: inscriptible

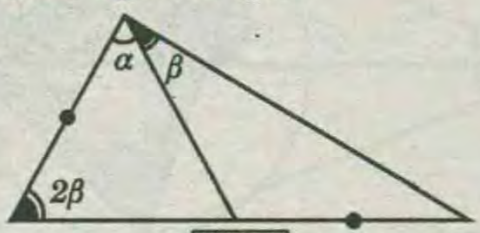
$\Rightarrow m\sphericalangle PHN=\theta \Rightarrow \triangle APM \cong \triangle HPN$....(ALA)

$\Rightarrow \boxed{PM=NP}$

TRAZOS AUXILIARES "BUSCANDO CUADRILATEROS INSCRIPTIBLES"

PRIMER CASO :

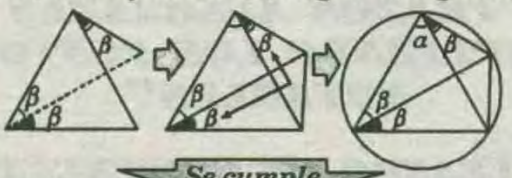
Si se tiene la siguiente figura:



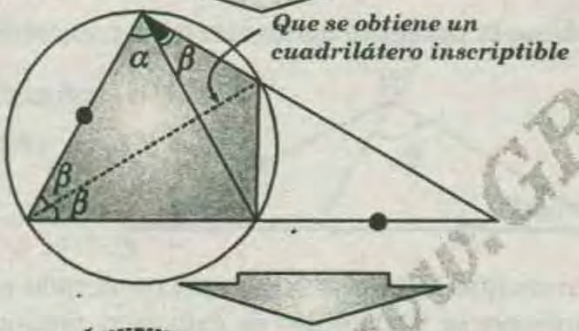
Se hara

Se trazará un ceviana interna(Bisectriz Interior)

Tal trazo, nos ayuda a conseguir la siguiente figura:



Se cumple

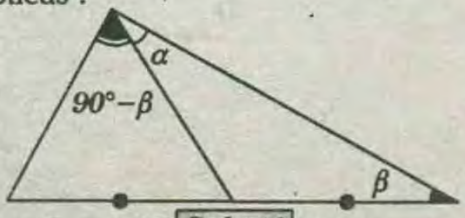


Que se obtiene un cuadrilátero inscriptible

Luego se obtiene triángulos congruentes

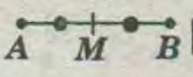
SEGUNDO CASO :

Si se observa la siguiente figura con las siguientes características :

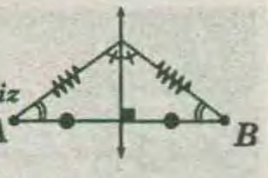


Se hará

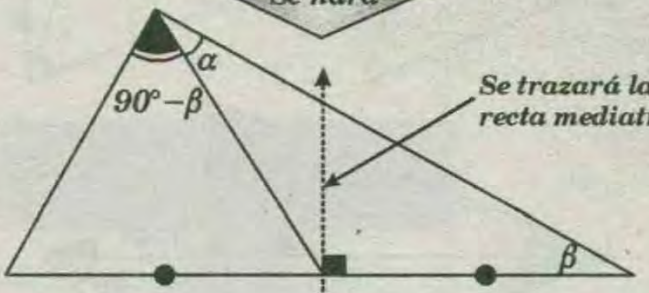
Sabemos :



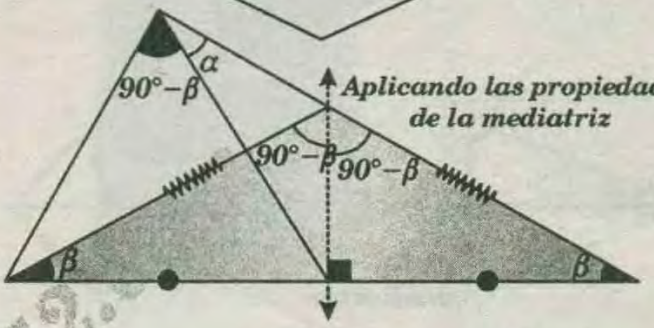
Por "M" se hace pasar la mediatriz



Se hará

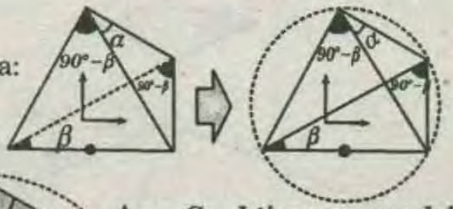


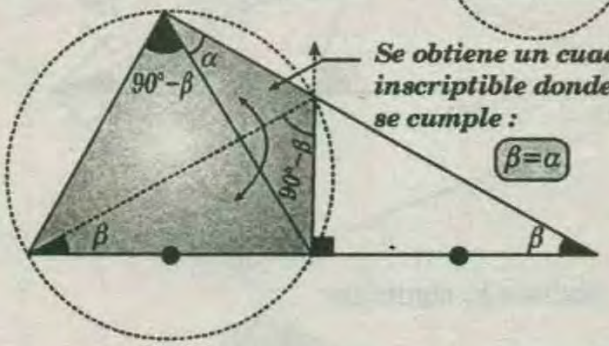
Se trazará la recta mediatriz



Aplicando las propiedades de la mediatriz

Aquí se observa:



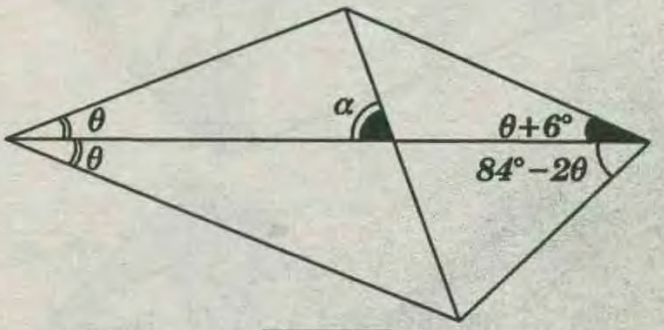


Se obtiene un cuadrilátero inscriptible donde se cumple :

$\beta=\alpha$

TERCER CASO :

Si se tiene la siguiente figura con tales características

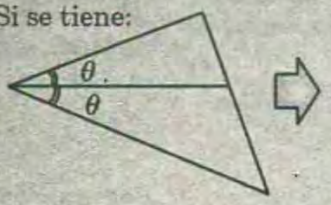


Se hará

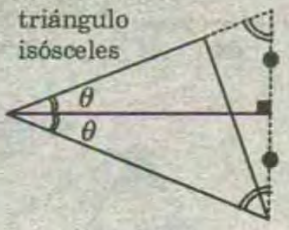
Utilizando el segundo criterio de construcción :

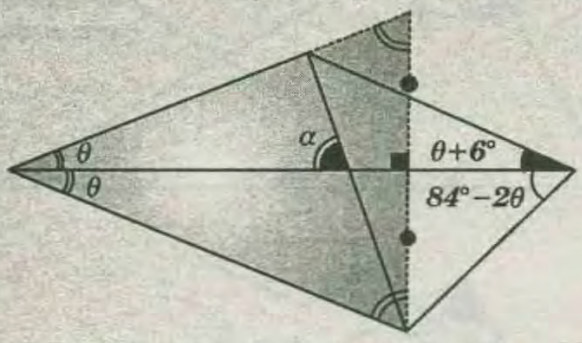
WWW.GRATIS2...

Si se tiene:

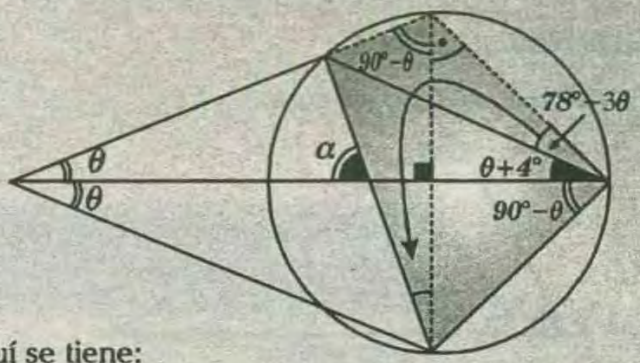


Se forma un triángulo isósceles

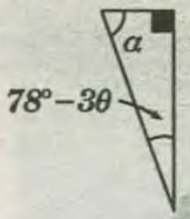




Se hará



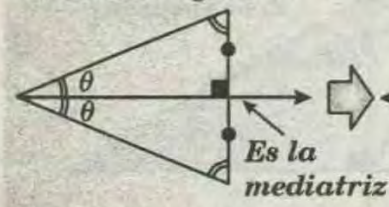
Aquí se tiene:



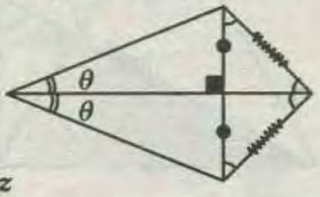
$\alpha+78°-3\theta=90°$

$\alpha=12°+3\theta$

Si se tiene la figura:



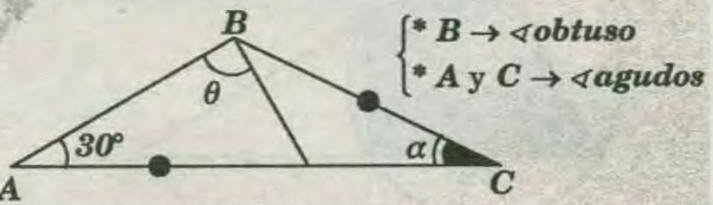
Aquí se cumple:



"TRAZOS AUXILIARES EMPLEANDO LOS PUNTOS NOTABLES"

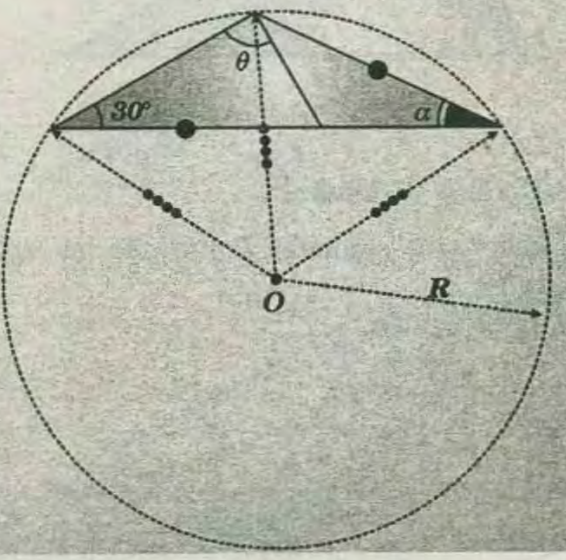
EMPLEANDO EL CIRCUNCENTRO

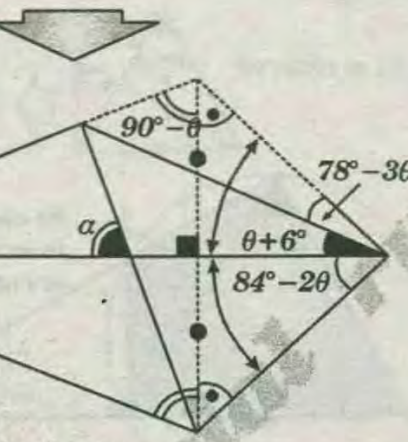
i) se tiene la siguiente figura con tales características.



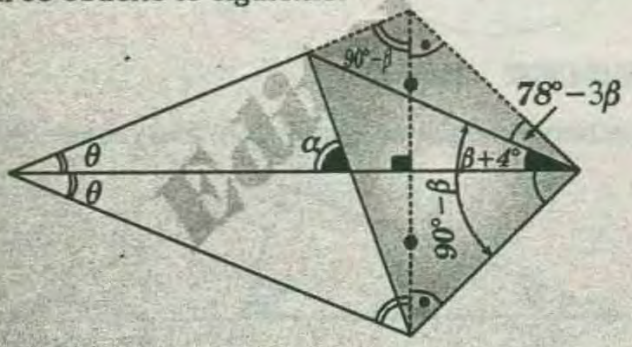
Sabemos que todo triángulo, está contenido en una circunferencia, y su centro de ésta es el circuncentro (para un triángulo obtusángulo, el circuncentro se ubica exterior a ella).

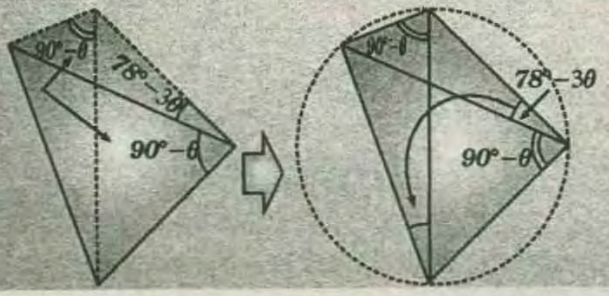
Se hará



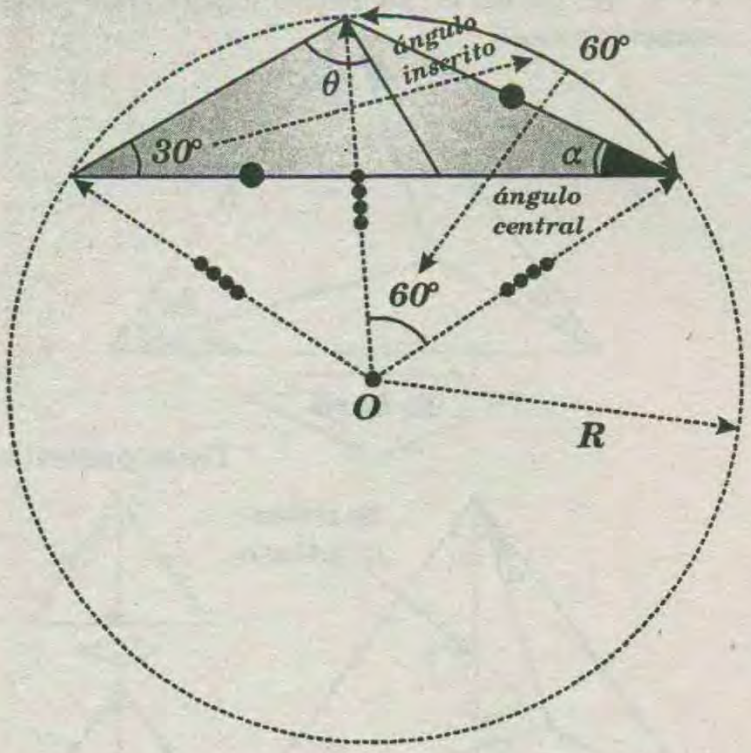


Aquí se obtiene lo siguiente:

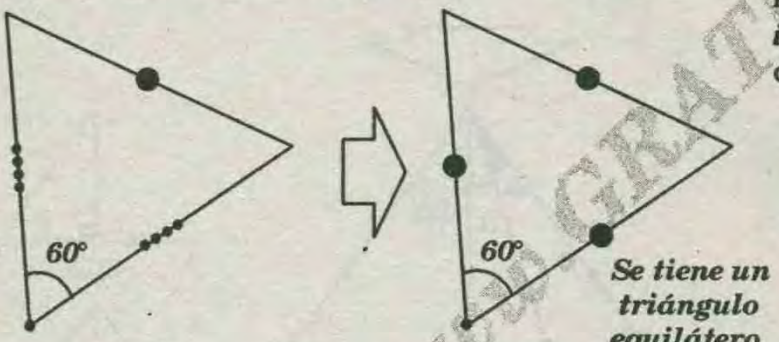




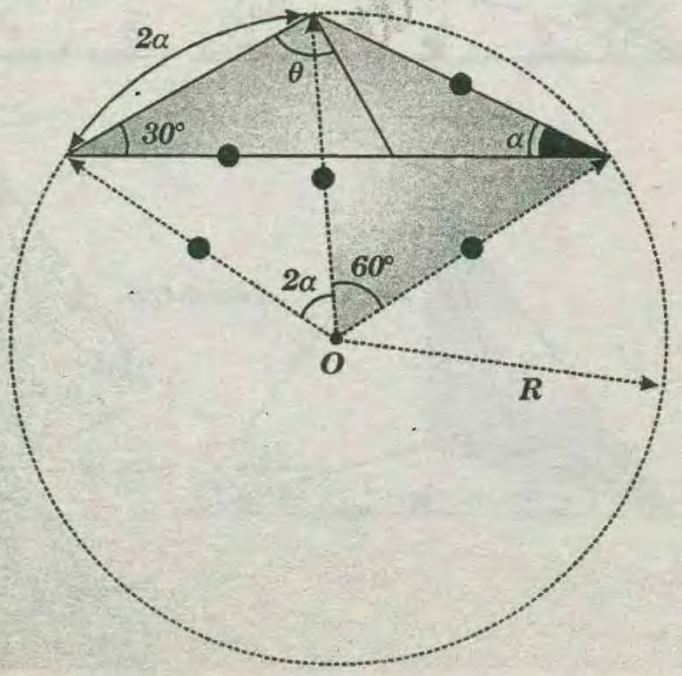
Aplicando las propiedades que se cumplan en la circunferencia.



* Luego se observa en la figura

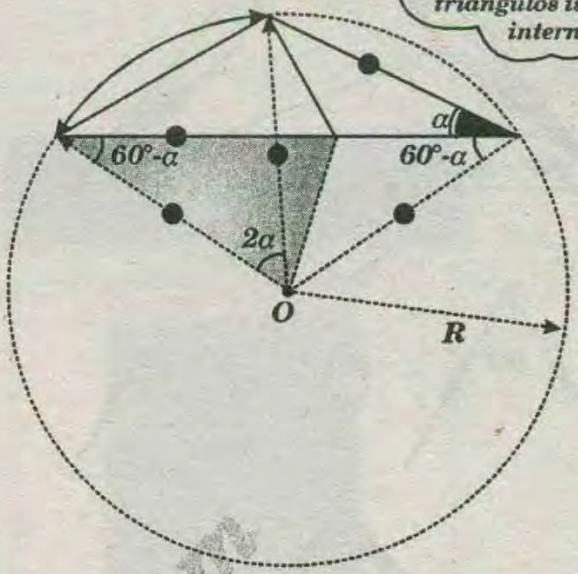


Se tiene un triángulo equilátero



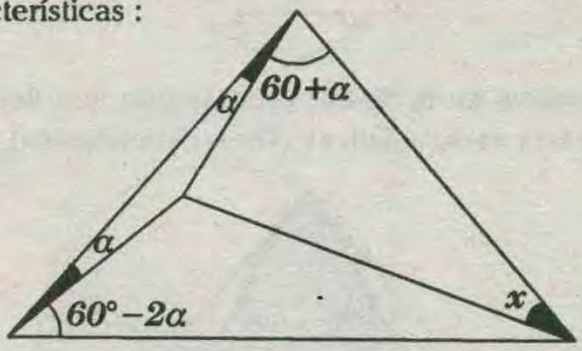
También se observa :

Tener presente: Realizados estos trazos, se obtiene en la figura resultante, triángulos isósceles internos



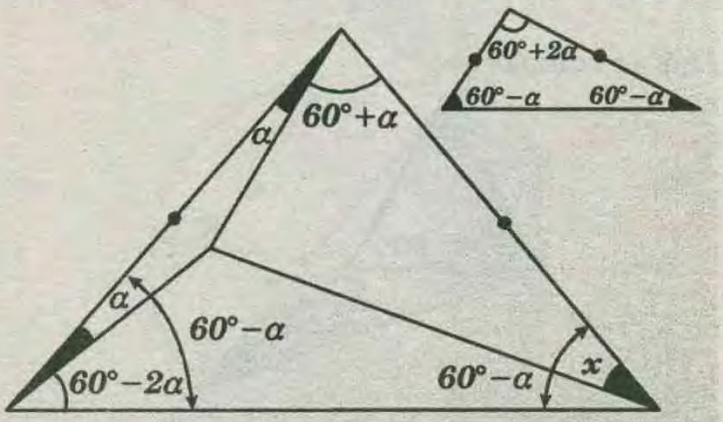
Luego, en la figura resultante se completará los ángulos internos, para luego hallar la solucion del problema.

ii) Si se tiene la siguiente figura con las siguientes características :



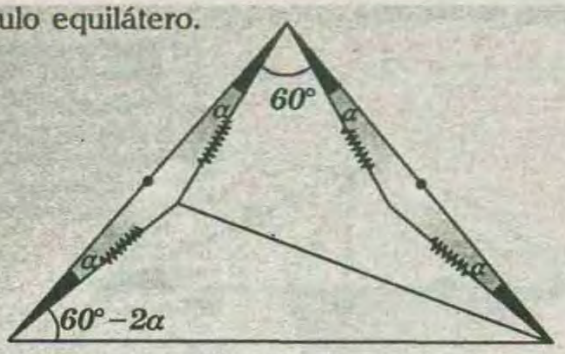
Se hará

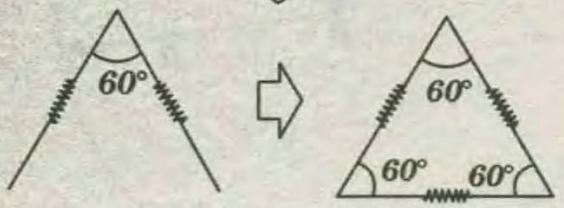
Se completará los ángulos internos del triángulo

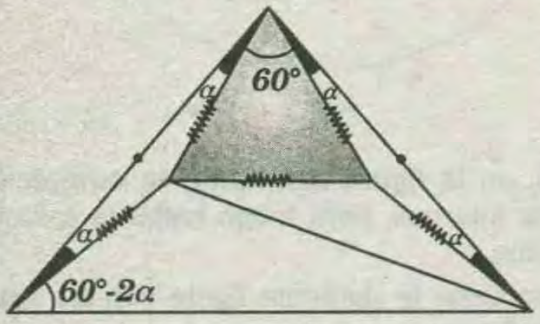


Se construye un triángulo congruente de la siguiente manera para obtener un ángulo de **60°** y con ello un

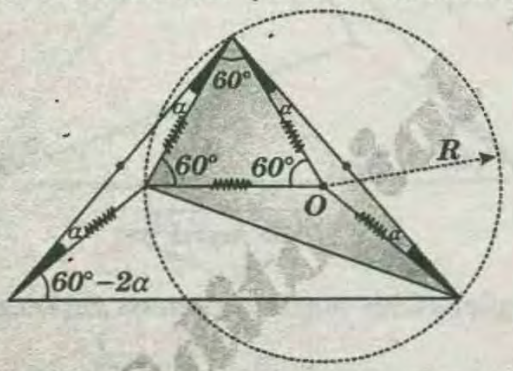
triángulo equilátero.



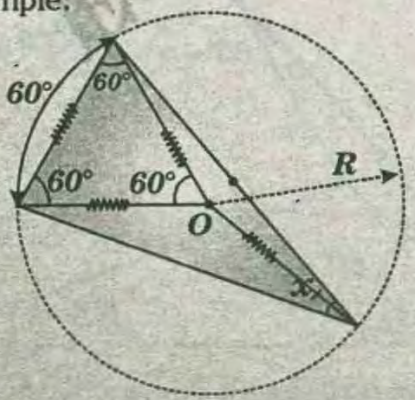




Se observa en la figura; un triángulo que tiene las siguientes características (*O* → circuncentro) .



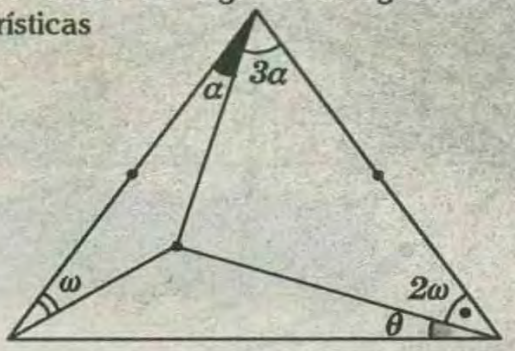
Aquí se cumple:



Por ángulo inscrito : $x=30°$

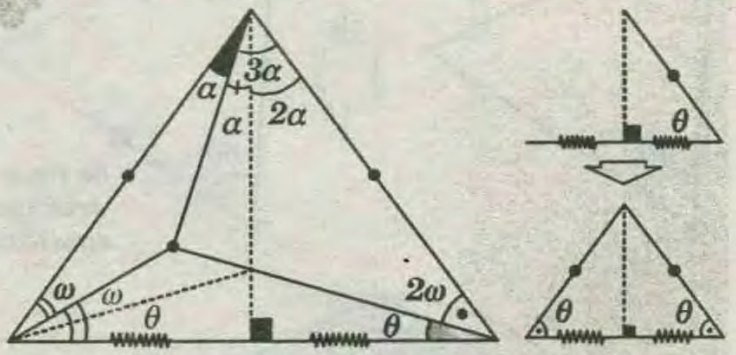
EMPLEANDO EL INCENTRO

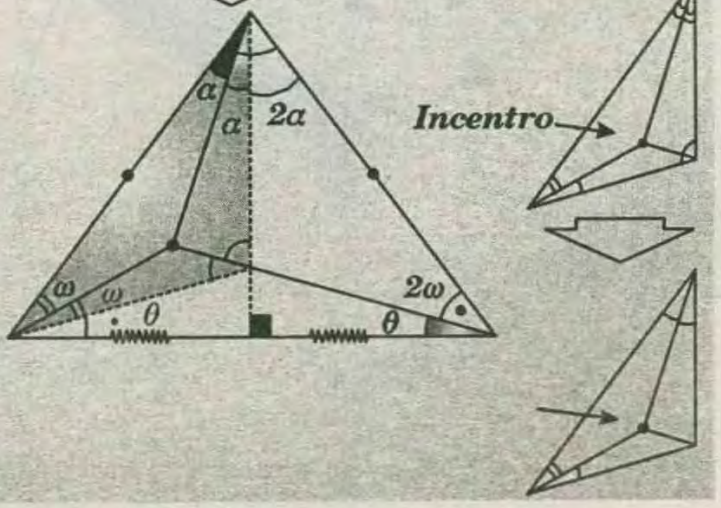
i) Si se tiene la siguiente figura con tales características



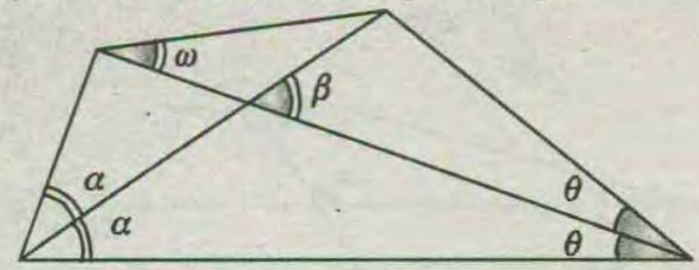
Se hará

Tener presente:

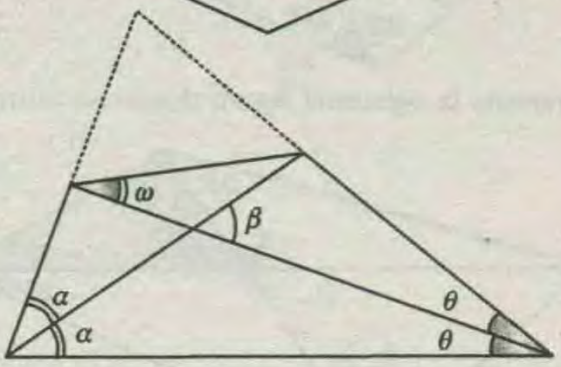




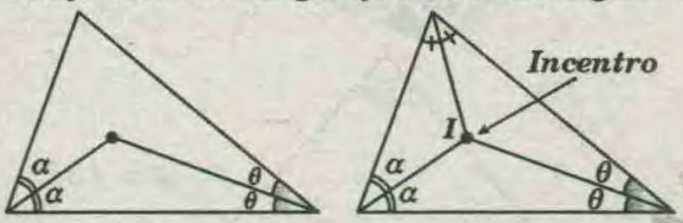
ii) También si tenemos las siguiente figura

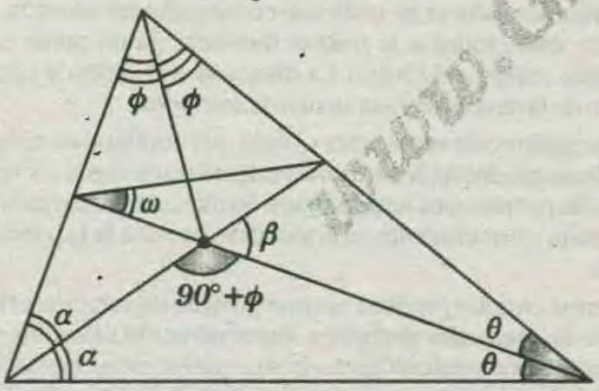


Se hará



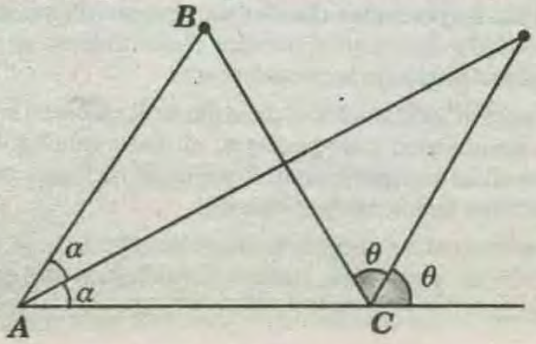
* Completamos el triángulo y se observa lo siguiente:



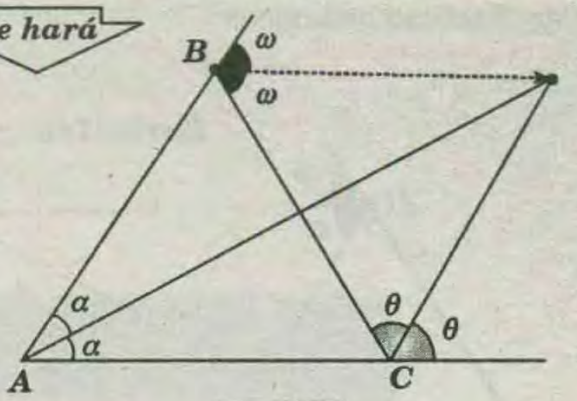


EMPLEANDO EL EXCENTRO

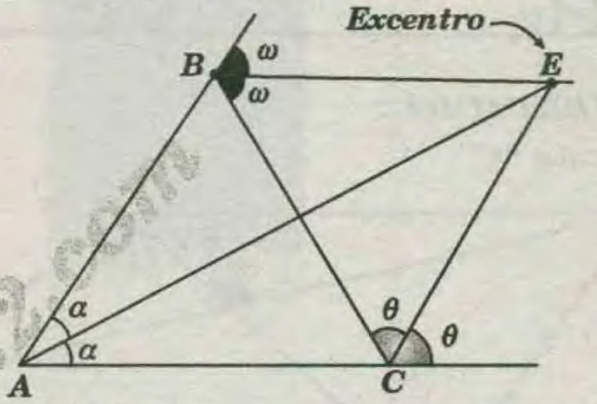
Si se tiene la siguiente figura con tales características:



Se hará



Se obtiene las tres bisectrices

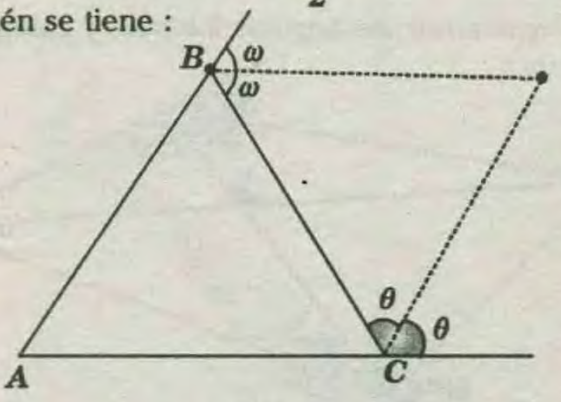


Y se cumple :

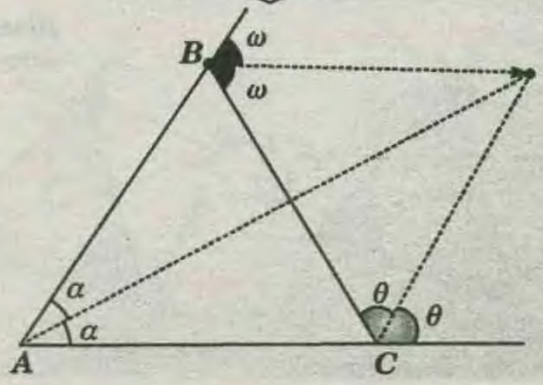
$$m\sphericalangle BEC = 90° - \frac{m\sphericalangle BAC}{2}$$

$$m\sphericalangle AEC = \frac{m\sphericalangle ABC}{2}$$

También se tiene :

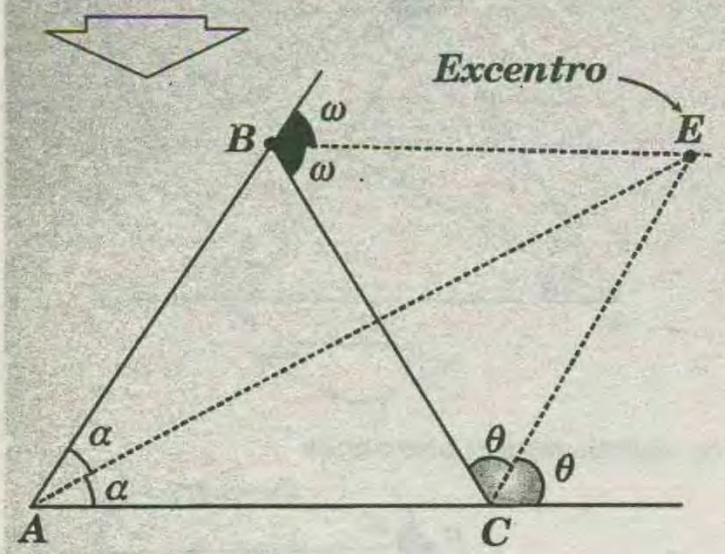


Se hará



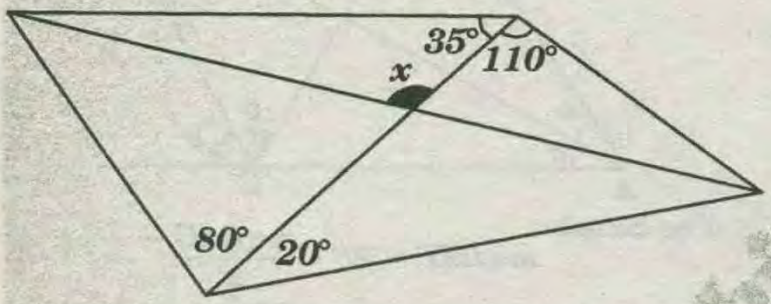
www.GRATIS2.com

Se obtiene las tres bisectrices :



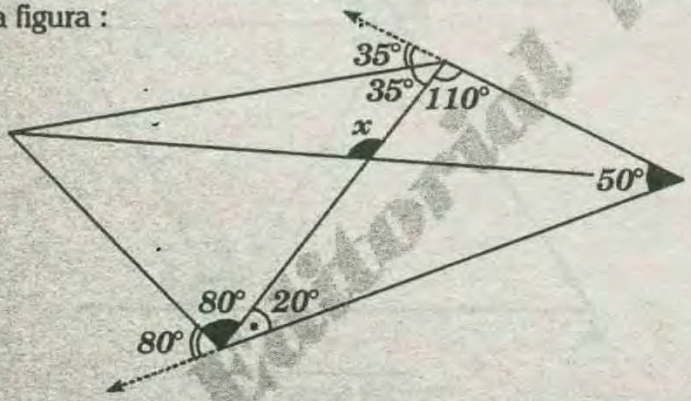
EJERCICIO :

Calcular "*x*"

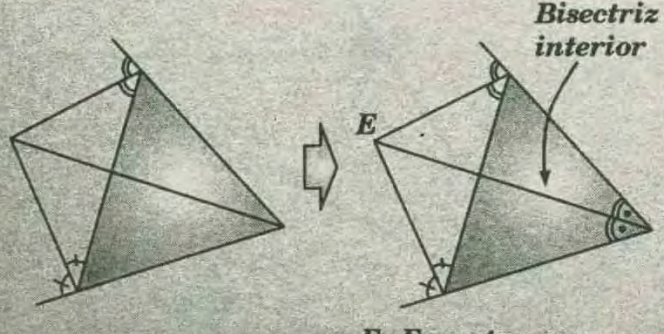


RESOLUCIÓN:

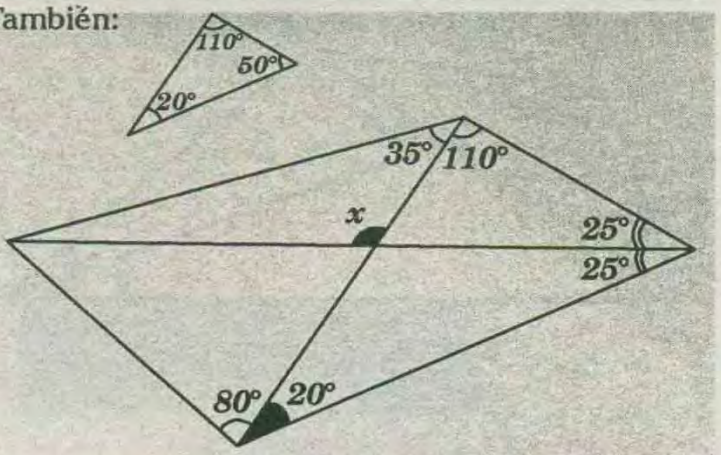
* Completamos los ángulos internos y externos de la figura :



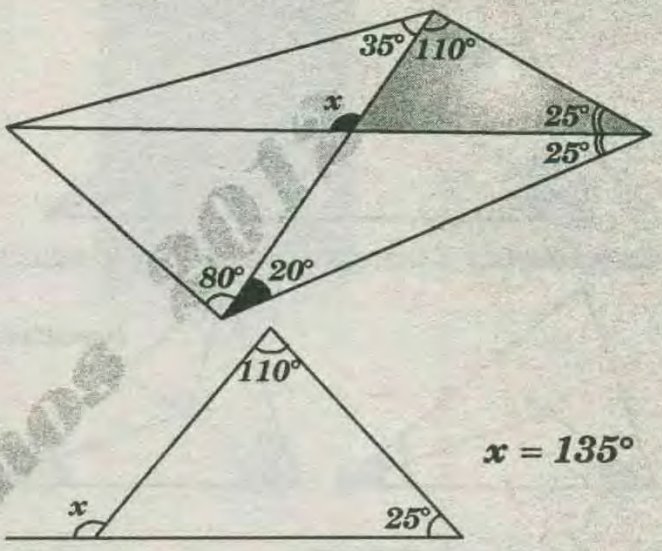
* Observamos la siguiente propiedad.



También:



Obtenemos la siguiente figura donde se cumple:



$x = 135°$

NOTA :

La circunferencia es un contorno contínuamente curvado, cuyos puntos están todos a la misma distancia de un punto central, llamado centro del círculo. La distancia constante de cualquier punto de la circunferencia se denomina radio.

La circunferencia representa el área que contiene en su interior, denominada círculo, la forma más enigmática de todas, considerada perfecta por nuestros antepasados. Su direccionalidad es la curva, asociada al movimiento, al encuadramiento, a la repetición y al calor.

La forma circular produce un movimiento de rotación evidente, posee un gran valor simbólico, especialmente su centro, y tiene connotaciones psicológicas como protección, inestabilidad, totalidad, movimiento contínuo o infinitud. Es típico representar también los espacios cerrados, herméticos, con circunferencias o círculos.

Contornos derivados de la circunferencia son el óvalo y el ovoide, con cualidades parecidas a las de ésta, pero que expresan aún más inestabilidad y dinamismo, aunque el movimiento perfecto sea una cualidad propia de la circunferencia.

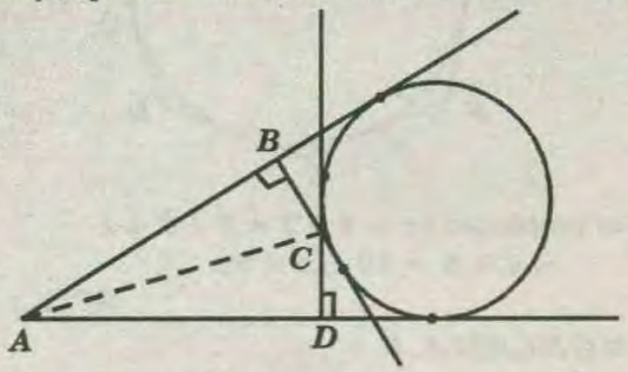
La proyección tridimensional de la circunferencia es la esfera, el cuerpo geométrico más perfecto, el que contiene un mayor volumen en un menor espacio, el que define la forma tanto de los átomos como de los cuerpos celestes.

La circunferencia y el círculo son tal vez los elementos geométricos más perfectos y estables, aunque cargados de una gran carga dinámica.

PROBLEMAS RESUELTOS

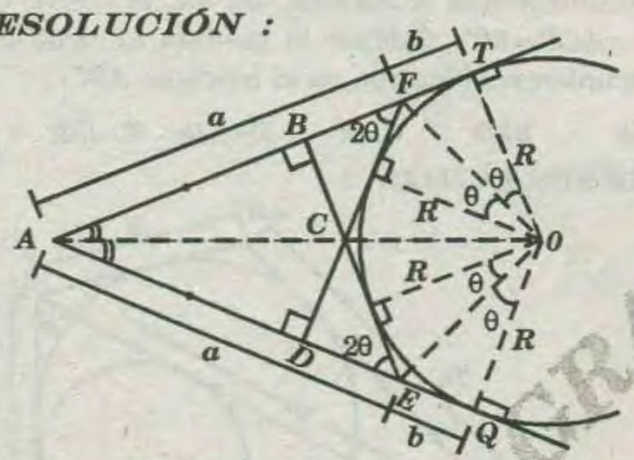
PROBLEMA 1:

Con respecto a los inradios de los triángulos ABC y ADC r_1 y r_2 respectivamente se puede afirmar que :



A) $r_1 > r_2$ B) $r_1 < r_2$ C) $r_1 = r_2$

RESOLUCIÓN :



$\overline{OA}$ es bisectriz del ánguló TAQ.

$\Rightarrow m\sphericalangle TAO = m\sphericalangle OAQ$

* $\triangle FTO \cong \triangle EQO$ (ALA)

$\Rightarrow FT = EQ = b$

* Pero :

$$\underset{AF+\cancel{b}}{\overset{\smile}{AT}} = \underset{AE+\cancel{b}}{\overset{\smile}{AQ}} \Rightarrow AF = AE$$

* $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ (ALA) $\Rightarrow AB = AD$

* $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (ALA) $\Rightarrow r_1 = r_2$

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

En un triángulo rectángulo ABC recto en B. I es el incentro tal que $m\sphericalangle AID = 90°$

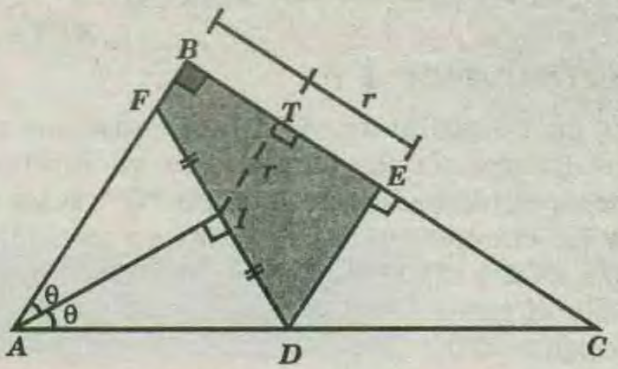
$(E \in \overline{BC})(\overline{DE} \perp \overline{BC})$.

Si $AB + BC = 34$, $AC = 26$.

Calcule BE.

A)6 B)8 C)9 D)10 E) 12

RESOLUCIÓN :



* Por el teorema de Poncelet :

$$AB + BC = AC + 2r \text{ .....(I)}$$

* Por dato :

$$\left.\begin{array}{l} AB + BC = 34 \\ AC = 26 \end{array}\right\} \text{.....(II)}$$

* (II) en (I) : $34 = 26 + 2r \Rightarrow 2r = 8 \Rightarrow r = 4$

* En la figura : $BT = TI = r = 4$

* Pero: $FI = ID \Rightarrow BT = TE = r$

$\Rightarrow BE = 4 + 4 \Rightarrow BE = 8$

RPTA : "B"

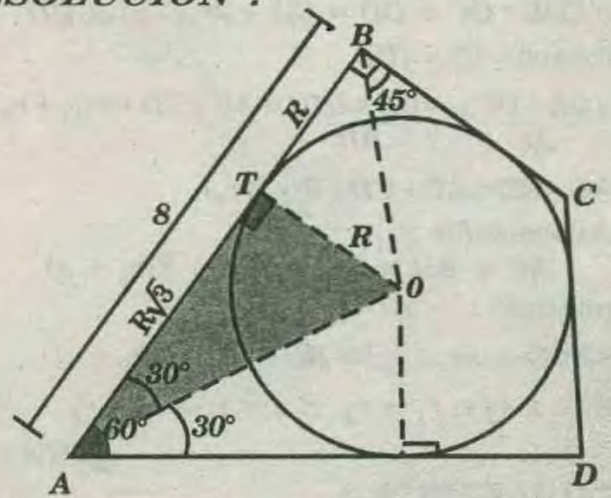
PROBLEMA 3 :

En un cuadrilátero $ABCD$, circunscrito a una circunferencia. Si $m\sphericalangle A = 60°; AD + BC = 14; CD = 6$. Calcular la medida del radio de la circunferencia $(m\sphericalangle B = 90°)$.

A) $2(\sqrt{3}-1)$ B) $3(\sqrt{3}-1)$ C) $4(\sqrt{3}-1)$

D) $3(\sqrt{2}-1)$ E) $4(\sqrt{2}-1)$

RESOLUCIÓN :



* Dato: $AD + BC = 14$ y $CD = 6$

* Por el teorema de Pithot : $AB = 8$

* $\triangle ATO$ notable : $AT = R\sqrt{3}$

* $\triangle OTB$ notable : $TB = R$

* Luego : $R\sqrt{3}+R=8 \Rightarrow R=4(\sqrt{3}-1)$

RPTA : "C"

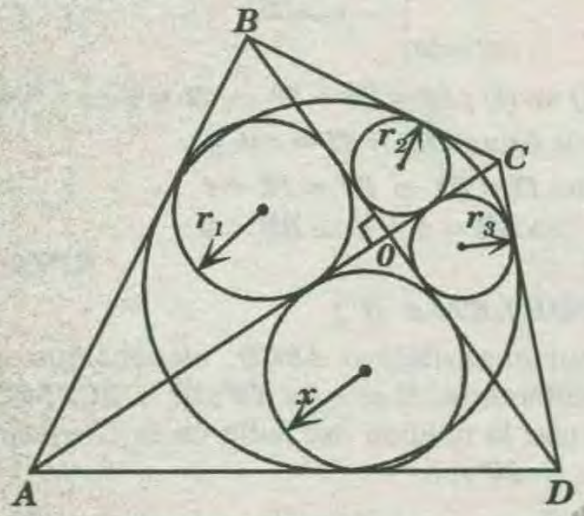
PROBLEMA 4 :

En un cuadrilátero **ABCD** circunscrito a una circunferencia las diagonales se interceptan perpendicularmente en el punto **"O"**, si los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos **AOB, BOC** y **COD** miden r_1, r_2 y r_3 respectivamente. Halle el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo **AOD** :

A) $\frac{r_1+r_2+r_3}{2}$ B) $r_1+r_2-r_3$ C) $r_1+r_3-r_2$

D) $r_2+r_3-r_1$ E) $2r_1+3r_2-r_3$

RESOLUCIÓN :



* Por el teorema de Poncelet :

* $\triangle AOB$: $OA + OB = AB + 2r_1$ .....(I)

* $\triangle COD$: $OC + OD = CD + 2r_3$ .....(II)

* Sumando (I) y (II):

$$\underbrace{(OA+OC)}_{AC}+\underbrace{(OB+OD)}_{BD}=AB+CD+2(r_1+r_3)$$

$$\Rightarrow AC+BD=AB+CD+2(r_1+r_3)$$

* Análogamente :

$$AC + BD = BC + AD + 2(r_2 + x)$$

* Igualando :

$$\cancel{AB+CD}+2(r_1+r_3)=\cancel{BC+AD}+2(r_2+x)$$

$$\Rightarrow x + r_2 = r_1 + r_3 \Rightarrow x = r_1 + r_3 - r_2$$

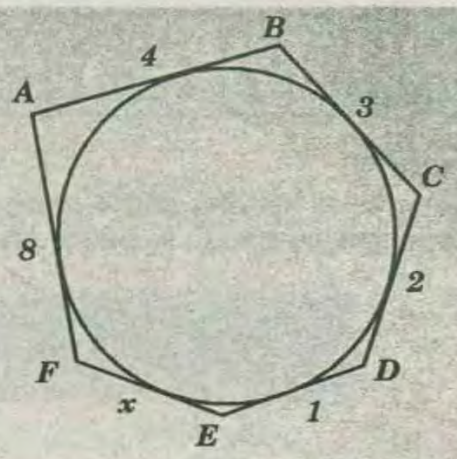
RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

Un hexágono **ABCDEF** circunscrito a una circunferencia, tal que $AB = 4u$; $BC = 3u$; $CD = 2u$; $DE = 1u$; $AF = 8u$. Halle : EF

A) 3u B) 3,5u C) 4u D) 4,5u E) 6u

RESOLUCIÓN :



* Por propiedad : $x + 4 + 2 = 8 + 3 + 1$

$$\Rightarrow x + 6 = 12 \Rightarrow x = 6\mu$$

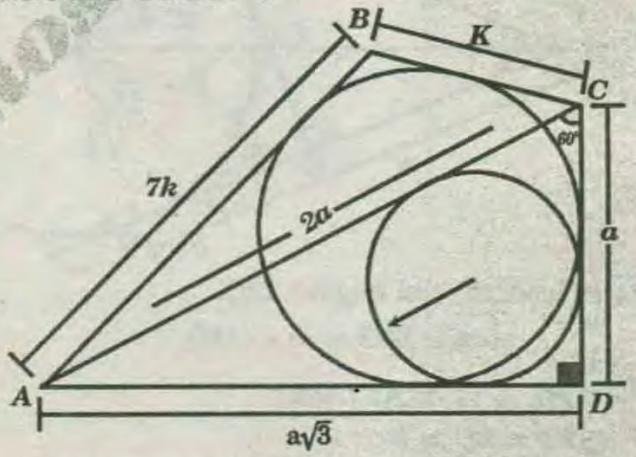
RPTA : "E"

PROBLEMA 6 :

En un cuadrilátero **ABCD** circunscrito a una circunferencia si $AB=7k$, $BC=k$, $m\sphericalangle ADC=90°$, $m\sphericalangle ACD=60°$. Calcule la medida el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo **ADC**.

A) k B) $3k$ C) $4k$ D) $\sqrt{2}k$ E) $\sqrt{3}k$

RESOLUCIÓN :



* Por teorema de Poncelet :

* $\triangle ACD$:

$$a + a\sqrt{3} = 2a + r \Rightarrow 2r = a(\sqrt{3} - 1).....(I)$$

* En el cuadrilátero circunscriptible, por el teorema de Pithot :

$$7k + a = k + a\sqrt{3} \Rightarrow 6k = a(\sqrt{3} - 1).....(II)$$

* De (I) y (II): $2r = 6k \Rightarrow r = 3k$

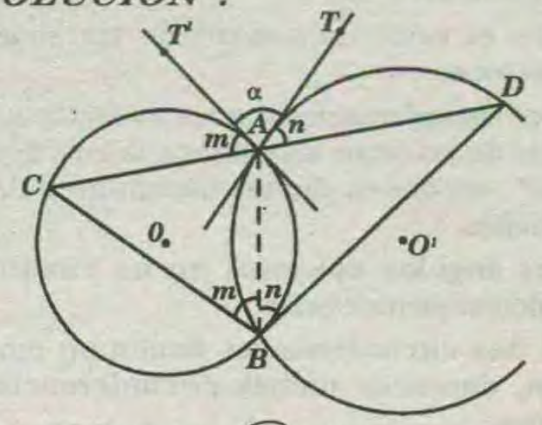
RPTA : "B"

PROBLEMA 7 :

Dos circunferencias **O** y **O'** se intersectan en **A** y **B**. Por **A** se trazan una secante **CAD** y luego, las tangentes **AT** y **AT'** respectivamente a las circunferencias **O** y **O'**. Calcule el valor del ángulo **CBD** sabiendo que el ángulo formado por las tangentes miden α.

A) $180° - \alpha$ B) $90° - \alpha$ C) $90° + \alpha$

RESOLUCIÓN :



* Si : $m\sphericalangle ABC = m \Rightarrow m\overset{\frown}{AC} = 2m$
* Luego : $m\sphericalangle CAT' = m$
* Si : $m\sphericalangle ABD = n \Rightarrow m\overset{\frown}{AD} = 2n$
* Luego : $m\sphericalangle TAD = n$
* Se cumple: $m + \alpha + n = 180°$

$\Rightarrow \underline{m+n} = 180° - \alpha$

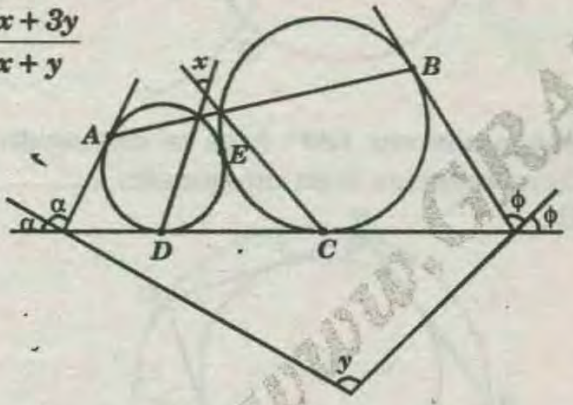
$m\sphericalangle CBD = 180° - \alpha$

RPTA : "A"

PROBLEMA 8 :

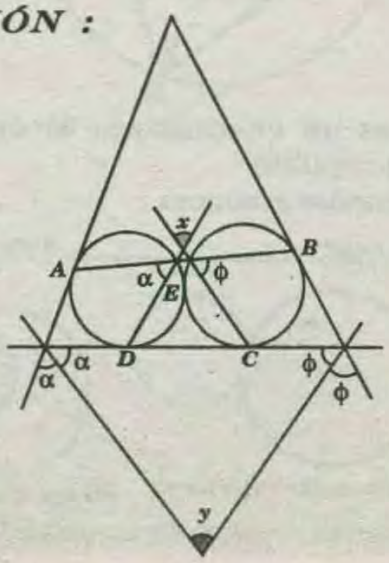
En el gráfico **A,B,C,D** y **E** son puntos de tangencia.

Halle : $\dfrac{2x+3y}{x+y}$



A) 3 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{5}{3}$

RESOLUCIÓN :



* En la figura se cumple :

$\alpha + \phi + x = 180°$ .....(I)

$y + \alpha + \phi = 180°$ .....(I)

* (I) = (II): $(\alpha+\phi) + x = (\alpha+\phi) + y \Rightarrow x = y$
* Luego :

$$T = \frac{2x+3x}{x+x} \Rightarrow T = \frac{5x}{2x} \Rightarrow T = \frac{5}{2}$$

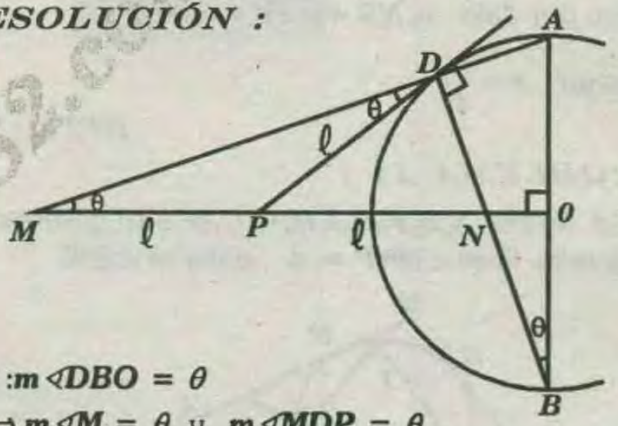
RPTA: "D"

PROBLEMA 9 :

Por un punto exterior **P** se traza una tangente **PD** a una circunferencia de centro **O**. El punto **D** se une a los extremos de un diámetro **AB**, Las rectas **DA** y **DB** intersectan a **PO** en **M** y **N** respectivamente. Calcule **MN** sabiendo que **PD** = ℓ y $\overline{PO}$ es perpendicular a **AB**.

A) $\frac{\ell}{4}$ B) $\frac{\ell}{3}$ C) $\frac{\ell}{2}$ D) 3ℓ E) 2ℓ

RESOLUCIÓN :



* Si : $m\sphericalangle DBO = \theta$

$\Rightarrow m\sphericalangle M = \theta$ y $m\sphericalangle MDP = \theta$

$\triangle MDN$: $\overline{DP}$ es mediana.

* Luego: $MN = \ell + \ell$

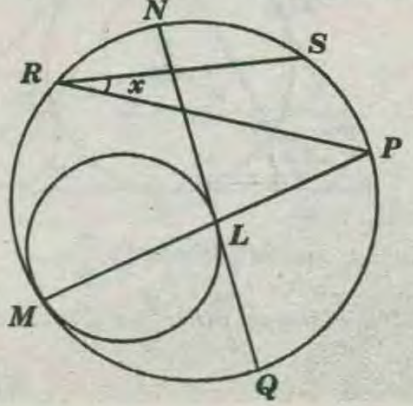
$\Rightarrow MN = 2\ell$

RPTA : "E"

PROBLEMA 10 :

Las 2 circunferencias son tangentes interiormente. **NQ** es tangente a la circunferencia menor.

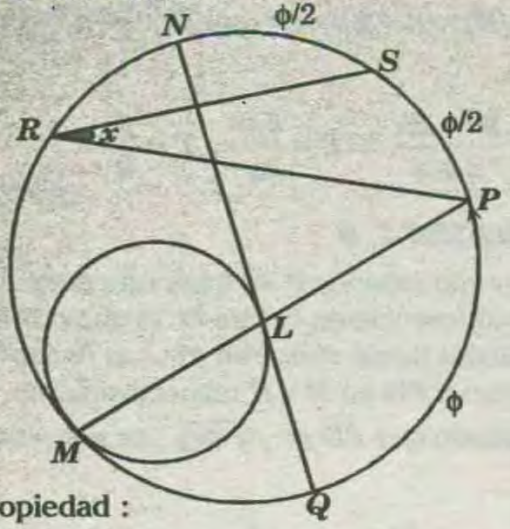
Si $m\overset{\frown}{PQ} = \phi$, $\overset{\frown}{NS} \cong \overset{\frown}{SP}$. Halle la $m\sphericalangle SRP$.



WWW.RUBIÑOSGRATIS2.COM

A) $\frac{\phi}{4}$ B) $\frac{\phi}{2}$ C) $\frac{\phi}{6}$ D) $\frac{\phi}{8}$ E) $\frac{2\phi}{5}$

RESOLUCIÓN :



* Por propiedad :

$m\widehat{NP} = m\widehat{PQ} = \phi$

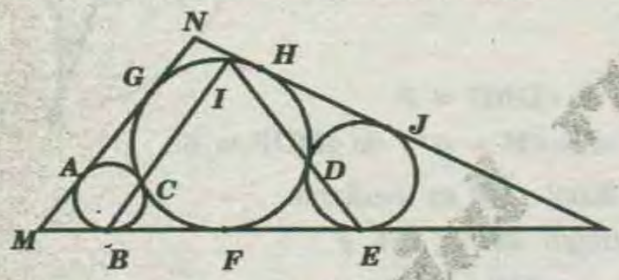
* Pero por dato : $m\widehat{NS} = m\widehat{SP} = \phi/2$

* Luego : $x = \frac{\phi}{4}$

RPTA : "A"

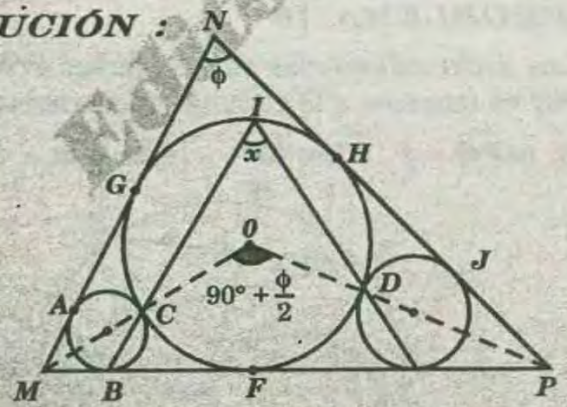
PROBLEMA 11 :

En la figura **A,B,F,E,J,H,G,C,D** son puntos de tangencia. Si $m\sphericalangle MNP = \phi$, halle $m\sphericalangle BIE$.



A) $15+\frac{\phi}{3}$ B) $30+\frac{\phi}{4}$ C) $45+\frac{\phi}{4}$ D) $45+\frac{\phi}{3}$

RESOLUCIÓN :



* Por propiedad: $m\sphericalangle MOP = 90° + \frac{\phi}{2}$

* Pero : $m\widehat{CFD} = 2x \Rightarrow 90 + \frac{\phi}{2} = 2x \Rightarrow x = 45° + \frac{\phi}{4}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 12 :

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I) Si dos circunferencias son secantes y la suma de medidas de los arcos asociados a la cuerda común es *180°*, entonces dichas circunferencias son ortogonales.

II) Los ángulos opuestos en un cuadrilátero bicéntrico suplementarios .

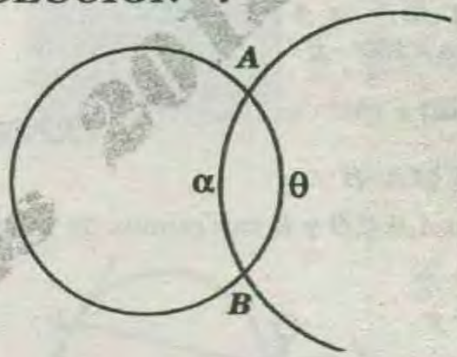
III) Si dos circunferencias tienen un punto en común, entonces dichas circunferencias son tangentes.

IV) Si un cuadrilátero es circunscriptible y exinscriptible, entonces dicho cuadrilátero es un trapezoide simétrico .

A) FFVF B) VFVV C) VVFV D) FVVF E) FVVV

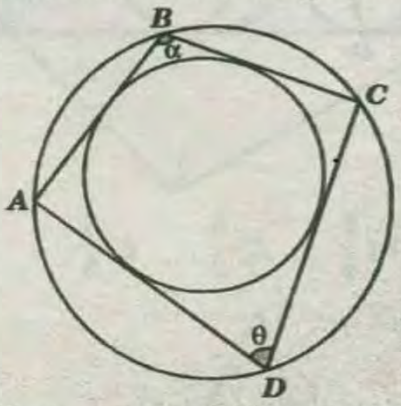
RESOLUCIÓN :

I)



$\alpha+\theta$ puede ser *180°* esto se demuestra que las circunferencias sean ortogonales.....*FALSA*.

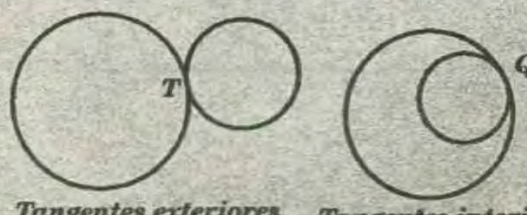
II)



ABCD es un cuadrilátero bicéntrico es decir circunscriptible e inscriptible cumpliéndose;entonces :

$\alpha+\theta = 180°$.....*VERDADERA*.

III)



Tangentes exteriores *Tangentes interiores*

Son tangentes , cuando tienen un sólo punto en común.

.....VERDADERA.

IV) Se cumple en el cuadrilátero circunscriptible y exinscriptible , el teorema de Pithot y Steiner respectivamente , sólo en el trapezoide simétrico.

.....VERDADERA.

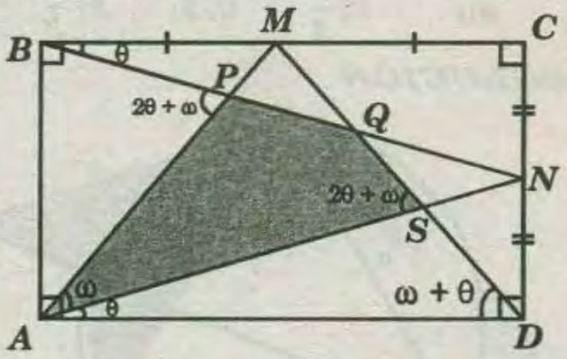
RPTA : "E"

PROBLEMA 13 :

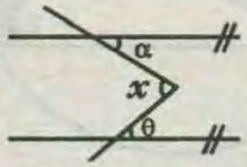
En un rectángulo *ABCD* se ubican *M* y *N* puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$. Si $\overline{BN}$ interseca en *P* y *Q* a $\overline{AM}$ y $\overline{MD}$ respectivamente y $\overline{MD}$ interseca a $\overline{AN}$ en *S* , ¿qué tipo de cuadrilátero es *APQS*?

A) bicéntrico B) circunscriptible C) inscriptible

RESOLUCIÓN :



* Propiedad :



$x = \alpha + \theta$

* En el rectángulo : $m\sphericalangle APB = 2\theta + \omega$

ΔASD : $m\sphericalangle ASQ = 2\theta + \omega$

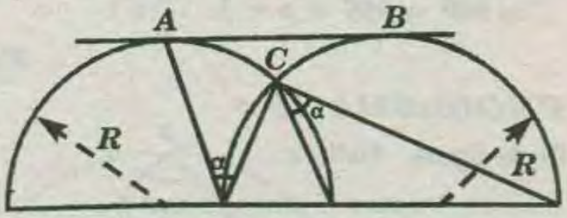
$\Rightarrow$ El cuadrilátero *APQS* es inscriptible.

RPTA : "C"

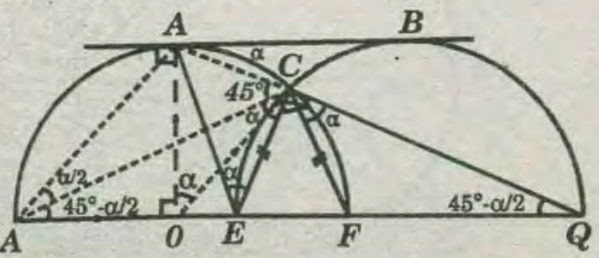
PROBLEMA 14 :

En el gráfico, *A* y *B* son puntos de tangencia . Calcule $m\widehat{AC}$.

A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°



RESOLUCIÓN :



$m\sphericalangle PCE = m\sphericalangle FCQ = \alpha$

DPCQ isósceles : $m\sphericalangle CPQ = m\sphericalangle Q = 45° - \frac{\alpha}{2}$

* $\triangle$ *AOP* isósceles : $m\sphericalangle APC = \alpha/2$

$\Rightarrow m\widehat{AC} = m\sphericalangle AOC = \alpha$

* $\square$ *OACR* inscriptible, se cumple :

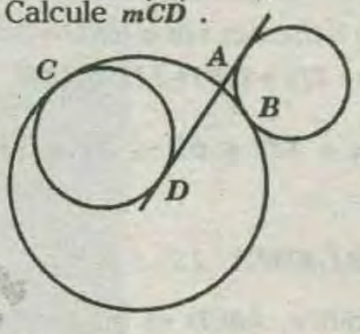
$\alpha + 45° = 90° \Rightarrow \alpha = 45°$

RPTA : "C"

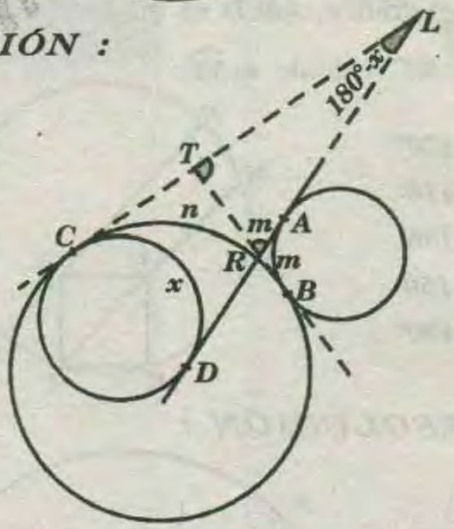
PROBLEMA 15 :

En el gráfico, *A, B, C* y *D* son puntos de tangencia y $m\widehat{AB} + m\widehat{BC} = \theta$. Calcule $m\widehat{CD}$.

A) θ/2
B) θ
C) 2θ
D) 90° − θ
E) 180° − θ



RESOLUCIÓN :



* Si : $m\widehat{AB} = m$ y $m\widehat{BC} = n$

$\Rightarrow m\sphericalangle TRA = m$ y $m\sphericalangle LTR = n$

* ΔTLR : $\Rightarrow x = \theta$

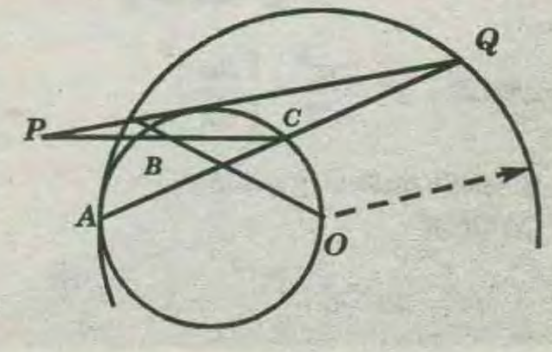
RPTA : "B"

PROBLEMA 16 :

En el gráfico, *A* es punto de tangencia.

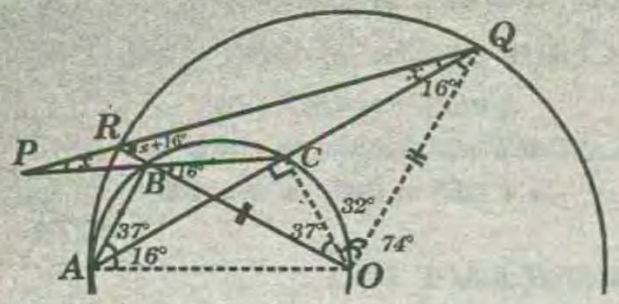
Si *AB=BC* y $m\widehat{OC} = 32°$, calcule $m\sphericalangle QPC$.

A) 15°
B) 37°/2
C) 20°
D) 45°/2
E) 45°



WWW.GRATIS2.COM

RESOLUCIÓN :



Si : $m\widehat{OC} = 32° \Rightarrow m\sphericalangle ROQ = 37° + 74° = 111°$

* $\triangle DROQ$ isósceles : $m\sphericalangle QRO = m\sphericalangle RQO = x + 16°$

* Luego : $2(x+16°)+111°=180°$

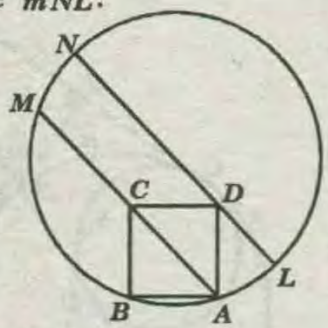
$$\Rightarrow 2x + 32° = 69 \Rightarrow 2x = 37° \Rightarrow x = \frac{37°}{2}$$

RPTA : "B"

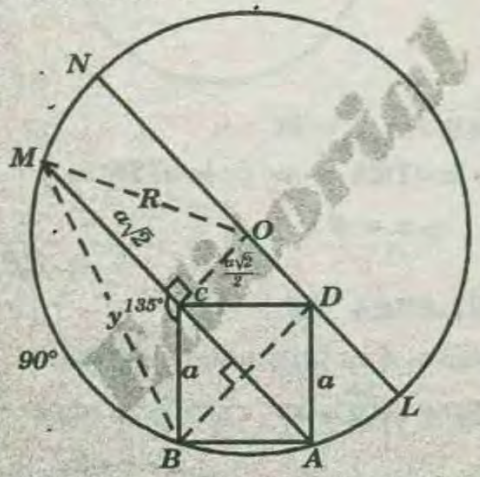
PROBLEMA 17 :

En el gráfico, $ABCD$ es un cuadrado. Si $\overline{AM} // \overline{LN}$ y $AC=MC$, calcule $m\widehat{NL}$.

A) 120°
B) 116°
C) 135°
D) 150°
E) 180°



RESOLUCIÓN :



* $\triangle MCB$: $y^2 = \frac{a^2}{2} + \left[\frac{3a}{\sqrt{2}}\right]^2$

* Simplificando : $y = a\sqrt{5}$

* $\triangle OCM$:

$$R^2 = 2a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \rightarrow R = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

* $\triangle MOB$ isósceles , donde "O" es centro de la circunferencia.

* En consecuencia , $\overline{NL}$ es diámetro.

* Luego : $m\widehat{NL} = 180°$

RPTA : "E"

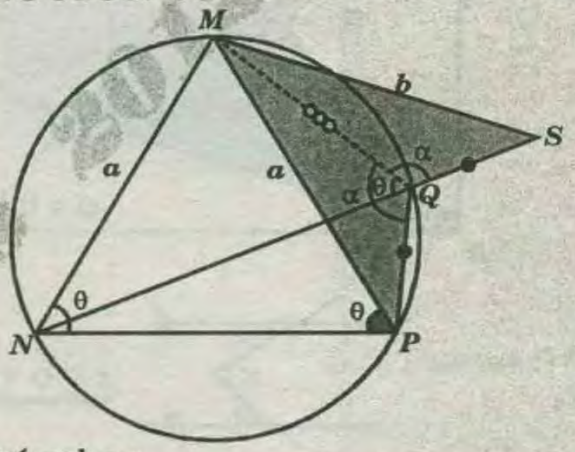
PROBLEMA 18 :

En una circunferencia se inscribe un triángulo isósceles MNP $(MN = MP = \ell)$ se toma un punto cualquiera, Q en el arco MP se prolonga $\overline{NQ}$ hasta S, si $QS=QP$.

Calcule : $\frac{MN}{MS}$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{1}{3}$ D) 2 E) $\frac{2}{3}$

RESOLUCIÓN :



* ΔNMP isósceles :

$MN = MP = \alpha$

$m\sphericalangle MNP = m\sphericalangle MPN = \theta$

$\Rightarrow m\sphericalangle MQN = \theta$ y $m\sphericalangle MQS = \alpha$

$\alpha + \theta = 180°$

* $\square NMQP$ inscrito : $\theta + \alpha = 180°$

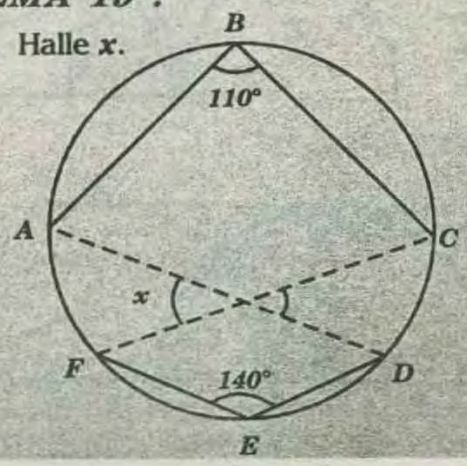
* Luego : $\Delta MQP \cong \Delta MQS$ (LAL)

$$\Rightarrow MP = MS = a = b \rightarrow \frac{a}{b} = 1$$

RPTA : "B"

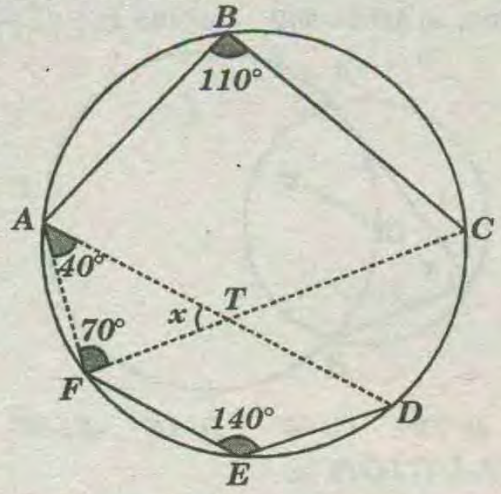
PROBLEMA 19 :

De la figura. Halle x.



A)60 B)68 C)70 D)80 E)85

RESOLUCIÓN :



* $\triangle ABCF$ inscrito : $m\sphericalangle AFC + 110° = 180°$

$\Rightarrow m\sphericalangle AFC = 70°$

* $\triangle EFAD$ inscrito: $m\sphericalangle FAD + 140° = 180°$

$\Rightarrow m\sphericalangle FAD = 40°$

* ΔFAT : $70° + 40° + x = 180° \Rightarrow x = 70°$

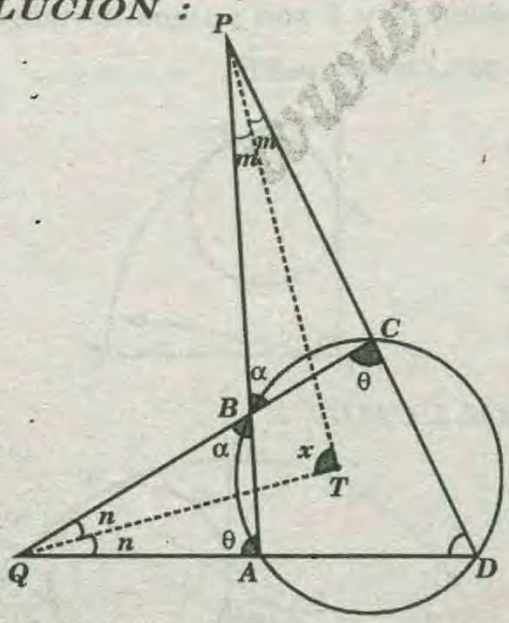
RPTA : "C"

PROBLEMA 20 :

Sea el cuadrilátero inscrito $ABCD$ en una circunferencia de centro O, $\overline{AB} \cap \overline{DC} = \{P\}$ y $\overline{BC} \cap \overline{AD} = \{Q\}$. Las bisectrices de los ángulos APD y BQA se interceptan en T. Halle la $m\sphericalangle PTQ$.

A)15° B)30° C)45° D)75° E)90°

RESOLUCIÓN :



* Por propiedad : $x = m + n + \alpha$ .....(I)

* ΔAQB : $\alpha + \theta + 2n = 180°$

* ΔBPC : $\alpha + 2m = \theta$

* Sumando: $2(m + n + \alpha) = 180°$

$\Rightarrow m + n + \alpha = 90°$ .....(II)

* De (I) y (II): $x = 90°$

RPTA : "E"

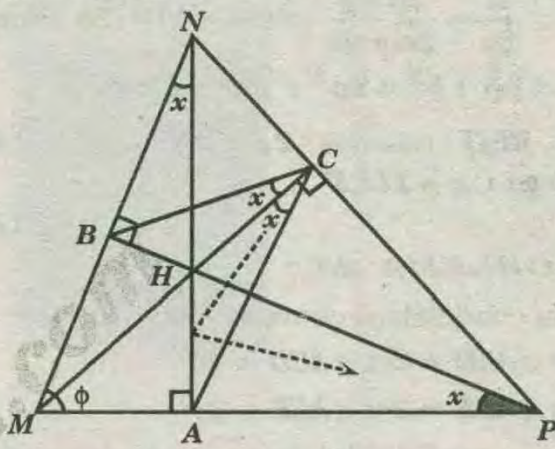
PROBLEMA 21 :

Se tiene un triángulo acutángulo MNP, se trazan las alturas $\overline{NA}; \overline{MC}$ y $\overline{PB}$ si la $m\sphericalangle NMP = \phi$.

Halle la $m\sphericalangle BCA$.

A) $60° - \phi$ B) $90° - 2\phi$ C) $180° + \phi$
D) $180° - 2\phi$ E) $120° - 2\phi$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle AHCP$ inscriptible : $m\sphericalangle HCA = m\sphericalangle HPA = x$

* $\triangle HBNC$ inscriptible : $m\sphericalangle BHN = m\sphericalangle BCH = x$

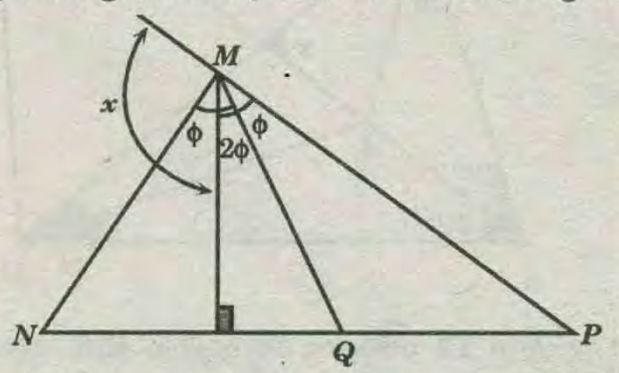
* $\triangle MBP$: $x + \phi = 90°$; $\sphericalangle 2x = 180° - 2\phi$

RPTA : "D"

PROBLEMA 22 :

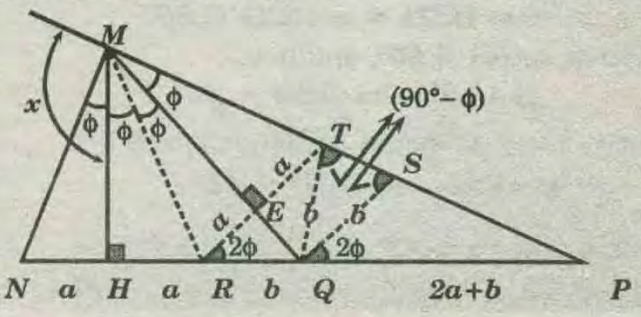
En el siguiente gráfico $\overline{MQ}$ es mediana del triángulo MNP.

Halle x.



A) 60° B) 90° C) 67,5° D)12,5° E) 112,5°

RESOLUCIÓN :



* Se traza $\overline{RT} \perp \overline{MQ} (T \in \overline{MP})$

$\Rightarrow m\sphericalangle TRQ = 2\phi$

ΔRQT isósceles :

$RQ = QT = b$

* Se traza $\overline{QS} \perp \overline{RT}$

$\Rightarrow m\sphericalangle SQP = m\sphericalangle TRP = 2\phi$

* ΔTQS isósceles : $TQ = QS = b$

* Como $\overline{QS} \perp \overline{RT}$, se cumple :

$$\frac{b}{2a} = \frac{2a+b}{2a+2b} \Rightarrow b(a+b) = (2a+b)a$$

$$\Rightarrow ab + b^2 = 2a^2 + ab \Rightarrow b = a\sqrt{2}$$

* $\triangle REQ$; isósceles : $2\phi = 45° \rightarrow \phi = 22{,}5°$

* Luego : $x = 112{,}5°$

RPTA : "E"

PROBLEMA 23 :

En un cuadrilátero convexo $ABCD$.

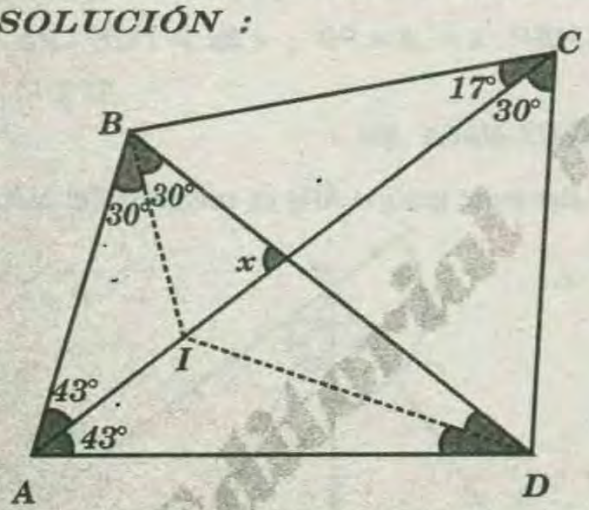
La $m\sphericalangle ABD = 2m\sphericalangle ACD = 60°$

La $m\sphericalangle ADB = 2m\sphericalangle ACB = 34°$

Halle la medida del ángulo que determinan sus diagonales.

A)72 B)74 C)77 D)80 E)82

RESOLUCIÓN :



* Se traza $\overline{DI}$ bisectriz del angulo ADB , entonces :

$m\sphericalangle ADI = m\sphericalangle BDI = 17°$

* Cuadrilátero $IBCD$ es inscriptible :

$\Rightarrow m\sphericalangle IBD = m\sphericalangle ICD = 30°$

* Pero $m\sphericalangle ABD = 60°$, entonces ;

$m\sphericalangle ABI = m\sphericalangle IBD = 30°$

* Luego I es incentro del ΔABD, entonces :

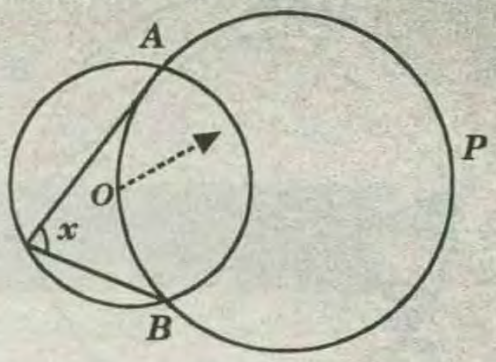
$m\sphericalangle BAI = m\sphericalangle IAD = 43°$

* Finalmente : $x = 43° + 34° \Rightarrow x = 77°$

RPTA : "C"

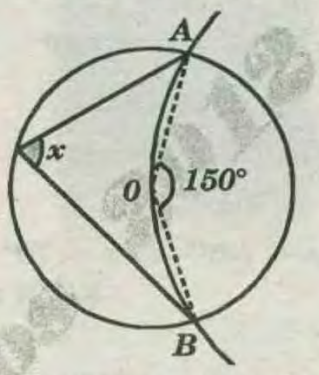
PROBLEMA 24 :

Del gráfico, $m\overset{\frown}{APB} = 300°$. Calcule x.



A) 70° B) 72° C) 75° D) 74° E) 82°

RESOLUCIÓN :



* Si: $m\overset{\frown}{PB} = 300 \Rightarrow m\sphericalangle AOB = 150°$

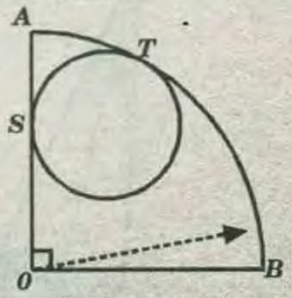
* Luego: $x = \frac{150°}{2} \Rightarrow x = 75°$

RPTA : "C"

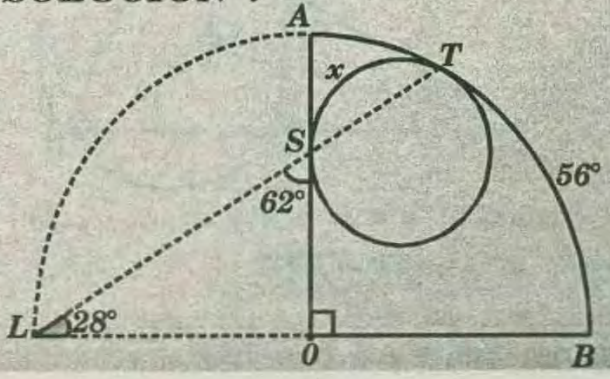
PROBLEMA 25 :

Del gráfico, S y T son puntos de tangencia. Si $m\overset{\frown}{TB} = 56°$, calcule $m\overset{\frown}{ST}$.

A) 120°
B) 110°
C) 124°
D) 140°
E) 130°



RESOLUCIÓN :



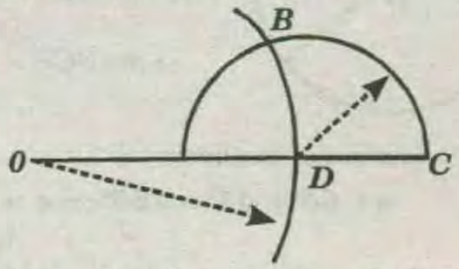
* Si : $m\overset{\frown}{TB} = 56° \Rightarrow m\sphericalangle TLB = 28°$

* $\triangle SOL$: $m\sphericalangle AST = 62° \Rightarrow x = 124°$

RPTA : "C"

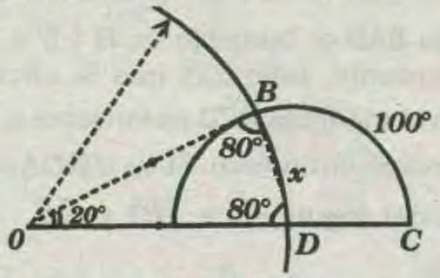
PROBLEMA 26 :

Del gráfico, $m\overset{\frown}{BC} = 100°$. Calcule $m\overset{\frown}{BD}$.



A) 30° B) 50° C) 20° D) 40° E) 10°

RESOLUCIÓN :



* $\triangle OBD$ isósceles : $OB = OD$

$\Rightarrow m\sphericalangle ODB = m\sphericalangle OBD = 80° \Rightarrow m\sphericalangle BOD = x = 20°$

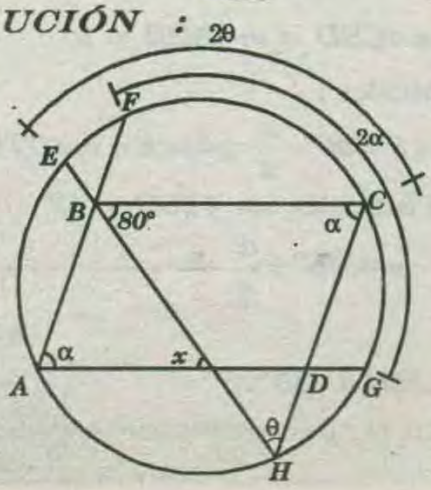
RPTA : "C"

PROBLEMA 27 :

Del gráfico, $m\overset{\frown}{FG} + m\overset{\frown}{EC} = 200°$ y $ABCD$ es un paralelogramo . Calcule x.

A) 80°
B) 60°
C) 70°
D) 50°
E) 75°

RESOLUCIÓN :



* Dato:

$2\alpha + 2\theta = 200° \rightarrow \alpha + \theta = 100°$

* Pero: $m\sphericalangle A = m\sphericalangle C = \alpha$ y $m\sphericalangle H = \theta$

* $\triangle HBC$: $m\sphericalangle CBH = 80°$

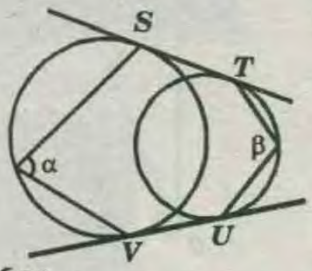
* Como $\overline{BC} \parallel \overline{AD} \Rightarrow x = 80°$

RPTA: "A"

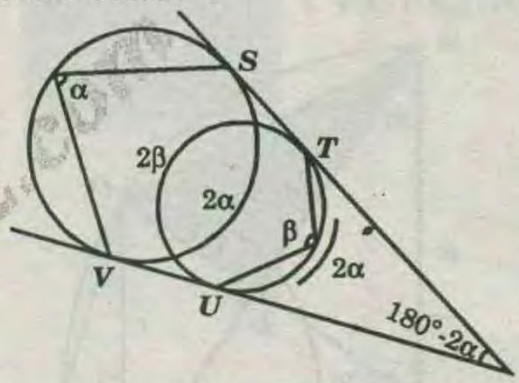
PROBLEMA 28 :

Del gráfico, S, T, U y V son puntos de tangencia . Calcule $\alpha + \beta$.

A) 160°
B) 165°
C) 170°
D) 175°
E) 180°



RESOLUCIÓN :



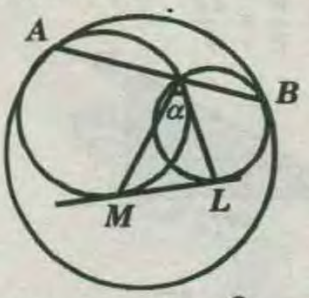
* De la figura : $2\alpha + 2\beta = 360° \Rightarrow \alpha + \beta = 180$

RPTA : "E"

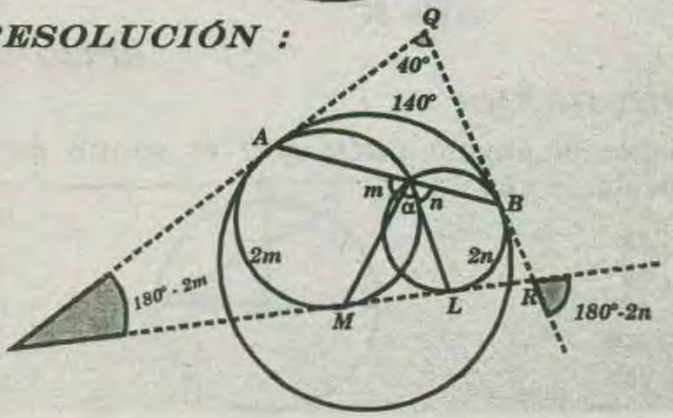
PROBLEMA 29 :

Según el gráfico, A, B, M y L son puntos de tangencia. Si $m\overset{\frown}{AB} = 140°$, calcule α.

A) 70°
B) 50°
C) 80°
D) 40°
E) 85°



RESOLUCIÓN :



WWW.GRATIS2.COM

ΔPQR :

$180^\circ - 2m + 180^\circ - 2n + 40^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow 2m + 2n = 220^\circ \Rightarrow m + n = 110^\circ$

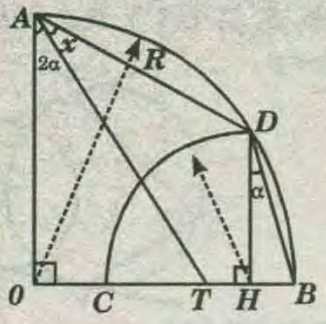
* Luego : $\alpha = 70^\circ$

RPTA : "A"

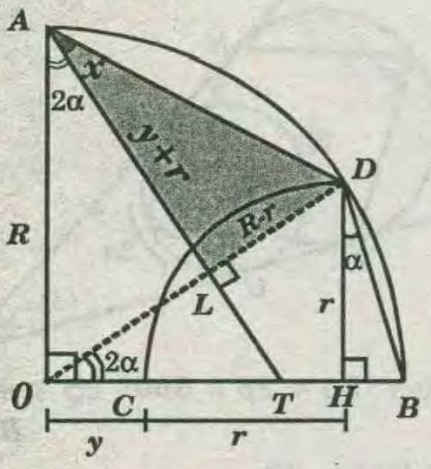
PROBLEMA 30 :

Según el gráfico, $4R=3(OC)+7r$. Calcule x .

A) 37°
B) 53°
C) 45°
D) 30°
E) 15°



RESOLUCIÓN :



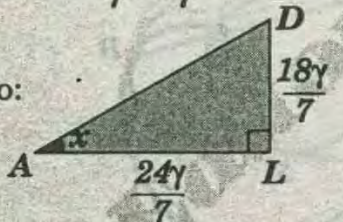
* Por dato :

$4R = 3y + 7r$ ..... (I)

* $\triangle ODH$: $R^2 = r^2 + (y+r)^2$ .....(II)

* De (I) y (II): $\frac{R}{r} = \frac{25}{7}$

* Luego:



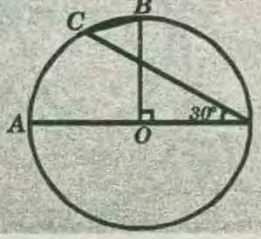
$\Rightarrow x = 37^\circ$

RPTA : "A"

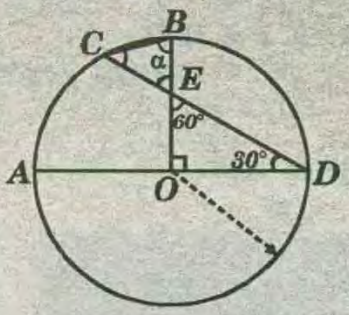
PROBLEMA 31 :

Hallar el ángulo CBO, si O es centro de la circunferencia.

A) 75°
B) 50°
C) 65°
D) 40°
E) 70°



RESOLUCIÓN:



* Del gráfico , piden : α

* De la figura :

$m\sphericalangle BEC = m\sphericalangle OED = 60^\circ$

$\rightarrow m\sphericalangle BCE = \frac{m\overset{\frown}{BD}}{2} = 45^\circ$

*ΔEBC : (suma de $m\sphericalangle$internos)

$\alpha + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 75^\circ$

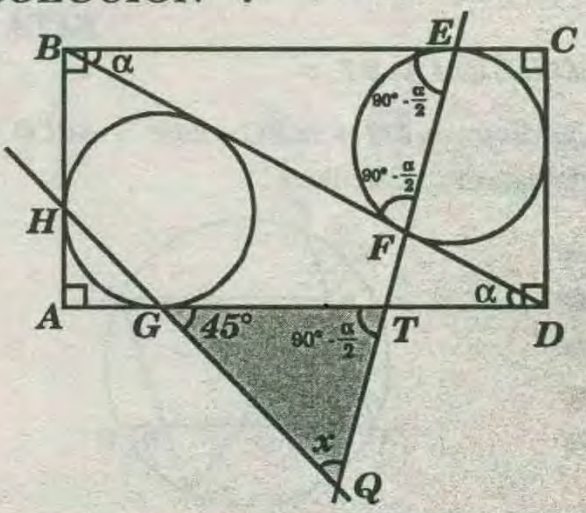
RPTA : "A"

PROBLEMA 32 :

En un rectángulo $ABCD$, la circunferencia inscrita en el triángulo BAD es tangente en H y G a $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ respectivamente, mientras que la circunferencia inscrita en el triángulo BCD es tangente a $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$ en E y F, respectivamente. Si $m\sphericalangle BDA = \alpha$, calcule la medida del ángulo entre $\overline{HG}$ y $\overline{EF}$.

A) $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ B) $90^\circ - \frac{\alpha}{4}$ C) $45^\circ + \frac{\alpha}{2}$

RESOLUCIÓN :



$m\sphericalangle CBD = m\sphericalangle ADB = \alpha$

Δ BEF isósceles :

$m\sphericalangle E = m\sphericalangle F = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow m\sphericalangle E = m\sphericalangle GTQ = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

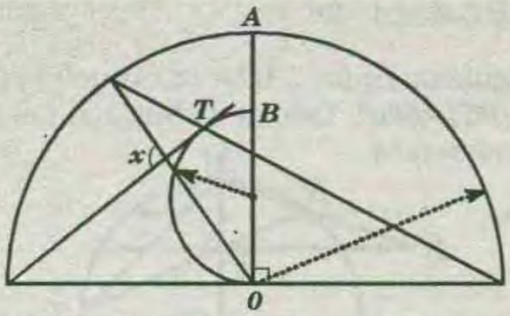
* $\triangle HAG$ isósceles : $m\sphericalangle TGQ = 45^\circ$

* ΔGTQ : $x = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$

RPTA : "C"

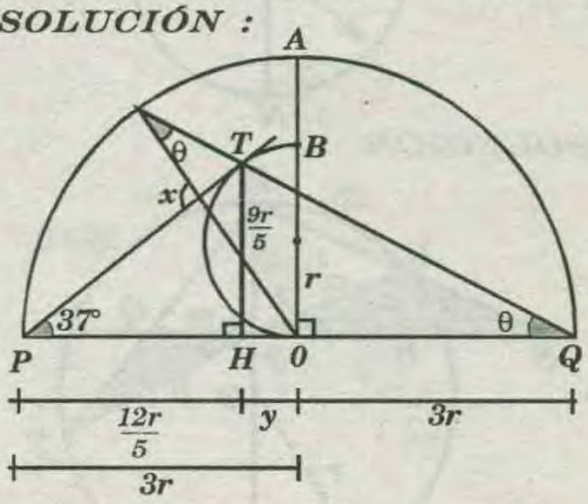
PROBLEMA 33 :

En el gráfico, O y T son puntos de tangencia. Si $AB=r$, calcule x .



A) 90° B) 105° D) 120° C) 106° E) 135°

RESOLUCIÓN :



$$y+\frac{127}{5}=3r \rightarrow y=\frac{3r}{5}$$

* $\triangle THQ$:

$$tg\theta=\frac{\frac{9r}{5}}{\frac{3r}{5}+3r}=\frac{1}{2} \rightarrow \theta=\frac{53°}{2} \Rightarrow 2\theta=53°$$

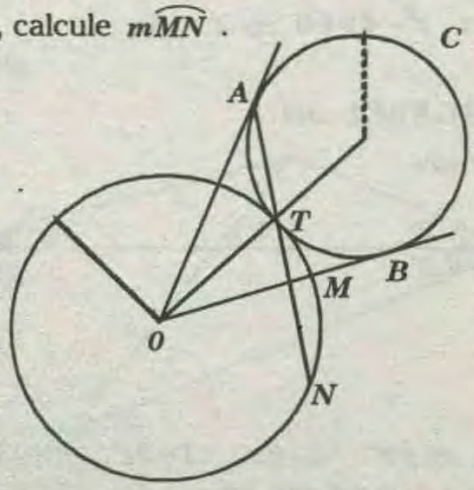
* Luego : $x = 2\theta + 37°$

$\Rightarrow x = 53° + 37° \Rightarrow x = 90°$

RPTA : "A"

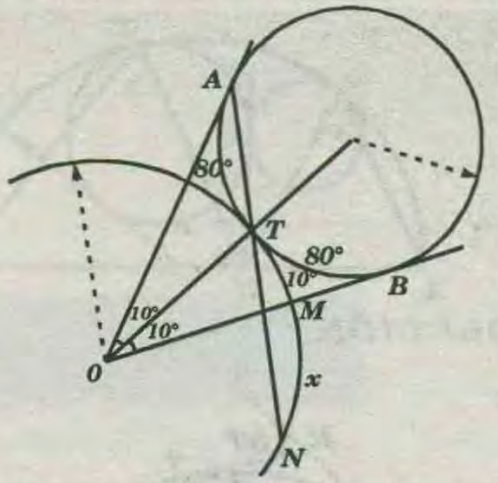
PROBLEMA 34 :

Del gráfico , $m\overset{\frown}{ATB}=200°$ Si **A** y **B** son puntos de tangencia, calcule $m\overset{\frown}{MN}$.



A) 40° B) 60° C) 70° D) 50° E) 30°

RESOLUCIÓN :



$m\overset{\frown}{ATB} = 160° \Rightarrow m\sphericalangle AOT = m\sphericalangle TOM = 10° \Rightarrow m\overset{\frown}{TM} = 10°$

Pero : $m\overset{\frown}{AT} = m\overset{\frown}{TMN} \Rightarrow x + 10° = 80° \Rightarrow x = 70°$

RPTA : "C"

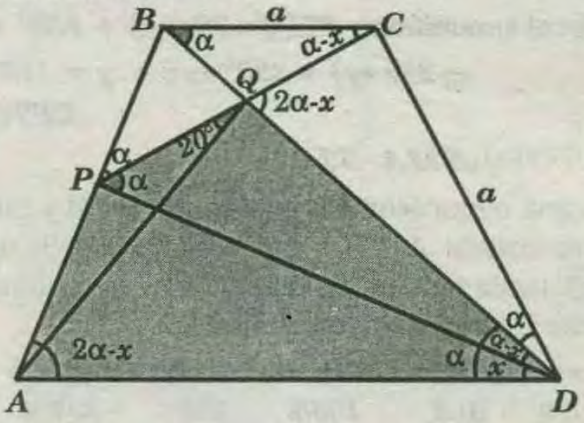
PROBLEMA 35 :

Se tiene un trapecio **ABCD** $(\overline{BC}//\overline{AD})$, $(P \in \overline{AB},\ \overline{BD} \cap \overline{PC} = \{Q\})$

Si $BC=CD$, $m\sphericalangle DBC = m\sphericalangle QPD$ y $m\sphericalangle PQA = 20°$, calcule $m\sphericalangle PDA$.

A) 25° B) 20° C) 40° D) 30° E) 25°

RESOLUCIÓN :



* Dato:

$$m\sphericalangle DBC = m\sphericalangle QPD = \alpha$$

* Si: $BC = CD = a \Rightarrow m\sphericalangle BDC = \alpha$

* Como el cuadrilátero **PBCD** es inscriptible , entonces la $m\sphericalangle BPC = \alpha$.

* También : $\overline{BC}//\overline{AD}$ entonces la $m\sphericalangle ADB = \alpha$

* ΔAPD : $m\sphericalangle A = 2\alpha - x$

* ΔQBC : $m\sphericalangle CQD = 2\alpha - x$

* Luego el cuadrilátero **APQD** es inscriptible.

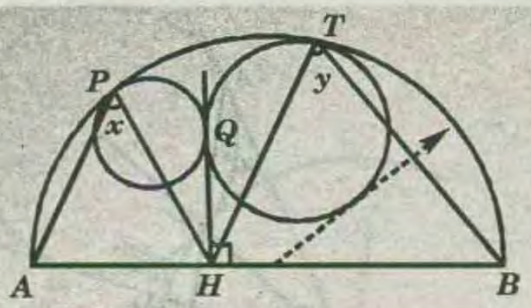
$$x = 20°$$

RPTA : "B"

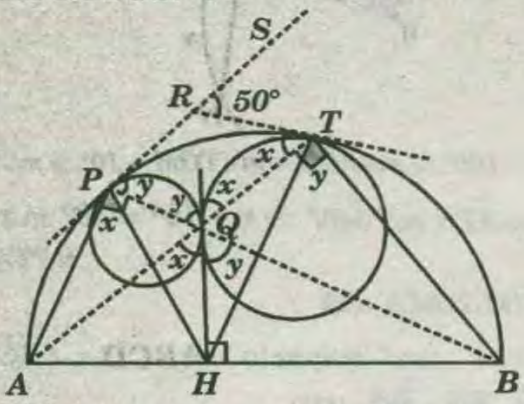
PROBLEMA 36 :

En el gráfico **P**, **Q** y **T** son puntos de tangencia, y $m\overset{\frown}{PT}=50°$. Calcule $x+y$.

A) 130°
B) 100°
C) 90°
D) 120°
E) 115°



RESOLUCIÓN :



Si : $m\widehat{PT} = 50° \Rightarrow m\sphericalangle SRT = 50°$

* Los puntos P,Q,B y A,Q,T son colineales respectivamente.

* Los cuadriláteros $APQH$ y $HQTB$ son inscriptibles, entonces : $m\sphericalangle AQH = x$; $m\sphericalangle HQB = y$

* En el cuadrilátero $PRTQ$: $2(x+y) + 130° = 360°$

$$\Rightarrow 2(x+y) = 230° \Rightarrow x + y = 115°$$

RPTA : "E"

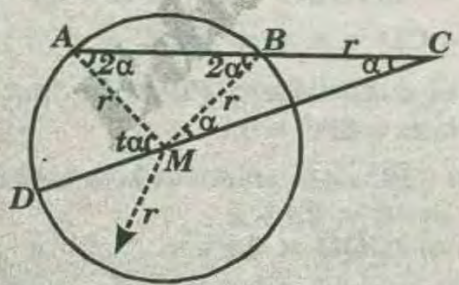
PROBLEMA 37 :

En una circunferencia con centro en M y radio r se traza cuerda $\overline{AB}$ que no contiene a M. Se prolonga $\overline{AB}$ hasta C de modo que $BC = r$ y se prolonga $\overline{CM}$ hasta D sobre la circunferencia.

Si $m\sphericalangle AMD = t\,m\sphericalangle ACD$, entonces t es igual a :

A) 3/2 B) 2 C)5/2 D)3 E)7/2

RESOLUCIÓN :



* Dato : $m\sphericalangle AMD = t\,m\sphericalangle ACD$

* Piden : t

* Se observa : $\triangle MBC$ y $\triangle AMB$ son isósceles.

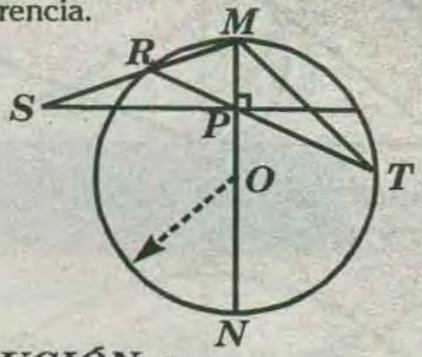
* en $\triangle AMC$: $t\alpha = 2\alpha + \alpha \Rightarrow t\alpha = 3\alpha \Rightarrow t = 3$

RPTA :"D"

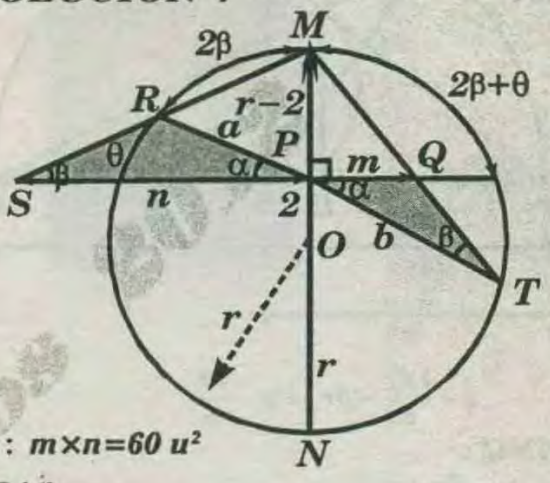
PROBLEMA 38 :

En la siguiente figura , $\overline{MN}$ es diámetro , $OP = 2u$ y $(PQ)\times(PS) = 60u^2$. Calcule la longitud del radio de la circunferencia.

A) 7u
B) 6u
C) 5u
D) 9u
E) 8u



RESOLUCIÓN :



* Dato : $m\times n = 60\ u^2$

* Piden : r

* Teorema de cuerdas :

$$(r+2)(r-2) = a\times b$$

$$\Rightarrow r^2 - 4 = a\times b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$m\sphericalangle RSP = \beta$ (ángulo exterior)

$$\triangle SRP \sim \triangle TQP$$

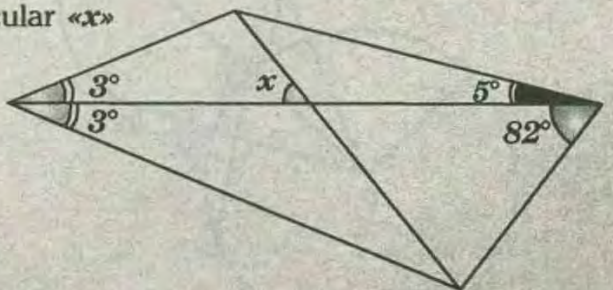
$$\frac{n}{b} = \frac{a}{m} \Rightarrow \begin{matrix} mn = ab \\ ab = 60u^2 \end{matrix}$$

* En (I) : $r^2 - 4 = 60 \Rightarrow r = 8u$

RPTA:"E"

PROBLEMA 39 :

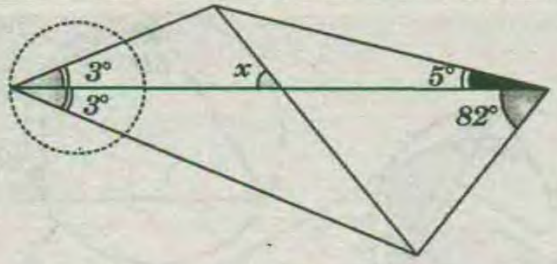
Calcular «x»



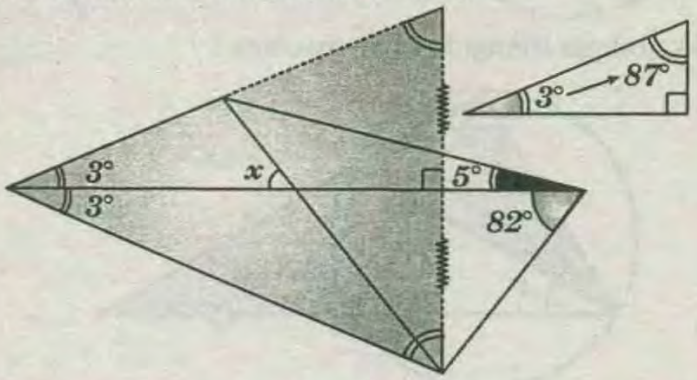
A) 15° B) 27° C) 28° D) 36° E) 13°

RESOLUCIÓN:

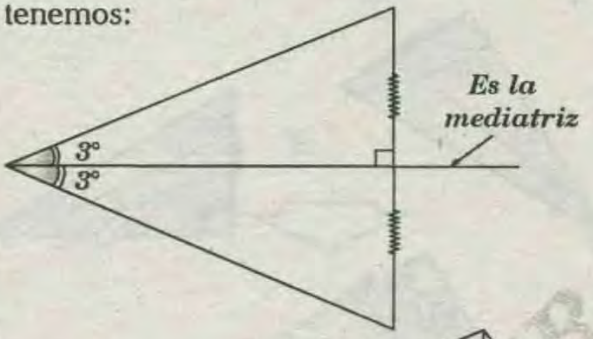
Observamos que en la figura hay una bisectriz.

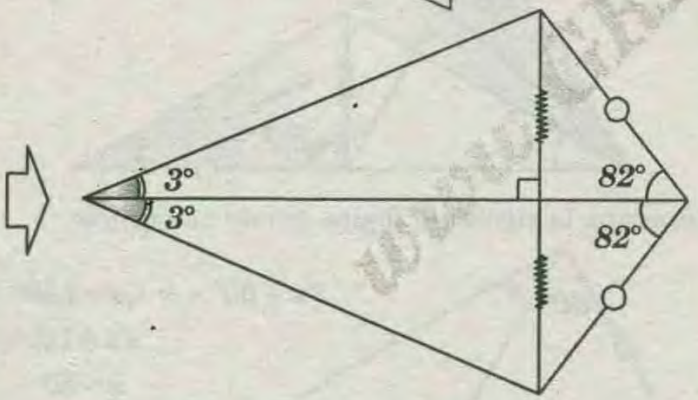


Utilizamos el siguiente criterio de construcción (formamos un triángulo isósceles).

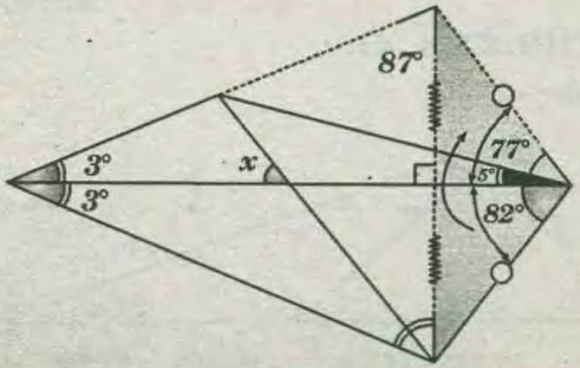


Aquí tenemos:

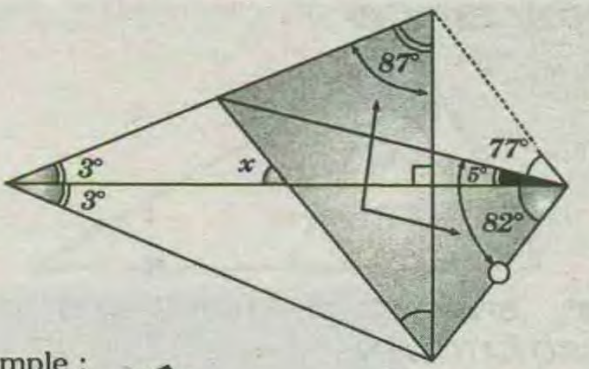




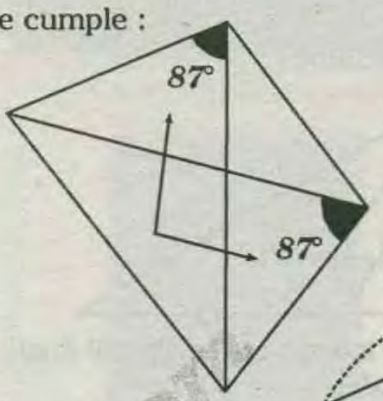
Empleando la propiedad de la mediatriz :

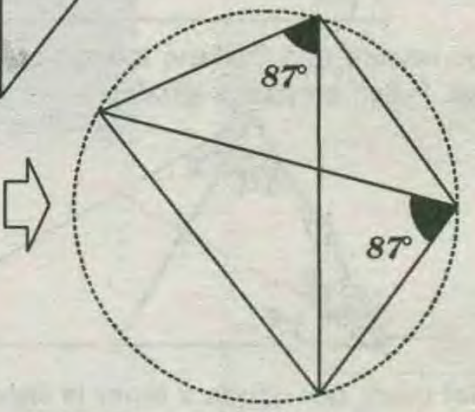


Se observa en la figura un cuadrilátero inscriptible

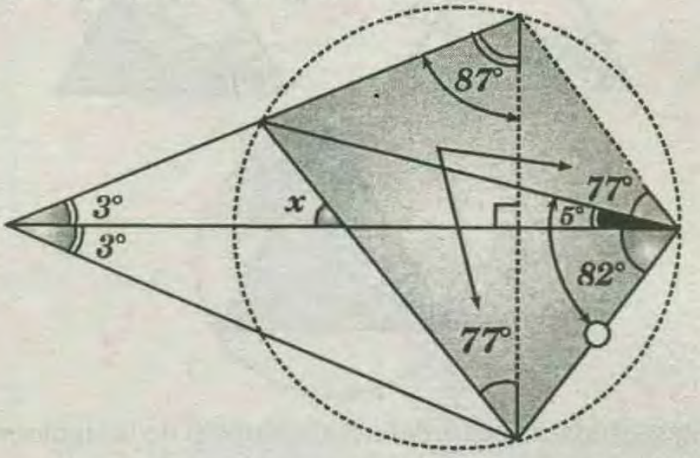


Se cumple :

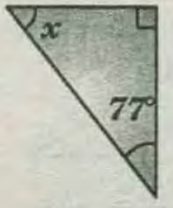




Aquí la propiedad del pantalón :



Luego se observa en la figura :



$\Rightarrow 77° + x = 90$

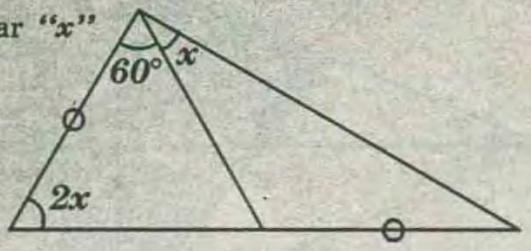
$x = 13°$

RPTA:"E"

WWW.ARATIS2.COM

PROBLEMA 40 :

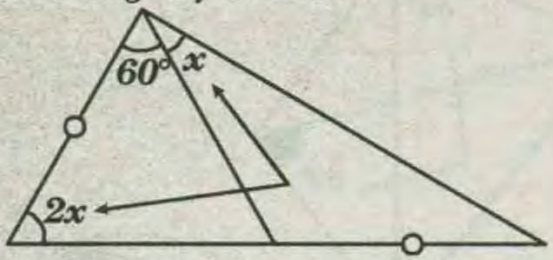
Calcular "x"



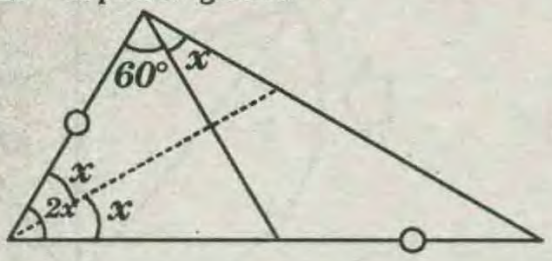
A) 25° B) 20° C) 40° D) 30° E) 25°

RESOLUCIÓN:

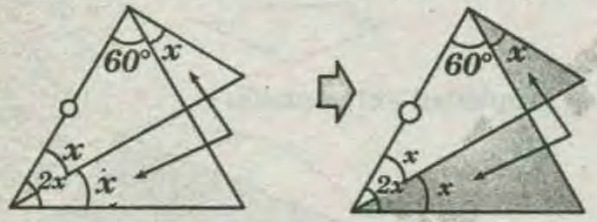
Se observa la figura y se tiene :

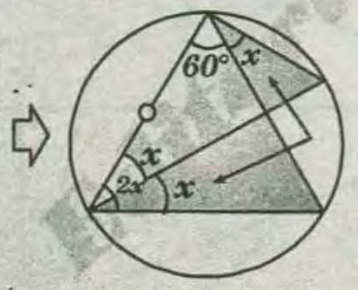


Se trazará una ceviana interna que divida ál ángulo de "2x" en partes iguales.

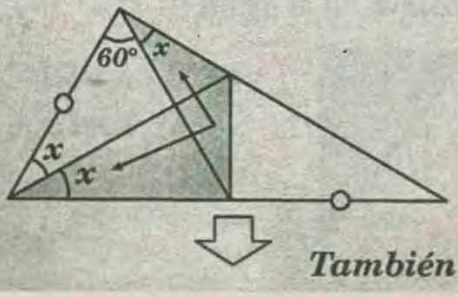


Tal trazo, nos ayuda a tener la siguiente figura.

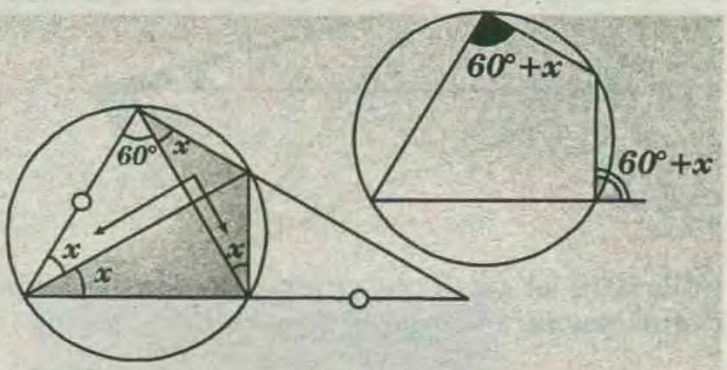




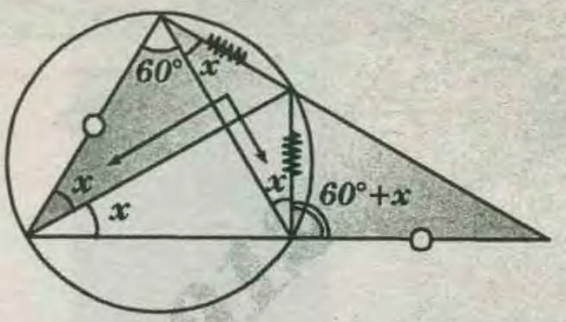
Formamos un cuádrilatero inscriptible de la siguiente manera (cumple el teorema del pantalón).

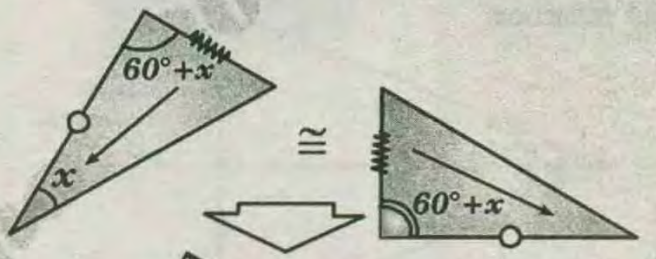


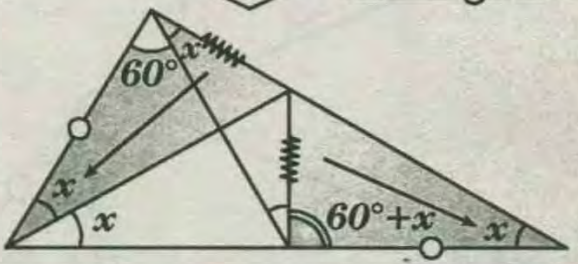
También



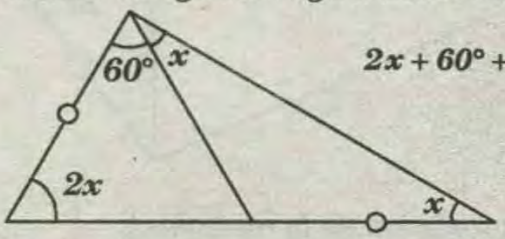
Se obtiene triángulos congruentes :







Tenemos la siguiente figura donde se cumple :



$$2x + 60° + x + x = 180°$$
$$4x = 120°$$
$$x = 30°$$

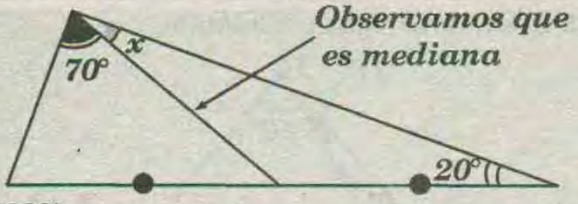
RPTA:"D"

PROBLEMA 41 :

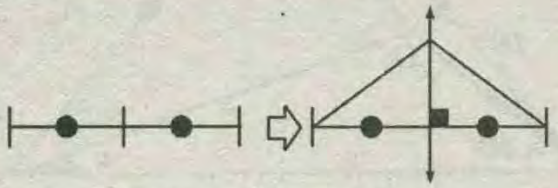
Calcular «x»

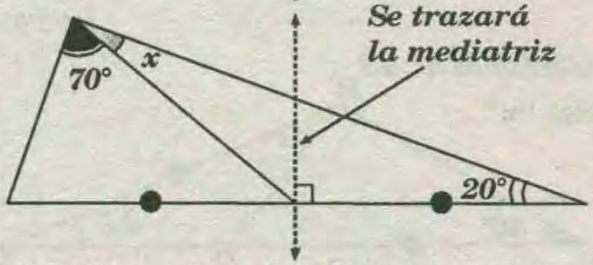
A) 28° B) 25° C) 40° D) 60° E) 20°

RESOLUCIÓN:

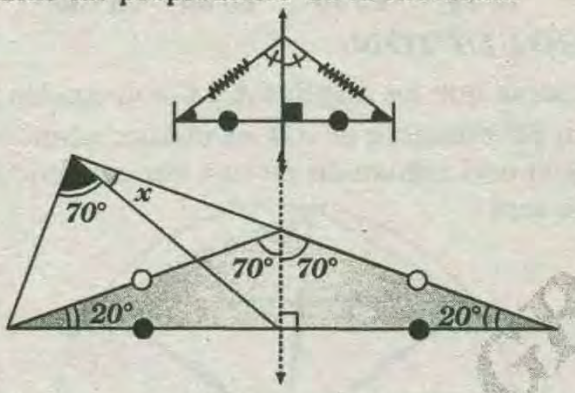


Sabemos:

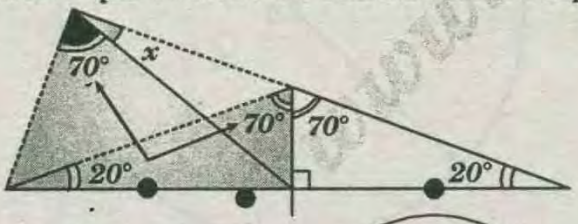


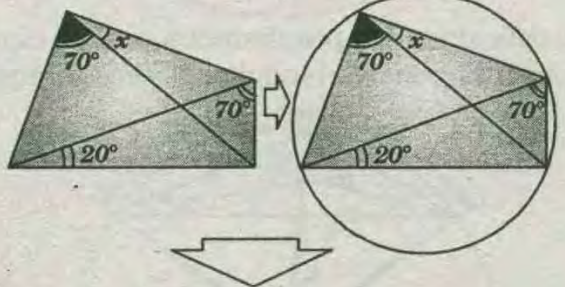


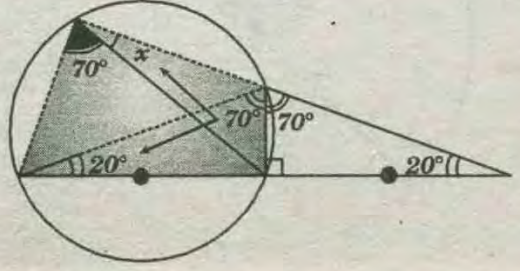
Aplicando las propiedades de la mediatriz



Se observa que se tiene un cuadrilátero inscriptible







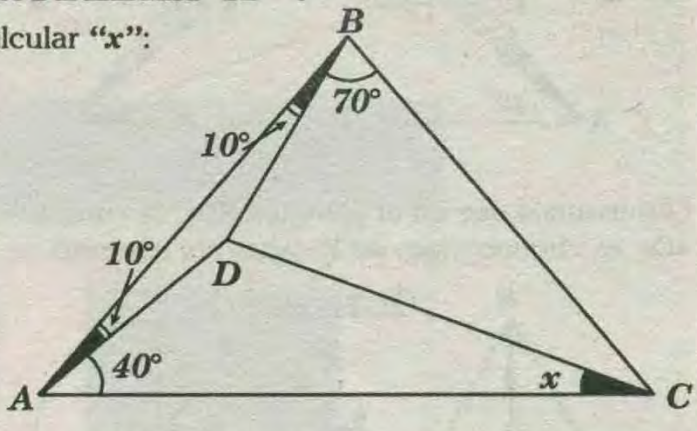
Aquí se obtiene, de la figura, utilizando las propiedades del «pantalón».

$x=20°$

RPTA:"E"

PROBLEMA 42 :

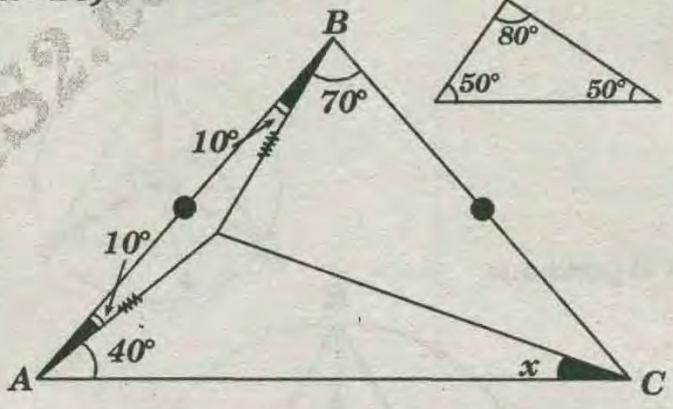
Calcular "*x*":



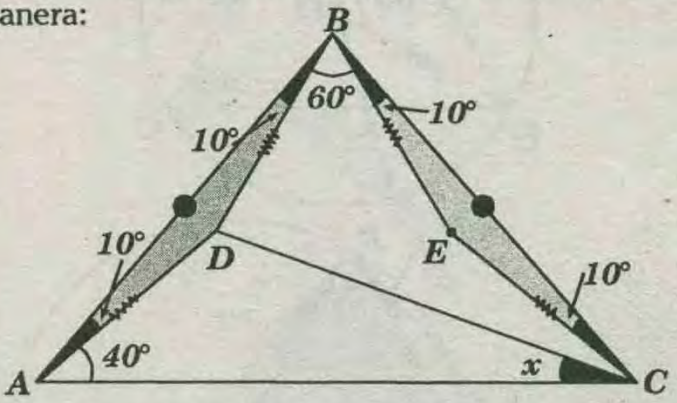
A) 26° B) 50° C) 12° D) 30° E) 20°

RESOLUCIÓN:

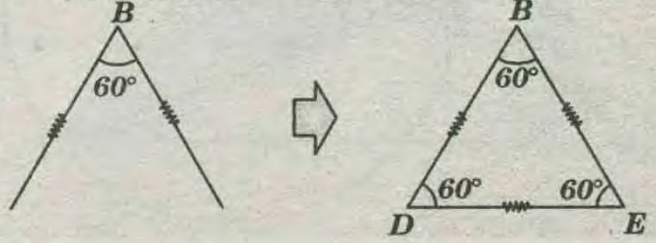
*Se observa que el triángulo ***ABC*** es isósceles ***(AB=BC)***



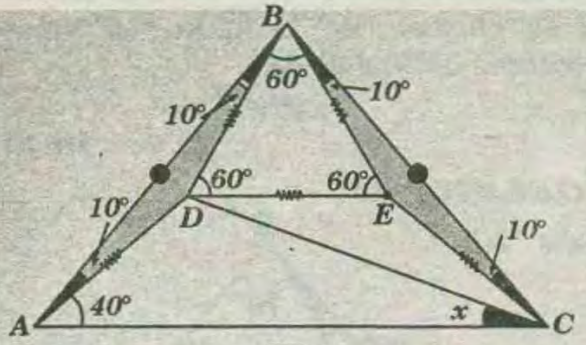
Ahora construimos un triángulo congruente al triángulo ***ADB*** sobre el lado ***BC*** de la siguiente manera:



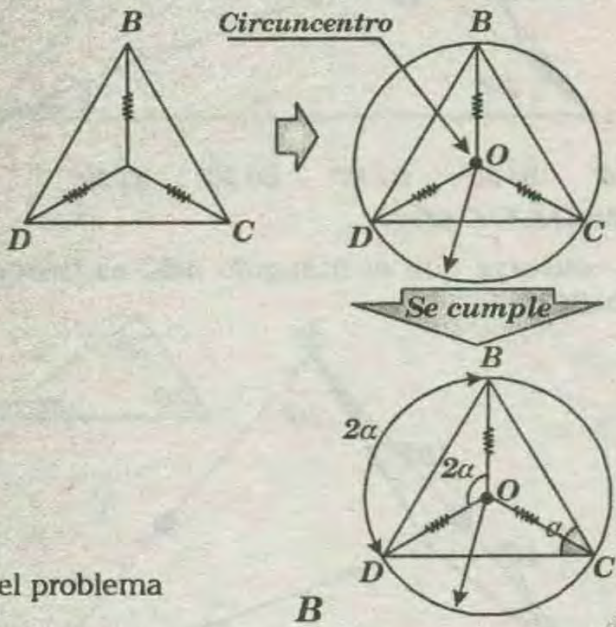
En la figura resultante se observa:



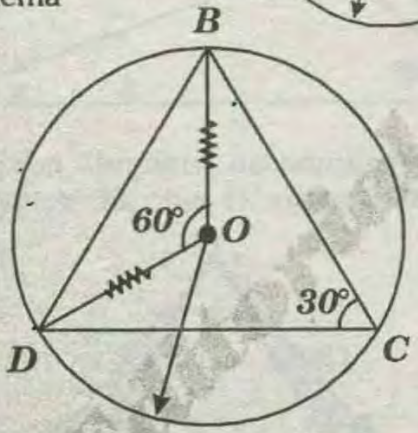
BLOG GRATIS2.COM

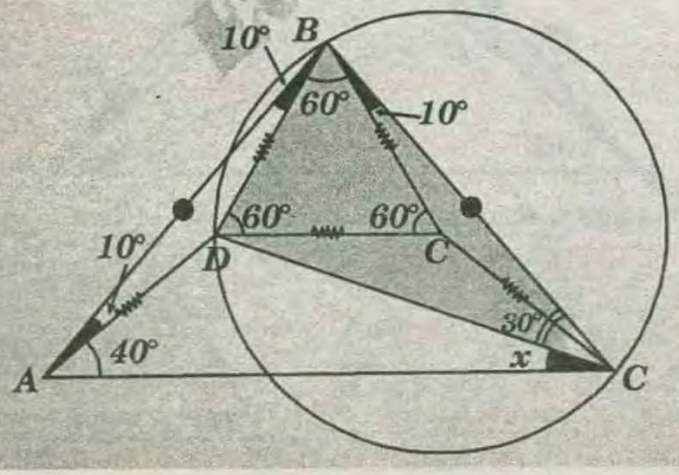


Observamos que en el triángulo ***BDC*** se cumple que «***O***» es circuncentro, de la siguiente manera:

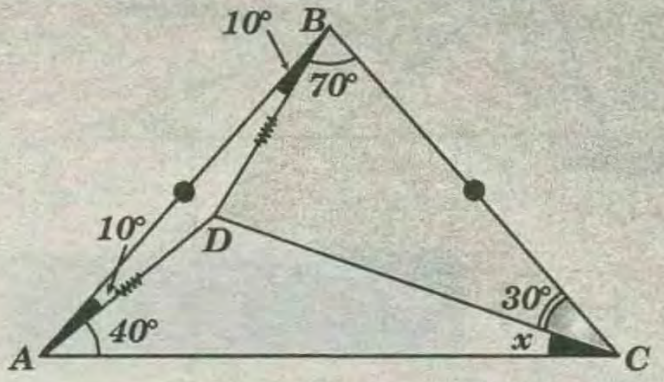


En el problema





Ahora tenemos la figura resultante:

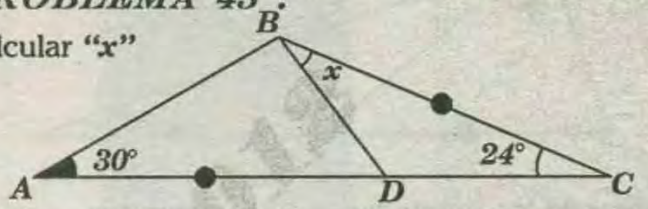


$\Rightarrow 50° = 30° + x \Rightarrow x = 20°$

RPTA:"E"

PROBLEMA 43 :

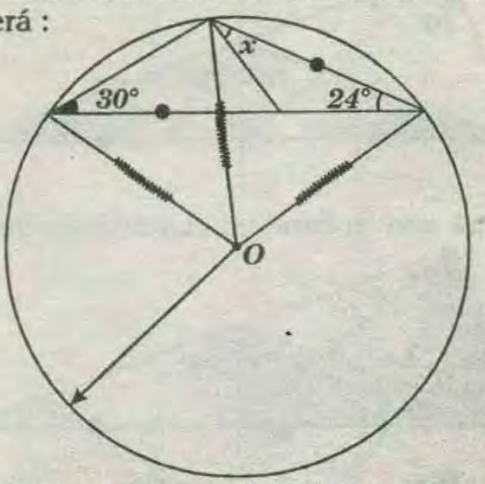
Calcular "***x***"



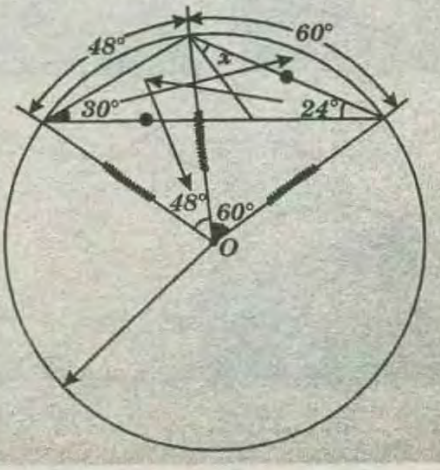
A) 23° B) 20° C) 40° D) 50° E) 30°

RESOLUCIÓN:

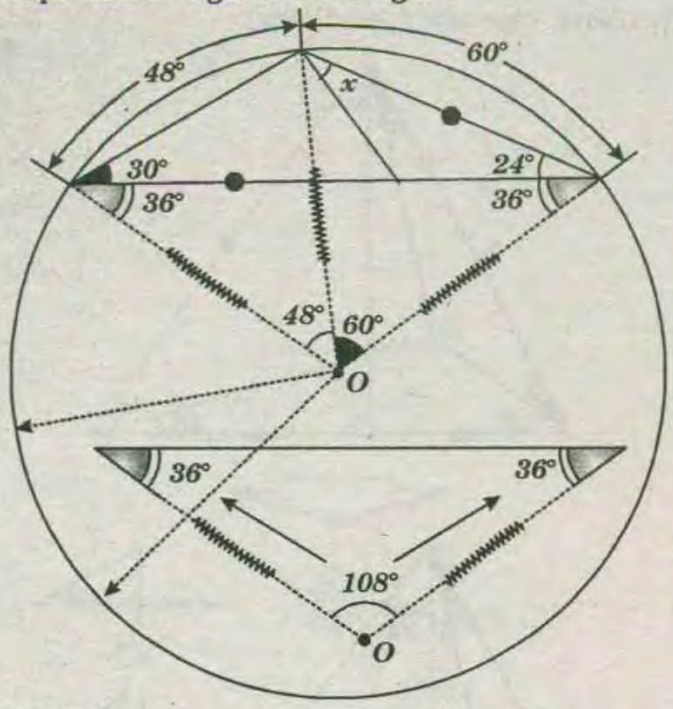
Se observa que los ángulos ***A*** y ***C*** son agudos y que suman ***54°*** entonces el $\sphericalangle B$ es obtuso, además todo triángulo está contenido en una circunferencia y su gráfica será :

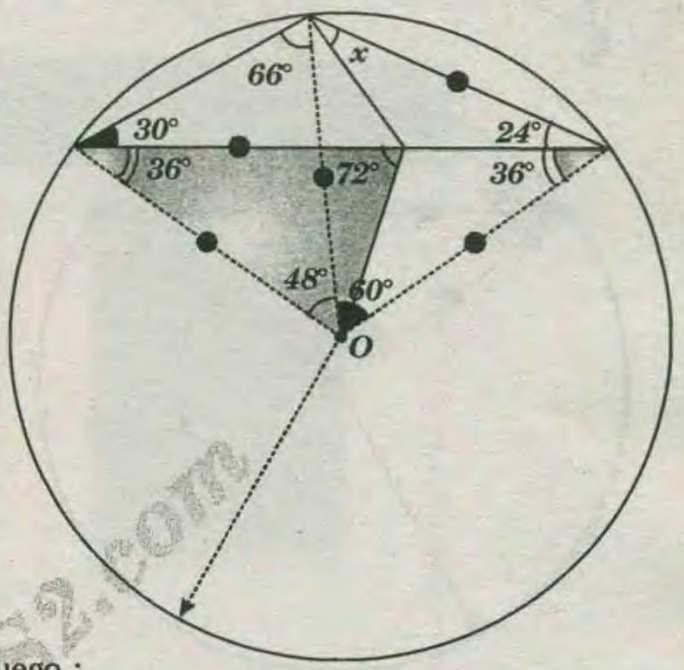


Ahora aplicamos las propiedades que se cumplen en las circunferencias (ángulos incritos y centrales)

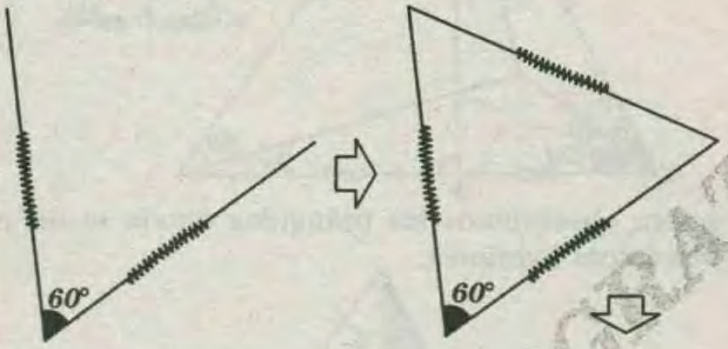


Completando ángulos en la figura.

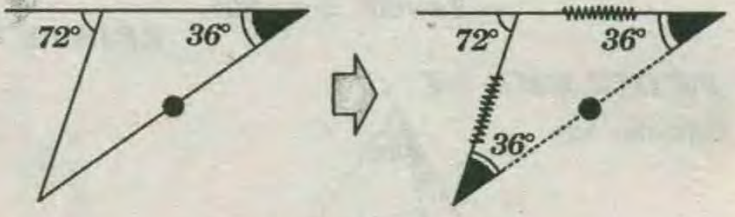




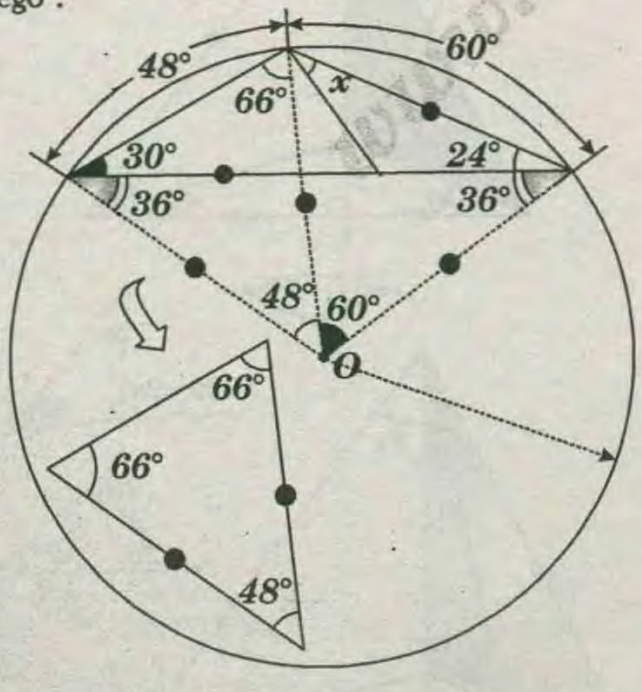
Tenemos :

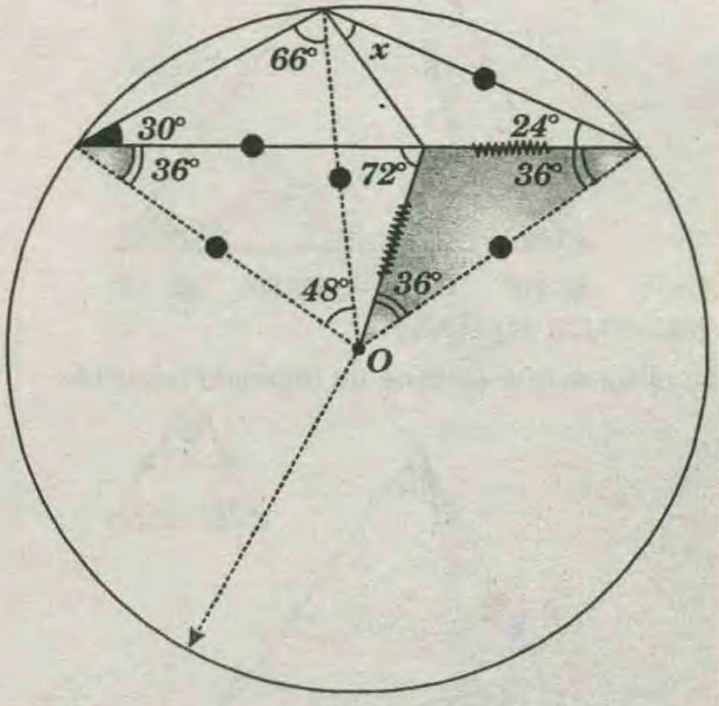


Luego :



Luego :

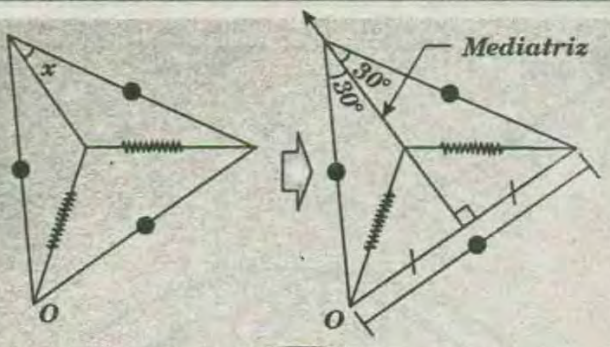


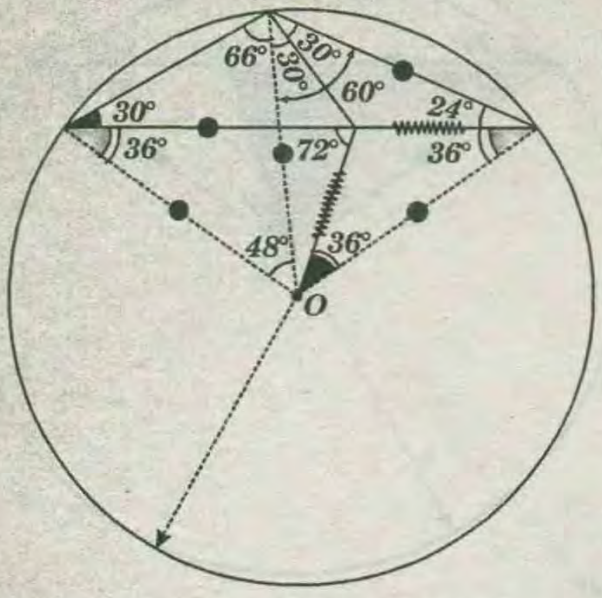


Se observa internamente en el gráfico un triángulo isósceles

Ahora se observa en el triángulo equilátero que cumple:

www.GRATIS2.com

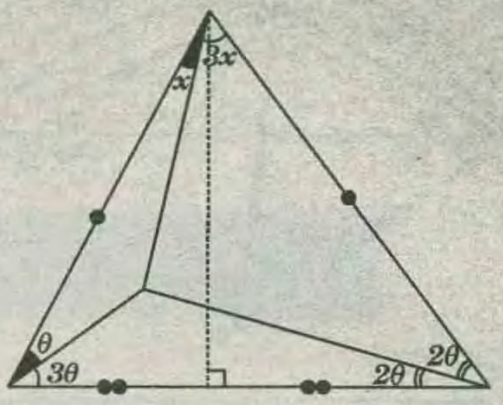


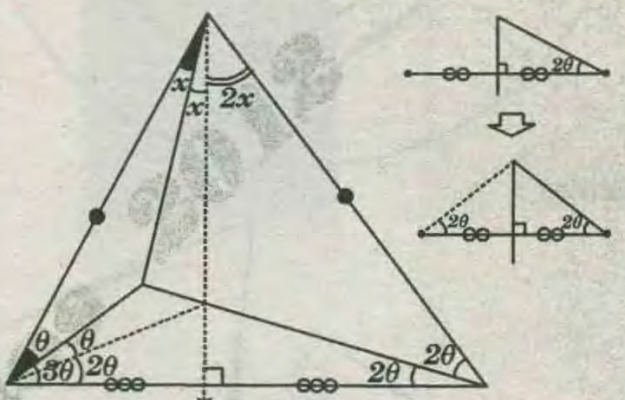


$\Rightarrow 2x=60° \Rightarrow x=30°$

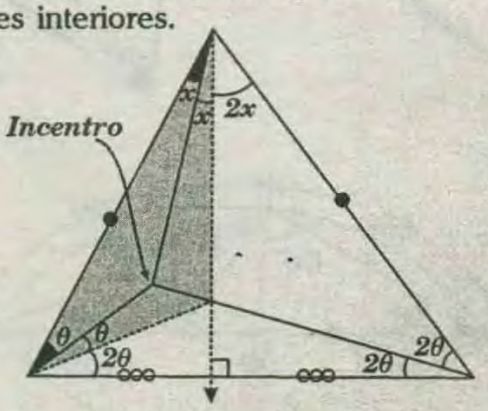
RPTA:"E"

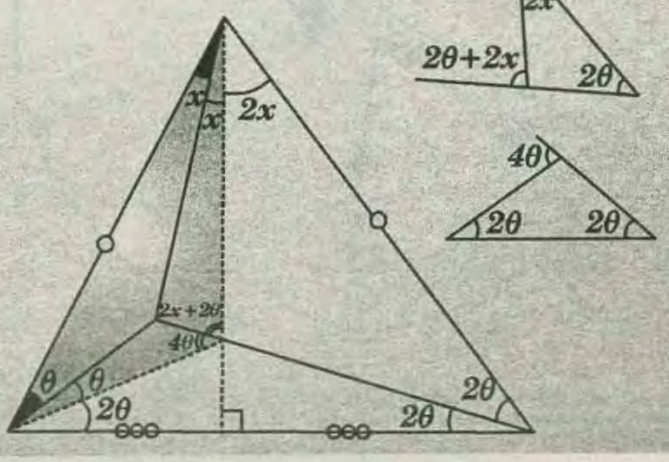
Trazamos la altura del trtángulo para así obtener (mediana, bisectriz y mediatriz)





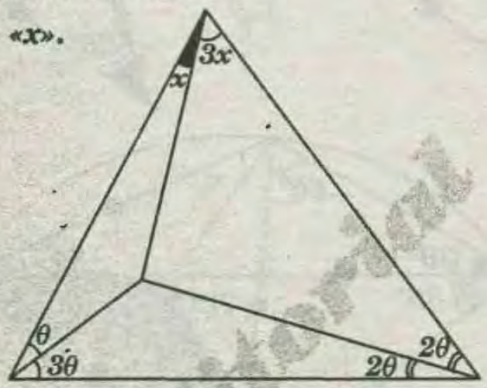
Ahora observamos los triángulos donde se tiene bisectrices interiores.





PROBLEMA 44 :

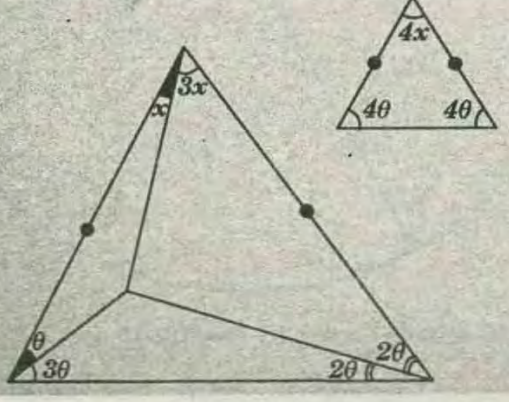
Calcular «x».



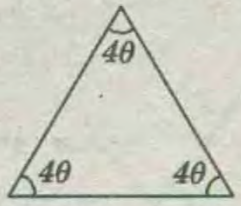
A)35° B) 20° C) 40° D) 30° E) 15°

RESOLUCIÓN :

Se observa que se tiene un triángulo isósceles.



Tenemos que: $2x + 2\theta = 4\theta \Rightarrow x = \theta$



Se obtiene un triángulo equilátero

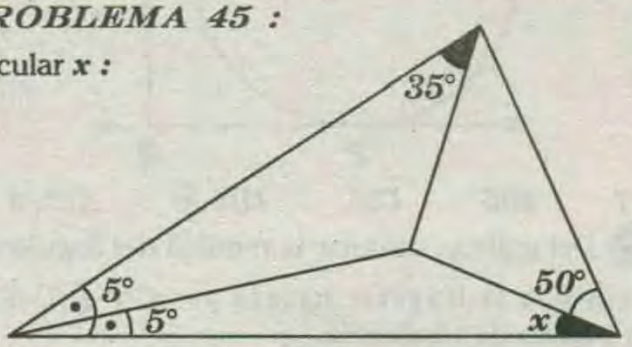
$4\theta = 60°$

$\Rightarrow \theta = 15°$

RPTA:"E"

PROBLEMA 45 :

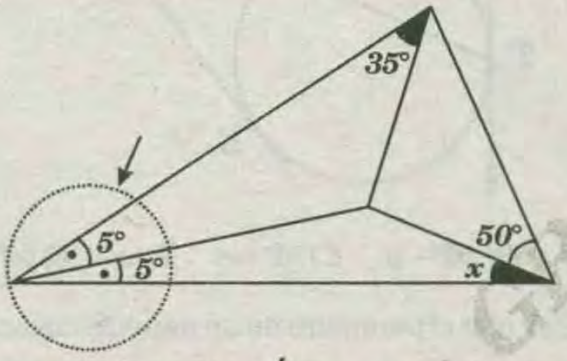
Calcular x :



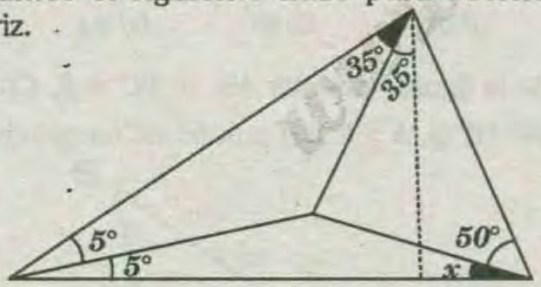
A) 25° B) 20° C) 40° D) 35° E) 45°

RESOLUCIÓN:

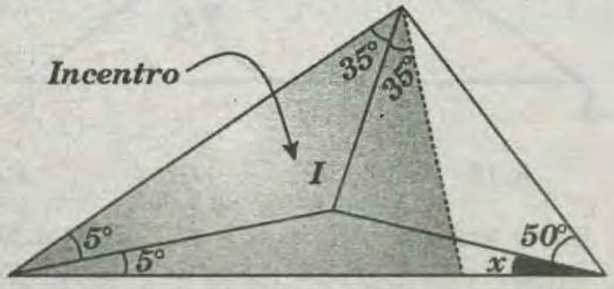
Se observa bisectriz en un conjunto del triángulo.



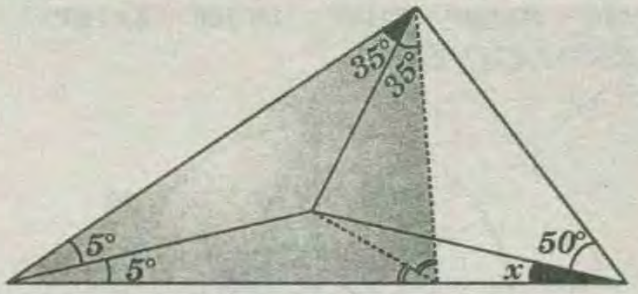
Realizamos el siguiente trazo para obtener otra bisectriz.

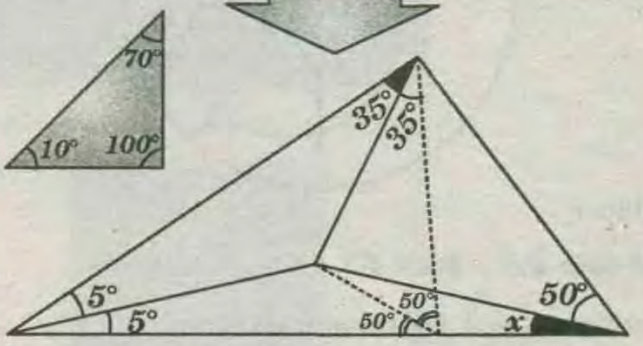


Así obtenemos el incentro en el triángulo sombreado.

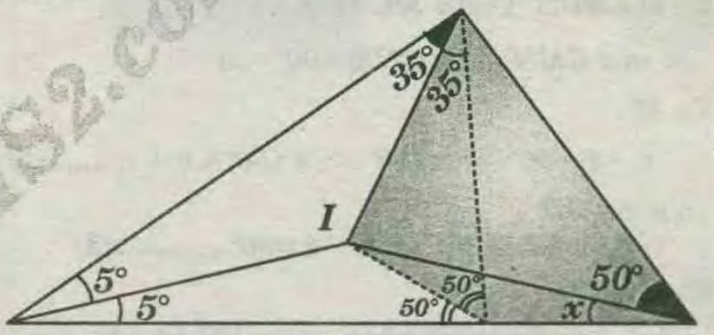


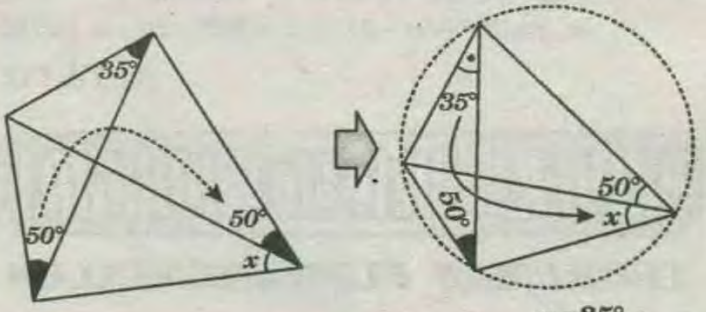
Obtenemos las tres bisectrices del triángulo sombreado.





Ahora observamos un cuadrilátero, donde cumple la propiedad del «Pantalón o rebote»



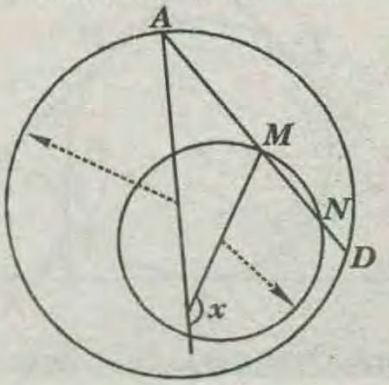


$x = 35°$

RPTA:"D"

PROBLEMA 46:

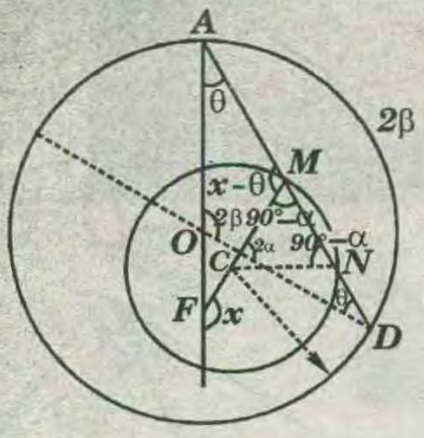
Según el gráfico, $m\widehat{AD} - m\widehat{MN} = 40°$. Calcule x.



GRATIS2.com

A) 125° B) 120° C)130° D) 160° E) 145°

RESOLUCIÓN :



Piden x

Por dato $2\beta - 2\alpha = 40°$. Como $AO=OD$

Entonces : $m\sphericalangle OAD = m\sphericalangle ODA = \theta$

En el $\triangle AMF$: $x = m\sphericalangle AMF + \theta \Rightarrow m\sphericalangle AMF = x - \theta$

En el $\triangle MCN$ Como $MC=CN$

$\Rightarrow m\sphericalangle CMN = m\sphericalangle CNM = 90° - \alpha$

En M :

$x - \theta + 90° - \alpha = 180° \Rightarrow x = 90° + \theta + \alpha$ .....(1)

En el $\triangle AOD$:

$2\beta + 2\theta = 180° \Rightarrow \beta + \theta = 90°$.....(2)

En (1)+(2) :

$x + \beta + \theta = 180° + \theta + \alpha \Rightarrow x = 180° + \alpha - \beta$

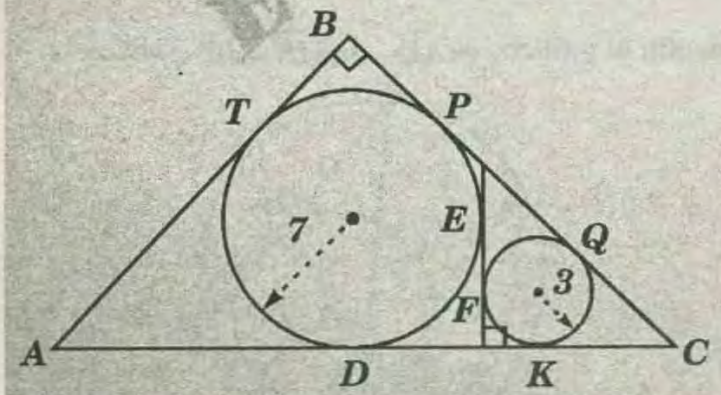
$\Rightarrow x = 180° - (\alpha - \beta) \Rightarrow x = 180° - 20° \Rightarrow x = 160°$

RPTA:"D"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

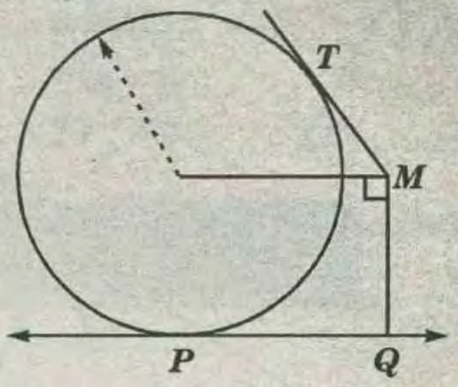
TEOREMAS FUNDAMENTALES

01 En la figura: T, P, Q, K, F, E y D son puntos de tangencia. Calcular PQ.



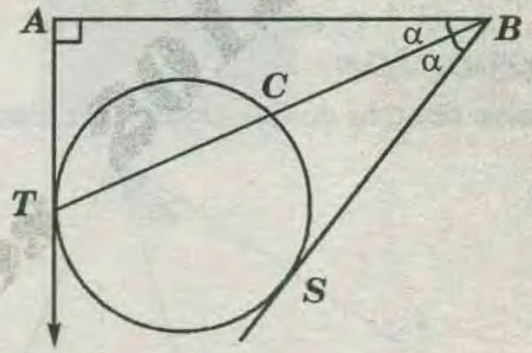
A)10 B) 5 C)14 D) 8 E) 12

02 Calcular PQ, si: $TM = 3$ y $MQ = 4$. (T y P son puntos de tangencia).



A)7 B)5 C)6 D)$4\sqrt{6}$ E)$2\sqrt{3}$

03 Del gráfico, calcular la medida del ángulo que determinan la tangente trazada por C y $\overline{BS}$; S y T son puntos de tangencia

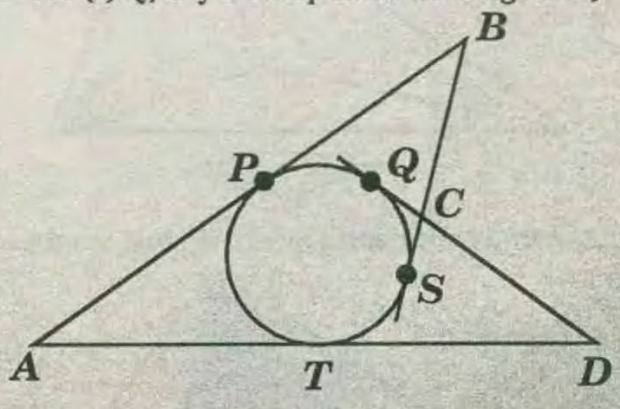


A)90° B) $90° - \alpha$ C)$75° - \alpha$ D)α E)$60° - \alpha$

04 Calcular el perímetro de un trapecio circunscrito a una circunferencia, si su mediana mide 6.

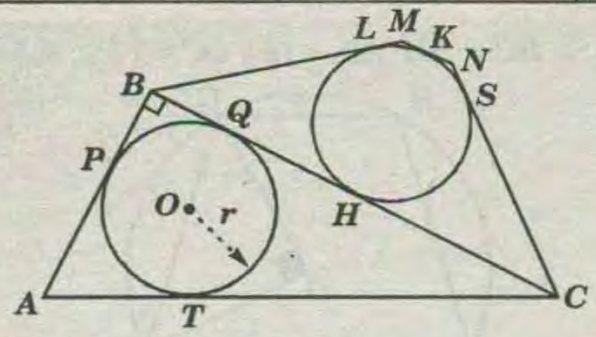
A)12 B)16 C)20 D) 24 E) 30

05 De la figura, calcular AB, si: $BC = 5$, $CD = 3$ y $AD = 10$. (P, Q, S y T son puntos de tangencia)



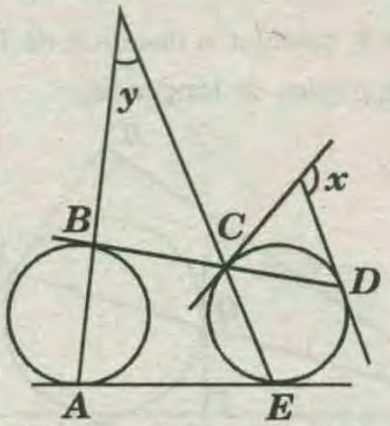
A)8 B)10 C) 12 D)14 E)15

06 En el gráfico: $AB = MN + 2$, $BM = NC$ y $AC = 2(BM)$. Calcular "r". (P, Q, T, L, K, S, H son puntos de tangencia)



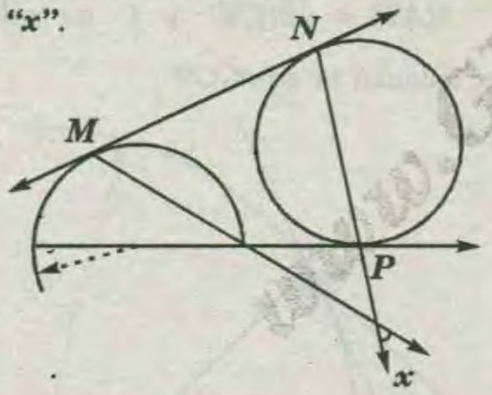
A) 0,5 B) 0,75 C) 1 D)1,5 E)2

07 Del gráfico, calcular x/y. (A, B, C, D y E son puntos de tangencia)



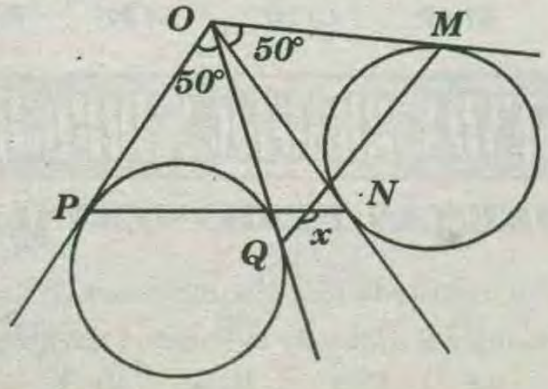
A) 2 B) 3/2 C) 3 D) 4 E) 5/2

08 En el gráfico: M, N y P son puntos de tangencia. Calcular "x".



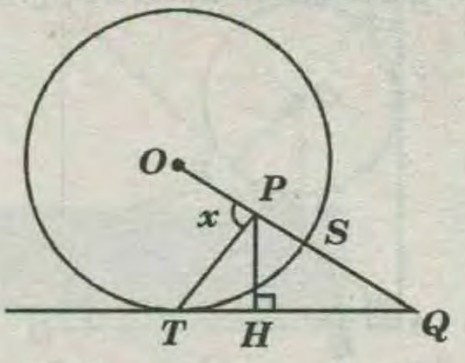
A) 45° B) 37° C) 60° D) 53° E) 30°

09 Si P, Q, M y N son puntos de tangencia, calcular "x".



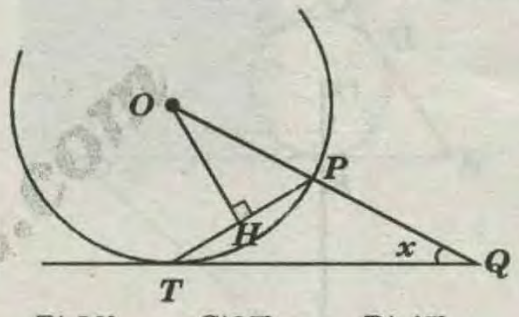
A) 150° B) 130° C) 120° D) 110° E)115°

10 En la figura: O es centro, $OP=SQ=PH$, además T es un punto de tangencia. Calcular el valor de "x".



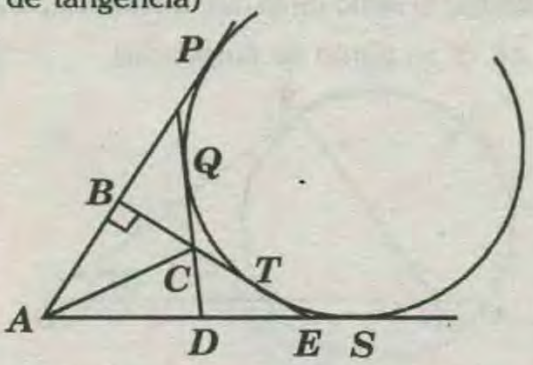
A) 60° B) 75° C) 90° D) 120° E)135°

11 En la figura, calcular el valor de "x", si O es centro, $QT = 2(OH)$ y T es punto de tangencia.



A)15° B) 30° C)37° D) 45° E) 60°

12 En la figura: $BC = 3$, $CD = 2$ y $AD = 5$. Calcular el inradio del triángulo ABC. (P, Q, T y S son puntos de tangencia)



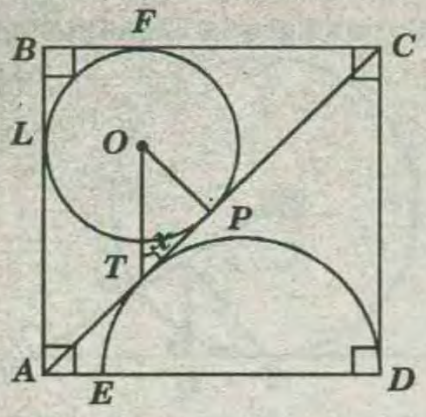
A) 0,5 B) 1 C) 1,5 D) 2 E) 2,5

13 Desde un punto P exterior a una circunferencia de radio que mide $3\sqrt{3}$, se trazan dos tangentes $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ (A y B son puntos de tangencia). Calcular PB, si: $m\sphericalangle APB = 30°$.

A) $6\sqrt{3}$ B) $9\sqrt{3}$ C) $3(\sqrt{3}+2)$
D) $6(\sqrt{3}+1)$ E) $6(\sqrt{3}+2)$

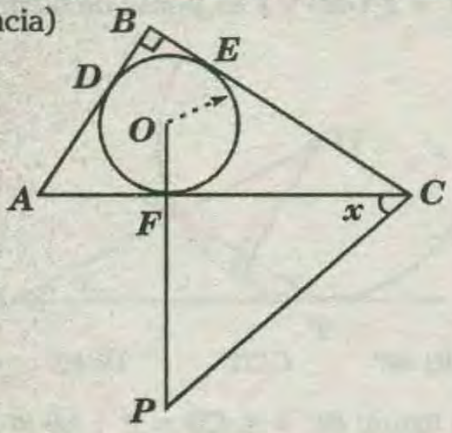
14 En la figura: $ABCD$ es un cuadrado, O es centro de circunferencia, $\overline{DE}$ es diámetro de semicircunferencia, P, T, L y F son puntos de

tangencia. Calcular el valor de "x".



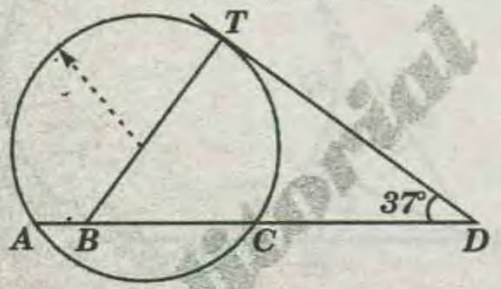
A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) 72°

15 Si $BC = OP$, calcular "x". (D, E y F son puntos de tangencia)



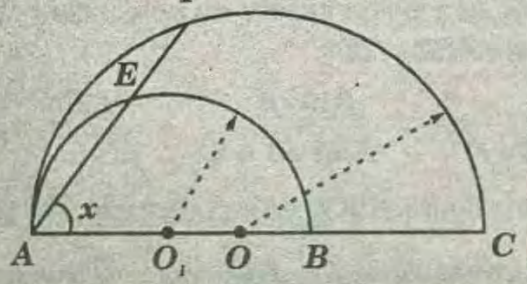
A) 37° B) 53° C) 45° D) 30° E) 36°

16 Calcular el radio de la circunferencia, si $AB = 6$ y $BC = 12$. (T es punto de tangencia).



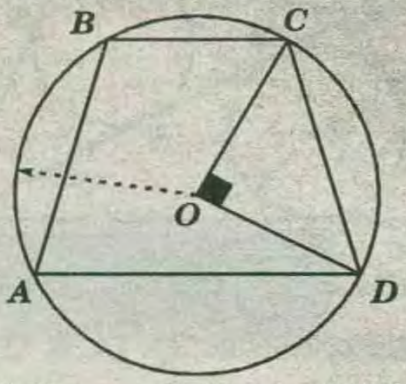
A) 5 B) 10 C) $\sqrt{97}$ D) 12 E) 11

17 Si O y O_1 son centros, calcular el valor de "x", ademas: $EF = OO_1$.



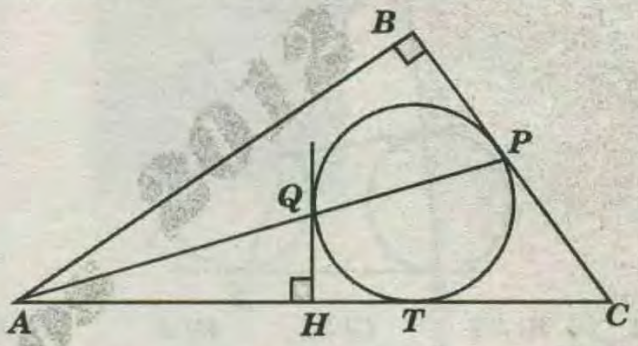
A) 30° B) 45° C) 60° D) 53° E) 37°

18 Si: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $AD = 16$ y $OC = 10$, calcular BC.



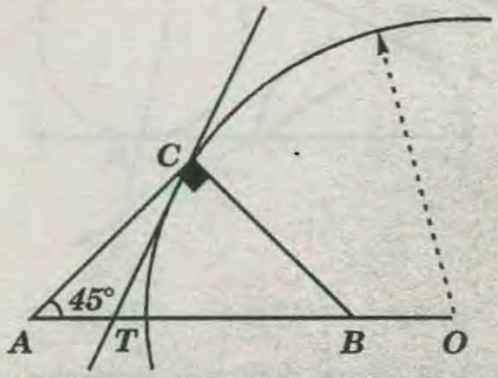
A) 16 B) 12 C) 10 D) 14 E) 8

19 Si $BP = 6$, calcular la distancia de T hacia $\overline{BC}$. (T, P y Q son puntos de tangencia)



A) 3 B) 4 C) 6 D) 5 E) 8

20 Si: $2(AT) = \sqrt{2}(CT)$ y C es punto de tangencia, calcular la $m\sphericalangle COT$.



A) 12° B) 15° C) 20° D) 37° E) 26,5°

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

TEOREMAS FUNDAMENTALES

01 Una cuerda de una circunferencia mide 16 y su flecha mide 2. Calcular la longitud del diámetro.

A) 10 B) 6 C) 8 D) 15 E) 17

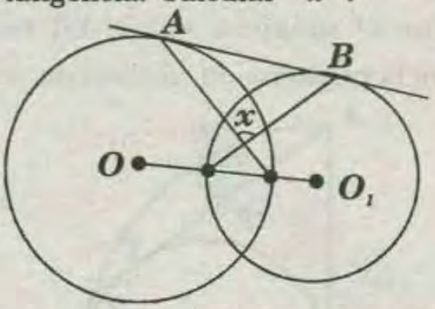
02 En una circunferencia se trazan las cuerdas perpendiculares AB y CD; $BC=8$. Calcular la distancia del centro a $\overline{AD}$.

A) 8 B) 4 C) 5 D) 6 E) 2

03 En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se sabe que: $AB=7$ y $BC=24$. Calcular la medida del radio de la circunferencia exinscrita relativa a la hipotenusa $\overline{AC}$.

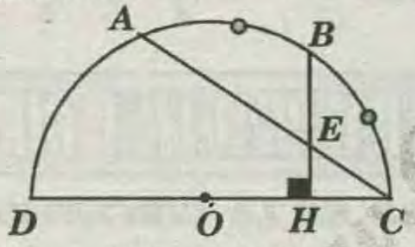
A) 24 B) 15 C) 26 D) 3 E) 28

04 En el gráfico: O y O_1, son centros; A y B, son puntos de tangencia. Calcular "x".



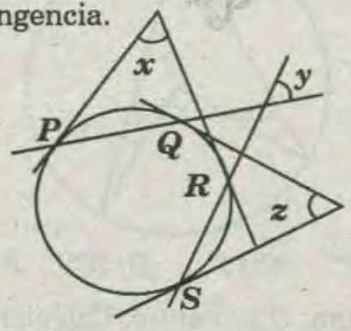
A) 90° B) 120° C) 80° D) 75° E) 105°

05 En el gráfico: O es centro, $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BC}$ $BE=3$ y $EH=2$. Calcular AE.



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 7,5

06 En la figura, calcular "x", si P, Q, R y S son puntos de tangencia.



A) $2y+z$ B) $\frac{y+z}{2}$ C) $y+z$ D) $y-z$ E) $2y-z$

07 Se tiene una circunferencia, de radio 6, inscrita en un cuadrante AOB (O es centro) $\overset{\frown}{AB}$ es tangente en P a la circunferencia, la recta tangente en P corta en Q a la prolongación de OB. Calcular BQ.

A) 4 B) 5 C) 3 D) 2 E) 6

08 Los diámetros de dos circunferencias situadas en el mismo plano están en la relación de 5 a 3, y la distancia entre sus centros es como 1. Tales circunferencias son:

A) Exteriores B) Interiores
C) Secantes D) Tangentes interiormente
E) Tangentes exteriormente

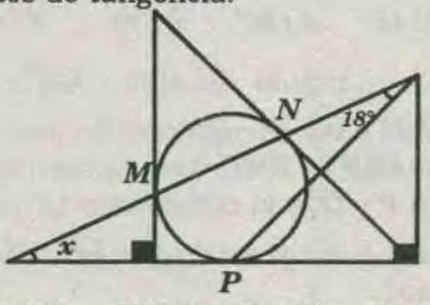
09 ¿Cuánto mide la hipotenusa de un triángulo si los radios de las circunferencias exinscritas relativas a los catetos miden 6 y 8?

A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

10 En un ΔABC, recto en B, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AC}$ en P, se traza la altura $\overline{BH}$. Calcular $\overline{HP}$, si los inradios de, los triángulos AHB y BHC son 2 y 5, respectivamente.

A) 1,5 B) 2,5 C) 3 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

11 De la figura adjunta, calcular "x", si M, N y P son puntos de tangencia.



A) 18° B) 36° C) 30° D) 27° E) 37°

12 Se tiene dos circunferencias tangentes interiormente en B, de centros O y O_1 tal que $\overline{OB}$ y $\overline{AB}$ son diámetros, se traza la cuerda $\overline{AP}$ que interseca a la otra circunferencia en M y Q, respectivamente. Calcular AM, si: $PQ=a$ y $MQ=b$

A) $2a+b$ B) $2b+a$ C) $2(a+b)$ D) $3a+b$ E) $3b+a$

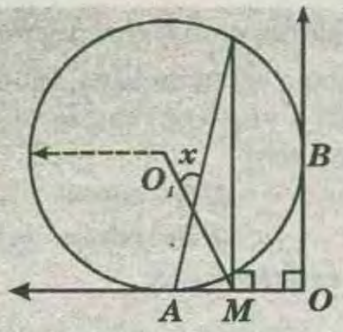
13 Se tiene un cuadrante AOB, $AO=OB$, se traza la semicircunferencia de diámetro $\overline{OB}$, de centro P. Luego se traza la circunferencia de centro Q inscrita en el triángulo mixtilíneo AOB, finalmente se traza la circunferencia de centro S tangente a los arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{OB}$ y a la circunferencia de centro Q. Calcular la relación entre los perímetros de los triángulos OQS y PQO.

A) 1 B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{3}$ E) 3

14 Calcular "x", si : $AM=MO$; A y B son puntos

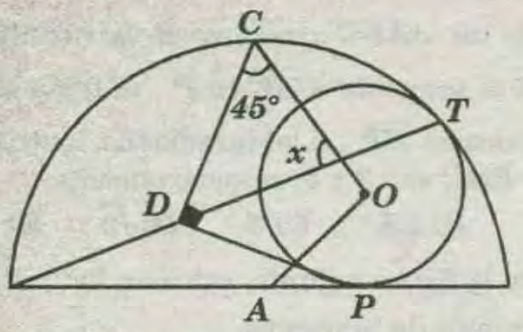
EDICIONES RUBIÑOS GRATIS.com

de tangencia



A) 25° B) 30° C) 45° D) 37° E) 53°

15 A y O son centros; P y T son puntos de tangencia. Calcular "x"



A) 40° B) 45° C) 90° D) 70° E) 67,5°

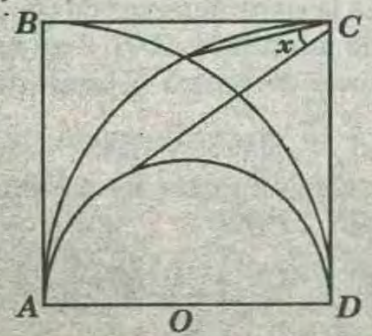
16 En un triángulo escaleno ABC se traza la mediana $\overline{BM}$ y las circunferencias inscritas en los triángulos ABM y BMC son tangentes a dicha mediana en P y Q, y la circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente en N a $\overline{AC}$. ¿Qué relación es verdadera?

A) $PQ=2(MN)$ B) $PQ=3(MN)$ C) $PQ=MN$
D) $PQ \neq MN$ E) $PQ>MN$

17 El inradio de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, mide 1 y el exradio relativo a BC mide 7. Calcular la medida del ángulo que forman $\overline{IE_a}$ con $\overline{BC}$, si I es incentro y E_a es excentro.

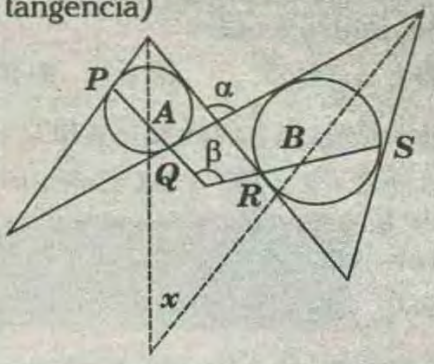
A) 75° B) 53° C) 60° D) 37° E) 45°

18 Calcular "x", siendo $ABCD$ un cuadrado (O es centro).



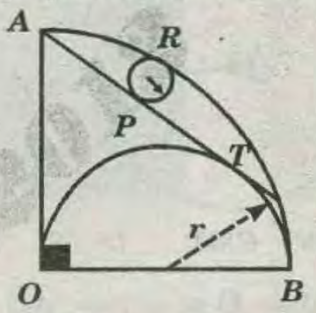
A) 20° B) 18° C) 15° D) 22° E) 22,5°

19 Si: $\alpha+\beta=200°$, calcular "x" (P, Q, R y S son puntos de tangencia)



A) 40° B)30° C) 45° D) 20° E) 25°

20 Hallar el máximo valor del radio de la circunferencia pequeña en función de «r».

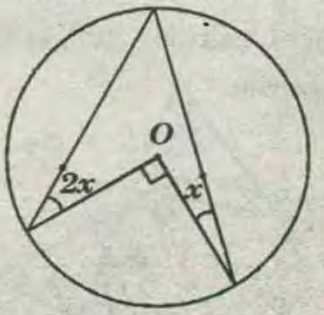


A) $\frac{r}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{r}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{r}{4}$ D) $\frac{r}{5}$ E) $\frac{r}{6}$

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

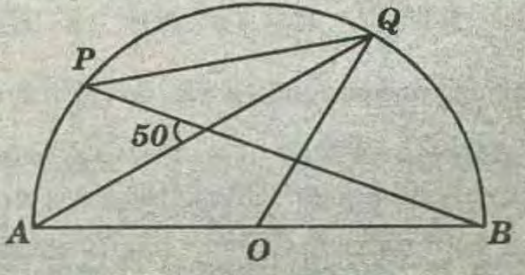
ANGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

01 Calcular el valor de "x", si O es centro.



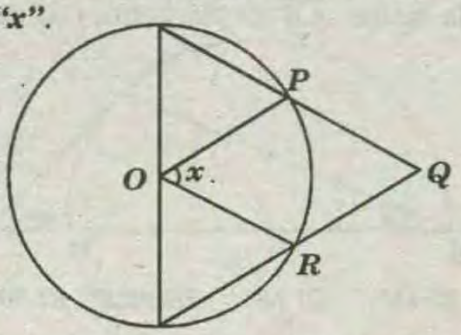
A) 10° B) 12° C)15° D) 20° E) 18°

02 En la figura: O es centro. Calcular la $m\sphericalangle PQO$.



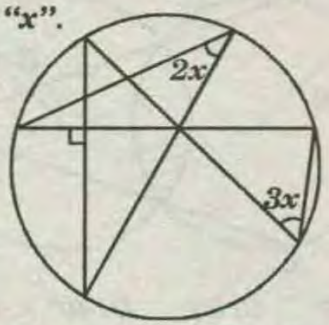
A) 40° B) 45° C) 50° D) 55° E) 60°

03 En la figura: *OPQR* es un rombo y *O* es centro. Calcular "*x*".



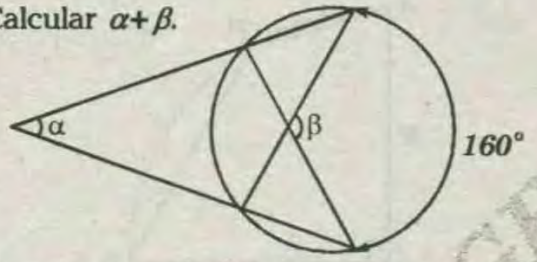
A) 45° B) 30° C) 50° D) 60° E) 55°

04 Calcular "*x*".



A) 10° B) 12° C) 15° D) 18° E) 20°

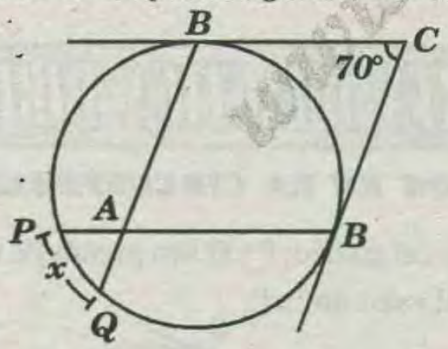
05 Calcular $\alpha+\beta$.



A) 160° B) 170° C) 150° D) 120° E)130°

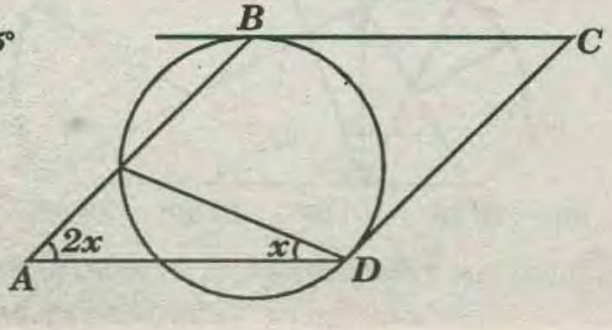
06 Si *ABCD* es un paralelogramo, calcular "*x*".

A) 10°
B) 20°
C) 25°
D) 30°
E) 35°

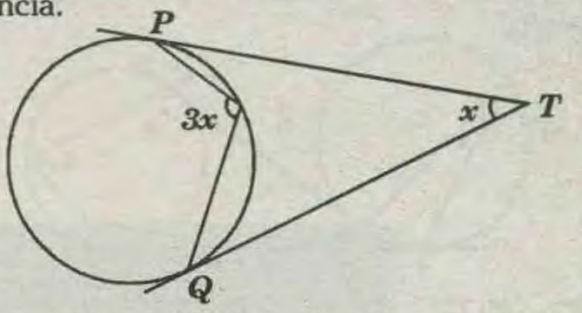


07 Calcular "*x*", si *ABCD* es un paralelogramo.

A) 22,5°
B) 20°
C) 15°
D) 18°
E) 12°



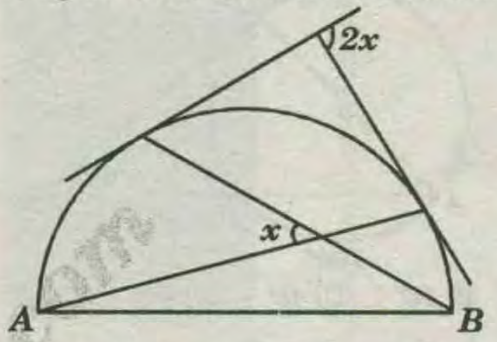
08 Calcular "*x*" del gráfico, si *P* y *Q* son puntos de tangencia.



A) 20° B) 24° C) 30° D) 36° E) 40°

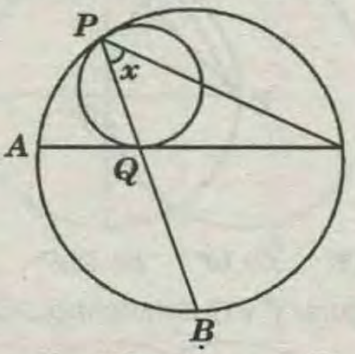
09 En la figura: $\overline{AB}$ es diámetro. Calcular "*x*".

A) 30°
B) 35°
C) 40°
D) 45°
E) 60°

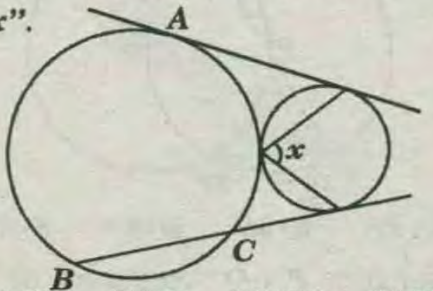


10 En la figura *P* y *Q* son puntos de tangencia, $m\widehat{AB}=100°$. Calcular "*x*".

A) 40°
B) 45°
C) 50°
D) 60°
E) 70°

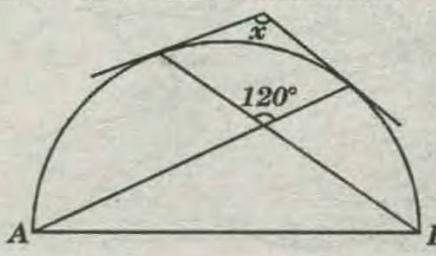


11 En la figura: $m\widehat{AB}=170°$ y $m\widehat{AC}=110°$. Calcular "*x*".



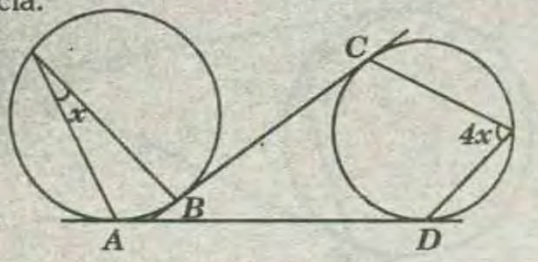
A) 60° B) 65° C) 70° D) 75° E) 80°

12 Calcular "*x*", si $\overline{AB}$ es diámetro.



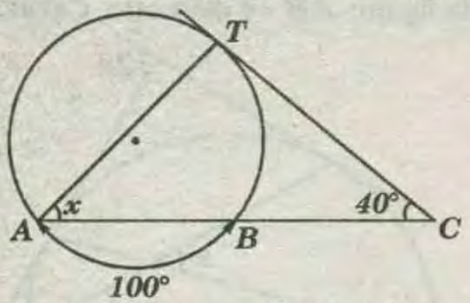
A) 100° B) 80° C) 120° D) 60° E) 150°

13 Calcular "x", si A, B, C y D son puntos de tangencia.



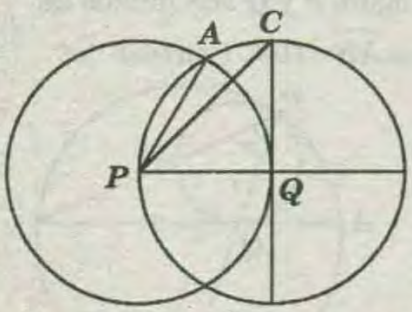
A) 10° B) 12° C) 14° D) 15° E) 18°

14 Calcular "x", si T es punto de tangencia.



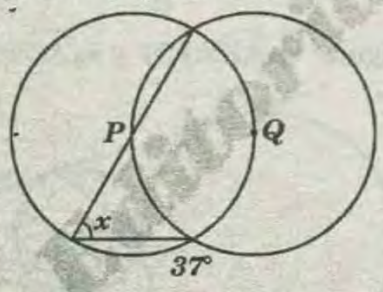
A) 30° B) 36° C) 45° D) 50° E) 55°

15 En la figura: P y Q son centros. Calcular la $m\sphericalangle APC$.



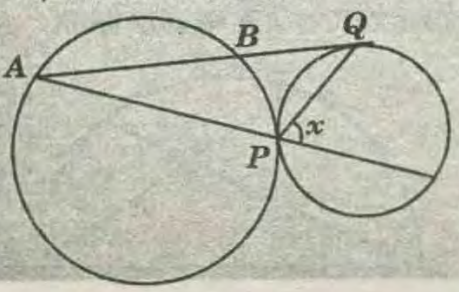
A) 10° B) 12° C) 15° D) 18,5° E) 20°

16 En la figura: P y Q son centros. Calcular "x".



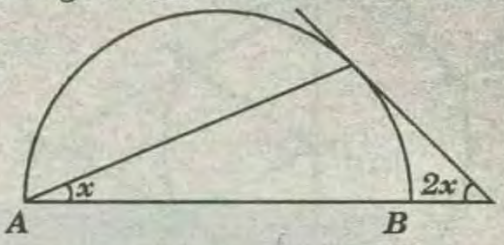
A) 30° C) 37° B) 45° D) 53° E) 60°

17 En la figura: P y Q son puntos de tangencia. Calcular "x", si $m\overset{\frown}{AB}=100°$.



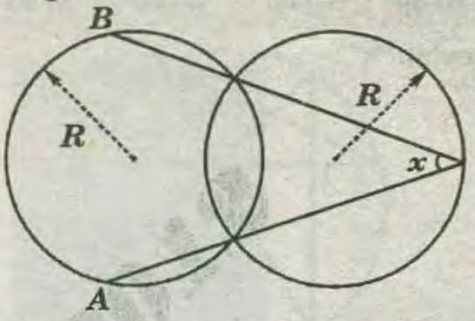
A) 65° B) 70° C) 60° D) 55° E) 75°

18 En la figura: $\overline{AB}$ es diámetro. Calcular "x".



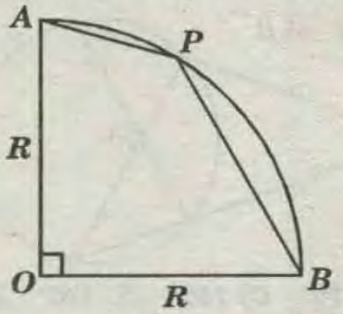
A) 12,5° B) 15° C) 18° D) 22,5° E) 30°

19 En la figura: $m\overset{\frown}{AB}=160°$. Calcular "x".



A) 20° B) 30° C) 35° D) 40° E)44°

20 Calcular R, si: $AP=1$ y $PB=\sqrt{2}$.

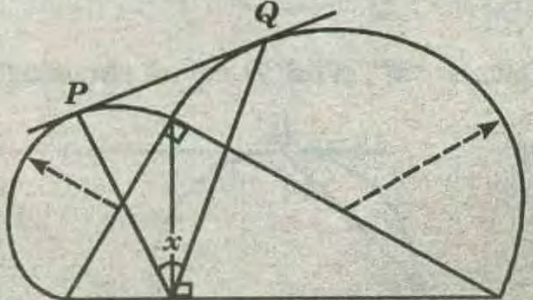


A)$\sqrt{10}/2$ B)$\sqrt{5}/2$ C)$\sqrt{5}/5$ D)$\sqrt{10}/5$ E)1/2

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

ANGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA II

01 Según el gráfico: P y Q son puntos de tangencia. Calcular el valor de "x".



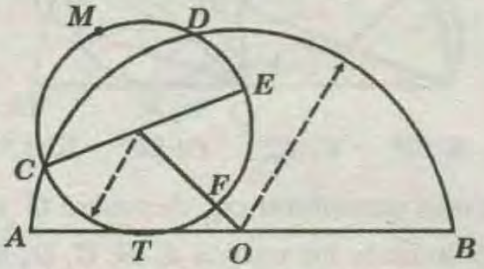
A) 75° B) 30° C) 50° D) 60° E) 45°

02 Se tiene 2 circunferencias secantes en P y Q, se

traza la recta tangente común exterior $\overline{AB}$ (*A* y *B* son puntos de tangencia). Calcular: $m\measuredangle APB + m\measuredangle AQB$

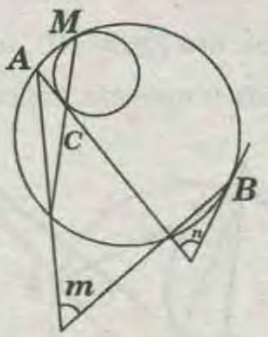
A) 120° B) 150° C) 180° D) 160° E) 90°

03 Según el gráfico: $m\overset{\frown}{CMD} = 140°$. Calcule la $m\overset{\frown}{EF}$ (*T* es punto de tangencia).



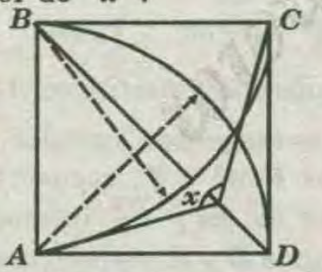
A) 70° B) 80° C) 60° D) 40° E) 75°

04 Según el gráfico: *C*, *M* y *B* son puntos de tangencia. calcule $m\overset{\frown}{AMB}$, si: $2m + n = 160°$



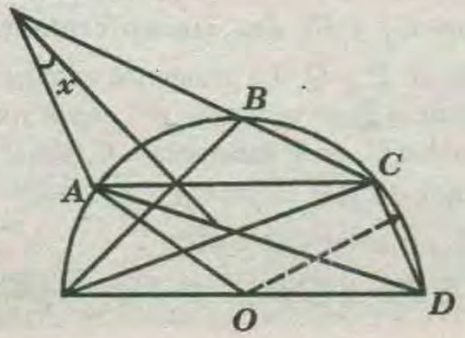
A) 190° B) 170° C) 180° D) 185° E) 200°

05 Según el gráfico: *ABCD* es un cuadrado. Calcular el valor de *"x"*.



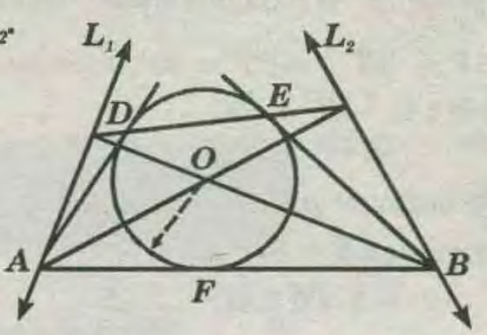
A) 135° B) 150° C) 127° D) 120° E) 115°

06 En el gráfico: $m\overset{\frown}{ABD} = 8x \wedge m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{CD}$. Calcule el valor de *"x"*.



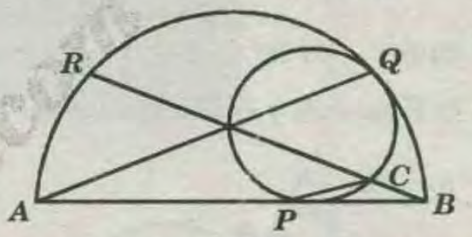
A) 14° B) 16° C) 18° E) 20° D) 15°

07 Del gráfico: *D*, *E* y *F* son puntos de tangencia y $m\overset{\frown}{ED} = 100°$. Calcule la medida del ángulo que forman L_1 y L_2.



A) 55° B) 45° C) 60° D) 40° E) 50°

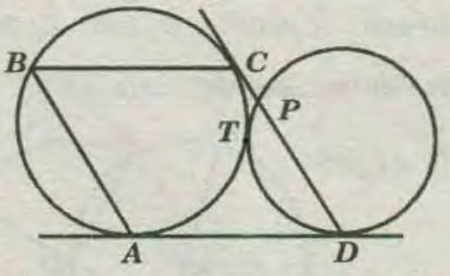
08 Del gráfico mostrado: *P* y *Q* son puntos de tangencia, $\overline{AQ} \parallel \overline{PC}$. Calcule $m\overset{\frown}{RQ}$.



A) 100° B) 120° C)90° D)108° E) 150°

09 En el gráfico: *A*, *T*, *D* y *C* son puntos de tangencia, y *ABCD* es un romboide.

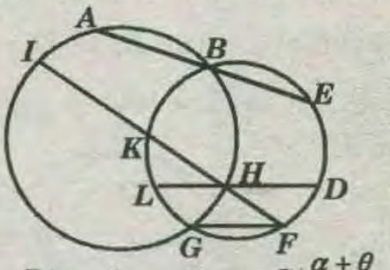
Calcule: $m\overset{\frown}{TC} + m\overset{\frown}{TP}$.



A) 60° B) 80° C) 65° D) 75° E)70°

10 Según la figura: $\overline{HD} \parallel \overline{GF}$, $m\overset{\frown}{BK} + m\overset{\frown}{BH} = \alpha$ y $m\overset{\frown}{AI} + m\overset{\frown}{ED} = \theta$.

Halle $m\overset{\frown}{LG}$.



A) $\alpha + \theta$ *B)* $\alpha - \theta$ *C)* $\frac{\alpha + \theta}{2}$

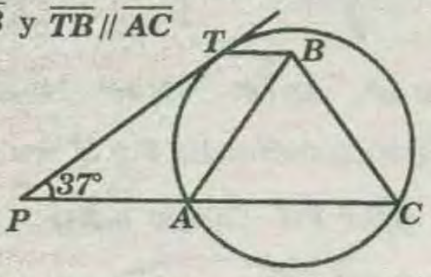
D) $\alpha + \frac{\theta}{2}$ *E)* $\frac{\alpha}{2} + \theta$

11 Se tiene dos circunferencias tangentes interiores en T, luego se trazan las cuerdas TP y BC en la mayor, que se intersecan en N ($\overline{BC}$ es tangente a la circunferencia menor en N).

Si $AP = PB$ y $m\widehat{CT} = 80°$, calcular la $m\measuredangle BAT$, donde $\{A\} = \overrightarrow{BP} \cap \overline{TC}$

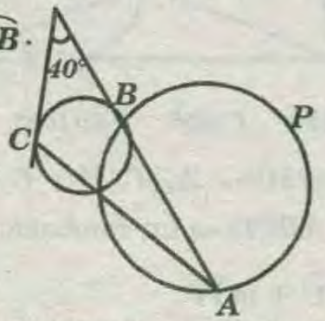
A) 30° B) 50° C) 40° D) 55° E) 65°

12 Según el gráfico, calcule $m\widehat{TA}$, T es punto de tangencia, $AB = BC$, $TB = 6$, $AC = 10\sqrt{3}$ y $\overline{TB} \parallel \overline{AC}$



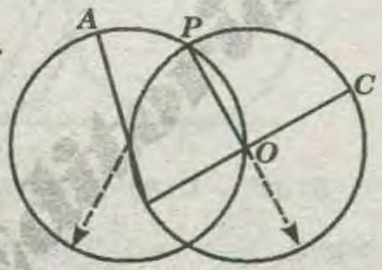
A) 83° B) 80° C) 79° D) 78° E) 60°

13 En la figura: B y C son puntos de tangencia. Calcular $m\widehat{APB}$.



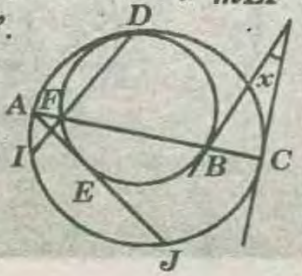
A) 200° B) 220° C)230° D) 240° E) 260°

14 En la figura: $m\measuredangle POC = 2(m\widehat{AP})$. Calcular la $m\widehat{AP}$.



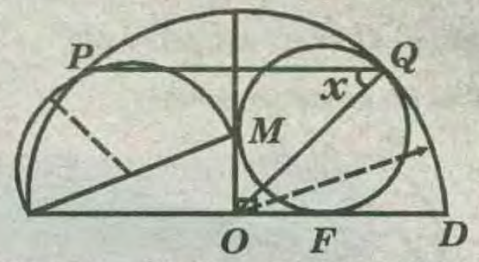
A) 30° B) 22,5° C) 36° D) 45° E) 60°

15 Según el gráfico: B, C, D y E son puntos de tangencia. Si: $m\widehat{IJ} = 100°$ y $m\widehat{EF} = 40°$, calcular el valor de "x".



A) 20° B) 10° C) 30° D) 40° E) 15°

16 En la figura: M, Q y F son puntos de tangencia. Calcule el valor de "x".

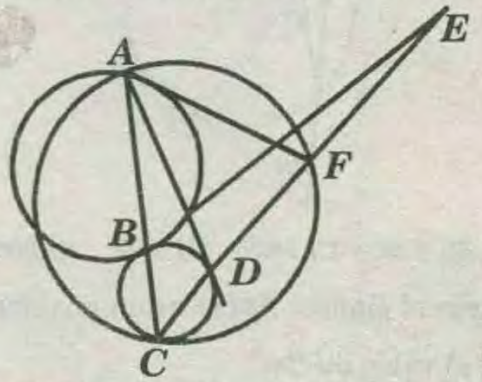


A) 30° B) 60° C) 45° D) 53° E) 37°

17 En una circunferencia, de centro O, se ubican consecutivamente los puntos A. B, C, D, E y F, las prolongaciones de $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ se intersecan en L y las de $\overline{FB}$ y $\overline{DC}$ se intersecan en P; $\overline{BF} \cap \overline{AE} = \{Q\}$ y $AE = BF = CD$, calcule: $m\measuredangle POQ$, si $m\measuredangle PLA = 20°$

A) 140° B) 130° C) 110° D) 100° E) 120°

18 En el gráfico: $m\measuredangle FAD = 40°$, $m\measuredangle DAC = 15°$; B, C y D son puntos de tangencia. Calcule $m\measuredangle BEC$.



A) 40° B) 45° C) 30° D) 20° E) 15°

19 La circunferencia inscrita en el triángulo ABC, de incentro I, es tangente a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en los puntos P, Q y T, respectivamente. Las prolongaciones de $\overline{BI}$ y $\overline{CI}$ intersecan a la recta $\overline{PT}$ en los puntos D y E, respectivamente. Calcular $\frac{QE}{QD}$, si: $AB = AC$.

A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\sqrt{3}$

20 Sean C_1 y C_2 dos circunferencias que se intersecan en P y Q. La tangente común a ambas, más próxima a P, es tangente a C_1 en A y a C_2 en B. La tangente a C_1 en P interseca a C_2 en $C \neq P$ y la prolongación de $\overline{AP}$ interseca a $\overline{BC}$ en R. Calcular $m\measuredangle PBR$, si: $m\measuredangle PQR = 50°$.

A) 70° B) 60° C) 50° D) 65° E) 80°

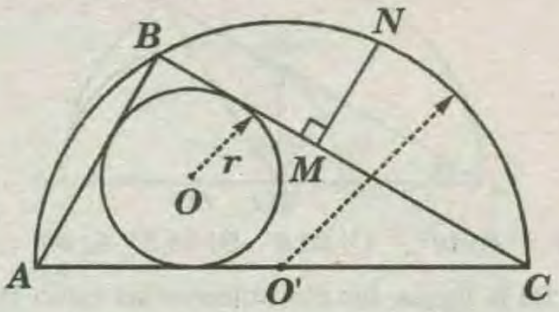
QUINTA PRACTICA DIRIGIDA

CUADRILATERO INSCRITO E INSCRIPTIBLE -TEOREMA DE PONCELET-PITHOT

01 Dado un trapecio rectángulo $ABCD$, recto en A y B, si los inradios de los triángulos ABC y ACD miden 3 y 5, calcule $BC\,(\overline{AC}\perp\overline{CD})$

A) 8 B) 4 C) 4,5 D) 7,5 E) 6

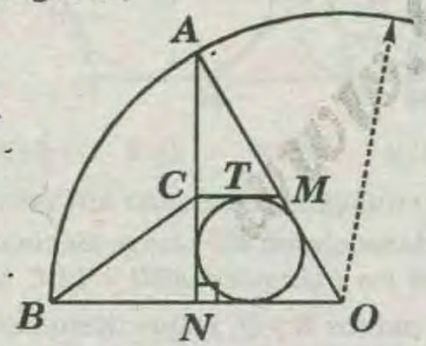
02 En la figura la flecha $\overline{MN}$ mide 3 y $AC=2(AB)$. Calcule el inradio del $\triangle ABC$.



A) $3(2\sqrt{3}-1)$ B) $2(\sqrt{3}-1)$ C) $3(\sqrt{3}-2)$
D) $4(\sqrt{3}-1$ E) $3(\sqrt{3}-1)$

03 En la figura la circunferencia está inscrita en el $\triangle ANO$; $BN=6$; $AM=9$ y $MC=5$. Calcule BC (T es punto de tangencia)

A) 12
B) 10
C) 20
D) 11
E) 8



04 En un triángulo isósceles ABC $(AB=BC)$; en $\overline{BC}$ se ubica el punto P y se traza $\overline{PH}\perp\overline{AB}$. Si: $m\sphericalangle BAP=45°$ y el inradio del triángulo BHP es 4 $(H\in\overline{AB})$, calcule PC.

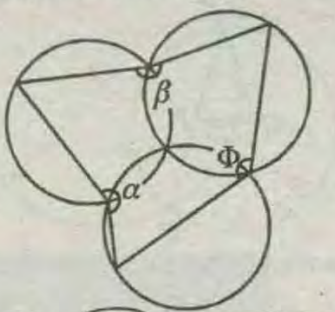
A) 7 B) 4,5 C) 6 D) 4 E) 8

05 En un trapecio $ABCD$ $(\overline{BC}\parallel\overline{AD})$ circunscrito a una circunferencia, en $\overline{AD}$ se ubica M, tal que: $m\sphericalangle MCD=90°$ y $\overline{MC}\parallel\overline{AB}$. Calcule el inradio del triángulo MCD, siendo $BC=2$.

A) 1 B) 1,5 C) 4 D) 2 E) 2,5

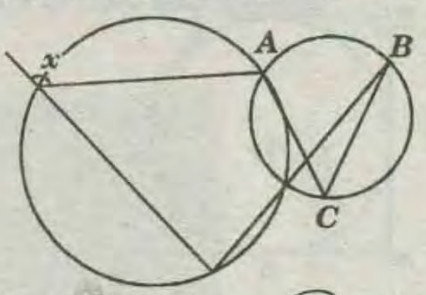
06 En la figura, calcule: $\alpha+\beta+\Phi$.

A) 240°
B) 540°
C) 300°
D) 720°
E) 360°



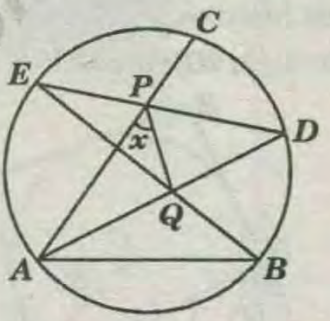
07 En la figura: $m\widehat{ACB}=260°$. Calcule "x".

A) 120°
B) 100°
C) 140°
D) 150°
E) 130°



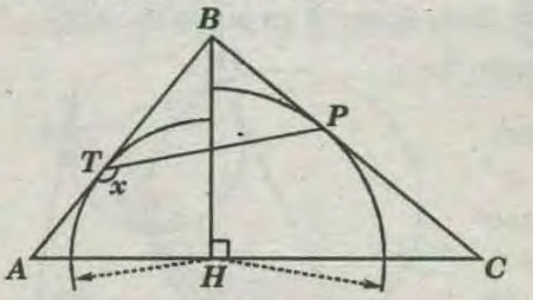
08 En la figura: $CD=BD$ y $m\widehat{AB}=100°$. Calcule "x".

A) 55°
B) 40°
C) 50°
D) 45°
E) 60°



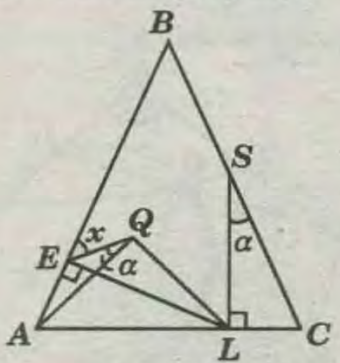
09 En la figura: H es centro, P y T son puntos de tangencia. Si $m\sphericalangle HCB=40°$, calcule "x".

A) 130°
B) 150°
C) 140°
D) 125°
E) 127°



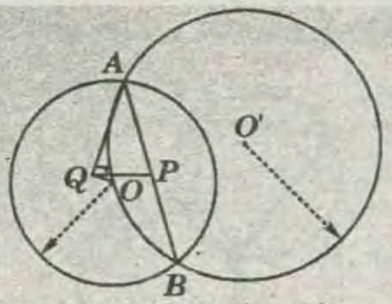
10 En la figura: $AB=BC$ y $AQ=QL$. Calcule "x".

A) 30°
B) 60°
C) 45°
D) 2α
E) 3α



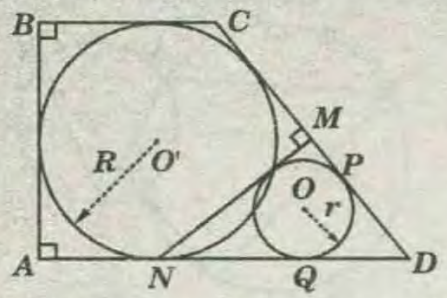
11 En la figura: $AP=PB$, O y O' son centros, $m\widehat{AOB}=88°$. Calcule la $m\sphericalangle OQP$

A) 11°
B) 44°
C) 20°
D) 21°
E) 22°



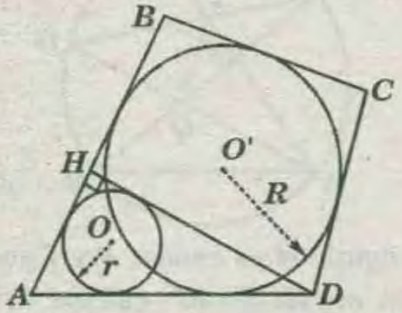
12 La figura muestra a dos circunferencias inscritas de centros O y O'. Si $m\widehat{PQ}=127°$, calcule R/r.

A) 2
B) 5
C) 3
D) 4
E) 2,5



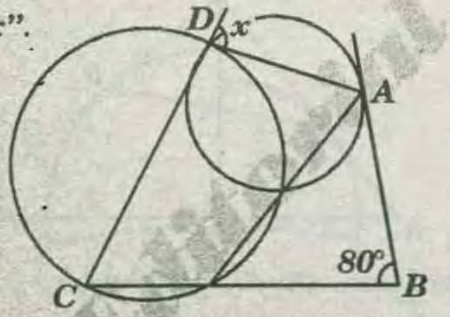
13 En la figura: r y R son los radios de las circunferencias inscritas.
Si: $AH=4$, $OD=4\sqrt{2}$; $HB=5$ y $DC=6$, calcule BC.

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9



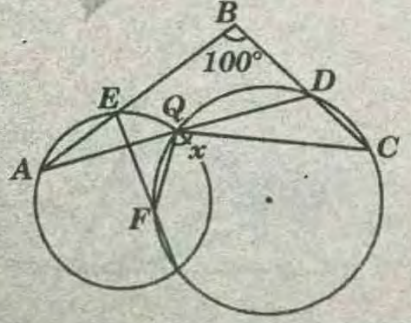
14 En la figura: A es punto de tangencia. Calcule "x".

A) 60°
B) 90°
C) 100°
D) 80°
E) 120°



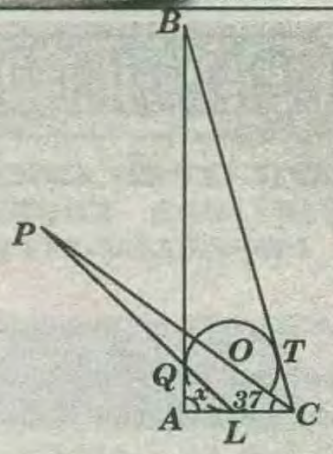
15 En la figura, calcule "x".

A) 100°
B) 60°
C) 65°
D) 70°
E) 80°

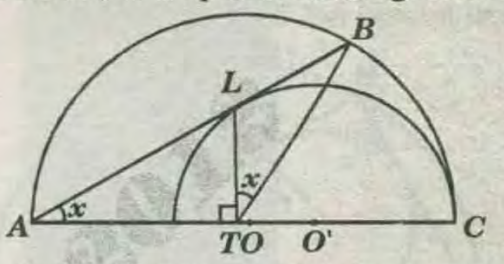


16 En la figura: O es el centro de la circunferencia inscrita y $OP=3(OC)$. Calcule "x".

A) 82°
B) 74°
C) 90°
D) 75°
E) 72°

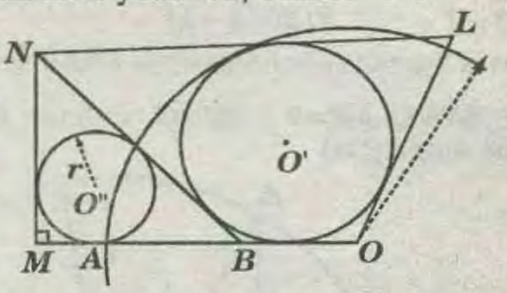


17 En la figura: O y O' son centros de las circunferencias, L es punto de tangencia. Calcule "x".



A) 60° B) 30° C) 26,5° D) 18,5° E) 36°

18 En la figura, las circunferencias están inscritas en el $\triangle NMB$ y en el $\square BNLO$.
Si: $NL=NM+BM$ y $AB=12$, calcule "r".

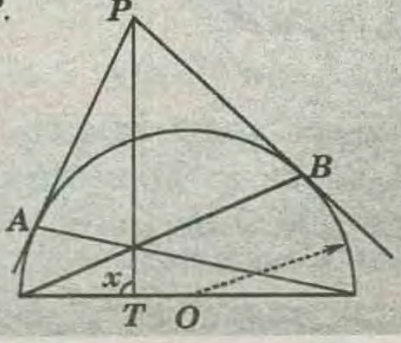


A) 4,5 B) 9 C) 3 D) 6 E) 5

19 En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior BD y luego las circunferencias inscritas en los triángulos ABD y BDC tangentes a $\overline{BD}$ en los puntos P y Q, respectivamente.
Si: $BP-QD=6$, calcule el inradio del triángulo ABC.
A) 6 B) 8 C) 3 D) 4,5 E) 4

20 En la figura: A y B son puntos de tangencia. Calcule "x".

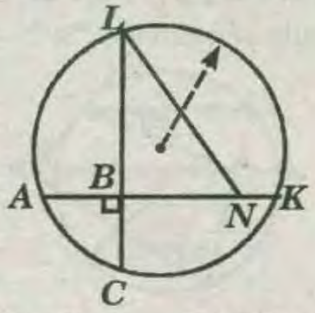
A) 120°
B) 75°
C) 90°
D) 76°
E) 74°



SEXTA PRACTICA DIRIGIDA

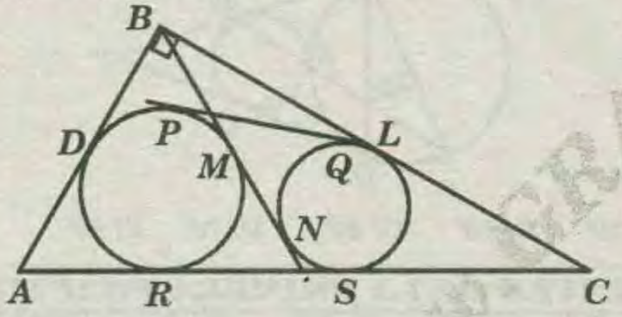
CUADRILATERO INSCRITO E INSCRIPTIBLE -TEOREMA DE PONCELET-PITHOT

01 En el gráfico: $AB = BC$ y $BN = 3(NK) = 3$. Calcule el inradio del triángulo LBN.



A) 0,5 B) 0,75 C) 1 D) 1,25 E) 1,5

02 En el gráfico: D, P, Q, L, M, N, R y S son puntos de tangencia. Calcule el inradio del triángulo ABC, si: $PQ = 6$ y $2(BD) + MN = 8$.



A) 2 B) 3 C) 6 D) 4 E) 1

03 En un triángulo ABC de inradio r y exradios r_a, r_b y r_c además $r+r_a+r_c=10$ y $BC-2r=AC-AB$, calcule r_b.

A) 5 8) 6 C) 8 D) 10 E) 12

04 En un triángulo ABC, recto en B, está inscrito una circunferencia de radio R. Si los radios de las circunferencias máximas inscritas en los segmentos circulares determinados por $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son r_1 Y r_2, además el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC es r, hallar R.

A) $r_1 + r_2 + r$ B) $2(r_1 + r_2 + r)$ C) $3r - (r_1 + r_2)$
D) $r + 2(r_1 + r_2)$ E) $r + 3(r_1 + r_2)$

05 En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se encuentra inscrita una circunferencia de centro O y que es tangente a $\overline{BC}$ en el punto N. Si $AB = 8$ y $AC = 17$, calcule el inradio del triángulo ONC.

A) $\frac{3}{2}(6-\sqrt{17})$ B) $\frac{3}{2}(5-\sqrt{17})$ C) $3(6-\sqrt{17})$
D) $2(5-\sqrt{17})$ E) $(5-\sqrt{17})$

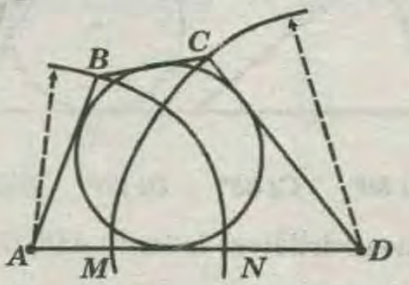
06 En un triángulo rectángulo ABC (recto en B) se inscribe una circunferencia cuyo radio mide 3; en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican M y N, respectivamente, tal que $\overline{MN}$ es tangente a la circunferencia. Si el inradio del triángulo MBN mide 1, calcular: $MB+BN$.

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

07 La circunferencia inscrita en un cuadrilátero $ABCD$ es tangente al lado $\overline{AB}$ en M. Si: $m\measuredangle BAD=90°$, $BM + CD = 16$ y $BC + AD = 24$, entonces la longitud del radio de la circunferencia es:

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

08 En el gráfico, la circunferencia está inscrita en el cuadrilátero $ABCD$. Además $BC = 6$. Calcule MN.



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

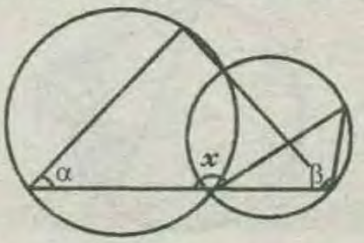
09 En un cuadrilátero $ABCD$ circunscrito a una circunferencia, se traza una semicircunferencia con diámetro CD en el cual se ubica el punto M en el arco CD, tal que: $MD=AB=12$ y $BC+AD = 25$. Calcule el inradio de la circunferencia inscrita en el triángulo CMD.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10 Dado un cuadrilátero $ABCD$ circunscrito a una circunferencia de centro O. Si: $m\measuredangle ABC=90°$, $AB+CD=23$ y $AD+OC=17$, siendo P punto de tangencia con $\overline{BC}$, calcule el inradio del triángulo OPC.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 3,5 E) 2,5

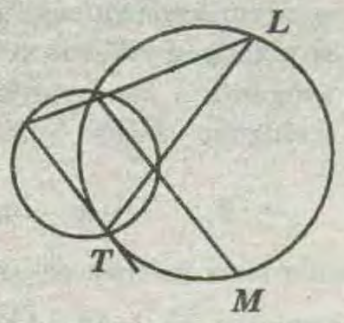
11 En el gráfico: $\alpha + \beta = 150°$. Calcule el valor de "x".



A) 130° B) 140° C) 150° D) 160° E) 170°

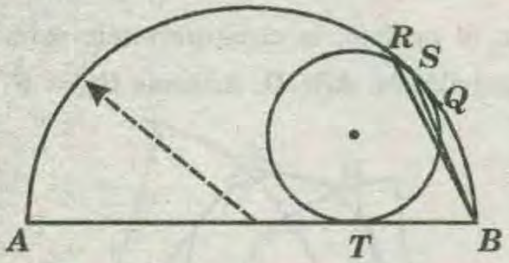
12 En el gráfico : T es punto de tangencia.

Calcule $m\widehat{MT}$, si $m\widehat{ML}=150°$



A)50° B) 60° C) 40° D) 70° E) 80°

13 En el gráfico: Q y T son puntos de tangecia y $m\widehat{RSQ}=50°$. Calcule $m\measuredangle RBA$.

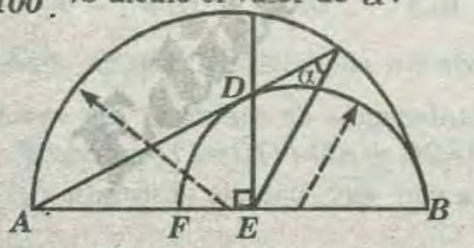


A)50° B) 60° C) 65° D) 50° E)80°

14 En un cuadrilátero inscrito $ABCD$ se ubica M en $\widehat{BC}$, mientras que las prolongaciones de $\overline{BM}$ y $\overline{DC}$ se intersecan en N. Si $\overline{AB}\,//\,\overline{DN}$ y $m\measuredangle ADM=50°$, calcule $m\measuredangle DNB$.

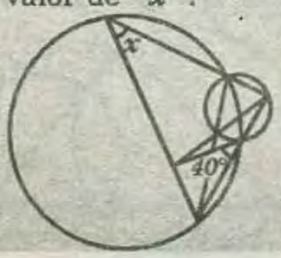
A) 25° B) 40° C) 30° D)50° E) 60°

15 En el gráfico :D es punto de tangencia y $m\widehat{BD}=100°$. C alcule el valor de α.



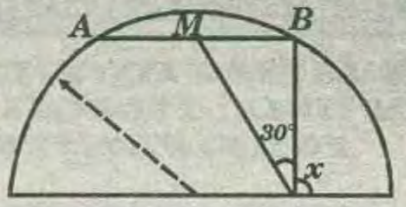
A) 50° B) 40° C) 30° D) 27° E) 20°

16 Calcule el valor de "x".



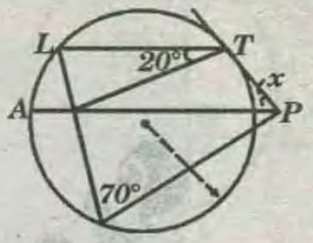
A) 20° B) 30° C) 40° D) 50° E)60°

17 Calcule el valor de "x", si: $AB=R$ y $AM=MB$.



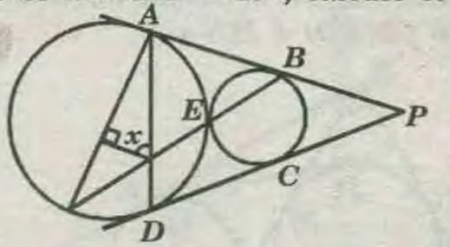
A) 80° B) 60° C) 70° D) 90° E) 100°

18 En el gráfico: $\overline{TL}\,//\,\overline{PA}$. Si T es punto de tangencia, calcule el valor de "x".



A) 30° B) 50° C) 45° D) 35° E) 40°

19 El gráfico: A, B, C, D y E son puntos de tangencia. Si $m\measuredangle APD=40°$, calcule el valor de "x".



A) 50° B) 60° C) 40° D) 70° E) 80°

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)A	2)B	3)A	4)D	5)C	6)C	7)D	8)A	9)B	10)C
11)B	12)B	13)C	14)B	15)C	16)C	17)C	18)B	19)C	20)B

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)A	2)B	3)E	4)A	5)B	6)E	7)E	8)D	9)D	10)C
11)D	12)D	13)A	14)C	15)C	16)A	17)D	18)D	19)D	20)D

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1)C	2)C	3)D	4)D	5)A	6)D	7)A	8)D	9)D	10)B
11)D	12)C	13)E	14)C	15)C	16)E	17)A	18)D	19)D	20)A

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA

1)E	2)C	3)A	4)B	5)D	6)C	7)E	8)C	9)A	10)B
11)E	12)A	13)B	14)D	15)A	16)C	17)D	18)C	19)B	20)E

CLAVES DE LA QUINTA PRACTICA

1)A	2)E	3)B	4)E	5)D	6)B	7)E	8)C	9)C	10)C
11)E	12)E	13)C	14)D	15)A	16)C	17)B	18)D	19)A	20)C

CLAVES DE LA SEXTA PRACTICA

1)C	2)E	3)D	4)D	5)B	6)B	7)E	8)D	9)B	10)B
11)C	12)B	13)C	14)D	15)B	16)C	17)D	18)B	19)D	20)D

OBJETIVOS :

** Conocer e identificar los puntos notables.*

** Ubicar cada punto notable en determinado triángulo.*

** Relacionar los teoremas entre los puntos notables.*

** Establecer las relaciones entre los puntos notables y las circunferencias que se asocian.*

** Resolver problemas aplicando propiedades referentes a puntos notables.*

INTRODUCCIÓN :

En el estudio de los triángulos , algunas rectas, puntos y circunferencias se destacan por sus propiedades. A continuación se presenta una lista exhaustiva de definiciones.

• **MEDIATRICES :** son las rectas perpendiculares a los lados que dividen a éstos en partes iguales.

• **CIRCUNCENTRO :** es el punto en el que se encuentran las mediatrices. Este punto no siempre es interior al triángulo. (En los triángulos con un ángulo obtuso, es exterior; en el caso de los triángulos rectángulos, pertenece a la hipotenusa.)

• **CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRIPTA:** es la circunferencia no incluida en el triángulo que contiene sus tres vértices. Su centro es el circuncentro , de ahí el nombre de éste.

• **BISECTRICES:** son las rectas que dividen a los ángulos en partes iguales.

• **INCENTRO:** es el punto en el que se encuentran las bisectrices. El incentro es siempre interior al triángulo, de ahí su nombre.

• **CIRCUNFERENCIA INSCRIPTA:** es la circunferencia incluida en el triángulo que es tangente a los tres lados. Su centro es el incentro.

• **CIRCUNFERENCIAS EXTERIORES:** son las circunferencias exteriores al triángulo, tangentes a cada lado y a la prolongación de los otros dos.

El centro de cada una de ellas es la intersección de la bisectriz del ángulo opuesto al lado al cual la circunferencia es tangente con las perpendiculares a las bisectrices de los otros dos ángulos que pasan por los vértices correspondientes.

• **MEDIANAS:** son los segmentos que unen los vértices con los puntos medios de los lados opuestos.

• **BARICENTRO:** es el punto en el que se encuentran las medianas.

En un cuerpo real de forma triangular, el baricentro es el centro de masa (de ahí su nombre, gr. *baros* = «gravedad»), es decir, el punto desde el cual se puede tomar el cuerpo sin que manifieste tendencia a girar. El baricentro es siempre interior al triángulo.

• **ALTURAS:** son los segmentos perpendiculares a los lados (o a la prolongación de éstos) que tienen su otro extremo en el vértice opuesto.

• **ORTOCENTRO:** es el punto de encuentro de las alturas. Este punto no siempre es interior al triángulo. (En los triángulos con un ángulo obtuso, es exterior. En el caso de los triángulos rectángulos, coincide con el vértice del ángulo recto.)

• **RECTA DE EULER:** es la recta que contiene al ortocentro, el baricentro y el circuncentro.

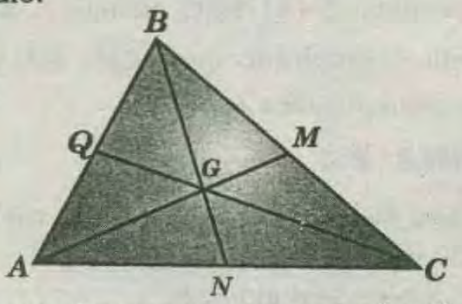
• **CIRCUNFERENCIA DE FEUERBACH :** es la circunferencia que contiene los tres puntos medios de los lados del triángulo. El centro de la circunferencia de Feuerbach pertenece a la recta de Euler.

PUNTOS NOTABLES

Son aquellos puntos de concurrencia de líneas notables de una misma característica en un triángulo.

BARICENTRO (G)

Es el punto de concurrencia de las tres medianas de un triángulo.



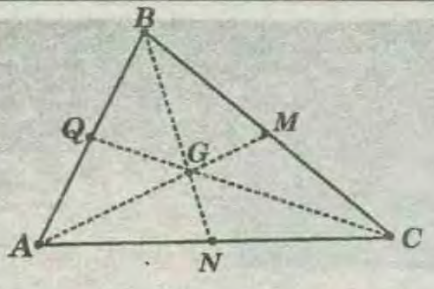
El baricentro siempre es un punto interior a todo triángulo.

* Todo triángulo tiene un solo baricentro.

TEOREMA 1:

En todo triángulo sus tres medianas son

concurrentes.

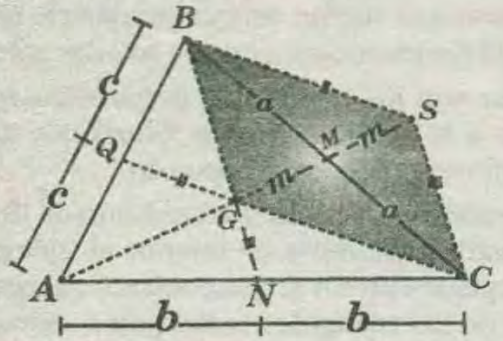


En el ΔABC:

$\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$: son medianas relativas a $\overline{BC}$; $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.

$\Rightarrow \overline{AM}$; $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ son concurrentes en P.

DEMOSTRACIÓN :



Sean $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ medianas del ΔABC que se intersecan en G.

$$\Rightarrow AN=NC \text{ y } AQ=QB$$

luego prolongamos $\overline{AG}$ hasta S. tal que $AG=GS$.

* Del teorema de los puntos medios:

$$\Delta ABS: \overline{QG}//\overline{BS} \; ; \; \Delta ACS: \overline{NG}//\overline{CS}$$

* Como $\overline{QGC}//\overline{BS}$ y $\overline{NGB}//\overline{CS}$ entonces $GBSC$ es un paralelogramo, por lo tanto, sus diagonales se bisecan.

$$\Rightarrow GM=MS \wedge BM=MC$$

* $\overline{AM}$: mediana del ΔABC relativa a $\overline{BC}$. con lo cual queda demostrado que $\overline{AM}$; $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ son medianas concurrentes en G.

TEOREMA 2 :

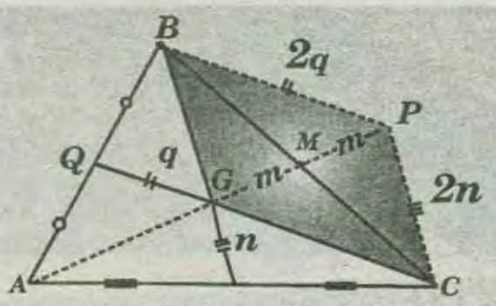
El baricentro divide a cada una de las medianas en la razón de dos a uno desde el vértice.

G : baricentro de la región ABC.

Entonces :

$$\boxed{\frac{GA}{GM}=\frac{GB}{GN}=\frac{GC}{GQ}=2}$$

DEMOSTRACIÓN :



Sean $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ medianas del ΔABC que se intersecan en G.

$$\Rightarrow AN=NC \text{ y } BQ=QA$$

* Luego prolongamos $\overline{AG}$ hasta P, tal que $GP=AG$.

$\Rightarrow$ En el ΔABP del teorema de los puntos medios, $\overline{GQ}//\overline{BP}$ y $GQ=\frac{BP}{2}=q$.

*Análogamente en el ΔAPC, $\overline{GN}//\overline{PC}$ y $GN=\frac{PC}{2}=n$

* Como $\overline{BP}//\overline{GC}$ y $\overline{PC}//\overline{BG}$ entonces $GBPC$ es un paralelogramo de lo cual se concluye que $\overline{GP}$ y $\overline{BC}$ se bisecan en M. Por lo que $\overline{AM}$ es mediana.

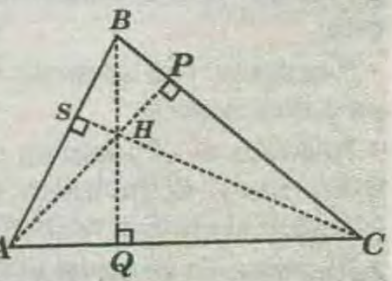
* Así también $GC=BP=2q$ y $GB=PC=2n$.

$\Rightarrow BG=2(GN)$; $CG=2(CQ)$ y también $AG=GP=2m$ y $GM=MP=m \Rightarrow AG=2(GM)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{GA}{CM}=\frac{GB}{GN}=\frac{GC}{GQ}=2}$$

ORTOCENTRO (H)

Es el punto de concurrencia de las tres alturas en un triángulo o sus respectivas prolongaciones(todo triángulo tiene un solo ortocentro) .



TEOREMA 3 :

Las tres alturas de un triángulo o sus respectivas prolongaciones son concurrentes.

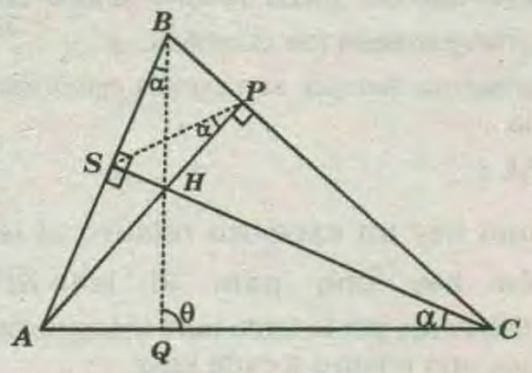
En el ΔABC

$\overline{AP}$; $\overline{BQ}$ y $\overline{CS}$: son alturas relativas a $\overline{BC}$; $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente .

$\Rightarrow \overline{AP}$; $\overline{BQ}$ y $\overline{CS}$: son concurrentes en H.

DEMOSTRACIÓN :

* En el ΔABC trazamos las alturas $\overline{AP}$ y $\overline{CS}$ que se intersecan en H .



Luego trazamos la ceviana $\overline{BQ}$, tal que $H \in \overline{BQ}$.

* En el $\square ASPC$: inscriptible ,

$$m\sphericalangle SPA = m\sphericalangle SCA = \alpha$$

* En el $\square HSBP$: inscriptible ,

$$m\sphericalangle SBH = m\sphericalangle SPH = \alpha$$

* Luego en la figura $\bowtie BSCQ$:

$$90° + \alpha = \theta + \alpha \Rightarrow \theta = 90°$$

Entonces $\overline{BQ}$ es altura por lo tanto las tres alturas concurren en H. Análogamente se demuestra cuando un triángulo es obtusángulo.

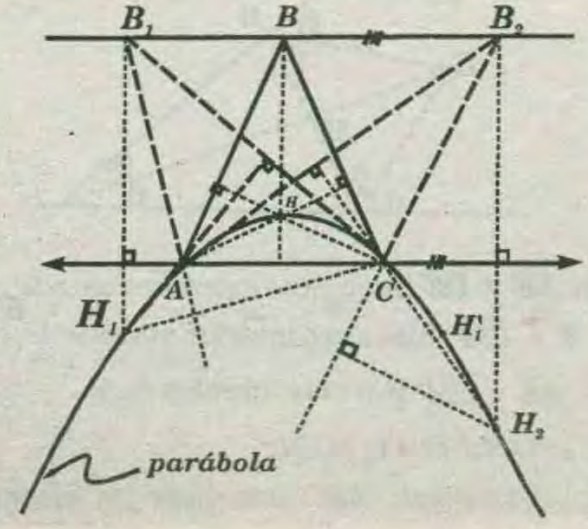
OBSERVACIÓN:

Dado un triángulo ABC en donde A y C permanecen fijos y el vértice B se desplaza paralelamente a la $\overleftrightarrow{AC}$ los ortocentros de los triángulos ABC describen una parábola .

H: ortocentro del ΔABC.

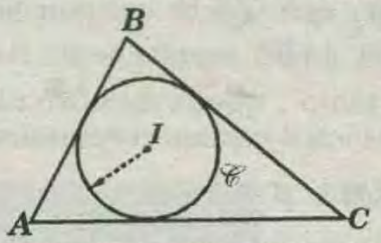
H_1: ortocentro del ΔAB_1C.

H_2: ortocentro del ΔAB_2C.



INCENTRO (I)

Es el centro de la circunferencia inscrita en un triángulo.



Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia inscrita en el ΔABC.

I: centro de $\mathscr{C}$.

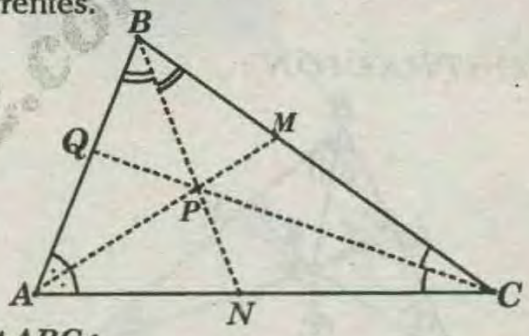
I: incentro del ΔABC

* Todo triángulo tiene un sólo incentro .

* El incentro siempre es un punto interior a todo triángulo.

TEOREMA 4 :

En todo triángulo las bisectrices interiores son concurrentes.

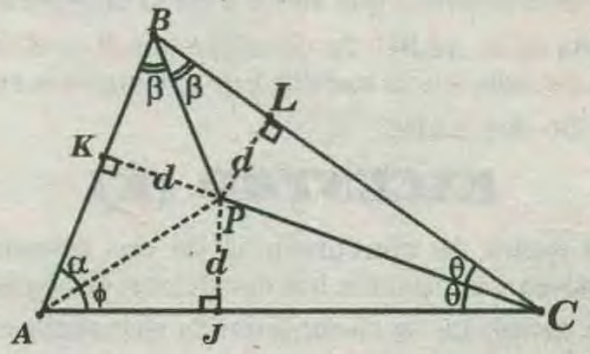


En el ΔABC:

Sea $\overline{AM}$; $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$: bisectrices interiores, relativas a $\overline{BC}$; $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente .

$\Rightarrow \overline{AM}$; $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ son concurrentes en P.

DEMOSTRACIÓN:



Sea P el punto de intersección de las bisectrices BN y CQ.

* Del teorema de la bisectriz .

* $\overrightarrow{BS}$: $PK = PL = d$ .....(I)

* $\overrightarrow{CS}$: $PL = PJ = d$ .....(II)

* De (I) y (II) : $PK = PJ = d$

* Los triángulos AKP y AJP son congruentes *(L.L.L.)*

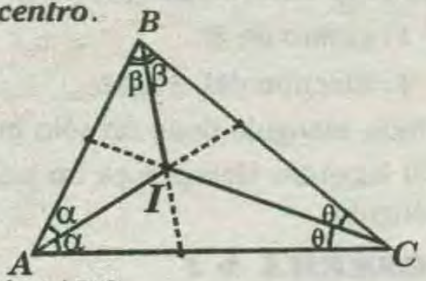
$$\Rightarrow \alpha = \phi$$

Esto prueba que $\overline{AP}$ es una porción de la bisectriz interior del $\triangle ABC$ trazada desde $A(\overline{AM})$.

* Por lo tanto , queda demostrado que las tres bisectrices interiores son concurrentes en P.

TEOREMA 5 :

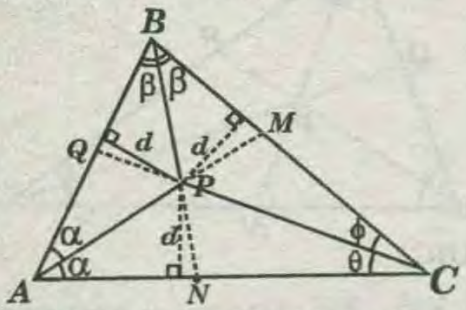
En todo triángulo, las bisectrices interiores concurren en el *incentro*.



Sea I el incentro del $\triangle ABC$.

$\Rightarrow$ Las bisectrices interiores del $\triangle ABC$ concurren en I.

DEMOSTRACIÓN :



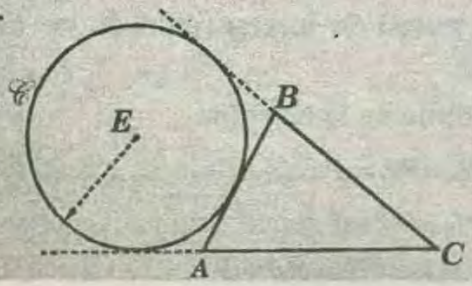
* En el $\triangle ABC$ trazamos las bisectrices interiores $\overline{AM}$; $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ que se intersecan en P.

Y como P equidista de los tres lados y está en la región interna con centro en P y radio d trazamos una circunferencia que viene a ser la circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$. Se concluye que P es el centro de la circunferencia inscrita, y de esta manera resulta incentro del $\triangle ABC$.

EXCENTRO (E)

Es el punto de concurrencia de dos bisectrices exteriores y la bisectriz interior del tercer ángulo.

Es el centro de la circunferencia exinscrita en un triángulo.



$\mathscr{C}$ circunferencia exinscrita al $\triangle ABC$ relativa al lado AB.

E: centro de $\mathscr{C}$.

$\Rightarrow$ E: excentro del $\triangle ABC$ relativo al lado $\overline{AB}$.

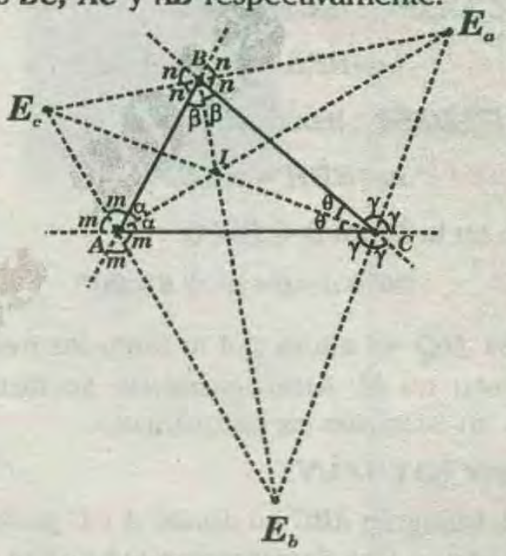
* Todo triángulo tiene tres excentros .

* Los excentros siempre son puntos exteriores a todo triángulo .

NOTA :

Así como hay un excentro relativo al lado $\overline{AB}$ también hay uno para el lado $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente por lo tanto todo triángulo tiene tres excentros uno relativo a cada lado .

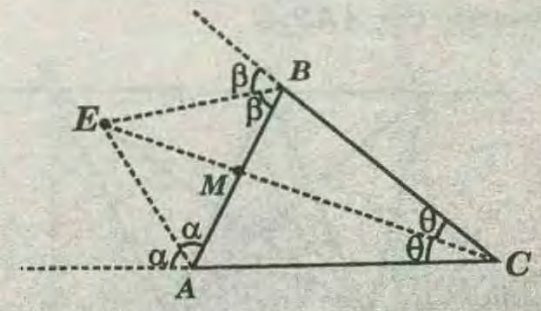
Así en la figura E_a ; E_b y E_c son excentros relativos a los lados BC; AC y AB respectivamente.



$\Delta E_a E_b E_c$: Es el triángulo exincentral de $\triangle ABC$.

TEOREMA 6 :

En todo triángulo , las bisectrices exteriores trazadas de dos vértices y la bisectriz interior trazada del tercer vértice , concurren en un punto.



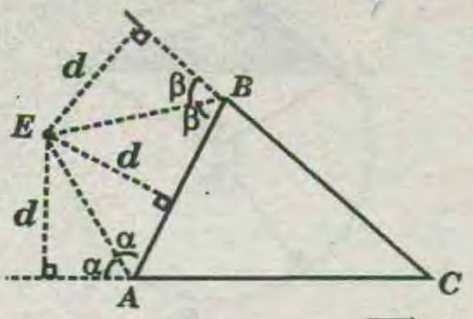
Sean $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{BE}$ bisectrices exteriores trazadas desde A y B y $\overrightarrow{CM}$ bisectriz interior trazada desde C.

$\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$ y $\overrightarrow{CM}$ son concurrentes en E .

DEMOSTRACIÓN:

* En el triángulo ABC trazamos las bisectrices

exteriores desde A y B las cuales se intersecan en E.



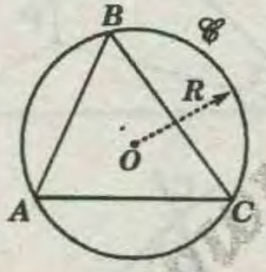
* Del teorema de la bisectriz para $\overleftrightarrow{AE}$, E equidista de $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$. Para $\overleftrightarrow{BE}$, E equidista de $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ por lo tanto E equidista de $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$.es decir, E pertenece a la bisectriz interior trazada desde C en consecuencia $\overleftrightarrow{CE}$ es bisectriz interior. Por lo tanto , dos bisectrices exteriores y una tercera interior son concurrentes .

Si E equidista de los tres lados del ΔABC y está en la región externa , entonces E es centro de la circunferencia exinscrita relativa a un lado .

CIRCUNCENTRO (O)

Es el punto de concurrencia de las tres mediatrices de un triángulo(todo triángulo tiene un solo circuncentro).

Es el centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo .



Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia circunscrita al ΔABC.

$\Rightarrow O$ es el centro de $\mathscr{C}$.

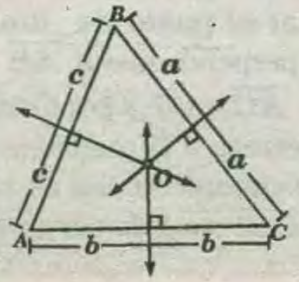
$\Rightarrow O$ es el circuncentro del ΔABC.

R : es el circunradio del ΔABC.

TEOREMA 7 :

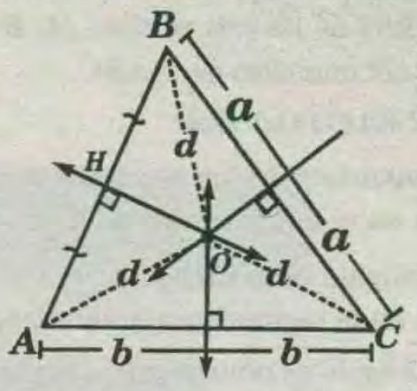
En todo triángulo , las mediatrices de sus lados son concurrentes.

Las mediatrices de $\overline{AB}$; $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ concurren en O.



DEMOSTRACIÓN:

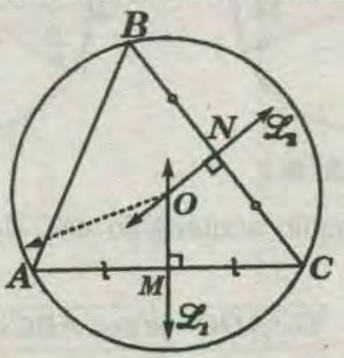
* Las mediatrices de los lados BC y AC de un triángulo ABC se intersecan en el punto O.



* Luego del teorema de la mediatriz $OA=OB=OC=d$ $\Rightarrow$ en el ΔAOB (isósceles) la altura $\overline{OH}$ es parte de la mediatriz de $\overline{AB}$. Por lo tanto, las tres mediatrices concurren en O.

TEOREMA 8 :

Las mediatrices de dos lados de un triángulo se intersecan en el circuncentro de dicho triángulo.

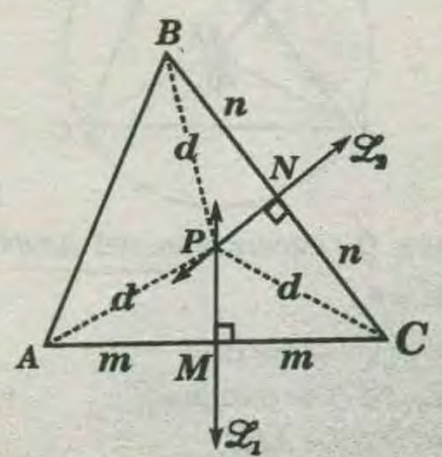


Sea $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ mediatriz de $\overline{AC}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ mediatriz de $\overline{BC}$.

$\Rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} = \{O\}$.Siendo O el circuncentro del ΔABC

DEMOSTRACIÓN :

* En el ΔABC, sea P el punto de intersección de las mediatrices $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.



* Del teorema de la mediatriz :

para $\overline{\mathscr{L}_1}$: $PA=PC=d$

para $\overline{\mathscr{L}_2}$: $PC=PB=d$

$\Rightarrow P$ equidista de los tres vértices $(A; B$ y $C)$

$\Rightarrow P$ es el circuncentro de ΔABC.

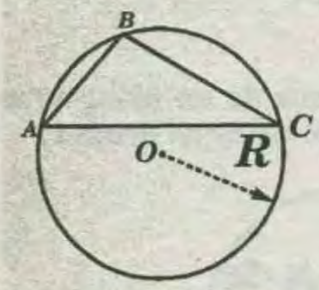
OBSERVACIONES:

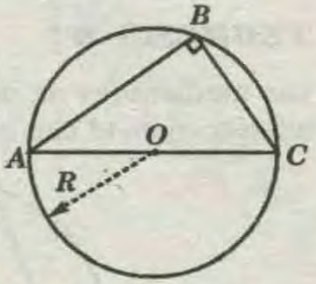
♠ Las mediatrices de los tres lados de un triángulo concurren en el circuncentro de dicho triángulo.

♠ Si el triángulo es acutángulo , el circuncentro se encuentra en la región interna del triángulo.

♠ Si el triángulo es obtusángulo , el circuncentro se encuentra en la región externa del triángulo.

♠ Si el triángulo es rectángulo , el circuncentro se encuentra en el triángulo (punto medio de la hipotenusa .





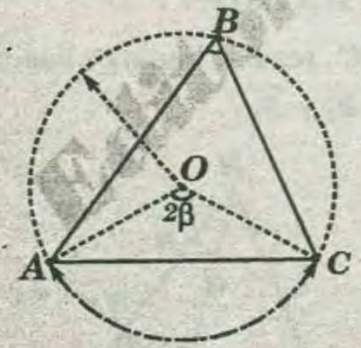
TEOREMA 9 :

En todo triángulo acutángulo ABC de circuncentro O.

$$G\sphericalangle AOC=2(m\sphericalangle ABC)$$

DEMOSTRACIÓN:

* En el triángulo ABC trazamos la circunferencia circunscrita $\mathscr{C}$ de centro O .



* De la figura, O : circuncentro del ΔABC.

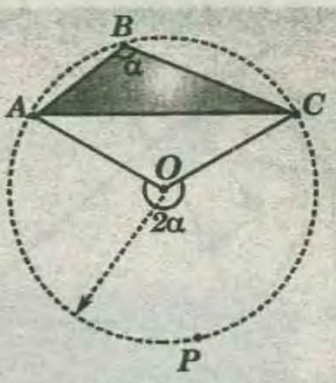
Si $m\sphericalangle ABC=\beta$.

$\Rightarrow m\overset{\frown}{AC}=2\beta$(Por $\sphericalangle$ inscrito)

$\wedge\, m\sphericalangle AOC=2\beta$ (Por $\sphericalangle$ central)

$\Rightarrow m\sphericalangle AOC=2(m\sphericalangle ABC)$

NOTA:

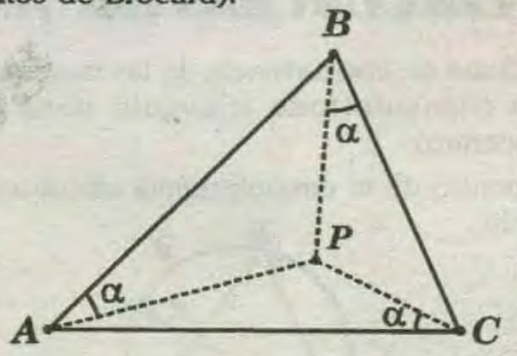


Si el triángulo es obtusángulo, O: circuncentro del ΔABC , Si $m\sphericalangle ABC=\alpha$

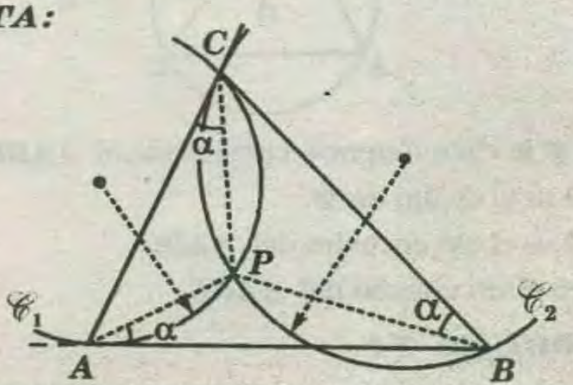
$\Rightarrow$ Por $\sphericalangle$ inscrito $m\overset{\frown}{APC}=2\alpha$

PUNTO DE BROCARD

Dado un triángulo ABC si en la región interior se ubica el punto P , tal que la $m\sphericalangle PAB=m\sphericalangle PBC=m\sphericalangle PCA$ entonces P es el punto de Brocard respecto del triángulo ABC. (Todo triángulo no equilátero tiene dos puntos de Brocard).

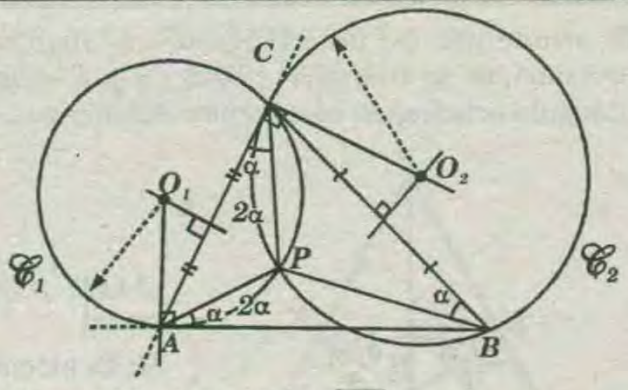


NOTA:



Si trazamos circunferencias circunscritas a los triángulos APC y BPC (ver figura , estas tendrán que ser tangentes a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente en A y C.

Así, para ubicar el punto de Brocard (P) por A trazamos una perpendicular a $\overline{AB}$ que interseca a la mediatriz de $\overline{AC}$ en O_1 y por C una perpendicular a $\overline{AC}$ que interseca a la mediatriz de $\overline{BC}$ en O_2, por lo tanto las circunferencias de centros O_1; O_2 y radios $\overline{O_1A}$ y $\overline{O_2C}$ se intersecan en P (punto de Brocard).



* De la figura , $\mathscr{C}_1$: tangente a $\overline{AB}$ en A .

$$\Rightarrow m\sphericalangle PAB=\frac{m\overset{\frown}{AP}}{2}=\alpha \wedge m\overset{\frown}{AP}=2\alpha$$

* Por ángulo inscrito la $m\sphericalangle ACP=\alpha$ pero $\mathscr{C}$ es tangente a $\overline{AC}$ en C.

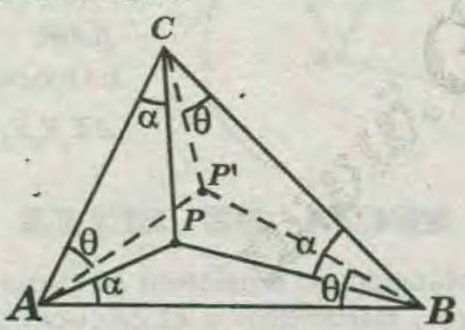
$$\Rightarrow m\sphericalangle PCA=\frac{m\overset{\frown}{PC}}{2}=\alpha \text{ y } m\overset{\frown}{PC}=2\alpha \Rightarrow m\sphericalangle PBC=\alpha$$

con lo cual la $m\sphericalangle PAB=m\sphericalangle PBC=m\sphericalangle PCA=\alpha$

$\Rightarrow P$ es un punto Brocard.

OBSERVACIÓN:

Si en vez del punto C se considera el punto B y trazamos una perpendicular a $\overline{BC}$ hasta intersecar a la mediatriz de $\overline{BC}$ en O_1 y luego procedemos análogamente al caso anterior , encontraremos el otro punto de Brocard.

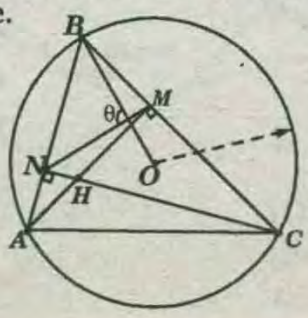


P y P' son puntos de Brocard del $\triangle ABC$, además $\alpha=\theta$.

TEOREMA DE NAGEL

En todo triángulo , el segmento que une los pies de dos alturas , es perpendicular , al circunradio relativo al tercer vértice.

1)



O : circuncentro del ΔABC

AM y CN : alturas del ΔABC

$$\Rightarrow \overline{MN} \perp \overline{BO} \Rightarrow \theta=90°$$

DEMOSTRACIÓN:

* En el ΔABC ; O es circuncentro y H es ortocentro.

Notamos el ΔBOC:

$$2\alpha+2\beta=180° \Rightarrow \alpha+\beta=90° \text{ .....(I)}$$

$ANMC$: $\square$ inscriptible

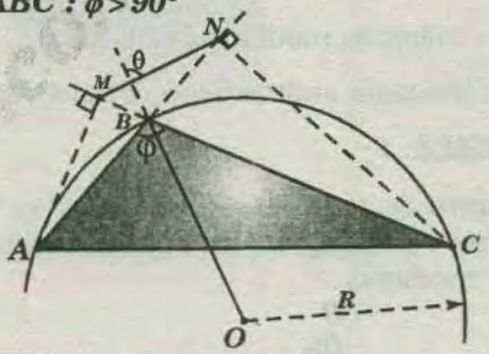
$$\Rightarrow m\sphericalangle NMB=m\sphericalangle NAC=\beta$$

$$\Rightarrow \theta=\alpha+\beta \text{.....(II)}$$

* De *(I)* y *(II)*: $\theta=90°$

2) Si el triángulo ABC es obtusángulo , también se cumple el teorema de Nagel.

En el ΔABC : $\varphi>90°$



$\overline{AM}$ y $\overline{CN}$: alturas del ΔABC .

$$\Rightarrow \overline{MN} \perp \overline{BO} \Rightarrow \theta=90°$$

DEMOSTRACIÓN:

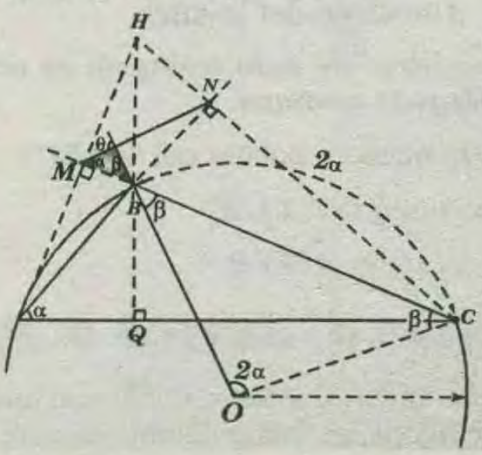
* En el ΔABC : O es circuncentro y H es el ortocentro.

* De la figura : $m\sphericalangle BOC=2(m\sphericalangle BAC)=2\alpha$

$$\Delta BOC: 2\alpha+2\beta=180° \Rightarrow \alpha+\beta=90°$$

* $\square AMNC$: inscriptible $\Rightarrow m\sphericalangle NMC=m\sphericalangle NAC=\alpha$

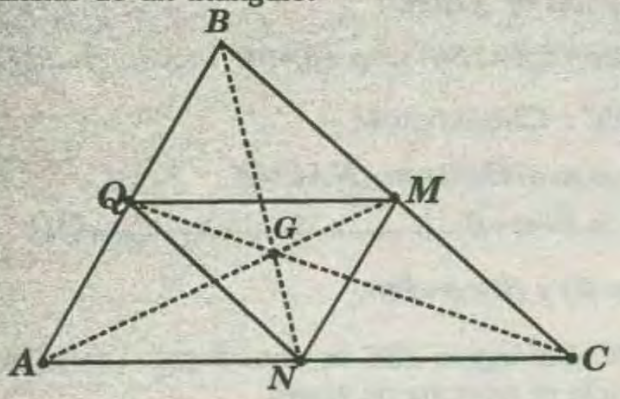
* En el Δ: $\theta=\alpha+\beta \Rightarrow \theta=90°$



TRIÁNGULOS ESPECIALES ASOCIADOS A LOS PUNTOS NOTABLES

TRIÁNGULO MEDIANO (o COMPLEMENTARIO)

Es aquel triángulo cuyos vértices son los pies de las medianas de un triángulo.



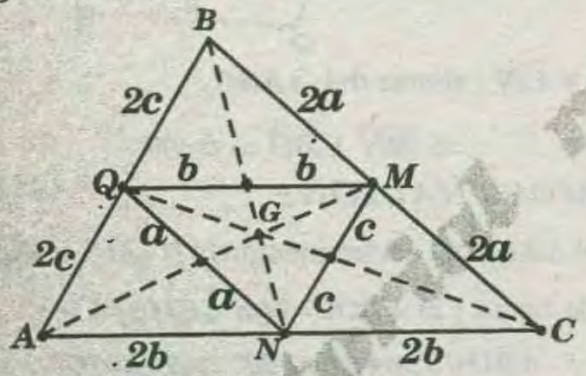
Sea *AM ; BN* y *CQ* medianas del ΔABC.

ΔMNQ : triángulo mediano del ΔABC.

ΔABC : triángulo antimediano del ΔMNQ.

TEOREMA :

El baricentro de toda región triangular es también baricentro de la región triangular asociado asu triángulo mediano.



G: baricentro del ΔABC.

G: baricentro del ΔMNQ.

ΔMNQ: Δ mediano del ΔABC

El circuncentro de todo triángulo es ortocentro de su triángulo mediano.

ΔMNQ:Triángulo mediano del ΔABC

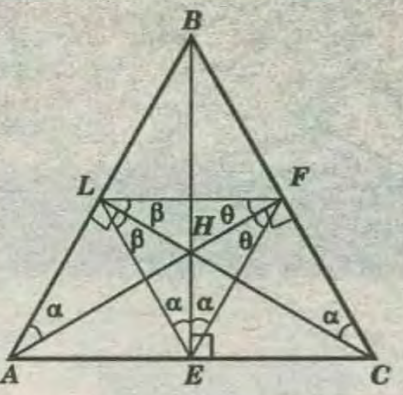
O : circuncentro del ΔABC

O : ortocentro del ΔMNQ.

TRIÁNGULO ÓRTICO O PEDAL

El triángulo órtico o pedal se obtiene al unir los pies de las alturas de un triángulo oblicuángulo.

El ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo pedal y cada vértice del triángulo acutángulo es excentro del triángulo pedal.



ΔLFE: Δ Ortico o pedal

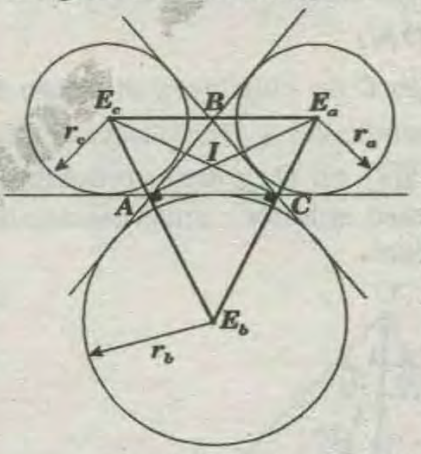
H: Es incentro del ΔLFE

A, B y *C* son excentros del triángulo *LFE*

TRIANGULO EX-INCENTRAL

El triángulo ex – incentral se determina al unir los excentros de un triángulo.

El incentro de un triángulo es a la vez ortocentro de su triángulo ex – incentral



$\Delta E_aE_bE_c$:

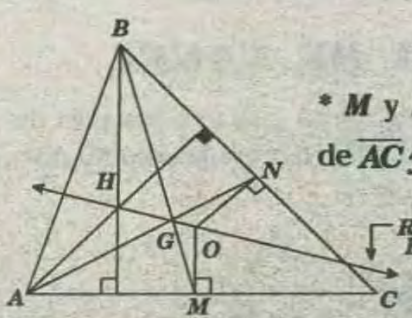
Δ Ex – incentral

I: Incentro del ΔABC

I: Ortocentro del $\Delta E_aE_bE_c$

RECTA DE EULER

En todo triángulo no equilátero se cumple que el ortocentro , baricentro y el circucentro están contenidos en una misma recta llamada la Recta de Euler.



* *M* y *N* son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$

H: Ortocentro

G: Baricentro

O: Circuncentro

* Se cumple :

$HG=2(GO)$

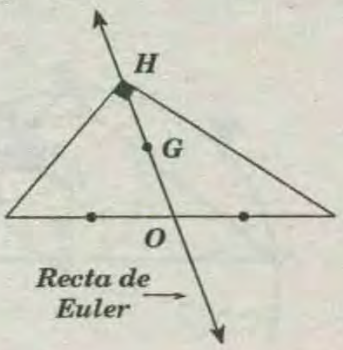
$HB=2(OM)$

$HA=2(ON)$

NOTA:

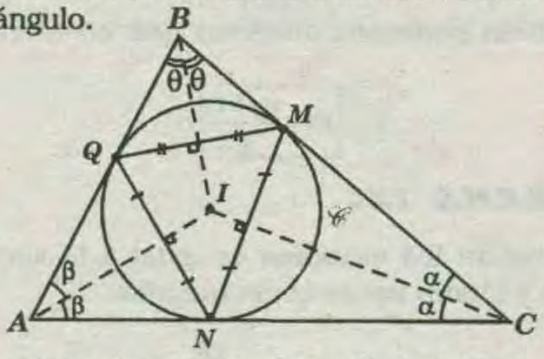
* Si : $AB = BC$

*



TRIÁNGULO TANGENCIAL

Es el triángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita , con los lados del triángulo.



Sea $\mathscr{C}$: circunferencia inscrita en el ΔABC.

M ; N y Q : puntos de tangencia.

ΔMNQ: Δ tangencial el ΔABC.

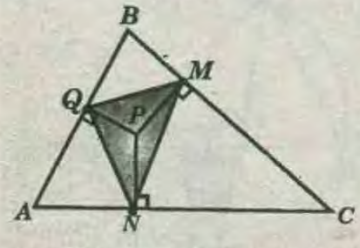
PROPIEDADES:

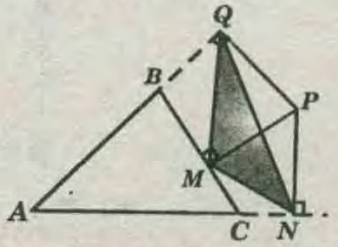
* Todo triángulo tangencial es acutángulo .

* El incentro de todo triángulo es el circuncentro de su triángulo tangencial.

TRIÁNGULO PEDAL

Es el triángulo cuyos vértices son los pies de las perpendiculares trazadas desde un punto cualquiera del plano determinado por un triángulo dado , sobre los lados o sus respectivas prolongaciones.





ΔMNQ: Δ pedal del ΔABC respecto del punto P.

ΔMNQ: Δ pedal del ΔABC respecto del punto P.

Al triángulo pedal también se le conoce como triángulo ***podar***.

♠ Si P coincide con el ortocentro , el triángulo pedal es el triángulo órtico del triángulo.

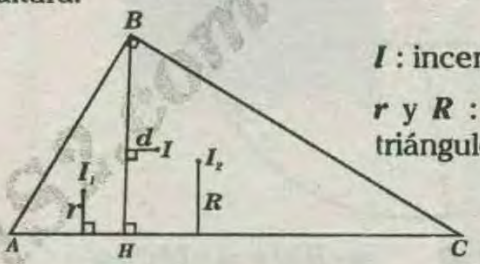
♠ Si P coincide con el circuncentro , el triángulo pedal es el triángulo mediano del triángulo.

♠ Si P coincide con el Incentro , el triángulo pedal es el triángulo tangencial.

♠ Cuando P pertenece a la circunferencia circunscrita, no existe triángulo pedal porque los pies de las perpendiculares son colineales (***recta de Simpson***).

TEOREMA 10:

En todo triángulo rectángulo , la distancia del incentro a la altura relativa a la hipotenusa es igual a la diferencia de los inradios de los triángulos parciales , que se determinan cuando se traza dicha altura.

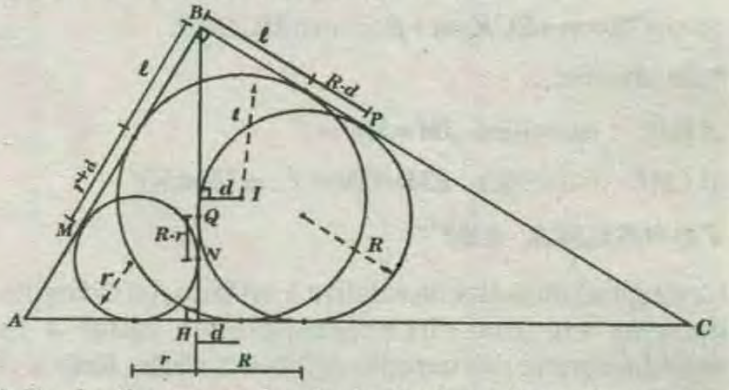


I : incentro del ΔABC.

r y R : inradios de los triángulos ABH y HBC

$d = R - r$

DEMOSTRACIÓN:



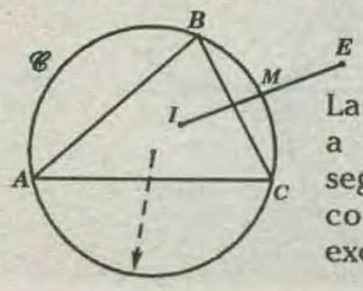
* En la figura se ha trazado las circunferencias inscritas en los $\triangle$ AHB , BHC y ABC.

$BM = BN = \ell + (r+d)$ $\quad BP = BQ = \ell + (R-d)$

también $BM = BQ + QN$

* Reemplazando : $+(r+d) = l + (R-d) + (R-r)d = R-r$

TEOREMA 11:



La circunferencia circunscrita a un triángulo biseca al segmento que une el incentro con cualquiera de los excentros de dicho triángulo.

I: incentro del ΔABC.

E: excentro del ΔABC relativo al lado $\overline{BC}$.

$\mathscr{C}$: circunferencia circunscrita al ΔABC.

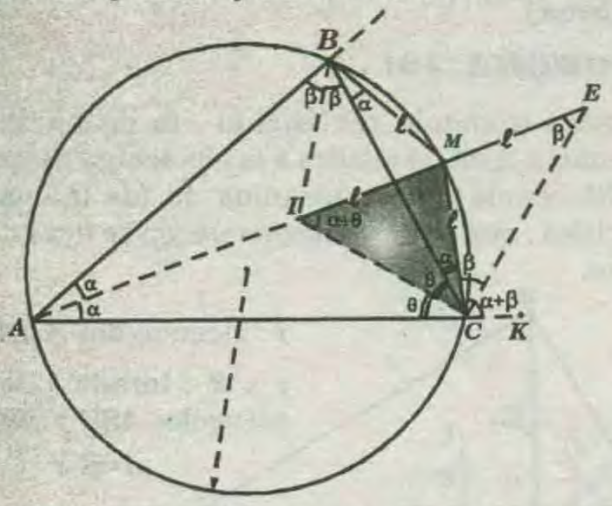
$\mathscr{C} \cap \overline{IE} = \{M\} \Rightarrow IM = ME$

DEMOSTRACIÓN:

* Sea *I:* incentro del ΔABC

E: incentro del ΔABC

* Sabemos que *A ; I* y *E* son colineales



$m\sphericalangle ACI = m\sphericalangle BCI = \theta \qquad m\sphericalangle BAI = m\sphericalangle IAC = \alpha$

$\Rightarrow m\sphericalangle MBC = m\sphericalangle MCB = \alpha \Rightarrow m\sphericalangle CIM = m\sphericalangle MCI = \alpha + \theta$

$m\sphericalangle BCE = m\sphericalangle ECK = \alpha + \beta \Rightarrow m\sphericalangle MCE = \beta$

* Se observa :

ΔIMC : isósceles $IM = MC = \ell$

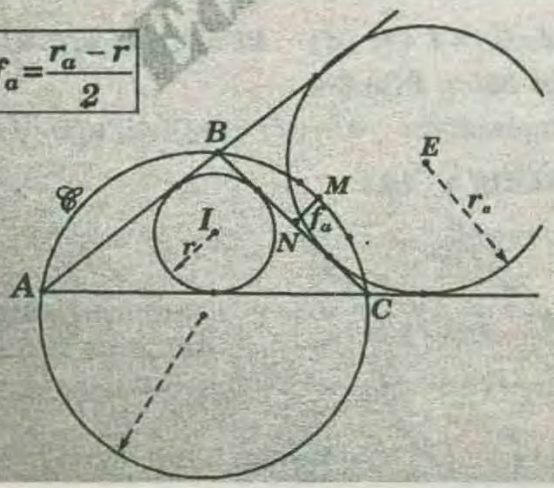
ΔCME : isósceles $EM = CM = \ell \Rightarrow IM = ME$

TEOREMA 12:

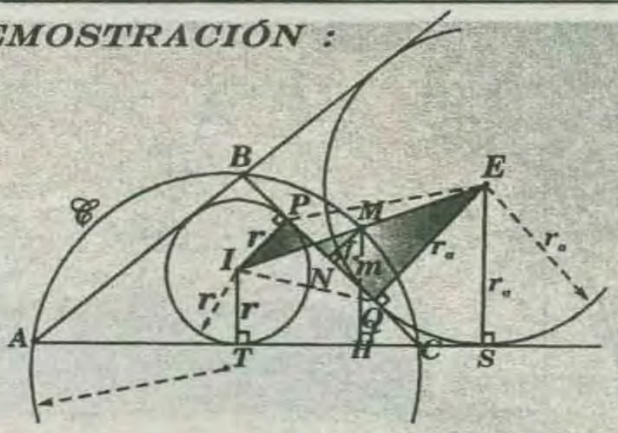
La longitud de la flecha relativa a un lado del triángulo inscrito en una circunferencia es igual a la semidiferencia del exradio relativo a dicho lado y el inradio .

MN: flecha relativa al lado *BC* $(MN = f_a)$

$$f_a = \frac{r_a - r}{2}$$



DEMOSTRACIÓN :



$\overline{IP} \perp \overline{BC}; \overline{EQ} \perp \overline{BC} \Rightarrow \overline{IP} \parallel \overline{EQ}$

* Sabemos que $IM = ME \Rightarrow$ en el trapecio *IPEQ*

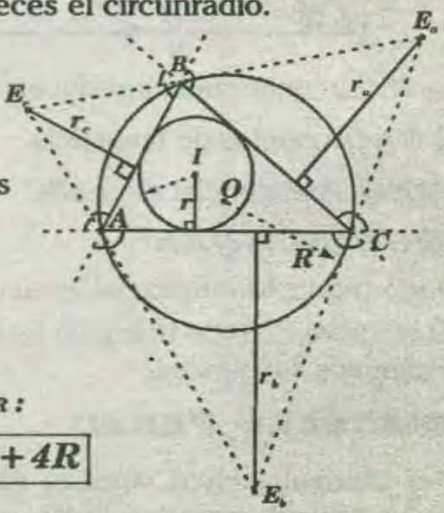
$$f_a = \frac{r_a - r}{2}$$

* También podemos observar que en el trapecio *TIES:*

$$m = \frac{r_a + r}{2}$$

TEOREMA 13:

La suma de los exradios es igual a la suma del inradio y cuatro veces el circunradio.



r_a, r_b, r_c: exradios del ΔABC

r : inradio

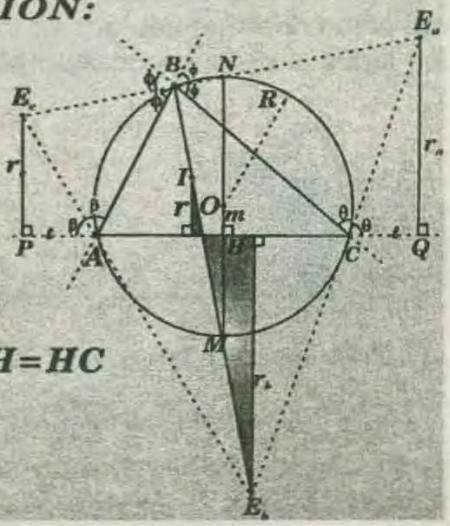
R : circunradio

TEOREMA DE STEINER :

$$r_a + r_b + r_c = r + 4R$$

DEMOSTRACIÓN:

* Sabemos que :



$AP = CQ = \ell$ y $AH = HC$

$\Rightarrow PH = HQ$

$E_c N = N E_a$

* Entonces :

$$R-m=\frac{r_b-r}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

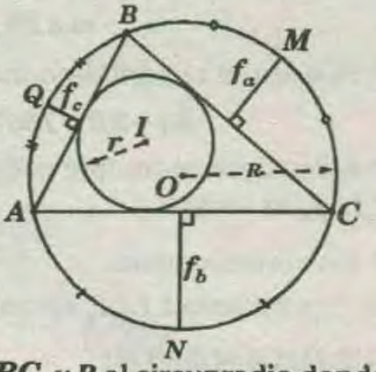
$$R+m=\frac{r_a+r_c}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* sumando *(I)* y *(II)* :

$$2R=\frac{r_a+r_b+r_c-r}{2} \Rightarrow \boxed{r_c+r_b+r_c=4R+r}$$

TEOREMA 14:

La suma de las longitudes de las flechas relativas a los lados de un triángulo inscrito en una circunferencia es igual a dos veces el circunradio menos el inradio del triángulo.



Sean , el inradio del ΔABC y R el circunradio donde $f_a; f_b$ y f_c son las longitudes de las flechas relativas a los lados , entonces :

$$\boxed{f_a+f_b+f_e=2R-r}$$

DEMOSTRACIÓN:

* Sabemos que:

$$\boxed{f_a=\frac{r_a-r}{2}}, \boxed{f_b=\frac{r_b-r}{2}} \text{ y } \boxed{f_c=\frac{r_b-r}{2}}$$

* Entonces sumando: $f_a+f_b+f_c=\dfrac{r_a+r_b+r_c-3r}{2}$

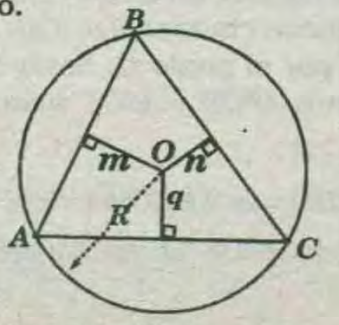
* Del teorema de Steiner :

$$4R+r=r_a+r_b+r_c \Rightarrow f_a+f_b+f_c=\frac{(4R+r)-3r}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_a+f_b+f_c=2R-r}$$

TEOREMA 15 (DE CARNOT):

En todo triángulo acutángulo , la suma de las distancias del circuncentro a cada lado del triángulo es igual a la suma del circunradio con el inradio de dicho triángulo.



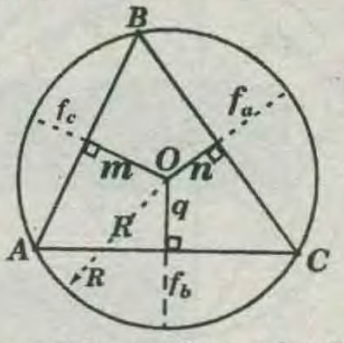
Sea , r el inradio del ΔABC :

O : circuncentro del ΔABC :

R : circunradio del ΔABC :

* Entonces : $\boxed{m+n+q=R+r}$

DEMOSTRACIÓN:



* En la figura : $m+f_c+n+f_a+q+f_b=3R$

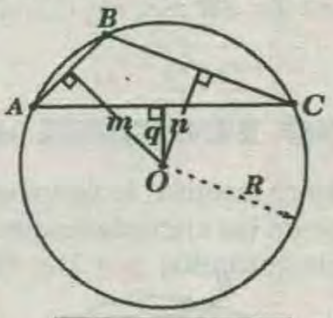
$$m+n+q+f_a+f_b+f_c=3R$$

* del teorema anterior :

$$f_a+f_b+f_c=2R-r \Rightarrow \boxed{m+n+q=R+r}$$

NOTA:

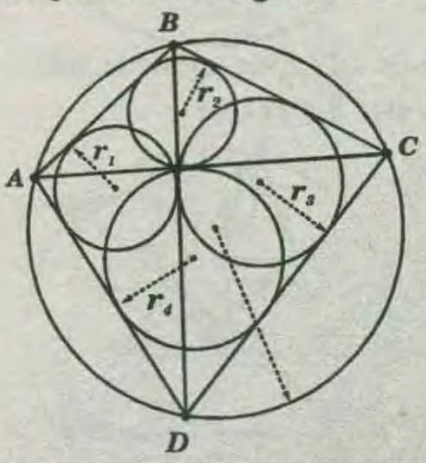
Si el triángulo es obtusángulo, se cumple



$$\boxed{m+n-q=R+r}$$

TEOREMA 16: JAPONES (MYKAMI KAYASHI)

En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible , la suma de los inradios de los triángulos parciales determinados por una diagonal es igual a la suma de los inradios de los triángulos parciales determinados por la otra diagonal.



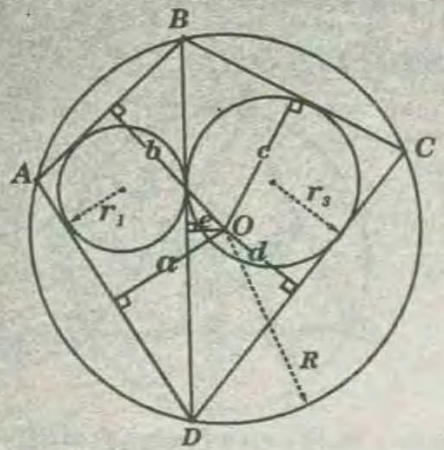
Sea r_1, r_2, r_3 y r_4, inradios del $\Delta ABD; \Delta ABC;$

LIBRO GRATIS2.COM

ΔBCD y ΔADC respectivamente.

Entonces : $\boxed{r_1+r_3=r_2+r_4}$

DEMOSTRACIÓN:



* Del teorema de Carnot :

ΔABD: $a+b-e=R+r_1$

ΔBCD: $c+d+e=R+r_3$ ..... (I)

$\Rightarrow a+b+c+d=2R+r_1+r_3$

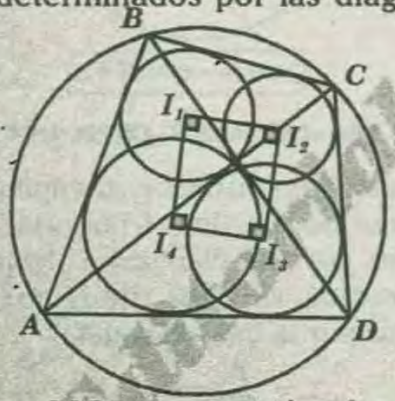
* Análogamente, para los triángulos *ABC* y *ADC* :

$\Rightarrow a+b+c+d=2R+r_2+r_4$ .....(II)

* De *(I)* y *(II)* : $\boxed{r_1+r_2=r_2+r_4}$

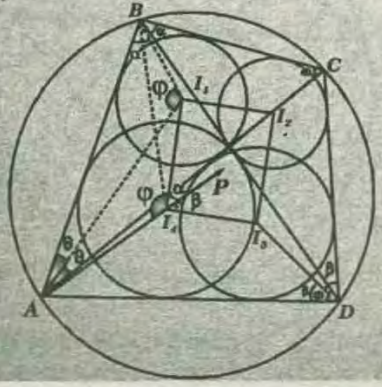
SEGUNDO TEOREMA JAPONES

En un cuadrilátero inscrito , la figura que se forma al unir los centros de las circunferencias inscritas a los triángulos determinados por las diagonal es un rectángulo.



El cuadrilátero $I_1I_2I_3I_4$ es un rectángulo

DEMOSTRACIÓN:



ΔABC: $m\sphericalangle BI_1A=90°+\frac{\omega}{2}$.....(I)

ΔABD: $m\sphericalangle AI_2B=90°+\frac{\omega}{2}$.....(II)

* De *(I)* y *(II)*: $m\sphericalangle BI_1A=m\sphericalangle AI_4B=\varphi$

* Luego el cuadrilátero BI_1I_4A es inscriptible.

$\Rightarrow m\sphericalangle I_1I_4P=\alpha$

* Análogamente, el cuadrilátero AI_4I_3D es inscriptible

$\Rightarrow m\sphericalangle PI_4I_3=\beta$

* Pero en el cuadrilátero inscrito *ABCD:*

$2\alpha+2\beta=180°\Rightarrow \alpha+\beta=90°$

* Así se demuestra que cada ángulo del cuadrilátero $I_1I_2I_3I_4$ es recto.

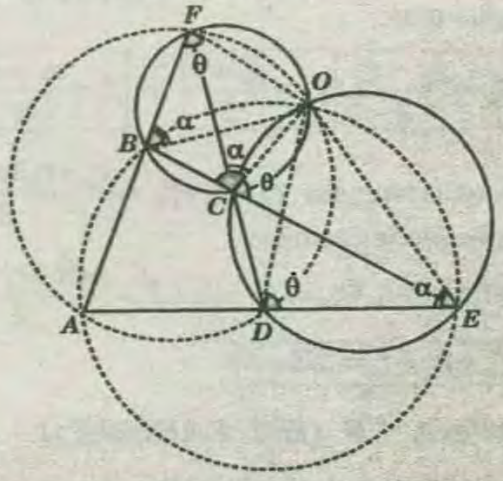
* En consecuencia:

El cuadrilátero $I_1I_2I_3I_4$ es un rectángulo

TEOREMA 18:

Las circunferencias circunscritas a los cuatros triángulos determinados por los lados de un cuadrilátero completo, son concurrentes en un punto.

DEMOSTRACIÓN:



Sea *ABCDEF* el cuadrilátero completo.

* Las circunferencias circunscritas a los triángulos *BFC* y *DCE* se intersectan en *O*. Para demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos *AFD* y *ABE* pasan por el punto *O*, basta demostrar que los cuadriláteros *AFOD* y *ABOE* sean inscriptibles.

* En la figura ; si :

$m\sphericalangle FBO=m\sphericalangle FCO=\alpha\Rightarrow m\sphericalangle E=\alpha$

* El cuadrilátero *ABOE* es inscriptible.

* También ; si :

$m\sphericalangle F=m\sphericalangle OCE=\theta\Rightarrow m\sphericalangle ODE=\theta$

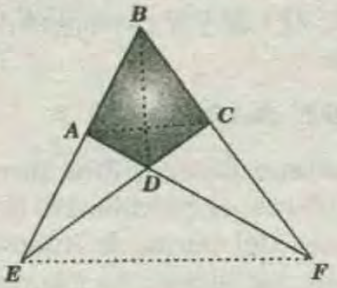
* El cuadrilátero *AFOD* es inscriptible

* Lo cual demuestra que :

Las circunferencias son concurrentes en el punto *O*

OBSERVACIÓN:

Se llama CUADRILÁTERO COMPLETO, la figura obtenida prolongando hasta que se intersecten los lados opuestos de un cuadrilátero ordinario.



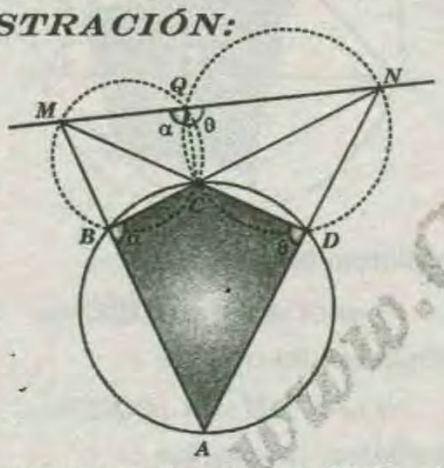
Diagonales:

$\overline{AC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{EF}$

TEOREMA 19:

Dado un cuadrilátero inscrito *ABCD*, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ se intersectan en *M* y los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ en *N*. El punto de interseción de las circunferencias circunscritas a triángulos *BMC* y *DNC* con los puntos *M* y *N*, están en línea recta .

DEMOSTRACIÓN:



* Para demostrar que los puntos *M*, *Q* y *N* están en línea recta ; será suficiente que las medidas de los ángulos *MQC* y *CQN* sumen *180°*.

Si $m\sphericalangle MQC=\alpha \Rightarrow m\sphericalangle CBA=\alpha$

Si $m\sphericalangle CQN=\theta \Rightarrow m\sphericalangle CBA=\theta$

* En el cuadrilátero inscrito *ABCD* : $\alpha+\theta=180°$

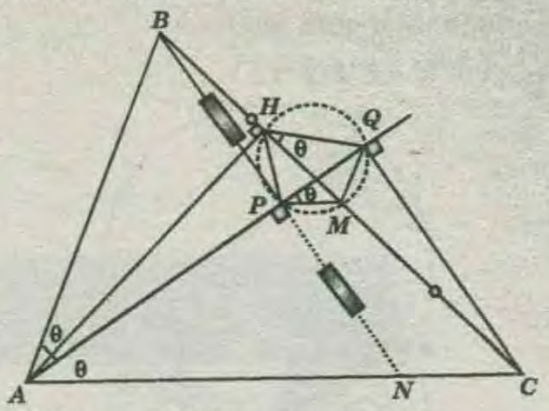
* Lo cual demuestra que :

Los puntos *M*, *Q* y *N* son colineales

TEOREMA 20:

Por los vértices *B* y *C* de un triángulo *ABC* se trazan perpendiculares $\overline{BP}$ y $\overline{CQ}$ a la bisectriz interior del ángulo *A*. El pie de la altura trazada por *A*, el punto medio del lado *BC* y los puntos *P* y *Q* forman un cuadrilátero inscriptible.

DEMOSTRACIÓN:



* El cuadrilátero *AHQC* es inscriptible:

$\Rightarrow m\sphericalangle CHQ=m\sphericalangle QAC=\theta$

* En el ΔNBC : $\overline{PM} \parallel \overline{AC}$ ($\overline{PM}$: base media)

$\Rightarrow m\sphericalangle QPN=m\sphericalangle PAN=\theta$ *(Por ∢s correspondientes)*

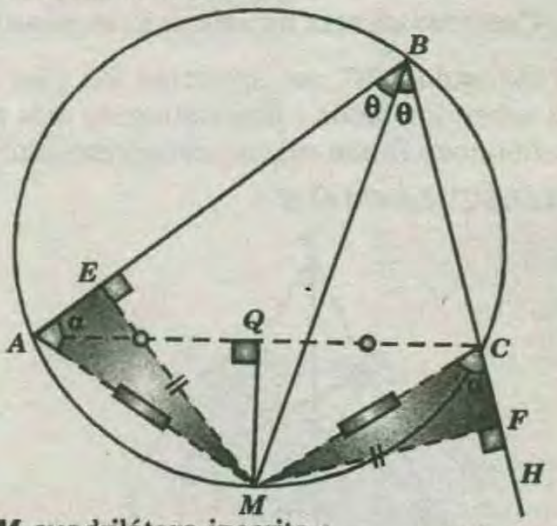
* En consecuencia :

El cuadrilátero *PHQM* es inscriptible

TEOREMA 21:

La bisectriz del ángulo de un triángulo se intersecta con la mediatriz del lado opuesto en la circunferencia circunscrita al triángulo.

DEMOSTRACIÓN:



* *ABCM* cuadrilátero inscrito :

$\Rightarrow m\sphericalangle A=m\sphericalangle MCH=\alpha$

* Por teorema de la bisectriz de un ángulo: $ME=MF$

$\triangle AEM \cong \triangle MFC(ALA) \Rightarrow AM=MC$

* En el ΔAMC isósceles : $\overline{MQ}$ es mediatriz de $\overline{AC}$

Esto demuestra que : *M* está en la circunferencia que pasa por *A; B* y *C*.

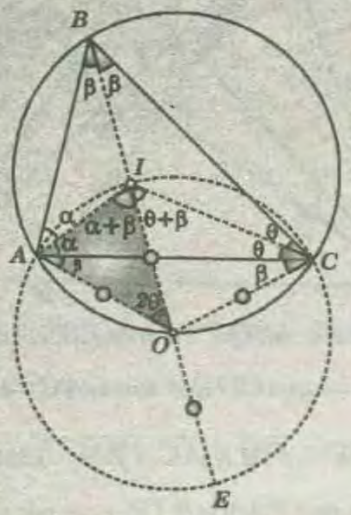
TEOREMA 22 (DE MENTION):

En un triángulo *ABC* , la circunferencia determinada por los vértices *A* y *C*, el incentro y el excentro relativo

WWW.GRATIS.COM

al lado $\overline{AC}$, tiene su centro en la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

DEMOSTRACIÓN:



$\Delta ABC: 2\alpha+2\beta+2\theta=180° \Rightarrow 2\theta=180°-2(\alpha+\beta)$.....(I)

ΔAOI isósceles : $m\sphericalangle AOI=180°-2(\alpha+\beta)$.....(II)

* De (I) y (II) : $m\sphericalangle AOI=2\theta$ ($\sphericalangle$ central)

Esto demuestra que :

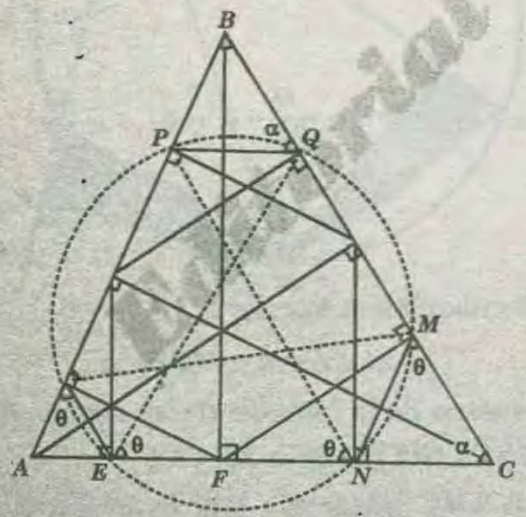
"O" es el centro de la circunferencia que pasa por A; I; C y E

TEOREMA 23 (DE TAYLOR)

(CIRCUNFERENCIA DE LOS SEIS PUNTOS)

En un triángulo ABC, se proyectan los pies de las alturas sobre los lados , determinando seis puntos que pertenecen a una misma circunferencia.

DEMOSTRACIÓN:



* Para demostrar que los puntos E; F; P; Q; M y N pertenecen a una misma circunferencia bastará demostrar que los cuadrilátero FPQM, EQMN y EFPN sean inscriptibles.

* Por las propiedades anteriores :

$AFMC$ cuadrilátero inscriptible

$\Rightarrow m\sphericalangle C=m\sphericalangle BFM=\alpha$

* También : $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$

$\Rightarrow m\sphericalangle BQP=m\sphericalangle C=\alpha$

* Luego el cuadrilátero $FPQM$ es inscriptible.

Análogamente, los cuadriláteros :

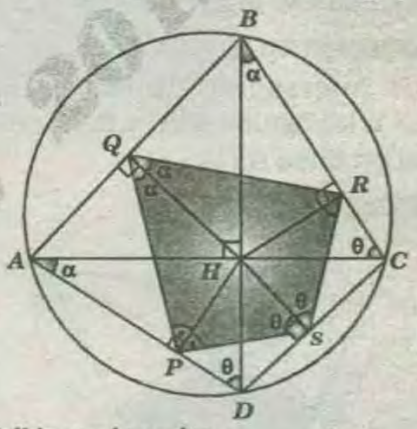
$EQMN$ y $EFPN$ son inscriptibles. En consecuencia:

Los puntos: E ; F ; P ; Q ; M y N pertenecen a una misma circunferencia.

TEOREMA 24 (DE SANCERY) :

Cuando un cuadrilátero inscriptible tiene sus diagonales perpendiculares , el cuadrilátero formado al unir las proyecciones del punto de intersección de las diagonales sobre los lados , es inscriptible y circunscriptible a la vez .

DEMOSTRACIÓN:



$ABCD$ cuadrilátero inscrito :

$\Rightarrow m\sphericalangle CAD=m\sphericalangle DBC=\alpha$

$AQHP$ cuadrilátero inscriptible :

$\Rightarrow m\sphericalangle PAH=m\sphericalangle PQH=\alpha$

$QBRH$ cuadrilátero inscriptible :

$\Rightarrow m\sphericalangle RQH=m\sphericalangle HBR=\alpha$

* Luego : $\overline{QH}$ es bisectriz del ángulo PQR

Análogamente : $m\sphericalangle PSH=m\sphericalangle HSR=\theta$

* Luego $\overline{SH}$ es bisectriz del $\sphericalangle PSR$

También : $\overline{RH}$ y $\overline{PH}$ son bisectrices de los ángulos QRS y QPS respectivamente.

* Esto demuestra que el cuadrilátero $PQRS$ es circunscriptible a una circunferencia de centro "H".

$\triangle BHC$: $\alpha+\theta=90° \Rightarrow 2\alpha+2\theta=180°$

* En el cuadrilátero $PQRS$:

$m\sphericalangle Q+m\sphericalangle S=2\alpha+2\theta=180°$

Esto demuestra que el cuadrilátero $PQRS$ es inscriptible.

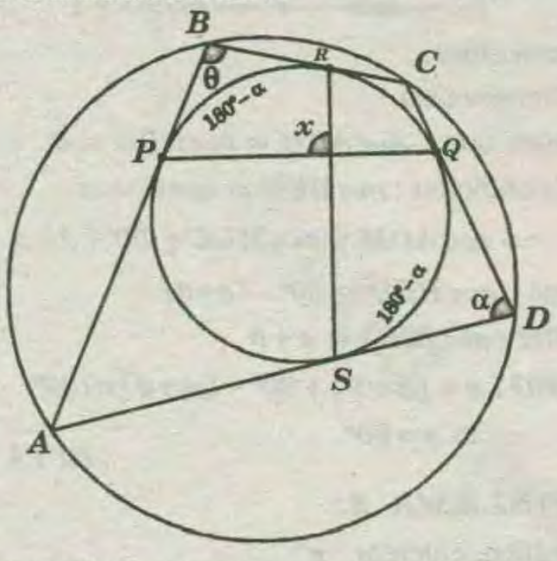
* En consecuencia :

El cuadrilátero ***PQRS*** es inscriptible y circunscriptible a las vez .

TEOREMA 25 :

Cuando un cuadrilátero es inscrito a una circunferencia y circunscrito a otra . Los segmentos que unen los puntos de tangencia de los lados opuestos con la circunferencia inscrita , son perpendiculares una a otra .

DEMOSTRACIÓN:



ABCD cuadrilátero inscrito y circunscrito , se cumple:

$$\alpha+\theta=180° \quad \text{.....(I)}$$

$$\left.\begin{array}{l} m\overset{\frown}{PR}=180°-\theta \\ m\overset{\frown}{SQ}=180°-\alpha \end{array}\right\} \text{.....(II)}$$

Ángulo interior :

$$x=\frac{m\overset{\frown}{PR}=m\overset{\frown}{SQ}}{2} \text{.....(III)}$$

* Reemplazando *(II)* en *(III)* :

$$x=\frac{180°-\theta+180°-\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{360°-(\alpha+\theta)}{2} \text{.....(IV)}$$

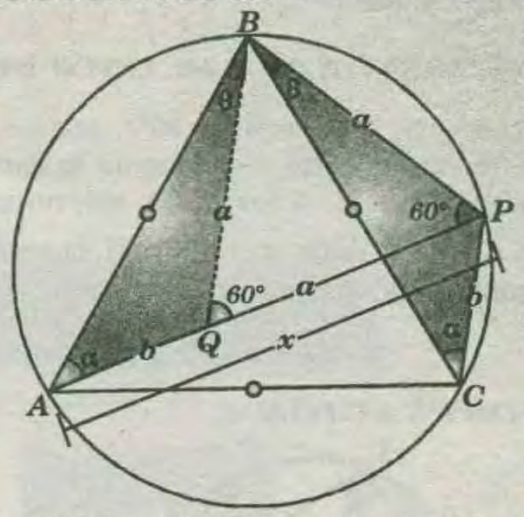
* Reemplazando *(I)* en *(IV)*:

$$x=\frac{360°-180°}{2} \Rightarrow x=\frac{180°}{2} \Rightarrow x=90°$$

TEOREMA 26 (DE CHADÚ):

Cuando un triángulo equilátero ***ABC*** está inscrito en una circunferencia , la distancia de un punto cualquiera del arco ***BC*** al vértice ***A*** , es igual a la suma de las distancias de dicho punto a los vértices ***B*** y ***C***.

DEMOSTRACIÓN:



* En el ΔBPC: $\alpha+\theta=60°$ .....*(I)*

* En el ΔBPC, se traza $\overline{BQ}$, de modo que la $m\sphericalangle ABQ=\theta$.

* Resulta : $\Delta BPC \cong \Delta BQA$ *(ALA)*

$\Rightarrow BQ=BP=a$ y $AQ=PC=b$

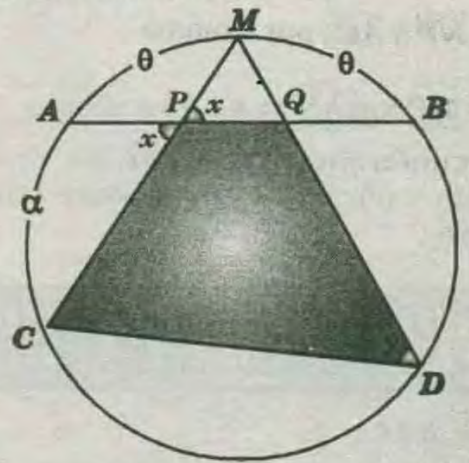
* El ΔQBP es equilátero : $BQ=BP=QP=a$

* En consecuencia : $x=a+b$

TEOREMA 27:

Cuando por el punto medio ***M*** de un arco $\overset{\frown}{AB}$ se trazan dos cuerdas $\overline{MC}$ y $\overline{MD}$ que intersectan a la cuerda $\overline{AB}$ en ***P*** y ***Q***. El cuadrilátero ***PQDC*** es inscriptible.

DEMOSTRACIÓN :



* Sabemos que : $x=\frac{\alpha+\theta}{2}$ *(∢ interior)*

* También : $y=\frac{\alpha+\theta}{2}$ *(∢ inscrito)*

* Luego : $x=y$

* En consecuencia :

El cuadrilátero ***PQDC*** es inscriptible.

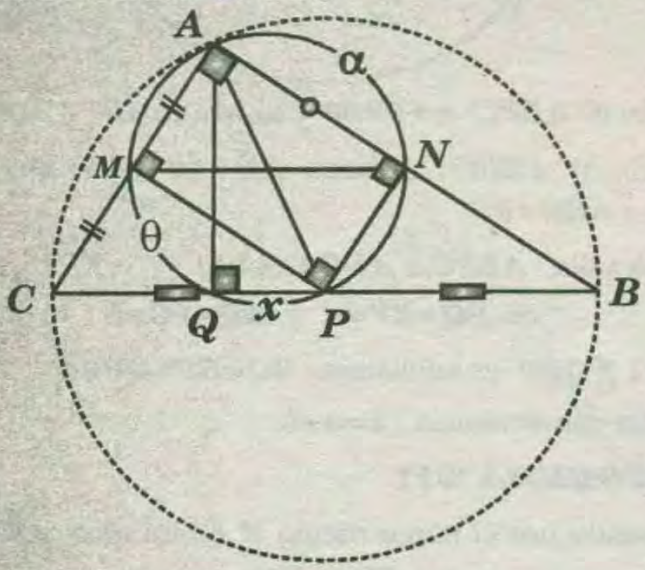
TEOREMA 28:

CIRCUNFERENCIA DE LOS CINCO PUNTOS

En un triángulo $BAC(m\sphericalangle A=90°)$, por los puntos medios de los tres lados del triángulo se hace pasar una circunferencia, si los arcos exteriores a los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ mide α y $\theta(\alpha>\theta)$, la medida del arco exterior hipotenusa es :

$$\boxed{x=\alpha-\theta}$$

DEMOSTRACIÓN:



* En la figura observamos que :

$$\overline{PM}\parallel\overline{AB} \text{ y } \overline{NP}\parallel\overline{AC} \text{ (T.P.M.)}$$

*$ANPM$ es un rectángulo inscrito en la circunferencia.

Ahora si $\overline{NP}\parallel\overline{AC}$, por teorema :

$$m\overset{\frown}{MP}=m\overset{\frown}{AN}\Rightarrow x+\theta=\alpha\Rightarrow \boxed{x=\alpha-\theta}$$

* La circunferencia pasa por los vértices del rectángulo y por el pie de la altura relativa a la hipotenusa .

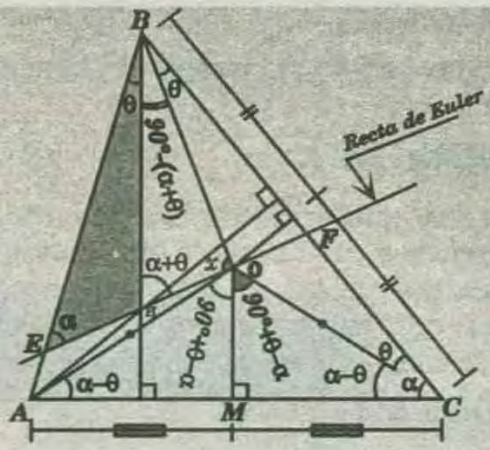
PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

En un triángulo acutángulo ABC, la recta de Euler determina con sus lados un cuadrilátero inscriptible. Calcule la medida del ángulo que forma dicha recta de Euler y el diámetro que pasa por el vértice de donde parten los lados que intersectan a la recta de Euler.

A) 60° B) 75° C) 80° D) 90° E) 95°

RESOLUCIÓN:



H : Ortocentro

O : Circuncentro

Sabemos que : $m\sphericalangle ABH = m\sphericalangle OBC = \theta$

* Por condición : $m\sphericalangle BEH = m\sphericalangle C = \alpha$

$$\Rightarrow m\sphericalangle AOM = m\sphericalangle MOC = 90°+\theta-\alpha$$

* Luego : $m\sphericalangle HBO = 90°-(\alpha+\theta)$

* $\Delta EBH : m\sphericalangle BHO = \alpha+\theta$

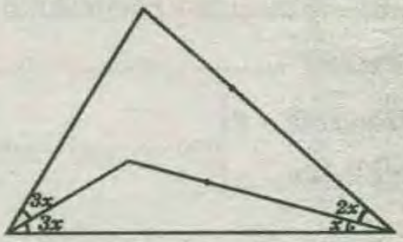
* $\Delta HBD : x+\cancel{(\alpha+\theta)}+90°-\cancel{(\alpha+\theta)}=180°$

$$\Rightarrow x=90°$$

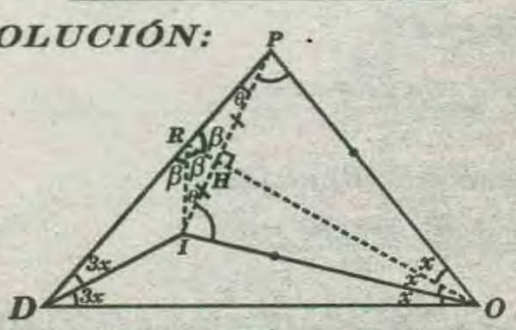
RPTA : "D"

PROBLEMA 2:

Del gráfico, calcular "x"



RESOLUCIÓN:



En el ΔPOI, se traza $\overline{OH}$ altura .

* Entonces : $m\sphericalangle IOH=m\sphericalangle POH=x$

En el $\Delta DRO(I\rightarrow$ incentro$)$

* Entonces : $m\sphericalangle DRI=m\sphericalangle IRO=\beta$

En el ΔPRI isósceles $m\sphericalangle IRH=m\sphericalangle PRH=\beta$

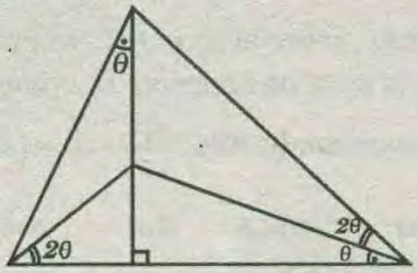
Luego : $3\beta=180°\Rightarrow\beta=60°$

Finalmente en el ΔPRI . Por $\sphericalangle$ exterior

$$2\theta=60°\Rightarrow\theta=30°$$

PROBLEMA 3:

Del gráfico, hallar "θ"



RESOLUCIÓN:

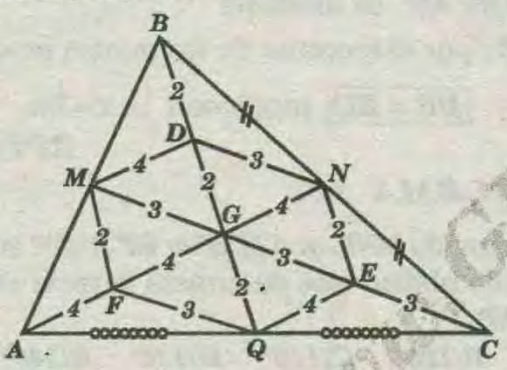
* Al prolongar $\overline{OH}$ hasta *"E"*, por simple inspección se deduce que *"H"* es el ortocentro de ΔDRO.

* Análogamente se prolonga $\overline{DH}$ hasta *"U"*, luego en el $\triangle DUO$: $2\theta+\theta+2\theta=90° \Rightarrow \theta=18°$

PROBLEMA 4:

En un triángulo *ABC* las medianas $\overline{AN}$; $\overline{BQ}$ y $\overline{CM}$ se intersectan en el punto *G*, sean *D;E* y *F* puntos medios de $\overline{BG}$; $\overline{CG}$ y $\overline{AG}$. Hallar el perímetro del exágono *MDNEQF*, si : $AN=12$, $BQ=6$ y $CM=9$.

RESOLUCIÓN:



* Sea *"x"* el perímetro del exágono *MDNEQF*

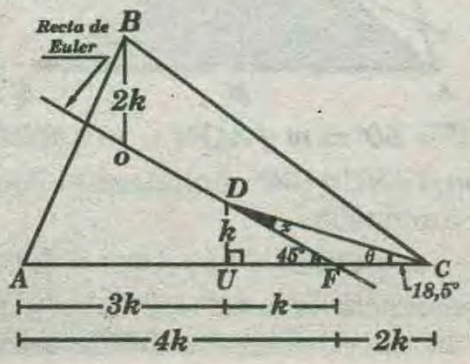
* Luego : $x=4+3+2+4+3+2 \Rightarrow x=18$

PROBLEMA 5:

En un triángulo *ABC* acutángulo de ortocentro *O*, la recta de Euler corta en el punto *F* al $\overline{AD}$. Calcular $m\sphericalangle FDC$.

Si : $AF=2FC=2OB$ ($D \Rightarrow$ circunCentro)

RESOLUCIÓN:



En el ΔABC . Por propiedad ortocentro y circuncentro

$BO=2\times DU=K$

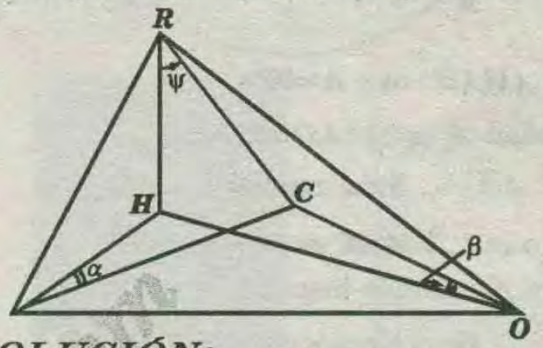
* En el $\triangle DUC$: $\theta=18,5°$

* Ahora en el ΔDFC Por $\sphericalangle$ exterior .

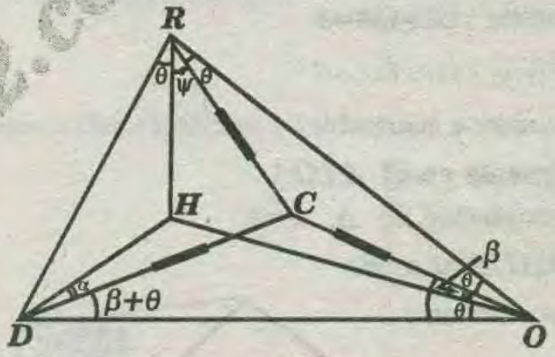
$\theta+x=45° \Rightarrow 18,5°+x=45° \Rightarrow x=26,5°$

PROBLEMA 6:

En la figura *"H"* es ortocentro y *"C"* el circuncentro del ΔDRO, calcular "Ψ", si : $\alpha+\beta=38°$



RESOLUCIÓN:



* Dato : $\alpha+\beta-38°$

* Por propiedad de ortocentro y circuncentro.

$m\sphericalangle DRH=m\sphericalangle CRO=m\sphericalangle COR=\theta$

* Por propiedad del ortocentro.

$m\sphericalangle DRH=m\sphericalangle DOH=\theta$

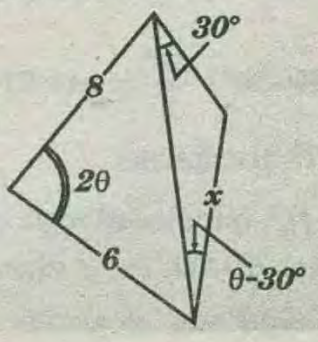
* En el ΔDCO Isósceles $m\sphericalangle D=m\sphericalangle O=\beta+\theta$

* Finalmente por propiedad de ortocentro:

$\Psi+\theta=\alpha+\beta+\theta \Rightarrow \Psi=\alpha+\beta \Rightarrow \psi=38°$

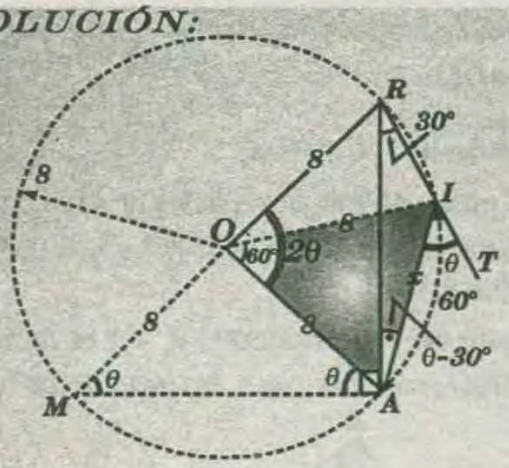
PROBLEMA 7:

Del gráfico, calcular *"x"*.



WWW.GRATIS2.COM

RESOLUCIÓN:



* En el ΔMAR: $m\sphericalangle A=90°$

(Propiedad Δ_s: $MO=AO=RO=8$)

* En el ΔRIA. Por $\sphericalangle$ exterior : $m\sphericalangle TIA=\theta$

* Luego el $\square$ $MAIR$ es inscriptible.

* Ahora por simple inspección:

$O \Rightarrow$ circuncentro del ΔMAR

* Entonces : $OI=OA=8$

* Luego:

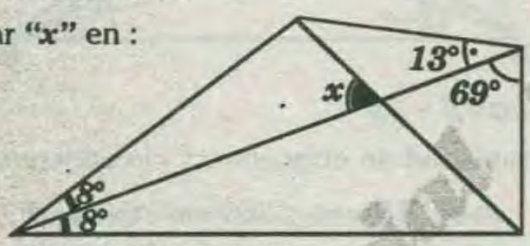
$m\overset{\frown}{IA}=60°$($\sphericalangle$ inscriptible) y $m\sphericalangle AOI=60°$($\sphericalangle$ central)

* Finalmente en el ΔIOA.

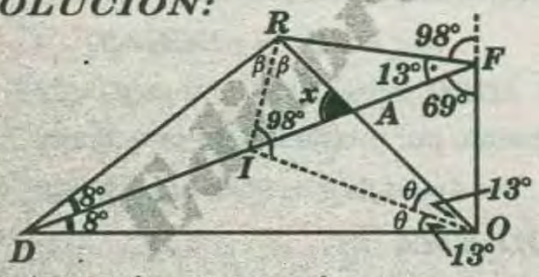
* Por propiedad de Δ_s. $x=8$

PROBLEMA 8:

Calcular "x" en :



RESOLUCIÓN:



* En el ΔDRO ($I \Rightarrow$ incentro)

* Entonces :

$$m\sphericalangle RIO=90°+\frac{16°}{2} \Rightarrow m\sphericalangle RIO=98°$$

* En el $\square$ $FRIO$ inscriptible.

* Se tiene : $\theta=13°$ (propiedad regla del rebote)

* Finalmente en el ΔDAO. Por $\sphericalangle$ exterior .

$$x=8°+26° \Rightarrow x=34°$$

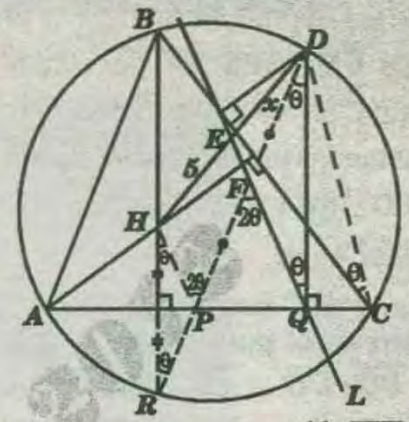
PROBLEMA 9:

En un triángulo acutángulo ABC inscrito en una circunferencia , sobre el arco $\overset{\frown}{BC}$, se ubica el punto D y se traza la recta de Simpson. $\vec{L}$, correspondiente.

Si H es el ortocentro de ABC, $\overline{HD} \cap \vec{L} = \{E\}$, si $HE=5$. Halle ED.

A)3 B)4 C)4,5 D)5 E)6

RESOLUCIÓN:



* En la figura observamos que : $\vec{L} // \overline{HP}$

* $\triangle$ DQP: $\overline{QF}$ es mediana

* $DHDP$; por el teorema de los puntos medios :

$\boxed{HE=ED}$ propiedad $\Rightarrow x=5m$

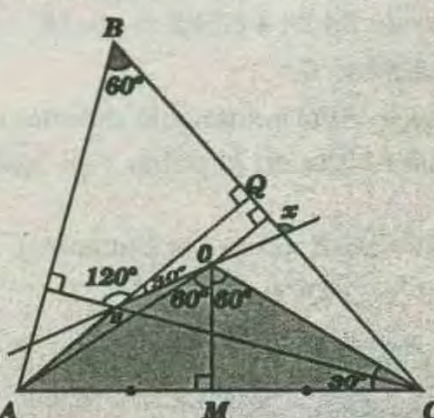
RPTA : "D"

PROBLEMA 10:

En un triángulo MNP, $m\sphericalangle MNP = 60°$. Halle la medida del ángulo obtuso que determina la recta Euler con el lado NP.

A)110° B)120° C)115° D)110° E)140°

RESOLUCIÓN:



* Si $m\sphericalangle B = 60° \Rightarrow m\sphericalangle AOM = m\sphericalangle MOC = 60°$

* Pero : $m\sphericalangle AHC=120°$; entonces el caudrilátero $AHOC$ es inscriptible.

$\Rightarrow m\sphericalangle QHO = m\sphericalangle ACO = 30°$

* En consecuencia : $x = 90° + 30° \Rightarrow x = 120°$

RPTA : "B"

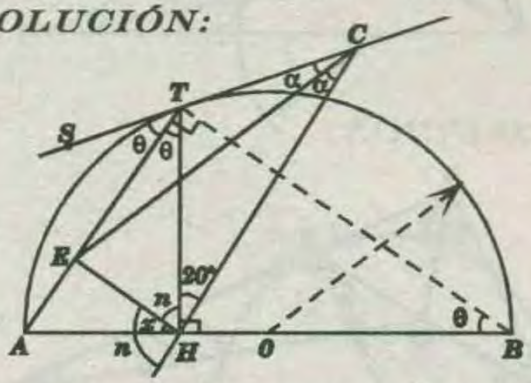
PROBLEMA 11:

Se tiene una semicircunferencia de diámetro AB; H y T son puntos de diámetro y de la semicircunferencia respectivamente tal que $\overline{HT} \perp \overline{AB}$, por T y H pasan una recta tangente y una recta secante que se intersectan en C. Si desde el ángulo TCH se traza una bisectriz que intersecta a $\overline{AT}$ en E.

Si $m\sphericalangle CHB = 70$. Halle $m\sphericalangle AHE$.

A)5 B)10 C)15 D)20 E)25

RESOLUCIÓN:



$\overline{TA}$ es bisectriz del ángulo STH.

$\overline{CE}$ es bisectriz del ángulo TCH.

E es excentro del triángulo HTC relativo al aldo $\overline{TH}$.

$\Rightarrow \overline{HE}$ es bisectriz exterior.

* Luego : $n + n + 20° = 180° \Rightarrow 2n = 160°$

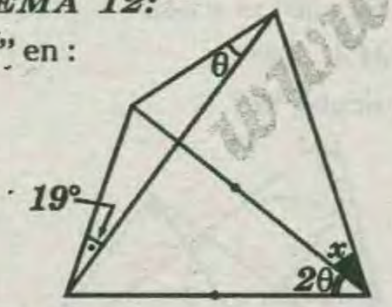
$\Rightarrow n = 80°$

* $\overline{TH} \perp \overline{AB} \Rightarrow x + 8° = 90° \Rightarrow x = 10°$

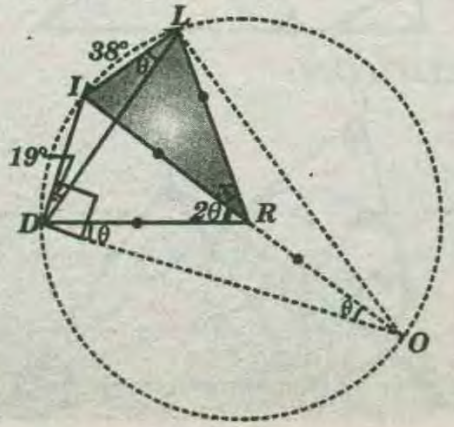
RPTA : "B"

PROBLEMA 12:

Calcular "x" en :



RESOLUCIÓN:



* El $\square DILO$ es incriptible . Por lo tanto $D; I; L; O$ son puntos de la $\odot$ de centros "R".

* Luego "R" es circuncentro del $\triangle DIL$, entonces:

$$IR = LR = \bullet$$

* Por $\sphericalangle$ inscrito : $m\overset{\frown}{LT} = 38°$:

* Finalmente por $\sphericalangle$ central $x = 38°$.

PROBLEMA 13:

Dado el triángulo ABC, donde la $m\sphericalangle BAC = 32°$ y la $m\sphericalangle ACB = 88°$. Además O, I y H son el circuncentro, incentro y ortocentro respectivamente.

Halle la $m\sphericalangle OIH$.

A)150° B)151° C)152° D)153° E)155°

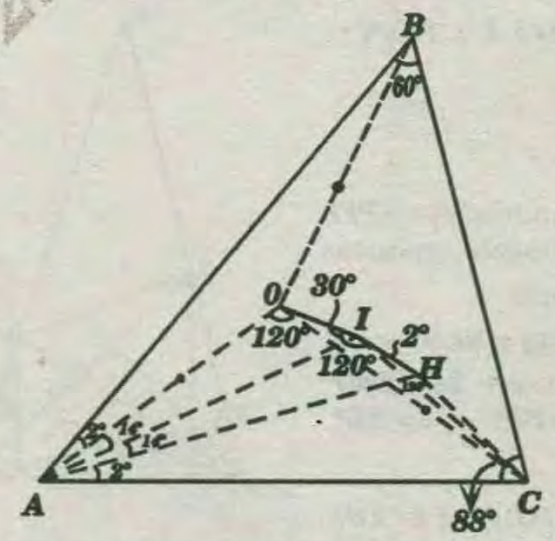
RESOLUCIÓN:

* Por teoría, si $m\sphericalangle ABC = 60°$

$$\Rightarrow m\sphericalangle AOC = 2(60°) = 120°$$

* Por propiedad :

$$m\sphericalangle AIC = 90° + \frac{60°}{2} = 120°$$



* Ahora : $m\sphericalangle AHC = 180° - 60° = 120°$

* Esto demuestra que los cuadriláteros inscriptibles son: $AOIC$ y $AIHC$, es decir , los puntos A, O, I, H y C estan ubicados en una misma circunferencia .

*Luego : $m\sphericalangle OIH = 30° + 120° + 2°$

$$\Rightarrow m\sphericalangle OIH = 152°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 14:

Con un cuadrilátero $ABCD$, la $m\sphericalangle DBA = 20°$, $m\sphericalangle CDB = 80°$, la $m\sphericalangle CDB = 70°$ y la $m\sphericalangle BDA = 40°$.

Cacular $m\sphericalangle ACD$.

A)8° B)10° C)12° D)15° E)20°

RESOLUCIÓN:

WWW.GRATIS2.COM

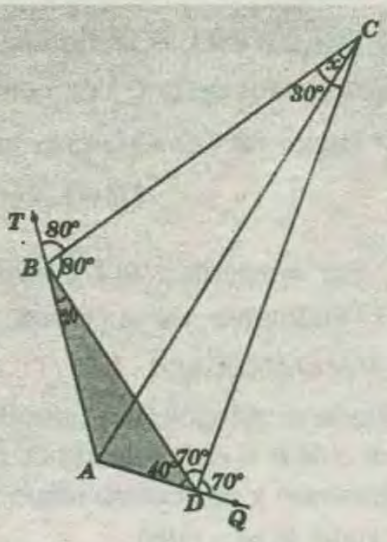
$\overrightarrow{BC}$ bisectriz del ángulo TBD.

$\overrightarrow{DC}$ bisectriz del ángulo BDQ.

* Entonces , «C» es el excentro del triángulo ABD, relativo al lado $\overline{BD}$.

* Por propiedad :

$$x = \frac{40^\circ}{2} \Rightarrow x = 20^\circ$$

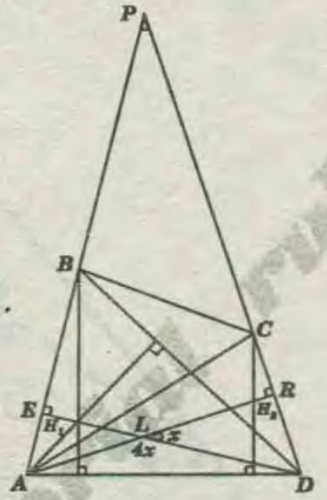


RPTA : "E"

PROBLEMA 15:

Dado un trapezoide $ABCD$, H_1 y H_2 son ortocentros de las regiones ABD y ACD respectivamente . Si $\overline{AH_2} \cap \overline{DH_1} = \{L\}$; las prolongaciones de AB y DC se intersecan en P; H_1BCH_2 es un romboide y $m\sphericalangle ALD = 4(m\sphericalangle APD)$, calcule $m\sphericalangle BPC$.

RESOLUCIÓN:



* El cuadrilátero $EPFL$ es inscriptible, entonces se cumple :

$m\sphericalangle P = m\sphericalangle RLD = x$

* Luego : $x + 4x = 180^\circ$

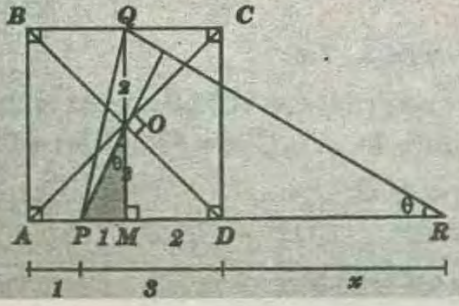
$\Rightarrow 5x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$

PROBLEMA 16:

Se tiene un cuadrado $ABCD$ en $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ y en la prolongación de AD se ubican los puntos Q, P y R respectivamente, tal que el centro del cuadrado es el ortocentro del triángulo PQR. Si $AP = 1$ y $PD = 3$, calcule RD.

A) 15 B) 6 C) 7 D) 38 E) 10

RESOLUCIÓN:

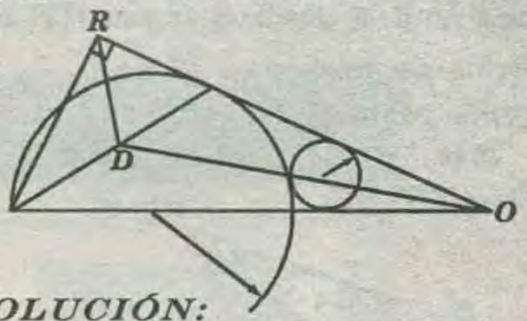


* $\triangle QMR \sim \triangle PMO$: $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{4}{1} \Rightarrow x = 6$

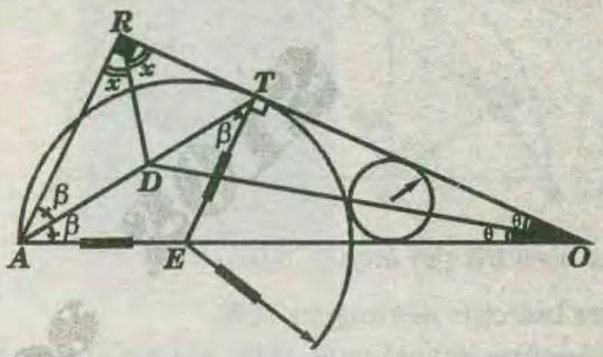
RPTA : "B"

PROBLEMA 17:

En la figura , calcular $m\sphericalangle DRO$



RESOLUCIÓN:



* Por $\odot$: $m\sphericalangle DOR = m\sphericalangle ADO = \theta$

* En el ΔTEA:

$m\sphericalangle TAE = m\sphericalangle ETA = \beta$ y $m\sphericalangle RAT = m\sphericalangle TAE = \beta$

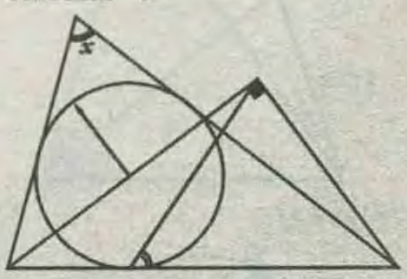
$(\overrightarrow{AR} // \overrightarrow{TE})$

* Ahora en el ΔDRO ($D \Rightarrow$ Incentro)

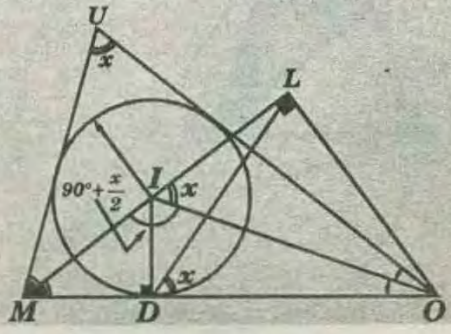
* Entonces : $2x = 90^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$

PROBLEMA 18:

Del gráfico, calcular "x"



RESOLUCIÓN:



* En el $\triangle DILO$ inscriptible :

$$m\sphericalangle ODL = m\sphericalangle LIO = x$$

* Ahora en el $\triangle UMO$ ($I \rightarrow$ Incentro)

* Entonces : $m\sphericalangle MIO = 90° + \frac{x}{2}$

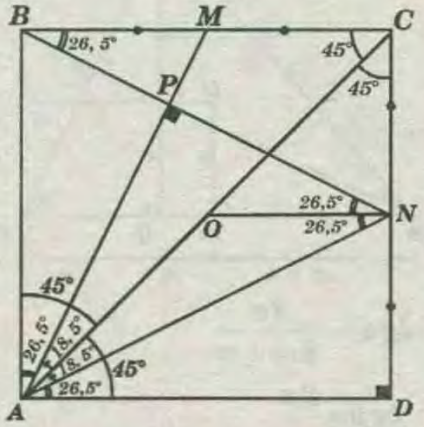
* Luego : $90° + \frac{x}{2} + x = 180° \Rightarrow x = 60°$

PROBLEMA 19:

En un cuadrado $ABCD$, M y N son puntos medios de los lados BC y CD, P es intersección de $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$. Entonces el centro del cuadrado es el.....del triángulo APN.

RESOLUCIÓN :

* Sea el gráfico :



* Por cuadrilátero : $m\sphericalangle BPM = 90°$ (propiedad)

* Además : $m\sphericalangle PNA = 53°$.

* Ahora : $m\sphericalangle DAO = m\sphericalangle BAO = 45°$

($O \Rightarrow$ centro del $\triangle ABCD$)

* Luego por simple inspección : $m\sphericalangle NAO = 18{,}5°$

* Finalmente en el $\triangle APN$: $O \Rightarrow$ Incentro

PROBLEMA 20:

En un cuadrilátero convexo $ABCD$ las diagonales se intersecan en E.

Si se cumple

$m\sphericalangle AEB = m\sphericalangle BCD$, $m\sphericalangle EAB = 3\alpha$; ($m\sphericalangle EAD$) y $AB = AD$,

calcule : $m\sphericalangle DBC$.

RESOLUCIÓN:

* $\triangle AME$: $\alpha + \theta = 90°$

* $\triangle DNC$: $m\sphericalangle NDC = \alpha$

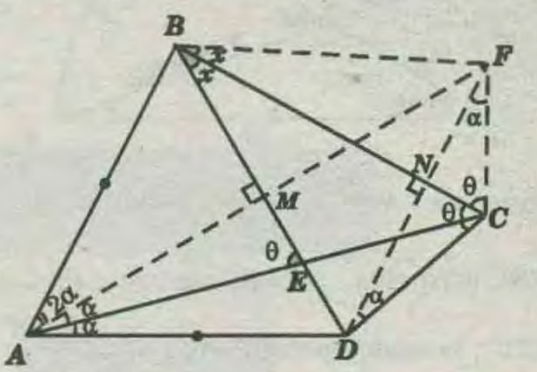
* El cuadrilátero $AFCD$ es inscriptible.

$$\Rightarrow m\sphericalangle DFC = m\sphericalangle FDC = \alpha$$

$\overline{BC}$ es mdiatriz de $\overline{FD}$

$\Rightarrow BD = BF$ y como $BF = FD$.

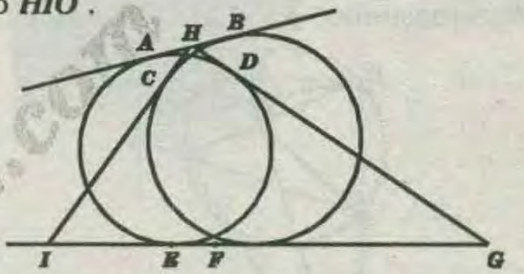
* Luego : $2x = 60° \Rightarrow x = 30°$



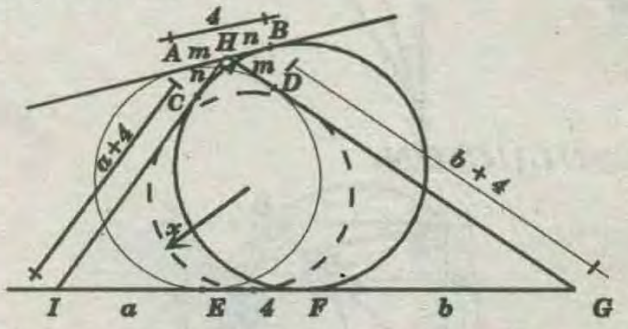
PROBLEMA 21:

En el gráfico A, B, C, D, E y F son puntos de tangencia. Si $EF = 4$ y $m\sphericalangle IHO = 90°$, calcule el inradio del triángulo HIO .

A) 0,5
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4



RESOLUCIÓN:



* Por tangentes : $HA = HD = m$ y $HB = HC = n$

* Por dato : $EF = AB = m + n = 4$

* $\triangle IHG$; por el teorema de Poncelet :

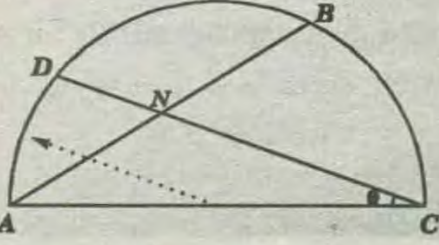
$$a + 4 + n + b + 4 + m = a + b + 4 + 2x$$

$$\Rightarrow 4 + m + n = 2x \Rightarrow 4 + 4 = 2x \Rightarrow x = 4$$

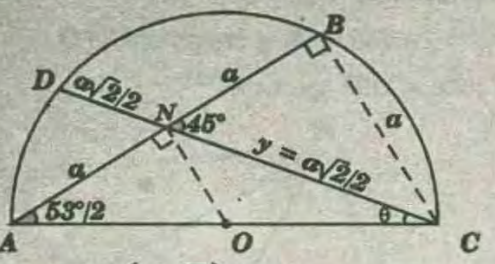
RPTA : "E"

PROBLEMA 22:

Calcule θ, si $2(ND) = \sqrt{2}(AN) = \sqrt{2}(NB)$



RESOLUCIÓN 53: **RPTA : "A"**



* Por teorema : $y\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)=a^2 \Rightarrow y=a\sqrt{2}$

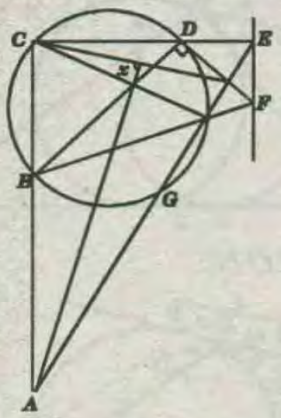
* $\triangle NBC$ isósceles : $NB=BC=a$, $m\sphericalangle BNC=45°$

* $\triangle ABC$; notable aproximado : $m\sphericalangle A=\frac{53°}{2}$

* ΔANC : $\theta+\frac{53°}{2}=45° \Rightarrow \theta=\frac{37°}{2}$

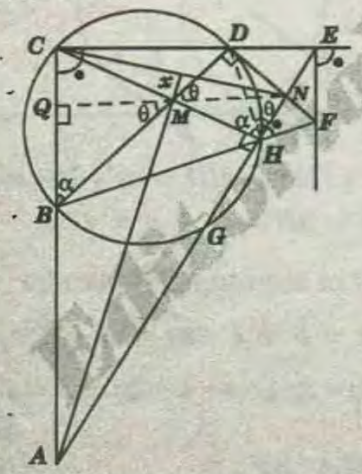
PROBLEMA 23:

Del gráfico mostrado, $\overline{EF}\,//\,\overline{AC}$. Calcule x.



A) 90°
B) 45°
C) 120°
D) 60°
E) 80°

RESOLUCIÓN:



Si : $\overline{EF}//\overline{AC} \Rightarrow m\sphericalangle ECB = m\sphericalangle TEF$

Pero: $m\sphericalangle OHF = m\sphericalangle DCB \Rightarrow \overline{CH}\perp\overline{AE}$

En el cuadrilátero inscriptible $MDNH$: $\alpha+\theta=90°$

* En el ΔBQM , como $\alpha+\theta=90°$ entonces :

$$\overline{NMQ}\perp\overline{CB}$$

* ΔACN : M es ortocentro.

* En consecuencia : $x=90°$

PROBLEMA 24:

En un triángulo ABC la recta de Euler es paralela a $\overline{AC}$.

Si $m\sphericalangle BAC=\alpha$ y $m\sphericalangle ACB=\beta$, calcule $\tan\alpha\tan\beta$

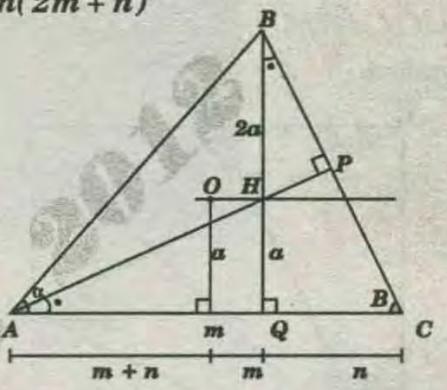
A) 1 B) 2 C) 3 D) 3/4 E) 4/3

RESOLUCIÓN:

$\triangle BQC \sim \triangle AQH$

$$\Rightarrow \frac{n}{a}=\frac{3a}{2m+n} \Rightarrow n(2m+n)=3a^2$$

$$\Rightarrow \frac{3a^2}{n(2m+n)}=1 \quad \text{.....(I)}$$



* $\triangle ABQ$: $tg\alpha=\frac{3a}{2m+n}$

* $\triangle BQC$: $tg\beta=\frac{3a}{n}$

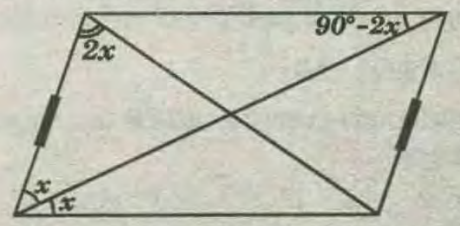
* Multiplicando : $tg\alpha tg\beta=3\left[\frac{3a^2}{n(2m+n)}\right]$ .....(II)

* De (I) y (II): $tg\alpha tg\beta=3$

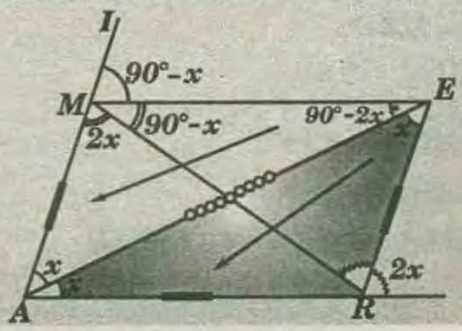
RPTA : "C"

PROBLEMA 25:

En la figura mostrada , calcular "x"



RESOLUCIÓN:



* En el ΔAME . Por $\sphericalangle$ exterior : $m\sphericalangle IME=90°-x$

y por simple inspección : $m\sphericalangle RME=90°-x$

* En el ΔMAR ($E \Rightarrow$ excentro)

Luego: $m\sphericalangle REA=x$ (propiedad)

$$\Delta AME \cong \Delta ARE (L-A-L)$$

* Es decir ——x——

* Entonces : $x=90°-2x \Rightarrow x=30°$

PROBLEMA 26:

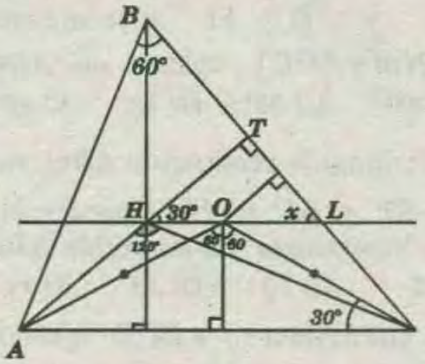
En un triángulo ABC , $m\sphericalangle BC=60°$.

Calcule la medida del ángulo determinado por la recta de Euler y $\overline{BC}$.

A) 60° B) 45° C) 30° D) 75° E) 54°

RESOLUCIÓN:

H: Ortocentro $\Rightarrow m\sphericalangle AHC=120°$



O : Circuncentro $\Rightarrow m\sphericalangle AOC=120°$

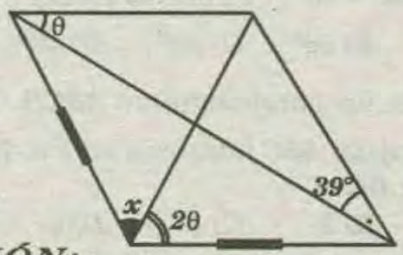
$AHOC$ es inscriptible $\Rightarrow m\sphericalangle THL=30°$

* $\triangle HTL : x=60°$

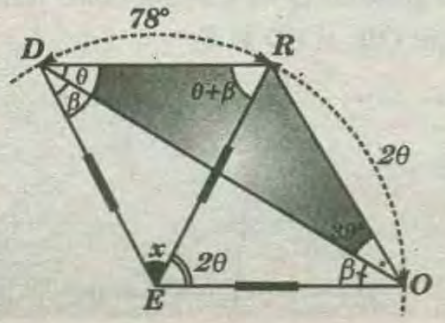
RPTA : "A"

PROBLEMA 27:

Calcular «x» en:



RESOLUCIÓN:



* Los puntos D; R; O se encuentran en una misma $\odot$(Propiedad de circuncentro)

* Es decir "E" es circuncentro del ΔDRO

* Ahora por $\sphericalangle$ inscrito : $m\overset{\frown}{DR}=78°$

* Finalmente por $\sphericalangle$ central : $x=78°$

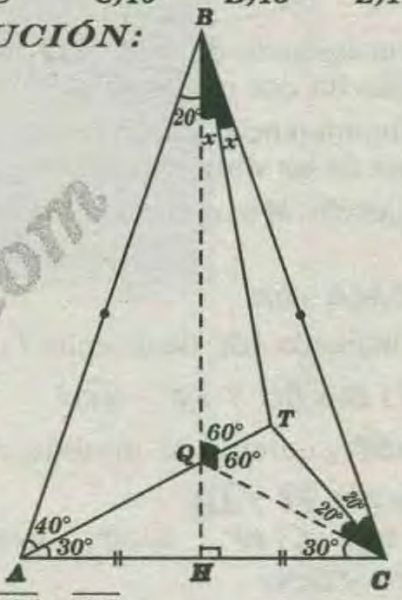
PROBLEMA 28:

En un triángulo isósceles ABC $(AB = BC)$, se ubica el punto interior T tal que la $m\sphericalangle BAT=40°$, $m\sphericalangle TAC= 30°$, $m\sphericalangle BCT = 20°$.

Calcule la $m\sphericalangle CBT$.

A)6° B)8° C)10° D)15° E)18°

RESOLUCIÓN:



* Se traza : $\overline{BH} \perp \overline{AC}$

* $\overline{BH}$ es bisectriz del ángulo ABC.

$$m\sphericalangle ABH=m\sphericalangle HBC=20°$$

* Pero :

$m\sphericalangle BQT=m\sphericalangle TQC=60°$ y $m\sphericalangle QCT=m\sphericalangle BCT=20°$

Entonces T es el incentro del triángulo QBC.

* Luego :

$m\sphericalangle QBT=m\sphericalangle TBC=x$

$\Rightarrow x+x=20° \Rightarrow 2x=20° \Rightarrow x=10°$

RPTA : "C"

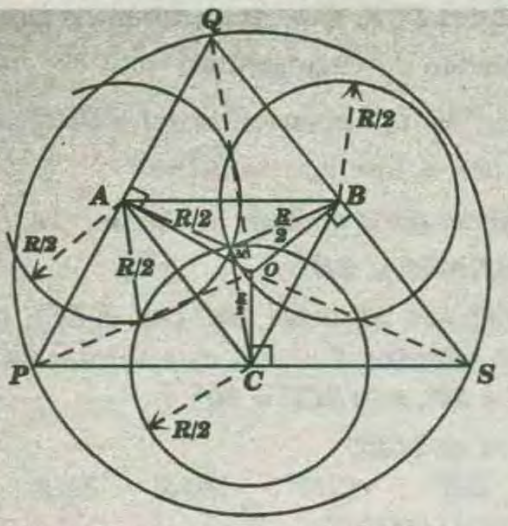
PROBLEMA 29:

Se tiene un triángulo PQS de circunradio R . Se ubica A y C puntos medios de $\overline{PQ}$ y $\overline{PS}$, respectivamente con centro en dichos puntos se trazan arcos de circunferencias de radio $R/2$ que se intersecan en M. Si B es punto medio de QS, ¿qué punto notable es M del triángulo ABC?

A) punto de Brocard B) circuncentro C) incentro
D) ortocentro E) baricentro

RESOLUCIÓN:

WWW.GRATIS2.COM



* Cada circunferencia de radio $R/2$ pasa por los puntos medios de dos circunradios.

* Las tres circunferencias pasan por el punto M, el cual equidista de los vértices del triángulo ABC.

* En consecuencia, M es el circuncentro del ΔABC..

RPTA : "B"

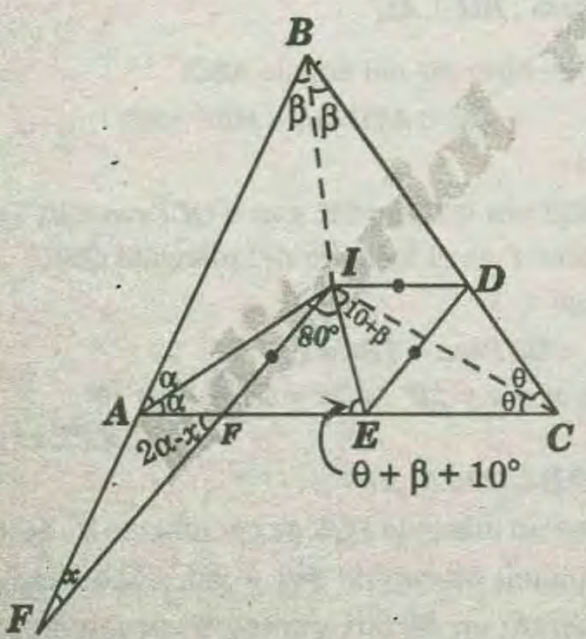
PROBLEMA 30:

Se tiene un triángulo ABC de incentro I y se traza el romboide $FIDE$ ($D \in \overline{BC}$ y $\overline{EF} \subset \overline{AC}$).

Si $m\sphericalangle AIE = 80°$, calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{FI}$ y $\overline{AB}$.

A) 20° B) 10° C) 40° D) 30° E) 60°

RESOLUCIÓN:



* $\Delta FIE : 2\alpha - x + 2(\theta + \beta + 10°) = 180°$

$2\alpha + 2\theta + 2\beta + 20° = 180° + x$

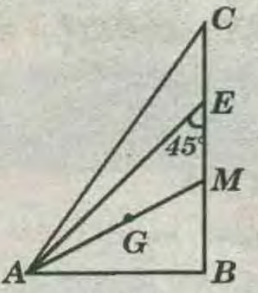
$\Rightarrow 180° + 20° = 180° + x \Rightarrow x = 20$

RPTA : "A"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 En el gráfico: G es baricentro de la región triangular ABC y $AG = 10$. Si $MB = 9$, calcule CE

A) 5
B) 6
C) 7
D) 4
E) 3



02 En un triángulo ABC, de circuncentro O y ortocentro H: $AC = 24$ y $OB = 13$. Calcule BH.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

03 Se tiene un triángulo ABC en donde H es el ortocentro y O el circuncentro. Si $m\sphericalangle AHC = 2(m\sphericalangle AOC)$, calcule $m\sphericalangle ABC$.

A) 30° B) 36° C) 53° D) 72° E) 45°

04 En un triángulo rectángulo ABC, recto en B: $m\sphericalangle BAC = 53°$ y $AC = 10$. Calcule el exradio relativo a la hipotenusa del triángulo ABC.

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

05 En un cuadrilátero $ABCD$ inscrito a una circunferencia, los puntos F y G son ortocentros de los triángulos ABD y ACD, respectivamente. Calcule FG, si $BC = 4$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

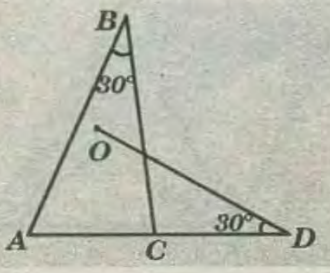
06 En un romboide $ABCD$ se ubica el punto E en $\overline{AD}$. Si C es el excentro del triángulo ABD y $m\sphericalangle BEA = 80°$, calcule $m\sphericalangle ABE$.

A) 20° B) 30° C) 40° D) 50° E) 60°

07 En un paralelogramo $ABCD$, la mediana AM del triángulo ABC interseca en F a $\overline{BD}$. Si $BD = 12$, calcule BF.

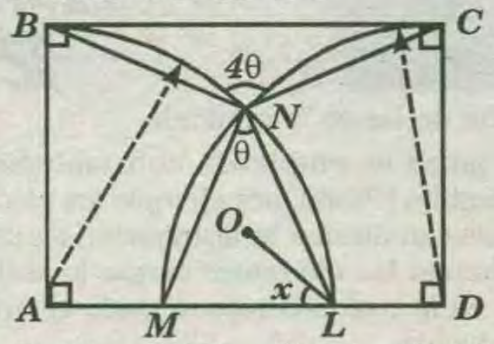
A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

08 En el gráfico: O es circuncentro del triángulo ABC. Calcule OD, si $CD = 6$.



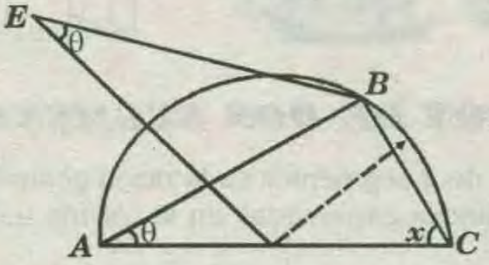
A) $5\sqrt{3}$ B) 9 C) 6 D) $6\sqrt{3}$ E) 12

09 En el gráfico: O es circuncentro del triángulo MNL. Calcule el valor de "x".



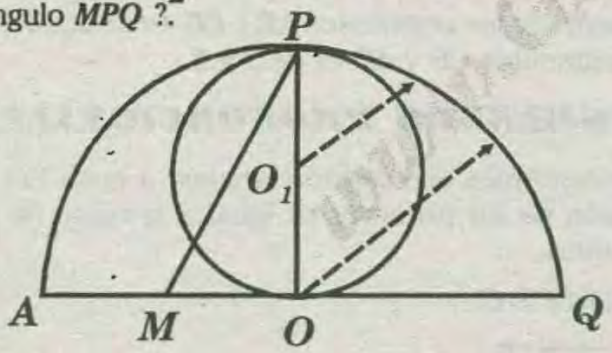
A) 70° B) 45° C) 50° D) 60° E) 40°

10 En el gráfico: E es excentro del triángulo ABC relativo a $\overline{AB}$. Calcule el valor de "x".



A) 35° B) 60° C) 70° D) 65° E) 55°

11 En el gráfico: P y O son puntos tangencia. Además $AM = \frac{R}{2}$ ¿Qué punto notable es O_1, del triangulo MPQ ?.



A) Baricentro B) Incentro C) Circuncentro
D) Ortocentro E) Excentro

12 En un triángulo ABC, de ortocentro H y circuncentro O, se traza la mediana AM tal que $OM=3$. Calcule AH

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

13 En un triángulo ABC, de circuncentro O, en $\overline{AC}$ se ubica el punto M y con diámetro MC se traza la semicircunferencia que contiene a O tal que $\overline{AO}$ es tangente a dicha circunferencia. Calcule la $m\sphericalangle ABC$

A) 40° B) 50° C) 60° D) 72° E) 80°

14 En un triángulo acutángulo ABC, la distancia del ortocentro H a B es 4 y la distancia del punto medio de $\overline{HO}$ a $\overline{AC}$ es 5 (O es el circuncentro del triángulo ABC). Si en dicho triángulo se traza la altura AM y la $M\sphericalangle BHM = 37°$, calcule AC.

A) 18 B) 44 C) 20 D) 21 E) 22

15 En un triángulo acutángulo ABC, de ortocentro H, el excentro relativo a $\overline{BC}$ es E. Si la $m\sphericalangle BEC = 60°$ y la $m\sphericalangle BHE = 50°$, calcule la $m\sphericalangle BCA$

A) 60° B) 70° C) 80° D) 75° E) 90°

16 En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BN. Siendo O y L circuncentros de los triángulos ABN y BNC, respectivamente, $M\sphericalangle OHL = 105$. Calcule la $M\sphericalangle ABC$, si H es ortocentro del triángulo OLN.

A) 75° B) 105° C) 45° D) 90° E) 130°

17 En un triángulo acutángulo ABC, de circuncentro O, calcule la $M\sphericalangle BAC$, si P, Q y R son circuncentros de los triángulos AOB, BOC y AOC, respectivamente, y $M\sphericalangle PQR = 40°$.

A) 20° B) 35° C) 40° D) 70° E) 80°

18 En un triángulo ABC: I es incentro; H es ortocentro y O es circuncentro. Calcule HI, si $m\sphericalangle AHC = 120°$ y $OI = 9$.

A) 3 B) 4,5 C) 5 D) 6,5 E) 9

19 Se tiene el triángulo ABC, de incentro I, en la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica el punto P. Si B, I, C y P son concíclicos, calcule la medida del ángulo entre $\overrightarrow{AI}$ y $\overrightarrow{CP}$.

A) 60° B) 75° C) 90° D) 85° E) 120°

20 En un triángulo ABC : $m\sphericalangle ABC = 60°$.
Calcule la medida del menor ángulo determinado por $\overline{BC}$ y la recta que contiene al ortocentro y al circuncentro de dicho triángulo.

A) 25° B) 30° C) 53° D) 60° E) 37°

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)B	2)E	3)B	4)D	5)D	6)C	7)C	8)D	9)D	10)B
11)D	12)D	13)C	14)E	15)C	16)A	17)D	18)E	19)C	20)D

PROPORCIONALIDAD

CAPITULO 22

OBJETIVOS :

Al finalizar la unidad, el alumno será capaz de:

** Conocer los conceptos de razones y proporciones de segmentos.*

** Reconocer la proporcionalidad entre los segmentos de ciertas figuras determinadas.*

** Aplicar correctamente los teoremas, en especial el Teorema de Ceva y el Teorema de Menelao.*

** Diferenciar los teoremas y sus aplicaciones.*

** Aplicar correctamente los teoremas en la resolución de problemas.*

INTRODUCCIÓN :

Los seres humanos desde que empezaron a tener las nociones de cantidad, número y medida: comenzaron a realizar ciertas comparaciones con ellas. También observo que en la naturaleza se daban cambios de tamaños en una cierta proporción, por ejemplo, los animales y seres humanos mostraban crecimiento de sus extremidades y otras partes de su fisonomía de manera proporcional. Además, en otras ramas de la ciencia como la física y química los diversos fenómenos que se estudian hay presencia de la proporcionalidad por ejemplo. La variación espacio tiempo, la proporción determinada de compuesto en una mezcla, etc; todos ello contribuyó al desarrollo.

También , así como en la sociedad se da la semejanza de ideas, la semejanza de sucesos; la semejanza de sucesos; la geometría toma estos conceptos y lo aplica a las formas geométricas, donde principalmente se da la comparación de líneas y es así como se logra el desarrollo de la agrimensura (distribución y medida de terrenos o medida de distancias inaccesibles) construcción, geodesia, astronomía, el arte, etc.

Cuando se reduce o amplía una fotografía, se obtiene una reproducción de ésta que presentan a un mismo objeto pero de distinto tamaño. Se dice entonces que la reproducción son semejantes.

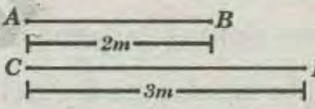
En los gráficos adjuntos las figuras de la derecha son ampliación de las de la izquierda.

La semejanza es empleada constantemente en nuestro ámbito laboral, por ejemplo los electricistas cuando desean diseñar la distribución de una línea para alimentar las diferentes cargas lo realizan en una hoja en la cual está representado el terreno en forma reducida.

RAZÓN DE DOS SEGMENTOS

La razón de **2** segmentos es la razón geométrica de sus longitudes expresadas en la misma unidad de medida.

EJEMPLO :



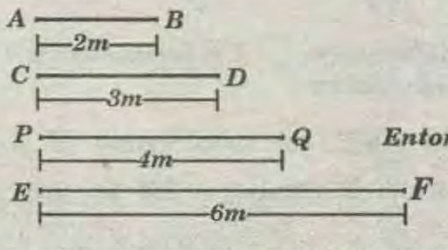
$$\frac{AB}{CD} = \frac{2m}{3m} = \frac{2}{3} \quad \text{ó} \quad \frac{CD}{AB} = \frac{3}{2}$$

La razón de los segmentos ***AB*** y ***CD*** es de ***2*** a ***3*** y de los segmentos ***CD*** y ***AB*** es de ***3*** a ***2***.

SEGMENTOS PROPORCIONALES

Dos segmentos son proporcionales a otros dos, si la razón de los primeros es igual a la razón de los segundos.

EJEMPLO :



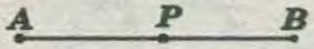
$$\text{Entonces : } \frac{AB}{CD} = \frac{PQ}{EF} = \frac{2}{3}$$

* Los segmentos ***AB*** y ***CD*** son proporcionales a ***PQ*** y ***EF***.

TEOREMA 1 :

Existe un punto y solo y punto que pertenece a un segmento de recta , que divide a dicho segmento en una razón dada (razón geométrica).

DEMOSTRACIÓN :



Sea P un punto que pertenece al segmento AB, tal que $\frac{AP}{PB}=n$ (razón dada). Entonces $\frac{AP}{PB}=\frac{n}{1}$, de donde $\frac{AP}{AP+PB}=\frac{n}{n+1}$, es decir, $\frac{AP}{AB}=\frac{n}{n+1}$ donde $\frac{n}{n+1}$ es menor que la unidad, es decir, al moverse el punto P desde A hasta B la razón $\frac{AP}{PB}$ varía desde cero hasta uno, entonces solo habrá una posición de P de tal manera que la razón $\frac{AP}{PB}=n$.

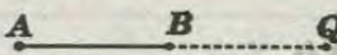
OBSERVACIÓN :

Debido a que el punto P pertenece al segmento AB se dice que dicho punto divide internamente a dicho segmento en la razón $\frac{AP}{PB}$.

TEOREMA 2 :

Existe un punto y solo un punto que pertenece a la prolongación de un segmento, tal que dicho punto divide a dicho segmento en una razón dada (razón geométrica), de tal forma que esta razón sea mayor que la unidad.

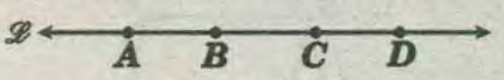
DEMOSTRACIÓN :



Sea Q un punto que pertenece a la prolongación de $\overline{AB}$, tal que $\frac{AQ}{BQ}=n$ (razón dada), entonces $\frac{AQ}{BQ}=\frac{n}{1}$ de donde $\frac{AQ}{BQ-BQ}=\frac{n}{n-1}$, es decir, $\frac{AQ}{AB}=\frac{n}{n-1}$ donde $\frac{n}{n-1}$ es mayor que la unidad, es decir, al moverse el punto Q desde B al infinito la razón $\frac{AQ}{AB}$ varía desde uno hasta el infinito por lo tanto habrá una sola posición de Q, para lo cual $\frac{AQ}{BQ}=n$.

TEOREMA 3 :

Sean los puntos $A; B; C$ y D (diferentes), de modo que $A; B$ y C se encuentran en una recta; y $B; C$ y D también se encuentran en una recta; entonces $A, B; C$ y D se encuentran en una misma recta.



Si $\{A;B;C\}\in\vec{\mathscr{L}}_1\{B;C;D\}\in\vec{\mathscr{L}}_2$

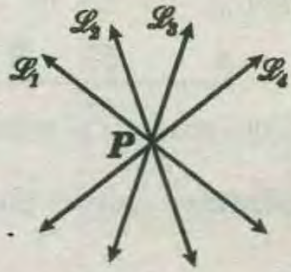
$\Rightarrow\{A;B;C;D\}\in\vec{\mathscr{L}}$ y $\vec{\mathscr{L}}=\vec{\mathscr{L}}_1=\vec{\mathscr{L}}_2$

DEMOSTRACIÓN :

Sea $\mathscr{L}_1$ la recta que contiene a los puntos $A; B$ y C; y $\mathscr{L}_2$ la recta que contiene a los puntos $B; C$ y D del postulado de Euclides : *Por dos puntos distintos solo pasa una recta,* entonces $\vec{\mathscr{L}}_1=\vec{\mathscr{L}}_2$ puesto que por B y C solo pasa una recta. Por lo tanto, $A; B; C$ y D están contenidos en una recta $\mathscr{L}$, donde $\vec{\mathscr{L}}=\vec{\mathscr{L}}_1=\vec{\mathscr{L}}_2$.

TEOREMA 4 :

Sean las rectas $\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2,\mathscr{L}_3$ y $\mathscr{L}_4$ (diferentes), de modo que $\vec{\mathscr{L}}_1,\vec{\mathscr{L}}_2$ y $\vec{\mathscr{L}}_3$ tienen un punto en común; y $\vec{\mathscr{L}}_2,\vec{\mathscr{L}}_3$ y $\vec{\mathscr{L}}_4$ también tienen un punto en común, entonces $\vec{\mathscr{L}}_1,\vec{\mathscr{L}}_2,\vec{\mathscr{L}}_3$ y $\vec{\mathscr{L}}_4$ tienen un mismo punto en comun, es decir, $\vec{\mathscr{L}}_1,\vec{\mathscr{L}}_2,\vec{\mathscr{L}}_3$ y $\vec{\mathscr{L}}_4$ son concurrentes.



Si : $\vec{\mathscr{L}}_1\cap\vec{\mathscr{L}}_2\cap\vec{\mathscr{L}}_3=\{M\}$

$\vec{\mathscr{L}}_2\cap\vec{\mathscr{L}}_3\cap\vec{\mathscr{L}}_4=\{N\}$

$\Rightarrow\vec{\mathscr{L}}_1\cap\vec{\mathscr{L}}_2\cap\vec{\mathscr{L}}_3\cap\vec{\mathscr{L}}_4=\{P\}$ y $M=N=P$

DEMOSTRACIÓN :

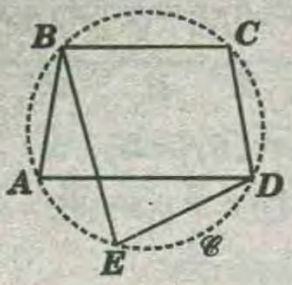
Sean $\vec{\mathscr{L}}_1,\vec{\mathscr{L}}_2,\vec{\mathscr{L}}_3$ concurrentes en el punto M y $\vec{\mathscr{L}}_2,\vec{\mathscr{L}}_3$ y $\vec{\mathscr{L}}_4$ concurrentes en el punto N. Del postulado : *dos rectas secantes solo tienen un punto común,* entonces $M=N$ puesto que $\vec{\mathscr{L}}_2$ y $\vec{\mathscr{L}}_3$ solo pueden tener un único punto en común. Por lo tanto, $\vec{\mathscr{L}}_1,\vec{\mathscr{L}}_2,\vec{\mathscr{L}}_3$ y $\vec{\mathscr{L}}_4$ tienen un único punto en común P, donde $P=M=N$.

TEOREMA 5 :

Sean los puntos $A; B; C; D$ y E (diferentes). Si $A; B; C$ y D son concíclicos (van a pertenecer a una circunferencia) y $B; C; D$ y E son concíclicos,

www.GRATIS.com

entonces *A; B; C; D* y *E* son concíclicos .



Si $\{A; B; C; D\}$ concíclicos en $\mathscr{C}_1$ $\{B;C;D$ y $E\}$ concíclicos en $\mathscr{C}_2$

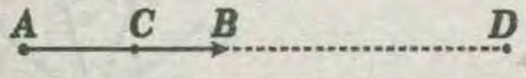
$\Rightarrow \{A;B;C;D$ y $E\}$ concíclicos en $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}=\mathscr{C}_1=\mathscr{C}_2$

DEMOSTRACIÓN :

Del teorema dada por tres puntos no colineales solo pasa una circunferencia; entonces , $\mathscr{C}_1=\mathscr{C}_2$ puesto que ambas van a contener a los puntos *B; C* y *D*. Por lo tanto, los puntos *A; B; C; D* y *E* pertenecen a una circunferencia $\mathscr{C}$ donde $\mathscr{C}=\mathscr{C}_1=\mathscr{C}_2$.

DIVISIÓN O PROPORCIÓN ARMÓNICA

Si dos puntos dividen a un segmento uno internamente y el otro externamente en una misma razón , entonces dichos puntos se denominarán conjugados armónicos con relación a dicho segmento.



La figura muestra al segmento *AB* que es dividido internamente por el punto *C*, en la razón $\frac{AC}{CB}$, y extensamente por el punto *D* en la razón $\frac{AD}{BD}$.

$$\boxed{\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}}$$

Los puntos *C* y *D* se llaman conjugados armónicos respecto de *A* y *B* y recíprocamente ; a los cuatro puntos *A;B C* y *D* se les llama armónicos.

NOTA :

Una forma de recordar la relación : $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}$

* Que se cumple cuando los puntos *A, B, C* y *D* forman una cuaterna armónica, es nombrando a los segmentos por :

$AB = 1^{ro}, BC = 2^{do}, CD = 3^{er}$ y $AD = 4^{to}$ tomamos de izquierda a derecha (pudiendo tomar en sentido contrario) de esta forma se escribirá.

$$\frac{1^{ro}}{2^{do}}=\frac{4^{to}}{3^{ro}}$$

TEOREMA 6 :

Si dos puntos *C* y *D* son conjugados armónicos, con respecto de los puntos *A* y *B*, recíprocamente; también *A* y *B* serán conjugados armónicos de *C* y *D*.

Por hipótesis tenemos que $\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{AC}$, de donde

$$\boxed{\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{AC}}$$

Se plantea así que *A* y *B* son conjugados armónicos de *C* y *D* .

PROPIEDADES DE LOS PUNTOS ARMÓNICOS

Si *A; B; C; D* son cuatro puntos armónicos :

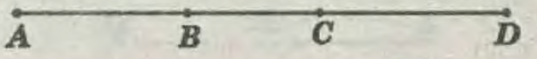
I) Cada una de las otras siete permutaciones de estos puntos en las cuales los pares conjugados no se destruyen es armónica .

TEOREMAS DE DESCARTES :

II) Si los puntos *A; B; C; D* forman una cuartena armónica , se cumple :

$$\boxed{\frac{2}{AC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}}$$

DEMOSTRACIÓN :



A; B; C y *D* son puntos armónicos.

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD} \Rightarrow AB\times CD=BC\times AD \quad .....(I)$$

* De la figura :

$$\left.\begin{aligned} BC&=AC-AB\\ CD&=AD-AC\end{aligned}\right\} \quad .....(II)$$

* *(II)* en *(I)* :

$$AB(AD-AC)=(AC-AB)AD \Rightarrow AB\times AD-AB\times AC=AC\times AD-AB\times AD$$

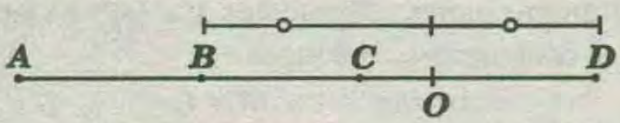
$$\Rightarrow 2\times AB\times AD=AC(AB+AD) \Rightarrow \boxed{\frac{2}{AC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}}$$

TEOREMA DE NEWTON :

III) Si los puntos *B* y *D* dividen armónicamente al segmento $\overline{AC}$ y *"O"* es el punto medio de $\overline{BD}$, s e cumple :

$$\boxed{OB^2=OA\times OC}$$

DEMOSTRACIÓN :



$A; B; C$ y D forman una cuaterna armónica ,

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD} \Rightarrow AB\times CD=BC \ldots\ldots (I)$$

* De la figura :

$$\left.\begin{aligned} AB&=OA-OB\\ BC&=OB-OC\\ AD&=OA+OD=OA+OB\\ CD&=OC+OD=OC+OB \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (II)$$

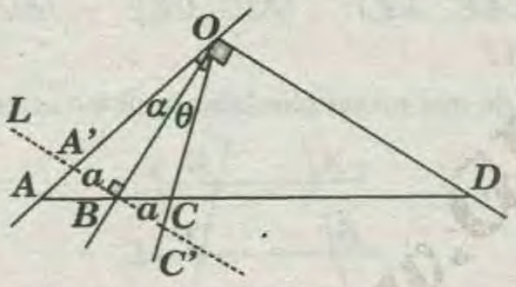
* Reemplazando *(II)* en *(I)* :

$$(OA-OB)(OC+OB)=(OB-OC)(OA+OB)$$

* Efectuando : $\boxed{OB^2=OA\times OC}$

IV) cuando en un haz armónico dos radios conjugados $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OD}$ son rectangulares , estos radios son las bisetrices de dos ángulo adyacentes suplementar formados por los otros dos radios $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$.

DEMOSTRACIÓN :



Se traza $L/\!/\overrightarrow{OD} \Rightarrow A'B=BC'=a$

Como $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{A'C'} \Rightarrow \triangle A'OC'$ isósceles

$$\rightarrow \alpha-\theta$$

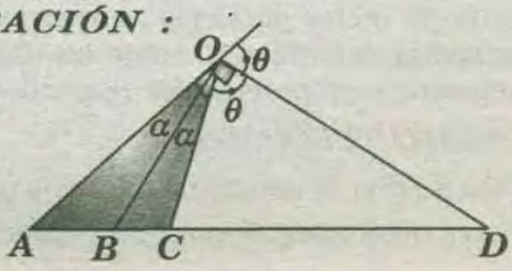
Esto demuestra que :

$\overrightarrow{OB}$ es bisectriz interior del $\triangle AOC$.

$\overrightarrow{OD}$ es bisectriz exterior del $\triangle AOC$.

*V) **RECÍPROCAMENTE***, en todo triángulo se cumple que dos vértices y los extremos de las bisectrices interior y exterior trazadas desde el tercer vértice , forman una cuaterna armónica.

DEMOSTRACIÓN :



* Por torema de la bisectriz interior en el $\triangle AOC$:

$$\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{BC} \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Por el teorema de la bisectriz exterior en el $\triangle AOC$:

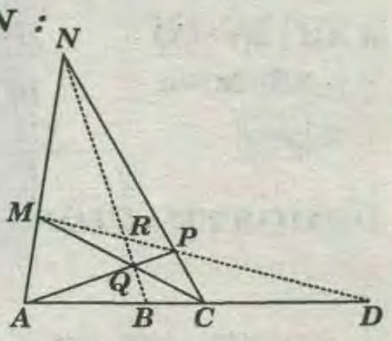
$$\frac{OA}{OC}=\frac{AD}{CD} \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* Igualando *(I)* y *(II)*: $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{CD}$

TEOREMA 7 :

En todo cuadrilátero completo , cada diagonal está dividida armónicamente por las otras dos .

DEMOSTRACIÓN :



* Por el teorema de Menelao en el $\triangle ANC$ ($\overleftrightarrow{MD}$ recta secante) :

$$AM\times NP\times CD=M\times PC\times AD \ldots\ldots\ldots (I)$$

* Por el teorema del Ceva en el $\triangle ANC$:

$$AM\times NP\times BC=MN\times PC\times AB \ldots\ldots\ldots (II)$$

* *(I)* + *(II)* : $\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{AD}{AB} \Rightarrow \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{AB}$

* También : $\boxed{\dfrac{NR}{RQ}=\dfrac{NB}{QB}}$ $\boxed{\dfrac{MR}{RP}=\dfrac{MD}{PD}}$

Este teorema ofrece un procedimiento muy sencillo para hallar el punto conjugado armónico D de un punto B con respecto a A y C , con el uso de la regla solamente.

SEGMENTOS PROPORCIONALES

Son dos partes de segmentos que tienen el mismo valor de sus razones geométrica .

EJEMPLO :

Sean los segmentos :

$AB=2\mu$ (A, B) , $CD=3\mu$ (C, D) $\Big\}$ 1er par

$MN=4\mu$ (M, N) , $PQ=6\mu$ (P, Q) $\Big\}$ 2do par

$$\frac{AB}{CD}=\frac{2\mu}{3\mu} \Rightarrow \frac{AB}{CD}=\frac{2}{3}\Big\}1^{era}\ par \wedge \frac{MN}{PQ}=\frac{4\mu}{6\mu} \Rightarrow \frac{MN}{PQ}=\frac{2}{3}\Big\}2^{da}\ par$$

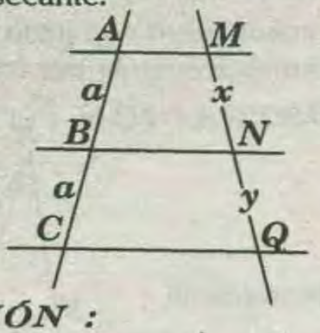
* Luego : $\boxed{\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{MN}{PQ}}$ *"proporción"*

Esto significa que si las longitudes de dos pares de segmentos tienen la misma razón. dichos pares de segmentos son proporcionales.

Asimismo. la proporcionalidad de segmentos goza de las mismas propiedades de la proporcionalidad entre números.

TEOREMA 8 :

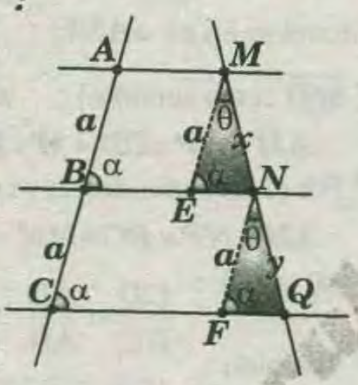
Si tres o más rectas paralelas determinan sobre una recta secante segmentos congruentes, entonces estas paralelas determinan segmentos congruentes sobre cualquier otra recta secante.



Si $\overrightarrow{AM} // \overrightarrow{BN} // \overrightarrow{CQ}$ y $AB // BC = a$

$\Rightarrow \boxed{x = y}$

DEMOSTRACIÓN :



Si : $\overrightarrow{ME} // \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{NF} // \overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow AB = ME = a$

y $BC = NF = a$

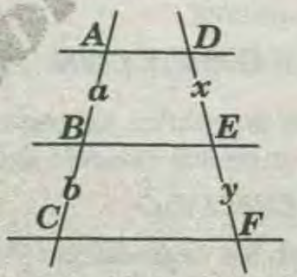
* Ahora :

$\triangle EMN \equiv \triangle FNQ \ (ALA)$

$\Rightarrow MN = NQ \Rightarrow x = y$.

TEOREMA DE THALES :

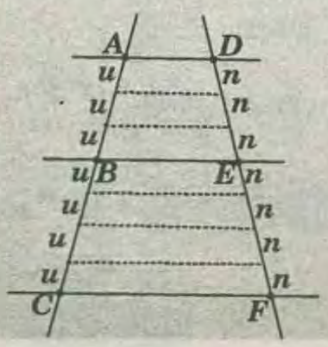
Tres rectas paralelas determinan sobre dos o más rectas secantes segmentos proporcionales .



Si $\overrightarrow{AD} // \overrightarrow{BE} // \overrightarrow{CF}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{x}{y}}$

DEMOSTRACIÓN :



Si $\overrightarrow{AD} // \overrightarrow{BE} // \overrightarrow{CE}$

Tomando como unidad de medida una longitud "μ", dividimos el segmento $\overline{AB}$ en tres partes congruentes y a $\overline{BC}$ en cuatro partes congruentes , entonces :

$AB = 3\mu \ \wedge \ BC = 4\mu$

* Al dividir se tiene :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{3\mu}{4\mu} = \frac{3}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Por cada punto de división se traza rectas paralelas a las rectas $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}$ y $\overrightarrow{CE}$ por el teorema anterior; sobre $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$, tendremos segmentos congruentes de longitudes "n" , entonces :

$DE = 3n \qquad EF = 4n$

* al dividir se tiene :

$$\frac{DE}{EF} = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* Igualando *(I)* y *(II)* : $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

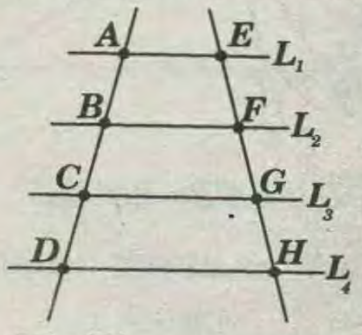
* Es decir : $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$

Aplicando propiedades de proporciones podemos escribir :

* $\boxed{\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}}$ * $\boxed{\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}}$ * $\boxed{\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}}$

NOTA:

En más de tres rectas paralelas también se cumple :



Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2} // \overrightarrow{L_3} // \overrightarrow{L_4}$.

$\Rightarrow \boxed{\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{AD}{EH}}$

TEOREMA DE THALES(GENERAL)

Si dos rectas cualesquiera son intersecadas por una serie de rectas paralelas , entonces dichas rectas paralelas determinan , sobre las dos rectas dadas, segmentos proporcionales respectivamente.

DEMOSTRACIÓN :

Para realizar la demostración basta probar:

I) Si para dos segmentos cualesquiera de la primera

recta, estas son congruentes (de igual longitud), entonces los segmentos correspondientes en la segunda recta también son congruentes.

II) Si en la primera recta , uno de los segmentos determinados es igual a la suma de otros dos determinados en la misma recta, entonces el correspondiente de dichò segmento en la segunda recta es también igual a la suma de los correspondientes de los otros dos determinados en la segunda recta.

Sean $\vec{\mathscr{L}}_1$ y $\vec{\mathscr{L}}_2$, las rectas dadas y $\vec{\mathscr{L}}_3; \vec{\mathscr{L}}_4; \vec{\mathscr{L}}_5; \vec{\mathscr{L}}_6; \vec{\mathscr{L}}_7$ y $\vec{\mathscr{L}}_8$ las rectas paralelas, si $AB=EF=a$,debemos probar que $\overline{A'B'}$ y $\overline{EF}$ son congruentes.

Trazemos $\overline{A'P}$ y $\overline{EQ}$ paralelos a $\vec{\mathscr{L}}_1$, podemos notar que $AA'PB$ y $EE'QF$ son paralelogramos .

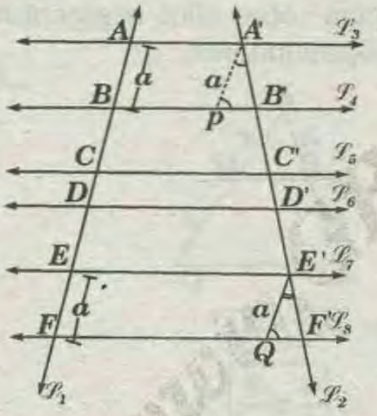
$\Rightarrow m\sphericalangle A'PB' = m\sphericalangle E'QF'$

$m\sphericalangle PA'B' = m\sphericalangle QE'F'$

$A'P = AB = a \quad EQ = EF = a$

$\triangle A'P'B' \cong \triangle E'QF' (ALA)$

$\Rightarrow A'B' = E'F'$



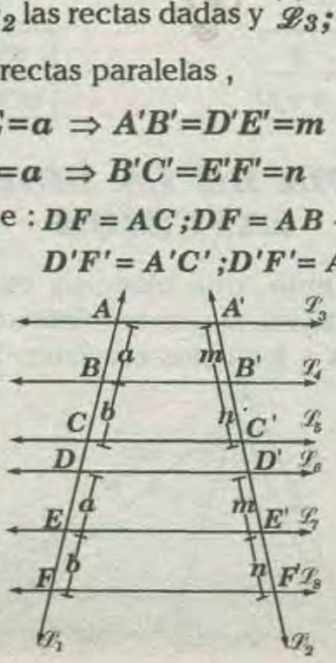
Sean $\vec{\mathscr{L}}_1$ y $\vec{\mathscr{L}}_2$ las rectas dadas y $\vec{\mathscr{L}}_3; \vec{\mathscr{L}}_4; \vec{\mathscr{L}}_5; \vec{\mathscr{L}}_6$ $\vec{\mathscr{L}}_7$ y $\vec{\mathscr{L}}_8$ las rectas paralelas ,

Si : $AB=DE=a \Rightarrow A'B'=D'E'=m$

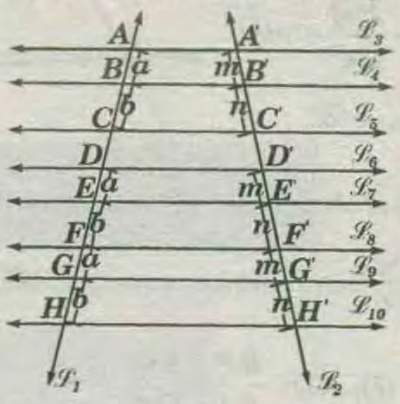
Si : $BC=EF=a \Rightarrow B'C'=E'F'=n$

Se observa que : $DF = AC ; DF = AB + BC$

$D'F' = A'C' ; D'F' = A'B' + B'C'$



De lo anterior, trazamos dos rectas $\vec{\mathscr{L}}_9$ y $\vec{\mathscr{L}}_{10}$ paralelas a $\vec{\mathscr{L}}_3$ tal que los segmentos determinados sean a y b, como se muestra en la figura.



* Por lo cual, $AC=a+b$ y $DH=2(a+b)$

$$\frac{AC}{DH}=\frac{a+b}{2(a+b)}=\frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

$A'C'=m+n \wedge D'H'=2(m+n)$

$$\Rightarrow \frac{A'C'}{D'H'}=\frac{m+n}{2(m+n)}=\frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

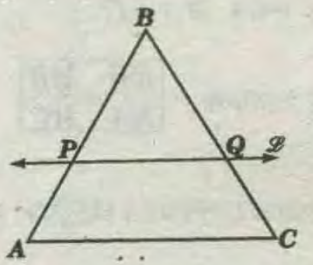
* Igualando se tiene : $\dfrac{AC}{DH}=\dfrac{A'C'}{D'H'} \Rightarrow \dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{DH}{D'H'}$

COROLARIO 1 :

Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo determina; en los otros dos lados, segmentos directamente proporcionales.

Si $\overline{\mathscr{L}} \parallel \overline{AC}$

Se cumple : $\boxed{\dfrac{BP}{PA}=\dfrac{BQ}{QC}}$

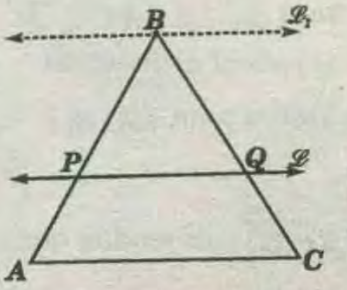


DEMOSTRACIÓN :

Se traza $\vec{\mathscr{L}}_1 \parallel \vec{\mathscr{L}}_2 \parallel \overline{AC}$

al aplicar el teorema de Thales se tendrá :

$$\frac{BP}{PA}=\frac{BQ}{QC}$$

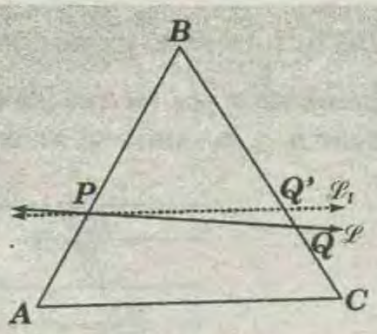


RECÍPROCO DEL COROLARIO 1 :

Si en un triángulo , una recta secante a dos lados determina segmentos directamente proporcionales, entonces dicha recta es paralela al tercer lado.

DEMOSTRACIÓN :

* Sea: $\frac{BP}{PA}=\frac{BQ}{QC}$ .....(I)



* Por P se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ paralela a $\overline{AC}$ Aplicando el corolario *I* :

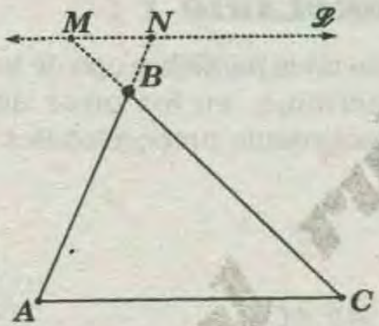
$$\frac{BP}{PA}=\frac{BQ'}{Q'C} \text{ .....(II)}$$

* Igualando *(I)*, *(II)*: $\frac{BP}{PA}=\frac{BQ'}{Q'C}$

De lo anterior podemos afirmar que Q es Q' debido a que ya demostró que para un punto de un segmento tiene una razón dada. $\rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overline{AC}$

COROLARIO 2 :

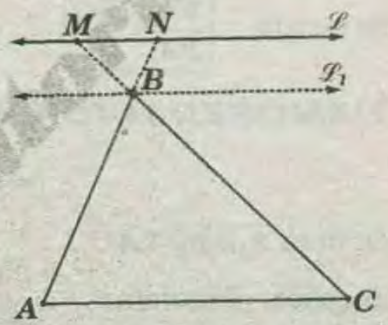
Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo que interseca a las prolongaciones de los otros dos lados, determina segmentos directamente proporcionales .



Se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overline{AC}$

se cumple : $\boxed{\frac{NB}{NA}=\frac{MB}{MC}}$

DEMOSTRACIÓN :

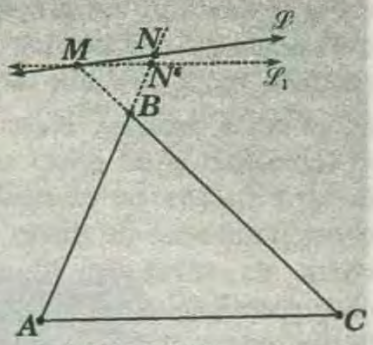


Se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overline{AC}$ así al aplicar el Teorema de Thales para $(\mathscr{L}; \mathscr{L}_1)$ y $(\mathscr{L}; \overline{AC})$ se tendría que: $\frac{NB}{NA}=\frac{MB}{MC}$

RECÍPROCO DEL COROLARIO 2 :

Si en un triángulo, una recta secante a las prolongaciones de dos lados determina segmentos directamente proporcionales, entonces dicha recta es paralela al tercer lado.

DEMOSTRACIÓN :



Sea : $\frac{AB}{BN}=\frac{CB}{BM}$ ....(I)

por M se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ paralela a $\overline{AC}$

* Aplicando el corolario *2* : $\frac{AB}{BN'}=\frac{CB}{BM}$ .....(II)

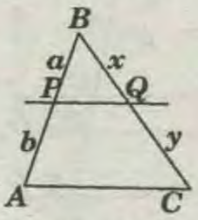
* Igualando *(I)* y *(II)* : $\frac{AB}{BN}=\frac{AB}{BN'}$

* De lo anterior : $BN'=BN$

Como tienen igual longitud podemos decir que N es N' también $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ es $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overline{AC}$

APLICACIÓN DEL TEOREMA DE THALES EN UN TRIÁNGULO

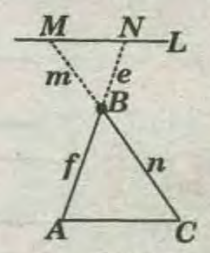
Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo, que intersecta a los otros o a sus prolongaciones, determina sobre ellos segmentos cuyas longitudes son proporcionales.



Si $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overline{AC}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{a}{b}=\frac{x}{y}}$

$\boxed{\frac{a}{a+b}=\frac{x}{x+y}}$



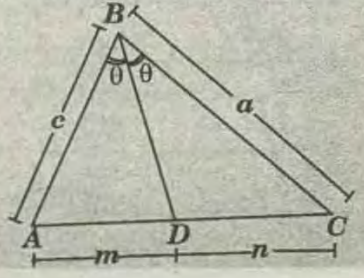
Si $\overleftrightarrow{L} \parallel \overline{AC}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{m}{n}=\frac{e}{f}}$

$\boxed{\frac{m}{m+n}=\frac{e}{e+f}}$

TEOREMA DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

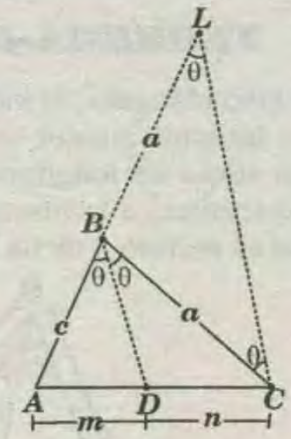
En todo triángulo, una bisectriz exterior divide externamente aliado al cual es relativo en segmentos proporcionales a los lados contiguos (adyacentes).



Del gráfico, $\overline{BD}$ es una bisectriz exterior que divide internamente a $\overline{AC}$.

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC} \rightarrow \boxed{\frac{m}{n}=\frac{c}{d}}$$

DEMOSTRACIÓN :



Al trazar $\overline{CL}//\overline{BD}$,

podemos notar que

$$m\sphericalangle ABD=m\sphericalangle ALC=\theta$$
$$m\sphericalangle BCL=rn\sphericalangle DBC=\theta$$

* Observamos así que :

$$BC=BL=a$$

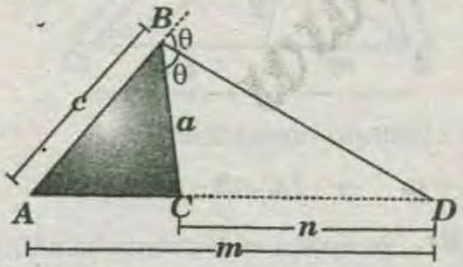
En el triángulo *ALC* (Por corolario *1*) : $\frac{m}{n}=\frac{c}{a}$

NOTA :

Si en un triángulo, al trazar una ceviana interior, ésta determina sobre su lado relativo dos segmentos proporcionales a sus lados contiguos (adyacentes), entonces dicha ceviana es bisectriz interior. (Teorema recíproco) .

TEOREMA DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

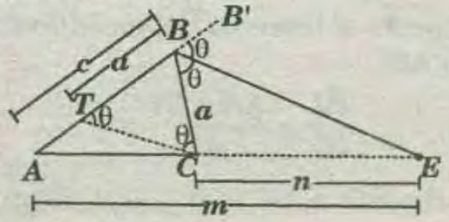
En todo triángulo , una bisectriz interior divide internamente al lado al cual es relativo en segmentos proporcionales a los lados contiguos (adyacentes).



De la figura , $\overline{BD}$ es una bisectriz que divide externamente a $\overline{AC}$.

$$\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC} \rightarrow \boxed{\frac{m}{n}=\frac{c}{a}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Al trazar $\overline{CT}//\overline{BE}$, podemos notar que :

$$m\sphericalangle CTB=m\sphericalangle B'BE=\theta$$
$$m\sphericalangle TCB=m\sphericalangle CBE=\theta$$

Se observa que $BC=BT=a$

En el triángulo *ABE* (Por corolario *1*): $\frac{m}{n}=\frac{c}{a}$

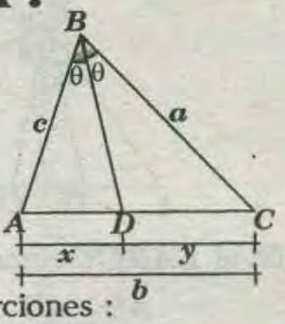
NOTA :

Si en un triángulo, al trazar una ceviana exterior, esta determina sobre su lado relativo dos segmentos proporcionales a sus lados contiguos (adyacentes), entonces dicha ceviana es bisectriz exterior. (Teorema recíproco)

PROPIEDADES

I) En todo triángulo , la bisectriz de uno de sus ángulos determina sobre el lado opuesto segmentos.cuyas longitudes son:

**** BISETRIZ INTERIOR :***



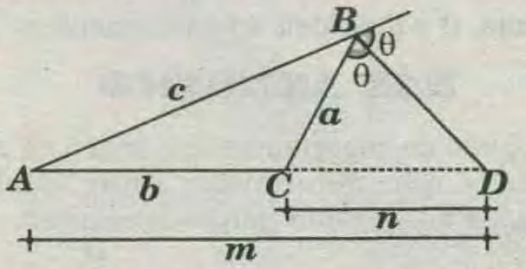
* Por teorema de la bisectriz interior : $\frac{x}{y}=\frac{c}{a}$

* Usando propiedad de proporciones :

$$\frac{x}{\underbrace{x+y}_{b}}=\frac{c}{a+c} \Rightarrow \frac{x}{b}=\frac{c}{a+c} \Rightarrow \boxed{x=\frac{bc}{a+c}}$$

* Luego : $\boxed{y=\frac{ab}{a+c}}$

**** BISECTRIZ EXTERIOR :***



* Por teorema de la bisectriz exterior : $\frac{c}{a}=\frac{m}{n}$

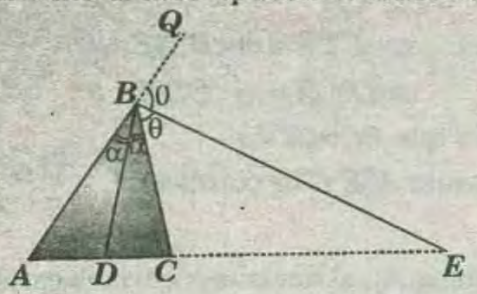
* Usando propiedad de proporciones :

$$\frac{c-a}{a}=\frac{m-n}{n} \Rightarrow \frac{c-a}{a}=\frac{b}{n} \Rightarrow \boxed{n=\frac{ab}{a-c}} \wedge \boxed{m=\frac{bc}{c-a}}$$

TEOREMA 9 :

En un triángulo, las bisectrices de un ángulo interior y de su correspondiente ángulo exterior dividen

armónicamente al lado opuesto a dicho ángulo.



De la figura :

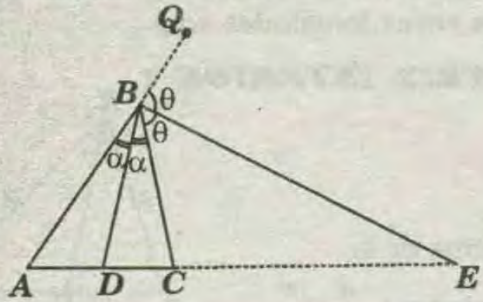
$\overline{BD}$: bisectriz del ángulo interior ABC .

$\overline{BE}$: bisectriz del ángulo exterior CBQ.

Se cumple lo siguiente :

D y E dividen armónicamente aliado AC.

DEMOSTRACIÓN :



* En el $\triangle ABC$ (Teorema de la bisectriz interior) :

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}\quad\text{.....(I)}$$

* En el $\triangle ABC$ (Teorema de la bisectriz exterior) :

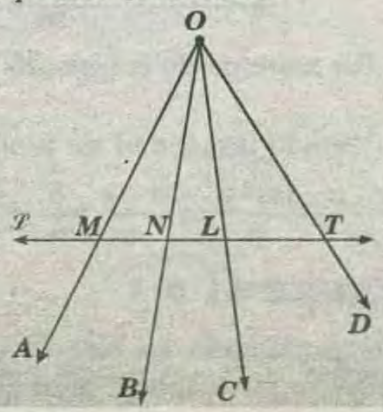
$$\frac{AE}{CE}=\frac{AE}{BC}\quad\text{.....(II)}$$

* Igualando *(I)* y *(II)* : $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{AE}{CE}$

Por lo tanto, D y E dividen armónicamente a $\overline{AC}$.

HAZ ARMÓNICO

Es el conjunto de cuatro rayos que tienen en común el origen y que determinan sobre cualquier transversal a ellos cuatro puntos armónicos.



O : centro del haz armónico.

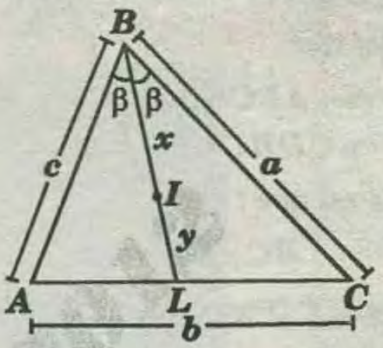
$\overrightarrow{\mathscr{L}}$: recta transversal a los cuatro rayos .

$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}$: conjugados armónicos de $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ y viceversa.

M; N; L y T : puntos armónicos .

TEOREMA DEL INCENTRO

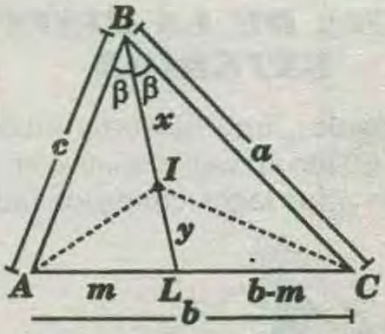
En todo triángulo , el incentro divide internamente a una bisectriz interior en segmentos proporcionales a la suma de longitudes de dos lados contiguos (adyacentes) a la bisectriz y la longitud del lado al cual es relativo a dicha bisectriz.



De la figura I incentro del $\triangle ABC$, que divide internamente a $\overline{BL}$, Se cumple así :

$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{a+c}{b}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Se trazan (siendo bisectrices)

* Sea : $AL=m \;\rightarrow\; LC=b-m$

* En el $\triangle ABL$, se aplica el teorema bisetriz interior:

$$\frac{x}{y}=\frac{c}{m}\quad\text{.....(I)}$$

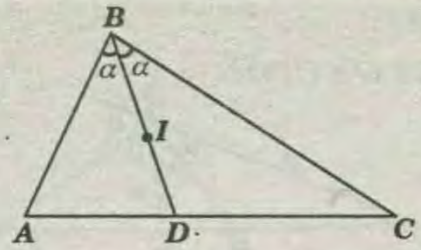
* En el $\triangle BCL$, se aplica el teorema bisetriz interior:

$$\frac{x}{y}=\frac{c+a}{m+(b-m)}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{c+a}{b}$$

NOTA : Respecto al teorema del incentro *(I)* de un triángulo ABC:

$$\frac{BI}{ID}=\frac{AB+BC}{AC}$$

Ya que : $AB+BC>AC+ID$

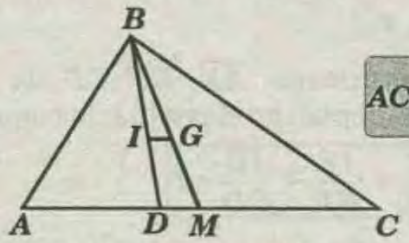


TEOREMA DEL INCENTRO Y BARICENTRO

"Si en un triángulo se cumple que el segmento que une el baricentro con el incentro es paralelo a un lado, entonces dicho lado será igual a la semisuma de los otros dos lados".

* Los puntos *I* y *G* representan al incentro y baricentro respectivamente del $\triangle ABC$.

Así pues, si $\overline{IG} \parallel \overline{AC}$, se cumple que :



$$AC=\frac{AB+BC}{2} \quad .....(\ )$$

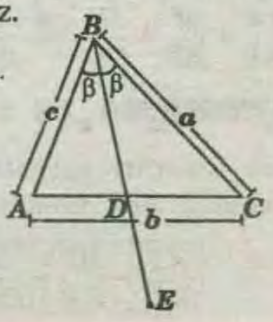
OBSERVACIONES :

♠ El teorema recíproco al teorema del incentro y baricentro se cumple, es decir : Si se verifica la relación anterior , entonces $\overline{IG} \parallel \overline{AC}$. También se comprueba que el único triángulo rectángulo que cumple con esta característica es aquel cuyos lados , son proporcionales a *3 ; 4* y *5*.

♠ Si los lados de un triángulo forman una progresión aritmética , entonces en dicho triángulo, el segmento que une el incentro con el baricentro será paralelo al lado cuyo valor es medio respectivo a los otros.

TEOREMA DEL EXCENTRO

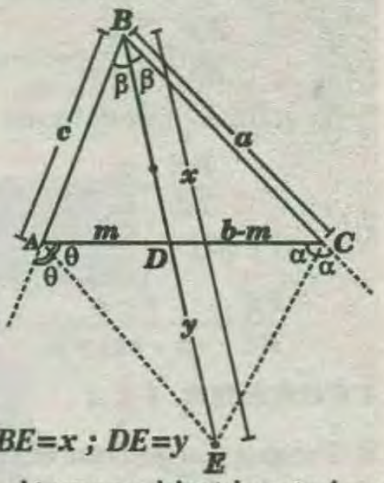
En todo triángulo, el excentro divide externamente a una bisectriz interior en segmentos proporcionales a la suma de longitudes de los lados contiguos (adyacentes) a la bisectriz y la longitud del lado, al cual es relativo a dicha bisectriz.



En la figura *E* es excentro del $\triangle ABC$ relativo a $\overline{AC}$, que divide externamente a $\overline{BD}$.

Sea $BE=x$. $DE=y$, se cumple : $\boxed{\frac{x}{y}=\frac{a+c}{b}}$

DEMOSTRACIÓN :



Como *E* es excentro del $\triangle ABC$, se trazan las bisectrices exteriores $\overline{AE}$ y $\overline{CE}$.

Sea $AD=m; DC=b-m$; $BE=x$; $DE=y$

* En el $\triangle ADB$, se aplica el teorema bisetriz exterior:

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b-m} \quad .....(I)$$

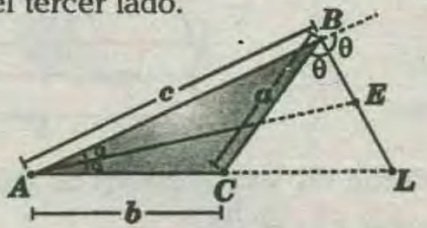
* En el $\triangle CDB$, se aplica el teorema bisectriz exterior:

$$\frac{x}{y}=\frac{c+a}{b-m} \quad .....(II)$$

* De *(I)* y *(II)* : $\frac{x}{y}=\frac{c+a}{m+(b-m)} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{c+a}{b}$

TEOREMA 10 :

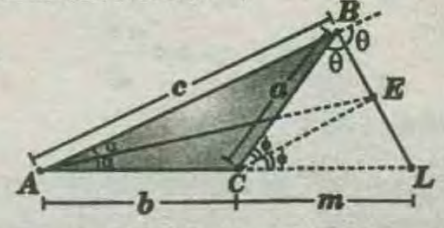
En un triángulo, el excentro relativo a un lado divide internamente a una bisectriz exterior en segmentos proporcionales a la diferencia de las longitudes de los lados contiguos (adyacentes) a la bisectriz y la longitud del tercer lado.



De la figura *E* es excentro del $\triangle ABC$, relativo a $\overline{BC}$; por lo que se cumple :

$$\boxed{\frac{BE}{EL}=\frac{c-a}{b}}$$

DEMOSTRACIÓN :



Como *E:* excentro del $\triangle ABC$.

$\Rightarrow m\sphericalangle BCE = m\sphericalangle LCE = \phi$

$m\sphericalangle BAE = m\sphericalangle LAE = \alpha$

* En $\triangle ABL$: Del teorema de la bisectriz interior

$$\frac{BE}{EL}=\frac{a}{b+m} \quad \text{.....(I)}$$

* En $\triangle BCL$: Del teorema de la bisectriz interior

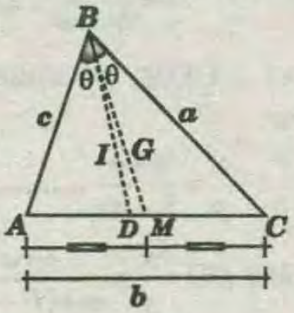
$$\frac{BE}{EL}=\frac{a}{m} \quad \text{.....(II)}$$

* De (I) y (II) :

$$\frac{BE}{EL}=\frac{c-a}{(b-m)+m} \Rightarrow \boxed{\frac{BE}{EL}=\frac{c-a}{b}}$$

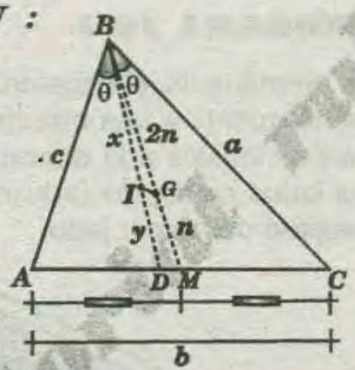
TEOREMA 11 :

Si el segmento que ***une el incentro con el baricentro*** de un triángulo es paralelo a uno de los lados, éste lado es la media aritmética de los otros dos lados.



Si $\overline{IG} // \overline{AC} \Rightarrow \boxed{b=\frac{a+c}{2}}$

DEMOSTRACIÓN :



I : incentro

G: baricentro

$\overline{IG} // \overline{AC}$. Como "$G$"es baricentro $\Rightarrow BG = 2\,GM$

* En el $\triangle DBM$ por Thales :

$$\frac{x}{y}=\frac{2n}{n} \Rightarrow \frac{x}{y}=2 \quad \text{.....(I)}$$

* El teorema del incentro :

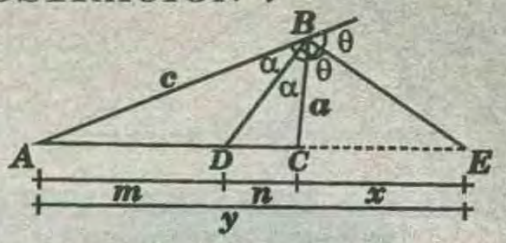
$$\frac{x}{y}=\frac{a+c}{b} \quad \text{.....(II)}$$

* De (I) y (II) : $\frac{a+c}{b}=2 \Rightarrow b=\frac{a+c}{2}$

TEOREMA 12 :

En un triángulo ABC al trazarse la bisectriz interior $\overline{BD}$ y la bisectriz interior $\overline{BE}$ se cumple : $\boxed{\frac{AD}{DC}=\frac{AE}{CE}}$ $(BC < AB)$.

DEMOSTRACIÓN :



$\overline{BD}$ es bisectriz interior, por teorema :

$$\frac{c}{a}=\frac{m}{n} \quad \text{.....(I)}$$

$\overline{BE}$ es bisectriz exterior, por teorema :

$$\frac{c}{a}=\frac{y}{x} \quad \text{.....(II)}$$

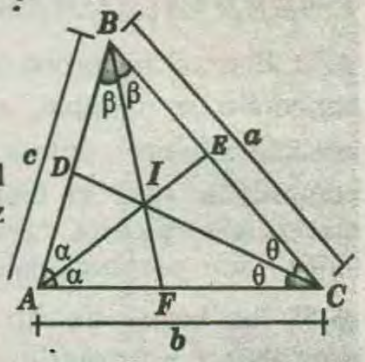
* Igualando (I) y (II) : $\frac{m}{n}=\frac{y}{x}$

TEOREMA 13 :

Las bisectrices interiores $\overline{AE}$; $\overline{BF}$; CD de un triángulo ABC se interceptan en el punto I, se cumple:

$$\boxed{\frac{IE}{AE}+\frac{IF}{BF}+\frac{ID}{CD}=1}$$

DEMOSTRACIÓN :



I: incentro

$2p$: perímetro

*Por el teorema del incentro para la bisectriz $\overline{AE}$.

* Aplicamos propiedad de proporciones :

$$\frac{AI}{IE}=\frac{a+b+c}{a} \Rightarrow \frac{AE}{IE}=\frac{2p}{a} \Rightarrow \frac{IE}{AE}=\frac{a}{2p} \quad \text{....(I)}$$

* De manera similar, obtenemos :

$$\frac{IF}{BF}=\frac{b}{2p} \quad \text{.....(II)}$$

$$\frac{ID}{CD}=\frac{c}{2p} \quad \text{.....(III)}$$

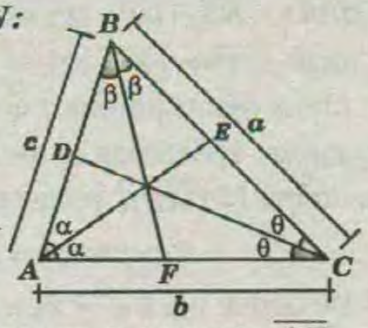
* Sumando (I), (II) y (III) :

$$\frac{IE}{AE}+\frac{IF}{BF}+\frac{ID}{CD}=\frac{a+b+c}{2p}=\frac{2p}{2p} \Rightarrow \boxed{\frac{IE}{AE}+\frac{IF}{BF}+\frac{ID}{CD}=1}$$

TEOREMA 14 :

Las bisectrices interiores $\overline{AE}$; $\overline{BF}$; $\overline{CD}$ de un triángulo ABC concurren en el punto I, se cumple que : $\boxed{\frac{AI}{AE}+\frac{BI}{BF}+\frac{CI}{CD}=2}$

DEMOSTRACIÓN:



I : incentro del $\triangle ABC$

Por el teorema del incentro para la bisectriz $\overline{AE}$.

$$\frac{AI}{IE}=\frac{a+c}{a}$$

* Por propiedad de proporciones :

$$\frac{AI}{AI+IE}=\frac{b+c}{a+b+c}\Rightarrow\frac{AI}{AE}=\frac{b+c}{2p}\ldots\ldots(I)$$

* Análogamente para las otras dos bisectrices obtenemos:

$$\frac{BI}{BF}=\frac{a+c}{2p}\ldots\ldots(II)$$

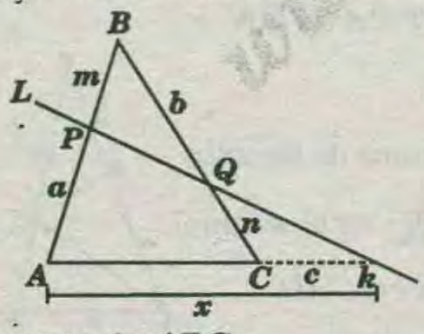
$$\frac{CI}{CD}=\frac{a+b}{2p}\ldots\ldots(III)$$

* Sumando (I), (II) y (III) :

$$\frac{AI}{AE}+\frac{BI}{BF}+\frac{CI}{CD}=\frac{2(a+b+c)}{2p}=\frac{2(2p)}{2p}\Rightarrow\boxed{\frac{AI}{AE}+\frac{BI}{BF}+\frac{CI}{CD}=2}$$

TEOREMA DE MENELAO

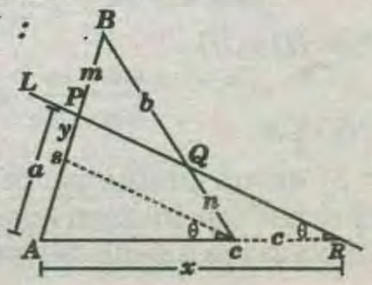
Toda recta secante a un triángulo qué divide internamente a dos lados y externamente al tercero, determina en dichos lados segmentos , cumpliéndose que el producto de las longitudes de tres de ellos sin extremo común , es igual al producto de las longitudes de los otros tres.



$\overleftrightarrow{L}$: recta secante al $\triangle ABC$.

Se cumple : $\boxed{a\times b\times c=m\times n\times x}$

DEMOSTRACIÓN :



* Thales en el $\triangle SBC$:

$$\frac{m}{y}=\frac{b}{n}\Rightarrow y=\frac{mn}{b}\ldots\ldots(I)$$

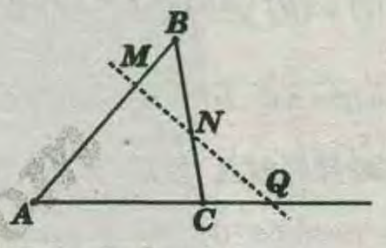
* Thales en el $\triangle APR$:

$$\frac{a}{y}=\frac{x}{c}\Rightarrow y=\frac{ac}{y}\ldots\ldots(II)$$

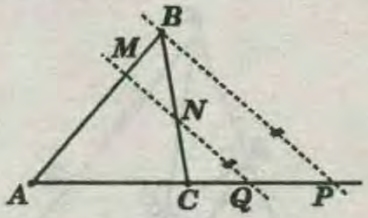
* Igualando (I) y (II) : $\frac{mn}{b}=\frac{ac}{x}\Rightarrow\boxed{abc=mnx}$

TEOREMA RECÍPROCO DE MENELAO

En un triángulo ABC, se ubican los puntos M; N y Q en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y la prolongación de $\overline{AC}$ respectivamente. Si $\frac{(AM)}{(MB)}\times\frac{(BN)}{(NC)}\times\frac{(CQ)}{(AQ)}=1$, entonces los puntos M, N y Q son colineales .



DEMOSTRACIÓN :



* De la condición: $\frac{(AM)}{(MB)}\times\frac{(BN)}{(NC)}\times\frac{(CQ)}{(AQ)}=1$

* En la prolongación de $\overline{AQ}$, al ubicar el punto P, tal $\overline{BP}\,//\,\overline{NQ}$, comprendemos que en el $\triangle BCP$.

$$\frac{BN}{NC}=\frac{PQ}{CQ}\ldots\ldots(I)$$

* Luego reemplazando (I) en el dato tenemos

$$\frac{AM}{BM}\times\left(\frac{PQ}{CQ}\right)\times\frac{CQ}{AQ}=1\Rightarrow\frac{AM}{BM}=\frac{AQ}{PQ}$$

* Por lo que en el $\triangle ABP$: $\overleftrightarrow{MQ}\,//\,\overleftrightarrow{BP}$.

* Del quinto postulado de Euclides :

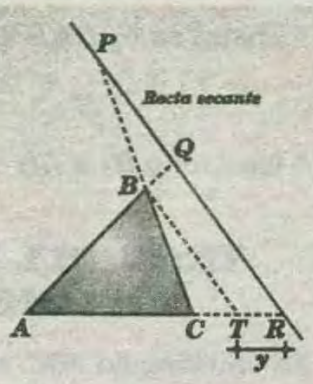
"Por un punto exterior a una recta solo se puede trazar una unica recta recta, paralela a la recta dada"

Puesto que $\overleftrightarrow{QB}\,//\,\overleftrightarrow{BP}$, entonces $\overleftrightarrow{QN}\,//\,\overleftrightarrow{QM}$. Esto significa que los puntos N, M y Q están en una recta.

TEOREMA 15 :

Toda recta secante que intersecte a los lados de un triángulo determina seis segmentos, tales que el producto de tres de ellos no consecutivos es igual al producto de los otros tres restantes.

DEMOSTRACIÓN:



* Se traza $\overline{BT} // \overline{PR}$

* Thales en el $\triangle AQR$:

$$\frac{y}{AR}=\frac{BQ}{AQ} \Rightarrow y=\frac{AR\times BQ}{AQ} \quad .....(I)$$

* Thales en el $\triangle CPR$:

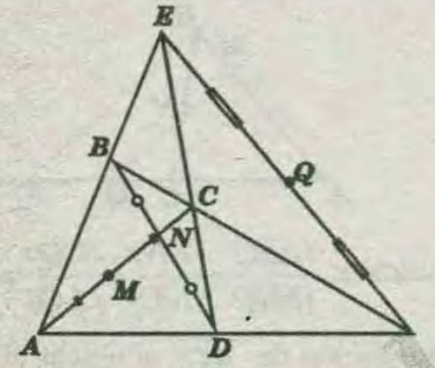
$$\frac{y}{CR}=\frac{BP}{CP} \Rightarrow y=\frac{CR\times BP}{CP} \quad .....(II)$$

* Igualando *(I)* y *(II)* : $\frac{AR\times BQ}{AQ}=\frac{CR\times BP}{CP}$

$$\Rightarrow \boxed{CR\times AQ\times BP=AR\times BQ\times CP}$$

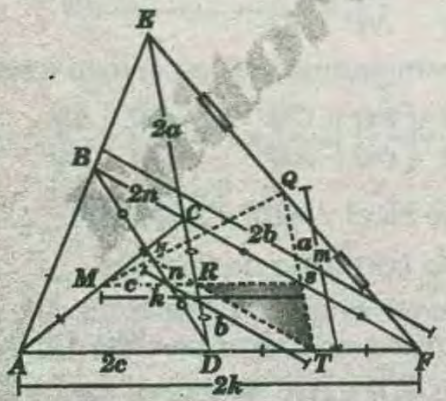
TEOREMA DE GAUSS

Los puntos medios de las diagonales de un cuadrilátero completo son colineales .



$\Rightarrow$ Los puntos *M; N* y *Q* son colineales .

DEMOSTRACIÓN :



M : Punto medio de $\overline{AC}$

N : Punto medio de $\overline{BD}$

$\triangle ACF$: se traza $\overline{MS} // \overline{AF} \Rightarrow CS=SF$

Si $\overline{MS} \cap \overline{CD}=\{R\} \Rightarrow CR=RD$

$\triangle DBC$: $\overline{NR} \cap \overline{DF}=\{T\} \Rightarrow DT=TF$

$\triangle DCF$: $\overline{TS} \cap \overline{EF}=\{Q\} \Rightarrow EQ=QF$

* Ahora demostraremos que *M,N* y *Q* son colineales

$\triangle DCF$: aplicamos el teorema de Menelao según teorema *15* ($\overleftrightarrow{ABE}$ recta secante) :

$$2a\times 2b\times 2c=2m\times 2n\times 2k$$

* De donde : $abc=mnk$

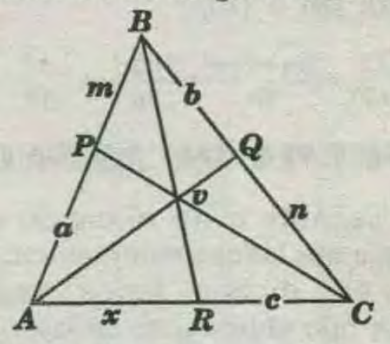
* En el $\triangle TRS$ ($\overleftrightarrow{MNQ}$ secante) en el cual se cumple: $abc=mnk$

* Según teorema recíproco de menelao , afirma que cuando se da éste resultado :

Los puntos *M; N* y *Q* son colineales .

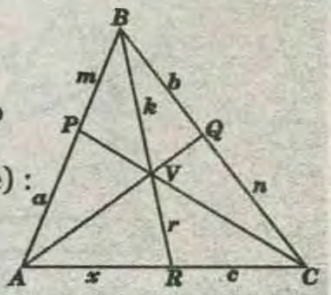
TEOREMA DE CEVA

En todo triángulo, tres cevianas interiores concurrentes dividen internamente a cada lado en segmentos; cumpliendose que el producto de las longitudes de tres de ellos, sin extremo común es igual al producto de las longitudes de los otros tres.



Se cumple : $\boxed{abc=mnk}$

DEMOSTRACIÓN :



* Por el teorema de Menelao

$\triangle ABR$ ($\overleftrightarrow{PVC}$ recta secante) :

$$akc=mr(x+c) \quad ....(I)$$

$\triangle RBC$ ($\overleftrightarrow{AVQ}$ recta secante):

$$nkx=br(x+c) \quad .....(II)$$

* de *(I)* $\div$ *(II)* :

$$\frac{ac}{nx}=\frac{m}{b} \Rightarrow \boxed{a\times b\times c=m\times n\times x}$$

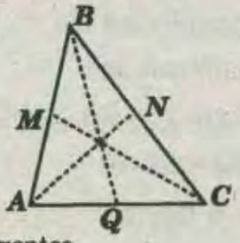
NOTA :

* Si en un problema dado se mencionan tres cevianas concurrentes entonces, es probable que su solución sea a partir del teorema de Ceva.

TEOREMA RECÍPROCO DE CEVA

Dado un triángulo ABC, se ubican los puntos M, N y Q en $\overline{AB}$; $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.

Si $\frac{(AM)}{(BM)}\times\frac{(BN)}{(CN)}\times\frac{(CQ)}{(AQ)}=1$ entonces $\overline{AN}, \overline{BQ}$ y $\overline{CM}$ son cuncurrentes .



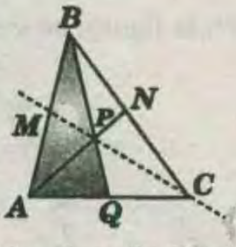
Si: $\frac{(AM)}{(BM)}\times\frac{(BN)}{(CN)}\times\frac{(CQ)}{(AQ)}=1$

$\Rightarrow \overline{AN}, \overline{BQ}$ y $\overline{CM}$ con concurrentes

DEMOSTRACIÓN :

* De la condición : $\frac{(AM)}{(BM)}\times\frac{(BN)}{(CN)}\times\frac{(CQ)}{(AQ)}=1$.....(I)

* Trazamos $\overline{AN}$ y $\overline{BQ}$ que se intersecan en D, del teorema de Menelao en el $\triangle QBC$.



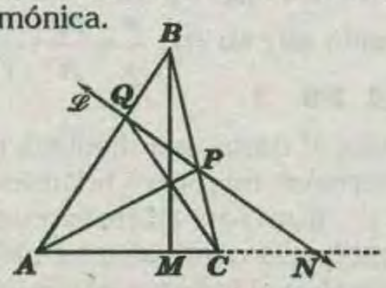
$\frac{(QP)}{(BP)}\times\frac{(BN)}{(CN)}\times\frac{(AC)}{(AQ)}=1$.....(II)

$\frac{AM}{BM}\times\frac{BP}{PQ}\times\frac{CQ}{AC}=1$

* Según el teorema recíproco de Menelao, M, P y C son colineales. Por lo tanto, $\overline{AN}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CM}$ son concurrentes en el punto P.

TEOREMA 16 :

En un triángulo al trazar tres cevianas interiores concurrentes y la recta que contiene a los pies de dos cevianas e interseca a las prolongación del tercer lado, se cumple que los cuatro puntos determinados en la recta , que contiene al tercer lado , forman una cuartena armónica.



En la figura $\overline{AP}$; $\overline{CQ}$ y $\overline{BM}$: cevianas concurrentes, por lo cual se cumple .

$A; M; C; N$: forman una cuartena armónica

DEMOSTRACIÓN :

$\triangle ABC$: teorema de Menelao

$AQ\times BP\times CN=QB\times PC\times AN \Rightarrow \frac{AQ\times BP}{QB\times PC}=\frac{AN}{CN}$.....(II)

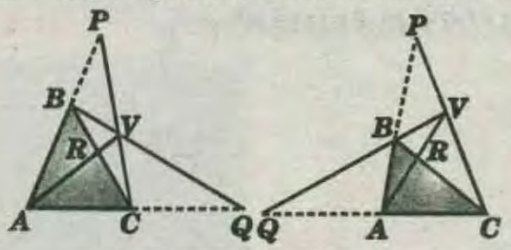
$\triangle ABC$: teorema de ceva

$AQ\times BP\times CN=QB\times PC\times AN \Rightarrow \frac{AQ\times BP}{QB\times PC}=\frac{AN}{CN}$.....(II)

$\Rightarrow A; M; C$ y N forman una cuartena armónica.

TEOREMA 17 :

En un triángulo si se trazan tres cevianas concurrentes, estas determinan en los lados seis segmentos , tales que el producto de las longitudes de tres segmentos no consecutivos es igual al producto de las longitudes de los otros tres .



$$\boxed{AP\times BR\times CQ=BP\times CR\times AQ}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Por el teorema de Menelao :

$\triangle APC$ ($\overrightarrow{BVQ}$ recta secante) :

$AB\times PV\times CQ=BP\times CV\times AQ$.....(I)

$\triangle BPC$ ($\overrightarrow{ARV}$ recta secante)

$PV\times CR\times AB=CV\times BR\times AP$.....(II)

* De (I)÷(II) :

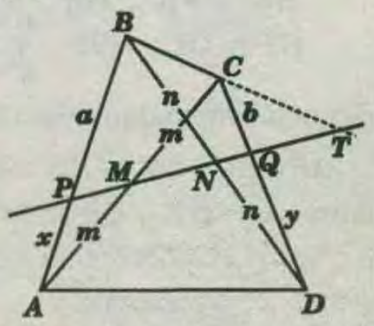
$$\frac{CQ}{CR}=\frac{BP\times AQ}{BR\times AP} \Rightarrow \boxed{AP\times BR\times CQ=BP\times CR\times AQ}$$

TEOREMA 18 :

En un cuadrilátero $ABCD$, la recta que pasa por los puntos medios de sus diagonales intersecta al lado $\overline{AB}$ en P y al lado $\overline{CD}$ en Q, se cumple que :

$$\boxed{AP\times DQ=BP\times CQ}$$

DEMOSTRACIÓN:



* Por el teorema de Menelao :

$\triangle BCD$ ($\overrightarrow{NQT}$ recta secante) :

$n\times y\times CT=n\times b\times BT$.....(I)

$\triangle ABC$ ($\overline{PMT}$ recta secante) :

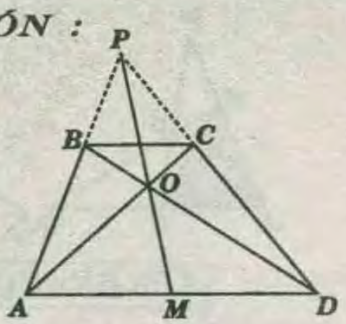
$$a \times m \times CT = x \times m \times TB \quad \ldots\ldots (II)$$

* De (I)÷(II) : $\frac{y}{a} = \frac{b}{x} \Rightarrow \boxed{ab = xy}$

TEOREMA 19 :

En un trapecio $ABCD$ ($\overline{BC} // \overline{AD}$), sus diagonales se intersectan en el punto O, las prolongaciones de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ se intersectan en P. Si $\overrightarrow{PO} \cap \overline{AD} = \{M\}$. Se cumple: $AM = MD$

DEMOSTRACIÓN :



* $\triangle APD$, por el teorema de Ceva :

$$AB \times PC \times DM = BP \times CD \times AM \quad \ldots\ldots (I)$$

* Thales en el $\triangle APD$:

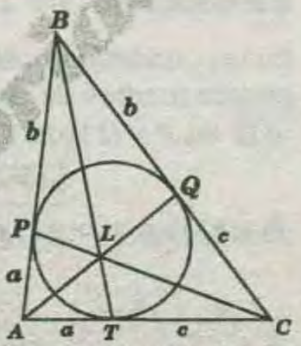
$$\frac{BP}{AB} = \frac{PC}{CD} \Rightarrow CD \times BP = AB \times PC \quad \ldots\ldots (II)$$

* De (I) y (II) : $AM = DM$

TEOREMA 20 :

En todo triángulo se cumple que los segmentos que unen los vértices con los puntos de tangencia que determina la circunferencia inscrita al triángulo, son concurrentes.

DEMOSTRACIÓN :



* Por teoría : $AP = AT$ .....(I)
$BQ = PB$ .....(II)
$CT = QC$ ....(III)

* Multiplicando ordenadamente (I); (II) y (III):

$$AP \times BQ \times CT = PB \times QC \times AT$$

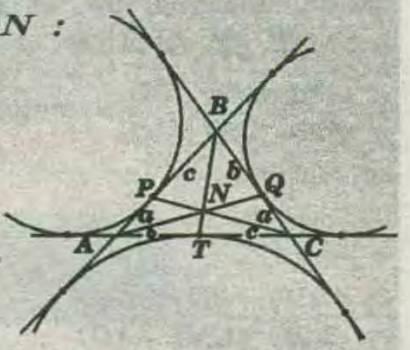
Las cevianas $\overline{AQ}$; $\overline{BT}$ y $\overline{CP}$ concurren en el punto L ya que cumple el teorema de Ceva .

L es el punto de Georgonne

TEOREMA 21 :

En todo triángulo se cumple que los segmentos que unen los vértices con los puntos de tangencia que determinan las circunferencias exinscritas al triángulo, son cocurrentes.

DEMOSTRACIÓN :



Por propiedad de circunferencia :

$AP = QC = a$; $PB = CT = c$
y $BQ = AT = b$

* De la figura :

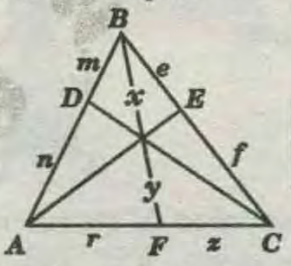
$$\underset{a}{AP} \times \underset{b}{BQ} \times \underset{c}{CT} = \underset{c}{PB} \times \underset{a}{QC} \times \underset{b}{AT}$$

Las cevianas $\overline{AQ}$; $\overline{BT}$ y $\overline{CP}$ son concurrentes en el punto "N" ya que cumple el teorema de Ceva.

N ES EL PUNTO DEL NAGEL

TEOREMA DE VAN AUBEL

En la figura, se cumple :



$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{m}{n} + \frac{e}{f}}$$

DEMOSTRACIÓN :

* En el $\triangle ABF$, por el teorema de Menelao :

$$nxt = my(r+t) \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{mr}{nt} + \frac{m}{n} \quad \ldots\ldots (I)$$

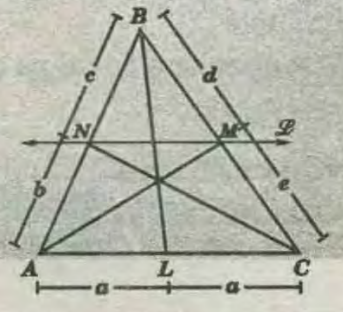
* En el $\triangle ABC$, por el teorema de Ceva:

$$net = mfr \Rightarrow \frac{mr}{nt} = \frac{e}{f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* Reemplazando (II) en (I): $\frac{x}{y} = \frac{m}{n} + \frac{e}{f}$

TEOREMA 22 :

En un triángulo, al trazar una mediana relativa a un lado y dos cevianas interiores relativas a los otros dos lados y , que son además concurrentes, entonces la recta que contiene a los pies de las dos cevianas es paralela al lado que contiene al pie de la mediana.



De la figura $\overline{BL}$: mediana y $\overline{AM}$, $\overline{CN}$: cevianas interiores.

Se cumple : $\overleftrightarrow{\mathscr{P}} // \overline{AC}$

DEMOSTRACIÓN :

* En el $\triangle ABC$, teorema de Ceva

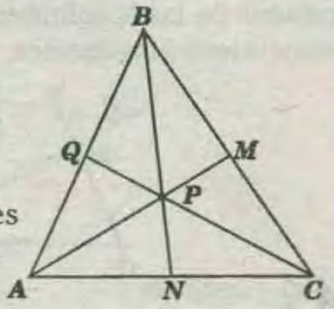
$$a(c)(e)=b(d)(a) \Rightarrow (c)(e)=(b)(d) \Rightarrow \frac{c}{b}=\frac{d}{e}$$

* La relación anterior es recíproco del colorario del teorema de THales.

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{P}} // AC$$

TEOREMA DE VAN AUBEL

En todo triángulo, al trazar tres cevianas concurrentes se cumple que el punto de concurrencia divide a cualquier ceviana en segmentos , cuya razón es igual a la suma de las razones de los segmentos determinados por las otras dos cevianas en sus lados adyacentes.



$\overline{AM}$; $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ son cevianas concurrentes en P.

Para $\overline{BN}$ se cumple :

$$\frac{BP}{PN}=\frac{BQ}{QA}+\frac{BM}{MC}$$

* Análogamente se cumple para $\overline{AM}$ y $\overline{CQ}$:

$$\boxed{\frac{AP}{PM}=\frac{CM}{MB}+\frac{CN}{NA}} \qquad \boxed{\frac{CP}{PQ}=\frac{CM}{MB}+\frac{CN}{NA}}$$

DEMOSTRACIÓN :

* En el $\triangle ABN$: del teorema de Menelao *(QPC :* recta secante)

$$\frac{BQ}{QA}\times\frac{PN}{BP}\times\frac{AC}{NC}=1 \quad \text{.....(I)}$$

* en el $\triangle NBC$: del teorema de Menelao ($\overline{APM}$: recta secante)

$$\frac{BM}{MC}\times\frac{PN}{BP}\times\frac{AC}{AN}=1 \quad \text{.....(II)}$$

* De *(I)* y *(II)* :

$$\frac{BQ}{QA}=\frac{BP}{PN}\times\frac{NC}{AC} \quad \text{.....(III)} \wedge \frac{BM}{MC}=\frac{BP}{PN}\times\frac{AN}{AC} \quad \text{.....(IV)}$$

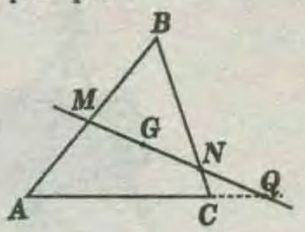
* Sumando *(III)* y *(IV)* :

$$\frac{BQ}{QA}+\frac{BM}{MC}=\frac{BP}{PN}\times\left(\frac{NC+AN}{AC}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{BP}{PN}=\frac{BQ}{QA}+\frac{BM}{MC}}$$

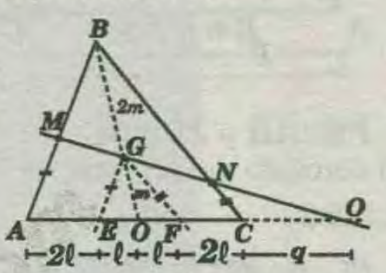
TEOREMA 23 :

En un triángulo *ABC*, de baricentro *G*, al trazar una recta por *G* que interseca a dos lados y a la prolongación del tercero en los puntos *M; N* y *Q* respectivamente, se cumple que :

$$\boxed{\frac{1}{GM}=\frac{1}{GN}+\frac{1}{GQ}}$$



DEMOSTRACIÓN :



* Trazamos la mediana $\overline{BO}$.
* Se sabe que $AO=OC \Rightarrow G$ pertenece a $\overline{BO}$
* Por propiedad : $BC=2(CO)=2m$
* Sea $AO=OC=3\ell$ y $CQ=q$
* por *G* trazamos $\overline{GE} // \overline{BA} \Rightarrow AE=2(EO)=2\ell$
* por *G* trazamos $\overline{GF} // \overline{BC} \Rightarrow CF=2(FO)=2\ell$
* Luego se observa :

$$GE//MA \Rightarrow \frac{GQ}{GM}=\frac{4\ell+q}{2\ell} \quad \text{.....(I)}$$

$$GF//NC \Rightarrow \frac{GQ}{GN}=\frac{2\ell+q}{2\ell} \quad \text{.....(II)}$$

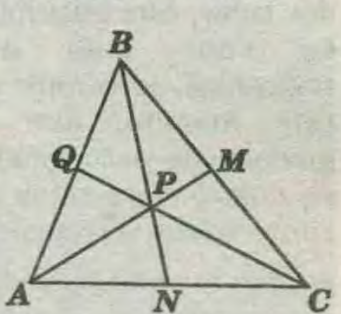
* De *(I)* y *(II)* : $\frac{GQ}{GM}-\frac{GQ}{GN}=\frac{2\ell}{2\ell}=1$

* Dividiendo entre *GQ* :

$$\frac{1}{GM}-\frac{1}{GN}=\frac{1}{GQ} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{GM}=\frac{1}{GQ}+\frac{1}{GN}}$$

TEOREMA DE GEORGONNE

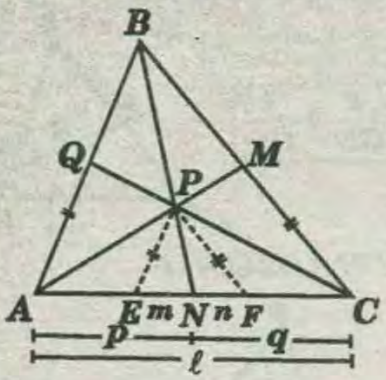
En todo triángulo , al trazar tres cevianas concurrentes, la suma de las razones de los segmentos limitados por el punto de concurrencia y los pies de cada ceviana con la ceviana que la contiene es uno.



Si $\overline{AM}$; $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}=1$ son cevianas concurrentes en P.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{MP}{AM}+\frac{NP}{BN}+\frac{QP}{CQ}=1}$$

DEMOSTRACIÓN :



*trazamos $\overline{PE}//\overline{AB}$ y $\overline{PF}//\overline{BC}$ así en la figura aplicando el corolario del teorema de Thales en :

$\triangle ABN$ y $\triangle NBC$

$$\frac{NP}{BN}=\frac{m}{p}=\frac{n}{q}=\frac{m+n}{p+q}=\frac{m+n}{\ell} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$\triangle AQC$ Por el corolario

$$\frac{QP}{CQ}=\frac{p-m}{\ell} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

$\triangle AMC$: Por el corolario

$$\frac{MP}{AM}=\frac{q-n}{\ell} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

* De *(II)+(III)* y ordenado :

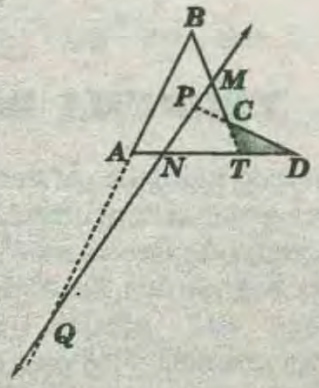
$$\frac{QP}{CQ}+\frac{MP}{AM}=\frac{(p+q)-(m+n)}{\ell} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (IV)$$

* Reemplazando *(I)* en *(IV)* :

$$\frac{QP}{CQ}+\frac{MP}{AM}=1-\frac{NP}{BN} \Rightarrow \frac{MP}{AM}+\frac{NP}{BN}+\frac{QP}{QC}=1$$

TEOREMA 24 :

Si en un cuadrilátero no convexo se traza una recta secante que interseca a dos lados, esta determina en cada lado dos segmentos, se cumple de esta manera, que el producto de las longitudes de cuatro segmentos no consecutivos son iguales.



Si $\overline{MQ}$: secante al cuadrilátero $ABCD$.

$$\boxed{BM\times PC\times ND\times AQ=NA\times BQ\times PD\times MC}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Se prolonga BC hasta T.

$\triangle BAT$ (Teorema de Menelao primer caso , donde $\overrightarrow{MQ}$: secante).

$$MT\times NA\times BQ=BM\times TN\times AQ \Rightarrow \frac{MT}{NT}=\frac{BM\times AQ}{NA\times BQ} \quad \ldots\ldots\ldots (I)$$

$\triangle CDT$ (Teorema de Menelao segundo caso, $\overrightarrow{MN}$: secante)

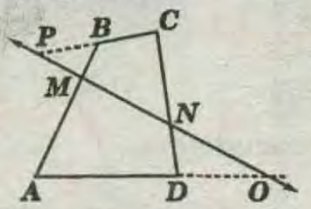
$$\frac{PD}{PC}\times\frac{MC}{MT}\times\frac{NT}{ND}=1 \Rightarrow \frac{MT}{NT}=\frac{PD\times MC}{PC\times ND} \quad \ldots\ldots\ldots (II)$$

* Igualando *(I)* y *(II)* :

$$\frac{BM\times AQ}{NA\times BQ}=\frac{PD\times MC}{PC\times ND} \Rightarrow \boxed{BM\times PC\times ND\times AQ=NA\times BQ\times PD\times MC}$$

TEOREMA 25 :

Si en un cuadrilátero convexo, se traza una recta secante que interseca a dos lados, esta determina en cada lado dos segmentos. Así, se cumple que el producto de las longitudes de cuatro segmentos no consecutivos son iguales.

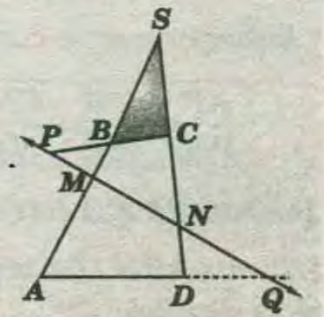


Si $\overrightarrow{PQ}$; secante

$$\boxed{AM\times PB\times CN\times DQ=MB\times PC\times ND\times AQ}$$

DEMOSTRACIÓN :

Se prolongan AR y DC hasta que se intersequen en S. $\triangle ASD$ (Teorema de Menelao primer caso)



$$AM\times SN\times DQ=MS\times ND\times AQ$$

$$\Rightarrow \frac{MS}{SN}=\frac{AM\times DQ}{ND\times AQ} \quad \ldots\ldots\ldots (I)$$

$\triangle BSC$ (Teorema de Menelao segundo caso)

$$\frac{MS}{SN}\times\frac{PB}{PC}\times\frac{NC}{NS}=1 \Rightarrow \frac{MS}{NS}=\frac{MB\times PC}{PB\times NC} \quad \ldots\ldots\ldots (II)$$

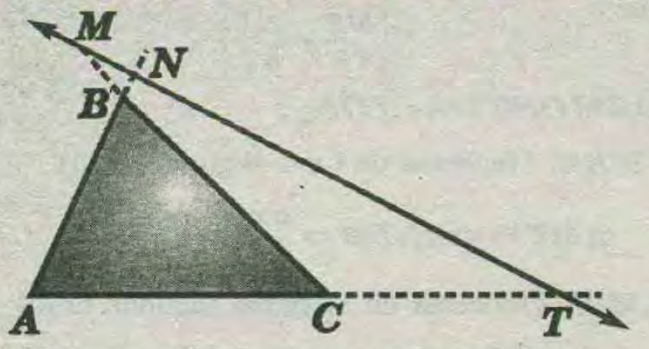
* Igualando *(I)* y *(II)* :

$$\frac{AM\times DQ}{ND\times AQ}=\frac{MB\times PC}{PB\times NC} \Rightarrow \boxed{AM\times PB\times NC\times DQ=MB\times PC\times ND\times AQ}$$

TEOREMA DE MENELAO (SEGUNDO CASO)

Si en un triángulo se traza una recta secante, que interseca a las prolongaciones de sus tres lados, esta determina seis segmentos. Se cumple, por consiguiente, que el producto de las longitudes de

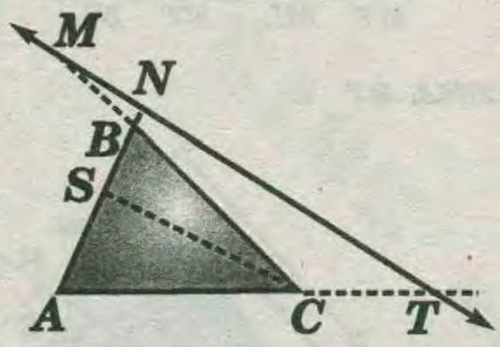
tres segmentos no consecutivos son iguales.



Sea $\overleftrightarrow{MT}$: secante a la prolongación de los lados del triángulo ABC.

$$\boxed{AN\times CT\times BM = AT\times BN\times CM}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Se traza $\overline{CS}\,//\,\overline{MT}$

$\triangle ANT$: (colorario del teorema de thales)

$$\frac{SN}{AN}=\frac{CT}{AT}\rightarrow SN=AN\times\frac{CT}{AT}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$\triangle SBC$: (Corolario del teorema de Thales)

$$\frac{SN}{BN}=\frac{CM}{BM}\Rightarrow SN=BN\times\frac{CM}{BM}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

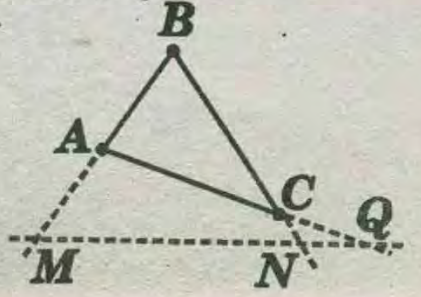
* Igualando *(I)* y *(II)* :

$$AN\times\frac{CT}{AT}=BN\times\frac{CM}{BM}\Rightarrow AN\times CT\times BM=AT\times BN\times CM$$

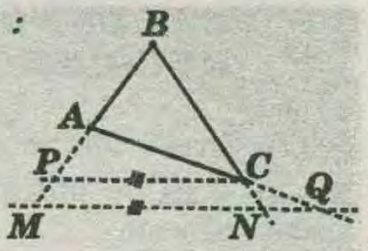
SEGUNDO TEOREMA RECÍPROCO DE MENELAO

Dado un triángulo ABC, en las prolongaciones de $\overline{BA}$; $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, se ubican los puntos M; N y Q.

Si $\frac{(BM)}{(AM)}\times\frac{(CN)}{(AM)}\times\frac{(AQ)}{(CQ)}=1$, los puntos M; N y Q son colineales .



DEMOSTRACIÓN :



* De la condición :

$$\frac{(BM)}{(AM)}\times\frac{(CN)}{(BN)}\times\frac{(AQ)}{(CQ)}=1\ldots\ldots(I)$$

* Si por C trazamos $\overline{CP}\,//\,\overline{MN}$, en el $\triangle MBN$

$$\frac{BN}{CN}=\frac{BM}{PM}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

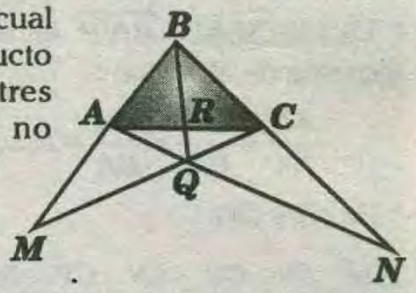
* Reemplazando *(II)* en *(I)* :

$$\frac{BM}{AM}\times\left(\frac{PM}{BM}\right)\times\frac{AQ}{CQ}=1\Rightarrow\frac{AQ}{CQ}=\frac{AM}{PM}$$

* Por lo tanto, en el $\triangle MAQ$: $\overline{MQ}\,//\,\overline{PC}$ y como por M solo se puede trazar una recta paralela a $\overline{PC}$ entonces $N\in\overline{MQ}$ Esto implica que M; N y Q son colineales .

TEOREMA DE CEVA (SEGUNDO CASO)

Si en un triángulo dos cevianas exteriores y una ceviana interior son concurrentes , estas determinan seis segmentos, en el cual se cumple que el producto de las longitudes de tres segmentos no consecutivos es igual.



Si $\overline{CM}$; $\overline{AN}$: cevianas exteriores del $\triangle ABC$

BR : ceviana interior del $\triangle ABC$

$$\boxed{NB\times CR\times AM = NC\times AR\times MB}$$

DEMOSTRACIÓN :

* En el $\triangle BRC$ (Teorema de Menelao segundo caso)

$$\frac{QB}{QR}\times\frac{AR}{AC}\times\frac{NC}{NB}=1\Rightarrow\frac{QB}{QR\times AC}=\frac{NB}{AR\times NC}\quad\ldots\ldots\ldots(I)$$

* En el $\triangle BRA$ (Teorema de Menelao segundo caso)

$$\frac{QB}{QR}\times\frac{CR}{CA}\times\frac{MA}{MB}=1\Rightarrow\frac{QB}{QR\times AC}=\frac{MB}{CR\times MA}\quad\ldots\ldots\ldots(II)$$

* Igualando *(I)* y *(II)* :

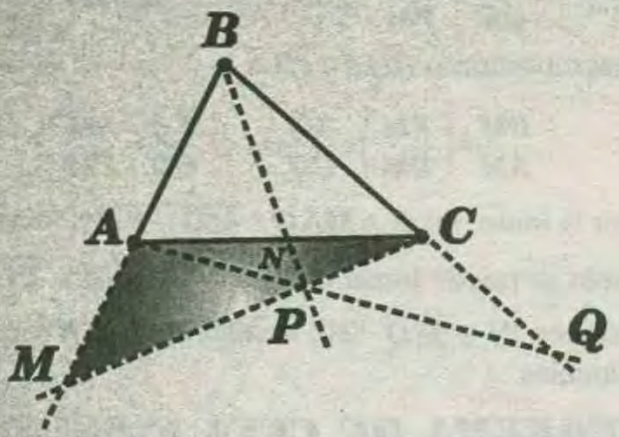
$$\frac{NB}{AR\times NC}=\frac{MB}{CR\times MA}\Rightarrow\boxed{NB\times CR\times MA=MB\times AR\times NC}$$

WWW.GRATIS2.COM

SEGUNDO TEOREMA RECÍPROCO DE CEVA

Sea el triángulo *ABC*, en $\overline{AC}$ y en las prolongaciones de $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos *N*, *M* y *Q*, respectivamente.

Si $\frac{(BM)}{(AM)}\times\frac{(AN)}{(NC)}\times\frac{(CQ)}{(BQ)}=1$, entonces las rectas *AQ*; *BN* y *CM* son concurrentes.



DEMOSTRACIÓN :

* De la condición : $\frac{(BM)}{(AM)}\times\frac{(CN)}{(BN)}\times\frac{(AQ)}{(CQ)}=1$ .....*(I)*

* En el $\triangle MAC$; $\overleftrightarrow{BNP}$ es una recta secante y del teorema de Menelao :

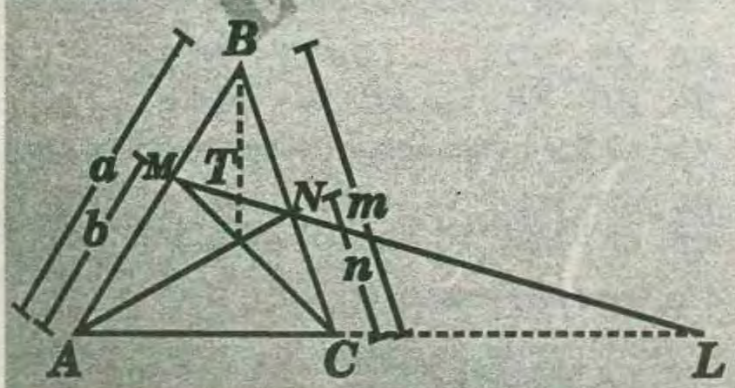
$$\frac{AN}{NC}\times\frac{CP}{PM}\times\frac{BM}{BA}=1 \text{.....(II)}$$

* De *(I)* y *(II)* :

$$\frac{BM}{AM}\times\frac{AN}{NC}\times\frac{CQ}{BQ}=\frac{AN}{NC}\times\frac{CP}{PM}\times\frac{BM}{BA}\Rightarrow\boxed{\frac{BA}{AM}\times\frac{PM}{CP}\times\frac{CQ}{BQ}=1}$$

* Del teorema recíproco de Menelao, para el $\triangle MBC$, *A*, *P* y *Q* son colineales. Por lo tanto $\overleftrightarrow{AQ}$; $\overleftrightarrow{BN}$ y $\overleftrightarrow{CM}$ son concurrentes en el punto *P*.

TEOREMA 26 :



Si en el triángulo *ABC*: $\overline{ML}$ es secante, entonces *M* ; *T* ; *N* y *L* son puntos armónicos, esto significa que :

$$\boxed{\frac{MT}{TN}=\frac{ML}{NL}}$$

DEMOSTRACIÓN :

$\triangle MBN$ (Teorema de Ceva segundo caso)

$$a(MT)n=m(NT)b\Rightarrow\frac{a\times n}{m\times b}=\frac{NT}{MT} \text{.....(I)}$$

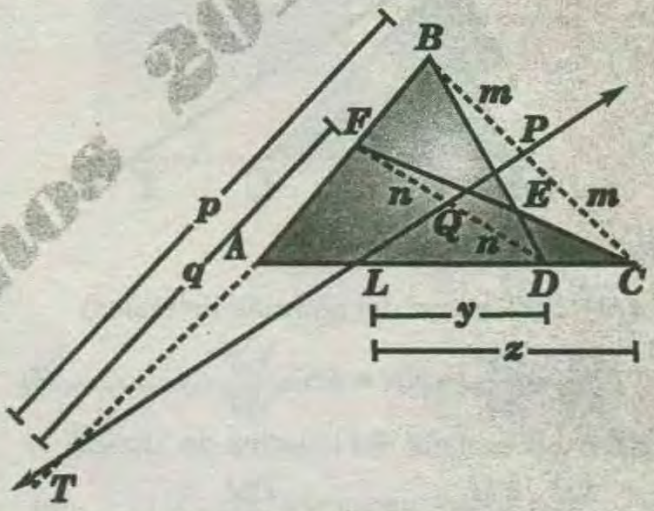
$\triangle MBN$ (Teorema de Menelao segundo caso)

$$\Rightarrow\frac{m}{n}\times\frac{(NL)}{(ML)}\times\frac{b}{a}=1\Rightarrow\frac{a\times n}{m\times b}=\frac{NL}{ML} \text{.....(II)}$$

* Igualando *(I)* y *(II)* :

$$\frac{NT}{MT}=\frac{NL}{ML}\Rightarrow\frac{MT}{NT}=\frac{ML}{NL}$$

TEOREMA 27 :



Si en el cuadrilátero *ABEC* se traza la recta $\overline{PT}$ que contiene a los puntos medios de $\overline{BC}$ y *FD* ,entonces:

$$\boxed{\frac{p}{q}=\frac{z}{y}}$$

DEMOSTRACIÓN :

* En el $\square FBCD$ (Teorema)

$$DQ\times TF\times BP\times CL=QF\times TB\times PC\times DL$$

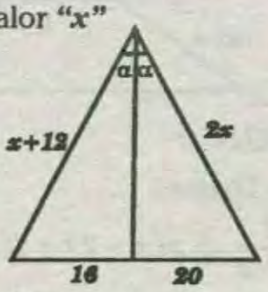
$$\Rightarrow n\times q\times m\times z=n\times p\times m\times y\Rightarrow\boxed{\frac{p}{q}=\frac{z}{y}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Determinar el valor "x"

A)16
B)20
C)18
D)24
E)15



RESOLUCIÓN :

* Por el teorema de la bisectriz interior :

$$\frac{x+12}{2x}=\frac{16}{20}$$

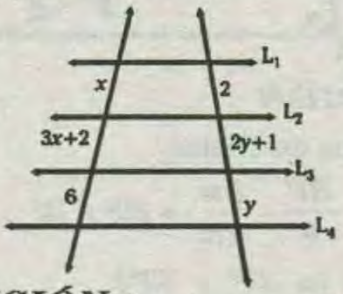
* Resolviendo : $x = 20$

RPTA : "B"

PROBLEMA 2 :

Si : $L_1 // L_2 // L_3$, calcular "x" :

A)1
B)2
C)3
D)4
E)5



RESOLUCIÓN :

* Por el teorema de Thales :

$$\frac{x}{6}=\frac{2}{y}\rightarrow xy=12$$

* Nuevamente :

$$\frac{x}{3x+2}=\frac{2}{2y+1}\Rightarrow 2xy+x=6x+4$$

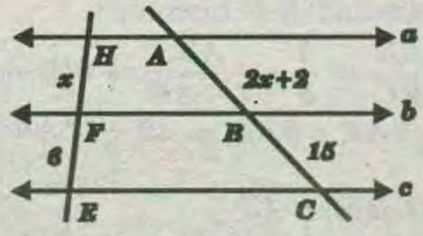
$$\Rightarrow 2(12)+x=6x+4\Rightarrow x=4$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3 :

Las rectas "a" , "b" "c" son paralelas. Hallar "AB".

A) 8
B) 6
C)10
D)12
E)14



RESOLUCIÓN:

* Por el teorema de Thales :

$$\frac{x}{6}=\frac{2x+2}{15}\Rightarrow 15x=6(2x+2)\Rightarrow 15=12x+12\Rightarrow x=4$$

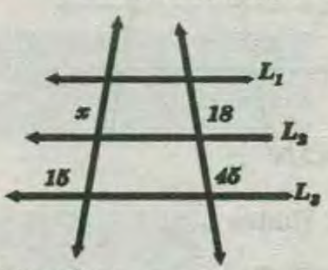
* Entonces : $AB=2(4)+2=10$

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

Determinar "x", si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2} // \overrightarrow{L_3}$

A) 4
B) 6
C) 8
D)10
E) 9



RESOLUCIÓN :

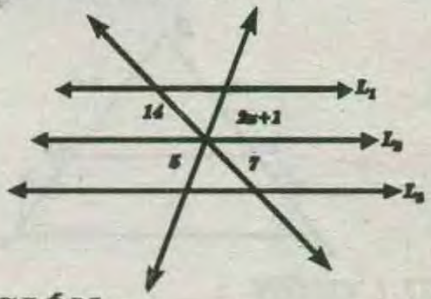
* Por el teorema de Thales : $\frac{x}{15}=\frac{18}{45}\Rightarrow x=6$

RPTA : "B"

PROBLEMA 5 :

Calcular "x", si : $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2} // \overrightarrow{L_3}$

A) 3
B)4,5
C)5
D)5,5
E) 6



RESOLUCIÓN :

* Por el teorema de Thales :

$$\frac{2x+1}{5}=\frac{14}{7}\rightarrow 2x+1=10$$

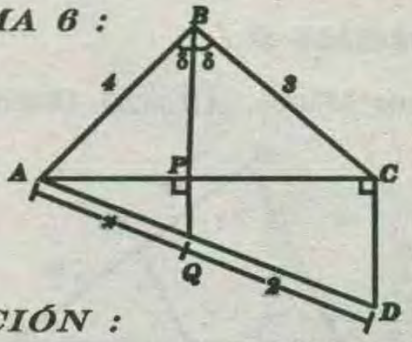
$$\rightarrow 2x=9\rightarrow x=4,5$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 6 :

Calcular "x".

A) 2
B) 1
C) 1,5
D) 3
E) 8/3



RESOLUCIÓN :

* Por el Teorema de la Bisectriz : $\frac{AP}{AC}=\frac{4}{3}$ ..... (I)

* Por el Teorema de Thales : $\frac{AP}{AC}=\frac{x}{2}$ ..... (II)

* De (I) y (II), se obtiene : $\frac{4}{3}=\frac{x}{2}\rightarrow x=\frac{8}{3}$

RPTA : "E"

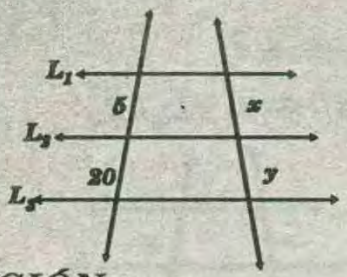
www.GRATIS2.com

PROBLEMA 7 :

En la figura : $x + y = 40\ cm$

Determinar "x". Si : $L_1 // L_2 // L_3$

A) 8
B) 6
C)10
D) 4
E) 9



RESOLUCIÓN :

* Por el teorema Thales : $\frac{5}{20} = \frac{x}{y} \rightarrow y = 4x$

* Que reemplazarlo en el dato : $x + y = 40$

* Se obtendrá :

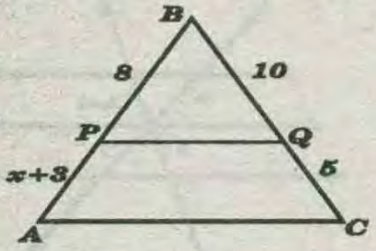
$$x + 4x = 40 \Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow x = 8$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 8 :

Determinar "x", Si : $\overline{PQ} // \overline{AC}$

A)2
B)1
C)3
D)4
E)5



RESOLUCIÓN :

* Por consecuencia del teorema del Thales en un triángulo , se obtendrá :

$$\frac{8}{x+3} = \frac{10}{5} \rightarrow 8 = 2(x+3)$$

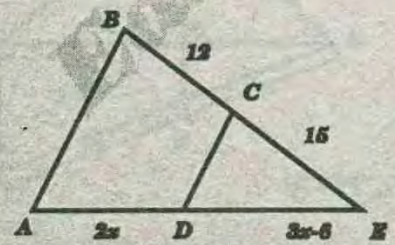
$$\rightarrow 4 = x + 3 \rightarrow 1 = x$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 9 :

En la figura adjunta. $\overline{AB} // \overline{CD}$. Determinar el valor de "x".

A)8
B)10
C)12
D)16
E)15



RESOLUCIÓN :

* Por consecuencia del teorema de Thales :

$$\frac{15}{12} = \frac{3x-6}{2x} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{3x-6}{2x}$$

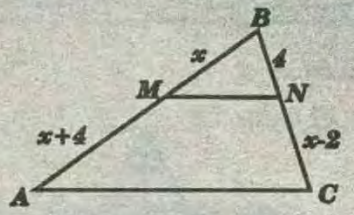
$$\Rightarrow 10x = 12x - 24 \Rightarrow 24 = 2x \Rightarrow 12 = x$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

¿Para que valor "x" es $\overline{MN} // \overline{AC}$?

A)8
B)6
C)14
D)16
E)20



RESOLUCIÓN :

* Por le teorema Thales :

$$\frac{x}{x+4} = \frac{4}{x-2} \Rightarrow x(x-2) = 4(x+4)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x = 4x + 16 \Rightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$$

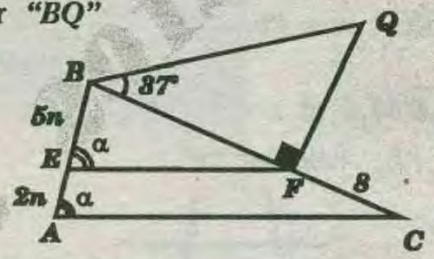
$$\Rightarrow (x-8)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 8$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 11 :

Determinar "BQ"

A) 30u
B) 20
C) 40
D) 25
E) 32



RESOLUCIÓN :

* Por el teorema de Thales :

$$\frac{BF}{8} = \frac{5n}{2n} \rightarrow BF = 20$$

* $\triangle BFQ$ ($\triangle$ de $37°$ y $53°$):

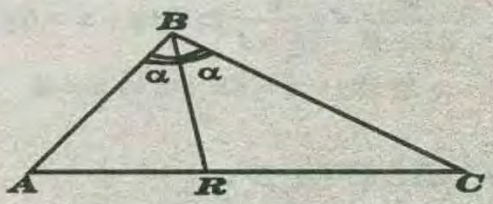
$$BQ = \frac{BF}{4} \times 5 \rightarrow BQ = 25$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 12 :

Determinar "AR", si: $AB = 6$, $BC = 8$; $AC = 7$.

A)1
B)2
C)3
D)4
E)6



RESOLUCIÓN :

* Por propiedad de la bisectriz :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AR}{RC} \Rightarrow \frac{6}{8} = \frac{AR}{7-AR} \Rightarrow 6(7-AR) = 8AR$$

$$\Rightarrow 42 - 6AR = 8AR \Rightarrow 42 = 14AR \Rightarrow AR = 3$$

RPTA : "C"

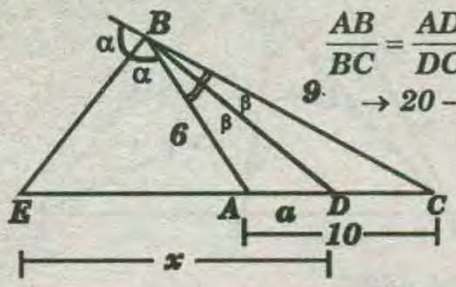
PROBLEMA 13 :

En un triángulo ABC; $AB = 6$, $BC = 9$ y $AC = 10$. Se traza la bisectriz interior BD y la exterior BE. Hallar "ED".

A) 12 B) 24 C) 32 D) 48 E) 38

RESOLUCIÓN :

* Por propiedad de la bisectriz interior :



$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}\rightarrow\frac{6}{9}=\frac{a}{10-a}$$

$$\rightarrow 20-2a=30\Rightarrow a=4$$

* Por propiedad de la bisectriz exterior :

$$\frac{AB}{BC}=\frac{EA}{EC}\Rightarrow\frac{6}{9}=\frac{x-a}{x+10-a}$$

$$\Rightarrow 2(x+6)=3(x-4)\Rightarrow 2x+12=3x-12$$

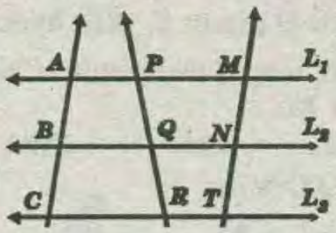
$$\Rightarrow x=24$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 14 :

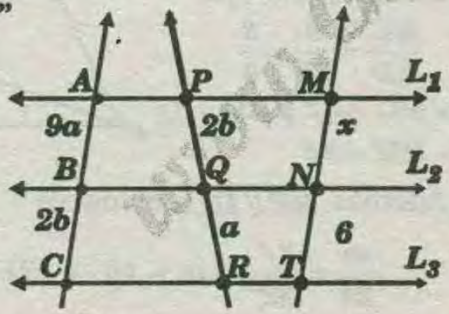
Según la figura $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$; calcular MN si $NT = 6, AB = 9a, BC=2b ; PQ = 2b$ y $QR = a$

A)12
B)16
C)18
D)20
E)14



RESOLUCIÓN :

* Nos piden "MN"



* Por teorema de Thales :

$$\frac{x}{6}=\frac{2b}{a}\rightarrow x=12\frac{b}{a}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$\Rightarrow\frac{9a}{2b}=\frac{2b}{a}\Rightarrow 9a^2=4b^2\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{3}{2}\quad\ldots\ldots(II)$$

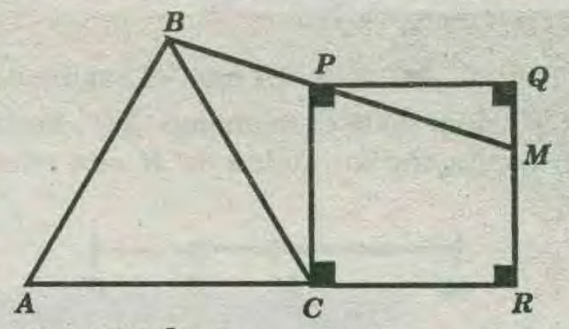
* Luego de *(II)* en *(I)* : $x=12\left(\frac{3}{2}\right)=18$

RPTA: "C"

PROBLEMA 15 :

Según la figura el triángulo ABC es equilátero y $PQRC$ es un cuadrado. Calcular BP, si $PM=6$ y dichos polígonos son isoperimétricos.

A)2
B)4
C)6
D)8
E)3

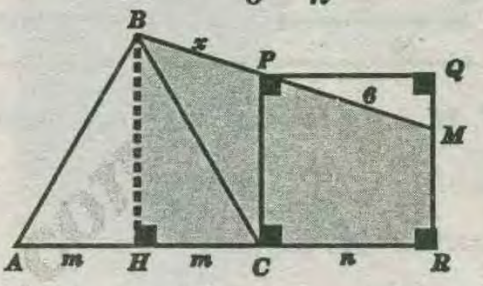


RESOLUCIÓN :

* Nos piden "BP" = "x"

* Trazamos la altura $\overline{BH}$

* Teorema de Thales : $\frac{x}{6}=\frac{m}{n}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$



* Datos : $2P_{\triangle ABC}=2P_{\square ABCD}$

$$\Rightarrow 6m=4n\Rightarrow\frac{m}{n}=\frac{2}{3}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

* De *(II)* en *(I)* : $x=4$

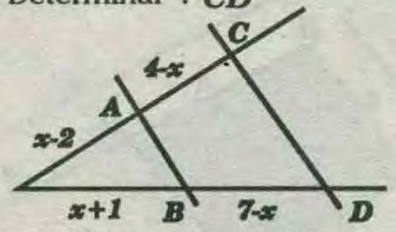
RPTA : "B"

PROBLEMA 16 :

En la figura : $\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$

Si : $AB = 3$. Determinar : $\overline{CD}$

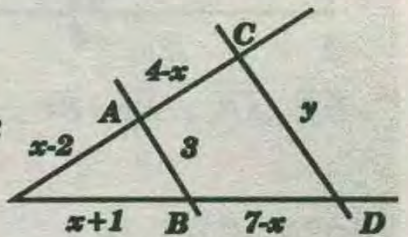
A)4
B)5
C)6
D)7
E)8



RESOLUCIÓN :

* Por Thales :

$$\frac{x-2}{4-x}=\frac{x+1}{7-x}\Rightarrow x=3$$



* Luego :

$$\frac{y}{3}=\frac{x+1+7-x}{x+1}\Rightarrow\frac{y}{3}=\frac{8}{x+1}$$

* Entonces : $\frac{y}{3}=\frac{8}{4}\rightarrow y=6$

RPTA : "C"

WWW.GRATISPDF.COM

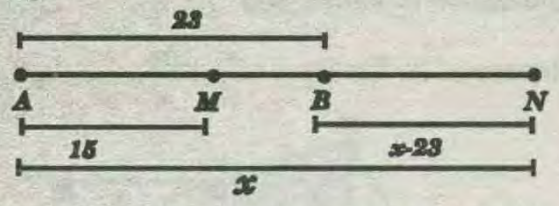
PROBLEMA 17 :

El segmento $\overline{AB}$ mide *23 cm.*, el segmento $\overline{AM}$ *15cm*. ¿Cuánto mide el segmento $\overline{AN}$, siendo *N* el punto conjugado armónico de *M* con relación a $\overline{AB}$?.

A) 33,00 cm *B) 49,28* *C) 45,26* *D) 33,95*

RESOLUCIÓN :

* Dada la figura :



* Como *A, M, B* y *N* forman una cuaterna armónica se cumple : $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{BN}$

* Reemplazando del gráfico :

$$\frac{15}{23}=\frac{x}{x-23}\rightarrow x=49,28$$

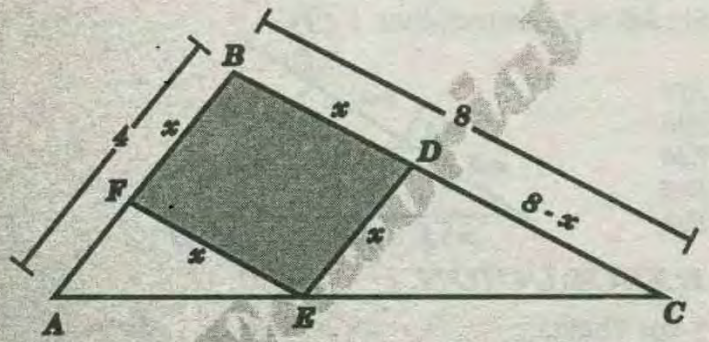
RPTA : "B"

PROBLEMA 18 :

En un triángulo *ABC*, $AB = 4$, $BC = 8$. Se inscribe el rombo *BDEF* $(D\in\overline{BC}, F\in\overline{AB})$. Calcule *BD*.

A) 2 *B) 4* *C)8/3* *D)3* *E)6*

RESOLUCIÓN :



$$\overline{DE}\parallel\overline{AB}\ ;\ \overline{EF}\parallel\overline{BC}\Rightarrow\frac{x}{4}=\frac{8-x}{8}\rightarrow x=\frac{8}{3}$$

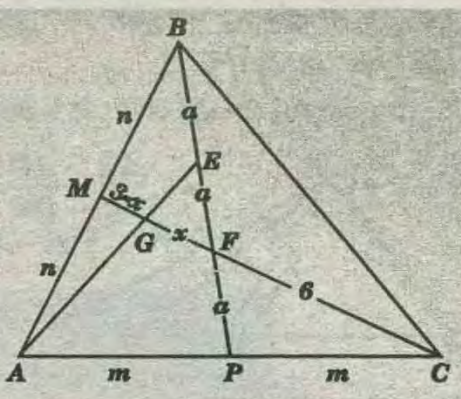
RPTA : "C"

PROBLEMA 19 :

En un triángulo se trazan las medianas $\overline{CM}$ y $\overline{BP}$ que se intercepta en *F*. Si $E\in\overline{BP}$ tal que $\overline{AE}\cap\overline{CM}=\{G\}$ y $BE = FP$, calcule *GF*, si $FC=6u$.

A)1,5 *B)2* *C)2,5* *D)1,8* *E)3,2*

RESOLUCIÓN :



F es baricentro del ΔABC.

$\Rightarrow BE=EF=FP=a\ ;\ FC=2\,.MF=6$

* Se pide hallar $GF=x\Rightarrow MG=3-x$.

* Por el teorema de Menelao en el *DMBF* ($\overline{AE}$ recta secante) : $a\times x\times n = a(3-x)\times 2n$

$$x=6-2x\Rightarrow 3x=6\Rightarrow x=2$$

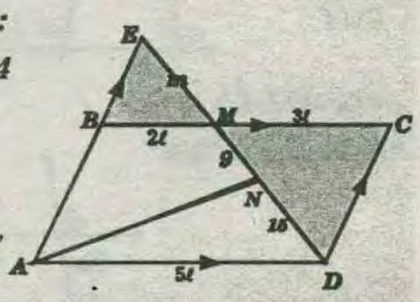
RPTA : "B"

PROBLEMA 20 :

Dado un paralelogramo *ABCD* en la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica el punto *E*. $\overline{ED}$ interseca a $\overline{BC}$ y a $\overline{AC}$ en *M* y *N* respectivamente. Calcular : *ED* si $MN = 9$ y $ND = 15$

A)20 *B)16* *C)40* *D)25* *E)31*

RESOLUCIÓN :



* Piden : $ED = m + 24$

* Como : $\overline{MC}\parallel\overline{AD}$

$$\frac{MC}{AD}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

$\rightarrow MC = 3\ell$ y $AD = 5\ell$

$\rightarrow BM = 2\ell$

* Además $\overline{BE}\parallel\overline{DC}$, entonces :

$$\frac{m}{24}=\frac{2\ell}{3\ell}\rightarrow m=16\rightarrow ED=40$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 21 :

En la figura mostrada $\overline{BM}\parallel\overline{CN}$ y $\overline{MC}\parallel\overline{ND}$.

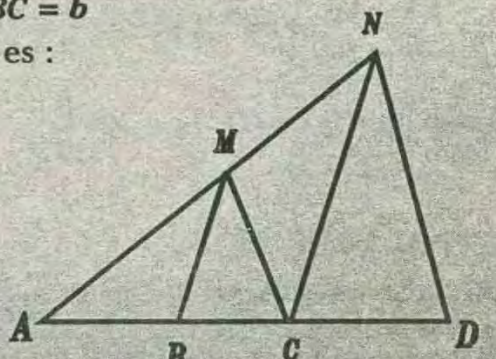
Si $AB = a$ y $BC = b$

Entonces *CD* es :

A) $\frac{a}{b}(a+b)$

B) $\frac{b}{a}(a+b)$

C) $\frac{a^2}{b}$

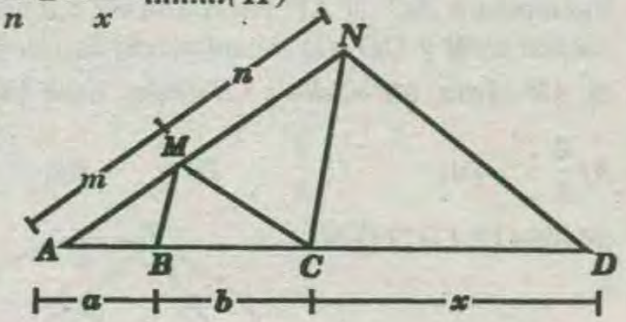


RESOLUCIÓN :

* Por el teorema Thales :

$$\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$\frac{m}{n}=\frac{a+b}{x}\ldots\ldots\ldots(II)$$



* De *(I)* y *(II)* : $\frac{a}{b}=\frac{a+b}{x} \rightarrow x=\frac{b}{a}(a+b)$

RPTA : "B"

PROBLEMA 22 :

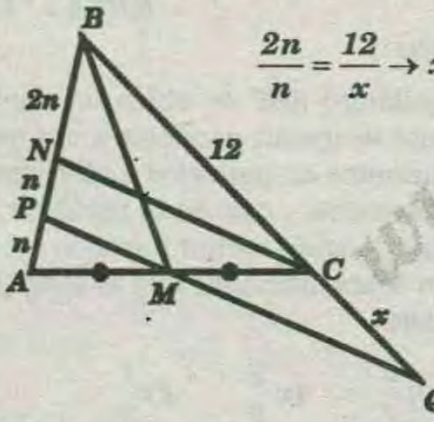
En el triángulo *ABC*, $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ son medianas. Si $\overline{CN}(P \in \overline{AB})\overline{PM} \cap \overline{BC} = \{Q\}$ y $BC=12u$, entonces CQ (en u) es :

A)4 B)5 C)6 D)8 E)3

RESOLUCIÓN :

* Por el teorema de los puntos, si $\overline{MP} // \overline{CN} \rightarrow NP = PA$

* Por el teorema de Thales :



$$\frac{2n}{n}=\frac{12}{x} \rightarrow x=6$$

RPTA : "C"

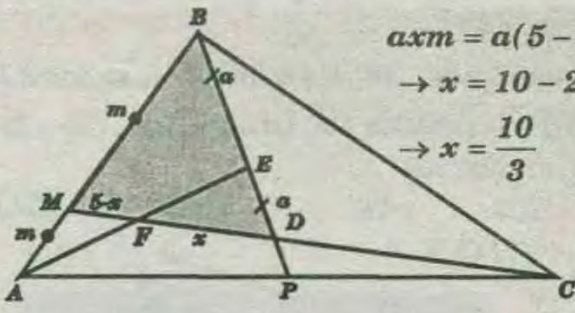
PROBLEMA 23 :

En un triángulo *ABC* se trazan las medianas $\overline{CM}$ y $\overline{BP}$ que se interceptan en *D*. Si $E \in \overline{BD}$ tal que $\overline{AE} \cap \overline{CM} = \{F\}, BE = DP$ y $DC = 10u$ Entonces FD(en u) es :

A)2 B) 5 C)3 D) 10/3 E)4

RESOLUCIÓN :

* Por el teorema de Menéalo en el ΔMBD(EA secante):



$$axm = a(5-x)(2m)$$

$$\rightarrow x = 10 - 2x$$

$$\rightarrow x = \frac{10}{3}$$

RPTA : "D"

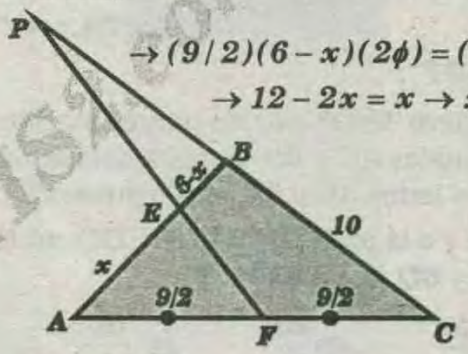
PROBLEMA 24 :

En el triángulo *ABC* sus lados mide: $AB = 6u$, $BC = 10u$ y $AC=9u$. Si $F \in \overline{AC}$ tal que $AF = FC, E \in \overline{AB}$ y $\overline{FE} \cap \overline{CB} = (P)$ tal que $BP = 10u$, entonces AE (en u) es:

A)4 B)5 C)4,5 D)3 E)3,5

RESOLUCIÓN :

* Por el teorema de Menélao en el ΔABC. ($\overline{FP}$: secante).



$$\rightarrow (9/2)(6-x)(2\phi) = (9/2)x.1\phi$$

$$\rightarrow 12 - 2x = x \rightarrow x = 4$$

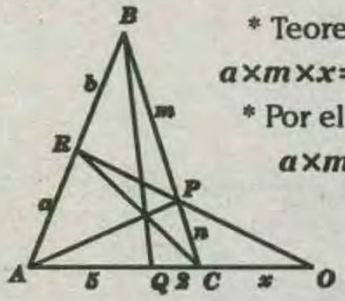
RPTA : "A"

PROBLEMA 25 :

En un triángulo *ABC* se traza las cevianas concurrentes $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CR}$. Las prolongaciones de los segmentos $\overline{RP}$ y $\overline{AC}$ se intersectan en el punto *O*. Hallar *OC*, si $AQ=5$ y $QC = 2$.

A)1 B) 2 C) 3,5 D) $\frac{14}{3}$ *E)* $\frac{13}{5}$

RESOLUCIÓN :



* Teorema de Melenao en ΔABC :

$$a \times m \times x = b \times n \times (7+x) \ldots\ldots\ldots(I)$$

* Por el teorema de Ceva :

$$a \times m \times 2 = b \times n \times 5 \ldots\ldots\ldots(II)$$

* Ahora *(I)* ÷ *(II)*:

$$\frac{amx}{am2}=\frac{bn(7+x)}{bn5} \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{7+x}{5} \Rightarrow x=\frac{14}{3}$$

RPTA : "D"

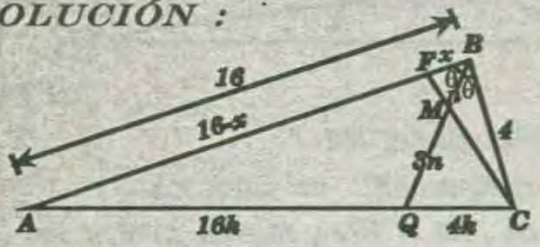
WWW.GRATIS2.COM

PROBLEMA 26 :

Sea el triángulo ABC, $AB = 16$, $BC = 4$, se traza la bisectriz $\overline{BQ}$ y la ceviana $\overline{CF}$ tal que $\overline{BQ} \cap \overline{CF} = M$, $MQ = 3MQ$. Hallar BF.

A)1 B)2 C)3 D)3,2 E)1,6

RESOLUCIÓN :



* Por teorema de la bisectriz :

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{16}{4} \rightarrow AQ = 16k \wedge QC = 4k$$

* En el ΔABQ ; por el teorema de Menélao :

$$(16-x)(n)(4k) = (x)(3n)(20k)$$

$$\rightarrow 16 - x = 15x \rightarrow x = 1$$

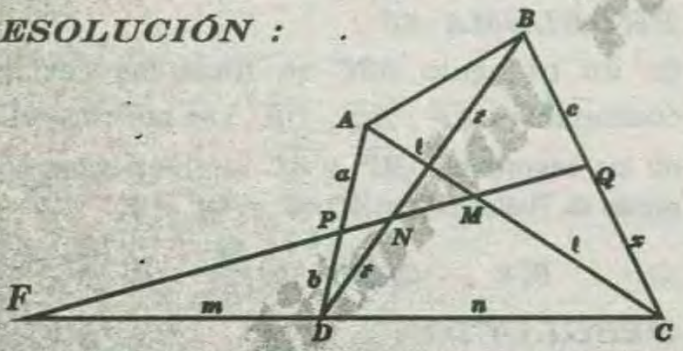
RPTA : "A"

PROBLEMA 27 :

Se tiene el cuadrilátero $ABCD$, por los puntos medios M y N de los diagonales AC y BD se traza una recta que intercepta a los lados AD y BC en los puntos P y Q respectivamente y a la prolongación de $\overline{DC}$ en F, Si: $AP = a$, $PD = b$ y $BQ = c$. Halle CQ.

A) $\frac{bc}{a+b}$ B) $\frac{bc}{a}$ C) $\frac{ab}{c}$ D) $\frac{ac}{b}$

RESOLUCIÓN :



* Por el teorema de Menelao.

* ΔDBC ($\overline{FQ}$ recta secante):

$$x \times t \times m = c \times t\ (m + n)$$

$$\frac{x}{c} = \frac{m+n}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

ΔDAC ($\overline{FM}$ recta secante):

$$t \times a \times m = t \times b \times (m + n)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{m+n}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* (I) = (II): $\frac{x}{c} = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \frac{ac}{b}$

RPTA : "D"

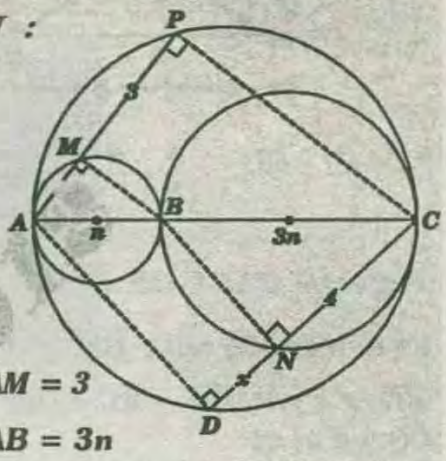
PROBLEMA 28 :

Sobre una recta se ubican los puntos A, B y $C(AB<BC)$, luego se dibujan las circunferencias con diámetros AB, BC y AC, sobre las circunferencia mayor se ubican los puntos P y D tal que $\overline{PD}$ intersecta a $\overline{AC}$, si $\overline{AP}$ intersecta a la circunferencia menor en M y $\overline{CD}$ a la circunferencia intermedia en N.

Si: $AM=1dm$, $MP=3dm$ y $CN=4dm$, halle ND en dm.

A) $\frac{2}{3}$ B)1 C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{3}$ E)2

RESOLUCIÓN :



$\overline{PC} // \overline{MB}$ y $MP = 3AM = 3$

$$\Rightarrow BC = 3AB = 3n$$

$\overline{AD} // \overline{BN}$ y $NC = 4$

* Se pide hallar : $DN = x$

* Luego se cumple : $\frac{x}{4} = \frac{n}{3n} \rightarrow x = \frac{4}{3}$

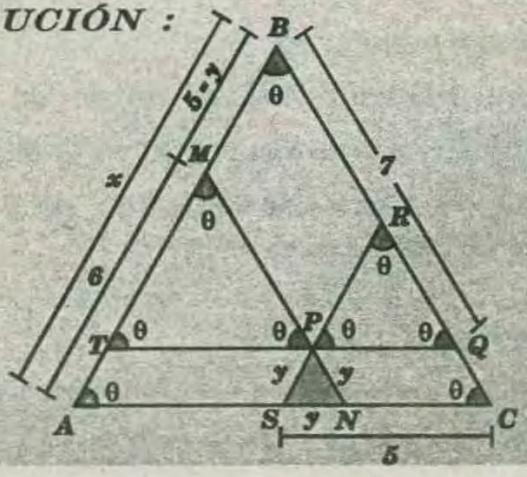
RPTA : "C"

PROBLEMA 29 :

En un triángulo equilátero ABC se ubica un punto interior P, por le cual se trazan paralelas a sus tres lados, si dichos segmentos de paralelos miden $5cm$, $6cm$ y $7cm$ respectivamente, calcule la razón de la longitud del lado del triángulo menor formado en el interior de la región triangular ABC, con la longitud del lado triángulo ABC.

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{1}{3}$

RESOLUCIÓN :



$\overline{TQ}//\overline{AC}$; $\overline{MN}//\overline{BC}$; $\overline{RS}//\overline{AB}$

* $\triangle SPN$ equilátero :

$\rightarrow SP = PN = SN\ y \Rightarrow TP = 6 - y\ ;\ PQ = 5$

* Luego : $6 - y + 5 - y = 7$

$\Rightarrow 2y = 11 - 7 = 4 \Rightarrow y = 2$

* Ahora : $x = 6 + 5 - y \Rightarrow x = 11 - 2 \rightarrow x = 9$

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{9}$$

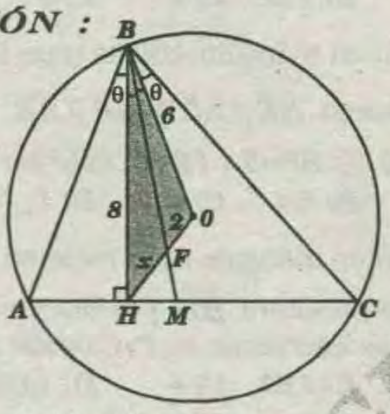
RPTA : "D"

PROBLEMA 30 :

En un triángulo **ABC**, cuyo circuncentro es **O** y su circunradio mide **6u**. La bisectriz interior $\overline{BM}$ intersecta a $\overline{OH}$ en **F** ($\overline{BH}$ es altura). Si **BH=8u** y **OF=2u**. Halle **HF**.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{8}{3}$

RESOLUCIÓN :



$\overline{BM}$ es bisectriz del ángulo **ABC**.

$\overline{BM}$ es bisectriz del ángulo **HBO**.

$\triangle HBO$; por teorema:

$$\frac{8}{x} = \frac{6}{2} \rightarrow x = \frac{8}{3}$$

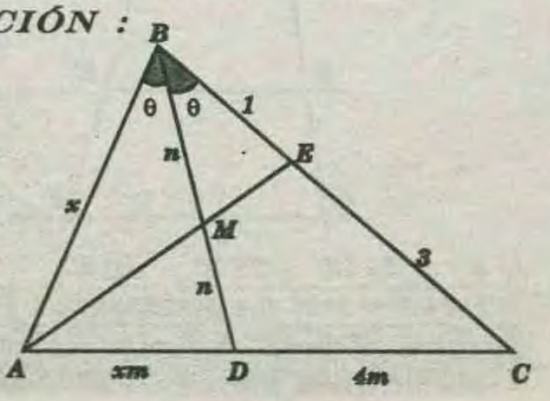
RPTA : "E"

PROBLEMA 31 :

En un triángulo **ABC** se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$ y la ceviana $\overline{BD}$ que biseca a $\overline{BD}$,si **EC=3u**, **BE=1u**. Determinar **AB**.

A)2u B)4u C)6u D)8u D)10u

RESOLUCIÓN :



* Si $\overline{AE}$ biseca a $\overline{BD}$, entonces: **BM = MO = n**

* Si $\overline{BD}$ es bisectriz, entonces: **AD = xm** y **OC = 4m**

* Por el teorema del Menelao en el $\triangle DBC$($\overline{AE}$ recta secante) : $3 \times n \times xm = 1 \times n \times m\ (x + 4)$

$\Rightarrow 3x = x + 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

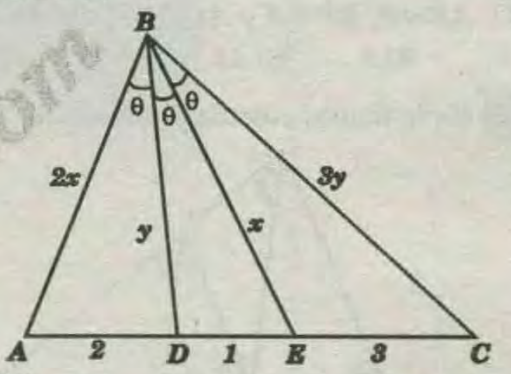
RPTA : "A"

PROBLEMA 32 :

En un triángulo **ABC** se trazan las cevianas $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$ ($D \in \overline{AC} \wedge E \in \overline{DC}$) tal que la $m \sphericalangle ABD = m \sphericalangle EBC = m \sphericalangle DBE = m \sphericalangle EBC$. Si **AD=2dm** , **DE=1** y **EC=3** , halle **BE** .

A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ D) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

RESOLUCIÓN :



*Por teorema :

* $\triangle ABE : y^2 = 2x^2 - 2$ .....(I)

* $\triangle DBC : x^2 = 3y^2 - 3$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{x^2 + 3}{3} \quad \text{.....(II)}$$

* (I) = (II):

$$2x^2 - 2 = \frac{x^2 + 3}{3} \Rightarrow 6x^2 - 6 = x^2 + 3 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{5}$$

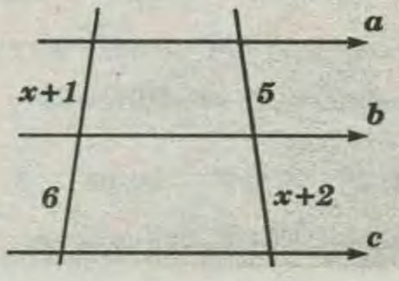
$$\rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

RPTA : "B"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

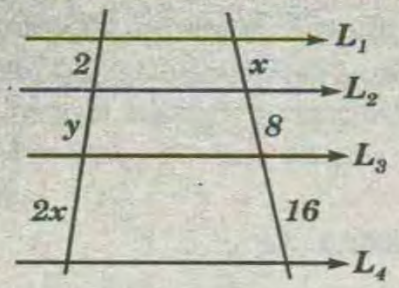
01 Si: $\vec{a}//\vec{b}//\vec{c}$, calcular "x".

A) 2
B) 3
C) $2\sqrt{3}$
D) 4
E) $2\sqrt{2}$



WWW.GRATIS2.COM

02 Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2} // \overrightarrow{L_3} // \overrightarrow{L_4}$, calcular: $x+y$.



A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 16

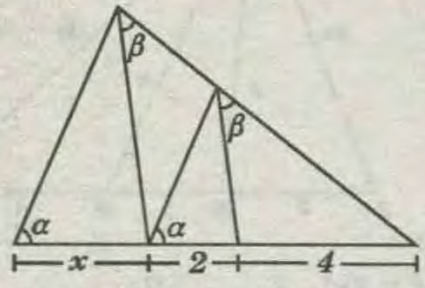
03 En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, D en $\overline{AC}$; $AB=6$, $BC=8$ y $AC=7$. Calcule AD.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

04 En un triángulo ABC se traza la bisectriz exterior $\overrightarrow{BD}$, D en la prolongación de $\overline{AC}$; $AB=6$, $BC=4$ y $AC=7$, Calcule CD.

A) 7 B) 9 C) 14 D) 12 E) 8

05 En la figura, calcular el valor de "x".



A) 6 B) 1 D) 2 C) 3 E) 4

06 En un triángulo ABC: $D \in \overline{AB} \wedge E \in \overline{AC}$, tal que: $AD=x-2$; $AE=6$; $BD=x-4$ y $EC=x-3$. ¿Para qué valores de "x" se verifica que $\overline{DE} // \overline{BC}$?

A) 3 y 4 B) 4 y 5 C) 5 y 6 D) 6 y 7 E) 7 y 8

07 En un triángulo ABC:

$AB=3x$; $BC=8$; $AD=3$ y $DC=2x$ ($\overline{BD}$ es bisectriz interior), D en $\overline{AC}$. Calcule el valor de "x".

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

08 En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, D en $\overline{AC}$; $AB=4$, $BC=12$ y $m\sphericalangle ABC=90°$. Calcule AD.

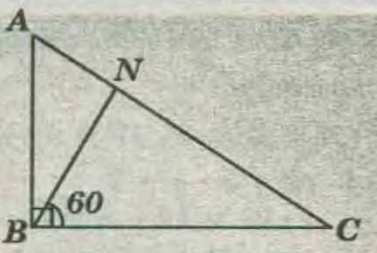
A) 2 B) $\sqrt{10}$ C) 3 D) 4 E) 5

09 En un triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BD}$ tal que la $m\sphericalangle ABD=90°$, $m\sphericalangle DBC=45°$ y $CD=3(AD)$. Calcular la $m\sphericalangle BAC$.

A) 26,5° B) 30° C) 37° D) 45° E) 53°

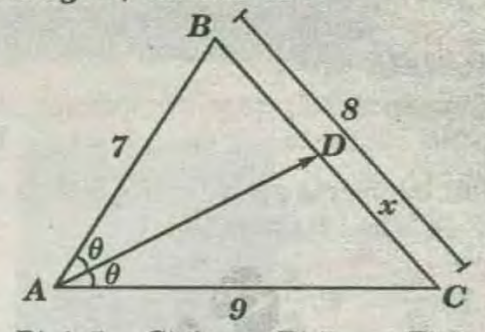
10 En la figura: $NC=2(AN)$ y $NB=4$.

Calcular BC.



A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 12

11 En la figura, calcular CD.



A) 3,5 B) 4,5 C) 4 D) 5 E) 6

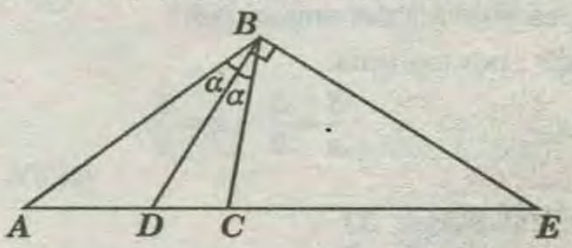
12 En un triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{AR}$ y luego $\overline{RE} // \overline{AC}$ y $\overline{EF} // \overline{AR}$ (E sobre $\overline{AB}$ y F en $\overline{BR}$). Si: $BF=5$ y $FR=3$, calcular RC.

A) 2 B) 2,4 C) 3 D) 4 E) 4,8

13 En un triángulo ABC, recto en B, $AB=5$ y $BC=12$, se trazan la altura $\overline{BH}$ y la bisectriz interior $\overline{AD}$ las cuales se intersecan en P. Calcular BP.

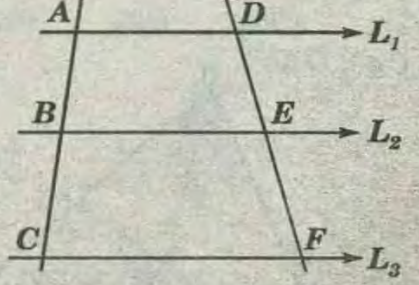
A) 10/3 B) 11/3 C) 4 D) 13/3 E) 4,5

14 Si: $AD=5$ y $CE=12$, calcular DC.



A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

15 Si: $L_1 // L_2 // L_3$, $7(AB)=5(BC)$; $DE=x+2$ y $EF=2x-2$, calcular DF.



A) 8 B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)D	2)C	3)C	4)C	5)C	6)C	7)B	8)B	9)C	10)B
11)B	12)E	13)A	14)E	15)E	16)C	17)C	18)D	19)D	20)E

OBJETIVOS :

Al finalizar la unidad, el alumno será capaz de :

* *Identificar si dos triángulos son semejantes y plantear la proporcionalidad de lados.*

* *Diferenciar entre congruencia y semejanza de triángulos.*

* *Ver la importancia de la semejanza en la geometría y conocer su significado geométrico.*

* *Conocer el significado geométrico de figuras semejantes y cuerpos en general.*

* *Aplicar la semejanza de triángulos para calcular las longitudes de sus lados y medidas angulares.*

* *Reconocer figuras geométricas de uso más frecuente en donde se note semejanza de triángulos y ver la relación adecuada de elementos homólogos.*

* *Resolver los problemas relacionados con semejanza de triángulos.*

INTRODUCCIÓN :

En un día de sol, los cuerpos producen sombra. ¿Te has detenido a pensar la relación que existe entre la altura de los cuerpos y la longitud de las sombras que éstos producen?

Ya en el Siglo . ***VI*** a.C., uno de los siete sabios de Grecia, Thales de Mileto, se plantea esta y otras cuestiones:

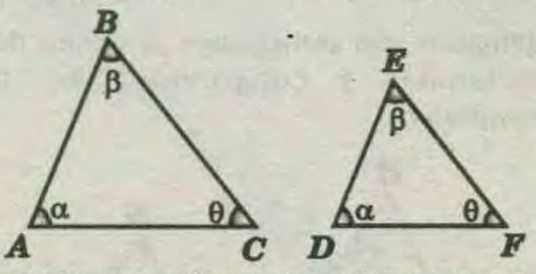
De la vida de Tales se sabe que era un rico comerciante de Mileto, que vivió aproximadamente desde el ***640*** hasta el ***550 a.C.*** Tenía mucho éxito como hombre de negocios; sus tareas como mercader lo llevaron a muchos países y su ingenio natural le permitió aprender de las novedades que veía. Fue conocido por sus admirados compatriotas de generaciones posteriores como uno de los Siete Sabios de Grecia, muchas leyendas yanécdotas se reúnen en torno a su nombre.

Se dice que una vez Thales estaba encargado de algunas mulas cargadas con sacos de sal. Mientras cruzaban un río, uno de los animales resbaló; al disolverse, en consecuencia, la sal en el agua su peso disminuyó instantáneamente. ¡El astuto animal, como es natural, se sumergió deliberadamente en el próximo vacío y continuó con este truco hasta que Tales atinó con la felíz solución de llenar el saco de esponjas. Este demostró ser un remedio eficaz. En otra ocasión, Tales que preveía una cosecha de olivas extraordinariamente finas, se apoderó de todas las prensas de olivas en el distrito, una vez obtenido este monopolio, se convirtió en el jefe del mercado y pudo dictar sus propias condiciones.

Pero, entonces, según un relato, una vez demostrado lo que podía hacer, su propósito ya había sido conseguido; en vez de oprimir a sus compradores, vendió magnánimamente la fruta a un precio que horrorizaría a un capitalista de hoy en día.

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos figuras son semejantes ; si tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño, así tendremos que todos los cuadrados son semejantes, todas las circunferencias o todos los triángulos equiláteros son semejantes. Para que dos triángulos sean semejantes se requiere que sus tres ángulos sean respectivamente congruentes y su lados homológos sean proporcionales. Los lados homológos son aquellos que se oponen a los ángulos congruentes.



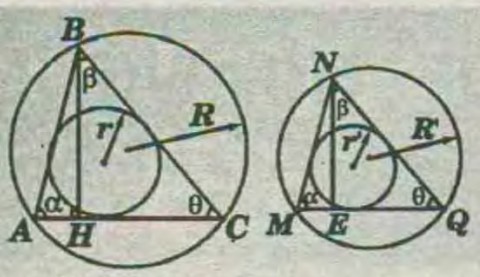
Estos dos triángulos tienen los mismos ángulos , por lo tanto son semejantes, lo cual se denota así :

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

* Sus lados homológos son proporcionales :

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$$

Cuando dos triángulos son semejantes, se cumplirá que todos sus elementos homológos son proporcionales. Dentro de los elementos homológos están los lados, las lineas notables, inradios, circunradios y exradios.



$$\boxed{\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NQ}=\frac{AC}{MQ}=\frac{BH}{NE}=\frac{R}{R'}=\frac{r}{r'}=...=\frac{r_a}{r_a}=k}$$

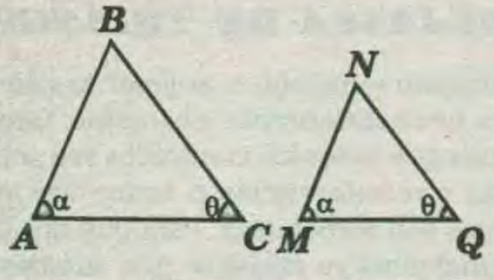
Donde : k constante de proporcionalidad.

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIANGULOS

Los criterios de semejanza de triángulos nos permitirán identificar a dos triángulos semejantes, estos criterios son :

PRIMER CRITERIO DE SEMEJANZA:

Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente congruentes.

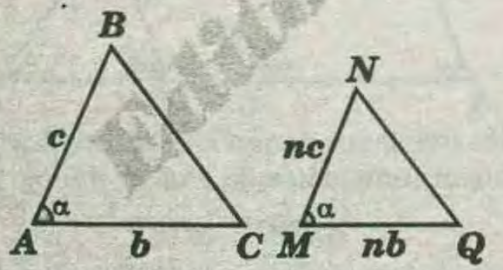


$m\sphericalangle A=m\sphericalangle M=\alpha$ y $m\sphericalangle C=m\sphericalangle Q=\theta$

$\Rightarrow \boxed{\Delta ABC \sim \Delta MNQ}$

SEGUNDO CRITERIO DE SEMEJANZA :

Dos triángulos son semejantes ,si tienen dos lados proporcionales y congruentes los ángulos comprendidos.

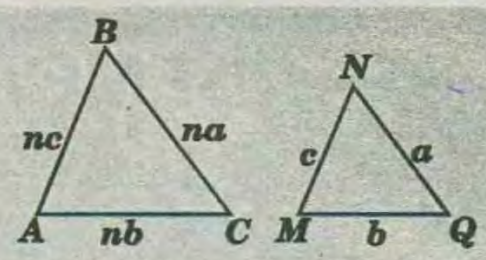


Si : $m\sphericalangle A=m\sphericalangle M=\alpha$ y $\frac{AB}{AC}=\frac{MN}{MQ}$

$\Rightarrow \boxed{\Delta ABC \sim \Delta MNQ}$

TERCER CRITERIO DE SEMEJANZA :

Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.

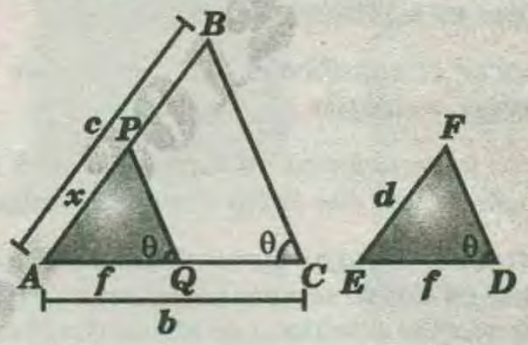


Si : $\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NQ}=\frac{AC}{MQ} \Rightarrow \boxed{\Delta ABC \sim \Delta MNQ}$

CUARTO CRITERIO DE SEMEJANZA :

Dos triángulos son semejantes cuando dos lados de uno son proporcionales a dos lados del otro, y los dos ángulos opuestos a los dos lados mayores son congruentes.

DEMOSTRACIÓN:



Si : $c>b$; $d>f$

* Además : $\frac{c}{b}=\frac{d}{f}$ y $m\sphericalangle C=m\sphericalangle D$

* Sea $AQ=ED=F$ y $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$

$$\Delta ABC \sim \Delta APQ$$

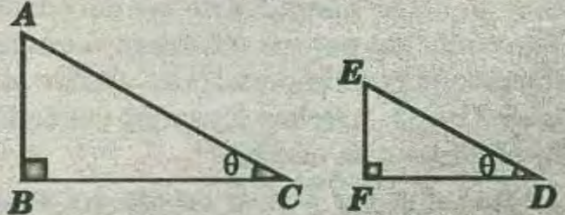
* Tenemos : $\frac{c}{b}=\frac{x}{f} \Rightarrow x=d$

* Luego :

$$\Delta APQ \cong \Delta EFD \Rightarrow \boxed{\Delta ABC \sim \Delta EFD}$$

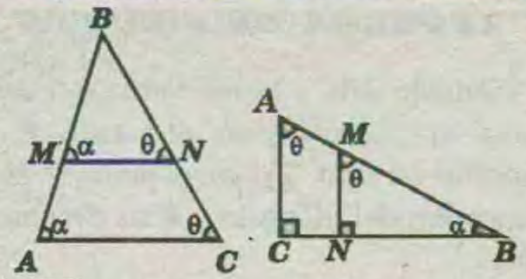
OBSERVACIONES:

I) Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo congruente.



Si: $m\sphericalangle C=m\sphericalangle D \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EFD$

II) Toda recta secante a un triángulo y paralela a uno de los lados, determina dos triángulos semejantes.



Si $\overline{MN} // \overline{AC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MBN$

* También si :

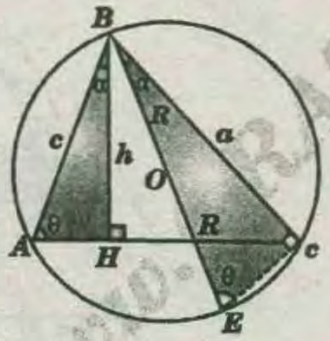
$$\overline{MN} // \overline{AC} \Rightarrow \measuredangle ACB \sim \measuredangle MNB$$

TEOREMA I :

En todo triángulo se cumple que el producto de las longitudes de dos lados es igual al producto de las longitudes del diámetro de la circunferencia circunscrita y de la altura relativa al tercer lado.

$$\boxed{a \times c = 2Rh}$$

DEMOSTRACIÓN:

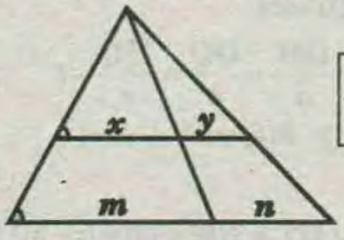


$\measuredangle ABH \sim \measuredangle EBC$

$$\Rightarrow \frac{c}{2R} = \frac{h}{a} \Rightarrow \boxed{ac = 2Rh}$$

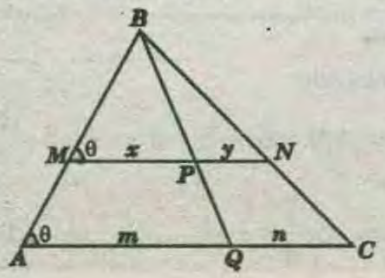
TEOREMA II :

Si un conjunto de rectas concurrentes intercepta a dos o más rectas paralelas, entonces los segmentos determinados en éstas , son proporcionales.



$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{m}{n}}$$

DEMOSTRACIÓN:



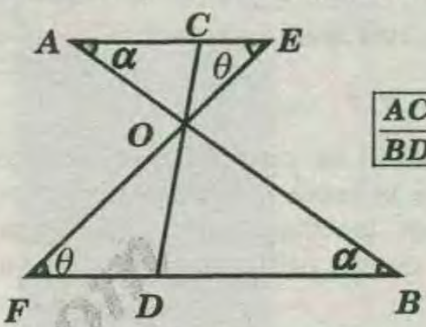
$$\Delta MBP \sim \Delta ABQ \Rightarrow \frac{x}{m} = \frac{BP}{BQ} \quad \text{.....(I)}$$

$$\Delta PBN \sim \Delta QBC \Rightarrow \frac{y}{n} = \frac{BP}{BQ} \quad \text{.....(II)}$$

* De *(I)* y *(II)* : $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{y} = \frac{m}{n}}$

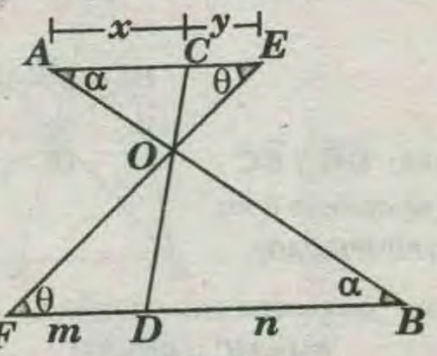
TEOREMA III :

Cuando los triángulos son de la forma indicada en la figura, de manera que $\overline{AE} // \overline{FB}$, se cumple :



$$\boxed{\frac{AC}{BD} = \frac{CE}{FD}}$$

DEMOSTRACIÓN:



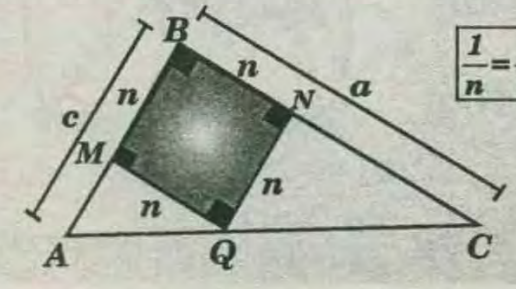
$$\Delta AOC \sim \Delta BOD \Rightarrow \frac{x}{n} = \frac{CO}{OD} \quad \text{.....(I)}$$

$$\Delta COE \sim \Delta DOF \Rightarrow \frac{y}{m} = \frac{CO}{OD} \quad \text{.....(II)}$$

* De *(I)* y *(II)* : $\frac{x}{n} = \frac{y}{m} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{y} = \frac{n}{m}}$

TEOREMA IV :

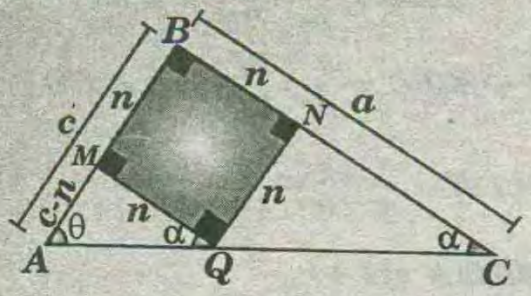
Si un cuadrado está inscrito en un triángulo rectángulo, de modo que tienen un vértice común, entonces la inversa del lado del cuadrado es igual a la suma de las inversas de los catetos.



$$\boxed{\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$$

RUBIÑOS-RATIS2.com

DEMOSTRACIÓN:



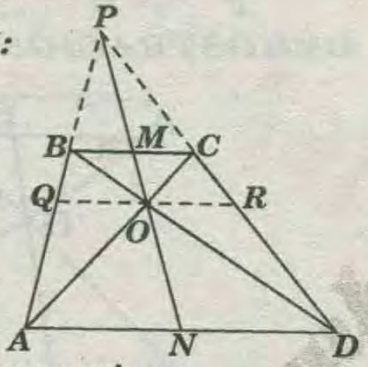
$\triangle AMQ \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{a}{n}=\frac{c}{c-a}$

$\Rightarrow ac-an=cn \Rightarrow ac=n(a+c) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$

TEOREMA V :

En todo trapecio se cumple que las bases son bisecadas por la recta que pasa por el punto de intersección de las diagonales y por el punto de intersección de las prolongaciones de los lados laterales.

DEMOSTRACIÓN:



* Se traza $\overline{QR} // \overline{BC}$, entonces se cumple que: ***QO=OR (PROPIEDAD).***

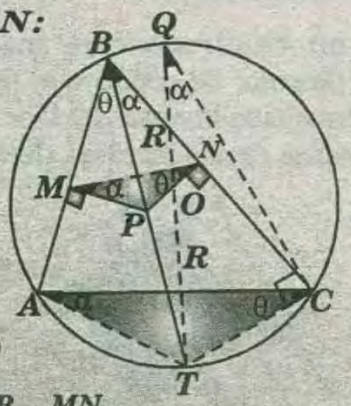
* Luego por propiedad , se cumple :

BM=MC y ***AN=ND***

TEOREMA VI :

Si en el interior o exterior de un triángulo ***ABC*** se toma un punto ***P***, por el cual se trazan $\overline{PM}$ y $\overline{PN}$ perpendiculares a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, si además ***R*** es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ***ABC***, se cumple : ***PB×AC= 2R×MN***

DEMOSTRACIÓN:



$\triangle MPN \sim \triangle ATC$

$\Rightarrow \frac{PN}{TC}=\frac{MN}{AC}$ ...(I)

$\triangle PNB \sim \triangle TCQ$

$\Rightarrow \frac{PN}{TC}=\frac{PB}{2R}$ .....(II)

* Igualando *(I)* y *(II)*: $\frac{PB}{2R}=\frac{MN}{AC} \Rightarrow PB\times AC=2R\times MN$

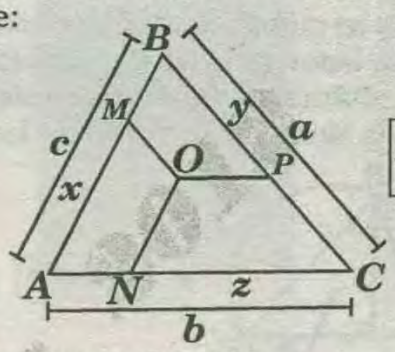
TEOREMA DE JOHNSON

En un triángulo ***ABC*** , la mediatriz del lado $\overline{AC}$ interseca al lado $\overline{BC}$ en el punto ***P*** y a la prolongación del lado $\overline{AB}$ en el punto ***Q***. Si ***"O"*** es el circuncentro del triángulo y ***R*** su circunradio. Se cumple :

$$\boxed{R^2=OP\times OQ}$$

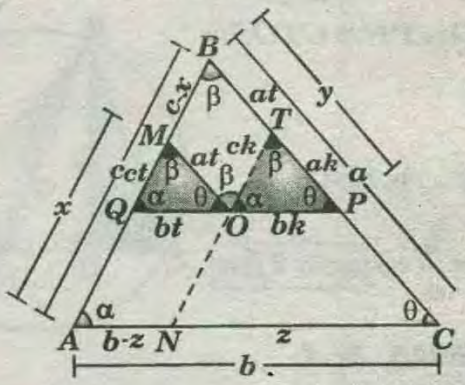
TEOREMA DE VUIBERT

Por un punto interior ***"O"*** de un triángulo, se trazan paralelas a los lados del triángulo, entonces se cumple:



$\boxed{\frac{y}{a}+\frac{z}{b}+\frac{x}{c}=2}$

DEMOSTRACIÓN:



$\triangle ABC \sim \triangle OTP \Rightarrow \frac{TP}{a}=\frac{OP}{b}=\frac{OT}{c}=k$

$TP=ak$; $OP=bk$ y $OT=ck$

$\triangle ABC \sim \triangle QMO \Rightarrow \frac{OM}{a}=\frac{OQ}{b}=\frac{MQ}{c}=t$

$OM=at$; $OQ=bt$ y $MQ=ct$

OMTB : romboide

$\Rightarrow OM=BT=at$ y $OT=BM=ck=c-x$

$\Rightarrow k=1-\frac{x}{c}$ .....(I)

AQON : romboide

$\Rightarrow OQ=AN=bt=b-z \Rightarrow t=1-\frac{z}{b}$ ....(II)

* Pero :

$y=at+ak \Rightarrow \frac{y}{a}=t+k$ .....(III)

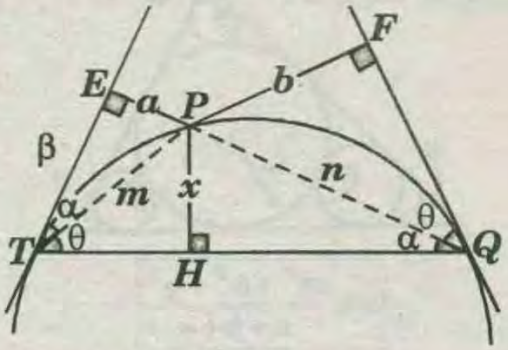
* Reemplazándo *(I)* y *(II)* en *(III)*:

$$\frac{y}{a}=1-\frac{z}{b}+1-\frac{x}{c}\Rightarrow\boxed{\frac{y}{a}+\frac{z}{b}+\frac{x}{c}=2}$$

TEOREMA DE PAPPUS

En una circunferencia se traza una cuerda y por los extremos de ésta cuerda se trazan tangentes; entonces la distancia de un punto cualquiera de la circunferencia a la cuerda es media proporcional entre las distancias del punto tomado a las tangentes.

DEMOSTRACIÓN:



$\triangle TEP \sim \triangle QHP \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{a}{x}$ .....*(I)*

$\triangle PHT \sim \triangle PFQ \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{x}{b}$ .....*(II)*

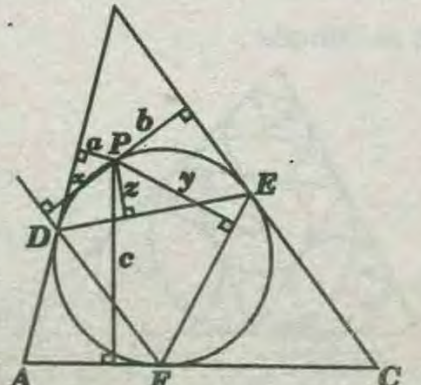
* Igualando *(I)* y *(II)*:

$$\frac{x}{b}=\frac{a}{x}\Rightarrow x^2=ab\Rightarrow\boxed{x=\sqrt{ab}}$$

TEOREMA VII :

En un triángulo se traza la circunferencia inscrita, sobre ésta circunferencia se toma un punto cualquiera, el producto de las perpendiculares trazadas por el punto tomado a los lados del triángulo es igual al producto de las perpendiculares trazadas por el punto tomado a los lados del triángulo que se forma al unir los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita.

DEMOSTRACIÓN:



* Por el teorema de Pappus :

$\boxed{x^2=a\times c....(I)} \wedge \boxed{y^2=b\times c...(II)} \wedge \boxed{z^2=a\times b....(III)}$

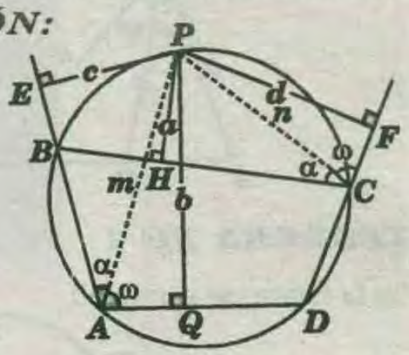
* Multiplicando *(I)*, *(II)* y *(III)*:

$$(xyz)^2=(abc)^2\Rightarrow\boxed{xyz=abc}$$

TEOREMA VIII :

En un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, si por un punto cualquiera que se encuentre sobre la circunferencia se trazan perpendiculares a los cuatro lados del cuadrilátero, el producto de las perpendiculares relativas a dos lados opuestos es igual al producto de las otras dos perpendiculares.

DEMOSTRACIÓN:



$\triangle AEP \sim \triangle CHP$

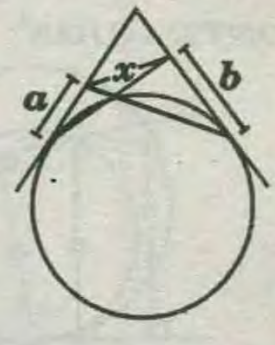
$\Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{c}{a}$ .....*(I)*

$\triangle PQA \sim \triangle PFC \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{b}{d}$ .....*(II)*

* Igualando *(I)* y *(II)* : $\frac{b}{d}=\frac{c}{a}\Rightarrow\boxed{ab=cd}$

TEOREMA IX :

En la figura, se cumple :

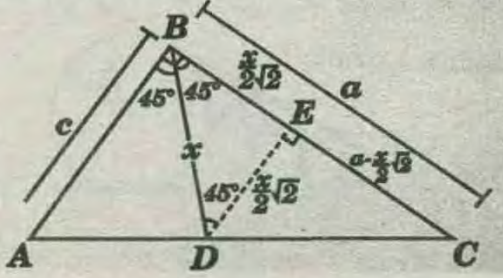


$$\boxed{x=\sqrt{a^2-ab+b^2}}$$

TEOREMA X :

En todo triángulo rectángulo, la longitud de la bisectriz interior relativa a su hipotenusa es igual al producto de las longitudes de los catetos multiplicado por la raíz cuadrada de dos dividido entre la suma de las longitudes de los catetos.

DEMOSTRACIÓN:



$\triangle BED$ isósceles : $BE=ED=\frac{x}{2}\sqrt{2}$

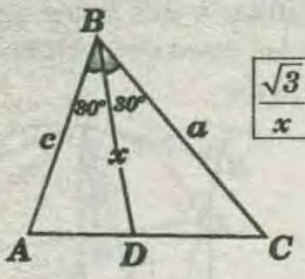
$\triangle ABC \sim \triangle DEC$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x}{2}\sqrt{2}}{c}=\frac{a-\frac{x}{2}\sqrt{2}}{a} \Rightarrow \frac{x}{2}\sqrt{2}a=ac-\frac{x}{2}\sqrt{2}c$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}\sqrt{2}(a+c)=ac \Rightarrow x=\frac{ac}{a+c}\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\frac{\sqrt{2}}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

TEOREMA XI :

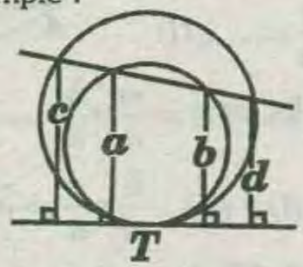
En la figura, se cumple :



$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$$

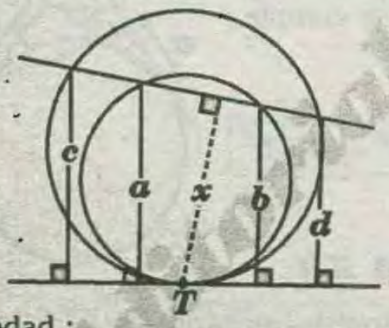
TEOREMA XII :

En la figura, se cumple :



$a \times b = c \times d$

DEMOSTRACIÓN:



* por propiedad :

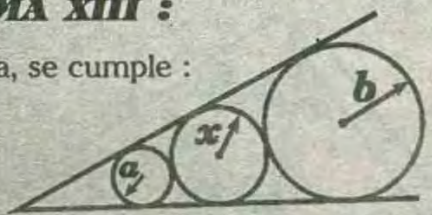
$x^2=ab$ .....(I)

$x^2=cd$ .....(II)

* Igualando *(I)* y *(II)* : $ab=cd$

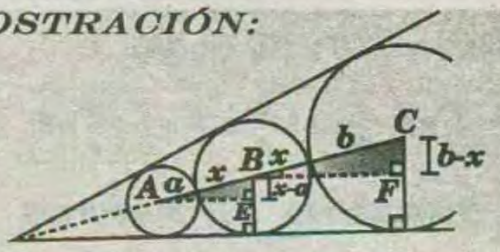
TEOREMA XIII :

En la figura, se cumple :



$$\boxed{x=\sqrt{ab}}$$

DEMOSTRACIÓN:

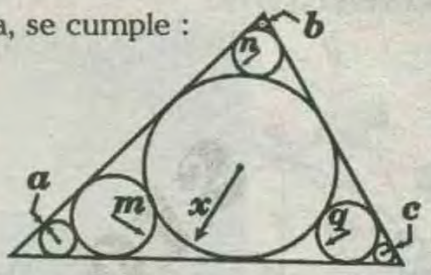


$\triangle ABE \sim \triangle BCF \Rightarrow \frac{x-a}{b-x}=\frac{a+x}{x+b}$

* Efectuando : $x^2=ab \Rightarrow x=\sqrt{ab}$

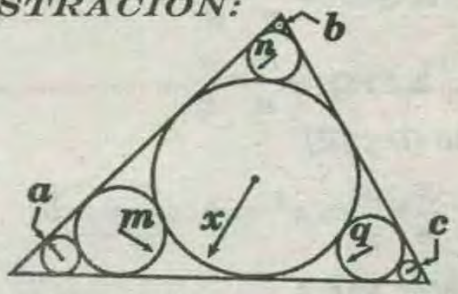
TEOREMA XIV :

En la figura, se cumple :



$$\boxed{x=\frac{m^2+n^2+q^2}{a+b+c}}$$

DEMOSTRACIÓN:



* Por el teorema anterior :

$m^2=ax$.....(I)

$n^2=bx$.....(II)

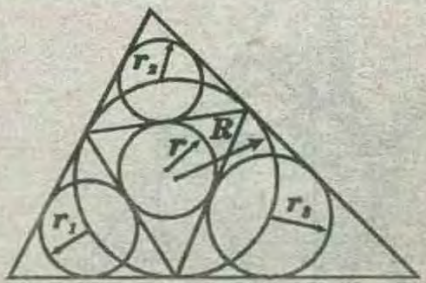
$q^2=cx$.....(III)

* sumando *(I)*, *(II)* y *(III)*:

$$m^2+n^2+q^2=x(a+b+c) \Rightarrow x=\frac{m^2+n^2+q^2}{a+b+c}$$

TEOREMA XV :

En la figura, se cumple :



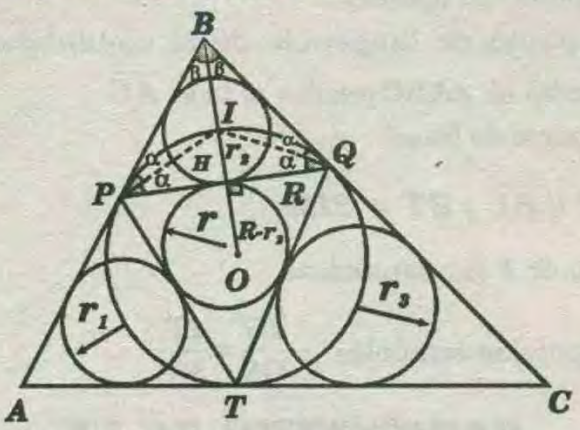
$$\boxed{2R=r+r_1+r_2+r_3}$$

DEMOSTRACIÓN:

ΔPBQ: I es incentro $(I \in \overset{\frown}{PQ})$

Apotema : $OH = R - r_2$

* De modo similar, las longitudes de los otras dos apotemas son : $R - r_1$ y $R - r_3$



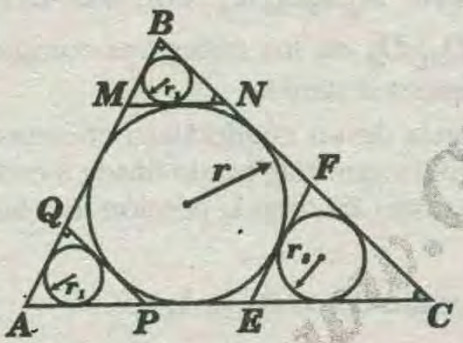
* Por el teorema de Carnot :

$$R - r_1 + R - r_2 + R - r_3 = R + r$$

$$3R - R = r + r_1 + r_2 + r_3 \Rightarrow 2R = r + r_1 + r_2 + r_3$$

TEOREMA XVI :

En la figura , se cumple :



Si $\overline{MN} // \overline{AC}$; $\overline{PQ} // \overline{BC}$ y $\overline{EF} // \overline{AB}$

Se cumple : $\boxed{r = r_1 + r_2 + r_3}$

DEMOSTRACIÓN:

$$\Delta AQP \sim \Delta MBN \sim \Delta EFC \sim \Delta ABC$$

$$\frac{2p_{(AQP)}}{r_1} = \frac{2p_{(MBN)}}{r_2} = \frac{2p_{(EFC)}}{r_3} = \frac{2p_{(ABC)}}{r}$$

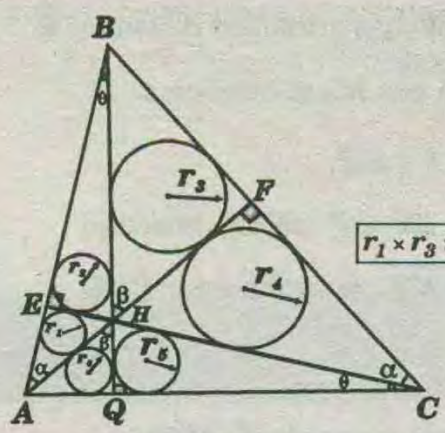
* Usando propiedad de proporciones :

$$\frac{2p_{(AQP)} + 2p_{(MBN)} + 2p_{(EFC)}}{r_1 + r_2 + r_3} = \frac{2p_{(ABC)}}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{2p_{(ABC)}}{r_1 + r_2 + r_3} = \frac{2p_{(ABC)}}{r} \Rightarrow \boxed{r = r_1 + r_2 + r_3}$$

TEOREMA XVII :

En la figura , se cumple:



$$\boxed{r_1 \times r_3 \times r_5 = r_2 \times r_4 \times r_6}$$

DEMOSTRACIÓN:

$$\triangle AEH \sim \triangle HFC \Rightarrow \frac{r_1}{r_4} = \frac{EH}{HF} \quad \text{.....(I)}$$

$$\triangle BEH \sim \triangle CQH \Rightarrow \frac{r_5}{r_2} = \frac{HQ}{EH} \quad \text{.....(II)}$$

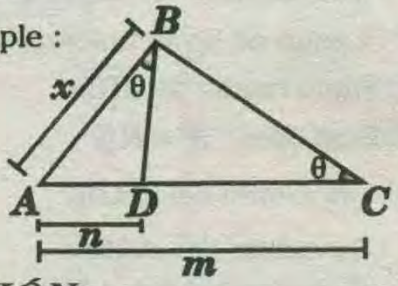
$$\triangle BFH \sim \triangle AQH \Rightarrow \frac{r_3}{r_6} = \frac{HF}{HQ} \quad \text{.....(III)}$$

* Multiplicando *(I)* , *(II)* y *(III)*:

$$\frac{r_1 \times r_3 \times r_5}{r_2 \times r_4 \times r_6} = \frac{EH \times HQ \times HF}{EH \times HQ \times HF} = 1 \Rightarrow \boxed{r_1 \times r_3 \times r_5 = r_2 \times r_4 \times r_6}$$

TEOREMA XVIII :

En la figura , se cumple :



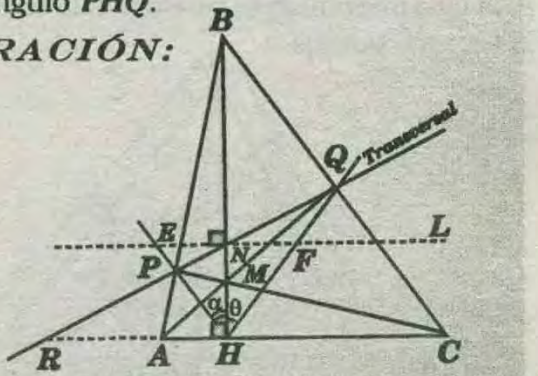
DEMOSTRACIÓN:

$$\Delta ABC \sim \Delta ADB \Rightarrow \frac{x}{m} = \frac{n}{x} \Rightarrow \boxed{x^2 = m \times n}$$

TEOREMA DE BLANCHET

Si, en un triángulo *ABC*, dos rectas $\overrightarrow{AQ}$ y $\overrightarrow{CP}$ se intersecan sobre la altura $\overline{BH}$, ésta altura es bisectriz del ángulo *PHQ*.

DEMOSTRACIÓN:



* Por el teorema anterior : R ; A; H y C son armónicos.

LIBRO GRATIS .org

$\overrightarrow{RQ}$: tranversal del haz armónico de centro B.

$\Rightarrow R; P; N$ y Q es una hilera armónica

* Por N trazamos $\overrightarrow{L} // \overrightarrow{RH}$

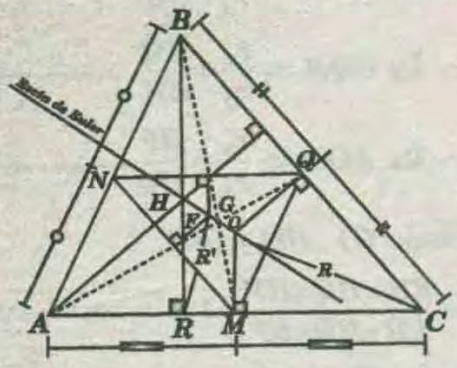
* Por propiedad : $EN=NF$ ΔEHF isósceles

$\Rightarrow \alpha=\theta \Rightarrow \overrightarrow{HB}$: *Bisectriz del* $\sphericalangle PHQ$

NOTA:

En la figura, se cumple :

- ΔMNQ : mediano o complementario.
- F : punto de Feuerbach.
- F : circuncentro del Δ, órtico o pedal del ΔABC.

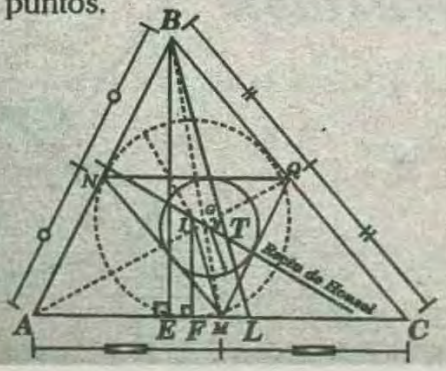


- F : Circuncentro del ΔMNQ
- F : Centro de la circunferencia de Euler.
- F : Punto medio de $\overline{HO}$.
- F : Propiedad: $R'=R/2$.
- H : Ortocentro del ΔABC.
- G : Baricentro del ΔABC
- O : Circuncentro del ΔABC
- O : Ortocentro del ΔMNQ
- $H; F; G; O$ son armónicos.

* Proporción armónica : $\dfrac{HF}{FG}=\dfrac{HG}{GO}$

LA CIRCUNFERENCIA DE SPIEKER

Esta circunferencia es análoga a la circunferencia de los nueve puntos.



- ΔMNQ : mediano o complementario.
- I : incentro del ΔABC
- G : baricentro del ΔABC
- S : incentro del ΔMNQ
- S : punto de Spieker.
- L: punto de tangencia de la circunferencia exinscritá al ΔABC relativa al lado $\overline{AC}$.
- T : punto de Nagel
- $\overline{IM} // \overline{BL}$; $BT = 2IM$
- $I; G; S; T$ son armónicas
- Proporción armónica : $\dfrac{IG}{GS}=\dfrac{IT}{ST}$

BARICENTRO DE UN CUADRILÁTERO

MEDIANAS DE UN CUADRILÁTERO:

Consideremos en llamar medianas del cuadrilátero a los segmentos rectilíneos que unen los vértices del cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$ con los baricentros $O_1; O_2; O_3; O_4$ de los triángulos compuestos de los tres vértices restantes.

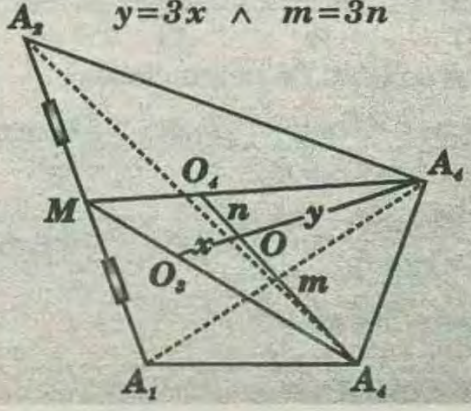
Las medianas de un cuadrilátero concurren en un punto común y que este punto divide a cada una de ellas en la razón $3:1$, con la porción más larga hacia el vértice.

* O_3: baricentro del $\Delta A_1A_2A_4$

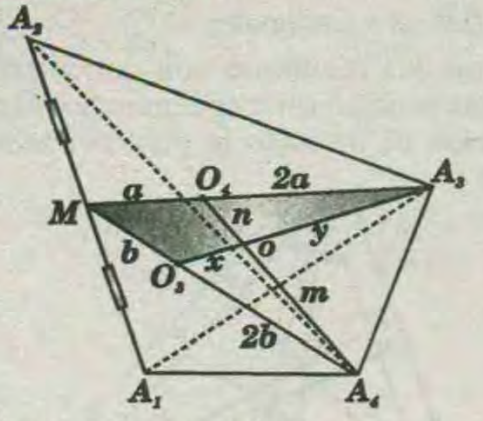
* O_4: baricentro del $\Delta A_1A_2A_3$

* $\overline{A_3O_3}$ y $\overline{A_4O_4}$ son medianas del cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$.

*«O» : es baricentro del cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$.



DEMOSTRACIÓN:



* Si "O_3" es baricentro del $\Delta A_1A_2A_4$

$$\Rightarrow O_3A_4 = 2MO_3 = 2b$$

* Si "O_4" es baricentro del $\Delta A_1A_2A_3$

$$\Rightarrow A_3O_4 = 2MO_4 = 2a$$

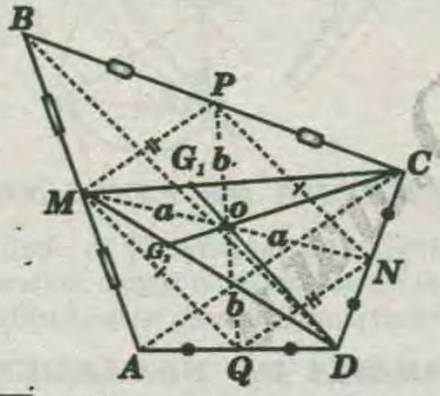
* Por el teorema de Menelao en el ΔMA_3O_3 :

$$ay \times 2b = 2ax \times 3b \Rightarrow y = 3x$$

ΔMA_4O_4 : $bm \times 2a = 2bn \times 3a \Rightarrow m = 3n$

NOTAS:

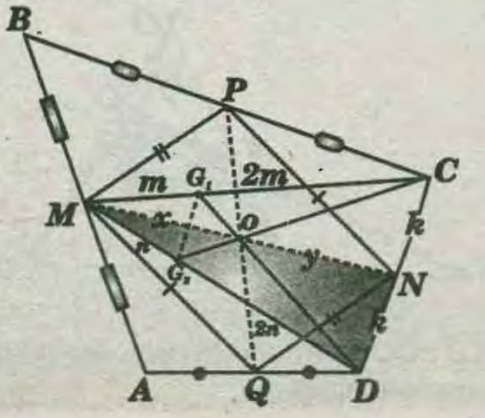
El baricentro *"O"* del cuadrilátero *ABCD*, coincide con el centro de simetría *"O"* del paralelogramo *MPNQ*.



* $\overrightarrow{MO} \cap \overline{CD} = \{N\}$, tal que $CN = ND$

* $MO = ON \Rightarrow PO = OQ$

DEMOSTRACIÓN:



ΔDMC : $\overline{G_1G_2} // \overline{CD}$

* En el trapecio ΔG_1G_2C ; por propiedad :

$$\overrightarrow{MO} \cap \overline{CD} = \{N\}$$

* Donde : $CN = ND = k \Rightarrow O \in \overline{MN}$

* Ahora por el teorema de Menelao en el ΔDMN ($\overleftrightarrow{G_2G}$ recta secante) :

$$2n \times k = n \, y \times 2k \Rightarrow x = y$$

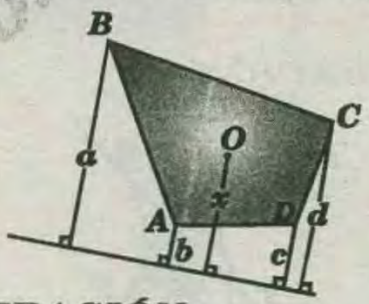
Pero el cuadrilátero *MPNQ* es un paralelogramo, donde $\overline{PQ}$ y $\overline{MN}$ son diagonales y como:

$$MO = ON \Rightarrow PO = OQ$$

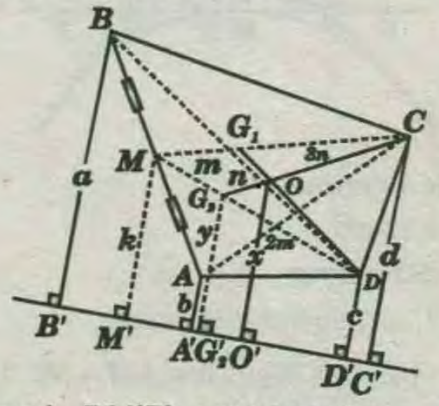
En consecuencia; el baricentro *"O"* del cuadrilátero *ABCD*, coincide con el centro de simetría *"O"* del paralelogramo *MPNQ*.

TEOREMA :

Si *"O"* es baricentro del cuadrilátero *ABCD*, se cumple .



DEMOSTRACIÓN:



* En el trapecio *BAA'B'*, por teorema :

$$2k = a + b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* En el trapecio *MDD'M'*, por teorema :

$$3y = 2k + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* Reemplazando *(I)* en *(II)* :

$$3y = a + b + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

* En el trapecio $G_2CC'G'G_2$, por propiedad :

$$4x = 3y + d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (IV)$$

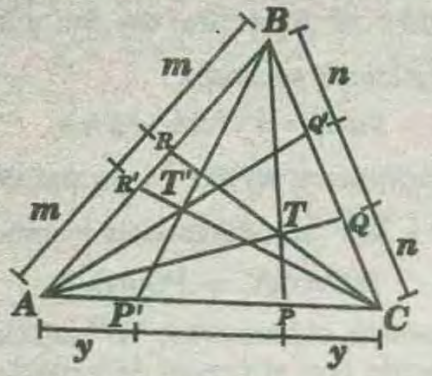
* Reemplazando *(III)* en *(IV)* :

$$4x = a + b + c + d \Rightarrow x = \frac{a+b+c+d}{4}$$

GRATIS2.com

LÍNEAS ISOTÓMICAS Y PUNTOS CONJUGADOS ISOTÓMICOS

Sean P y P' dos puntos en el lado AC del ΔABC tales que $AP'=PC$. Entonces las lineas $\overline{BP'}$ y $\overline{BP}$ son llamadas lineas isotómicas del triángulo.

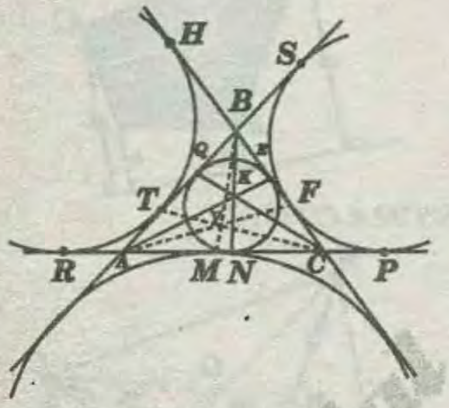


Los puntos T y T' son los puntos conjugados isotómicos del triángulo.

EJEMPLO:

El punto Nagel y el punto Gergonne, son conjugados isotómicos.

DEMOSTRACIÓN:



K : punto de Gergonne

V : punto de Nagel

Por teoría : $BQ=AT=p-b$

$\Rightarrow \overline{CQ}$ y $\overline{CT}$ son líneas isotómicas

* También : $BE=FC=p-b$ y $AM=NC=p-c$

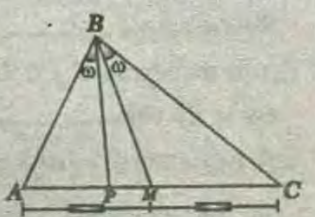
$\Rightarrow \overline{AE}$ y $\overline{AF}$; $\overline{BN}$ y $\overline{BM}$ son líneas isotómicas

* Luego :

V y K son puntos conjugados isotómicos de ΔABC

SIMEDIANA Y PUNTO SIMEDIANO

Las lineas conjugadas isogonales de las medianas de un triángulo, son sus simedianas:

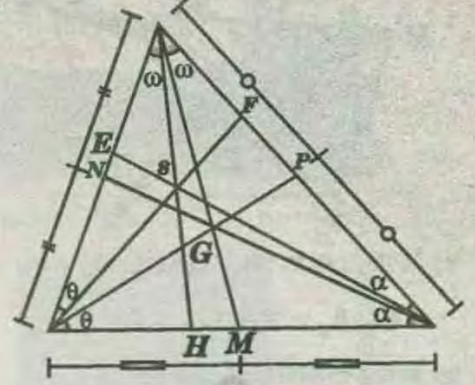


* $\overline{BM}$ es mediana

* $\overline{BP}$ es simediana

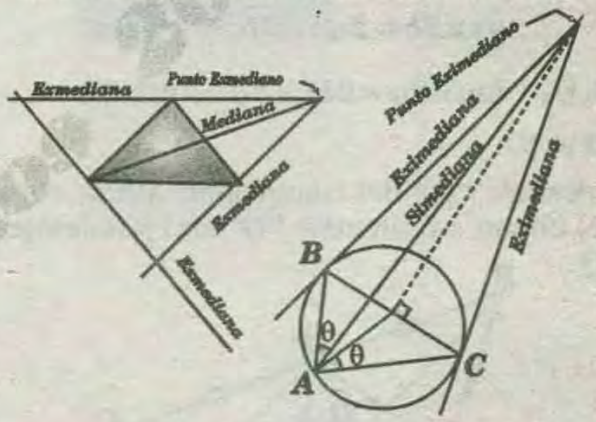
* $\overline{BP}$ y $\overline{BM}$ son isogonales .

Puesto que las medianas son concurrentes, las simedianas también son concurrentes y su punto de intersección es llamado el punto simediano del triángulo



El punto mediano y el punto simediano son puntos conjugados isogonales del triángulo.

EXIMEDIANAS Y EXMEDIANAS

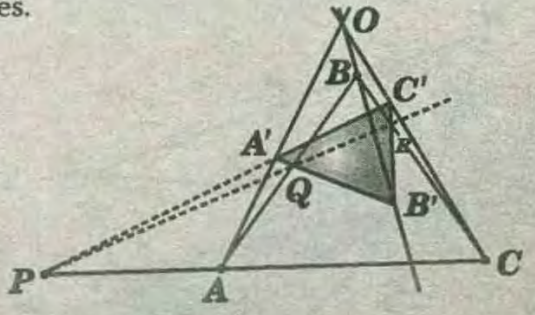


TEOREMA DE LEMOINE

En todo triángulo las tangentes a la circunferencia circunscrita en los vértices del triangulo , intersectan a los lados opuestos en puntos situados en línea recta.

TEOREMA DE DESARGUES

Si dos triángulos ABC y $A'B'C$ se encuentran en un plano de modo que las rectas AA', BB' y CC' sean concurrentes, entonces los puntos de intersección de los lados correspondientes o de sus respectivas prolongaciones son colineales.



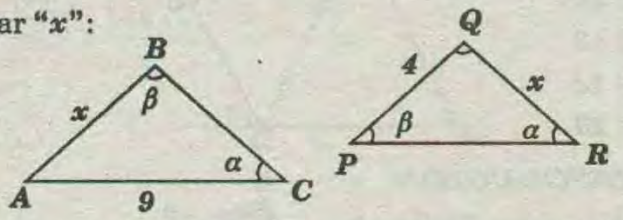
Si $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC}$ son concurrentes en O, entonces P, Q y R son colineales.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Calcular "x":

A) 5
B) 3
C) 7,5
D) 6
E) 6,5



RESOLUCIÓN:

* Por el primer caso de semejanza:

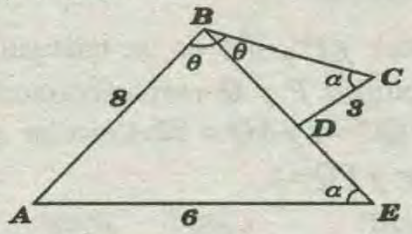
$\Delta ABC \sim \Delta PQR$, luego : $\frac{x}{9}=\frac{4}{x} \Rightarrow x^2=36 \Rightarrow x=6$

RPTA : "D"

PROBLEMA 2:

En la figura, calcular ***"BD"***

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



RESOLUCIÓN:

* Por el primer caso de semejanza:

El $\Delta ABC \sim \Delta BCD$, luego :

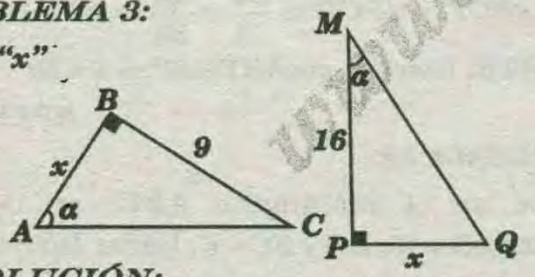
$$\frac{8}{x}=\frac{6}{3} \Rightarrow 24=6x \Rightarrow x=4$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3:

Hallar ***"x"***

A) 8
B) 10
C) 12
D) 20
E) 15



RESOLUCIÓN:

* Como en el $\triangle ABC \sim \triangle MPQ$, por el primer caso de semejanza , se obtendrá:

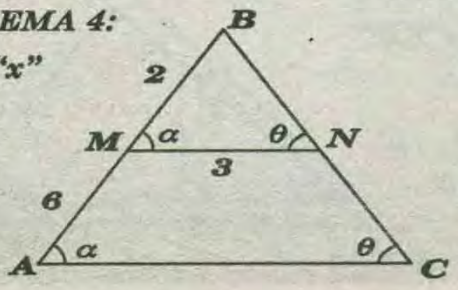
$$\frac{x}{16}=\frac{9}{x} \Rightarrow x^2=144 \Rightarrow x=12$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 4:

Calcular ***"x"***

A) 12
B) 2
C) 3
D) 4
E) 8



RESOLUCIÓN:

* Como el $\Delta ABC \sim \Delta MBN$, entonces:

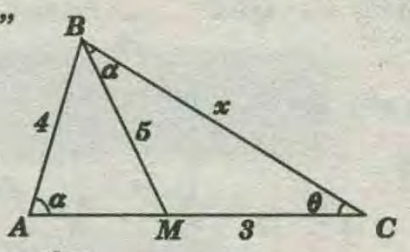
$$\frac{x}{3}=\frac{8}{2} \Rightarrow x=12$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 5:

Calcular ***"x"***

A) 8
B) 10
C) 11
D) 2,4
E) 16



RESOLUCIÓN:

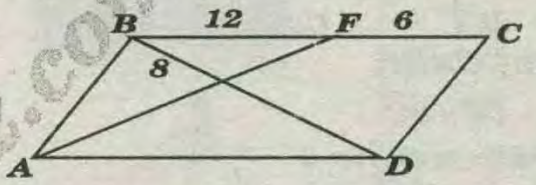
* Dado que: $\Delta ABC \sim \Delta BMC$, luego $\frac{x}{3}=\frac{4}{5} \Rightarrow x=2,4$

RPTA : "D"

PROBLEMA 6:

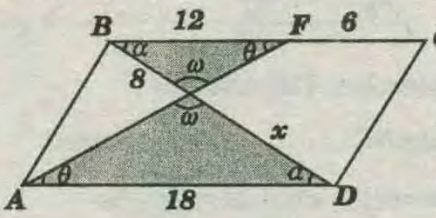
Si ***ABCD*** es un paralelogramo, calcular ***"QD"***

A) 8
B) 4
C) 12
D) 10
E) 6



RESOLUCIÓN:

* Como $\Delta BQF \sim \Delta AQD$, entonces:



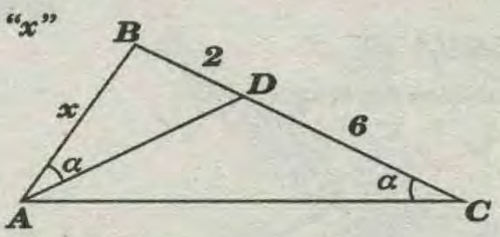
$$\frac{12}{18}=\frac{8}{x} \Rightarrow x=12$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 7:

Calcular ***"x"***

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 9

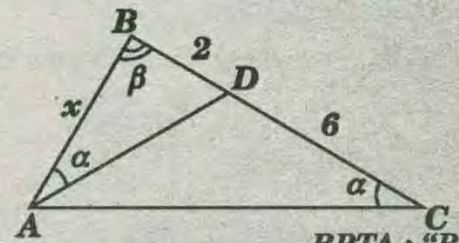


RESOLUCIÓN:

* Por el primer caso de semejanza: $\Delta ABD \sim \Delta ABC$,

* Luego:

$$\frac{x}{2}=\frac{8}{x} \Rightarrow x^2=16$$
$$\Rightarrow x=4$$



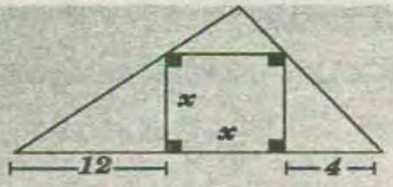
RPTA : "B"

PROBLEMA 8:

Calcular ***"x"***

www.CRATER2.com

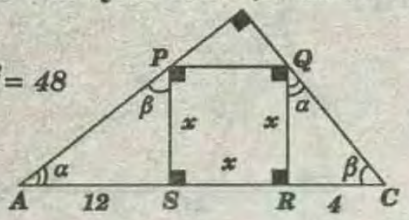
A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$
C) 4 D) $4\sqrt{3}$
E) 2



RESOLUCIÓN:

* Como $\triangle APS \sim \triangle QRC$ .....(Primer caso):

$$\frac{x}{4}=\frac{12}{x} \Rightarrow x^2=48$$
$$\Rightarrow x=4\sqrt{3}$$



RPTA : "D"

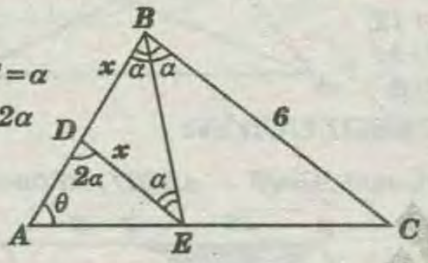
PROBLEMA 9:

En el triángulo $ABC, AB=4;\ BC=6;$ se traza $\overline{DE}$ paralela a $\overline{BC}$ ("D" y "E" en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente), de modo que BE sea bisectriz del ángulo "B". Calcular "BD".

A)4 B)3 C)2,8 D)2,4 E)4,2

RESOLUCIÓN:

* Como : $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
$\Rightarrow m\sphericalangle DEB = m\sphericalangle EBC = \alpha$
$m\sphericalangle ADE = m\sphericalangle DBC = 2\alpha$



* ΔEDB (triángulo Isósceles) $DE=DB=x$

* Además : $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.,.....(Primer caso)

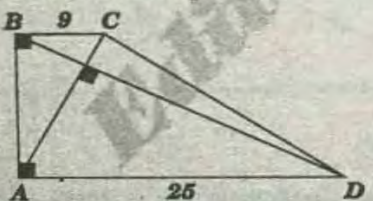
$$\frac{x}{6}=\frac{4-x}{4} \Rightarrow 4x=6(4-x) \Rightarrow 4x=24-6x$$
$$\Rightarrow 10x=24 \Rightarrow x=2,4$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 10:

Hallar la altura del trapecio.

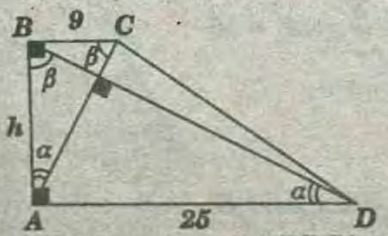
A) 12
B) 15
C) 14
D) 20
E) 13



RESOLUCIÓN:

* $\triangle ABC \sim \triangle BAD$.....(Primer caso)

$$\frac{h}{25}=\frac{9}{h} \Rightarrow h^2=225$$
$$\Rightarrow h=15$$

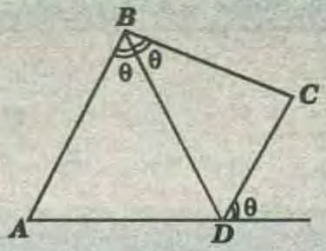


RPTA : "B"

PROBLEMA 11:

Según el gráfico calcular : BD, si $AB=16$ y $BC=9$

A) 6
B) 18
C) 12
D) 14
E) 20

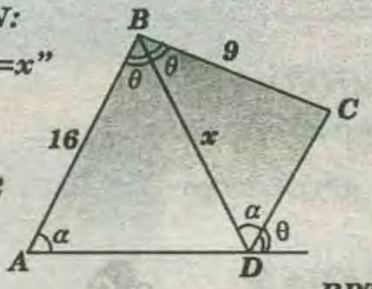


RESOLUCIÓN:

* Nos piden "$BD=x$"

* $\Delta_{ABD} \sim \Delta_{DBC}$

$$\Rightarrow \frac{x}{9}=\frac{16}{x} \Rightarrow x=12$$



RPTA : "C"

PROBLEMA 12:

Sobre los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo ABC, se ubican los puntos P y Q respectivamente tal que $2BP=3PC$, $QC=8$ y $AQ=22$. Calcular $m\sphericalangle PQC$, si $m\sphericalangle BAC=40°$ y $PQ=4$.

A)20° B)70° C)80° D)82° E)78°

RESOLUCIÓN:

* Trazamos $\overline{BT} \parallel \overline{PQ}$
$\Rightarrow m\sphericalangle BTC = x$

* ΔBCT.....(T. Thales)

$$\frac{m}{8}=\frac{3n}{2n} \Rightarrow m=12 \Rightarrow AT=10$$

* Pero : $\Delta BCT \sim \Delta PCQ \Rightarrow \frac{BT}{4}=\frac{5n}{2n} \Rightarrow BT=10$

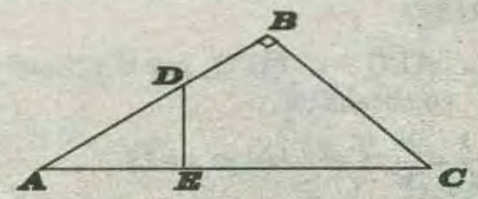
* Del ΔATB: Isósceles $m\sphericalangle ABT=40° \Rightarrow x=80°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 13:

Si tiene un Δ rectángulo ABC, en la cual $DE \perp AC$, $AD=10$, DE y $EC=8$. Hallar BD.

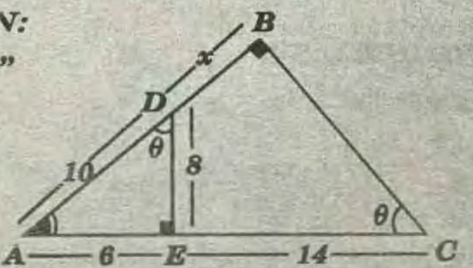
A) 2
B) 4
C) 6
D) 5
E) 8



RESOLUCIÓN:

* Cálculo de "AE"

$$AE^2+8^2=10^2$$
$$\Rightarrow AE=6$$



* Entonces : $AC=20$

* Luego $\triangle AED - \triangle ABC$:

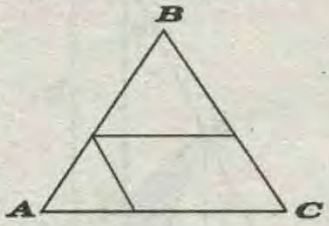
$$\Rightarrow \frac{\theta}{90^\circ}: \frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AC} \quad \frac{6}{10}=\frac{10+x}{20} \Rightarrow x=2$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 14:

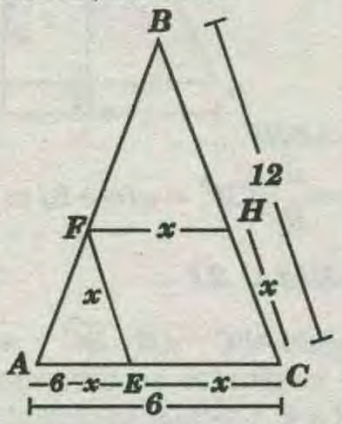
En el triángulo Isósceles ABC. Calcular el lado del rombo si : $AB=BC=12$ y $AC=6$

A) 3
B) 4
C) 3,5
D) 5
E) 4,5



RESOLUCIÓN:

* Como, $\Delta AFE \sim \Delta ABC$, entonces:



$$\frac{x}{12}=\frac{6-x}{6}$$
$$\Rightarrow x=12-2x$$
$$\Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 15:

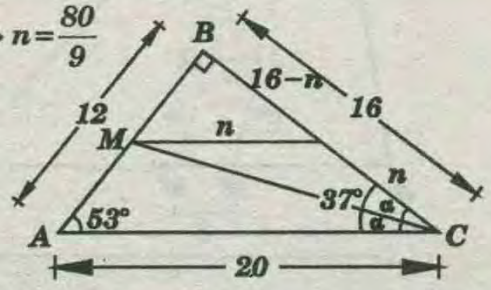
Se tiene un triángulo de lados **20, 12** y **16;** del vértice opuesto al lado menor se una bisectriz que corta al lado en el punto M y de M se traza una paralela al lado mayor. Hallar el perímetro del triángulo formado cuyo ángulo interior es el mismo que el triángulo dado.

A) 32/2 B) 64/3 C) 50/3 D) 37/3 E) 68/3

RESOLUCIÓN:

* Como $\Delta MBN \sim \Delta ABC$, luego:

$$\frac{n}{20}=\frac{16-n}{16} \Rightarrow n=\frac{80}{9}$$



* Luego : $\frac{n}{20}=\frac{\text{Perímetro MBN}}{\text{Perímetro ABC}}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{80}{9}}{20}=\frac{\text{Perímetro MBN}}{12+20+16} \Rightarrow \text{Perímetro MBN}=\frac{64}{3}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 16:

Se tiene los triángulos semejantes : ABC y PQR ; de modo que $m\sphericalangle BAC=100^\circ$. Calcular la suma de las medidas de 2 ángulos internos del triángulo PQR, si éstos son agudos.

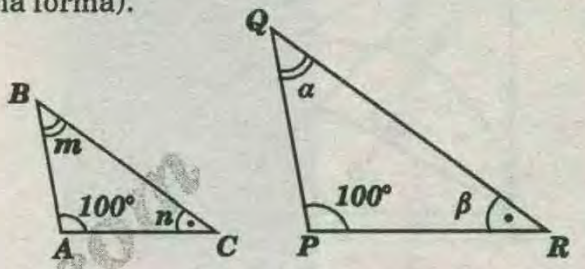
A) 100° B) 50° C) 40° D) 90° E) 80°

RESOLUCIÓN:

* Piden : $\alpha+\beta$ suma de la medidas de los ángulos agudos de ΔPQR.

* Por datos : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.

* Por definición , los triángulos semejantes tienen sus ángulos internos respectivamente de igual medida (misma forma).



* Como $m\sphericalangle BAC=100^\circ \Rightarrow m+n=80^\circ$; de la definición de semejanza.

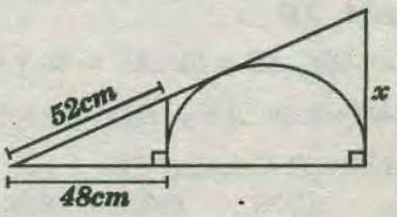
$$m=\alpha;\ n=\beta \Rightarrow m+n=\alpha+\beta=80^\circ$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 17:

El valor de x en cm de la siguiente figura es:

A) 52
B) 48
C) 47
D) 45
E) 46



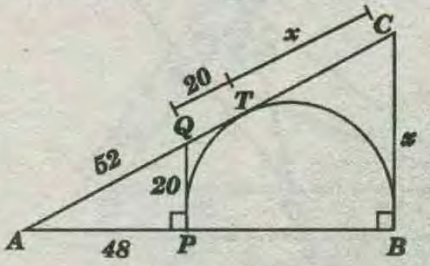
RESOLUCIÓN:

* Piden : x

* De la figura :

$BC=TC=x$

$PQ=QT=20$.....(*T. Pitágoras en* $\triangle APQ$)



* Se observa : $\triangle ABC \sim \triangle APQ$

$$\Rightarrow \frac{72+x}{x}=\frac{52}{20} \Rightarrow x=45$$

RPTA : "D"

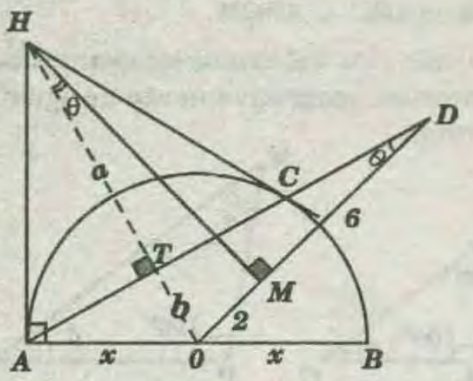
GRATIS.com

PROBLEMA 18 :

Se tiene una semicircunferencia de centro O y de diámetro AB, se traza $\overline{HA} \perp \overline{AB}$, luego de H la tangente $\overline{HC}$ (C sobre la semicircunferencia), se prolonga $\overline{AC}$ hasta un punto D y trazamos $\overline{HM} \perp \overline{OD}$. Si: $OM=2$, $MD=6$. Calcule AB.

A)6 B)8 C) $4\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN:



* $\triangle HMO \sim \triangle OTD \Rightarrow \dfrac{a+b}{8}=\dfrac{2}{b}$

$\Rightarrow b(a+b)=16$ .....(I)

* $\triangle HAO$: $x^2 = b(a+b)$ .....(II)

* De (I) y (II): $x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow AB = 8$

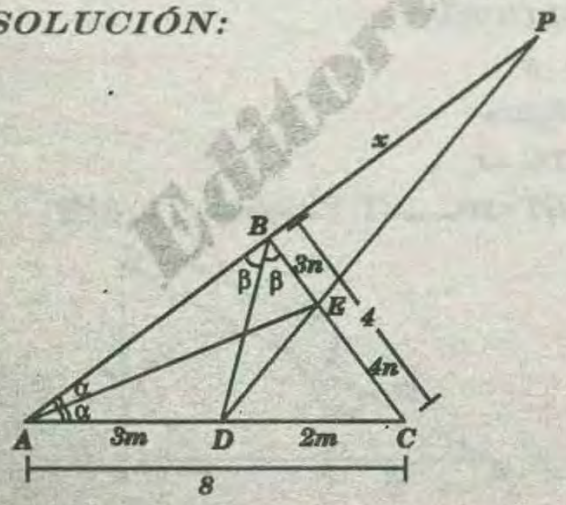
RPTA : "B"

PROBLEMA 19 :

En un triángulo ABC, $AB = 6u$, $AC = 8u$ y $BC = 4u$. Se trazan las bisectrices $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ el rayo $\overline{DE}$ que intercepta a $\overline{AB}$ en P. Calcular BP.

A) 5u B)6ú C)7u D)4,5 E)5,5u

RESOLUCIÓN:



* Por el teorema de Menelao , en el ΔABC ($\overline{PD}$ recta secante): $3m \times 4n \times x = 2m \times 3n \times (x+6)$

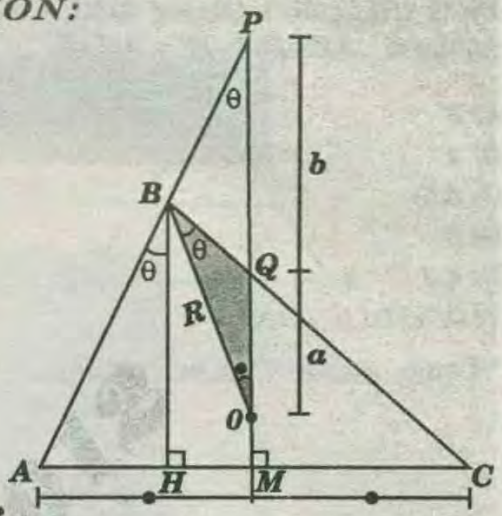
$\Rightarrow x = 6\mu$

RPTA : "B"

PROBLEMA 20 :

En un triángulo $ABC(AB<BC)$, la mediatriz de $\overline{AC}$ intercepta a $\overline{BC}$ en Q y a la prolongación de $\overline{AB}$ en P. Si O es el circuncentro y $OQ = a$, $PQ = b$, calcule el circunradio.

RESOLUCIÓN:



$\Delta OBP \sim \Delta OQB$

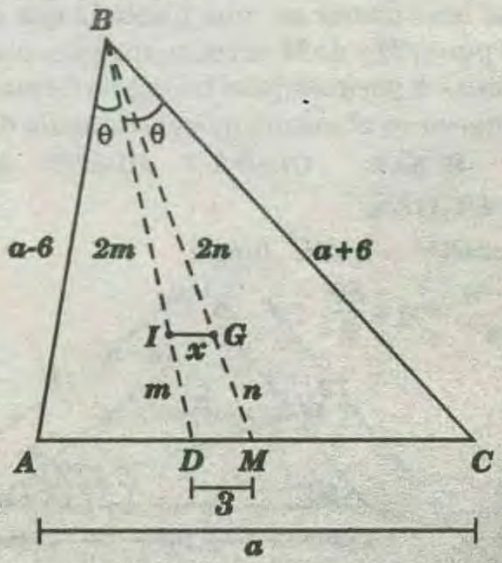
$$\Rightarrow \frac{R}{a+b}=\frac{a}{R} \Rightarrow R^2 = a(a+b) \Rightarrow R = \sqrt{a(a+b)}$$

PROBLEMA 21 :

En un triángulo ABC ; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ al mismo nivel tienen sus longitudes en progresión aritmética de razón igual a 6. Calcular la distancia del incentro al baricentro.

A) 1,5 B) 2 C)2,5 D) 4 E) 1

RESOLUCIÓN:



* Por el teorema del incentro:

$$\frac{BI}{ID}=\frac{a-6+a+6}{a} \Rightarrow \frac{IB}{ID}=2$$

* Pero como :

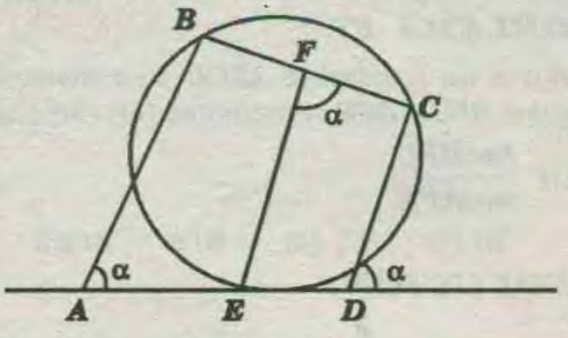
$$\frac{BG}{GM}=2 \Rightarrow \overline{IG} \parallel \overline{AC}$$

* $\Delta IBG \sim \Delta DBM \Rightarrow \frac{x}{3}=\frac{2n}{3n} \Rightarrow x=2$

RPTA : "B"

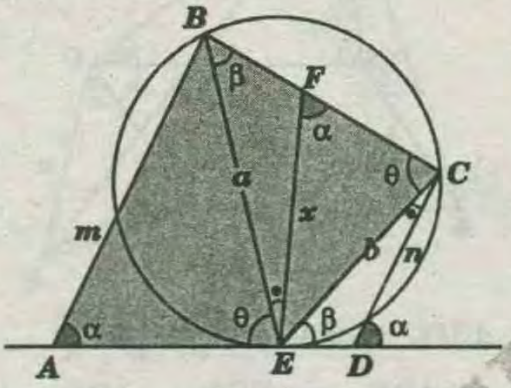
PROBLEMA 22 :

En la siguiente figura, $AB=m$ y $CD=n$. Calcule EF.



A) $\frac{m+n}{2}$ B) $\frac{2mn}{m+n}$ C) $\sqrt{mn}$

RESOLUCIÓN:



* $\Delta ABE \sim \Delta FEC \Rightarrow \frac{m}{x}=\frac{a}{b}$ .....(I)

$\Delta BFE \sim \Delta EDC \Rightarrow \frac{x}{n}=\frac{a}{b}$ .....(II)

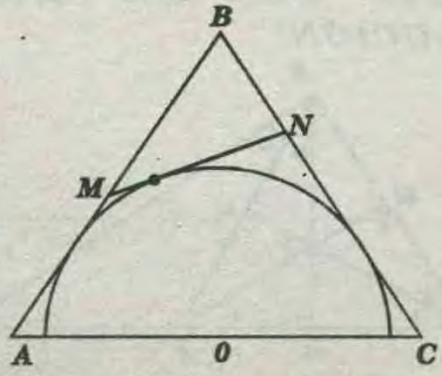
* (I) = (II): $\frac{m}{x}=\frac{x}{n} \Rightarrow x=\sqrt{mn}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 23 :

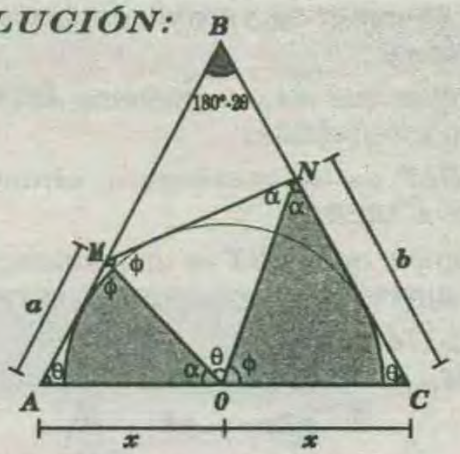
En la figura mostrada triángulo ABC es isósceles : $AB = BC$. $\overline{MN}$ es tangente a la semicircunferencia.

* Si $AM = a$ y $NC = b$. Halle AC.



A) $\sqrt{a\times b}$ B) $2\sqrt{a\times b}$ C) $3\sqrt{a\times b}$

RESOLUCIÓN:



* $\Delta AMO \sim \Delta CON$:

$$\Rightarrow \frac{a}{x}=\frac{x}{b} \Rightarrow x^2=ab \Rightarrow x=\sqrt{ab}$$

* Luego : $AC=2\sqrt{ab}$

RPTA : "B"

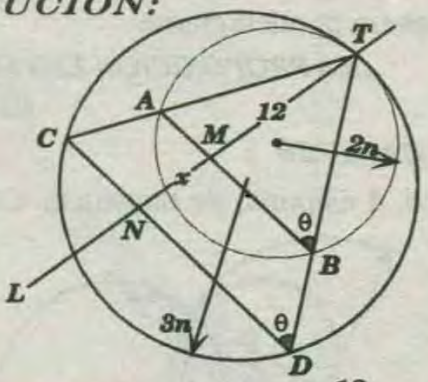
PROBLEMA 24 :

Sean dos circunferencias tangentes interiores, sea T el punto de tangencia. Sean T el punto de tangencia. Sean A, B, C y D puntos de las circunferencias de radios r y R, $r<R$. Los puntos : T, A y C; y T, B y D son colineales, $T \in \overline{L}$ tal que $\overline{L} \cap \overline{AB}=\{M\}$ y $\overline{L} \cap \overline{CD}=\{N\}$.

Si $3r = 2R$ y $TM = 12cm$. Halle MN

A)2cm B)4cm C)6cm D)8cm E)10cm

RESOLUCIÓN:



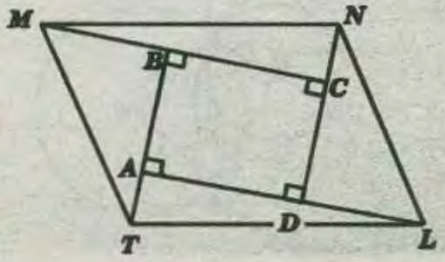
$\overline{AB} // \overline{CD} \Rightarrow \Delta ATB \sim \Delta CTD \Rightarrow \frac{12}{x+12}=\frac{2n}{3n}$

* Efectuando : $x=6\mu$

RPTA : "C"

PROBLEMA 25 :

En el gráfico, $BC=K(MB)=K(DL)$ y $AB=K(AT)=K(CN)$



Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

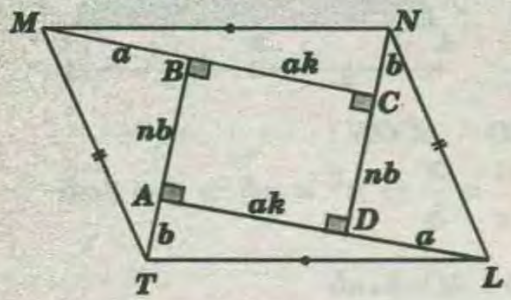
I) Se cumple que los cuadriláteros ***ABCD*** y ***TMNL*** son siempre semejantes .

II) Si ***MNLT*** es un rectángulo, entonces será semejante a ***ABCD***.

III) Se cumple que ***MNLT*** es un paralelogramo.

A) VFV B)FVV C)FVF D)VVF E)FFV

RESOLUCIÓN:



I) $\triangle MBT \cong \triangle LDN$ .....*(LAL)*

$\Rightarrow MT = NL$

$\triangle MCN \cong \triangle LAT$ .....*(LAL)*

$\Rightarrow MN = TL$

TMNL es un paralelogramo.

...LA PROPOSICIÓN ES FALSA.

*II) Si **MNLT*** es un rectángulo, entonces:

$MNLT \sim ABCD$

...LA PROPOSICIÓN ES VERDADERA.

III) ***MNLT*** es un paralelogramo

...LA PROPOSICIÓN ES VERDADERA.

RPTA : "B"

PROBLEMA 26 :

En el gráfico, ***A*** es punto de tangencia. Calcule x .

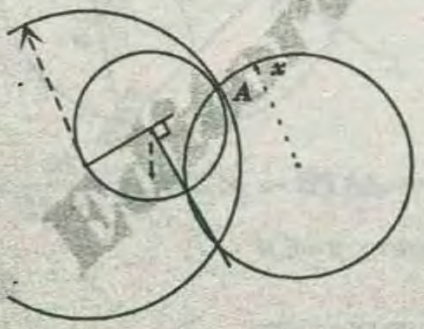
A) $\frac{R+r}{2}$

B) $R-r$

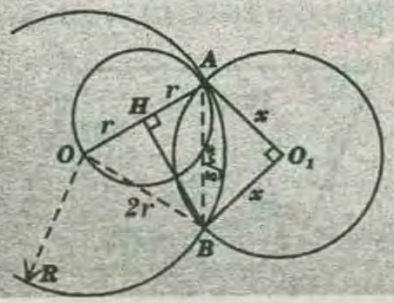
C) $\sqrt{Rr}$

D) $\sqrt{R^2+r^2}$

E) $2\sqrt{Rr}$



RESOLUCIÓN:



* De la figura :

$R = x\sqrt{2}$ .....*(I)*

$2r = x\sqrt{2}$ .....*(II)*

(I) × *(II)*: $\not{2}Rr = \not{2}x^2 \Rightarrow x = \sqrt{Rr}$

RPTA : "C"

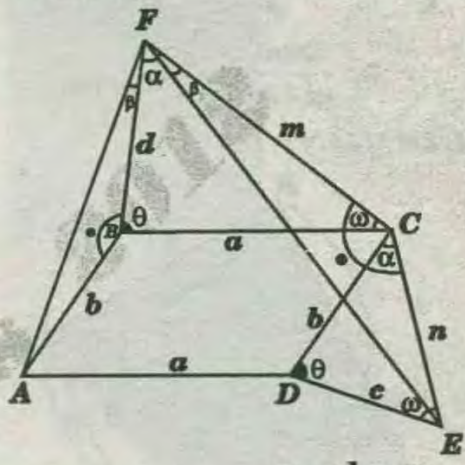
PROBLEMA 27 :

Exterior a un romboide ***ABCD*** se construyen los triángulos ***BFC*** y ***DCE*** semejantes (en ese orden).

Calcule $\frac{m\sphericalangle BFC}{m\sphericalangle AFE}$

A) 1 B) 1/2 C) 1/3 D) 2 E) 2/3

RESOLUCIÓN:



* Dato : $\Delta BFC \sim \Delta DCE \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{d}{b} = \frac{m}{n}$

* Pero : $m\sphericalangle ABF = m\sphericalangle FCE \Rightarrow \Delta ABF \sim \Delta ECF$

* Luego: $m\sphericalangle AFB = m\sphericalangle EFC = \beta$

* En consecuencia : $\frac{m\sphericalangle BFC}{m\sphericalangle AFE} = \frac{\alpha}{\alpha} \Rightarrow \frac{m\sphericalangle BFC}{m\sphericalangle AFE} = 1$

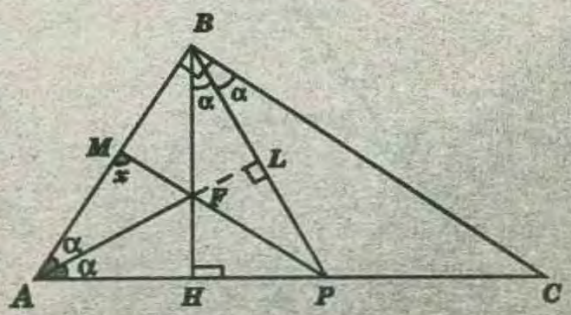
RPTA : "A"

PROBLEMA 28 :

En un triángulo rectángulo ***ABC*** recto en ***B*** , se traza la altura ***BH*** y en los triángulos ***BHC*** y ***AHB*** se trazan las bisectrices interiores $\overline{BP}$ y $\overline{AF}$, respectivamente. Si $\overline{PF} \cap \overline{AB} = \{M\}$, calcule $m\sphericalangle AMP$.

A) 90° B) 45° C) 60° D) 75° E) 53°

RESOLUCIÓN:



* Si : $\overline{AF} \cap \overline{PB} = \{L\}$

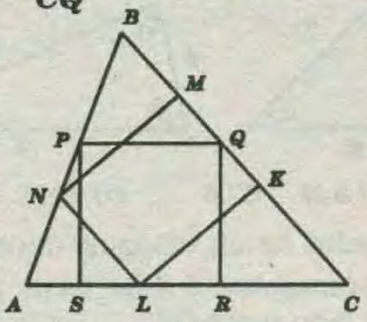
* Pero: $m\sphericalangle APL + m\sphericalangle FAP = 90° \Rightarrow \overline{BC} \perp \overline{AD}$

* $\triangle ABP$: F es ortocentro $\Rightarrow \overline{PM} \perp \overline{AB} \Rightarrow x = 90°$

RPTA : "A"

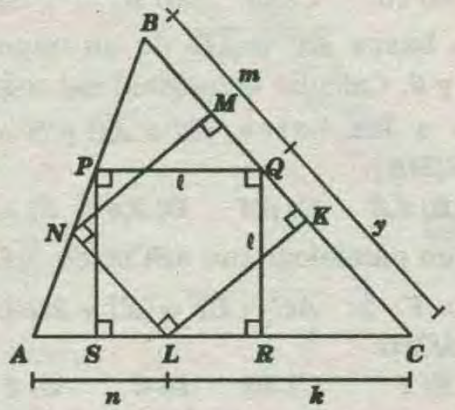
PROBLEMA 29:

En el gráfico, $PQRS$ y $MNLK$ son cuadrados. Si $(AL)(BQ) = a^2$ y $\frac{LC}{CQ} = r$ calcule LN.



A) $a\sqrt{r}$
B) $a+r$
C) $a-r$
D) $2r-a$
E) ar

RESOLUCIÓN:



* Dato : $mn = a^2$; $\frac{K}{y} = r$

* $\triangle LKC \sim \triangle QRC$: $\Rightarrow \frac{x}{l} = \frac{K}{y}$ .....(I)

* $DANL \sim DPBQ$: $\Rightarrow \frac{x}{n} = \frac{m}{\ell}$ .....(II)

* (I) y (II):

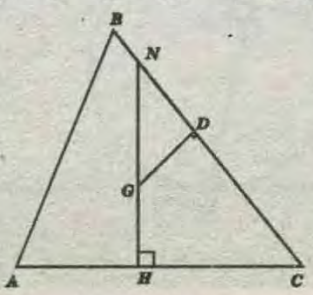
$$\frac{x^2}{\ell \times n} = \frac{K \times m}{\ell \times y} \Rightarrow x^2 = (mn)\left(\frac{K}{y}\right)$$

$$\Rightarrow x^2 = a^2 r \Rightarrow x = a\sqrt{r}$$

RPTA : "A"

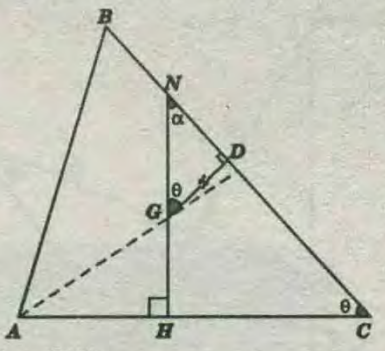
PROBLEMA 30 :

En el gráfico , G es baricentro de la región triangular ABC. Si $(AH)(HC) = (GH)(NH)$ y $(ND)(BC) = 96$, calcule GD.



A) 4
B) 8
C) $4\sqrt{2}$
D) 12
E) $8\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN:



* Dato : $\frac{HC}{NH} = \frac{GH}{AH}$ .....(I)

* $\triangle NDG \sim \triangle NHC$:

$$\Rightarrow \frac{x}{HC} = \frac{ND}{NH} \Rightarrow \frac{x}{ND} = \frac{HC}{NH} \text{ .....(II)}$$

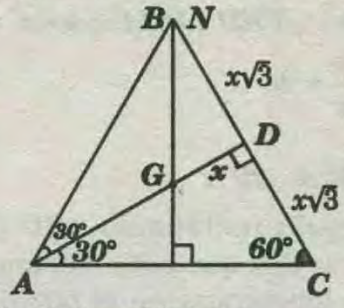
* (I) = (II): $\boxed{\frac{x}{ND} = \frac{GH}{AH}}$

* Esto demuestra que :

$\triangle NDG \sim \triangle AHG$:

$\Rightarrow m\sphericalangle GAH = \alpha$ y $m\sphericalangle AGH = \theta$

* Luego : $A, G,$ y D son colineales , es decir el $\triangle ABC$ es equilátero.



* Por condición del problema :

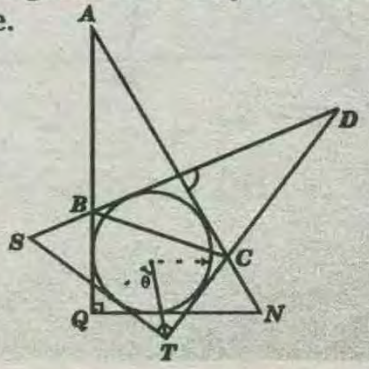
$$(x\sqrt{3})(2x\sqrt{3}) = 96 \Rightarrow 6x^2 = 6 \times 16$$

$$\Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

RPTA : "A"

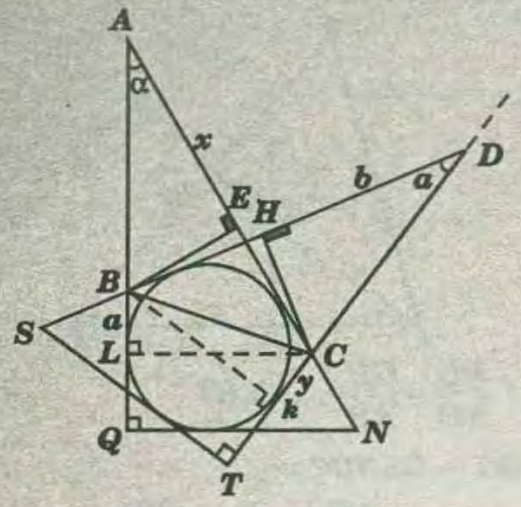
PROBLEMA 31 :

Los triángulos circunscritos a $\mathscr{C}$ AQN y STD son semejantes y $\theta \neq \gamma$. Si la razón de las proyecciones ortogonales $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ sobre AQ y BD respectivamente es K , calcule la razón de las proyecciones ortogonales de AB y BC sobre AC y CT, respectivamente.



A) K/2
B) K
C) K/3
D) K/4
E) 2K

RESOLUCIÓN:



* Inradio común para ambos $\triangle s$ por condición de semejanza : $m\sphericalangle A = m\sphericalangle D = \alpha$

$$\Rightarrow \triangle AQN \cong \triangle DTS$$

* Por otro lado : $m\sphericalangle ACT = m\sphericalangle DBQ$

$$\Rightarrow \triangle ACL \cong \triangle DBK \ (ALA)$$

* Por lo cual : $CL = BK$

$$\triangle BLC \cong \triangle BKC \ (L.L.) \Rightarrow a = y$$

$$\triangle BEA = \triangle CHD \ (ALA) \Rightarrow b = x$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{y}{x} = K$$

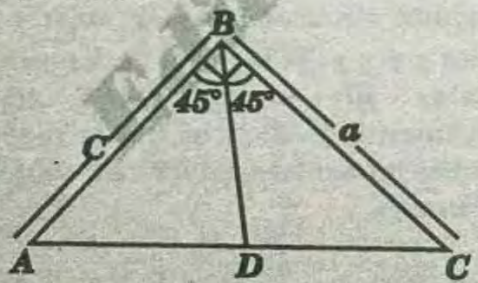
RPTA : "B"

PROBLEMA 32 :

Sea un triángulo rectángulo *ABC* (recto en *B*); trazamos la bisectriz que párte del ángulo recto que interseca a la hipotenusa en el punto *D*. Si $AB=c$ y $BC=a$, ¿cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

A) $BD(a+c)=ac$ *B)* $BD(a+c)<ac$ *C)* $BD(a+c)\geq ac$
D) $BD(a+c)\leq ac$ *E)* $BD(a+c)>ac$

RESOLUCIÓN:



* Por propiedad :

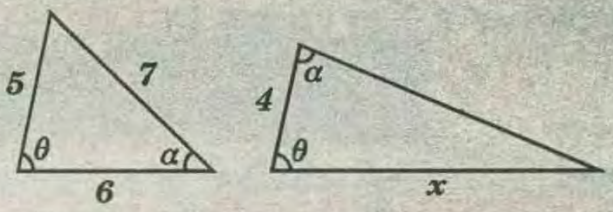
$$\frac{\sqrt{2}}{BD} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \Rightarrow BD(a+c) = \sqrt{2}ac \Rightarrow \frac{BD(a+c)}{ac} = \sqrt{2}$$

* De las alternativas : $\frac{BD(a+c)}{ac} > 1$

RPTA : "E"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 A partir de los datos indicados en los gráficos, calcular "*x*".



A) 3 *B) 8/3* *C) 5* *D) 10/3* *E) 4*

02 Los lados de un triángulo miden *6; 7* y *8*, un triángulo semejante a éste tiene perímetro *84*. Calcular su lado mayor.

A) 32 *B) 16* *C) 28* *D) 7* *E) 18*

03 Las bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ de un trapecio *ABCD* miden *4* y *6*. Calcular la longitud del segmento *MN* paralelo a las bases ($M \in \overline{AB}$ y $N \in \overline{CD}$), si: $2(AM)=3(MB)$.

A) 4,8 *B) 5,2* *C) 4,6* *D) 3,8* *E) 4,2*

04 En un paralelogramo *ABCD*, en $\overline{AD}$ se ubica el punto *F*. Si $\overline{AC} \cap \overline{BF} = \{E\}$ y $2(BE)=3(EF)$, calcular *AF/FD*.

A) 4/3 *B) 1* *C) 3/2* *D) 3* *E) 2*

05 Las bases de un trapecio miden *2* y *3*.

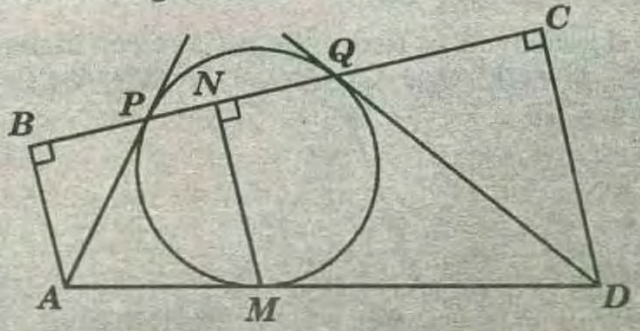
Calcular la longitud del segmento paralelo a las bases comprendido entre los lados laterales y que contiene a la intersección de las diagonales.

A) 2,2 *B) 2,4* *C) 2,6* *D) 1,8* *E) 2,5*

06 Se tiene un triángulo *ABC*: $AB=5$, $BC=7$ y $AC=6$. Si $M \in \overline{AB}$, $N \in \overline{BC}$, $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ y los perímetros de las regiones *MBN* y *AMNC* son iguales, calcular *MN*.

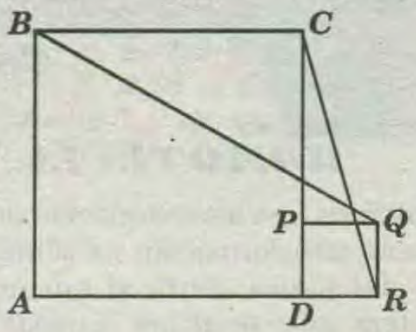
A) 4,8 *B) 4,5* *C) 5* *D) 3,6* *E) 4,2*

07 Si: $AB=4$ y $CD=6$, calcular *MN*. (*P*, *Q* y *M* son puntos de tangencia)



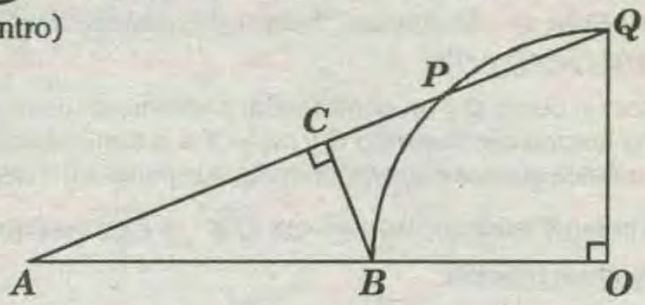
A) 4,6 *B) 4,5* *C) 4,8* *D) 4,2* *E) 5*

08 Si $ABCD$ y $PQRD$ son cuadrados y $CR=6$. calcular BQ.



A) 8 B) 9 C) 12 D) $6\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{2}$

09 Si: $2(AB)=3(OB)$ y $PQ=6$, calcular BC. (O es centro)

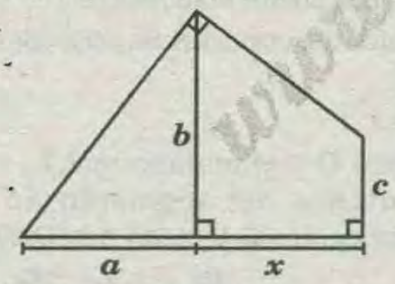


A) 2 B) 3 C) 3,5 D) 4 E) 4,5

10 Las medidas de los lados de un triángulo son tres números enteros consecutivos, la medida del mayor ángulo es el doble de la medida del menor ángulo. Calcular la longitud de la bisectriz relativa al lado mayor.

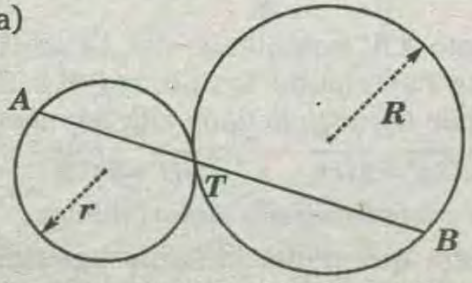
A) 10/3 B) 11/9 C) 9/7 D) 13/4 E) 23/6

11 Del gráfico mostrado, hallar el valor de "x".



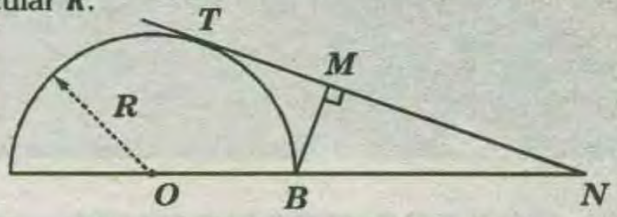
A) $\frac{a(a+b)}{c}$ B) $\frac{bc}{a}$ C) $\frac{b(b-c)}{a}$ D) $\frac{ac}{b}$ E) $\frac{a(b-c)}{b}$

12 Si: $2R=3r$ y $AT=12$, calcular TB. (T es punto de tangencia)



A) 10 B) 16 C) 9 D) 18 E) 24

13 Si T es punto de tangencia, $BM=2$ y $BN=6$, calcular R.



A) 3 B) 5 C) 2 D) 2,5 E) 4

14 En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BR}$ (R en AC), luego se traza la ceviana $\overline{AM}$ que interseca a $\overline{BR}$ en su punto medio. Si $BM=2$ y $CM=5$,
calcular AB.

A) 20/7 B) 10/7 C) 4 D) 3 E) 14/3

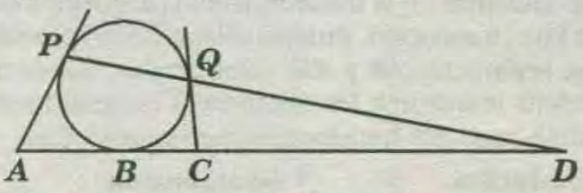
15 En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BM}$, en $\overline{MC}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos O y P, respectivamente, tal que:

$AM=DC$, $AB=2(PQ)$ y $m\sphericalangle ABM=m\sphericalangle QPC$.

Calcular $m\sphericalangle C$.

A) 30° B) 37° C) 53° D) 45° E) 60°

16 Si P, Q y B son puntos de tangencia, $AB=3$ y $BC=2$, calcular CD.



A) 8 B) 9 C) 12 D) 10 E) 11

17 Dos lados consecutivos de un paralelogramo miden 6 y 16, la distancia entre los lados más cortos es de 8. Calcular la distancia entre los otros dos lados.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8/3

18 En un triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, se traza la mediatriz de $\overline{AB}$ que corta a la prolongación de $\overline{AC}$ en F. Calcular AC, si: $BC=4$ y $AF=8$.

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) 2,5 E) 1,5

19 Un poste de 5 m produce una sombra de 6 m, en ese mismo instante un árbol produce una sombra de 18 m. Calcular la altura del árbol.

A) 9 m B) 10 m C) 12 m D) 13 m E) 15 m

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTI-14

1)D	2)A	3)A	4)E	5)B	6)B	7)C	8)E	9)E	10)A
11)C	12)D	13)A	14)E	15)A	16)D	17)E	18)C	19)E	

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Se denominan transformaciones geométricas a todas aquellas correspondencias en las que, tanto el conjunto de origen como el de llegada, están constituidos por puntos. En particular, en este capítulo se estudiarán transformaciones geométricas que son aplicaciones. Es decir , para cada elemento del conjunto de partida existe uno y un solo elemento en el conjunto imagen. Dentro de las transformaciones geométricas se estudiarán como más importantes :

* ***Las translaciones.***
* ***Los giros.***
* ***Las simetrías axiales y centrales.***

Todas las cuales constituyen el grupo de las *isométricas* , con la propiedad característica de que si ***A*** y ***B*** son dos puntos cualesquiera del conjunto de partida y ***A'B'*** sus correspondientes en la transformación geométrica de que se trate (giro, translación , simetría axial, etc.), debe verificarse que los segmentos ***AB*** y ***A'B'*** sean iguales. (Es decir, las isométricas mantienen las distancias.) Posteriormente se estudiarán otras dos transformaciones geométricas

* ***Homotecias.*** * ***Semejanzas.***

que constituyen el denominado *grupo equiforme,* puesto que estas transformaciones mantienen iguales los ángulos y por tanto , la forma.

ISOMETRÍAS

Se dice que una transfomación geométrica es una isometría cuando para todo par de puntos cualesquiera ***A*** y ***B*** de la figura inicial a los que corresponden en la transfomación geométrica los puntos ***A'*** y ***B'*** se verifica la relación :

$$AB = A'B' \text{ ..... } (**)$$

Según la definición anterior , en toda isometría se mantienen las distancias relativas entre dos puntos cualesquiera y sus asociados por la transformación. Como se ha visto, los giros, las translaciones y las simetrías axiales son isometrías, ya que verifican la propiedad (**) característica . Además, el conjunto de las isometrías tiene con relación a la operación producto, estructura de grupo no abeliano (no cumple con la propiedad conmutativa). Dicho grupo se denomina grupo de las isometrías .

HOMOTECIA

La homotecia es una transformación de semejanza. Se denomina transformación de semejanza a toda aflicción del plano sobre si mismo en la que cualesquiera que sean los puntos ***A; B*** y sus correspondientes puntos ***A' ; B'*** todos en el mismo plano; la razón ***AB/A' B'*** permanece constante. Esta razón se denomina "razón de semejanzas".

DEFINICIÓN :

Dados un punto ***O*** y un número real ***K*** distinto de cero , se llama homotecia de centro ***O*** y razón ***K*** a la transfomación geométrica que hace corresponder a cada punto ***X*** del plano otro punto ***X'*** tales que los vectores $\overrightarrow{OX'}$ y $\overrightarrow{OX}$ verifiquen la siguiente relación:

$$\overrightarrow{OX'} = K\,\overrightarrow{OX}$$

Se dice entonces que el punto ***X'*** es homotético del ***X***.

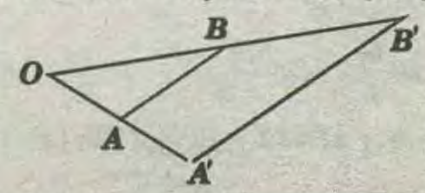
* Si ***K>0***, es decir , si ***K*** es positivo , la homotecia se llama directa o de razón positiva , y en este caso el centro ***O*** de la homotecia es exterior a los segmentos que unen cada dos puntos homotéticos.

* Si ***K<0*** , ***K*** negativo, la homotecia se denomina inversa o de razón negativa. Cuando esto ocurre, el centro de la homotecia está situado en el interior de los segmentos ***XX'*** que unen cada dos puntos homotéticos.

* Si ***K=1***, se trata de una coincidencia , por lo que se descartará este valor de ***K***.

EJEMPLO :

Dado un centro ***O*** y el número real ***2*** , construir la figura homotética del segmento ***AB*** según la homotecia del centro ***O*** y razón ***2;h(O;2)***.



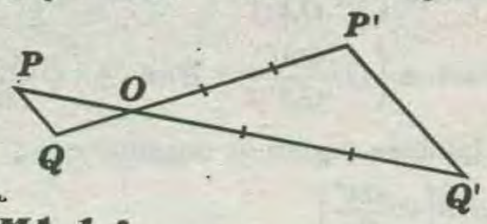
El segmento ***A'B'*** homotético del ***AB*** se construye fácilmente calculando los puntos ***A'*** y ***B'*** por la definición de homotecia dada anteriormente :

$$\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA} \quad \wedge \quad \overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}$$

y uniendo posteriormente dichos puntos .

Si se tuviera que hallar la figura homotética del segmento ***PQ*** de la figura por una homotecia de centro ***R*** y razón negativa ***3*** se procedería de manera

similar : $\overrightarrow{OQ'}=-3\overrightarrow{OP}$ $\overrightarrow{OP'}=-3\overrightarrow{OQ}$



TEOREMA 1 :

La transformación de semejanza aplica segmentos en segmentos; rayos en rayos ; rectas en rectas.

TEOREMA 2 :

La transformación de semejanza conserva la medida de los ángulos entre rayos correspondientes.

Considere los puntos colineales $O;A$ y A' contenidos en cierto plano, tal que $OA'=K(OA)$; la aplicación del plano sobre sí mismo que hace corresponder de esta manera al punto A· se denomina ***HOMOTECIA***; el punto O se denomina centro de homotecia y el número real diferente de cero K , es la razón de homotecia .

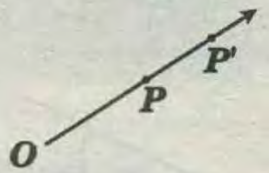
NOTACIÓN :

$H(0;K)$ es la homotecia de centro O y razón K; tal que $\frac{OA'}{OA}=K$ Se dice que el punto A se transporta al punto mediante la homotecia $H(O;r)$ Se consideran dos casos ; según que el centro de homotecia sea exterior al segmento que une dos puntos homotéticos ; o que sea interior al segmento En el segundo caso la homotecia es inversa y la razón de homotecia se considera negativa.

En la figura sea $\frac{OA'}{OA}$; entonces el punto A' se transporta al punto A' mediante $H(O;-r)$. En la Homotecia Inversa los segmentos OA y OA' tienen sentidos opuestos (suponiendo una orientación partiendo de O), de esta manera la homotecia queda bien determinada cuando se conoce el centro y la razón de homotecia con su signo respectivo.

HOMOTECIA DE UN PUNTO

Dado que un punto fijo de O y una razón constante K se dice que un punto P' es el homotético de P , si P' pertenece al rayo OP y $\frac{OP'}{OP}=K$



Si $P\in\overrightarrow{OP}\ y\ \frac{OP'}{OP}=K/(K\in\mathbb{R})$

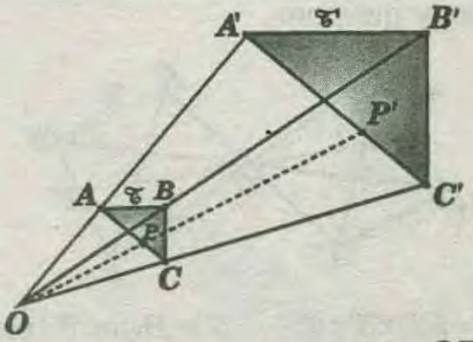
entonces P' es homotético de P, respecto de O y de razón K.

NOTACIÓN :

$$P'=Hom.P(O;K)$$

HOMOTECIA DE UNA FIGURA

Dado un punto fijo O y una razón constante K se dice que una figura $\mathcal{F}'$ es la homotética u homotésica de la figura $\mathcal{F}$, si para todo punto P' de $\mathcal{F}'$ le corresponde un punto P de $\mathcal{F}$, tal que P' pertenece al rayo OP y $\frac{OP'}{OP}=K$



Si $\forall P'\in\mathcal{F}'\ \exists\ \text{un}\ P\in\mathcal{F}/P'\in\overrightarrow{OP}\ y\ \frac{OP'}{OP}=K;$

entonces $\mathcal{F}'$ es el homostético de $\mathcal{F}$, respecto de O y de razón K.

$$\Rightarrow \mathcal{F}=Hom.\mathcal{F}(O;K)$$

NOTAS :

* Cuando $K=1$, las figuras coiciden totalmente por lo cual estamos ante una transformación identidad.

* Cuando $K=-1$; la transformación es una simetría puntual o central .

* Cuando $K\neq 0$,las figuras son denominadas semejantes, donde K es la constante de

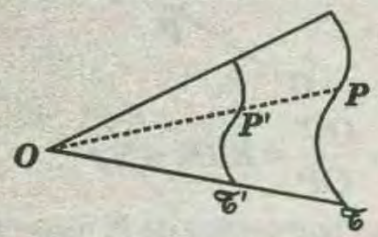
proporcionalidad .

$$\Rightarrow \mathcal{F} \sim \mathcal{F} \text{ cuando } K \neq 0$$

* Dos figuras homotésicas son semejantes pero dos figuras semejantes no necesariamente serán homotésicas.

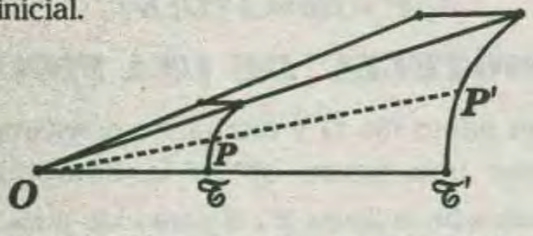
HOMOTECIA DIRECTA

Dos figuras hometésicas tendrán homotecia directa si , k es mayor que cero . Si $0<k<1$, la transformación es una reducción de la figura inicial .



$$\frac{OP'}{OP}=K....(0<K<1) \quad \mathcal{F}'=Hom.\mathcal{F}(O;K)$$

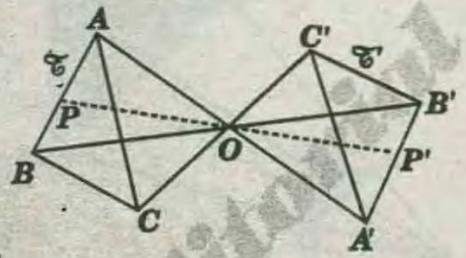
Si $K > 1$, la transformación es una ampliación de la figura inicial.



$$\frac{OP'}{OP}=K(K>1) \qquad \mathcal{F}'=Hom.\mathcal{F}(O;K)$$

HOMOTECIA INVERSA

Dos figuras homotésicas tendrán homotecia inversa, si K es menor que cero.



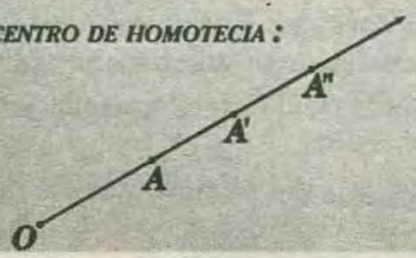
$$\frac{OP'}{OP}=[K](K<0) \qquad \mathcal{F}'=Hom.\mathcal{F}(O;K)$$

PRODUCTO DE HOMOTECIAS

DE UN PUNTO :

Es el producto de dos o más homotecias aplicadas a un punto.

CON UN MISMO CENTRO DE HOMOTECIA :



$$A'=Hom.A\left(O;\frac{OA'}{OA}\right) \quad A''=Hom.A'\left(O;\frac{OA''}{OA'}\right)$$

$$A''=Hom.A\left(O;\frac{OA'}{OA'}\right) * Hom.A'\left(O;\frac{OA''}{OA}\right)$$

* pero también podemos observar que :

$$A''=Hom.A\left(O;\frac{OA''}{OA}\right)$$

$$\Rightarrow Hom.A\left(O;\frac{OA''}{OA}\right)=Hom.A\left(O;\frac{OA'}{OA}\right)*Hom.A'\left(O;\frac{OA''}{OA}\right)$$

NOTA :

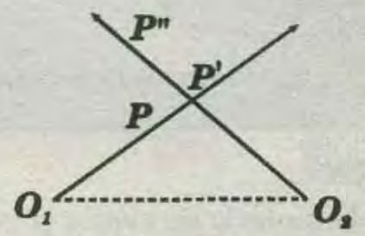
De la figura : $\frac{OA''}{OA}=\frac{OA'}{OA}\times\frac{OA''}{OA'}$

$$\Rightarrow Hom.P(O;r_1)*Hom.Q(O;r_2)=Hom.P(O;r_1\times r_2)$$

* Si $r_2=\frac{1}{r_1}$ entonces el producto de homotecias resulta una identidad.

* Si $r_2=-\frac{1}{r_1}$, entonces el producto de homotecias resulta una simetría.

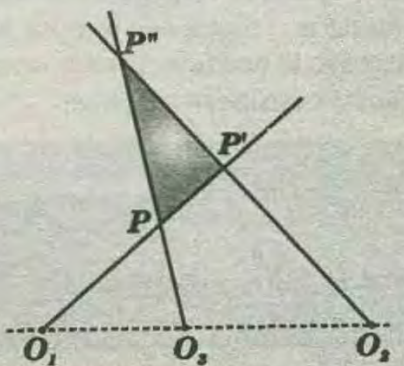
CON DIFERENTES CENTROS DE HOMOTECIA :



$$P'=Hom.P\left(O_1;\frac{O_1P'}{O_1P}\right) ; P''=Hom.P'\left(O_2;\frac{O_2P''}{O_2P'}\right)$$

$$P''=Hom.P\left(O_1;\frac{O_1P'}{O_1P}\right);HomP'\left(O_2;\frac{O_2P''}{O_2P'}\right)$$

NOTA :



Sea : $\frac{O_1P'}{O_1P}=r_1 ; \frac{O_2P''}{O_2P'}=r_2; \frac{O_3P''}{O_3P}=r_3$

* del teorema de Menelao para el $\triangle PP'P''$ se cumple $\frac{O_1P'}{O_1P}\times\frac{O_2P''}{O_2P''}\times\frac{O_3P}{O_3P''}=1$

$$\Rightarrow \frac{O_1P'}{O_1P}\times\frac{O_2P''}{O_2P''}=\frac{O_3P}{O_3P''}\Rightarrow r_1\times r_2=r_3$$

$$\Rightarrow P''=Hom.P(O_3;r_3)=Hom.P(O_3;r_1\times r_2)$$

* Pero :

$$\Rightarrow Hom.P(O_1;r_1)*Hom.P(O_2;r_2)=Hom.P(O_3;r_1*r_2)$$

donde $O_1;O_2$ y O_3 están alineados (colineales).

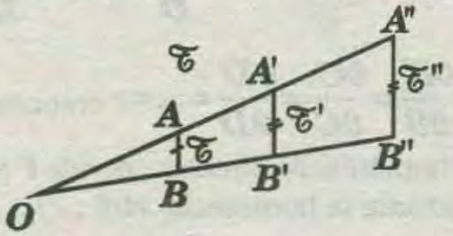
*Si $r_2=\frac{1}{r_1}$ el producto de homotecias es traslación paralela a la recta determinada por O_1O_2.

* Si $r_2=-\frac{1}{r_1}$ el producto de homotecias es una simetría, cuyo centro de simetría es colineal con O_1 y O_2.

DE UNA FIGURA :

Es el producto de dos o más homotecias aplicadas a una figura.

CON UN MISMO CENTRO DE HOMOTECIA :



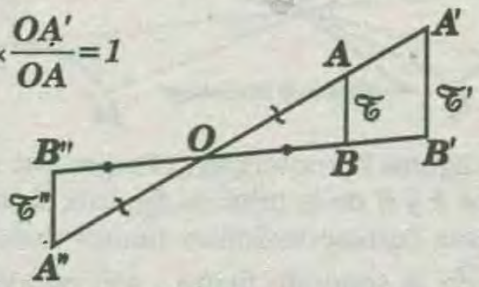
$$\mathfrak{T}'=Hom.\mathfrak{T}\left(O;\frac{OA'}{OA}\right)$$

$$\mathfrak{T}''=Hom.\mathfrak{T}'\left(O;\frac{OA''}{OA'}\right)=Hom.\mathfrak{T}\left(O;\frac{OA''}{OA}\right)$$

$$\Rightarrow Hom.\mathfrak{T}\left(O;\frac{OA'}{OA}\right)*Hom.\mathfrak{T}'\left(O;\frac{OA''}{OA}\right)=Hom.\ \mathfrak{T}\left(O;\frac{OA''}{OA}\right)$$

NOTA :

Si $\frac{OA''}{OA}\times\frac{OA'}{OA}=1$



$$\mathfrak{T}'=Hom.\mathfrak{T}\left(O;\frac{OA'}{OA}\right)\quad \mathfrak{T}''=Hom.\mathfrak{T}'\left(O;\frac{OA''}{OA'}\right)$$

$$Hom.\mathfrak{T}\left(O;\frac{OA'}{OA}\right)*Hom.\mathfrak{T}'\left(O;\frac{OA''}{OA'}\right)=Hom.\mathfrak{T}(O;-1)$$

Si es que $r_1\times r_2=-1$

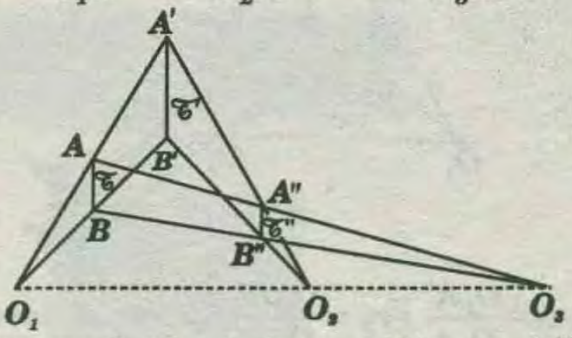
$$\Rightarrow Hom.\mathfrak{T}(O;r_1)*Hom.\mathfrak{T}'(O;r_2)=Sim.\mathfrak{T}(O)$$

entonces el producto de dos homotecias cuyas razones son inversas y de signos contrarios nos dará una simetría central.

CON DIFERENTES CENTROS DE HOMOTECIA :

$$\mathfrak{T}'=Hom.\mathfrak{T}\left(O_1;\frac{OA'}{OA}\right)\ \wedge\ \mathfrak{T}''=Hom.\mathfrak{T}'\left(O_2;\frac{OA''}{OA'}\right)$$

Sea $r_1=\frac{O_1A'}{O_1A}; r_2=\frac{O_2A''}{O_2A'}$ y $r_3=\frac{O_3A''}{O_3A}$



Del teorema de Menelao para el triángulo $AA'A''$

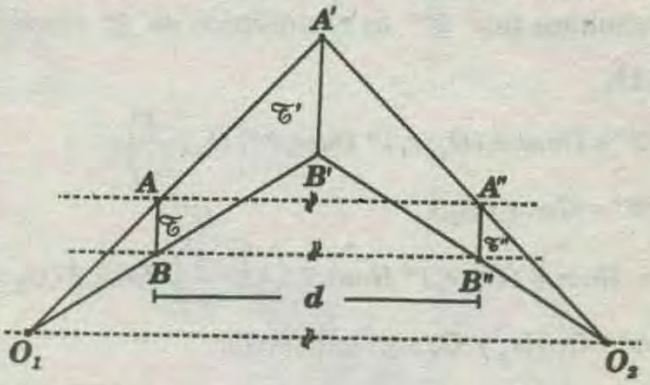
$$\frac{O_1A'}{OA}\times\frac{O_2A''}{O_3A}\times\frac{O_3A}{O_3A''}=1\quad\Rightarrow r_1\times r_2=r_3$$

entonces los centros $O_1;\ O_2$ y O_3 son colineales

$$\Rightarrow Hom.\mathfrak{T}(O_1;r_1)*Hom.\mathfrak{T}'(O_2;r_2)=Hom.\mathfrak{T}(O_3;r_3)$$

donde $r_3=r_1\times r_2$ y $O_1;O_2$ y O_3 son colineales

* Si a $r_2=\frac{1}{r_1}$ asumimos entonces que el producto de homotecias resulta una traslación $(r_1\times r_2=1)$.



* De la figura :

Si $\mathfrak{T}''=Hom.\mathfrak{T}(O_1;r_1)*Hom.\left(O_2;\frac{1}{r_1}\right)$

$$\Rightarrow \mathfrak{T}''=Tras.\mathfrak{T}(\overrightarrow{O_1O_2};d)$$

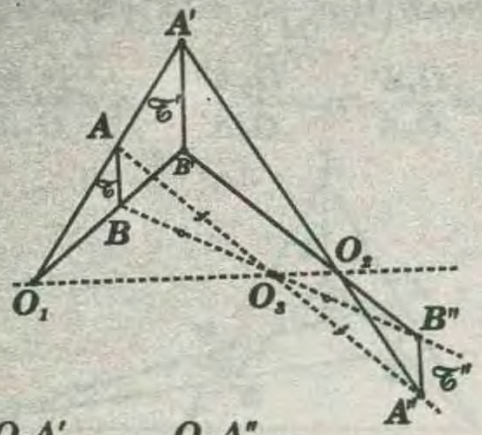
* Pero :

$$\frac{d}{O_1O_2}=\frac{O_1A'-O_1A}{O_1A'}=1-\frac{1}{r_1}\Rightarrow d=O_1O_2\left(\frac{r_1-1}{r_1}\right)$$

$$\Rightarrow Hom.\mathfrak{T}(O_1;r_1)*Hom.\left(O_2;\frac{1}{r_1}\right)=Tras.\mathfrak{T}(\overrightarrow{O_1O_2};d)$$

Donde $d=O_1O_2\left(\frac{r_1-1}{r_1}\right)$

* Si $r_2=-\frac{1}{r_1}$, significa que el producto de homotecias resulta una simetría central.



Sea $r_1=\frac{O_1A'}{O_1A}$; $r_2=\frac{O_2A''}{O_2A'}$; pero el teorema recíproco de Menelao para el $\triangle AA'A''$

Si $\frac{O_1A'}{O_1A}\times\frac{O_2A''}{O_2A'}\times\frac{O_3A''}{O_3A''}=1$.

Los puntos O_1; O_3 y O_2 son colineales , más al decir que : $r_1\times r_2=-1\Rightarrow\frac{O_1A'}{O_1A}\times\frac{O_2A'}{O_2A}=1$,

Asumimos que $\frac{O_3A''}{O_3A''}=-1\Rightarrow |O_3A|=|O_3A''|$

concluimos que $\mathcal{T}''$ es el simétrico de $\mathcal{T}$ respecto de O_3.

$$\mathcal{T}''=Hom.\mathcal{T}(O_1;r_1)*Hom.\mathcal{T}'\left(O_2;\frac{-1}{r_1}\right)$$

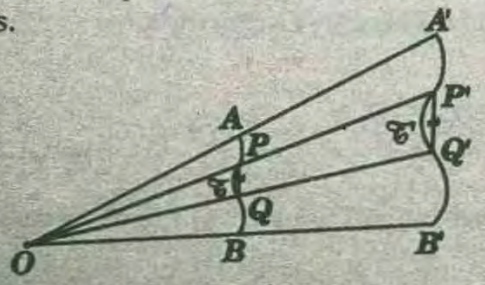
$$\mathcal{T}''=Sim.\mathcal{T}(O_3)$$

$$\Rightarrow Hom.\mathcal{T}(O_1;r_1)*Hom.\mathcal{T}'\left(O_2\frac{-1}{r_1}\right)=Sim.\mathcal{T}(O_3)$$

Donde O_1 ;O_2 y O_3 son colineales.

TEOREMA :

Dos pares de puntos homólogos de dos figuras homotéticas, respectivamente, determinan rectas paralelas.



Sea $\mathcal{T}'=Hom.\mathcal{T}\left(O;\frac{OA'}{OA}\right)$

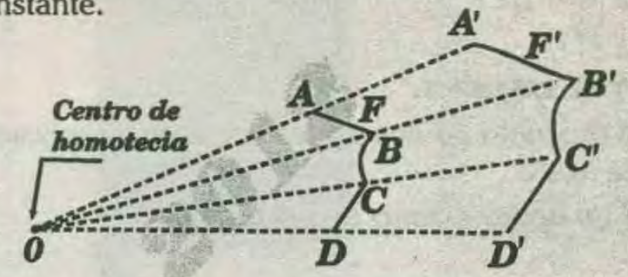
Si $P'=Hom.P\left(O;\frac{OA'}{OA}\right)$ y $Q'=Hom.Q\left(O;\frac{OA'}{OA}\right)$

$\Rightarrow \overline{P'Q'}\,//\,\overline{PQ}$

La trasformación puede ser una homotecia Directa o Inversa.

FIGURAS HOMOTÉTICAS

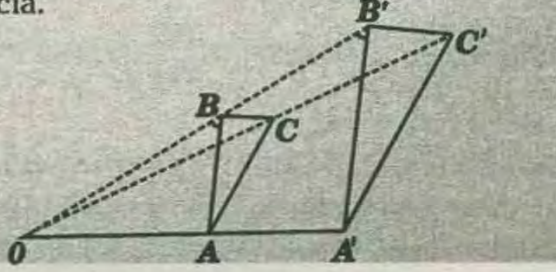
1) Se dice que dos figuras son homotéticas respecto a un punto *0 ;* si a cada punto *A* de la primera figura le corresponde un único punto *P* ; de la segunda figura tal que $0\in\overline{AA'}$ y la razón $\frac{0A'}{0A}$ permanece constante.



$\frac{0A'}{0A}=\frac{0B'}{0B}=\frac{0C'}{0C}=\frac{0D'}{0D}=...=r$ entonces r y F' son figuras homotéticas directas , donde F se trasporta a F' mediante la homotecia $H(0\,;\,r)$.

$\frac{0M'}{0M}=\frac{0N'}{0N}=\frac{0P'}{0P}=\frac{0Q'}{0Q}=...=k$ entonces F y F' son figuras homotéticas inversas tal que F se transporta a F' mediante la homotecia inversa $H(0;-K)$.

2) En dos figuras homotéticas , el segmento que une dos puntos *A* y *B* de la primera figura y el segmento que une sus correspondientes puntos homotéticos A' y B' de la segunda figura , son paralelos y la razón entre sus longitudes es igual a la razón de la homotecia.



En figura dado que $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=...=K$; entonces los triángulos $0AB$ y $0A'B'$ son semejantes de donde se deduce que :

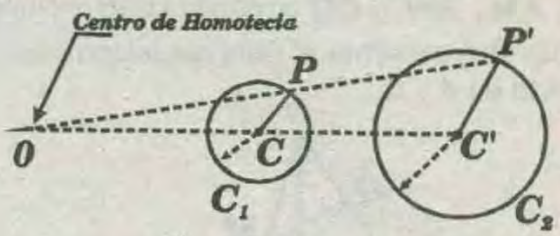
$$\overline{AB}\,//\,\overline{AB} \text{ y } \frac{OA}{OA}=\frac{A'B'}{AB}=K$$

NOTA :

Dos figuras homotéticas son semejantes, pero dos figuras semejantes no necesariamente son homotéticas.

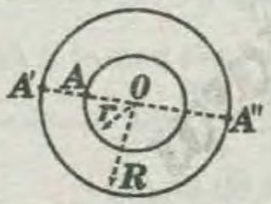
3) La figura homotética de una circunferencia es otra circunferencia cuya razón de homotecia es la razón entre sus radios.

* ***Circunferencia no concéntricas :***



Sea C el centro de la circunferencia C_1 y O el punto elegido como centro de homotecia , C' de C_2 así como el homotético P' de un punto P cualquiera de C_1 mediante la homotecia $H(0\ ;\ k)$; entonces por propiedad $\frac{C'P'}{CP}=K$, luego $C'P'=k(CP)$ de lo anterior se deduce que $C'P'$ es igual a una constante ; por lo tanto el conjunto de todos los puntos P' del plano tal que $C'P'$=constante, es una circunferencia C_2.

* ***Circunferencias concéntricas :***



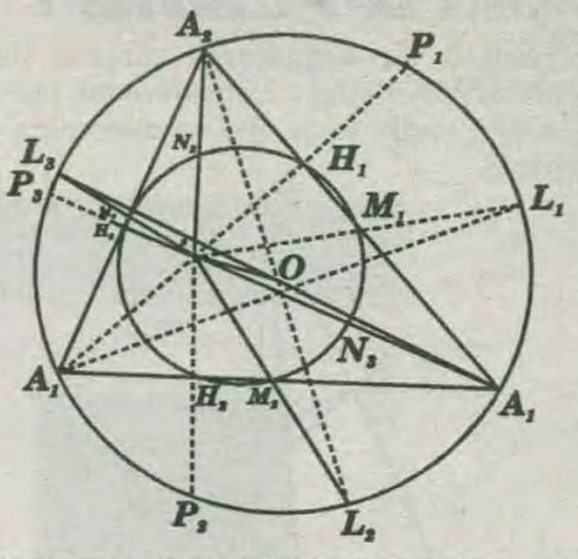
Para dos circunferencias concéntricas el centro 0 es el centro de homotecia directa e inversa , dado que :

$$\frac{0A'}{0A}=\frac{0A''}{0A}=\frac{R}{r}$$

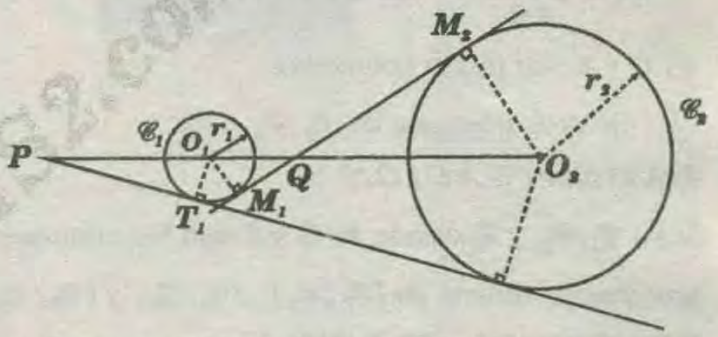
A' y A'' son los puntos homotéticos de A respectivamente.

TEOREMA :

Dado un triángulo $A_1A_2A_3$; sean M_1M_2 y M_3 los puntos medios de los lados $\overline{A_2A_3}$; $\overline{A_1A_3}$ y $\overline{A_2A_1}$ respectivamente ; H_1; H_2 y H_3 los pies de las alturas trazadas de A_1; A_2 y A_3 respectivamente y N_1; N_2 y N_3 Los puntos medios de $\overline{A_1H}$; $\overline{A_2H}$ y $\overline{A_3H}$ respectivamente; los nueve puntos M_1; M_2; M_3; H_1; H_2; H_3; N_1; N_2; N_3; son concíclicos.



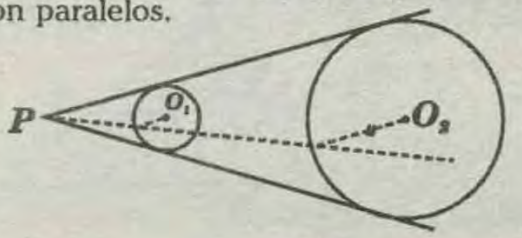
CENTRO DE HOMOTECIA DE DOS CIRCUNFERENCIAS



P y Q son centros de homotecia directa e inversa, respectivamente, de las circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ de radios r_1 y r_2 y centros O_1 y O_2, P; Q están situados en la recta O_1O_2 y satisfacen las relaciones:

$$\frac{O_1P}{O_2P}=\frac{r_1}{r_2} \text{ y } \frac{O_1Q}{O_1Q}=\frac{r_1}{r_2}$$

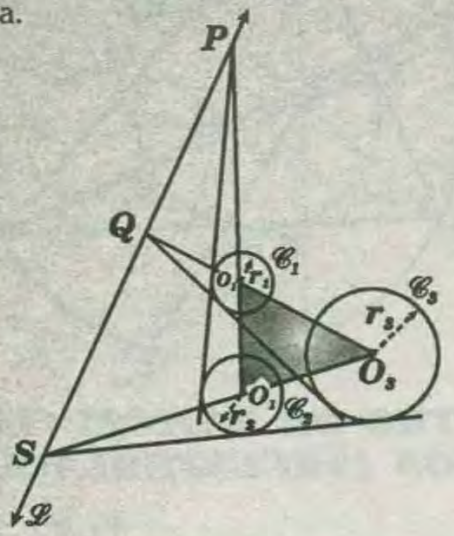
La recta que une los extremos de dos radios paralelos de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ respectivamente, pasa por el centro de homotecia (directo P o inverso Q), esta propiedad es fácilmente demostrable). La propiedad recíproca también resulta evidente, porque esta recta es la tangente común (exterior o interior) trazada por P o Q a las dos circunferencias ; y por ser perpendicular a sus radios en el punto de tangencia, estos son paralelos.



EJE DE HOMOTECIA

TEOREMA DE D'ALEMBERT :

Los centros de homotecia directo de tres circunferencias dadas , consideradas por pares, pertenecen a una recta que se denomina eje de homotecia.



P; Q y *S* son punto colineales

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: eje de homotecia de $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$

DEMOSTRACIÓN :

Sean $\mathscr{C}_1; \mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ donde *P; Q* y *S* son los centros de homotecia directa de $(\mathscr{C}_1; \mathscr{C}_2)$; $(\mathscr{C}_1; \mathscr{C}_3)$ y $(\mathscr{C}_2; \mathscr{C}_3)$ respectivamente , por lo tanto :

$$\frac{PO_2}{PO_1}=\frac{r_2}{r_1}; \frac{QO_1}{QO_3}=\frac{r_1}{r_3} \text{ y } \frac{SO_3}{SO_2}=\frac{r_3}{r_2}$$

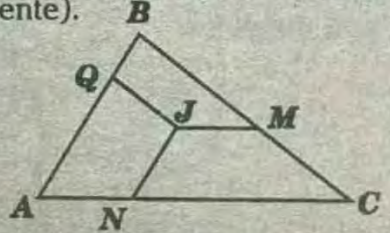
Entonces :

$$\frac{PO_2}{PO_1}\times\frac{QO_1}{QO_3}\times\frac{SO_3}{SO_2}$$

y el segundo teorema recíproco de Menelao , para el $\triangle O_1O_2O_3$ los puntos *P; Q* y *S* son colineales (cuya recta que las contiene es $\mathscr{L}$ eje de homotecia de $\mathscr{C}_1; \mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$).

PUNTO DE JERABECK

Es aquel punto de la región interior de un triángulo, del cual se pueden trazar segmentos congruentes y paralelos a los lados (cuyos extremos están en dichos lados, respectivamente).



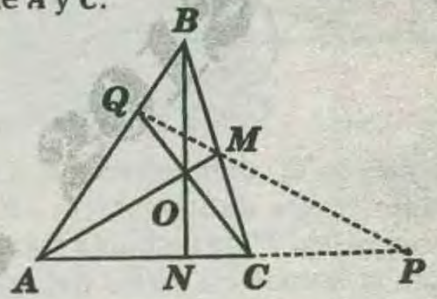
Si $\overline{JM} \parallel \overline{AC}$; $\overline{JN} \parallel \overline{AB}$; $\overline{JQ} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{JM}=\overline{JN}=\overline{JQ}$ entonces *J* es uno de los puntos de Jerabeck del triángulo *ABC*.

TEOREMA DEL CONJUGADO ARMÓNICO

En todo triángulo, al trazar tres cevianas concurrentes (una de cada vértice y que no sean medianas); el conjugado armónico de uno de los pies de dichas cevianas respecto a los extremos de un lado es colineal con los otros dos pies.

PRIMER CASO :

Sean $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ cevianas concurrentes en *O*, además *P* representa el conjugado armónico de *N*, respecto de *A* y *C*.



Entonces, *Q, M* y *P* son colineales.

DEMOSTRACIÓN :

Si *N* y *P* son conjugados armónicos de *A* y *C*, entonces:

$$\frac{AN}{NC}=\frac{AP}{CP} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Del teorema de Ceva para el $\triangle ABC$

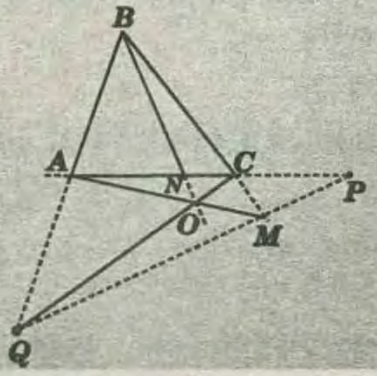
$$\frac{AQ}{QB}\times\frac{BM}{MC}\times\frac{CP}{AP}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* Reemplazando *(I)* en *(II)* :

$$\frac{AQ}{BQ}\times\frac{BM}{MC}\times\frac{CP}{AP}=1$$

y según el teorema recíproco de Menelao los puntos *P , M* y *Q* son colineales .

SEGUNDO CASO :



Sean $\overline{AM}$; $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ concurrentes en O. Si P representa el conjugado armónico de N, respecto de $\overline{AC}$; entonces, Q; M y P son colineales.

DEMOSTRACIÓN :

* Si N y P son conjugados armónicos respecto de $\overline{AC}$, entonces : $\frac{AN}{NC}=\frac{AP}{CP}$ .....(I)

* Del teorema de Ceva (segundo caso) :

$$\frac{BQ}{AQ}\times\frac{CM}{BM}\times\frac{AN}{CN}=1 \text{.....(II)}$$

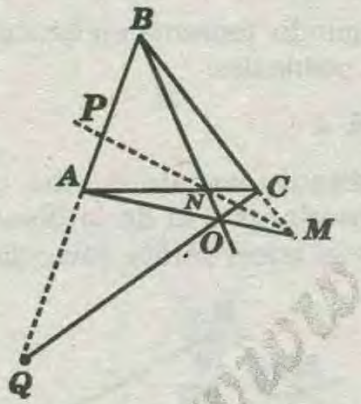
* Reemplazando (I) en (II) :

$$\frac{BQ}{AQ}\times\frac{CM}{BM}\times\frac{AP}{CP}=1$$

Basándonos en el teorema recíproco de Menelao (segundo caso), para el $\triangle ABC$, los puntos Q; M y P son colineales.

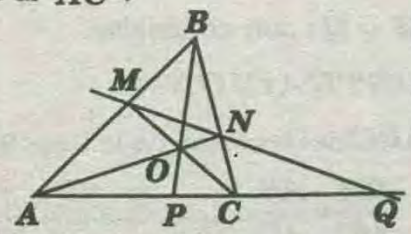
NOTA :

Si P es el conjugado armónico de Q respecto de $\overline{AB}$, entonces M; N y P son puntos colineales.



APLICACIÓN DE LA DIVISIÓN ARMÓNICA UN SEGMENTO

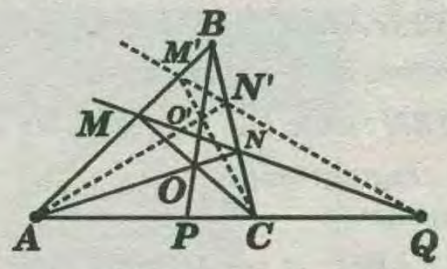
Si $\frac{AP}{PC}=\frac{AQ}{CQ}$, esto significa que P y Q dividen armónicamente al $\overline{AC}$.



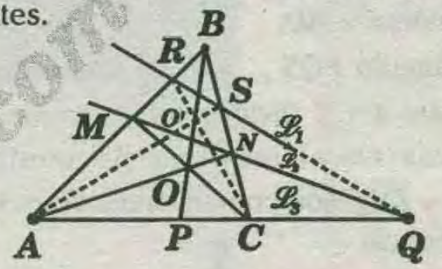
P y Q son conjugados armónicamente respecto del $\overline{AC}$;por lo tanto, para P solo existe un único conjugado armónico que es Q y viceversa $(AP \neq PC)$.

NOTAS :

♠ Para $O' \neq O$ de $\overline{BP}$, existen M' y N' de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente; tal que la intersección de $\overline{M'N'}$ y $\overline{AC}$ será el conjugado armónico de P respecto de A y C; pero como este punto es único, la intersección se da en el punto Q.

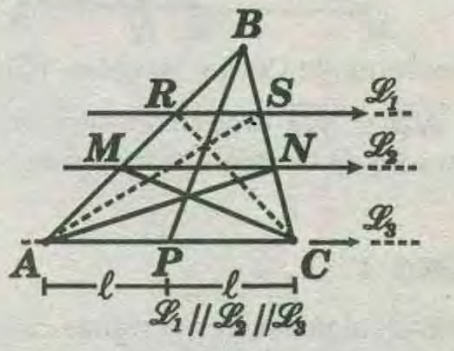


En un triángulo ABC, las cevianas AN; BP y CM son concurrentes; si $\overline{AS}$; $\overline{BP}$ y $\overline{CR}$ también son concurrentes, entonces las rectas AC; MN y RS son concurrentes.



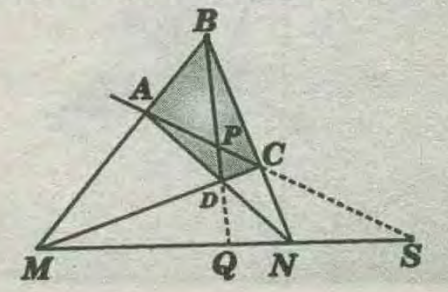
$\mathscr{L}_1$; $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$ concurren en Q.

♠ Si P es punto medio de $\overline{AC}$ entonces las rectas $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelas.



CUADRILÁTERO COMPLETO

En todo cuadrilátero completo, las rectas que contienen a sus diagonales se intersecan en puntos armónicos de dichas diagonales, respectivamente.



www.GRATIS2.com

BMDN: cuadrilátero completo respecto al $\square ABCD$.

$\overline{AC}; \overline{BD}; \overline{MN}$: diagonales del cuadrilátero completo **BMDN**.

P y **S** : dividen armónicamente a $\overline{AC}$.

Q y **S** : dividen armónicamente a $\overline{MN}$.

P y **S** : dividen armónica mente a $\overline{BD}$.

DEMOSTRACIÓN :

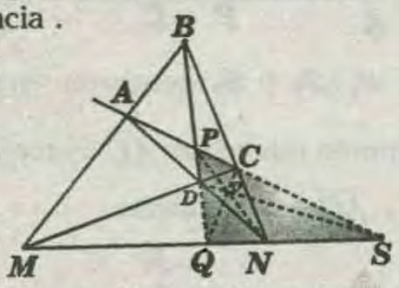
De los teoremas de Menelao y Ceva .

* Para $\triangle MBN$: dado que **MC ; BQ** y **NA** son Cevianas concurrentes, $\overrightarrow{AS}$ y $\overrightarrow{BQ}$ dividen armónicamente .

* Para el $\triangle ABC$: al ser **MC; BD** y **AN** cevianas concurrentes (exteriormente), **P** y **S** dividen armónicamente a $\overline{AC}$.

* Ahora solo falta demostrar que **P** y **Q** dividen armónicamente a **BD**.

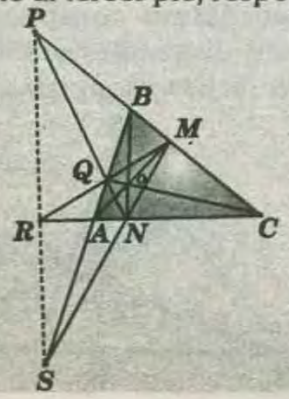
Para el triángulo **PQS** , $\overrightarrow{AN}$ es una recta secante, mientras que **A** y **C** dividen armónicamente a $\overline{PS}$ Basándonos en el teorema de configuración $\overrightarrow{SD}; \overrightarrow{PN}$ y $\overrightarrow{QC}$ son concurrentes al ser **O** el punto de concurrencia .



Según el teorema de Ceva y Menelao, para $\triangle PQS$, las rectas $\overrightarrow{NB}$ y $\overrightarrow{SD}$ dividen armónicamente $\overrightarrow{PQ}$. Por lo tanto, **P** y **Q** también dividen mónicamente a $\overline{BD}$.

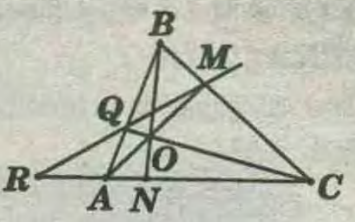
TEOREMA :

Todo triángulo, al trazar tres cevianas concurrentes, los puntos de intersección de las rectas que pasan por dos pies, de dichas cevianas, con la prolongación del lado que contiene al tercer pie, respectivamente, son colineales.



Sean **AM, BN** y **CQ** cevianas concurrentes en **O**, asumimos que **P, R** y **S** son colineales.

DEMOSTRACIÓN :



Sabemos que :

$$\frac{CN}{NA}=\frac{CR}{AR}\ (\textit{Div. armónica de } \overline{AC}) \Rightarrow \frac{NA}{CN}=\frac{AR}{CR}$$

* Análogamente para $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$, tenemos $\frac{CM}{MB}=\frac{CP}{BP}$ y $\frac{BQ}{QA}=\frac{BS}{AS}$, respectivamente.

* Multiplicando convenientemente, tenemos :

$$\frac{NA}{CN}\times\frac{CM}{MB}\times\frac{BQ}{QA}=\frac{AR}{CR}\times\frac{CP}{BP}\times\frac{BS}{AS}$$

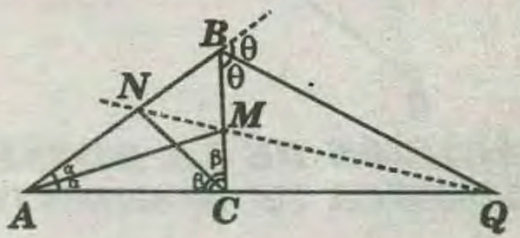
* Del teorema de Ceva para el $\triangle ABC$.

$$\frac{NA}{CN}\times\frac{CM}{MB}\times\frac{BQ}{QA}=1 \Rightarrow \frac{AR}{CR}\times\frac{CP}{BP}\times\frac{BS}{AS}=1$$

Según el segundo teorema recíproco de Menelao, **P ; R** y **S** son colineales.

TEOREMA :

En todo triángulo escaleno, los pies de dos bisectrices interiores y el de la bisectriz exterior trazada desde el tercer vértice son colineales.



$\overline{AM}; \overline{CN}$: bisectrices interiores

$\overline{BQ}$: bisectriz exterior

$\Rightarrow$ **N; M** y **Q**: son colineales.

DEMOSTRACIÓN :

En el $\triangle ABC$ del teorema de la bisectriz interior para $\overline{AM}$: $\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AC}$ .....(I)

* Para $\overline{CN}$:

$$\frac{AN}{BN}=\frac{AC}{BC} \text{ .....(II)}$$

* Del teorema de la bisectriz exterior , para $\overline{BQ}$

$$\frac{CQ}{AQ}=\frac{BC}{AB}\quad\text{.....(III)}$$

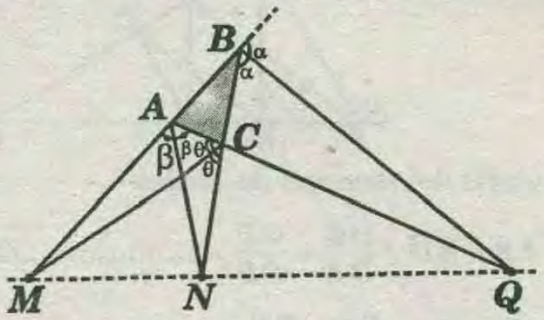
* De *(I)*; *(II)* y *(III)* :

$$\frac{BM}{MC}\times\frac{AN}{NB}\times\frac{CQ}{AQ}=\frac{AB}{AC}\times\frac{AC}{BC}\times\frac{BC}{AB}=1$$

y del teorema recíproco de Menelao, para el $\triangle ABC$, *N; M* y *Q* son colineales.

TEOREMA :

En todo triángulo escaleno, los pies de las bisectrices exteriores trazadas de los tres vértices son colineales.



Si $AB>BC>AC$

$\overline{AN}$: bisectriz exterior $(\overline{BC})$

$\overline{BQ}$: bisectriz exterior $(\overline{AC})$

$\overline{CM}$: bisectriz exterior $(\overline{BA})$

$\Rightarrow$ *M; N* y *Q* son colineales.

DEMOSTRACIÓN :

Del teorema de la bisectriz exterior

* Para $\overline{AN}$

$$\frac{BN}{CN}=\frac{AB}{AC}\quad\text{.....(I)}$$

* Para $\overline{BQ}$

$$\frac{CQ}{AQ}=\frac{BC}{AB}\quad\text{.....(II)}$$

* Para $\overline{CM}$

$$\frac{AM}{BM}=\frac{AC}{BC}\quad\text{.....(III)}$$

* De *(I); (II)* y *(III)* :

$$\frac{BN}{CN}\times\frac{CQ}{BC}\times\frac{AM}{BM}=\frac{AB}{AC}\times\frac{BC}{AB}\times\frac{AC}{BC}=1$$

Del segundo teorema recíproco de Menelao, concluimos que *M; N* y Q son colineales.

TEOREMAS DE CONFIGURACIÓN

Sean $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ mediatrices de $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, entonces $O=\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}\cap\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ (*O* es circuncentro del $\triangle ABC$. Al prolongar $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, estos intersecan a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ en *M* y *N*, respectivamente.

* En el $\triangle ABC$:

$$m\sphericalangle AMQ=m\sphericalangle BMQ=\alpha$$

$$m\sphericalangle MAQ=90°-\alpha$$

$$m\sphericalangle ANH=m\sphericalangle ANH=\alpha$$

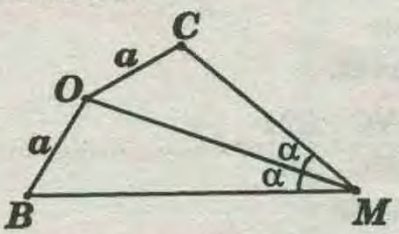
* En el $\triangle ANC$: $m\sphericalangle CNH=m\sphericalangle ANH=\alpha$

$\Rightarrow$ El cuadrilatero *NBCM* es inscriptible *(I)*

$(m\sphericalangle BNC=m\sphericalangle CMB=2\alpha)$

$\triangle ABC$ *O* es circuncentro $\Rightarrow BO=OC$

OBSERVACIÓN :



Si $BO=OC$ y $\overline{MO}$ es bisectriz de $m\sphericalangle BMC$; entonces el cuadrilátero *BOCM* es inscriptible.

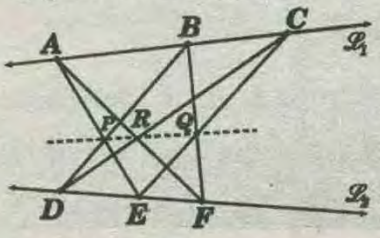
ENTONCES:

* Cuadrilátero *BOCM* : inscriptible
* Cuadrilátero *COBN* : inscriptible

Por lo tanto, del teorema de configuración, para las conclusiones *(I); (II)* y *(III)*, los puntos *N; B; O; C* y *M* son concíclicos, es decir, pertenecen a una circunferencia (circunferencia de Mannheim).

TEOREMA DE PAPPUS

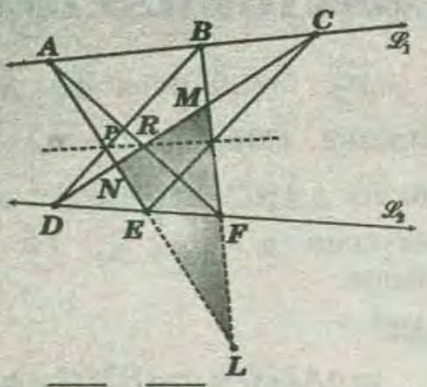
Sean *A; B* y C tres puntos que pertenecen a la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y *D; E* y *F* tres puntos que pertenecen a la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Si $P=\overline{AE}\cap\overline{BD}; Q=\overline{BF}\cap\overline{CE}$ y $R=\overline{AF}\cap\overline{CD}$ entonces los puntos *P, Q* y *R* son colineales.



WWW.GRATIS2.COM

P, Q y R : son puntos colineales .

DEMOSTRACIÓN :



Prolongamos $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ hasta que se intersequen en L. Observamos, además, que M y N son los puntos de intersección de $\overline{CD}$ con $\overline{BF}$ y $\overline{AE}$, respectivamente.

Utilizando el teorema de Menelao en el $\triangle MLN$.

* Para la recta BD :

$$\frac{LP}{NP}\times\frac{ND}{MD}\times\frac{MB}{LB}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Análogamente

* Para la recta CE :

$$\frac{LE}{EN}\times\frac{NC}{MC}\times\frac{QM}{QL}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* Para la recta AF :

$$\frac{LA}{AN}\times\frac{RN}{RM}\times\frac{MF}{FL}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

* Para la recta AC :

$$\frac{LA}{AN}\times\frac{NC}{MC}\times\frac{MB}{LB}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV)$$

* Para la recta DF :

$$\frac{LE}{EN}\times\frac{MF}{FL}\times\frac{ND}{MD}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (V)$$

* Entonces de $(I)\times(II)\times(III)=(IV)\times(V)$:

$$\frac{LP}{NP}\times\frac{ND}{MD}\times\frac{MB}{LB}\times\frac{LE}{EN}\times\frac{NC}{MC}\times\frac{QM}{QL}\times\frac{LA}{AN}\times\frac{RN}{RM}\times\frac{MF}{FL}$$

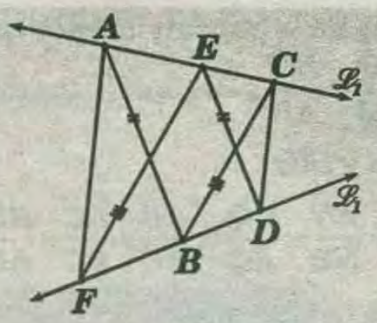
$$=\frac{LA}{AN}\times\frac{NC}{MC}\times\frac{MB}{LB}\times\frac{LE}{EN}\times\frac{MF}{FL}\times\frac{ND}{MD}$$

$$\Rightarrow \frac{LP}{NP}\times\frac{QM}{QL}\times\frac{RN}{RM}=1$$

Por el teorema recíproco de Menelao en el $\triangle LMN$, los puntos P ; R y Q son colineales.

TEOREMA :

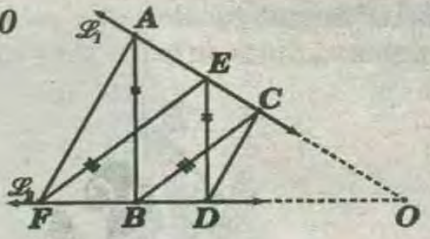
Dado que los puntos A; E y C, pertenecen a la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y F; B y D, a la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$; si $\overline{AB}\,//\,\overline{ED}$ y $\overline{EF}\,//\,\overline{BC}$ entonces $\overline{AF}\,//\,\overline{CD}$



Si $\overline{AB}\,//\,\overline{ED}$ y $\overline{EF}\,//\,\overline{BC} \Rightarrow \overline{AF}\,//\,\overline{CD}$

DEMOSTRACIÓN :

Sea : $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}\cap\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}=0$



Del corolario del teorema de Thales

* Para $\overline{AB}\,//\,\overline{ED}$: $\dfrac{OE}{OA}=\dfrac{OD}{OB}$ .....(I)

* Para $\overline{EF}\,//\,\overline{BC}$: $\dfrac{OE}{OC}=\dfrac{OF}{OB}$ .....(II)

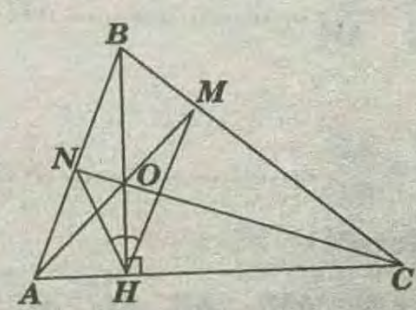
* (I) entre (II) : $\dfrac{OC}{OA}=\dfrac{OD}{OF}$

Del teorema recíproco del corolario del teorema de Thales para el $\triangle AOF$: $\overline{AF}\,//\,\overline{CD}$

TEOREMA DE BLANCHET

En todo triángulo , los pares angulares formados por una altura y los segmentos que resultan al unir el pie de dicha altura con los pies de dos cevianas concurrentes con ella tienen igual medida. Dicho punto de concurrencia es distinto a un vértice. Si $\overline{BH}$ altura, $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ cevianas y $\overline{BH}$, $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ son concurrentes en O,

$$\Rightarrow m\sphericalangle BHN=m\sphericalangle BHM$$



Si $\overline{BH}$ altura, $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ cevianas y $\overline{BH}$, $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ son concurrentes en O,

$$\Rightarrow m\sphericalangle BHN=m\sphericalangle BHM$$

DEMOSTRACIÓN :

* Por B trazamos la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{AC}$, así resulta que $\overleftrightarrow{HB} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$. Posteriormente, prolongamos $\overline{HN}$ y $\overline{HM}$ que intersecan a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ en Q y P, respectivamente. Los triángulos QBN y HAN son semejantes y

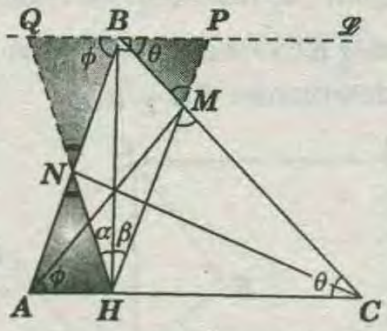
$$\frac{QB}{AH}=\frac{NB}{NA} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Así también, los triángulos PBM y HCM son semejantes, por lo que :

$$\frac{PB}{CH}=\frac{BM}{MC} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* Del teorema de Ceva para las cevianas $\overline{AM}$, $\overline{BH}$ y $\overline{CN}$

$$\frac{AN}{NB}\times\frac{BM}{MC}\times\frac{CH}{HA}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$



* Reemplazando *(I)* y *(II)* en *(III)* tenemos :

$$\frac{AH}{QB}\times\frac{PB}{CH}\times\frac{CH}{HA}=1 \Rightarrow PB=QB$$

Como en el triángulo PQH ($\overline{HB}$ es altura y $PB=QB$), resulta que :

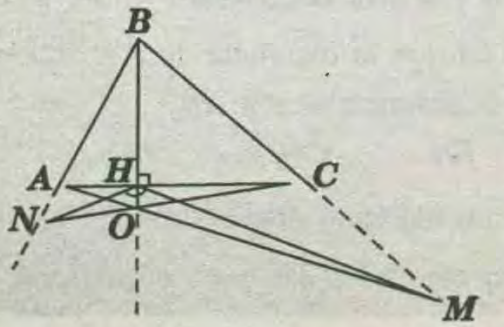
$\triangle QHP$ es isósceles y $\alpha=\beta$

$$\Rightarrow m\sphericalangle QHB=m\sphericalangle BHP$$

NOTA :

El teorema de Blanchet también se cumple cuando las cevianas AM y CN son exteriores; en este caso, el punto de concurrencia O está en la prolongación de $\overline{BH}$. Se cumple, así, que

$$\Rightarrow m\sphericalangle OHN=m\sphericalangle OHM$$

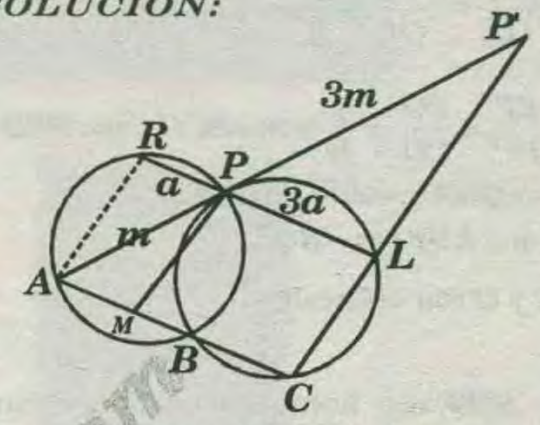


PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Dada dos circunferencias secantes, trazar por uno de los puntos P de intersección una recta, tal que la longitud de una de las cuerdas sea $1/3$ de la otra.

RESOLUCIÓN:



Trazamos $\overline{AC}$ tal que $B \in \overline{AC}$

En $\overline{AC}$ ubicando M tal que $MC=3(AM)$

A es centro de homotecia de razón $1/4$

$$\Rightarrow \frac{PP'}{AP}=3$$

Por L trazamos $\overline{LR}$

Por teorema $\overline{AR} // \overline{CL}$

Por corolario del teorema de Thales

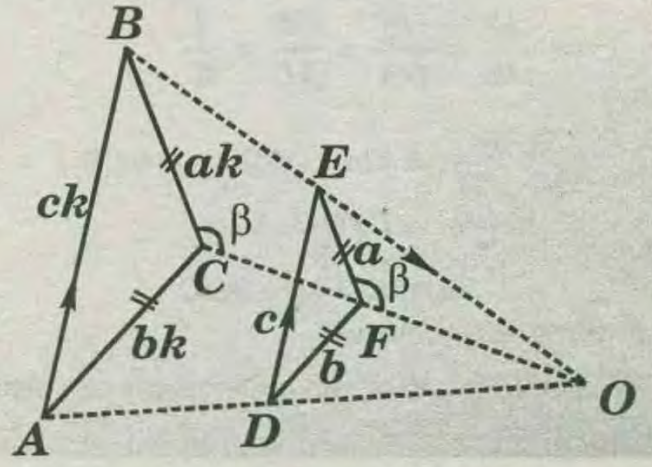
$$\frac{RP}{PL}=\frac{AP}{PP'}=\frac{1}{3}$$

$\therefore \overline{RL}$ es la secante pedida.

PROBLEMA 2 :

Demostrar que dos triángulos no congruentes son homotéticos, si los lados de uno son paralelos a los correspondientes lados del otro.

RESOLUCIÓN:



$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$; $\overline{BC} \parallel EF$ y $\overline{AC} \parallel DF$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=K \ldots (1)$$

$\Rightarrow \triangle ACO \sim \triangle DFO$

$$\frac{OD}{OA}=\frac{OF}{OC}=\frac{1}{K} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Como

$$\frac{EF}{BC}=\frac{FO}{CO}=\frac{1}{K} \text{ y } m\sphericalangle BCO = m\sphericalangle EFO$$

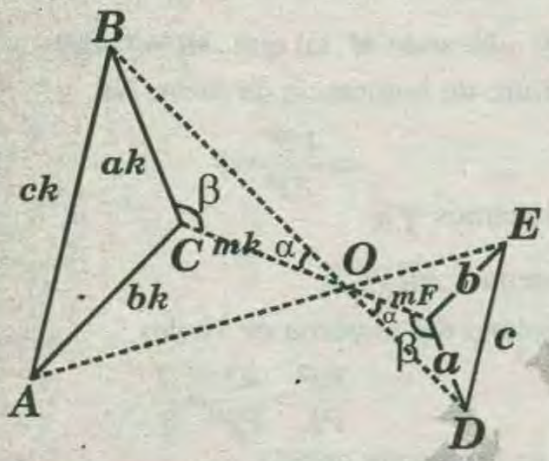
$\Rightarrow \triangle BCO \sim \triangle EFO$ (L.A.L.)

Luego $m\sphericalangle EOF = m\sphericalangle BOC$

$\therefore$ B, E y O son colineales.

Luego

$\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son homotéticos con centro de homotecia O.



$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$; $\overline{BC} \parallel \overline{FD}$ y $\overline{AC} \parallel \overline{FE}$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EDF$

$$\frac{AB}{ED}=\frac{BC}{FD}=\frac{AC}{FE}=K$$

$\triangle ACO \sim \triangle EFO$

$$\Rightarrow \frac{OF}{OC}=\frac{OE}{OA}=\frac{EF}{AC}=\frac{1}{K}$$

Como

$$\frac{CO}{OC}\ \frac{BC}{FD}=K \text{ y } m\sphericalangle OFD = m\sphericalangle OCB$$

$\Rightarrow \triangle BCO \sim \triangle DFO$ (L.A.L.)

Luego

$$m\sphericalangle FOD = m\sphericalangle BOC$$

$\therefore$ B, O y D son colineales.

Luego, $\triangle ABC$ y $\triangle EDF$ son homotéticos con centro de homotecia O.

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

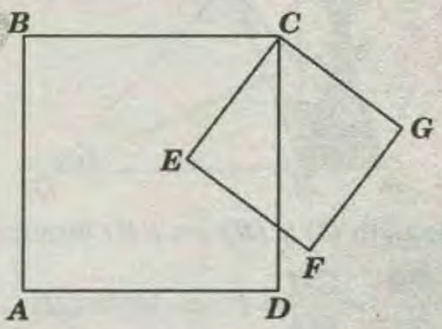
01 En un triángulo ABC recto en B esta inscrito en el cuadrado $MNPQ$, tal que $\overline{NP} \parallel \overline{AC}$ si $\overline{BM}$ y $\overline{BQ}$ intersecan $\overline{NP}$ en E y F respectivamente si $NE=1cm$, $FP=4cm$. Calcular AQ/AN.

A)1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D)2 E)4

02 En un triángulo ABC de incentro la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{BC}$ en N, sea M el punto medio de $\overline{BC}$ la recta $\overline{MI}$ interseca $\overline{AN}$ en Q. Calcular AQ/AN.

A)1 B)0,5 C) $\frac{1}{3}$ D)0,25 E)2

03 En la figura , se muestran los cuadrados $ABCD$ y $CEFG$. Si $m\sphericalangle ECD = 40°$, calcule la medida del ángulo que determinan $\overline{EG}$ y $\overline{BD}$.



A)40° B)50° C)60° D)45° E)65°

04 En un trapecio isósceles $ABCD$ de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ las diagonales se intersecan en P.

Si $AD=10cm$, $BC=4cm$ calcular CD si en el triángulo ABD se inscribe el cuadrado $PQRS$ (Q y R en $\overline{AD}$ y S en $\overline{AB}$.

A)3 B)4 C)5 D) $3\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{2}$

05 En un trapecio rectángulo $ABCD$ recto en C y D si $BC=CD$ y la $m\angle BAO = 60°$, en AC se ubica el punto F tal que la distancia de F a $\overline{AD}$ es $4cm$. Calcular la distancia de F a $\overline{AB}$.

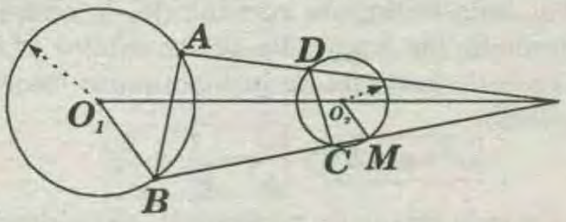
A)2 B)2 C) $2\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{3}$ E) $\sqrt{6}$

06 En un triángulo ABC se inscribe el cuadrado $MNPQ$ tal que $\overline{NP} \parallel \overline{AC}$ y en el triángulo NBP se

inscribe el cuadrado *RSTU* tal que $\overline{ST} // \overline{NP}$. Calcular el lado del cuadrado menor si $AC=b$ y $NP=a$

A) $\sqrt{ab}$ B) $2\sqrt{ab}$ C) $\frac{ab}{a+b}$ D) $\frac{b^2}{a}$ E) $\frac{a^2}{a}$

07 En la figura mostrada, $m\sphericalangle ABC=80°$. Calcule $m\sphericalangle ADC$, si $\overline{O_1B} // \overline{O_2M}$.



A) 80° B) 100° C) 90° D) 130° E) 140°

08 Sean *ABC* un triángulo acuntángulo y *D* un punto en su interior, tal que $(AC)(BD)=(AD)(BC)$ y $m\sphericalangle ADB=90°+m\sphericalangle ACD$, determine $\frac{(AB)(CD)}{(AC)(BD)}$

A) 1 B) 2 C) 4 D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

09 Sean *M, N* y *P* los puntos medios de los lados *BC, AC* y *AB* (respectivamente) del triángulo *ABC*, y sea *Q* que pertenece a $\overline{AM}$ y sean *D* y *E* en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ tales que $\overline{QE} // \overline{BN}$ y $\overline{QD} // \overline{CP}$, calcular $\overline{CE}+\overline{AD}$.

A) 1 B) 2 C) 1,5 D) 2,5 E) 0,5

10 ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de un segmento, tal que uno de los extremos permanece fijo mientras el otro recorre una circunferencia dada?

A) *Un segmento* B) *Un punto* C) *Un eclipse*
D) *Una circunferencia* E) *Un círculo*

11 En un triángulo *ABC* se traza la recta secante que interseca a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y la prolongación de $\overline{AC}$ en *M*, *N* y *Q*. respectivamente luego se construyen los paralelogramos *MBNS* y *MAQP*. Por *Q* se traza $\overline{QL} // \overline{MS}$ que interseca a $\overline{PM}$ en *L* y a $\overline{PS}$ en *R* si $QN=2MN$ calcular *QR/RL*.

A) 1 B) 2 C) 1,5 D) 2,5 E) 4

12 En una recta $\mathscr{L}$ y se ubican los puntos *Q*, *R* y *S* $(RS>QR)$ diámetro *QR* y *RS* se trazan semicircunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ hacia un mismo lado de $\mathscr{L}$ y la tangente común exterior interseca a $\mathscr{L}$ en *P* desde *P* la secante en *PABCD*. *A* y *B* en $\mathscr{C}_1$; *C* y *D* en $\mathscr{C}_2$ (*M* y *N* son los puntos de tangencia en $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$) si la $m\overset{\frown}{DN}-m\overset{\frown}{AM}=20°$, calcular la $m\sphericalangle APM$.

A) 5° B) 10° C) 15° D) 20° E) 40°

13 Sean *M*, *N* y *P* los puntos medios de los lados *BC*, *AC* y *AB* (respectivamente) del triángulo *ABC*, y sea *Q* que petenece a $\overline{AM}$, *D* a $\overline{AB}$ y *E* a $\overline{AC}$ tales que $\overline{QE} // \overline{BN}$ y $\overline{QD} // \overline{CP}$. Si *I* es la intersección de $\overline{AM}$ y $\overline{CP}$, calcular *AI/IQ*.

A) 3 B) 2 C) 1,5 D) 2,5 E) 4

14 Dado un triángulo acutángulo *ABC* cuyos lados reflejan la luz, indique dónde debería estar situada exactamente sobre el lado *AB* una fuente luminosa, de forma que el rayo emitido después de reflejarse sucesivamente en los otros dos lados retornará a la fuente.

A) *En el punto medio de* $\overline{AB}$
B) *En el pie de la bisectriz interior trazada desde C*
C) *En el pie de la altura trazada desde C*
D) *En el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con* $\overline{AB}$.
E) *En el punto de tangencia de la circunferencia exinscrita relativa a* $\overline{AB}$ *con dicho lado.*

15 Si construimos cuadrados externamente sobre los lados de un paralelogramo, entonces sus centros son vértices de un .

A) *Trapecio* B) *Paralelogramo*
C) *Rectángulo* D) *Trapezoide simétrico*
E) *Cuadrado*

16 Dado un triángulo *ABC* se trazan las, medianas *AM BN* y *CQ* los cuales concurren en *G* luego en *GM* se ubica el punto I y por dicho punto se trazan las rectas $\overline{\ell}$ y $\overline{m}$ paralelas a *BN* y *CQ* respectivamente los cuales intersecan a $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ en *E* y *F*, si $\overline{EF}$ intersecan a $\overline{AM}$ en *J*. Calcular la altura $\frac{IJ}{AJ}$.

A) 0,5 B) 0,25 C) 0,33 D) 0,66 E) 0,4

PRIMERA PRACTICA HOMOTECIA

1) D	2) B	3) D	4) C	5) C	6) E	7) B	8) D	9) A	10) D
11) B	12) B	13) A	14) C	15) E	16) C				

RELACIONES METRICAS I

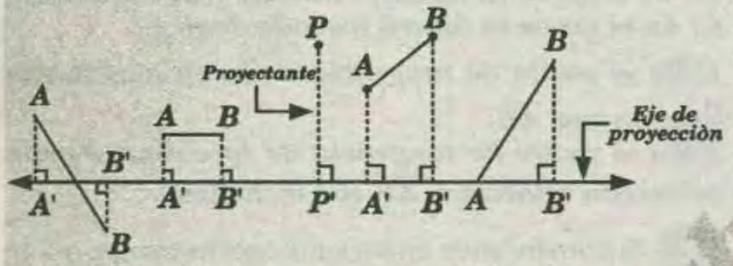
CAPITULO 25

RELACIONES MÉTRICAS

Para el estudio de la relaciones métricas entre los elementos de los triángulos, es indispensable saber el concepto de proyección.

PROYECCIÓN ORTOGONAL :

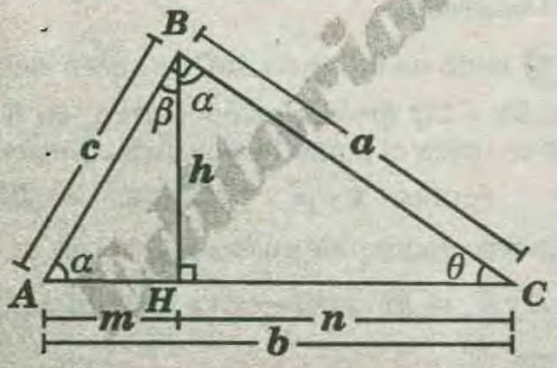
La proyección ortogonal de un punto sobre una recta, es el pie de la perpendicular trazada desde dicho punto a la recta. Asimismo, la proyección ortogonal de un segmento sobre una recta es el segmento que une las proyección ortogonal de los extremos del segmento dado.



P': proyección ortogonal del P sobre $\overleftrightarrow{L}$

$\overline{A'B'}$: proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{L}$

EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO :



$\overline{AH}$ ⇒ Proyección $\overline{AB}$ de sobre $\overline{AC}$.

$\overline{HC}$ ⇒ Proyección $\overline{BC}$ de sobre $\overline{AC}$.

TEOREMA 1 :

I) En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de un cateto es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la proyección ortogonal de dicho cateto respecto a la hipotenusa .

$$\boxed{c^2=bm} \quad \boxed{a^2=bn}$$

II) En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrado de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de longitud de la hipotenusa (teorema de Pitágoras).

$$\boxed{a^2+c^2=b^2} \text{ y } \boxed{\frac{1}{h^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}$$

III) En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre dicha hipotenusa.

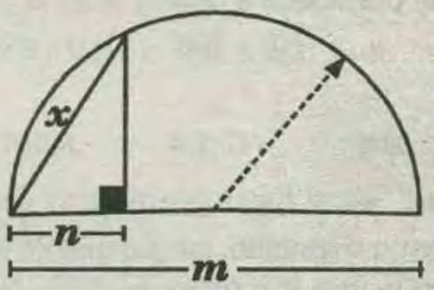
$$h^2=mn$$

IV) En todo triángulo rectángulo, el producto entre las longitudes de los catetos es igual al producto entre las longitudes de la hipotenusa y la altura relativamente a la hipotenusa.

$$ac=bh$$

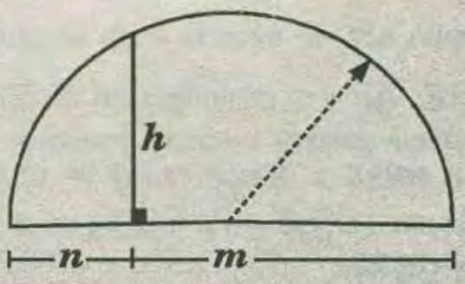
PROPIEDADES

1)



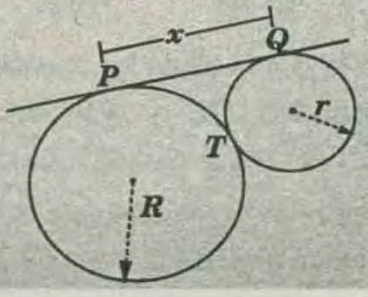
$$x^2 = mn$$

2)



$$h^2=mn$$

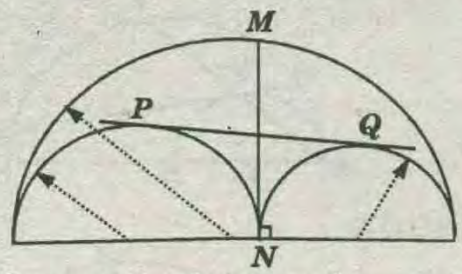
3)



* Si: P, Q y T son puntos de tangencia..

$$\Rightarrow x=2\sqrt{R.r}$$

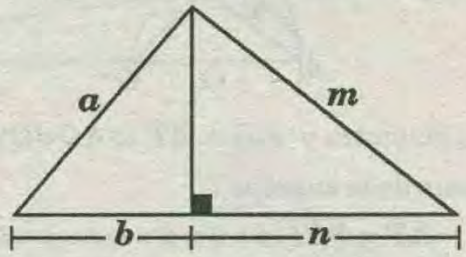
4)



* Si: P y Q son puntos de tangencia

$$\Rightarrow PQ=MN$$

5)



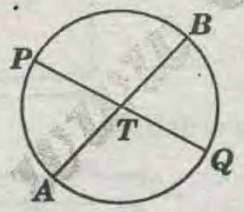
$$\Rightarrow a^2-b^2=m^2-n^2$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA DE LAS CUERDAS :

Si en una circunferencia se tienen dos cuerdas secantes, se cumple que el producto de las longitudes de los segmentos determinados en una cuerda es igual al producto de las longitudes de los segmentos determinados en la otra cuerda.

$(AT)(TB) = (PT)(TQ)$

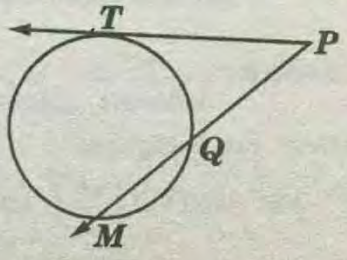


TEOREMA DE LA TANGENTE

Si desde un punto exterior a una circunferencia se traza una recta tangente y una recta secante a ella, entonces el cuadrado de la longitud del segmento tangente es igual al producto de las longitudes del segmento secante y su parte extrema.

* En el gráfico, se cumple

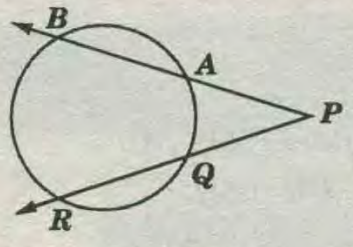
$(PT)^2 = (PM)(PQ)$



TEOREMA DE LAS SECANTES

Si desde un punto exterior una circunferencia se trazan dos rectas secantes a ella, se cumple que los productos de las longitudes de un segmento secante y su parte externa son iguales.

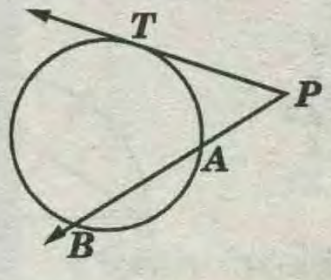
* En el gráfico, se cumple



$(PB)(PA)=(PR)(PQ)$

OBSERVACIÓN:

$\overline{PT}$: segmento tangente
$\overline{PB}$: segmento secante
$\overline{PA}$: parte externa

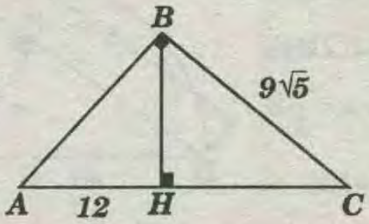


PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

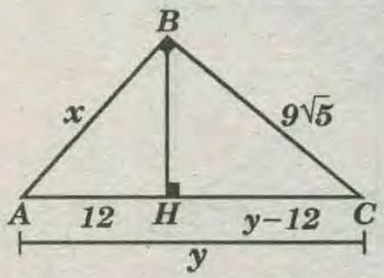
Calcular *"AB"*.

A) 12
B) 14
C) 16
D) 18
E) 20



RESOLUCIÓN:

* Por la relación métrica adecuada en un triángulo rectángulo, se obtendrá del $\triangle ABC$:



$$(9\sqrt{5})^2=y(y-12)$$
$$\Rightarrow 405=y^2-12y$$
$$\Rightarrow y^2-12y-405=0$$
$$\Rightarrow (y-27)(y+15)=0$$
$$\Rightarrow y=27 \text{ ó } y=-15$$

* Además : $x^2=12y \Rightarrow x^2=12\times 27 \Rightarrow x=18$

RPTA: "D"

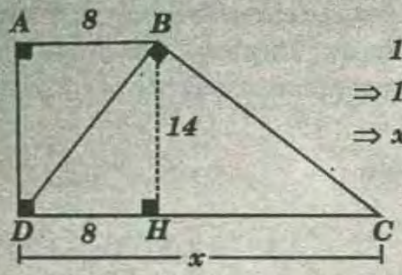
PROBLEMA 2:

En unl trapecio rectángulo la base menor y la altura mide *8* y *14* respectivamente. Hallar la medida de la base mayor, si la diagonal menor es perpendicular al mayor lado no paralelo .

A) 20 *B) 30* *C)29,5* *D) 32,5* *E) 35*

RESOLUCIÓN:

* Aplicando la relación métrica adecuada en el $\triangle DBC$:



$14^2 = 8(x-8)$

$\Rightarrow 196 = 8x - 64$

$\Rightarrow x = 32{,}5$

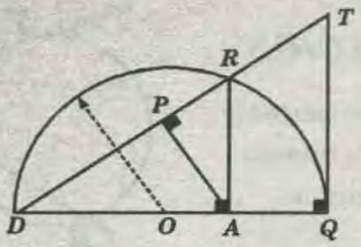
RPTA : "D"

PROBLEMA 3:

En el gráfico mostrado , calcular **"AP"**, si :

$DR=8$ y $RT=2$. Además : $DQ=5AQ$.

A) 4
B) 3
C) 4,5
D) 5
E) 3,2



RESOLUCIÓN :

* Sea : $AQ=a \Rightarrow DQ=5a$ y $DA=4a$

* Por relaciones métricas en el $\triangle DTQ$:

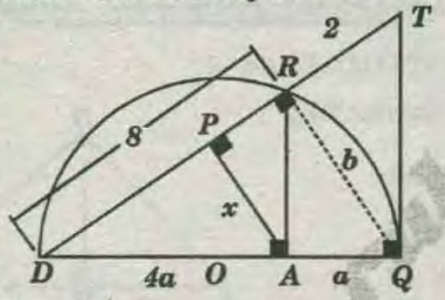
$RQ^2 = RT \times DR$

$\Rightarrow b^2 = 2 \times 8 \Rightarrow b=4$

* $\triangle DRQ \sim \triangle DPA$:

$\frac{x}{b} = \frac{4a}{5a} \Rightarrow x = \frac{4}{5}b$

$\Rightarrow x = \frac{4}{5}(4) = 3{,}2$

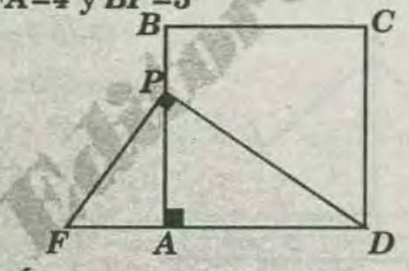


RPTA: "E"

PROBLEMA 4:

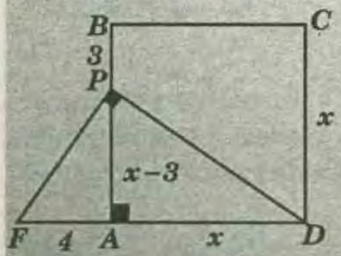
Si $ABCD$ es un cuadrado, calcular medida de su lado , si se sabe que $FA=4$ y $BP=3$

A) 6
B) 8
C) 9
D) 10
E) 15



RESOLUCIÓN:

* Por relaciones métricas en el $\triangle FPD$:



$(x-3)^2 = 4 \times x$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 4x$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$

$\Rightarrow (x-9)(x-1) = 0$

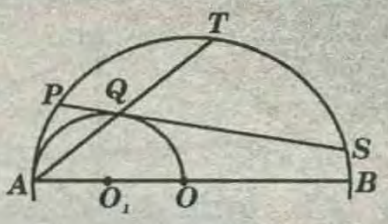
$\Rightarrow x = 9$

RPTA: "C"

PROBLEMA 5:

Siendo **"O"** y **"O_1"** centros , $PQ=4$ u y $QS=9$ u, hallar **"AQ"** .

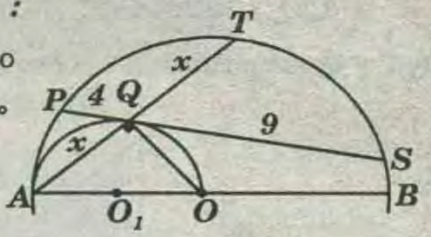
A) 4u
B) 5
C) 6
D) 8
E) 10



RESOLUCIÓN :

* Si : $\overline{AO} \Rightarrow$ diámetro

$\Rightarrow m\sphericalangle AQO = 90°$



* Si: $\overline{AB} \Rightarrow$ diámetro y $\overline{OQ} \perp \overline{AT} \Rightarrow AQ=QT=x$

* Por teorema de la cuerdas :

$\overline{AT}$ y $\overline{PS}$: $4 \times 9 = x \times x \Rightarrow x = 6u$

RPTA : "C"

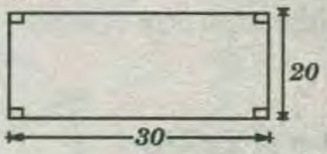
PROBLEMA 6 :

Una hoja rectangular de papel , de $20cm$. de ancho y $30cm$. De largo, se dobla de tal manera que dos vértices opuestos coincidan. ¿Cuál es la longitud del doblez?

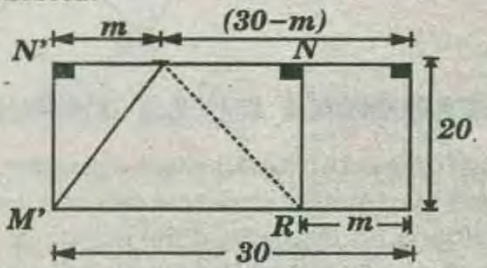
A) $\frac{20}{3}\sqrt{13}cm$. B) $\frac{10}{3}\sqrt{13}cm$. C) $\frac{50}{3}\sqrt{13}cm$. D) $\frac{10}{3}\sqrt{6}cm$.

RESOLUCIÓN :

* Graficando el rectangular :



* Haciendo el doblez:



* Observamos en :

ΔMNM : Por Pitágoras:

$20^2 + m^2 = (30-m)^2 \Rightarrow m = \frac{25}{3}$

* Entonces :

$MN = 30 - 2m = 30 - \frac{50}{3} \Rightarrow MN = \frac{40}{3}$

* ΔMNR : Por Pitágoras:

$MN^2 + NR^2 = MR^2 \Rightarrow \left(\frac{40}{3}\right)^2 + 20^2 = MR^2 \Rightarrow MR^2 = \frac{20}{3}\sqrt{13}$

RPTA: "A"

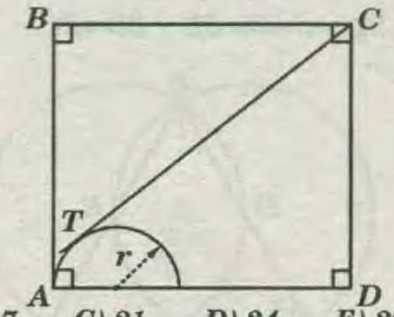
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Los lados de un triángulo miden $\sqrt{2}; \sqrt{6}$ y $\sqrt{8}$. Calcular la longitud de la menor altura.

A) $\sqrt{2}/2$ B) $\sqrt{6}/2$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{8}$

02 De la figura: $AB=20$, $BC=22$ y $r=7$.

Calcular CT.



A) 15 B) 17 C) 21 D) 24 E) 20

03 Los radios de dos circunferencias ortogonales miden 3 y 4. Calcular la longitud de la cuerda común.

A) 2,3 B) 2,2 C) 4,8 D) 2,4 E) 2,5

04 Calcule la medida del inradio de un triángulo rectángulo, si la hipotenusa y la altura relativa a la hipotenusa miden 10 y 24/5, respectivamente.

A) 1 B) 2 C) 2,5 D) 1,5 E) 3

05 Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B. La circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AC}$ en D. Calcular $(AB)(BC)$, si: $(AD)(DC)=10$.

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 30

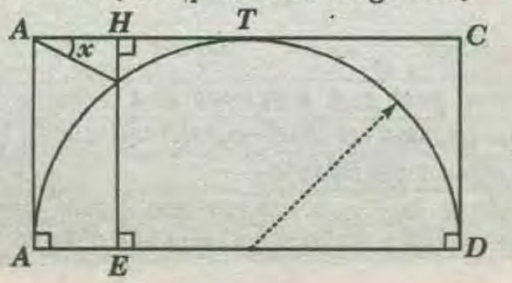
06 En un trapecio isósceles, calcular la longitud de la proyección de una de sus diagonales sobre la base mayor, si la suma de las longitudes de sus bases es 12.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 9

07 El producto de las longitudes de las bases de un trapecio isósceles es 64. Calcule la longitud del radio de la circunferencia inscrita en dicho trapecio.

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 3 D) $3\sqrt{2}$ E) 4

08 $ABCD$ es un rectángulo, $BH=2$ y $HC=8$. Calcule el valor de "x". (T es punto de tangencia)



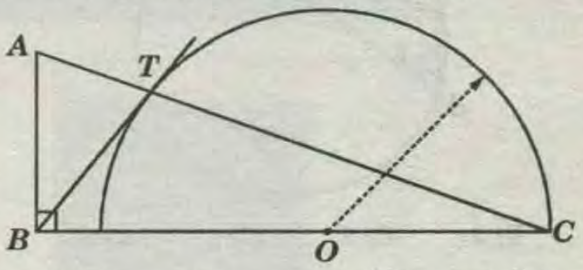
A) 30° B) 53°/2 C) 37°/2 D) 53° E) 36°

09 En un trapecio rectángulo $ABCD$ ($m\sphericalangle A=m\sphericalangle B=90°$), cuyas diagonales perpendiculares se intersecan en P. Si: $CP=1$, $CD=\sqrt{65}$ y $BC<AD$, calcular AP.

A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

10 Según el gráfico, $AT=2$ y $TC=7$.

Calcular AB. (T es punto de tangencia)



A) 2 B) 3 C) 1 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

11 En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BM}$, luego $\overline{AP}$ perpendicular a $\overline{BM}$ ($P \in \overline{BM}$). Si: $AP=3$ y $AC=10$, calcular CP.

A) $2\sqrt{13}$ B) $\sqrt{73}$ C) $\sqrt{61}$ D) $\sqrt{70}$ E) 8,5

12 En un triángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana $\overline{BM}$, tal que: $m\sphericalangle BMC - m\sphericalangle BCM=90°$, además $(AM)(AC)=18$. Calcular AB.

A) 9 B) 6 C) $6\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{3}$ E) 3

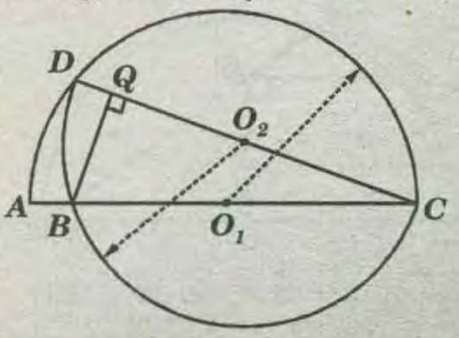
13 Calcular la longitud de la altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que el producto de las longitudes entre la hipotenusa y las distancias del pie de dicha altura a los catetos es 343.

A) 8 B) 6 C) 9 D) 5 E) 7

14 En un triángulo rectángulo la mediana relativa a un cateto de longitud $2\sqrt{6}$ se interseca perpendicularmente con la mediana relativa a la hipotenusa. Calcular la longitud de la hipotenusa.

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) 3 D) 6 E) 9

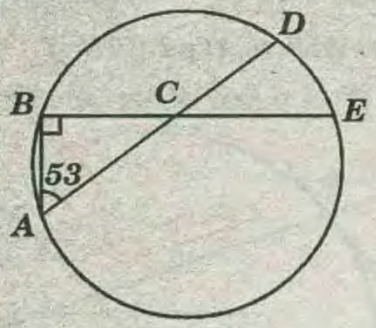
15 Calcule BQ, si: $AB=1$ y $BC=8$.



A) 3 B) 2/3 C) 4/3 D) 8/3 E) 2

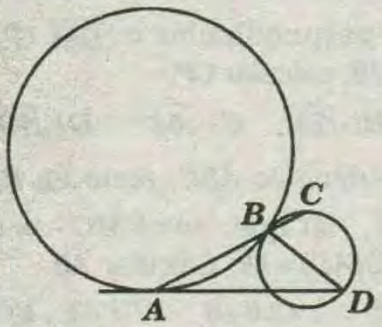
SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 En la figura: $CD=4$. Calcule CE.



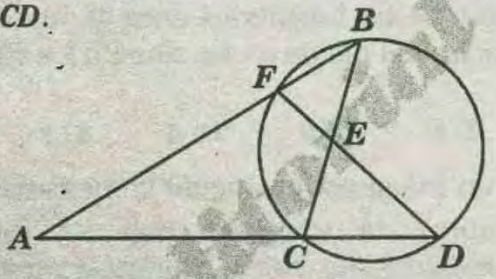
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

02 En la figura: A y B son puntos de tangencia, $AB=3(BC)$, $BD=3$. Calcule AD.



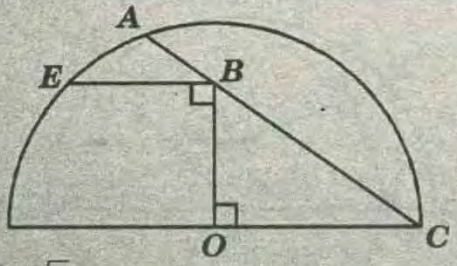
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

03 En la circunferencia: $AC=2(CD)$, $BE=EC$, $BF=\sqrt{2}$. Calcule CD.



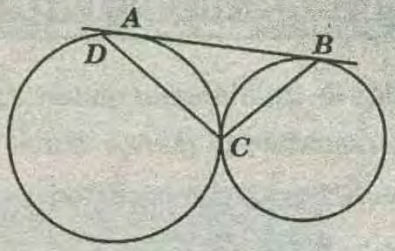
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

04 En la figura: O es centro, el radio mide 2 y $EB=BO$. Calcule AB.



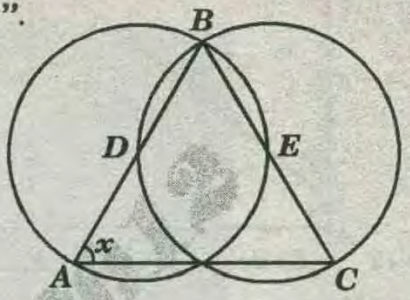
A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{6}$ E) 1

05 En la figura: A, B y C son puntos de tangencia, $m\widehat{DAC}=m\widehat{CB}$, $DC=10$, $BC=8$. Calcule AB.



A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

06 En la figura: $AD=BE$ y $BD=EC$. Calcular "x".

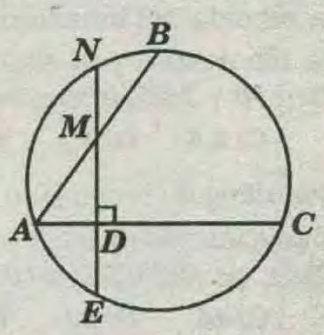


A) 30°
B) 60°
C) 45°
D) 53°
E) 37°

07 En la figura:

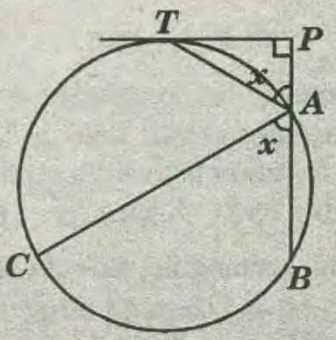
$m\widehat{ANB}=m\widehat{BC}$, $AM=MB$, $MN=DE$ y $AD=\sqrt{3}$

Calcule AM.



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

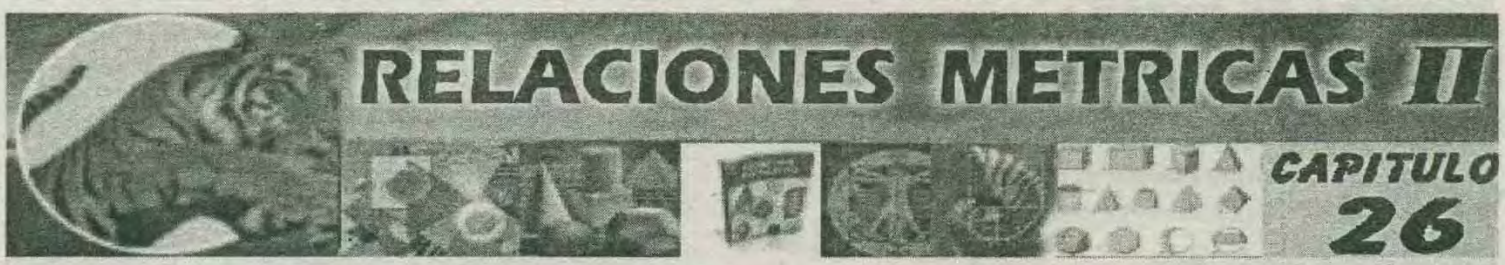
08 En la figura: T es punto es tangencia y $AC=2(AT)$. Calcule "x".



A) 45° B) 30° C) 60° D) 53° E) 37°

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)B	2)D	3)D	4)B	5)D	6)D	7)E	8)B	9)A	10)B
11)B	12)E	13)E	14)D	15)D					

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA							
1)E	2)C	3)B	4)B	5)C	6)B	7)C	8)C



RELACIONES METRICAS II

CAPITULO 26

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

TEOREMA DE EUCLIDES :

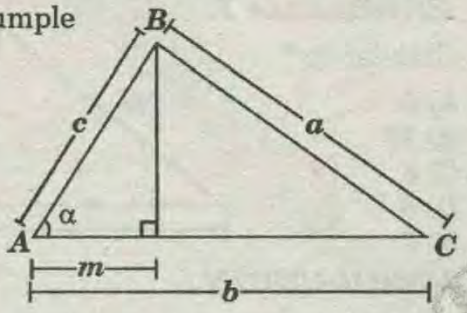
PRIMER CASO:

En todo triángulo,el cuadrado de la longitud del lado que opone a un ángulo agudo es igual a la suma de cuadrados de las longitudes de los otros dos, menos el doble del producto entre las longitudes de uno de ellos, con la proyección del otro sobre aquel.

* En el gráfico, se cumple

* Para: $\alpha<90°$

$a^2=b^2+c^2-2bm$



OBSERVACIÓN:

* En el $\triangle AHB$: $m=cCos\,\alpha$

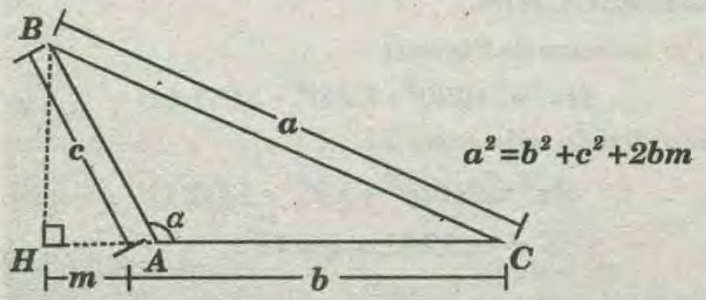
* Entonces: $a^2=b^2+c^2-2bcCos\alpha$ "ley de Cosenos"

SEGUNDO CASO :

En todo triángulo obtusángulo, el cuadrado de la longitud del lado que se opone al ángulo obtuso es igual a la suma de cuadrados, de las longitudes de los otros dos, mas el doble del producto entre las longitudes de uno de ellos con la proyección de otro sobre aquel.

* En el gráfico, se cumple:

* Para: $\alpha>90°$



$a^2=b^2+c^2+2bm$

OBSERVACIÓN :

* En el $\triangle AHB$: $m=cCos\alpha$

* Entonces: $a^2=b^2+c^2-2bcCos\alpha$ "ley de Cosenos"

Reconocimiento de la Naturaleza de un Triángulo

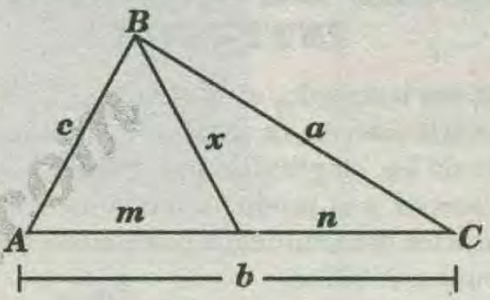
* Datos el triángulo ABC, donde $AB=c$, $BC=a$ y $AC=b$ siendo $a>b>c$, entonces se verifica que:

I) Si : $a^2<b^2+c^2 \Rightarrow$ el ΔABC es acutángulo

II) Si : $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow$ el ΔABC es rectángulo

III) Si : $a^2>b^2+c^2 \Rightarrow$ el ΔABC es obtusángulo

TEOREMA DE STEWART



Si $\overline{BF}$ es una ceviana entonces se verifica la siguiente relación:

$$c^2n+a^2m=x^2b+bmn \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

OBSERVACIÓN :

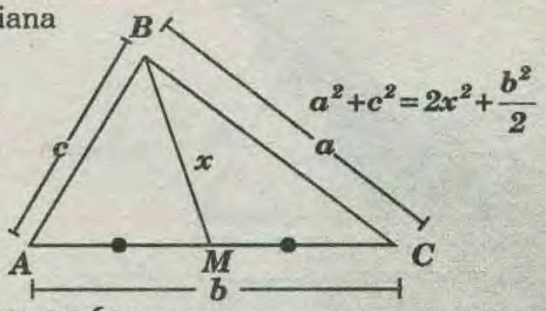
Si el triángulo es Isósceles con: $a=c$ la expresión (β) se reduce a: $a^2=x^2+mn$

TEOREMA DE LA MEDIANA

La suma de los cuadrados de las longitudes de dos lados de un triángulo, es igual al doble del cuadrado de la longitud de la mediana relativa al tercer lado, más la mitad del cuadrado de la longitud de dicho tercer lado.

* En el gráfico, se cumple

* $\overline{BM}$ mediana



$$a^2+c^2=2x^2+\frac{b^2}{2}$$

OBSERVACIÓN :

Siendo las medidas de las medianas m_a, m_b, y m_c se Cumple que:

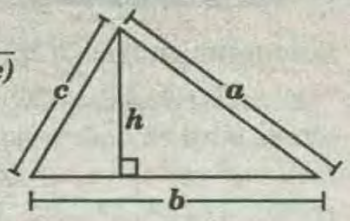
$$(m_a)^2+(m_b)^2+(m_c)^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

TEOREMA DE HERON :

En todo triángulo, la longitud de sus alturas, es igual al producto entre el doble de la inversa de la longitud del lado al cual es relativo con la raíz cuadrada del producto del semiperímetro y las diferencias de este con las longitudes de cada uno de los lados.

* En el gráfico, se cumple :

$$h=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



* Donde p es semiperímetro

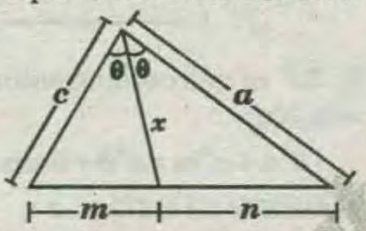
$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

CALCULO DE LA BISECTRIZ INTERIOR

En todos los triángulo, el cuadrado de la longitud de una bisectriz interior, es igual a la diferencia entre, el producto de las longitudes de los lados adyacentes a dicha bisectriz y el producto entre las longitudes de los segmentos determinados por dicha bisectriz en el lado al cuál es relativo.

* En el gráfico, se cumple

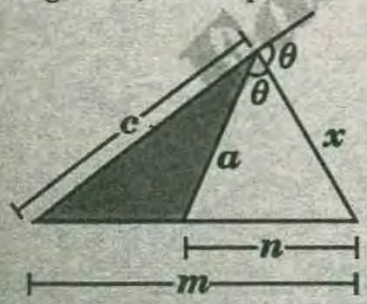
$$x^2=ac-mn$$



CALCULO DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de una bisectriz interior, es igual a la diferencia entre, el producto de las longitudes de los segmentos determinados por dicha bisectriz determina en el lado al cuál es relativo, y el producto entre las longitudes de los lados adyacentes a dicha bisectriz.

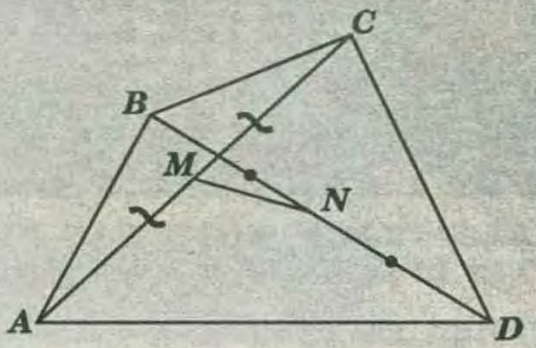
* En gráfico, se cumple



$$x^2=mn-ac$$

TEOREMA DE EULER :

En todo cuadrilátero (convexo, cóncavo alabeado), la suma de los cuadrados de la medidas de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de las diagonales más cuatro veces el cuadrado de la mediana.



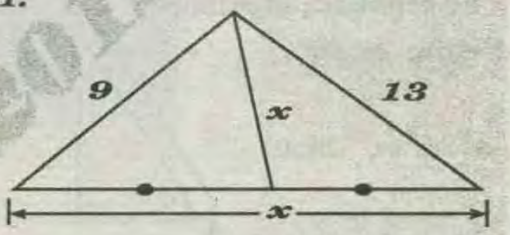
$$(AB)^2+(BC)^2+(CD)^2+(AD)^2=(AC)^2+(BD)^2+4(MN)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Calcular "x"

A) 9
B) 10
C) 8
D) 6
E) 7



RESOLUCIÓN :

* Aplicando el "teorema de la mediana"

$$9^2+13^2=2x^2+\frac{x^2}{2} \Rightarrow 250=\frac{5x^2}{2}$$

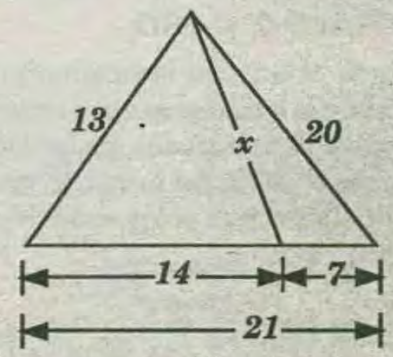
$$\Rightarrow x^2=100 \Rightarrow x=10$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 2:

Calcular "x"

A) 13
B) 10
C) 15
D) 17
E) 14



RESOLUCIÓN :

* Por teorema de Stewart :

$$21x^2=14(20)^2+7(13)^2-14(7)(21)$$

* Dividiendo todo entre 7 :

$$3x^2=2(20)^2+13^2-14(21)$$

$$\Rightarrow x^2=225 \Rightarrow x=15$$

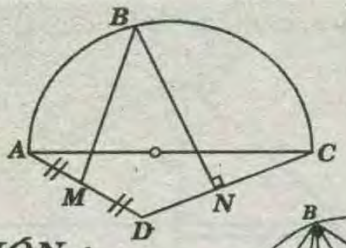
RPTA: "C"

PROBLEMA 3:

Hallar *BM*. Si: el diámetro de *AC* mide *10* y

$$AD=2\sqrt{14},\ AM=MD,\ DN=NC$$

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9



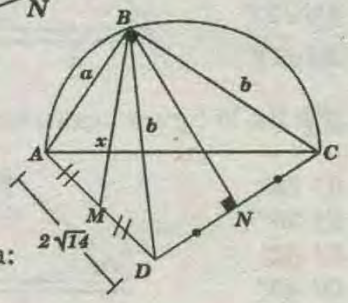
RESOLUCIÓN :

* Datos $AC=10$

* Pitágoras $\triangle ABC$

$a^2+b^2=10^2$ ..... *(I)*

* Por teorema de la mediana:



$$a^2+b^2=2x^2+\frac{(2\sqrt{14})^2}{2} \quad \text{.....(II)}$$

* Reemplazando *(I)* en *(II)*: $10^2=2x^2+28 \Rightarrow x=6$

RPTA: "B"

PROBLEMA 4 :

En un rombo $ABCD$ se ubica el punto medio P de $\overline{BC}$, tal que $AP^2+PD^2=250$. Hallar AB

A) 6 B) 8 C) 10 D) 15 E) 20

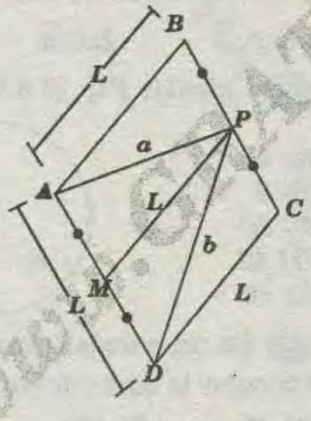
RESOLUCIÓN:

* Por dato:

$AP^2+PD^2=250$

$\Rightarrow a^2+b^2=250$ .....*(I)*

* Ahora por teorema de la mediana:



$$a^2+b^2=2L^2+\frac{L^2}{2} \quad \text{.....(II)}$$

* Reemplazando *(I)* en *(II)*

$$250=\frac{5L^2}{2} \Rightarrow L=10$$

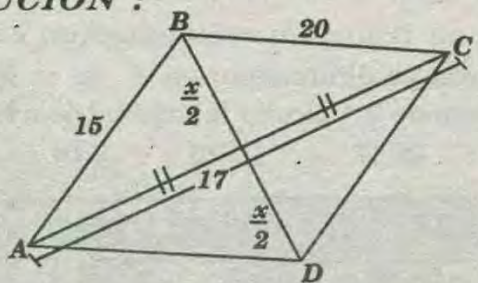
RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

Los lados de un paralelogramos miden 15 y 20, la diagonal mide 17. Calcular la medida de la otra diagonal.

A)24 B)27 C)30 D)31 E)36

RESOLUCIÓN :



* Por teorema de la mediana en el $\triangle ABC$:

$$15^2+20^2=2\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{17^2}{2}$$

* Resolviendo : $x=31$

RPTA: "D"

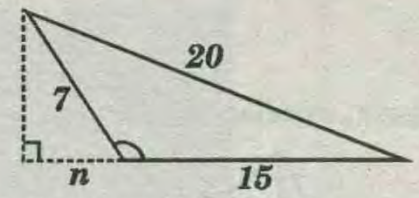
PROBLEMA 6:

Los lados de un triángulo miden $7m$, $15m$ y $20m$. determinar que clase de triángulo es y luego hallar la proyección del lado menor sobre el lado mayor.

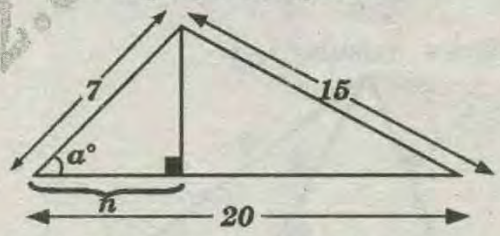
A) 6 B) 7 C) 7,2 D) 5,6 E) 6,4

RESOLUCIÓN :

* Para saber que clase de triángulo es, tomamos el lado mayor que es 20 y comparamos: 202 con $152+72$ como: $400>225+49$ entonces el triángulo es obtusángulo .



* Para hallar la proyección del lado menor sobre el mayor entonces de preferencia dibujamos el lado mayor de base y proyectamos el lado menor sobre el lado mayor; "n" es la proyección pedida.



* Aplicamos el primer caso del teorema del Euclides ya que $\alpha<90°$, entonces :

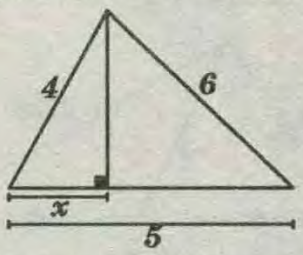
$$15^2=7^2+20^2-2\times 20n \Rightarrow n=5,6$$

RPTA: "D"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

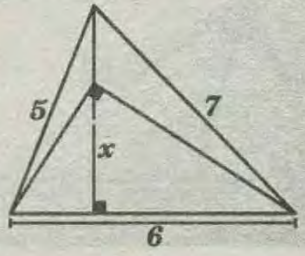
01 En la figura, calcular "x"

A) 1
B) 1/2
C) 2
D) 1/3
E) 3



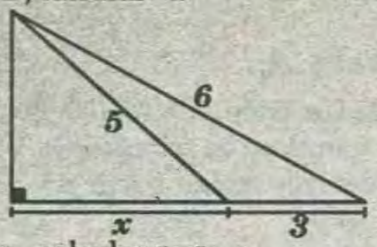
02 En la figura, calcular "x"

A) 2
B) 3
C) 4
D) $\sqrt{6}$
E) $\sqrt{5}$



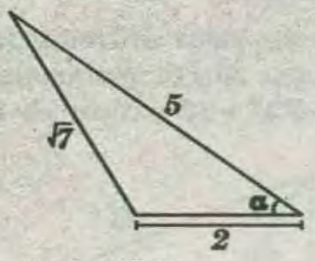
03 En la figura, calcular "x"

A) 1/2
B) 1
C) 2
D) 1/3
E) 2,5



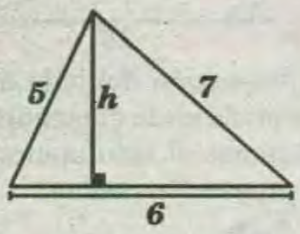
04 En la figura, calcular "α"

A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°



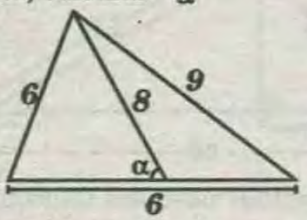
05 En la figura, calcular "h"

A) $2\sqrt{6}$
B) $\sqrt{6}$
C) $2\sqrt{3}$
D) 4
E) 3



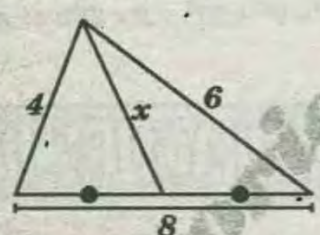
06 En la figura, calcular "α"

A) 53°
B) 60°
C) 30°
D) 45°
E) 37°



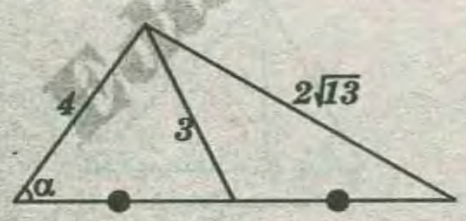
07 En la figura, calcular "x"

A) $\sqrt{7}$
B) $\sqrt{10}$
C) 5
D) 3
E) $\sqrt{11}$



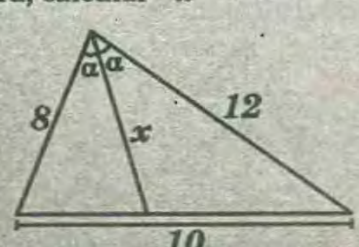
08 En la figura, calcular "α"

A) 30°
B) 53/2°
C) 22,5°
D) 45°
E) 37°



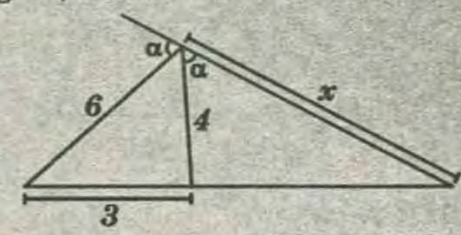
09 En la figura, calcular "x"

A) $3\sqrt{5}$
B) $2\sqrt{6}$
C) $5\sqrt{2}$
D) $6\sqrt{2}$
E) $4\sqrt{3}$



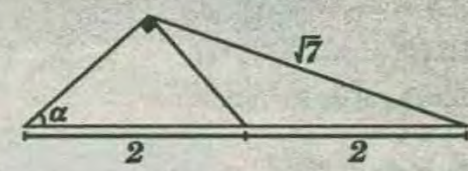
10 En la figura, calcular "x"

A) $\sqrt{28}$
B) $\sqrt{30}$
C) $\sqrt{33}$
D) $\sqrt{22}$
E) $\sqrt{19}$



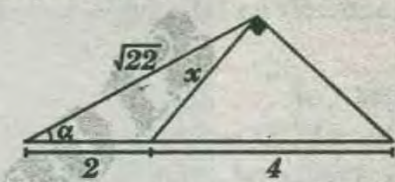
11 En la figura, calcular "α"

A) 15°
B) 30°
C) 37°
D) 45°
E) 53?8



12 En la figura, calcular "x"

A) $\sqrt{7}$
B) 2,5
C) 2
D) 3
E) $\sqrt{11}$

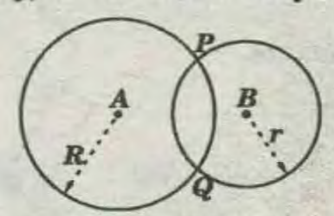


13 En un triángulo isósceles ABC, $AB=BC$; la altura $\overline{AF}$ intersecta a la altura $\overline{BH}$ en el punto O, si $OB=5$ y $CH=1$. Calcular OA.

A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{6}$ D) $\sqrt{7}$ E) 4

14 Calcular PQ, si $AB=21$; $R=17$ y $r=10$.

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 16



15 En un paralelogramo $ABCD$, $AB=2$ y $BC=4$. Calcular la suma de los cuadrados de sus diagonales.

A) 40 B) 42 C) 46 D) 48 E) 50

16 Calcular los lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que el segmento que une el baricentro con el incentro mide 8 y es paralelo a uno de los catetos.

A) 72;86 y 110 B) 72; 96 y 120 C) 54; 96 y 90
D) 54;86 y 110 E) 60; 80 y 100

17 En un triángulo rectángulo un cateto y la hipotenusa se diferencian en 6, si el inradio del triángulo mide 3. Calcular la longitud de la hipotenusa.

A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

PRIMERA PRACTICA					RELACIONES MÉTRICAS				
1) B	2) E	3) ?	4) D	5) A	6) D	7) B	8) E	9) D	10) B
11) B	12) D	13) D	14) E	15) A	16) B	17) E			

OBJETIVOS :

Al finalizar esta unidad el alumno será capaz de :

♣ *Proyectar un segmento sobre otro .*

♣ Estudiar la aplicación de la semejanza de triángulos, para relacionar longitudes de segmentos y medidas angulares.

♣ *Saber aplicar las fórmulas de las relaciones métricas en el triángulo rectángulo*

♣ *Aplicar las fórmulas de las relaciones métricas en los triángulos oblicuángulos*

♣ *Conocer las relaciones métricas entre los elementos lineales de los triángulos y familiarizarse con las aplicaciones de estas relaciones en demostraciones y la solución de problemas .*

♣ *Simplificar mediante teoremas , las relaciones entre figuras geométricas semejantes.*

♣ *Determinar el tipo de triángulo en base a las medidas de sus lados .*

♣ *Resolver problemas de relaciones métricas en triángulos.*

INTRODUCCIÓN :

A diario nos damos cuentas que en nuestro entorno ciertos fenómenos o sucesos están relacionados de alguna manera. Por ejemplo en la naturaleza influye en los cambios de estado del agua ; en la sociedad, todo cambio en lo político y en lo económico esta relacionado con los cambios sociales.

Así mismo analizar u observar diversos objetos nos damos cuenta que sus dimensiones se relacionan entre si de acuerdo a la forma que presentan dicho objetos.

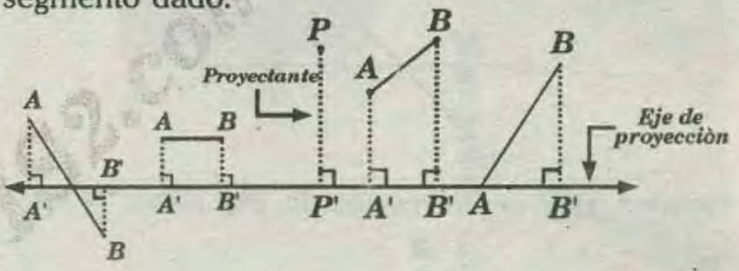
Es así, como en las figuras geométricas estudiaremos las principales relaciones entre las longitudes de las líneas que se asocian a ellas; las cuales también eran usados por el hombre en la antigüedad para poder hacer diversas medidas angulares o longitudinales relacionándolos con determinadas figuras.

RELACIONES MÉTRICAS

Para el estudio de la relaciones métricas entre los elementos de los triángulos, es indispensable saber el concepto de proyección :

PROYECCIÓN ORTOGONAL

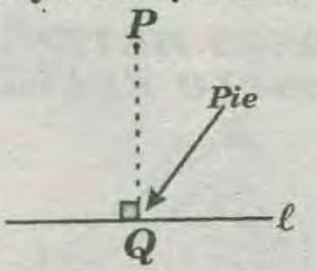
La proyección ortogonal de un punto sobre una recta, es el pie de la perpendicular trazada desde dicho punto a la recta. Asimismo, la proyección ortogonal de un segmento sobre una recta es el segmento que une las proyección ortogonal de los extremos del segmento dado.



P' : proyección ortogonal del P sobre $\vec{L}$

$\overline{A'B'}$: proyección ortogonal del $\overline{AB}$ sobre $\vec{L}$

♠ La proyección ortogonal del punto "P" sobre la línea recta "ℓ" es el punto "Q", llamado pie de la perpendicular $\overline{PQ}$ sobre dicha recta "ℓ".

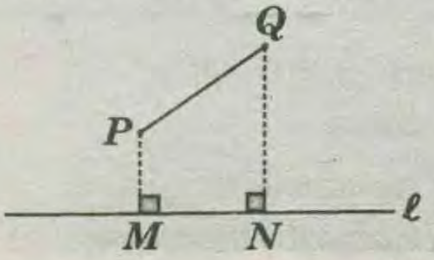


Donde: «Q» → Proyección

$\overline{PQ}$ → Proyectante

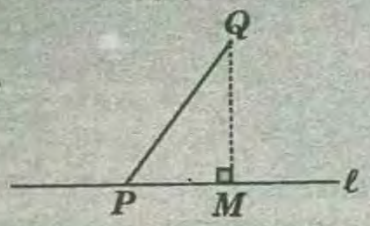
CONSECUENCIAS :

♠



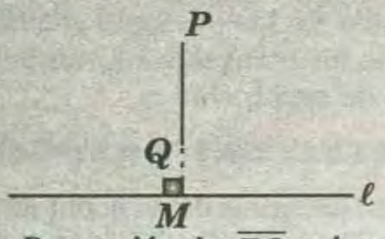
Donde: $\overline{MN}$ → Proyección de $\overline{PQ}$ sobre "ℓ".

♠



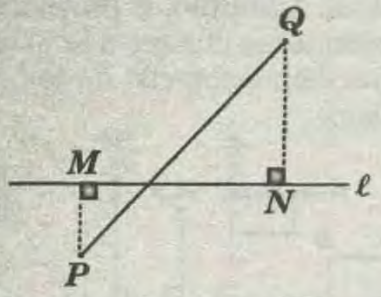
Donde: $\overline{PM}$ → Proyección de $\overline{PQ}$ sobre "ℓ".

♠



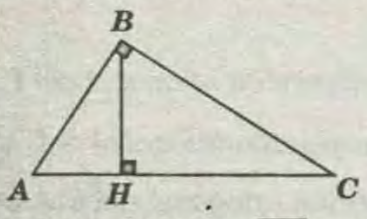
Donde : M → Proyección de $\overline{PQ}$ sobre "ℓ".

♠



Donde : $\overline{MN}$ → Proyección de $\overline{PQ}$ sobre "ℓ".

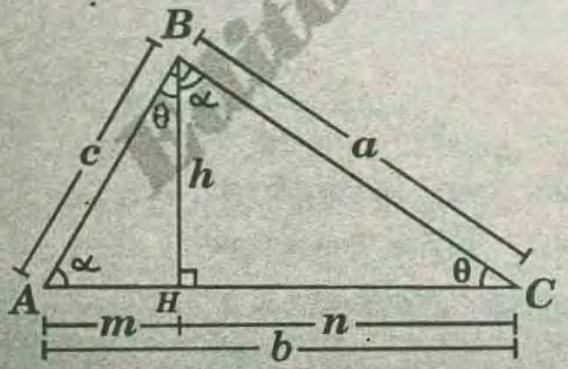
♠



Donde : $\overline{AH}$ → Proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$.

$\overline{HC}$ → Proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$.

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO



Segun la figura , en el $\triangle ABC$:

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$: Catetos

$\overline{AC}$: Hipotenusa

$\overline{BH}$: Altura relativa a la hipotenusa

$\overline{AH}$ y $\overline{CH}$: Proyecciones ortogonales de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respecto a $\overline{AC}$ respectivamente.

Además : $\triangle ABH \sim \triangle BCH \sim \triangle ACB$

TEOREMA 1 :

En todo triángulo rectángulo , el cuadrado de la longitud de un cateto es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la proyección ortogonal de dicho cateto respecto a la hipotenusa .

Del gráfico : $\boxed{a^2=n\times b}$ y $\boxed{c^2=m\times b}$

DEMOSTRACIÓN :

$$\triangle ABC \sim \triangle AHB \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{c}{m} \Rightarrow \boxed{c^2=b\times m}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle BHC \Rightarrow \frac{a}{n}=\frac{n}{b} \Rightarrow \boxed{a^2=b\times n}$$

TEOREMA 2 :

En todo triángulo rectángulo , el cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de las proyecciones ortogonales de los catetos respecto de dicha hipotenusa.

De la figura , se cumple : $h^2=mn$

DEMOSTRACIÓN :

$$\triangle AHB \sim \triangle BHC \Rightarrow \frac{m}{h}=\frac{h}{n} \Rightarrow \boxed{h^2=m\times n}$$

TEOREMA 3 :

En todo triángulo rectángulo , el producto de las longitudes de sus catetos es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la altura relativa a dicha hipotenusa .

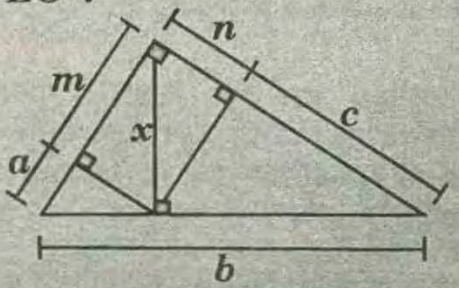
Del gráfico , se cumple : $a\times c = b\times h$

DEMOSTRACIÓN :

$\triangle ABC \sim \triangle BHC$

$$\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{c}{h} \Rightarrow \boxed{b\times h=a\times c}$$

EJEMPLO :



$x^3=m\times n\times b$ $x^3=a\times b\times c$

TEOREMA 4 :

En todo triángulo rectángulo , el cuadrado de la longitud de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos. Este teorema lleva el nombre de teorema de Pitágoras, en honor a que demostró esta propiedad del triángulo rectángulo .

Del gráfico, se cumple : $a^2+c^2=b^2$

TEOREMA 5 :

En todo triángulo rectángulo , la inversa del cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual a la suma de las inversas de cuadrados de las longitudes de sus catetos .

De la figura , se cumple :

$$\boxed{\frac{1}{h^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Por teorema sabemos $ca=bh$ elevando al cuadrado la relación anterior:

$$c^2a^2=b^2h^2 \quad \text{.....(I)}$$

* Del teorema de Pitágoras , sabemos :

$$b^2=a^2+c^2 \quad \text{.....(II)}$$

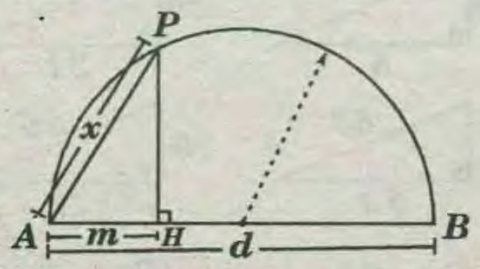
* *(II)* en *(I)* :

$$c^2a^2=(a^2+c^2)h^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2}=\frac{(a^2+c^2)}{c^2a^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{h^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}$$

TEOREMA 5 :

En toda semicircunferencia el cuadrado de la longitud de una cuerda , consecutiva al diámetro , al producto de longitudes del diámetro y proyección ortogonal de la cuerda respecto a dicho diámetro .



En la figura $\overline{AH}$ es proyección ortogonal de la cuerda AP, respecto del diámetro AB.

Se cumple :

$$x^2=d\times m$$

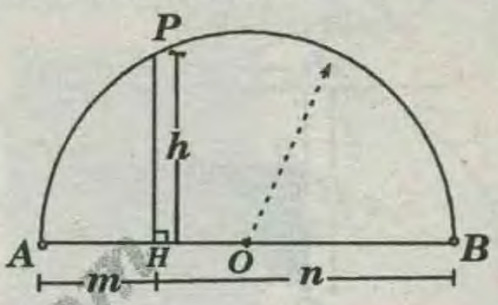
DEMOSTRACIÓN :

* Si unimos P con B mediante un segmento de recta, $m\sphericalangle APB=90°$; luego , en el $\triangle APB$ por relaciones métricas se cumple que el cateto AP es media proporcional con el diámetro y su respectiva proyección ortogonal .

$$(AP)^2=(AB)\times(AH) \Rightarrow x^2=d\times m$$

TEOREMA 6 :

En toda semicircunferencia , el cuadrado de la perpendicular trazada desde un punto de ella hacia el diámetro es igual al producto de las longitudes de los segmentos determinados por el pie de la perpendicular en el diámetro.



En la figura , $\overline{PH} \perp \overline{AB}$

Se cumple :

$$\rightarrow (PH)^2=(AH)(HB) \Rightarrow \boxed{h^2=mn}$$

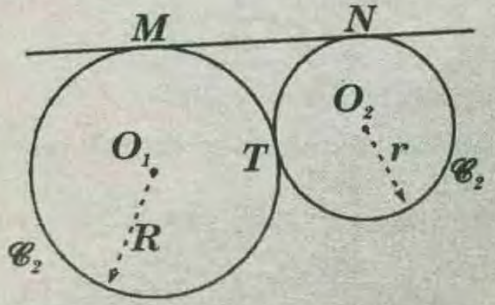
DEMOSTRACIÓN :

* Si unimos A con P y luego P con B mediante segmentos de recta , entonces $\sphericalangle APB=90°$, luego por relaciones métricas en el $\triangle APB$ la altura PH es media proporcional con las proyecciones ortogonales $(\overline{AH}$ y $\overline{HB})$ de los catetos AP y PB respectivamente con lo cual quedará demostrado el teorema .

$$(PH)^2=(AH)(HB) \quad \Rightarrow \boxed{h^2=m\times n}$$

TEOREMA 7 :

Dadas dos circunferencias tangentes exteriores , la longitud del segmento tangente común exterior a dichas circunferencias es igual a dos veces la raíz cuadrada del producto de los radios de dichas circunferencias .



Si T, M y N son puntos de tangencia

$$\Rightarrow \boxed{MN=2\sqrt{Rr}}$$

LIBRO GRATIS2.COM

DEMOSTRACIÓN :

* Trazamos $\overline{O_1M}$ y $\overline{O_2N}$, entonces $\overline{O_1M} \perp \overline{MN}$ y $\overline{O_2M} \perp \overline{MN}$. Dado que los centros y el punto de tangencia son colineales ; entonces , $O_1O_2=R+r$.

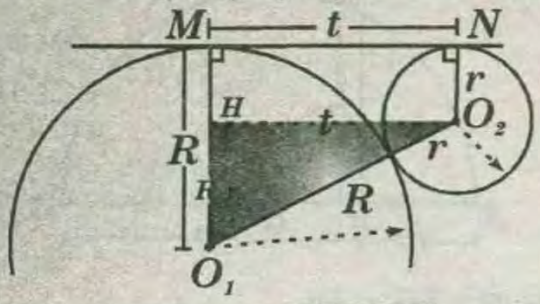
Sea $R > r$

* luego trazamos $\overline{O_2H} \perp \overline{O_1M}$

$$\Rightarrow O_2H=MN=t \text{ y } O_1H=R-r$$

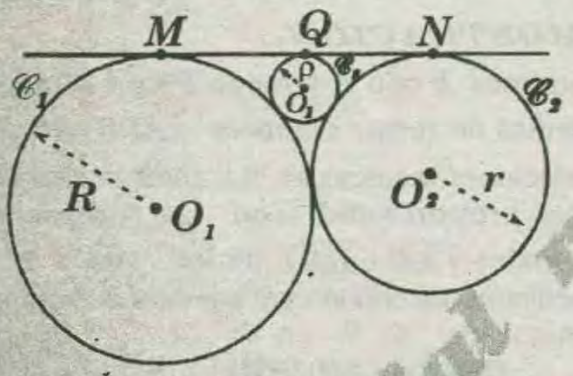
* En el $\triangle O_1HO_2$: por el teorema de Pitágoras

$$t^2=(R+r)^2-(R-r)^2$$



* operando : $t^2=4R \times r \Rightarrow \boxed{MN=2\sqrt{Rr}}$

OBSERVACIÓN :



Analógamente al caso anterior para $(\mathscr{C}_1;\mathscr{C}_2,)$; $(\mathscr{C}_2;\mathscr{C}_3,)$ y $(\mathscr{C}_1;\mathscr{C}_3,)$ se cumple, respectivamente

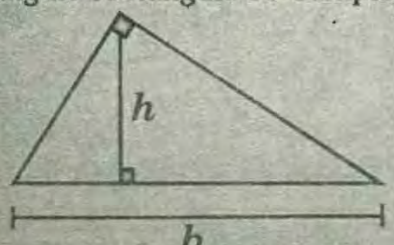
$$MN=2\sqrt{R\times r} \Rightarrow MQ=2\sqrt{\rho R} \quad \Rightarrow QN=2\sqrt{\rho r}$$

Además : $MN=MQ+QN$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{\rho}}=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}}$$

OBSERVACIÓN :

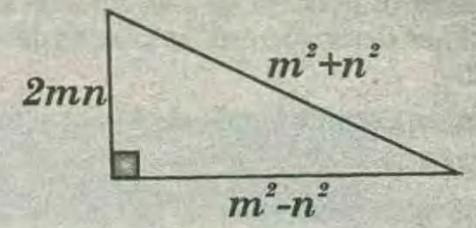
En un triángulo rectángulo se cumple que :



$$\boxed{h \le \frac{b}{2}}$$

TRIÁNGULOS PITAGÓRICOS

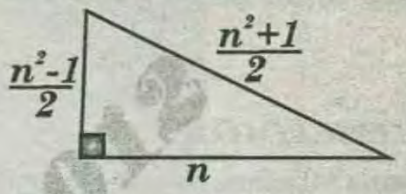
Se llama triángulos pitagóricos a aquellos triángulos rectángulos donde las longitudes de sus lados son números enteros y positivos .



Donde: «m y n» son números enteros positivos $(m>n)$

CASOS PARTICULARES :

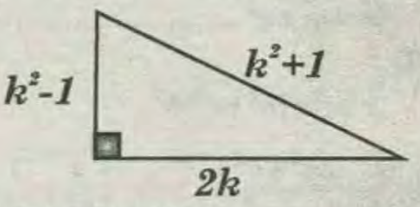
I)



Donde : "n" es impar y $n>1$

También: $n < \dfrac{n^2-1}{2}$

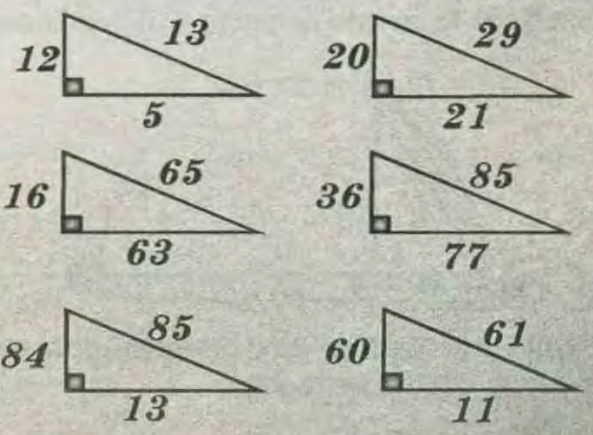
II)



Donde: "k" es impar y $k>2$

Tambien : $2k<k^2-1$

ALGUNOS TRIÁNGULOS PITAGÓRICOS

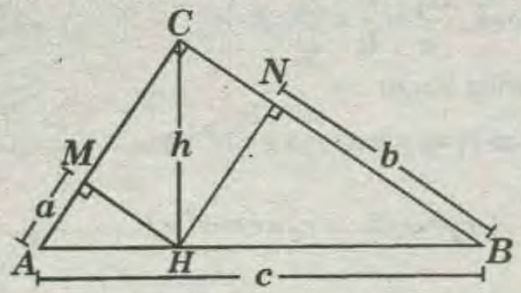


TEOREMA 8 :

En todo triángulo rectángulo , se cumple que el cubo de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y las proyecciones ortogonales determinadas en los

Editorial rubiños 2012

catetos por los segmentos parciales determinados en la hipotenusa por el pie de la altura.



$\overline{AM}$: proyección ortogonal de $\overline{AH}$ respecto de $\overline{AC}$.

$\overline{BN}$: proyección ortogonal $\overline{HB}$ respecto de $\overline{BC}$

$$\Rightarrow \boxed{h^3=a\times c\times b}$$

DEMOSTRACIÓN :

* De la figura , sabemos que :

$$(AH)^2=(AC)\times a \wedge (BH)^2=(BC)\times b$$

* Multiplicando se tiene :

$$(AH)^2(BH)^2=(AC)(BC)\times a\times b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Pero : $(AH)(BH)=h^2$ y $(AC)(BC)=c.h$

* Reemplazando en *(I)* : $h^4=chab \Rightarrow \boxed{h^3=a\times c\times b}$

OBSERVACIÓN :

Elevado al cuadrado :

$$(AC)^2=c(AH) \wedge (AC)^4=c^2(AH)^2$$

* es decir :

$$(AC)^4=c^2\times(AC)\times a$$

$$\Rightarrow (AC)^3=c^2\times a \Rightarrow (AC)^2=c^{4/3}\times a^{2/3}$$

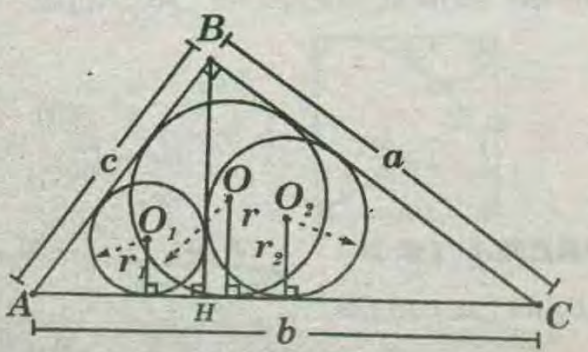
* Analógamente : $(BC)^2=c^{4/3}\times b^{2/3}$

* Como : $(AC)^2+(BC)^2=c^2$

* reemplazando obtenemos :

$$\boxed{(\sqrt[3]{c})^2=(\sqrt[3]{a})^2+(\sqrt[3]{b})^2}$$

TEOREMA 9 :



I) $r^2=r_1^2+r_2^2$ *II)* $rb=r_1c+r_2a$

III) $O_1O_2=r\sqrt{2}$ *IV)* $d(O;\overline{BH})=r_2-r_1$

DEMOSTRACIÓN :

$$\triangle ABH\sim\triangle BCH\sim\triangle ACB$$

$$\rightarrow c=r_1\times k;\ a=r_2\times k;\ b=r\times k$$

I) Como $c^2+a^2=b^2 \Rightarrow r_1^2\times k^2+r_2^2\times k^2=r^2\times k^2$

$$\Rightarrow r_1^2+r_2^2+=r^2$$

II) $c^2=(r_1\times k)c;\ a^2=(r_2\times k)a;\ b^2=(r\times k)b$

$$\Rightarrow (r_1\times c)k+(r_2\times a)k=(r\times b)k \rightarrow r_1\times c+r_2\times a=r\times b$$

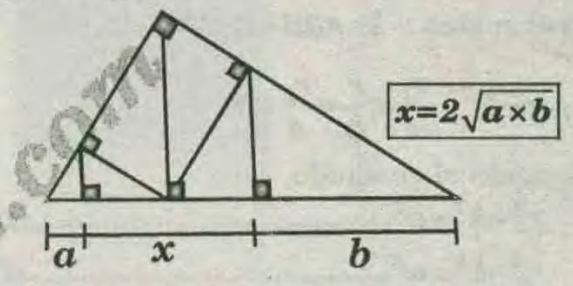
III) $\triangle O_1HO_2 : O_1H=r_1\sqrt{2}$ y $O_2H=r_2\times\sqrt{2}$

$$\Rightarrow (O_1O_2)^2=(O_1H)^2+(O_2H)^2$$

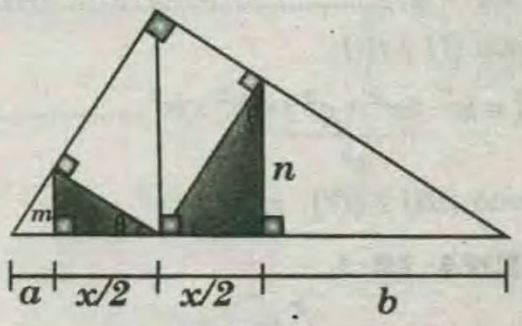
$$\Rightarrow (O_1O_2)^2=2r_1^2+2r_2^2=2r^2$$

$$\Rightarrow O_1O_2=r\sqrt{2}$$

TEOREMA 10 :



DEMOSTRACIÓN :



* Del gráfico : $m^2=a\times\frac{x}{2}$ ..... *(I)*

$$n^2=b\times\frac{x}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (II)$$

* Multiplicando *(I)* y *(II)*:

$$(m\times n)^2=\frac{a\times b\times x^2}{4}$$

* Además los dos triángulos rectángulos sombreados son semejantes , entonces :

$$\frac{m}{x/2}=\frac{x/2}{n} \Rightarrow m\times n=\frac{x^2}{4}$$

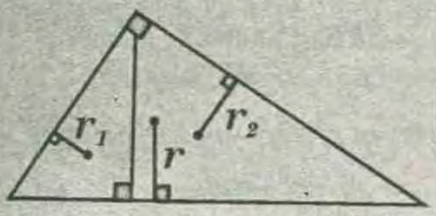
* De estas dos últimas expresiones :

$$\left[\frac{x^2}{4}\right]^2=\frac{a\times b\times x^2}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{4}=a\times b$$

$$\Rightarrow \boxed{x=2\sqrt{a\times b}}$$

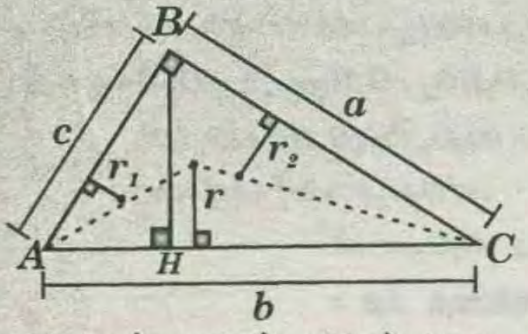
www.GRATIS2.com

TEOREMA 11 :



$$r_1^2+r_2^2+=r^2$$

DEMOSTRACIÓN :



* En el gráfico : $\triangle ABH \sim \triangle ABC \sim \triangle BHC$

* Entonces : $\frac{r_1}{c}=\frac{r}{b}=\frac{r_2}{a}=k$

* Elevando al cuadrado, así :

$r_1^2=k^2\times c^2$ .....(I)

$r_2^2=k^2\times a^2$ .....(II)

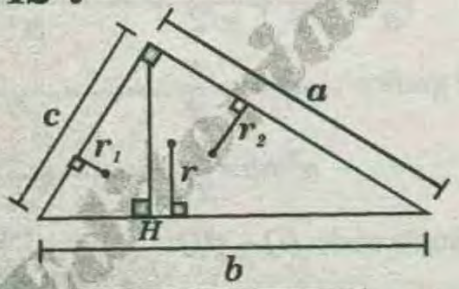
$r^2=k^2\times b^2$ .....(III)

* Sumando (I) y (II):

$r_1^2+r_2^2=k^2\ \underbrace{(a^2+c^2)}_{b^2}=k^2\times b^2$ .....(IV)

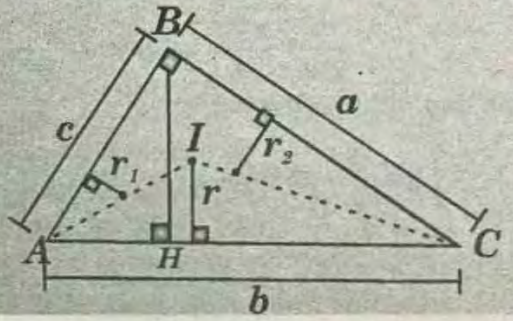
* Igualando (III) y (IV): $r_1^2+r_2^2=r^2$

TEOREMA 12 :



$$r_1\times c+r_2\times a=r\times b$$

DEMOSTRACIÓN :



* En el gráfico: $\triangle ABH \sim \triangle ABC \sim \triangle BHC$

* Entonces : $\frac{r_1}{c}=\frac{r}{b}=\frac{r_1}{a}=k$

* Podemos hacer :

$\frac{r_1}{c}=k\Rightarrow r_1=c\times k\Rightarrow r_1\times c=c^2\times k$ .....(I)

$\frac{r_2}{c}=k\Rightarrow r_2=a\times k\Rightarrow r_2\times c=a^2\times k$ .....(II)

$\frac{r}{b}=k\Rightarrow r=b\times k\Rightarrow r\times b=b^2\times k$ .....(III)

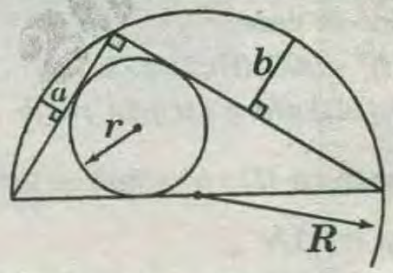
* Sumando (I) y (II) :

$r_1\times c+r_2\times a=k\underbrace{(a^2+c^2)}_{b^2}\Rightarrow r_1\times c+r_2\times a=b^2\times k$ .....(IV)

* Igualando (III) y (IV) : $r_1\times c+r_2\times a=r\times b$

TEOREMA 13 :

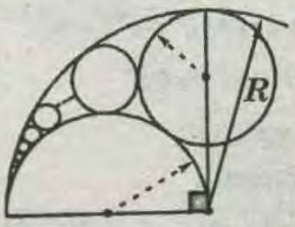
Si a y b son las longitudes de las flechas o sagitas.



$$r=\sqrt{2ab} \quad \wedge \quad R=a+b+\sqrt{2ab}$$

TEOREMA 14 :

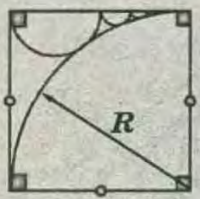
En "n" circunferencias, se cumple :



$$r_n=\frac{R}{n^2+2}$$

TEOREMA 15 :

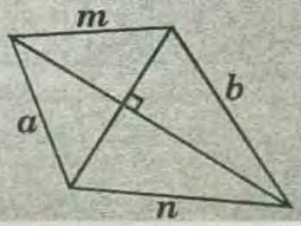
Existen «n» semicircunferencias , se cumple:



$$r_n=\frac{R}{2n(n+1)}$$

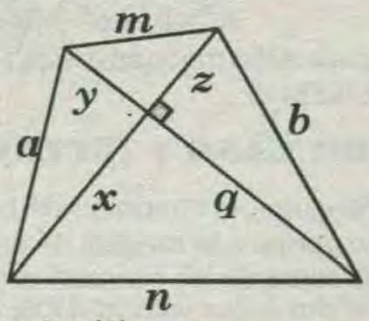
TEOREMA 16 :

En la figura , se cumple :



$$a^2+b^2=m^2+n^2$$

DEMOSTRACIÓN :



* Por el teorema de pitágoras :

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= x^2+y^2 \\ b^2 &= z^2+q^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= y^2+z^2 \\ n^2 &= x^2+q^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

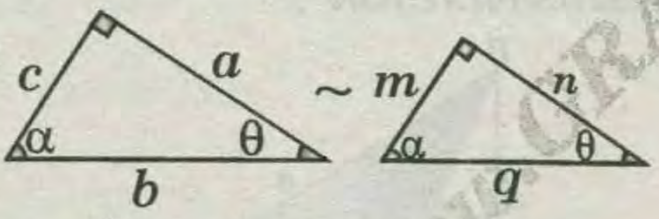
* De *(I)* tenemos : $a^2+b^2=(y^2+z^2)+(x^2+q^2)$

* De *(II)* en esta última expresión:

$$a^2+b^2=m^2+n^2$$

TEOREMA 17 : (DE DOSTOR)

En dos triángulos rectángulos semejantes .



$$b\times q=a\times n+c\times m$$

DEMOSTRACIÓN :

* Como estos dos triángulos rectángulos son semejantes, establecemos inmediatamente la siguiente serie de razones iguales.

$$\frac{a}{n}=\frac{b}{q}=\frac{c}{m}=k$$

* Hacemos :

$a=n\times k \Rightarrow a\times n=n^2\times k$ .....*(I)*

$c=m\times k \Rightarrow c\times m=m^2\times k$ .....*(II)*

$b=q\times k \Rightarrow b\times q=q^2\times k$ .....*(III)*

* Sumando *(I)* y *(II)*:

$$a\times n+c\times m=k\underbrace{(m^2+n^2)}_{q^2}=q^2\times k \ldots\ldots\ldots\ldots (IV)$$

* Igualando *(III)* y *(IV)* concluimos:

$$a\times n+c\times m=b\times q$$

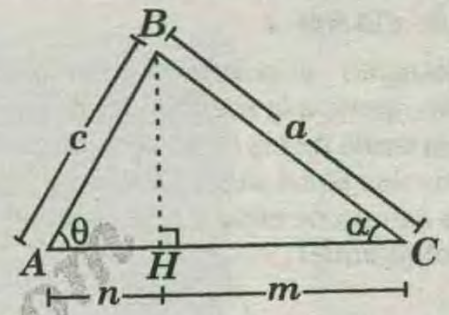
RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

TEOREMA DE LAS PROYECCIONES :

En todo triángulo , la diferencia de los cuadrados de las longitudes de dos lados es igual a la diferencia de los cuadrados de las longitudes de sus respectivas proyecciones ortogonales respecto al tecer lado .

PRIMER CASO :

TRIÁNGULO ACUTÁNGULO



* En la figura : $\theta < 90°$ y $\alpha < 90°$

$\overline{AH}$ y $\overline{HC}$: Proyecciones ortogonales de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respecto a $\overline{AC}$.

* Se cumple : $a^2-c^2=m^2-n^2$

DEMOSTRACIÓN :

* Por el Teorema de Pitágoras

$\triangle BHC$: $a^2=m^2+(BH)^2$

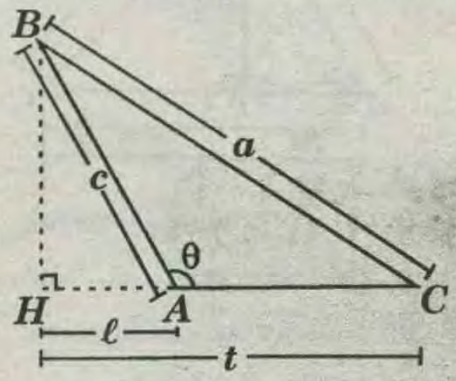
$\triangle ABH$: $c^2=n^2+(BH)^2$

* Restando *(I)* y *(II)* :

$$a^2-c^2=m^2-n^2$$

SEGUNDO CASO :

TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO



En la figura : $\theta > 90°$

$\overline{AH}$ y $\overline{HC}$: Proyecciones ortogonales de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respecto a $\overline{AC}$ respectivamente .

Rubiños.com

Se cumple : $\boxed{a^2-c^2=t^2-\ell^2}$

DEMOSTRACIÓN :

* Por el teorema de Pitágoras :

$\triangle BHC$: $a^2=t^2+(BH)^2$

$\triangle ABH$: $c^2=\ell^2+(BH)^2$

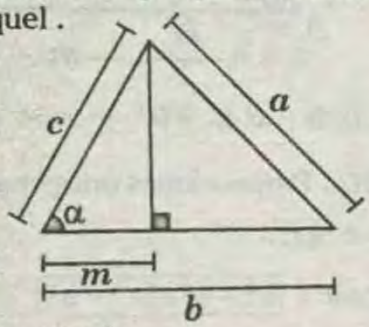
* Restando *(I)* y *(II)* :

$$a^2-c^2=t^2-\ell^2$$

TEOREMA DE EUCLIDES

PRIMER CASO :

En todo triángulo , el cuadrado de la longitud de un lado que se opone a la medida de un ángulo agudo, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados más el doble producto de las longitudes de uno de ellos y la proyección ortogonal del otro sobre aquel .

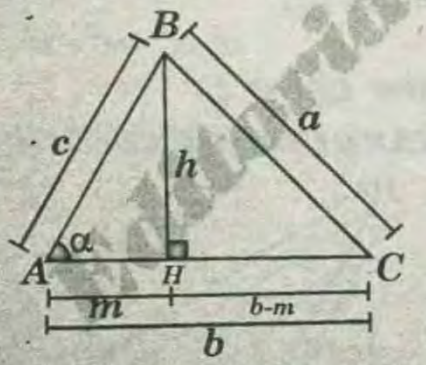


Si $0°<\alpha<90°$, se cumple

Expresión geométrica : $\boxed{a^2=b^2+c^2-2\times m\times b}$

Expresión trigonométrica : $\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha}$

DEMOSTRACIÓN :



* $\triangle BHC$; por el teorema de Pitágoras:

$$a^2=h^2+(b-m)^2 \quad \ldots\ldots(I)$$

* $\triangle BHA$; por el teorema de Pitágoras:

$$c^2=h^2+m^2 \quad \ldots\ldots(II)$$

*de *(I) – (II)* :

$$a^2-c^2=h^2+b^2+2bm+m^2-h^2-m^2$$

$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2+2bm$$

$\triangle BHA$: $\cos\alpha=\dfrac{m}{c}\Rightarrow m=c\cos\alpha$

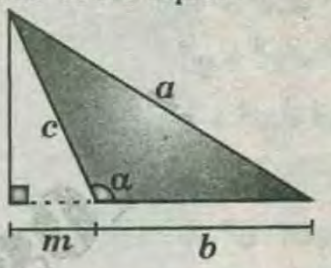
* Reemplazando en la expresión geométrica :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

Esta es la expresión trigonométrica , conocida como ***LEY DE COSENOS*** .

SEGUNDO CASO : (EUCLIDES)

En todo triángulo , el cuadrado de la longitud de un lado que se opone a la medida de un ángulo obtuso, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados más el doble producto de las longitudes de uno de dichos lados y la proyección ortogonal del otro sobre aquel .



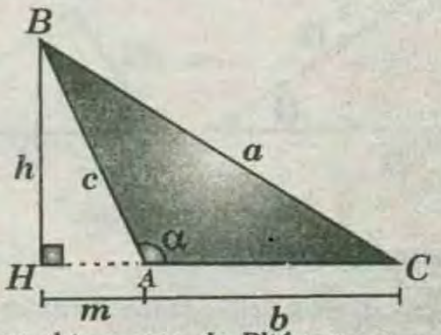
Si : $90°<\alpha<180°$, se cumple :

Expresión geométrica : $a^2=b^2+c^2-2mb$

Expresión trigonométrica :

$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha}$$

DEMOSTRACIÓN :



$\triangle BHC$; por el teorema de Pitágoras :

$$a^2=h^2+(b+m)^2 \quad \ldots\ldots(I)$$

$\triangle BHA$; por el teorema de Pitágoras: $c^2=h^2+m^2$ ...*(II)*

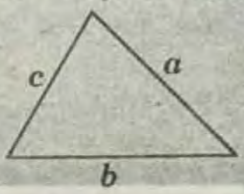
* *(I) – (II)* :

$$a^2-c^2=h^2+b^2-2bm+m^2-h^2-m^2$$

$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2+2bm$$

COMO RECONOCER LA NATURALEZA DE UN TRIÁNGULO

Siempre que : $a>b>c$ y exista el triángulo.



TRIÁNGULO RECTÁNGULO :

Cuando se cumpla que : $a^2=b^2+c^2$

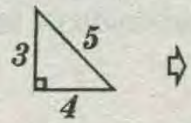
TRIÁNGULO ACUTÁNGULO :

Cuando se cumpla que : $a^2< b^2+c^2$

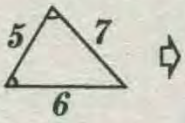
TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO :

Cuando se cumpla que : $a^2> b^2+c^2$

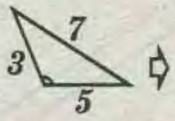
EJEMPLOS :



⇨ *Δ Rectángulo*



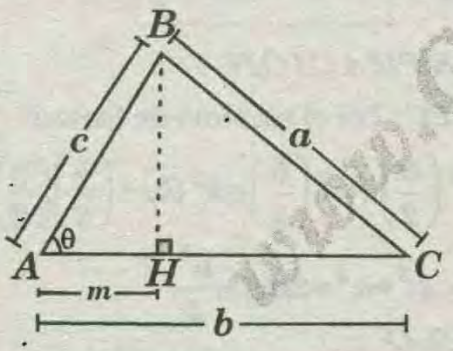
⇨ *Δ Acutángulo*



⇨ *Δ Obtusángulo*

TEOREMA DEL COSENO (O DE CARNOT) :

En todo triángulo , el cuadrado de la longitud de un lado es igual suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble de producto de las longitudes de dichos lados y el coseno de la medida del ángulo determinado por ellos .



DEMOSTRACIÓN :

* Por el teorema de Euclides :

$\Delta ABC : a^2=b^2+c^2-2bm$ .....(I)

* Pero en el $\triangle AHB; m=c.\cos\theta$

* Reemplazando en *(I)* :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\times\cos\theta$$

*En la figura , se cumple :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\times\cos\theta$$

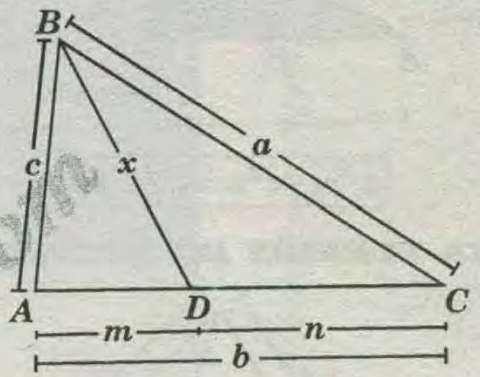
Donde : $0°<\theta<180°$

OBSERVACIÓN:

Si el cuadrado de la longitud del mayor lado de un triángulo es menor , igual o mayor a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, entonces dicho triángulo será acutángulo , rectángulo u obtusángulo respectivamente .

TEOREMA DE STEWART

En todo triángulo , la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados adyacentes a una ceviana interior multiplicados con las longitudes de los segmentos parciales opuestos a dichos lados determinados por la ceviana en su lado relativo es igual al producto del cuadrado de la longitud de dicha ceviana con la longitud de su lado relativo más el producto de las longitudes de dicho lado y el de los segmentos parciales .



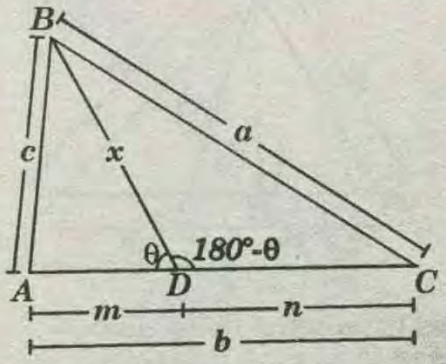
En la figura $\overline{BD}$: Ceviana interior del ΔABC relativa al lado AC .

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$: Lados adyacentes a la ceviana interior BD.

$\overline{AD}$ y $\overline{DC}$: segmentos determinados por la ceviana interior BD en el lado AC.

Se cumple : $\boxed{a^2m+c^2n=x^2b+bmn}$

DEMOSTRACIÓN :



* Por el teorema de cosenos :

ΔABD : $c^2=x^2+m^2-2xm\cos\theta$ .....(I)

ΔBDC : $a^2=x^2+n^2-2xn\cos(180°-\theta)$.....(II)

Como : $\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$

* Reemplazando y multiplicando *(I)* y *(II)* por n y m respectivamente se tiene :

www.GRATIS2.com

$c^2n=x^2n+m^2n-2xmn\times\cos\theta$ .....(III)

$a^2m=x^2m+n^2m-2xmn(-\cos\theta)$ .....(IV)

* Sumando (III) y (IV) :

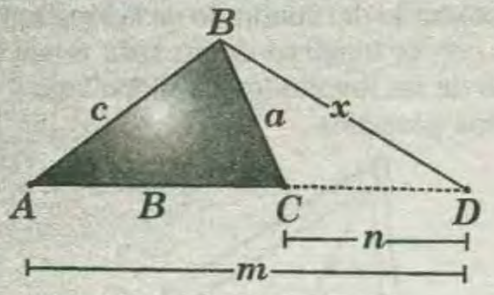
$$c^2n+a^2m=x^2(m+n)+mn(m+n)$$

* En la figura: $m+n=b$

$$\Rightarrow c^2n+a^2m=x^2b+bmn$$

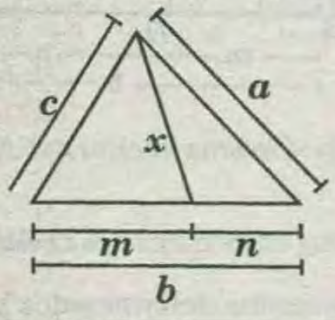
NOTA :

Cuando la ceviana es exterior se cumple :



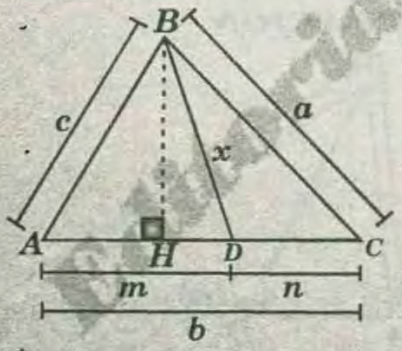
$$\boxed{a^2m-c^2n=x^2b-bmn}$$

OTRA VERSIÓN DE STEWART :



$$\boxed{x^2b=a^2m+c^2n-mnb}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Aplicamos el teorema de Euclides :

$\Delta ABD: c^2=m^2+x^2-2m(HD)$ .....(I)

$\Delta BDC: a^2=n^2+x^2+2n(HD)$ .....(II)

* Sumando (I) y (II):

$$c^2n=m^2n+x^2n-2mn(HD)$$

$$a^2m=mn^2+mx^2-2mn(HD)$$

$$\Rightarrow a^2m+c^2n=mn\underbrace{(m+n)}_{b}+x^2\underbrace{(m+n)}_{b}$$

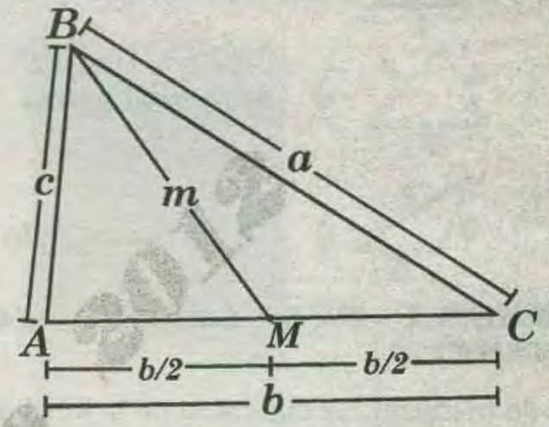
$$\Rightarrow a^2m+c^2n=mnb+x^2b$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2b=a^2m+c^2n-mnb}$$

TEOREMA DE LA MEDIANA

TEOREMA DE APOLONIO :

En todo triángulo , la suma de los cuadrados de las longitudes de dos lados es igual al doble del cuadrado de la longitud de la mediana relativa al tercer lado más la mitad del cuadrado de la longitud de dicho tercer lado .



En la figura , $\overline{BM}$: Mediana relativa a $\overline{AC}$ $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$: lados adyacentes a la mediana BM .

Se cumple : $\boxed{c^2+a^2=2m^2+\frac{b^2}{2}}$

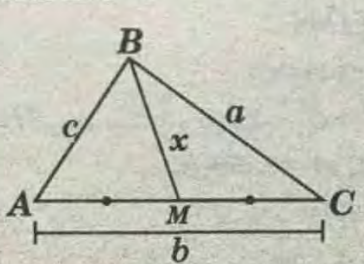
DEMOSTRACIÓN :

* Del ΔABC : Por el teorema de Stewart

$$c^2\left(\frac{b}{2}\right)+a^2\left(\frac{b}{2}\right)=x^2(b)+\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)b$$

$$\Rightarrow c^2+a^2=2m^2+\frac{b^2}{2}$$

EJEMPLO :



$$\boxed{a^2+c^2=2x^2+\frac{b^2}{2}}$$

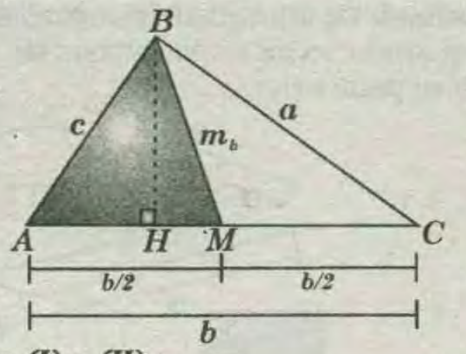
DEMOSTRACIÓN :

* Aplicando el teorema de Euclides :

$$\Delta ABM: c^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+m_b^2-2\left(\frac{b}{2}\right)(HM) \text{ .....(I)}$$

$$\Delta BMC: a^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+m_b^2+2\left(\frac{b}{2}\right)(HM) \text{ .....(II)}$$

Material publicitario

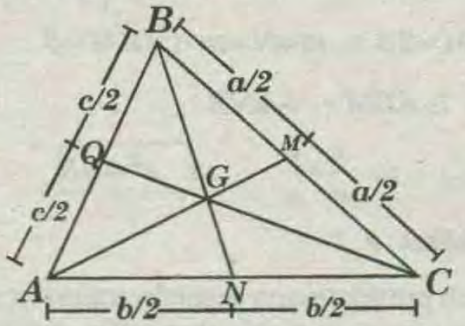


* Sumando *(I)* y *(II)* :

$$\boxed{a^2+c^2=\frac{b^2}{2}+2m_b^2}$$

TEOREMA DE BOOTH

En todo triángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de sus tres medianas es igual a los tres cuartos de la suma de los cuadrados de las longitudes de sus tres lados .



$\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CQ}$: medianas del $\triangle ABC$.

Sea : $BC=a$, $AC=b$ y $AB=c$.

Se cumple : $\boxed{AM^2+BN^2+CQ^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)}$

DEMOSTRACIÓN :

* Del teorema de la mediana se cumple :

$$c^2+b^2=2(AM^2)+\frac{a^2}{2} \quad \text{.....(I)}$$

$$c^2+a^2=2(BN^2)+\frac{b^2}{2} \quad \text{.....(II)}$$

$$a^2+b^2=2(CQ^2)+\frac{c^2}{2} \quad \text{.....(III)}$$

* Sumando *(I)*, *(II)* y *(III)* se obtiene :

$$2(a^2+b^2+c^2)=2(AM^2+BN^2+CQ^2)+\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

$$\Rightarrow AM^2+BN^2+CQ^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

NOTA :

Como *G*: baricentro

$$\Rightarrow AG=\frac{2}{3}AM;\ BG=\frac{2}{3}BN \text{ y } CG=\frac{2}{3}CQ$$

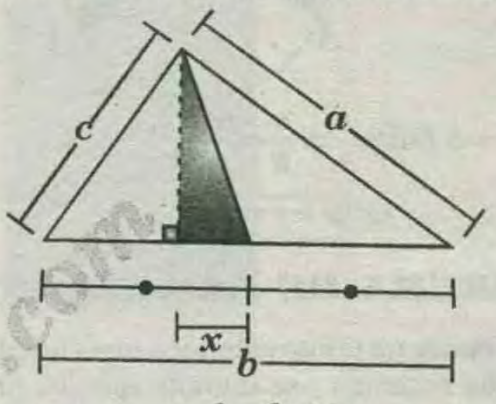
* Reemplazando en el teorema anterior :

$$\boxed{AG^2+BG^2+CG^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)}$$

(*2do* teorema de Booth)

TEOREMA DE LA PROYECCIÓN DE LA MEDIANA

En todo triángulo se cumple que el doble producto de las longitudes de la proyección ortogonal de una de sus medianas sobre su lado relativo y dicho lado, es igual a la diferencia de cuadrados de las longitudes de los lados adyacentes a dicha mediana.



$$a^2-c^2=2bx$$

DEMOSTRACIÓN :

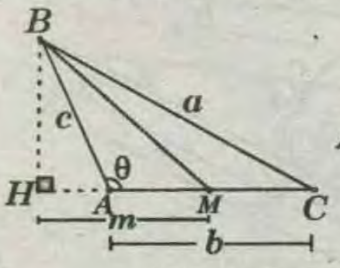
* En las ecuaciones del teorema de la mediana, restamos *(II)*– *(I)*; obtenemos :

$$a^2-c^2=2b\underbrace{(HM)}_{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2-c^2=2bx}$$

NOTA :

En el caso de que el triángulo sea obtusángulo, también se cumple el teorema anterior .



$\theta=90°$

$AM=MC$

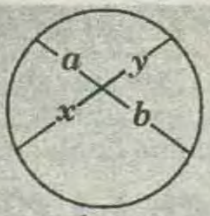
$$\boxed{a^2-c^2=2mb}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA DE LAS CUERDAS :

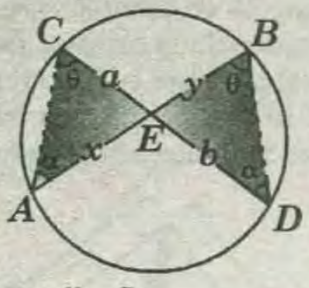
Al trazar en una circunferencia dos cuerdas secantes en un punto interior , se cumple , que el producto de las longitudes de los segmentos determinados en cada cuerda son iguales .

www.GRATIS2.com



$a \times b = x \times y$

DEMOSTRACIÓN :

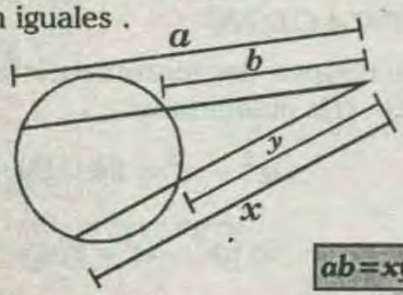


$\triangle AEC \sim \triangle DEB: \Rightarrow \dfrac{x}{b}=\dfrac{a}{y}$

$\Rightarrow \boxed{x \times y = a \times b}$

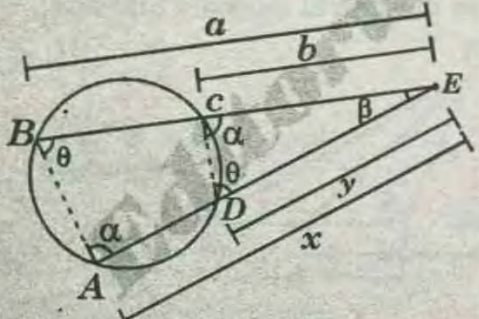
TEOREMA DE LAS SECANTES

Al trazar desde un punto exterior a una circunferencia dos rectas secantes , se cumple que los productos de las longitudes de un segmento secante y su parte externa son iguales .



$\boxed{ab = xy}$

DEMOSTRACIÓN :



* Cuadrilátero $ABCD$ inscrito , entonces :

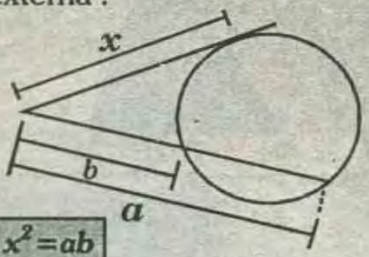
$m\sphericalangle A = m\sphericalangle ECD = \alpha \wedge m\sphericalangle B = m\sphericalangle EDC = \theta$

* Luego: $\triangle ABE \sim \triangle CDE$

$\Rightarrow \dfrac{x}{b}=\dfrac{a}{y} \Rightarrow \boxed{x\,y = a\,b}$

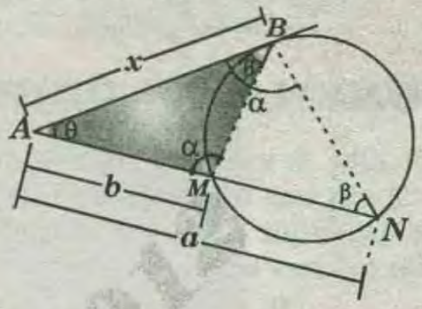
TEOREMA DE LA TANGENTE

Al trazar desde un punto exterior a una circunferencia una recta tangente y una recta secante , se cumple, que el cuadrado de la longitud del segmento tangente es igual al producto de las longitudes del segmento secante y su parte externa .



$\boxed{x^2 = ab}$

DEMOSTRACIÓN :



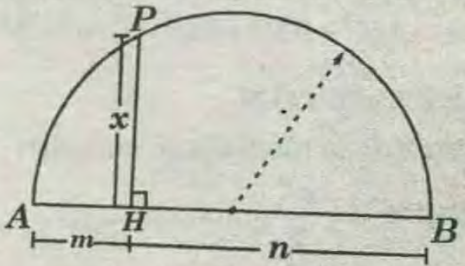
* Si $m\overset{\frown}{BM} = 2\beta \Rightarrow m\sphericalangle N = m\sphericalangle ABM = \beta$

* Luego : $\triangle ABM \sim \triangle ANB$

$\Rightarrow \dfrac{x}{a}=\dfrac{b}{x} \Rightarrow \boxed{x^2 = ab}$

TEOREMA I :

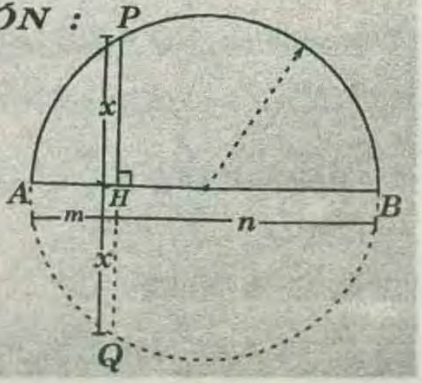
Si desde un punto de una semicircunferencia se traza un segmento perpendicular a su diámetro , se cumple que el cuadrado de la longitud de dicho segmento es igual al producto de las longitudes de los segmentos determinados en el diámetro .



En la figura , $\overline{AB}$ es diámetro y $\overline{PH} \perp \overline{AB}$; $\overline{AH}$ y $\overline{HB}$ segmentos determinados por $\overline{PH}$ en el diámetro $\overline{AB}$.

* Se cumple : $x^2 = mn$

DEMOSTRACIÓN :



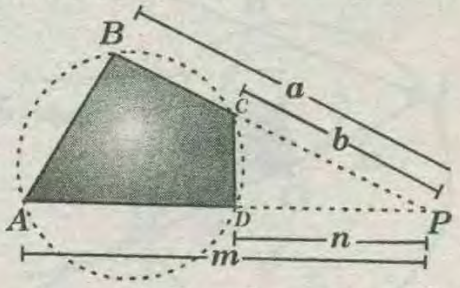
* Se completa la circunferencia y se prolonga $\overline{PH}$ hasta Q.

* Por simetría en la circunferencia : $PH=HQ=x$

Teorema de las cuerdas : $x^2=mn$

TEOREMA II :

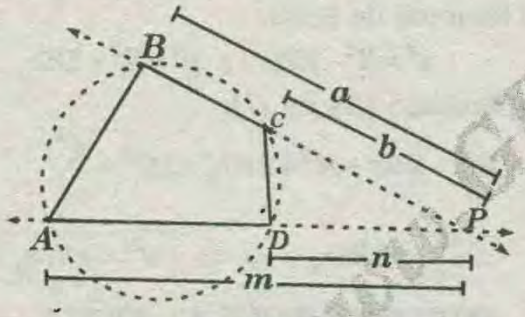
Al prolongar dos lados opuestos de un cuadrilátero inscrito o inscriptible de modo que se intersequen, se cumple , que el producto de las longitudes de los segmentos determinados por el punto de intersección en dichos lados son iguales .



En la figura, $\square ABCD$: inscrito o inscriptible. P es el punto de intersección de las prolongaciones de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$.

Se cumple : $ab=mn$

DEMOSTRACIÓN :

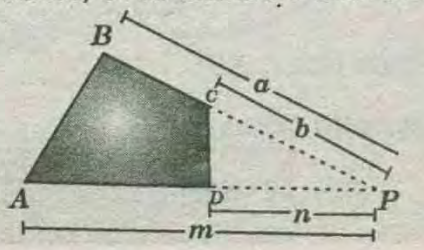


* Como el $\square ABCD$ es inscrito o inscriptible , al prolongar dos lados opuestos, PCB y PDA serán secantes a la circunferencia circunscrita a dicho cuadrilátero .

* Por teorema de las secantes : $ab=mn$

TEOREMA III :

Si al prolongar dos lados opuestos de un cuadrilátero convexo hasta que se intersecan , se cumple que el producto de las longitudes de los segmentos determinados por este punto en dichos lados son iguales; entonces, el cuadrilátero será inscriptible .



En la figura P, es el punto de intersección de dos lados opuestos .

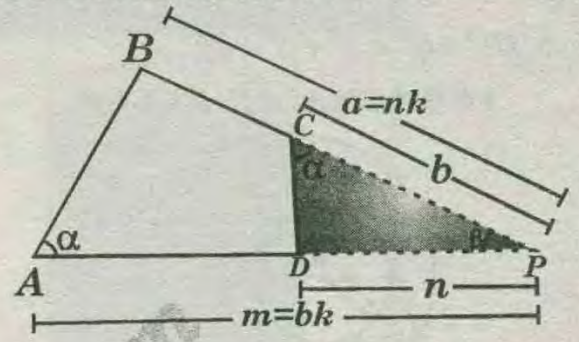
$\overline{PB}$ y $\overline{PC}$: Segmentos determinados por P en el lado BC.

$\overline{PA}$ y $\overline{PD}$: Segmentos determinados por P en lado AD.

Si : $ab=mn$

$\Rightarrow \square ABC\Delta$: inscriptible

DEMOSTRACIÓN :



* En la figura , los triángulos APB y CPD tienen en su vértice P un ángulo de igual medida. De la condición $ab=mn$, se tiene

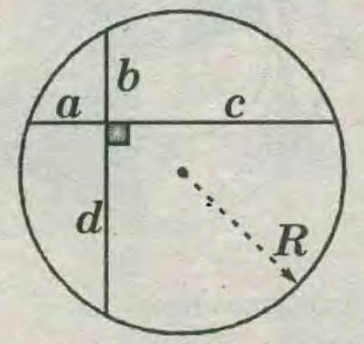
$$\frac{a}{m}=\frac{n}{b} \Rightarrow a=n\times k;\ m=b\times k$$

* Por el segundo caso de semejanza :

$\Delta APB \sim \Delta CPD \rightarrow m\sphericalangle BAP=m\sphericalangle DCP=\alpha$

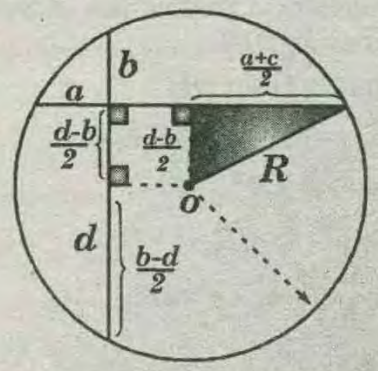
$\square ABC\Delta$: inscriptible

TEOREMA DE FAURE



$$4R^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$

DEMOSTRACIÓN :



* En el triángulo rectángulo sombreado , por el teorema de Pitágoras :

$$R^2=\left[\frac{a+c}{2}\right]^2+\left[\frac{d-b}{2}\right]^2$$

$$\Rightarrow 4R^2=(a+c)^2+(d-b)^2$$

$$\Rightarrow 4R^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ac-2bd \quad .....(I)$$

* Pero por el teorema de las cuerdas :

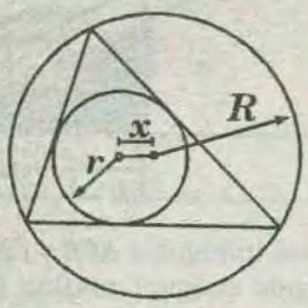
$$a\times c=b\times d \quad .....(II)$$

* Reemplazando *(II)* en *(I)*:

$$4R^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ac-2ac$$

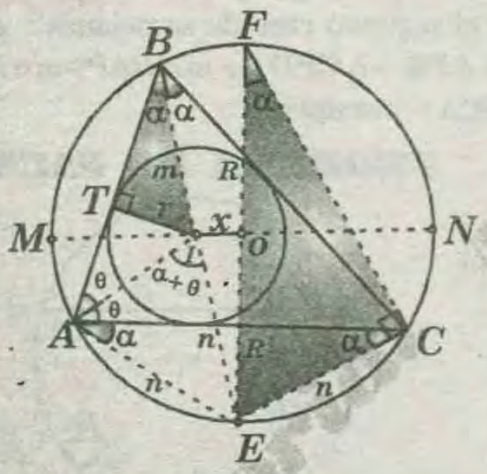
$$\Rightarrow 4R^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$

TEOREMA DE EULER



$$x^2=R(R-2r)$$

DEMOSTRACIÓN :



* En el gráfico notamos que:

$$\left.\begin{array}{l} MI=R-x \\ IN=R+x \end{array}\right\} \quad .....(I)$$

* En la circunferencia mayor, por el teorema de las cuerdas : $m\times n=MI\times IN$ .....*(II)*

* Reemplazando *(I)* en *(II)* :

$$m\times n=(R-x)\times(R+x)$$

$$\Rightarrow m\times n=R^2-x^2 \quad .....(III)$$

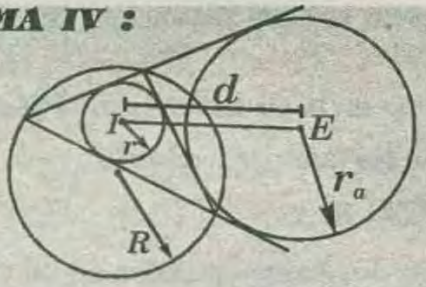
* Por último en el $\triangle BTI\sim\triangle FCE$:

$$\frac{r}{n}=\frac{m}{2R}\Rightarrow m\times n=2Rr \quad .....(IV)$$

* De *(III)* y *(IV)*:

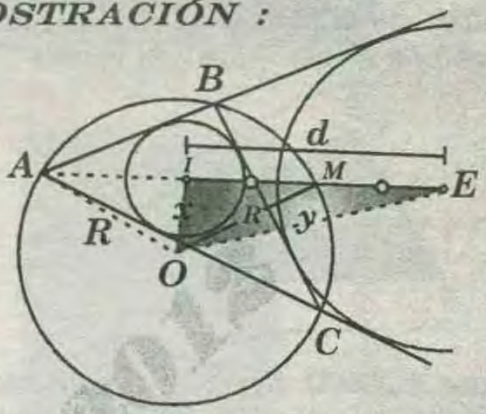
$$2Rr=R^2-x^2\Rightarrow x^2=R^2-2Rr\Rightarrow x^2=R(R-2r)$$

TEOREMA IV :



$$d^2=4R(r_a-r)$$

DEMOSTRACIÓN :



* Por teoría *"M"* es punto medio de $\overline{IE}$.

* En el $\triangle OIE$, por el teorema de la mediana:

$$x^2+y^2=2R^2+\frac{d^2}{2} \quad .....(I)$$

* Por el teorema de Euler:

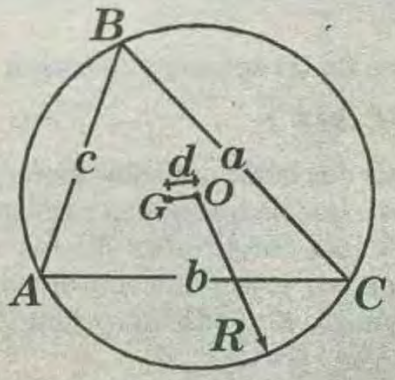
$$x^2=R^2-2Rr \quad ; \quad y^2=R^2+2Rr_a$$

* Reemplazando *(II)* en *(I)*:

$$R^2-2Rr+R^2+2Rr_a=2R^2+\frac{d^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{2}=2R(r_a-r)\Rightarrow \boxed{d^2=4R(r_a-r)}$$

TEOREMA DEL METACENTRO

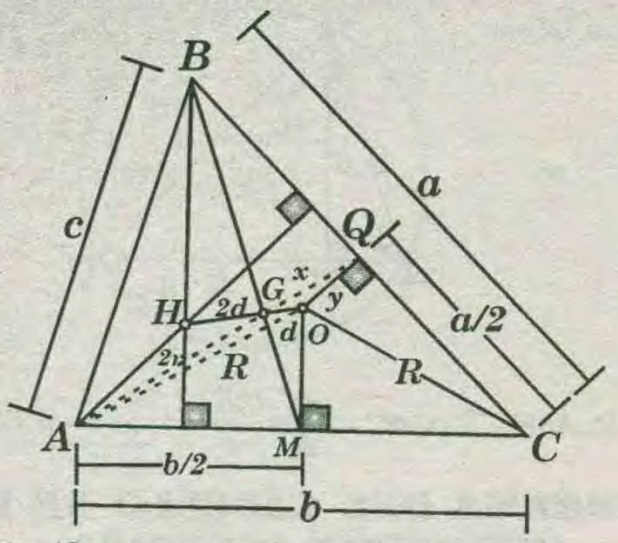


* G ♦ Baricentro del $\triangle ABC$.

* O ♦ Circuncentro del $\triangle ABC$.

$$\boxed{d^2=R^2-\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{9}\right)}$$

DEMOSTRACIÓN :



En el gráfico :

"H" ♦ ortocentro; *"G"* ♦ baricentro ; *"O"* ♦ circuncentro:

* Por puntos notables , sabemos que :

$$HG=2\times GO=2d$$

* Aplicamos el teorema de Stewart ; en el $\triangle AOQ$:

$$d^2(3x)=y^2\times 2x+R^2\times x-x\times 2x\times 3x$$

$$\Rightarrow 3d^2=2y^2+R^2-6x^2 \quad \ldots\ldots (I)$$

* Por el teorema de Pitágoras en el $\triangle OQC$:

$$y^2=R^2-a^2/4 \quad \ldots\ldots (II)$$

* Reemplazamos *(II)* en *(I)*:

$$3d^2=2R^2-a^2/2+R^2-6x^2$$

$$\Rightarrow 3d^2=3R^2-\frac{a^2}{2}-6x^2 \quad \ldots\ldots (III)$$

* Por teorema de mediana ; en el $\triangle ABC$:

$$b^2+c^2=2(3x)^2+\frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow 6x^2=\frac{b^2+c^2}{3}-\frac{a^2}{6} \quad \ldots\ldots (IV)$$

* Reemplazando *(IV)* en *(III)*:

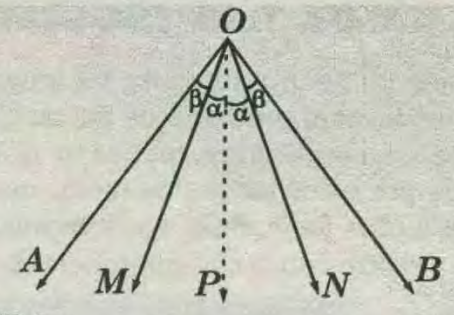
$$3d^2=3R^2-\frac{a^2}{2}-\left(\frac{b^2+c^2}{3}\right)+\frac{a^2}{6}$$

* Reduciendo al máximo :

$$d^2=R^2-\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{9}\right)$$

RECTAS ISOGONALES

Son dos rayos coplanares a un ángulo que tienen como origen el vértice del ángulo y que son simétricos respecto a la bisectriz de dicho ángulo ; es decir, forman con los lados del ángulos dado, ángulos de igual medida.



De la figura :

$\overline{OP}$ bisectriz del $\sphericalangle AOB$

$\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$: rayos isogonales respecto del $\sphericalangle AOB$.

Se cumple por definición :

$$m\sphericalangle AOM=m\sphericalangle BON$$

La bisectriz del ángulo es considerado una autoisogonal.

Donde además : $\overrightarrow{OM}$: conjugado isogonal de $\overrightarrow{ON}$ respecto al $\sphericalangle AOB$.

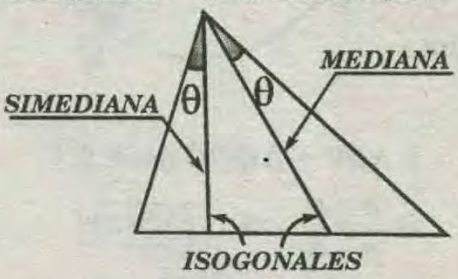
$\overrightarrow{ON}$: conjugado isogonal de $\overrightarrow{OM}$ respecto al $\sphericalangle AOB$.

NOTA :

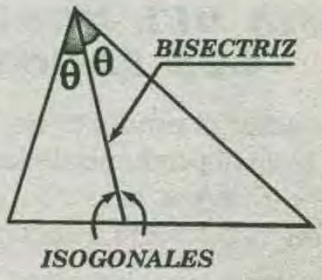
En la figura $\overrightarrow{OP}$: conjugado isogonal de $\overrightarrow{OP}$ respecto al $\sphericalangle AOB$. Por ello , toda bisectriz de un ángulo es conjugada isagonal de si misma respecto a dicho ángulo (línea autoisogonal).

ISOGONALES DE ALGUNAS LÍNEAS NOTABLES

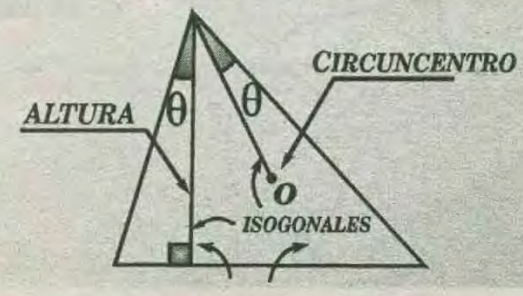
I)



II)

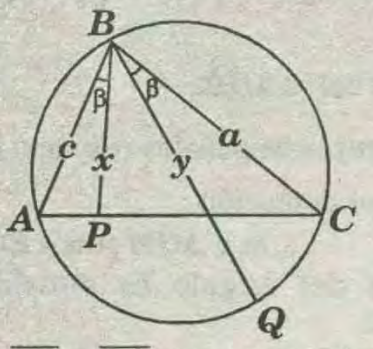


III)



TEOREMA DE LAS ISOGONALES

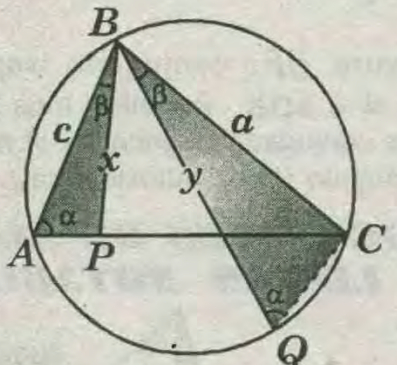
En todo triángulo , el producto de las longitudes de dos lados , es igual al producto de las longitudes de los segmentos isogonales respecto del ángulo determinado por estos lados , de modo que uno de dichos segmentos isogonales se determina con el tercer lado y el otro con la circunferencia circunscrita al triángulo.



En la figura $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ son segmentos isogonales respecto del $\sphericalangle ABC$.

Se cumple : $ca=xy$

DEMOSTRACIÓN :



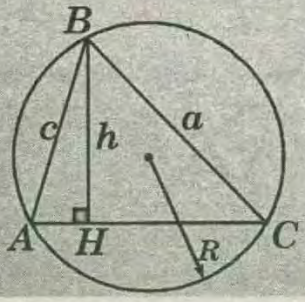
* De la figura :

$\triangle ABP \sim \triangle QBC$ *(A.A.A.)*

$$\Rightarrow \frac{c}{y}=\frac{x}{a} \Rightarrow \boxed{ca=xy}$$

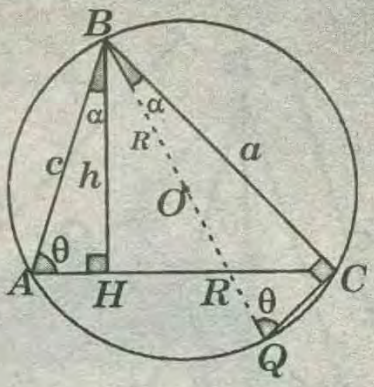
TEOREMA DEL PRODUCTO DE LOS LADOS

En todo triángulo, el producto de las longitudes de los lados es igual al producto de las longitudes de la altura relativa al tercer lado con el diámetro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo .



$ac=h(2R)$

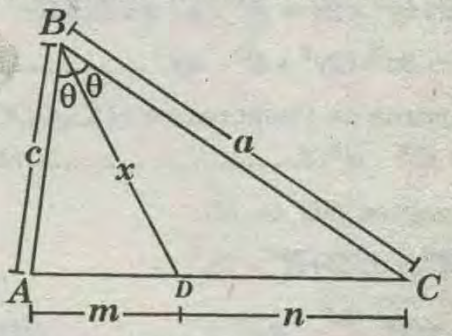
DEMOSTRACIÓN :



$$\triangle ABH \sim \triangle QBC \Rightarrow \frac{a}{h}=\frac{(2R)}{c} \Rightarrow \boxed{a\times c=h(2R)}$$

TEOREMA DEL CÁLCULO DE LA BISECTRIZ INTERIOR

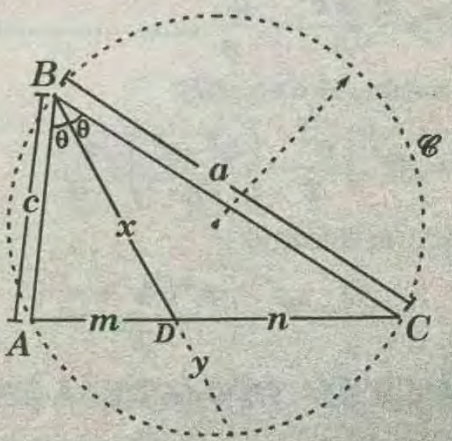
En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de la bisectriz interior es igual a la diferencia de los productos de las longitudes de los lados adyacentes a dicha bisectriz y los segmentos determinados por dicha bisectriz en el lado al cual es relativo .



En la figura , $\overline{BD}$: Bisectriz interior del $\triangle ABC$ relativa al lado AC .

Se cumple : $x^2=ca-mn$

DEMOSTRACIÓN :



* Se traza la circunferencia $\mathscr{C}$, circunscrita al $\triangle ABC$.

* Por el teorema de las isogonales en el $\triangle ABC$.

$ca=x(x+y) \Rightarrow ca=x^2+xy$ ..... *(I)*

* Del teorema de las cuerdas en $\mathscr{C}$: $xy=mn$

* Reemplazando *(II)* en *(I)*:

$$ca = x^2+mn \Rightarrow x^2=ca-mn$$

NOTA :

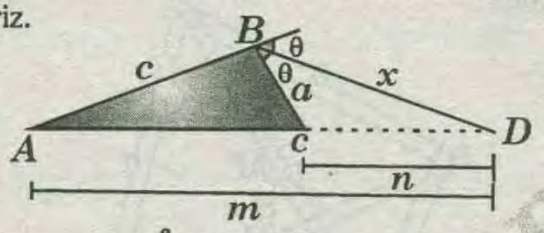
Otra manera de expresar el cálculo de la longitud de la bisectriz se desprende del teorema de Stewart. El cuadrado de la longitud de una bisectriz (W_b) se expresa como :

$$\boxed{W_b^2=c\times a\left(1-\left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right)}$$

donde $m=\dfrac{c\times b}{c+a}$; $n=\dfrac{a\times b}{c+a}$; $x=W_b$

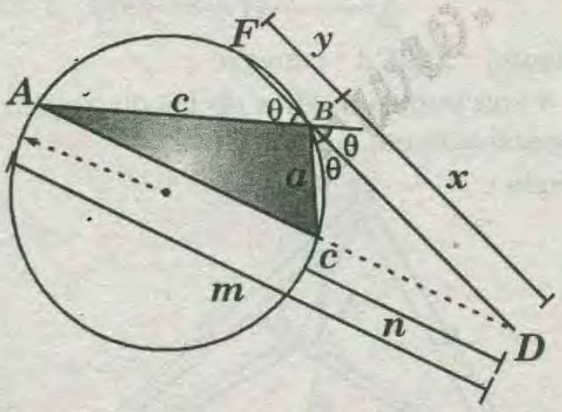
TEOREMA DE LA BISECTRIZ EXTERIOR EN EL TRIÁNGULO

En todo triángulo , el cuadrado de las longitudes de una bisectriz exterior (cuyos lados adyacentes a la bisectriz sean diferentes en longitud) es igual a la diferencia de productos de las longitudes de los segmentos determinados por la bisectriz en el lado al cual es relativa y los lados adyacentes a dicha bisectriz.



$$x^2=mn-ac$$

DEMOSTRACIÓN :



* Por el teorema de las rectas isogonales :

$$ac=xy \text{ ..... } (I)$$

* Por el teorema de las secantes :

$$mn=x(x+y) \Rightarrow mn=x^2+xy \text{ .....} (II)$$

* Reemplazando *(II)* en *(I)* :

$$mn=x^2+ac \Rightarrow x^2=mn-ac$$

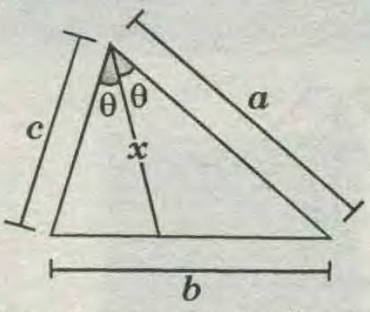
NOTA :

También de manera análoga al cálculo de la bisectriz interior, aplicando el teorema de Stewart. Para el caso de la ceviana exterior , el cuadrado de la longitud de la bisecteriz W_b se expresa como .

$$\boxed{W_b^2=c\times a\left(\frac{b^2}{(c-a)^2}-1\right)}$$

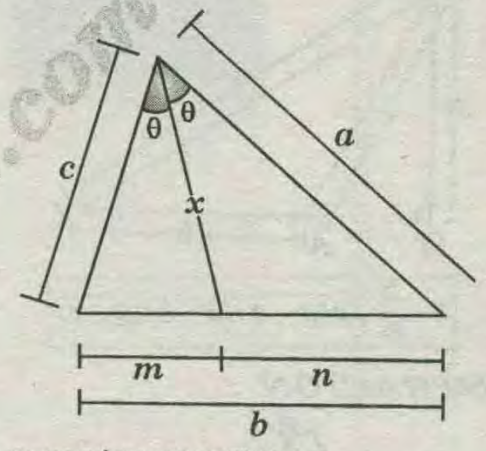
Donde: $p=\dfrac{bc}{c-a}$; $q=\dfrac{ab}{c-a}$; $y=W_b$

TEOREMA V :



$$\boxed{x=\frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Sabemos por teorema que :

$$x^2=ac-mn \text{ ..... } (I)$$

* Pero : $\left.m=\dfrac{bc}{a+c} \wedge n=\dfrac{ab}{a+c}\right\}$ .....(II)

* Reemplazando *(II)* en *(I)* :

$$x^2=ac-\left(\frac{bc}{a+c}\right)\left(\frac{ab}{a+c}\right)$$

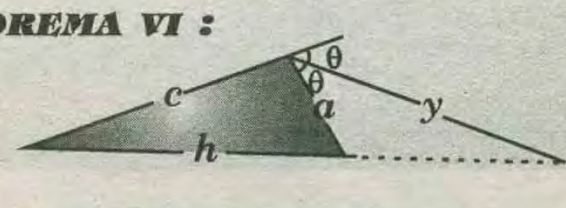
$$\Rightarrow x^2=ac-\left(\frac{bc}{a+c}\right)\left(\frac{ab}{a+c}\right) \Rightarrow x^2=ac\left[1-\frac{b^2}{(a+c)^2}\right]$$

$$\Rightarrow x^2=ac\left[\frac{(a+c)^2-b^2}{(a+c)^2}\right] \Rightarrow x^2=ac\left[\frac{(a+b+c)\times(a+c-b)}{(a+c)^2}\right]$$

$$\Rightarrow x^2=ac\left[\frac{(2p)(2p-2b)}{(a+c)^2}\right] \Rightarrow x^2=\frac{4acp(p-b)}{(a+c)^2}$$

$$\Rightarrow x^2=\sqrt{\frac{4acp(p-b)}{(a+c)^2}} \Rightarrow \boxed{x=\frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}}$$

TEOREMA VI :

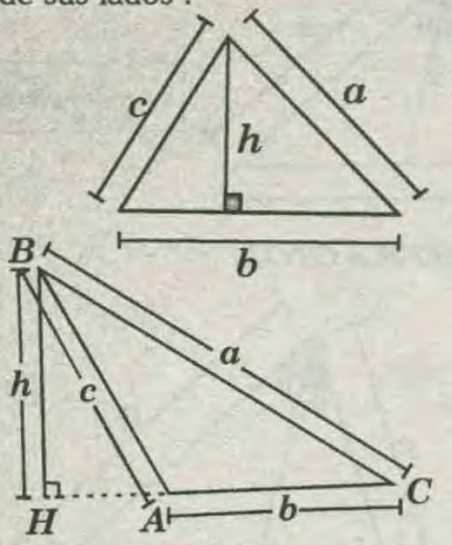


www.GRATIS2.com

$$y=\frac{2}{c-a}\sqrt{ac(p-a)(p-c)}$$

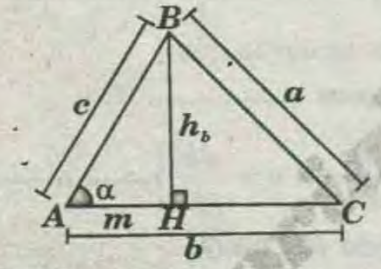
TEOREMA DE HERÓN DE ALEJANDRÍA

En todo triángulo , la longitud de una altura , es igual al doble de la inversa de la longitud del lado al cual es relativa multiplicado con la raíz cuadrada del producto del semiperímetro del triángulo con la diferencia de dicho semiperímetro y la longitud de cada uno de sus lados .



$$h=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

DEMOSTRACIÓN :



$\triangle AHB$: $h_b^2=c^2-m^2$ ..... *(I)*

* Por el teorema de Euclides ; en el $\triangle ABC$:

$$a^2=b^2+c^2-2bm$$

* Despejando m tenemos:

$$m=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b} \quad .....(II)$$

* Reemplazando *(II)* en *(I)*:

$$h_b^2=c^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)^2 \Rightarrow h_b^2=\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2}$$

$$h_b^2=\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4b^2}$$

$$\Rightarrow h_b^2=\frac{\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b-c)^2\right)}{4b^2}$$

$$\Rightarrow h_b^2=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)}{4b^2}$$

$$\Rightarrow h_b^2=\frac{2p(2p-2a)(2p-2c)(2p-2b)}{4b^2}$$

$$\Rightarrow h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

* Análogamente se demuestra que :

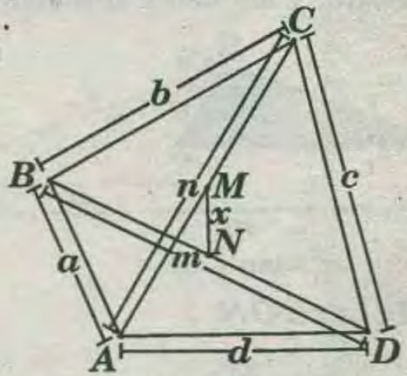
$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN CUADRILÁTEROS

TEOREMA DE EULER :

I) CUADRILÁTERO CONVEXO :

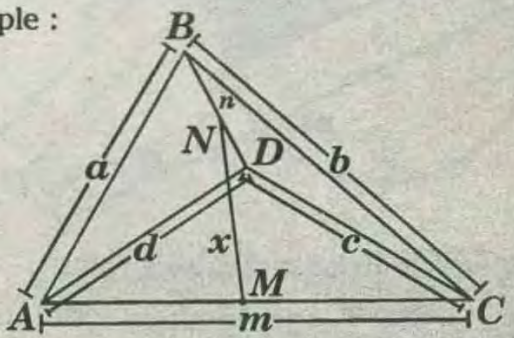
En todo cuadrilátero , la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus diagonales más cuatro veces el cuadrado de la longitud del segmento que une los puntos medios de dichas diagonales .



En la figura, $\square ABCD$: convexo .

Si M y N son puntos medios de las diagonales AC y BD respectivamente.

Se cumple :



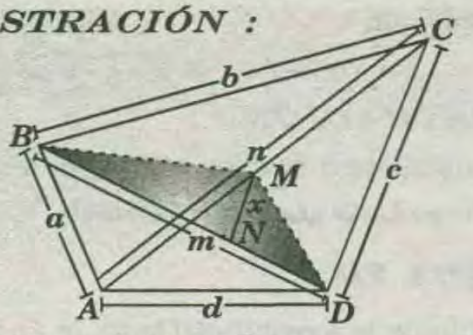
$$a^2+b^2+c^2+d^2=m^2+n^2+4x^2$$

En la figura , $\diamondsuit ABCD$: no convexo.

Si M y N son puntos medios de las diagonales AC y BD respectivamente .

Se cumple : $a^2+b^2+c^2+d^2=m^2+n^2+4x^2$

DEMOSTRACIÓN :



* Por el teorema de la mediana :

$\triangle ABC: a^2+b^2=2(BM)^2+\frac{n^2}{2}$ .....(I)

$\triangle ACD: c^2+d^2=2(DM)^2+\frac{n^2}{2}$ .....(II)

* Sumando *(I)* y *(II)* :

$a^2+b^2+c^2+d^2=2((MB)^2+(DM^2))+n^2$ .....(III)

* Por teorema de la mediana :

$\triangle BMD: (BM)^2+(DM)^2=2x^2+\frac{m^2}{2}$ .....(IV)

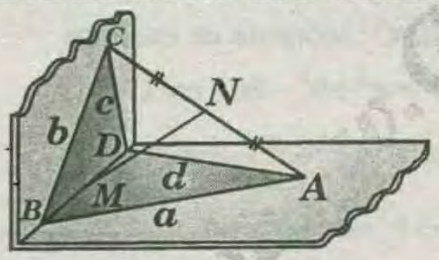
* Reemplazando *(IV)* en *(III)* :

$$a^2+b^2+c^2+d^2=2(2x^2+\frac{m^2}{2})+n^2$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2+b^2+c^2+d^2=m^2+n^2+4x^2}$$

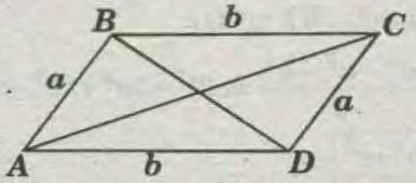
* Para el caso de cuadrilátero no convexo, la demostración es análoga .

II) CUADRILÁTERO ALABEADO :



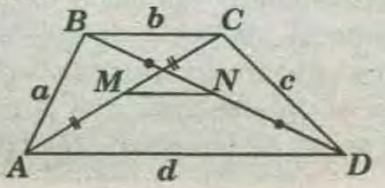
$$\boxed{a^2+b^2+c^2+d^2=AC^2+BD^2+4MN^2}$$

III) ROMBOIDE :



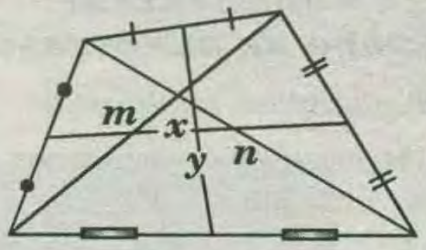
$$\boxed{2(a^2+b^2)=AC^2+BD^2}$$

IV) TRAPECIO :



$$\boxed{a^2+c^2+2bd=AC^2+BD^2}$$

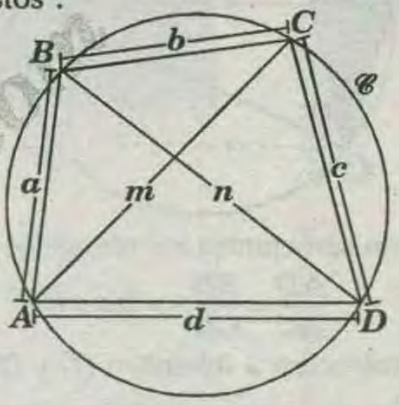
TEOREMA DE ROCHAT :



$$\boxed{m^2+n^2=2(x^2+y^2)}$$

TEOREMA DE PTOLOMEO

En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible, el producto de las longitudes de sus diagonales es igual a la suma de los productos de las longitudes de sus lados opuestos .

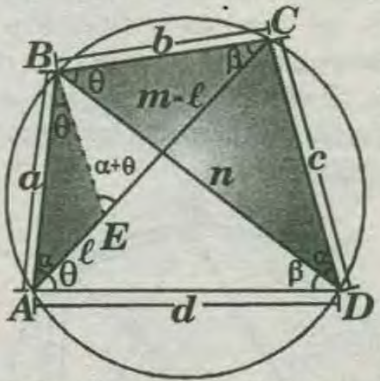


$\square ABCD$: inscrito en la circunferencia $\mathscr{C}$

$AB=a;\ BC=b\ ;\ CD=c\ ;\ AD=d\ \ AC=m$ y $BD=n$

Se cumple: $mn=ac+bd$

DEMOSTRACIÓN :



* Trazamos $\overline{BE}$; tal que $m\sphericalangle ABE=m\sphericalangle DBC=\theta$

* Si $\triangle AE=\ell \Rightarrow EC=m-\ell$

$\triangle ABE \sim \triangle DBC$ *(A.A.A.)*

$\frac{\ell}{c}=\frac{a}{n} \Rightarrow ac=n\times\ell$ .....(I)

$\triangle EBC \sim \triangle ABD$ *(A.A.A.)*

$\frac{b}{n}=\frac{m-\ell}{d} \Rightarrow bd=n(m-\ell)$ .....(II)

WWW.GRATIS2.COM

* Sumando *(I)* y *(II)* :

$$ac+bd=N\ell+nm-N\ell$$

$$\Rightarrow \boxed{mn=ac+bd}$$

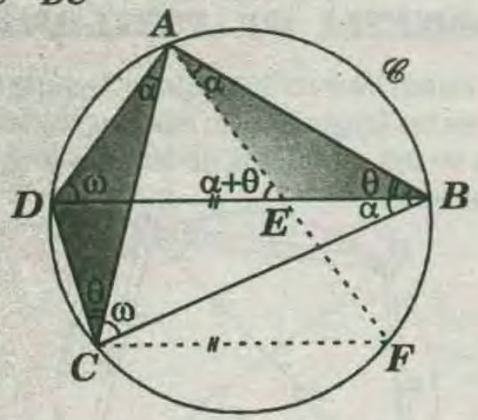
OTRO MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN :

Sea *ABCD* el cuadrilátero inscrito en $\mathscr{C}$.

Trazamos el segmento *CF* de manera que $\overline{CF}\ //\ \overline{DB}$.

Entonces los triángulos *ABE* y *ACD* son semejantes y

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{DC}\rightarrow AB\times DC=AC\times BE\ .....(I)$$



* También son semejantes los triángulos *ADE* y *ACB*

$$\frac{AD}{AC}=\frac{ED}{CB}\rightarrow DA\times CB$$

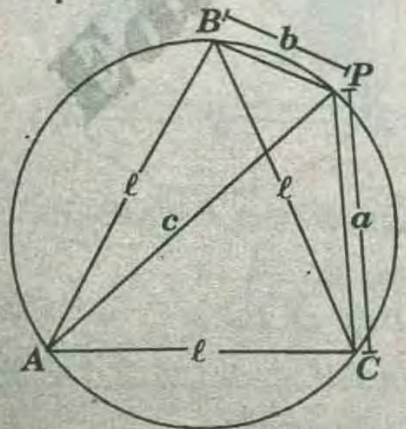
* Sumando miembro a miembro *(I)* y *(II)* :

$$AB\times DC+DA\times CB=AC(BE+ED)=AC\times BD$$

$$\Rightarrow AC\times BD=AB\times CD+AD\times BC$$

TEOREMA DE CHADÚ

En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia o inscriptible , tal que tres vértices son los vértices de un triángulo equilátero , entonces la distancia del cuarto vértice al vértice más alejado es igual a la suma de las distancias de este a los otros dos vértices del triángulo equilátero.



A, *B* y *C* son vértices del triángulo equilátero *ABC* y *P* el cuarto vértice del cuadrilátero inscrito *CABP* .

* Se cumple que :

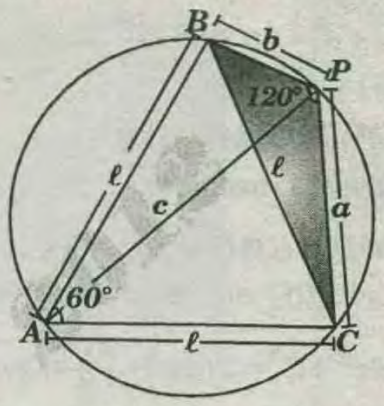
$$PA=PC+PB\ \Rightarrow\ \boxed{c=a+b}$$

DEMOSTRACIÓN :

* En el cuadrilátero inscrito *ABPC*: del teorema de Ptolomeo : $c\times\ell=a\times\ell+b\times\ell\Rightarrow c=a+b$

TEOREMA VII :

El cuadrado de la longitud del lado de un triángulo equilátero es igual a la semisuma de los cuadrados de las distancias de un punto cualquiera de su circunferencia circunscrita, a los vértices de dicho triángulo .



Si el $\triangle ABC$ es equilátero

* Se cumple : $\boxed{\ell^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$

DEMOSTRACIÓN :

* En el $\triangle BPC$: teorema de cosenos

$$\ell^2=a^2+b^2-2ab\cos 120°$$

$$\Rightarrow \ell^2=a^2+b^2-2ab\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \ell^2=a^2+b^2+ab\ .....(I)$$

* Se sabe por teorema de Chadú : $c=a+b$

* Elevando al cuadrado :

$$c^2=a^2+b^2+2ab\Rightarrow ab=\frac{c^2-a^2-b^2}{2}\ .....(II)$$

* Reemplazando *(II)* en *(I)*:

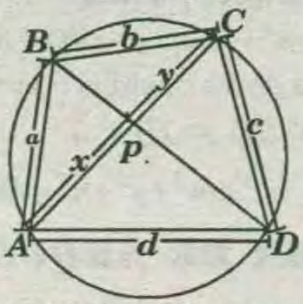
$$\ell^2=a^2+b^2+\frac{c^2-a^2-b^2}{2}\Rightarrow 2\ell^2=2a^2+2b^2+c^2-a^2-b^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$$

TEOREMA DE PACKEIN

En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible en una circunfererencia , la razón de las longitudes de los segmentos determinados sobre una de las diagonales al intersecarse con la otra diagonal es igual a la razón de los productos de las longitudes

de los lados que concurren a los extremos de dicha diagonal respectivamente .

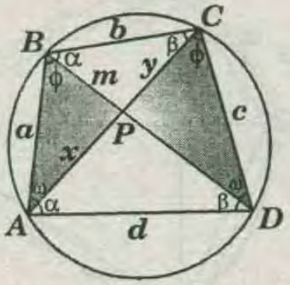


* En la figura $\square ABCD$: inscrito en la circunferencia.

$AP=x\ ;\ PC=y$

* Se cumple : $\boxed{\frac{x}{y}=\frac{ad}{bc}}$

DEMOSTRACIÓN :



$\triangle APD \sim \triangle BPC$ *(A.A.A.)*

De la figura : $\frac{x}{m}=\frac{d}{b} \Rightarrow x=m\frac{d}{b}$ .....*(I)*

$\triangle CPD \sim \triangle BPA$ *(A.A.A.)*

$\frac{y}{m}=\frac{c}{a} \Rightarrow y=\frac{mc}{b}$ .....*(II)*

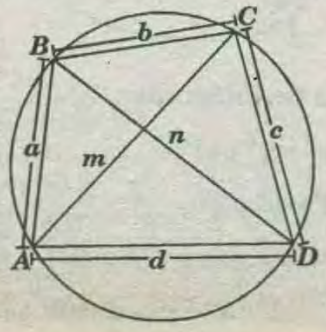
* Al dividir las ecuaciones *(I)* y *(II)* obtenemos :

$$\boxed{\frac{y}{m}=\frac{ad}{bc}}$$

TEOREMA DE VIETTE

SEGUNDO TEOREMA DE PTOLOMEO :

En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible en una circunferencia , la razón de las longitudes diagonales es igual a la razón de la suma de los productos de las longitudes de los lados que concurren a los extremos de cada diagonal respectivamente .

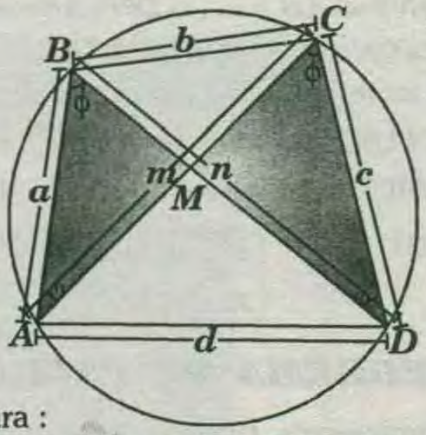


En la figura $\square ABCD$: inscrito en la circunferencia.

$AC=m$ y $BD=n$

* Se cumple : $\boxed{\frac{m}{n}=\frac{ad+bc}{ab+cd}}$

DEMOSTRACIÓN :



* En la figura :

$CM+MA=m$ y $BM+MD=n$

* Por el teorema de Packein :

$$\frac{CM}{MA}=\frac{bc}{ad} \rightarrow \frac{CM+MA}{MA}=\frac{bc+ad}{ad} \text{.....(I)}$$

* Análogamente :

$$\frac{BM}{DM}=\frac{ab}{cd} \rightarrow \frac{BM+MD}{MD}=\frac{ab+cd}{cd} \text{.....(II)}$$

* Al dividir las ecuaciones *(I)*, *(II)* :

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{MD}{MA}\right)=\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{bc+ad}{ab+cd}\right) \text{.....(III)}$$

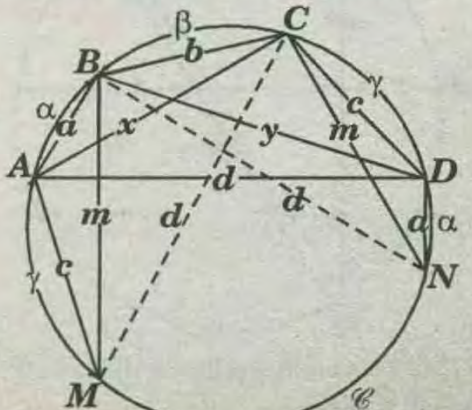
* Como $\triangle ABM \sim \triangle DCM$ *(A.A.A.)*:

$$\frac{MA}{MD}=\frac{a}{c} \rightarrow \frac{MD}{MA}=\frac{c}{a} .$$

* Reemplazando en *(III)* :

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{c}{a}\right)=\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{bc+ad}{ab+cd}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{m}{n}=\frac{ad+bc}{ab+cd}}$$

OTRO MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN :



* En el cuadrilátero *ABCD* : inscrito en $\mathscr{C}$

$$\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$$

* Se ubica *M* y *N* en $\mathscr{C}$ tal que :

$$m\widehat{AM}=m\widehat{CD}=\gamma \rightarrow AM=CD=c$$

$$m\widehat{DN}=m\widehat{AB}=\alpha \rightarrow DN=AB=\alpha$$

$$BM=CN=m \text{ y } MC=BH=AD=d$$

* luego del teorema de Ptolomeo para :

$$\triangle MABC:\ mx=ad+bc \ .....(I)$$

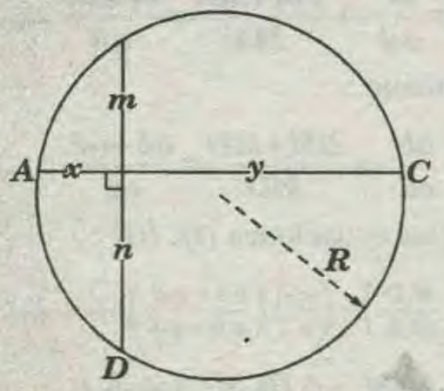
$$\triangle NBCD:\ my=ab+cd \ .....(II)$$

* De *(I)* ÷ *(II)* :

$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}}$$

TEOREMA DE FAURE

En una circunferencia, la suma de los cuadrados de las longitudes de los segmentos en dos cuerdas que se intersecan perpendicularmente es igual al cuadrado de la longitud del diámetro.

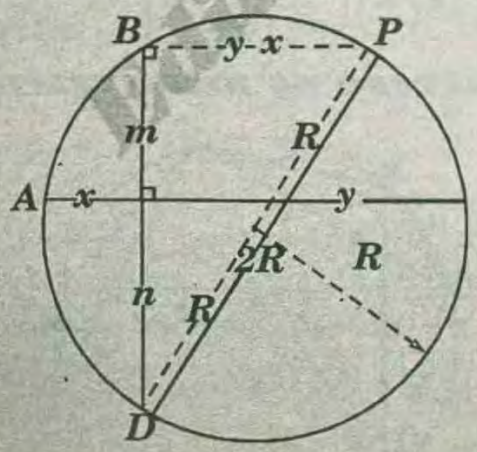


De la figura, *R*: Radio de la circunferencia .

Si $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

* Se cumple : $x^2+m^2+y^2+n^2=4R^2$

DEMOSTRACIÓN :



Se traza el diámetro *DP*, luego se une *B* y *P*

* Por teorema : $BP=y-x$

* Por el teorema de Pitágoras :

$$\triangle DBP:\ (2R)^2=(m+n)^2+(y-x)^2$$

$$\Rightarrow 4R^2=m^2+n^2+2mn+y^2-2xy+x^2 \ .....(I)$$

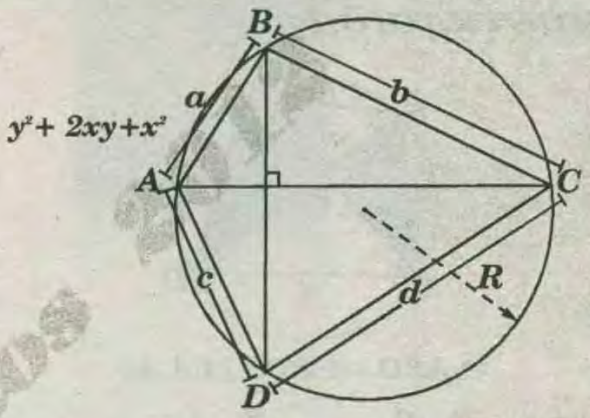
* Por el teorema de las cuerdas : $xy=mn$ .....*(II)*

* Reemplazando *(II)* en *(I)* :

$$x^2+m^2+y^2+n^2=4R^2$$

TEOREMA DE ARQUÍMEDES

En un cuadrilátero de diagonales perpendiculares inscrito en una circunferencia , la suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados opuestos son iguales al cuadrado del diámetro de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero .

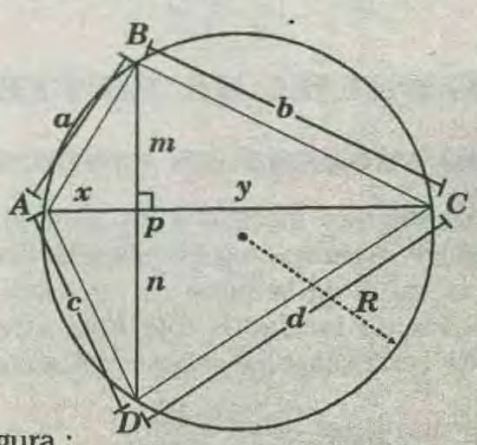


En la figura, *R* : Radio de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero *ABCD*

Si $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

* Se cumple : $a^2+c^2=b^2+d^2=4R^2$

DEMOSTRACIÓN :



* De la figura :

* Por el teorema de Pitágoras :

$$\triangle APB:\ a^2=x^2+m^2 \ ..... \ (I)$$

$$\triangle DPC:\ d^2=y^2+n^2 ..... \ (II)$$

* Al sumar las ecuaciones *(I)* y *(II)* :

$$a^2+d^2=x^2+y^2+n^2+m^2 .....(III)$$

* Del teorema de Faure :

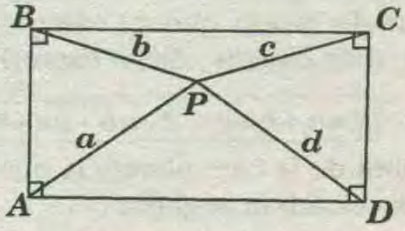
$$x^2+m^2+y^2+n^2 = 4R^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV)$$

* Reemplazando: $\rightarrow a^2+d^2 = b^2+c^2 = 4R^2$

TEOREMA DE MARLEN

En un rectángulo, la suma de los cuadrados de las distancias de un punto cualquiera a sus vértices opuestos son iguales .

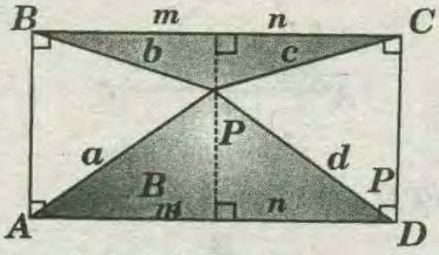
I)



En la figura, P es un punto interior del rectángulo $ABCD$.

* Se cumple : $a^2+c^2=b^2+d^2$

DEMOSTRACIÓN :



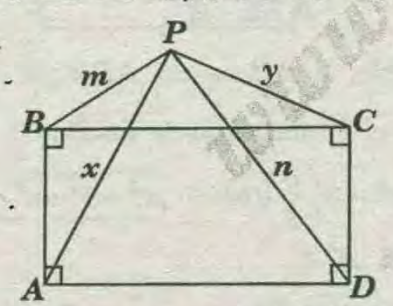
* Por teorema de las proyecciones :

$\triangle BPC: b^2-c^2=m^2-n^2$; $\triangle APD: a^2-d^2=m^2-n^2$

* Al igualar obtenemos :

$$a^2-d^2=b^2-c^2 \Rightarrow d^2+c^2=b^2+d^2$$

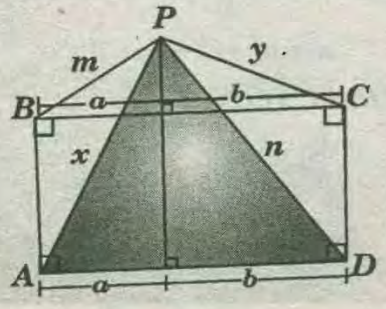
II)



En la figura P es un punto exterior del rectángulo $ABCD$.

* Se cumple : $x^2+y^2=m^2+n^2$

DEMOSTRACIÓN :



* Por el teorema de las proyecciones :

$$\triangle BPC: m^2-y^2=a^2-b^2$$

$$\triangle APD: x^2-n^2=a^2-b^2$$

* Al igualar obtenemos :

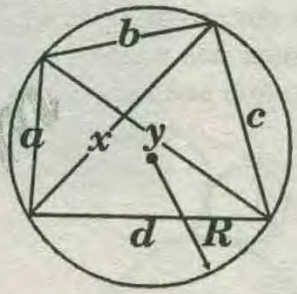
$$x^2-n^2=m^2-y^2 \rightarrow x^2+y^2=m^2+n^2$$

OBSERVACIÓN :

* El teorema de Marlen también se puede aplicar a un cuadrado.

* El punto P puede ubicarse en cualquier parte del plano que contiene al rectángulo , incluso el teorema se sigue cumpliendo si P está en el espacio (fuera del plano que contiene al rectángulo).

TEOREMA VIII :



$$\boxed{x=\sqrt{\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}}} \qquad \boxed{y=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}}}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Por el teorema de Ptolomeo :

$$xy=ac+bd \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Por el teorema de Viette :

$$\frac{y}{x}=\frac{ab+cd}{bc+ad}$$

$$\Rightarrow y=x\left(\frac{ab+cd}{bc+ad}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* Reemplazando *(II)* en *(I)*:

$$xx\left(\frac{ab+cd}{bc+ad}\right)=ac+bd \Rightarrow x^2=\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{(ab+cd)}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{(ab+cd)}}}$$

* Análogamente : $\boxed{y=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(bc+ad)}}}$

OBSERVACIÓN :

En la figura de esta última propiedad, se cumple :

$$\frac{abx}{4R}+\frac{cdx}{4R}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$\Rightarrow x(ab+cd)=4R\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

TEMAS GRATIS2.COM

* Pero: $x=\sqrt{\dfrac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}}$

* Reemplazando:

$$x=\sqrt{\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}}(ab+cd)=4R\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(ac+bd)(bc+ad)}\,\frac{\sqrt{ab+cd}}{\sqrt{(ab+cd)}}(ab+cd)=4R\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

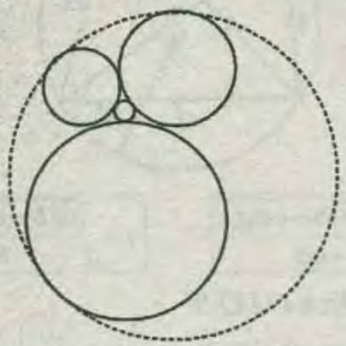
$$\Rightarrow \sqrt{(ab+cd)(bc+ad)(ac+bd)}=4R\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$\Rightarrow \boxed{R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(bc+ad)(ac+bd)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}}$$

NOTA: $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$

TEOREMA DE SODDY

Si se tienen tres circunferencias de cualquier radio que sean tangentes dos a dos , siempre es posible trazar una cuarta que sea tangente a las otras tres .



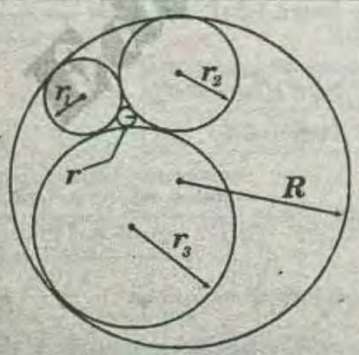
CURVATURA DE UNA CIRCUNFERENCIA

Es la inversa de la longitud del radio .

FÓRMULA DE SODDY :

La suma de los cuadrados de las cuatro curvaturas, es igual a la mitad del cuadrado de su suma .

$$\boxed{a^2+b^2+c^2+d^2=\frac{1}{2}(a+b+c+d)^2}$$



Donde :

$$a=\frac{1}{r_1};\ b=\frac{1}{r_2};\ c=\frac{1}{r_3};\ d=\frac{1}{x}$$

Al resolver la ecuación cuadrática se obtiene: $d=\pm\dfrac{1}{x}$

Si : $d=-\dfrac{1}{x} \Rightarrow x=R$

Si : $d=\dfrac{1}{x} \Rightarrow x=r$

Luego a mayor curvatura menor radio y a menor curvatura mayor radio.

NOTA :

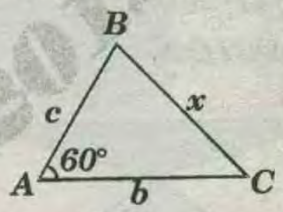
La expresión dada por ***FEDERICO SODDY*** , se puede transformar de modo que el cálculo del cuarto inverso sea más directo , dicha expresión es :

$$\boxed{d=a+b+c\pm 2\sqrt{ab+ac+bc}}$$

* La curvatura de la circunferencia que rodea a las otras tres se considera negativa .

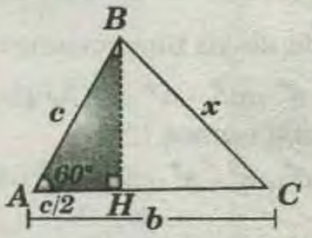
TEOREMA IX :

En la figura, se cumple :



$$x^2=b^2+c^2-bc$$

DEMOSTRACIÓN :



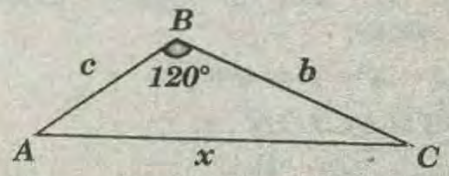
$\triangle ABH$ notable, si $AB=c \Rightarrow AH=c/2$

ΔABC , por el 1er teorema de Euclides:

$$x^2=c^2+b^2-2\left(\frac{c}{2}\right)(b) \Rightarrow \boxed{x^2=b^2+c^2-bc}$$

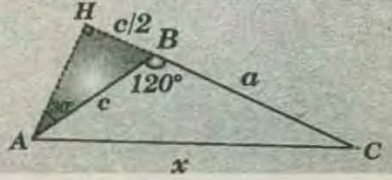
TEOREMA X :

En la figura, se cumple :



$$x^2=a^2+c^2+ac$$

DEMOSTRACIÓN :



$\triangle AHB$ notable, si $AB=c \Rightarrow HB=\frac{c}{2}$

$\triangle ABC$, por el 2do teorema de Euclides :

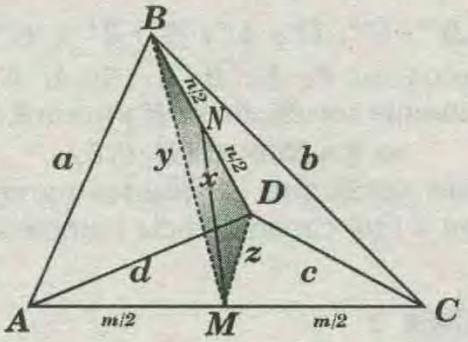
$$x^2=a^2+c^2+2\left(\frac{c}{2}\right)(a) \Rightarrow \boxed{x^2=a^2+c^2+ac}$$

TEOREMA XI :

En un $\triangle ABC$ se ubica el punto D interior al triángulo. Los puntos M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente. Si $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=m$, $BD=n$ y $MN=x$.

$$a^2+b^2+c^2+d^2=m^2+n^2+4x^2$$

DEMOSTRACIÓN :



$\triangle MBD$; por teorema de la mediana:

$$y^2+z^2=2x^2+n^2/2 \quad \ldots\ldots(I)$$

$\triangle ABC$: $a^2+b^2=2y^2+m^2/2$ $\ldots\ldots(II)$

$\triangle ADC$: $c^2+d^2=2z^2+m^2/2$ $\ldots\ldots(III)$

* Sumando *(II)* y *(III)*:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=2(y^2+z^2)+m^2 \quad \ldots\ldots(IV)$$

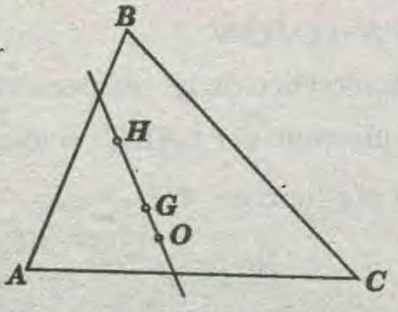
*Reemplazando *(I)* en *(IV)* y ordenando obtenemos:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=m^2+n^2+4x^2$$

MISCELANEAS

TEOREMA DE EULER

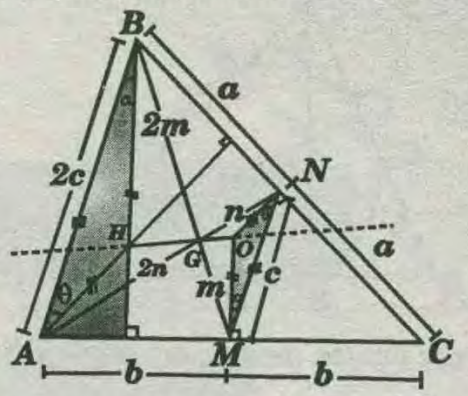
En todo triángulo no equilátero, el ortocentro *(H)*; el baricentro *(G)* y el circuncentro *(O)* son colineales.



Sean H; G y O: ortocentro , baricentro y circuncentro del $\triangle ABC$ respectivamente. Luego H; G y O son colineales .

NOTA :

A la recta que pasa por H ; G y O se le denomina la recta de Euler, en honor al matemático suizo Leonard Euler.



DEMOSTRACIÓN :

Como $MN=\frac{AB}{2}$; $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ (teorema de los puntos medios) $\overline{OM} \parallel \overline{BH}$ y $\overline{ON} \parallel \overline{AH}$ entonces , los triángulos OMN y BHA son homotéticos inversos con centro en G .

$$\triangle MON = Hom.\triangle BHA(G;-05) \Rightarrow O=Hom.H(G;05)$$

Concluimos que H; G y O son colineales .

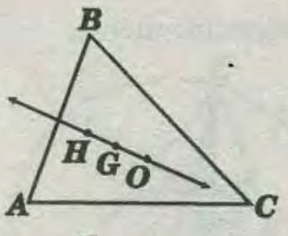
NOTA :

Si $O=Hom.H(G;-0,5)$

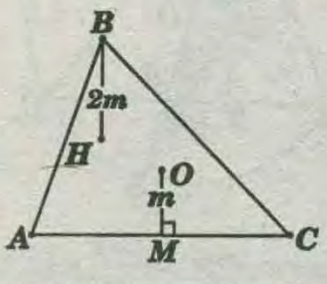
$$\Rightarrow \frac{GO}{GH}=0,5 \Rightarrow HG=2(GO)$$

* También : $HB=2(OM)$ $HA=2(ON)$

* Luego :



$HG=2(GO)$



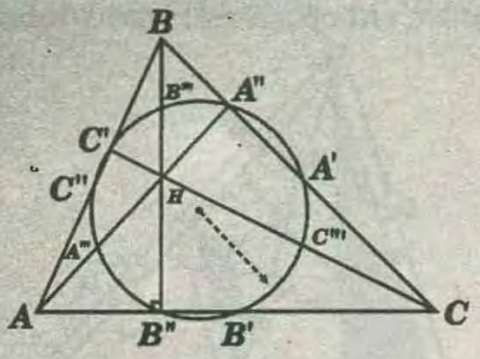
$HB=2(OM)$

CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS

TEOREMA :

En un triángulo, los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los

segmentos que unen los vértices con el ortocentro están en una misma circunferencia.



A'; B' y C': puntos medios de $\overline{BC}$; $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$

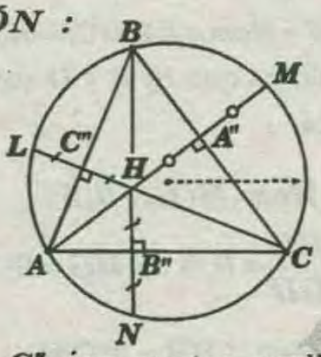
A''; B'' y C'': los pies de las alturas.

A'''; B''' y C''': los puntos medios de $\overline{AH}$; $\overline{BH}$ y $\overline{CH}$ H: ortocentro del $\triangle ABC$. A partir de lo anterior, los puntos A'; A'';A'''; B'; B'';B'''; C'; C'' y C''' , son concíclicos.

DEMOSTRACIÓN :

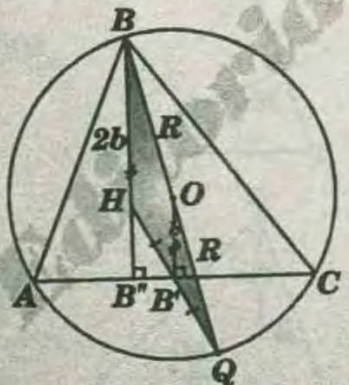
Sabemos que :

1)



De la figura A''; B'' y C'' son puntos medios de $\overline{HM}$; $\overline{HN}$ y $\overline{HL}$ respectivamente.

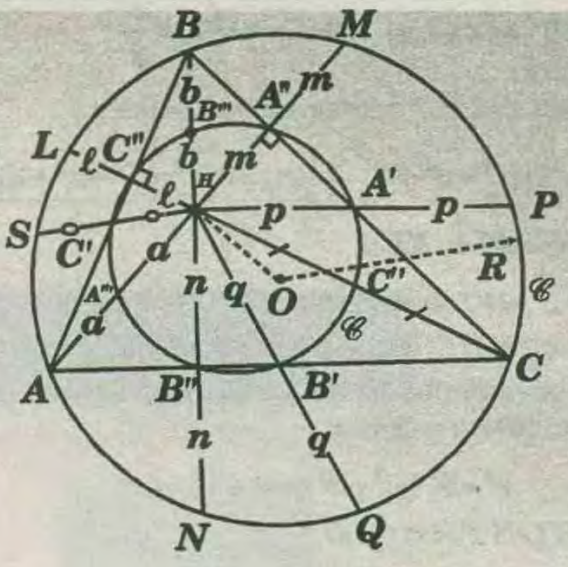
2)



* Del teorema de Euler.: $OB'=\frac{BH}{2}=b$

* De la figura , como $BO=OQ=R$ y $\overline{OB'}$ // $\overline{BH}$ entonces H; B' y Q son colineales y $HB'=B'Q$. Esto significa que B' es punto medio de $\overline{HQ}$.

* Análogamente , sucede en los otros dos lados. Luego podemos observar que :



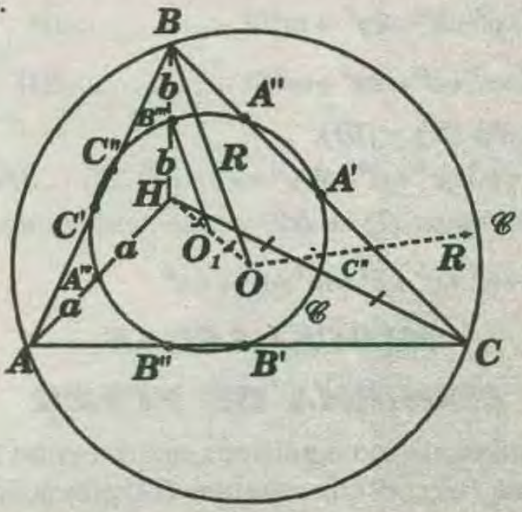
A'; A''; B'''; C''; C'; A'''; B''; B' y C''' ,son los homotéticos de P; M; B; L; S; A; N; Q y C respectivamente con centro en H y razón $0,5 (r=0,5)$

$$\Rightarrow \mathscr{C}=Hom.\mathscr{C}.(H;0,5)$$

Esto quiere decir que los puntos mencionados pertenecen a una circunferencia homotética $\mathscr{C}$ de centro H .

TEOREMA :

El radio de la circunferencia de los nueve puntos es la mitad del circunradio del triángulo, al cual es relativo.



DEMOSTRACIÓN :

Sean $\mathscr{C}$, el homotético de $\mathscr{C}'$, respecto de H y razón $0,5$ y O el circuncentro del $\triangle ABC$; entonces en $\overrightarrow{HO}$ se encuentra el centro de $\mathscr{C}(O_1)$ así :

$$HO_1=\frac{1}{2}=HO$$

Por lo tanto, O_1 es el punto medio de $\overline{HO}$ como

$$HB'''=B'''B \text{ y } B''' \in \mathscr{C} \Rightarrow O_1M=\frac{1}{2}OB=\frac{R}{2} \Rightarrow O_1B'''=\frac{R}{2}$$

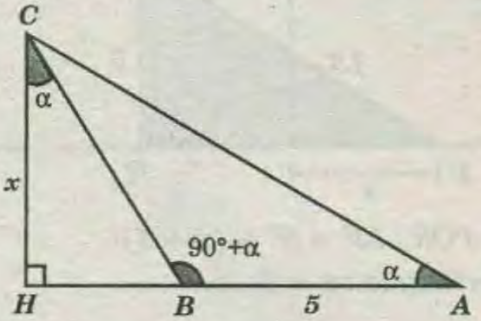
PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

En un triángulo ABC se cumple que la $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle BAC + 90°$, se traza la altura CH. Si $AB = 5u$ y $BH = 4u$, entonces la longitud de la altura CH es :

A)5u B) 6u C)7u D)8u E)9u

ESOLUCIÓN :



$* \triangle CHB \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{9}{x}$

$\Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$

RPTA : "B"

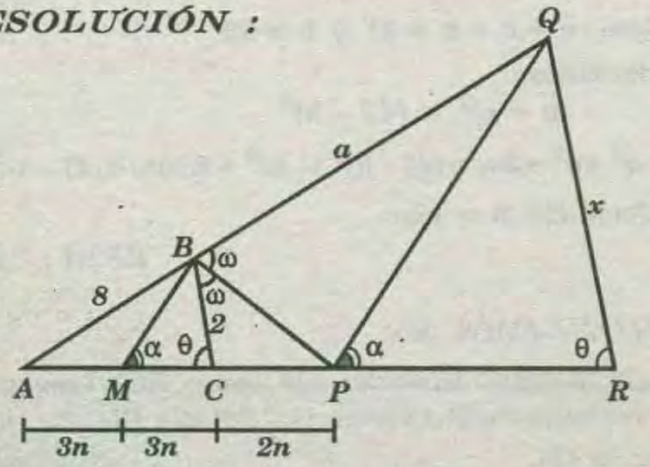
PROBLEMA 2 :

En un triángulo ABC, se trazan la bisectriz exterior BP(P esta en la prolongación del lado AC) y la mediana MB, se traza $\overline{PQ}$ paralelo a $\overline{MB}$ (Q se encuentra en la prolongación de $\overline{AB}$) y finalmente $\overline{QR}$ paralelo a $\overline{BC}$ (R en la prolongación de $\overline{AP}$).

Halle QR si : $AB=8$ y $BC=2$

A) $\frac{13}{4}$ B) $\frac{14}{4}$ C) $\frac{15}{4}$ D) $\frac{16}{3}$ E) $\frac{16}{5}$

RESOLUCIÓN :



* Por teorema : $\frac{8}{2} = \frac{AP}{CP} \rightarrow AP = 8n \wedge CP = 2n$

$\overline{BM}$ es mediana $\Rightarrow AM = MC = 3n$

* Por dato también :

$$\overline{MB} // \overline{PQ} \Rightarrow \frac{a}{8} = \frac{5n}{3n} \Rightarrow a = \frac{40}{3}$$

$$\overline{BC} // \overline{RQ} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\frac{40}{3}+8}{8} \Rightarrow 4x = \frac{64}{3} \Rightarrow x = \frac{16}{3}$$

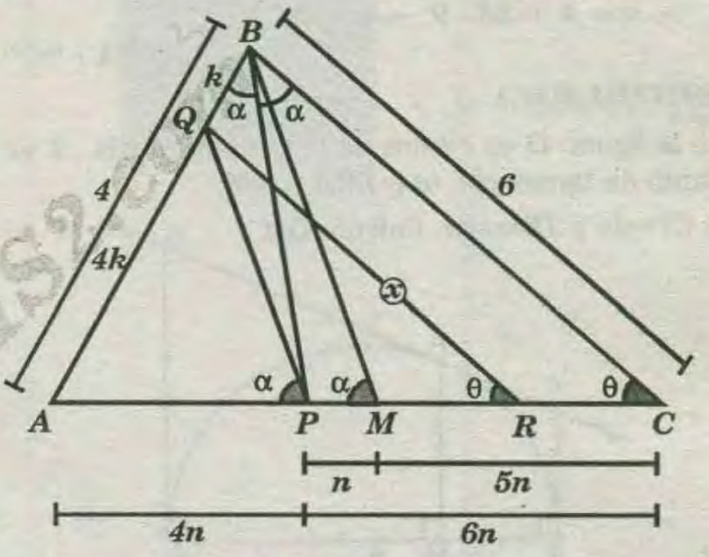
RPTA: "D"

PROBLEMA 3 :

En un triángulo ABC se trazan la bisectriz interior BP y la mediana BM, $\overline{PQ}$ es paralelo con $\overline{MB}$ (Q pertenece a $\overline{AB}$), $\overline{QR}$ es paralelo a $\overline{BC}$ ($R \in \overline{MC}$) sabiendo que $AB=4$ y $BC=6$. Halle QR.

A)4,2 B)4,5 C)4,8 D)5,2 E)5,6

RESOLUCIÓN :



$\overline{BM} // \overline{PQ} \Rightarrow \frac{AP}{PM} = \frac{AQ}{QB} = \frac{4n}{n}$

$\Rightarrow AQ = 4k \ y \ QB = k$

$\overline{RQ} // \overline{BC} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{4K}{5K} \Rightarrow x = 4,8$

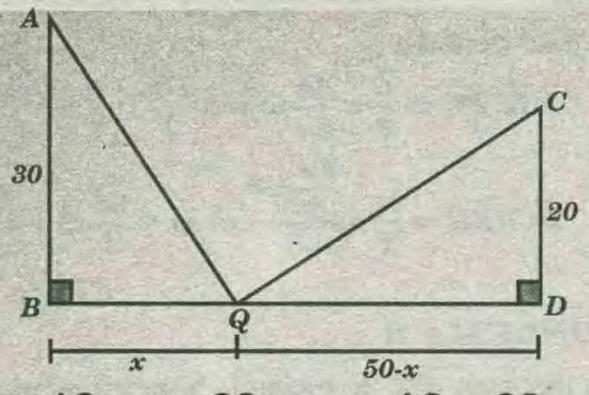
RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, una frente a la otra. La altura de una de ellas es **30** y de la otra es **20.** La distancia entre su troncos es de **50.** En la copa de cada palmera hay pájaro. De subito los dos pájaros descubren un pez que aparecen en la superficie del agua, en la dirección entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzanron con la misma velocidad y alcanzaron al pez al mismo tiempo. A que distancia del tronco de la palmera apareció el pez.

A)10 B)15 C)20 D)25 E)30

RESOLUCIÓN :



$AQ = vt$ y $CQ = vt \Rightarrow AQ = CQ$

* Pero :

$$AQ^2 = 30^2 + x^2 \text{ y } CQ^2 = 20^2 + (50 - x)^2$$

* Igualando :

$$30^2 + x^2 = 20^2 + 50 - 100x + x^2$$

$$10^2 \times x = 2^2 \times 10^2 + 5^2 \times 10^2 - 3^2 \times 10^2$$

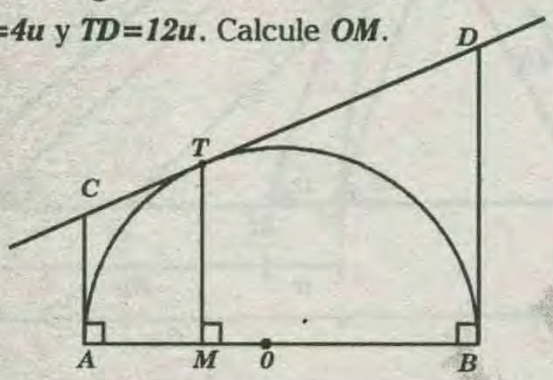
$$\Rightarrow x = 4 + 25 - 9 \Rightarrow x = 20\,\mu$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

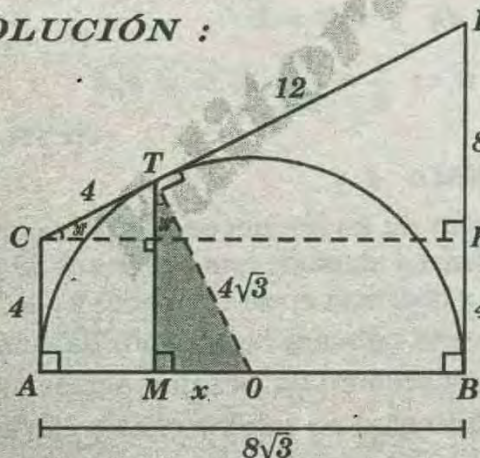
En la figura. O es centro de la circunferencia , T es punto de tangencia, $m \sphericalangle TMB = 90°$.

Si $CT = 4u$ y $TD = 12u$. Calcule OM.



A)5u B)4u C) $\frac{18}{5}u$ D)3u E) $2\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle CHD$; notable de 30° y 60° : $\Rightarrow CH = 8\sqrt{3}$

* Luego : $AO = OB = OT = 4\sqrt{3}$

* $\triangle TMO$; notable de 30° y 60° : $x = 2\sqrt{3}$

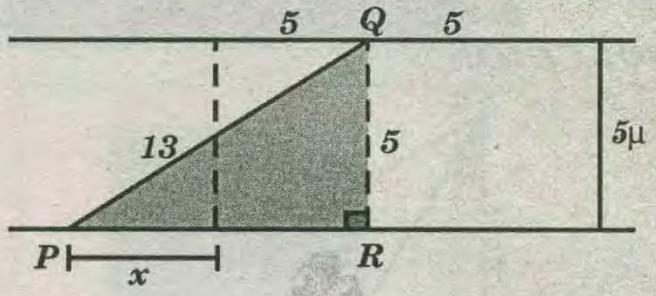
RPTA : "E"

PROBLEMA 6 :

A un lado de una calle de 5 de ancho se encuentran árboles separados a distancias iguales de 5. Justo frente a uno de los árboles , pero al otro lado de la calle se encuentra un matemático y observa que si retrocede «x» se encontrará a 13 del siguiente árbol. Halle x.

A)6 B)8 C)7 D)5 E)9

RESOLUCIÓN :



* $\triangle PQR : 13^2 = 5^2 + (x + 5)^2$

* Efectuando : $x = 7$

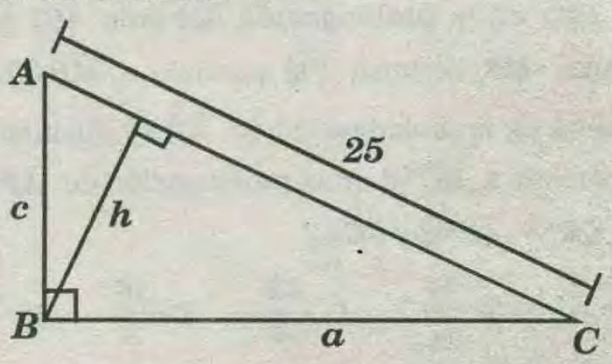
RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

En un triángulo rectángulo , la suma de las longitudes de las alturas es 47 y la hipotenusa mide 25. Halle la longitud de la menor altura.

A)12 B)13 C)12,5 D)10 E)8

RESOLUCIÓN :



* Dato : $a + c + h = 47$ y $b = 25$

* Hacemos:

$$(a + c)^2 = (47 - h)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + c^2 + 2ac = (47 - h)^2 \Rightarrow 25^2 + 2(25h) = (47 - h)^2$$

* Efectuado: $h = 12\mu$

RPTA : "A"

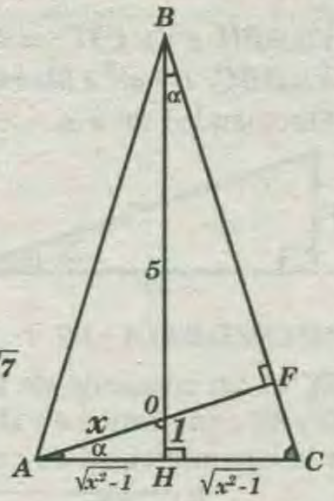
PROBLEMA 8 :

En un triángulo isósceles $ABC(AB = BC)$. La altura AF, intersecta a la altura BH en O. Si $OB = 5$ y $OH = 1$.

Calcule OA.

A) $\sqrt{7}$ B) $2\sqrt{7}$ C) $3\sqrt{7}$ D) $\frac{2}{3}\sqrt{7}$ E) $\frac{3}{2\sqrt{7}}$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle BHC \sim \triangle AHO$:

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x^2-1}}{1}=\frac{6}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\Rightarrow x^2-1=6 \Rightarrow x^2=7 \Rightarrow x=\sqrt{7}$$

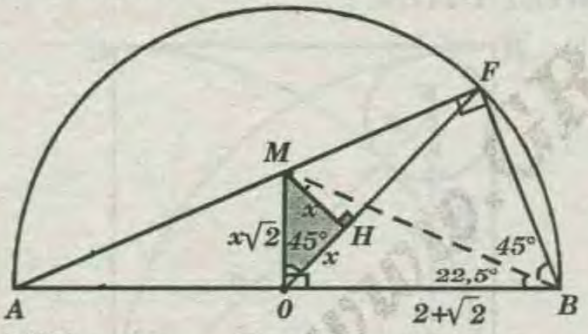
RPTA : "A"

PROBLEMA 9 :

En una semicircunferencia de diámetro AB y centro O se ubica un punto F y en $\overline{AF}$ se ubica un punto M de tal manera qu e $\overline{MO} \perp \overline{AB}$. Si el radio de la semicircunferencia es $(2+\sqrt{2})$ y la $m \sphericalangle MBF=45$, halle la longitud del segmento perpendicular a $\overline{OF}$ trazado desde M.

A)0,5 B)1 C)2,5 D)3 E)5

RESOLUCIÓN :

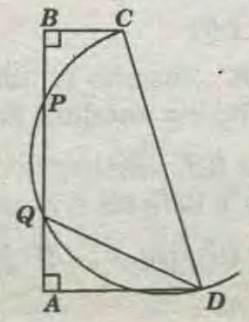


* $\triangle MHO$: $OM = x\sqrt{2}$ .....(I)
* $\triangle MOB$: $OM = \sqrt{2}$ .....(II)
* De (I) y (II): $x\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow x = 1\mu$

RPTA : "B"

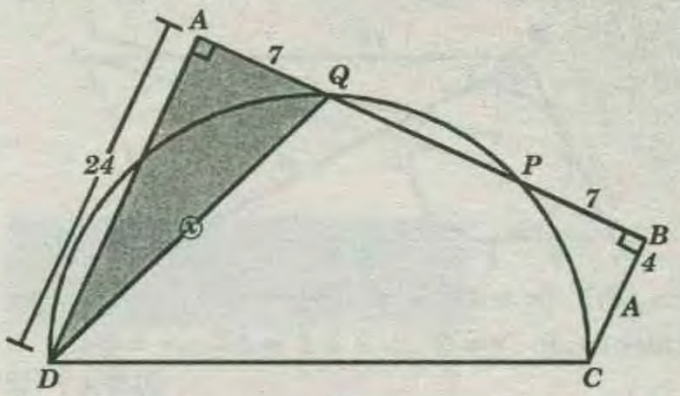
PROBLEMA 10 :

En la figura mostrada se cumple que : $\overline{CD}$ es diámetro. Si $PB = 7$ y $AD = 24$. Calcule QD.



A)19 B)21 C)23 D)25 E)27

RESOLUCIÓN :



* Por propiedad : $AQ = PB = 7$
* $\triangle DAQ$: $x^2 = 7^2 + 24^2$
* Efectuando : $x = 25\mu$

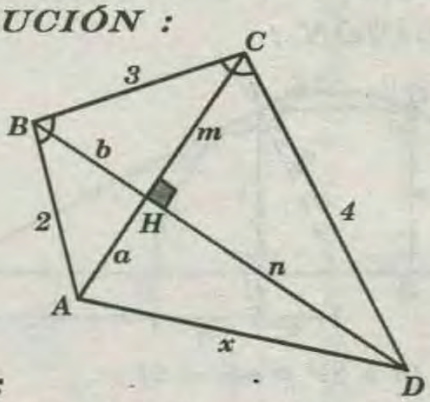
RPTA : "D"

PROBLEMA 11 :

Los lados consecutivos de un trapezoide miden $2;3$ y 4. Si las diagonales son perpendiculares, determine la longitud del cuarto lado.

A)5 B)3 C)4 D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{11}$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle AHB$:

$$a^2 + b^2 = 2^2 \quad .....(I)$$

* $\triangle BHC$: $b^2 + m^2 = 3^2$ .....(II)
* $\triangle CHD$: $m^2 + n^2 = 4^2$ .....(III)
* Sumando (I), (II) y (III):

$$\underbrace{a^2+n^2}_{x^2}+2(\underbrace{b^2+m^2}_{3^2})=4+9+16$$

$$\Rightarrow x^2 + 18 = 29 \Rightarrow x^2 = 11 \Rightarrow x = \sqrt{11}$$

RPTA : "E"

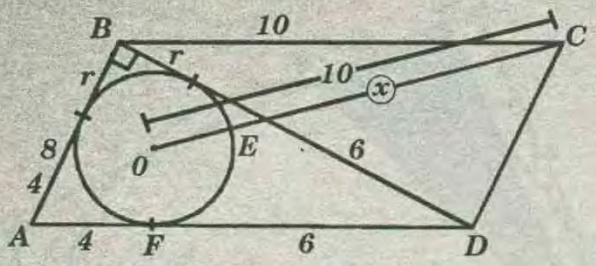
PROBLEMA 12 :

En un paralelogramo $ABCDm \sphericalangle ABD = 90°$, la circunferencia P de centro O inscrita en el triángulo ABD es tangente con $\overline{AD}$ en F, $AF=4$, $FD=6$, $BC = OC$, $OC \cap P = \{E\}$.

Calcule CE

A)6 B)5 C)9 D)7 E)8

RESOLUCIÓN :



* $\triangle ABD$: $(r+4)^2 + (r+6)^2 = 10^2$

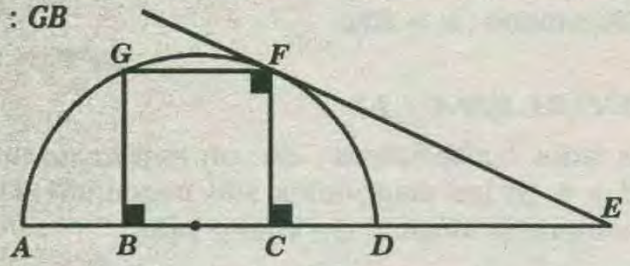
* Efectuando : $r = 2 \Rightarrow x + 2 = 10 \Rightarrow x = 8\mu$

RPTA : "E"

PROBLEMA 13 :

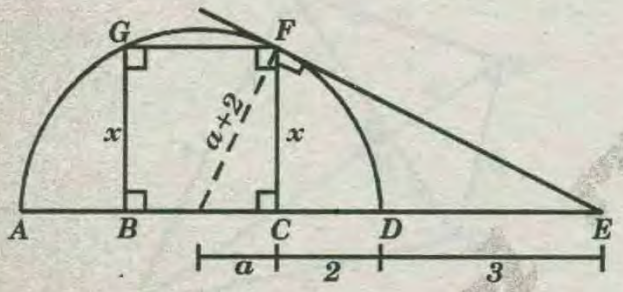
En la figura : $AB=2$, $DE=3$.

Halle : GB



A)5 B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}$ D) $3\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle OFE$: $(a+2)^2 = a(a+5)$

* Efectuando: $a = 4$

* $\triangle OFE$: $x^2 = (4)(5) \rightarrow x = 2\sqrt{5}$

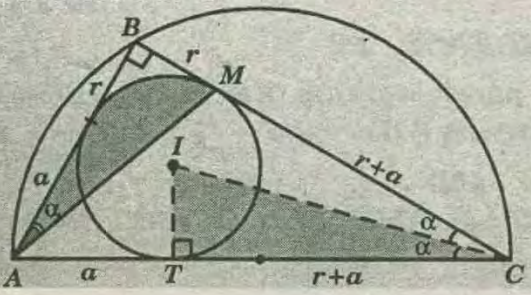
RPTA : "B"

PROBLEMA 14 :

En un triángulo ABC, recto en B, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{BC}$ en el punto M, si: $m\sphericalangle BCA = 2m\sphericalangle BAM$. Halle $m\sphericalangle BCA$.

A)53° B)37° C)45° D)30° E)60°

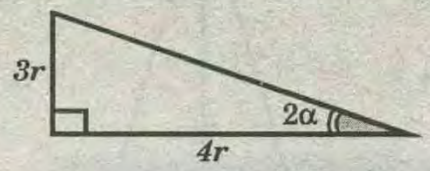
RESOLUCIÓN :



* $\triangle ABN \cong \triangle CTI \Rightarrow AB = TC = r + a$

* $\triangle ABC$: $(r+a)^2+(2r+a)^2=(r+2a)^2$

* Efectuando : $2r = a$

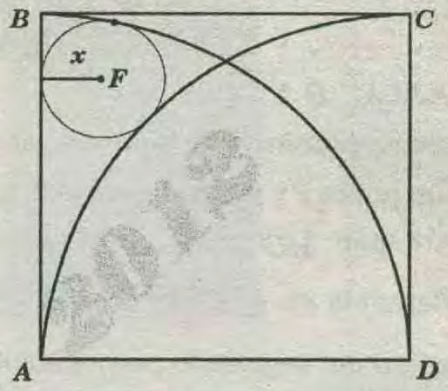


$\Rightarrow 2\alpha = 37°$

RPTA : "B"

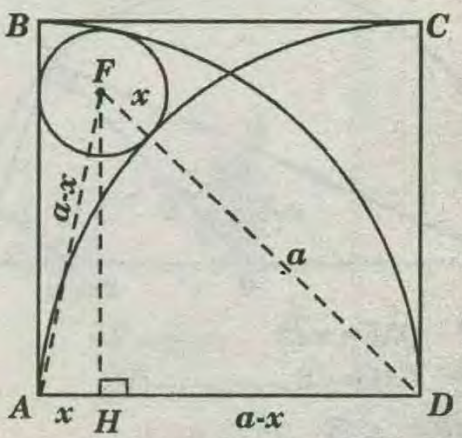
PROBLEMA 15 :

ABC es un cuadrado de lado a. Se trazan los arcos BD y AC con centros A y D. Halle la longitud del radio de la circunferencia de centro F.



A) $\frac{a}{8}$ B) $\frac{a}{6}$ C) $\frac{a}{5}$ D) $\frac{a}{4}$ E) $\frac{a}{3}$

RESOLUCIÓN :



ΔAFD ; por el teorema de Euclides:

$$(a + x)^2 = (a - x)^2 + a^2 - 2xa$$

* Efectuando : $x = \frac{a}{6}$

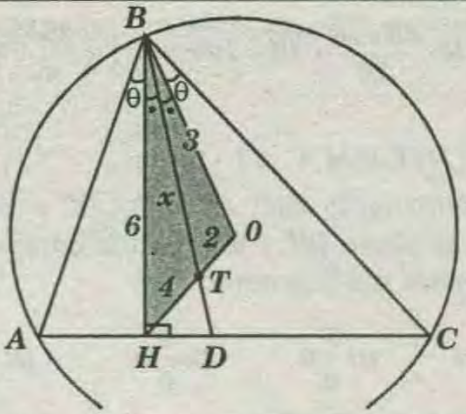
RPTA : "B"

PROBLEMA 16:

En un triángulo ABC , inscrito en un circunferencia de centro O y radio de medida $3u$, se trazan: la bisectriz BD y altura BH, $\overline{HO}$ intersecta a la bisectriz BD en T. Si $OT=2u$ y $BH=6u$. Calcule BT

A)2,5u B)3u C) $\sqrt{10}u$ D) $2\sqrt{3}u$ E)4u

RESOLUCIÓN :



* ΔHBO : $\frac{6}{HT}=\frac{3}{2}\rightarrow HT=4$

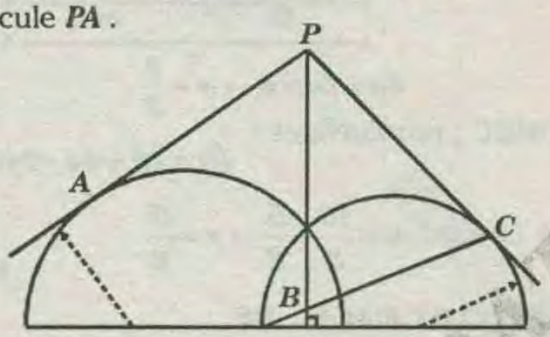
* Por teorema : $x^2=18-8=10\Rightarrow x=\sqrt{10}$

RPTA : "C"

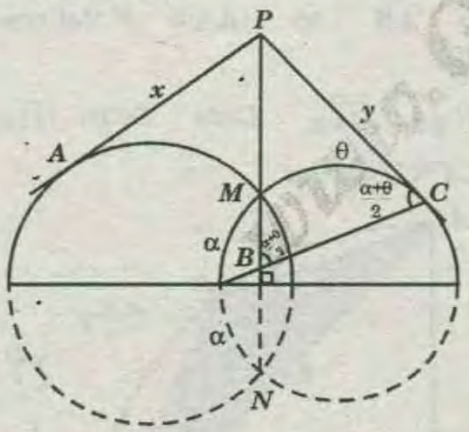
PROBLEMA 17 :

Según el gráfico, **A** y **C** son puntos de tangencia .
Si $PB=8$, calcule PA .

A) 8
B) 4
C) $4\sqrt{2}$
D) $8\sqrt{2}$
E) 6



RESOLUCIÓN :



* Por teorema de la tangente :

$$x^2 = PN\times PM \; ; \; y^2 = PN\times PM$$
$$\Rightarrow x^2 = y^2 \rightarrow x = y$$

* ΔBPC isósceles : $PB = 8 = y \Rightarrow x = 8$

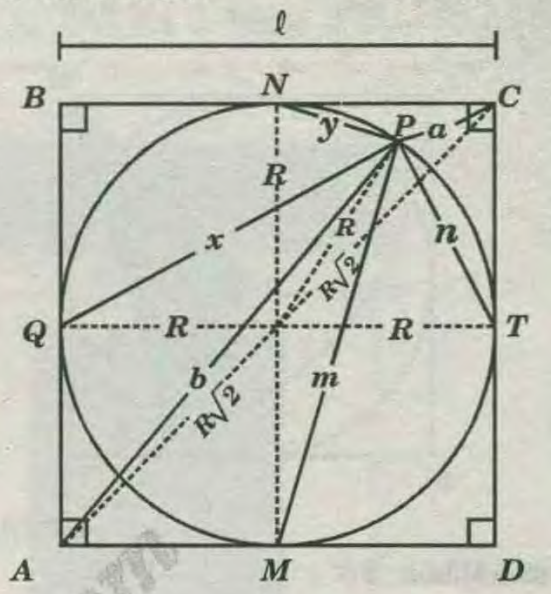
RPTA : "A"

PROBLEMA 18 :

Sea **P** un punto que pertenece a la circunferencia inscrita al cuadrado. Si la suma del cuadrado de las distancias del punto **P** a dos vértices opuestos del cuadrado es **K**, calcule la suma de cuadrados de las distancias del punto **P** a los puntos de tangencia sumado con la longitud del lado del cuadrado al cuadrado .

A) K B) 4K C) K^2 D) K/2 E) 2K

RESOLUCIÓN:



* Por dato : $a^2 + b^2 = k$

* Se pide hallar : "$x^2+ y^2 + m^2 + n^2 + n^2 + R^2$"

* Por teorema de la mediana:

ΔAPC : $a^2+b^2=2R^2+\frac{(2R\sqrt{2})^2}{2}\Rightarrow a^2+b^2=k=6R^2\rightarrow R^2=\frac{k}{6}$

* ΔNPM :

$$y^2+m^2=2R^2+\frac{(2R)^2}{2}\Rightarrow y^2+m^2=4R^2 \quad .....(I)$$

* ΔQPT :

$$x^2+n^2=2R^2+\frac{(2R)^2}{2}\Rightarrow x^2+n^2=4R^2 \quad .....(II)$$

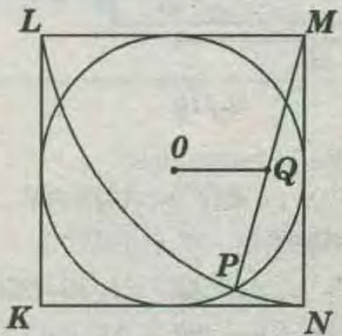
* Sumando *(I)* y *(II)*:

$$x^2+y^2+m^2+n^2=8R^2\Rightarrow x^2+y^2+m^2+n^2+\underline{(2R)^2}=12R^2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+m^2+n^2+\ell^2=12\left[\frac{k}{6}\right]\Rightarrow x^2+y^2+m^2+n^2+\ell^2=2k$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 19 :

KLMN es un cuadrado de centro **O** y lado **a**, si **M** es centro del arco **NPL** y **MQ = QP**, entonces **OQ** es :



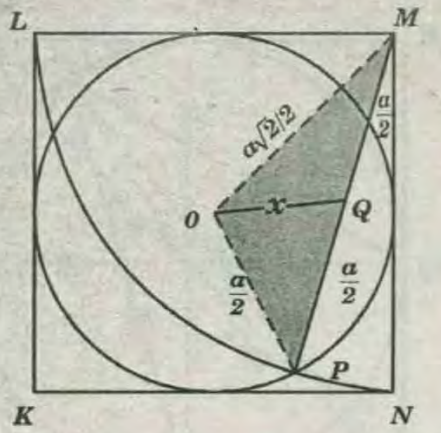
A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ D) $\frac{a\sqrt{2}}{5}$ E) $\frac{a\sqrt{2}}{6}$

RESOLUCIÓN :

* ΔPOM , por teorema de la mediana:

$$(a/2)^2+(a\sqrt{2}/2)^2=2x^2+\frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4}+\frac{2a^2}{4}-\frac{2a^2}{4}=2x^2 \Rightarrow x=\frac{a\sqrt{2}}{4}$$



RPTA: "C"

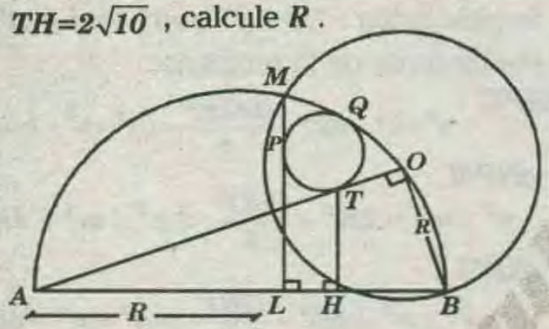
PROBLEMA 20 :

En el gráfico , **P, Q** y **T** son puntos de tangencia . Si $m\widehat{OB}=37°$ y $TH=2\sqrt{10}$, calcule **R** .

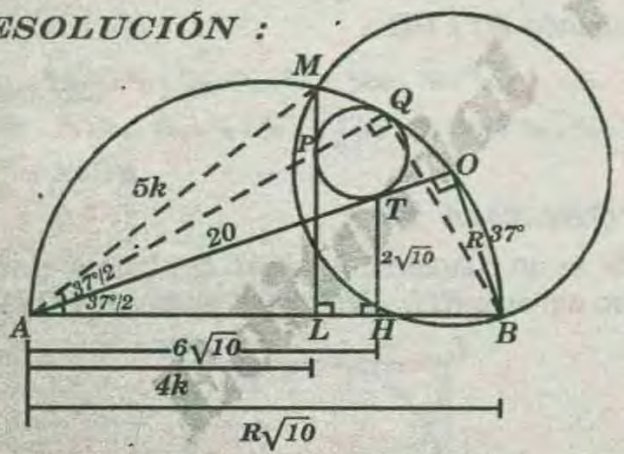
A) $\frac{5}{2}\sqrt{10}$

B) 5

C) $\frac{15}{2}$



RESOLUCIÓN :



* Por teorema de la tangente :

$$2O^2 = AQ\times AP \ \ldots\ldots\ (I)$$

* **LPQB** es inscriptible , se cumple :

$$AQ\times AP = R\sqrt{10}(4K) \ \ldots\ldots\ (II)$$

* (I) = (II): $4RK\sqrt{10}=400 \Rightarrow RK\sqrt{10}=10$ .....(III)

* Por **R.M.** en el $\triangle AMB$:

$$(5K)^2=(4K)(R\sqrt{10}) \rightarrow K=\frac{4R\sqrt{10}}{25} \ \ldots\ldots (IV)$$

* (IV) en (III):

$$R\times\frac{4R\sqrt{10}}{25}\sqrt{10}=100 \Rightarrow R^2=\frac{250}{4} \Rightarrow R=\frac{5}{2}\sqrt{10}$$

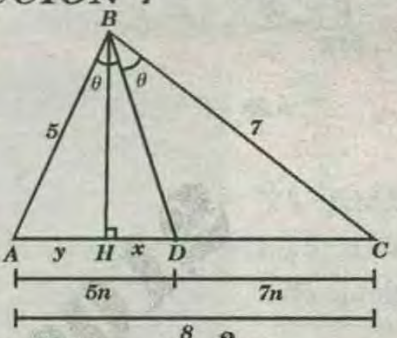
RPTA : "A"

PROBLEMA 21 :

En un triángulo **ABC, AB = 5u, BC = 7u, AC = 8u** se traza la altura **BH** y la bisectriz interior **BD**. Halle la magnitud del segmento **HD**.

A) $\frac{8}{7}u$ B) $\frac{7}{6}u$ C) $\frac{4}{5}u$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{6}{5}u$

RESOLUCIÓN :



$$5n+7n=8 \rightarrow n=\frac{2}{3}$$

ΔABC ; por Euclides :

$$49=25+64-2y(8) \rightarrow y=\frac{5}{2}$$

* Luego : $x=\frac{10}{3}-\frac{5}{2} \rightarrow x=\frac{5}{6}$

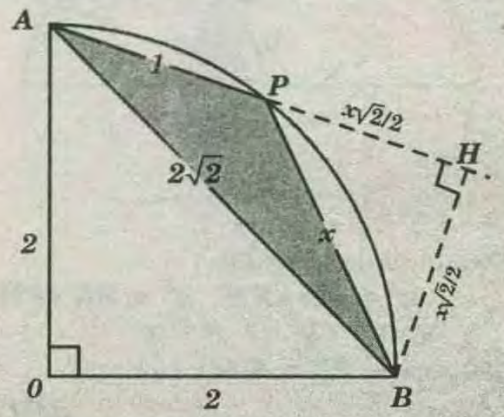
RPTA : "D"

PROBLEMA 22 :

En un cuadrante **AOB** de radio **R = 2u** y centro **O**. En el arco $\widehat{AB}$ se ubica **P** tal que **AP=1u**, calcule **PB**.

A)3u B) $\sqrt{8-\sqrt{15}}u$ C)4u D) $8-\sqrt{15}u$ E)5u

RESOLUCIÓN :



* ΔAPB ; por Euclides:

$$8=x^2+1+2\left[\frac{x\sqrt{2}}{2}\right](1)$$

* Simplificado : $x^2+x\sqrt{2}-7=0$

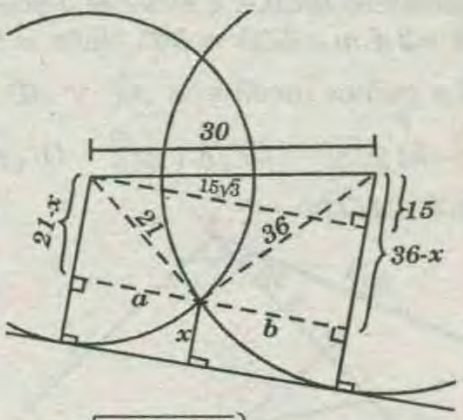
* Efectuando : $x^2=\frac{\sqrt{30}-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x=\sqrt{8-\sqrt{15}}$

PROBLEMA 23:

Se tiene dos circunferencias secantes de radios ***21u*** y ***36u*** cuya distancia entre sus centros es ***30u***. Calcule la distancia de uno de sus puntos de intersección a la tangente común más cercana.

A)3,2u B)4,2u C)2,8u D)3,6u E)3,8u

RESOLUCIÓN :



$$\left.\begin{array}{l} a=\sqrt{42x-x^2} \\ b=\sqrt{72x-x^2} \end{array}\right\}(+)$$

$$15\sqrt{3}=\sqrt{42x-x^2}+\sqrt{72x-x^2}$$

* Efectuando : $x = 3{,}2\mu$

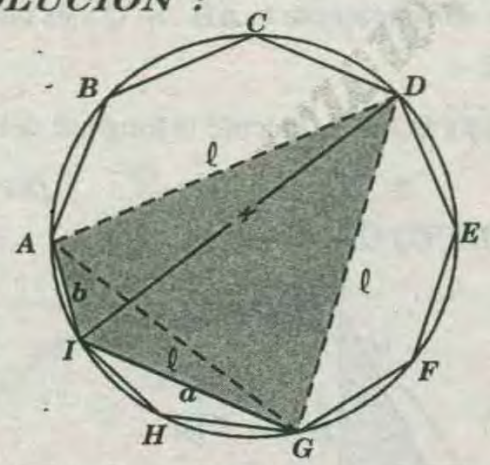
RPTA : "A"

PROBLEMA 24 :

En un nonágono regular ***ABCDEFGHI*** , se cumple ***IG+AB=2*** . Calcule ***ID*** .

A) $\sqrt{2}$ ***B)*** $2\sqrt{2}$ ***C)*** 2 ***D)*** 4 ***E)*** $\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



* En el cuadrilátero ***ADGI*** ; por el teorema de Ptolomeo:

$$x\ell = b\ell + a\ell \Rightarrow x = a + b = 2 \Rightarrow x = 2$$

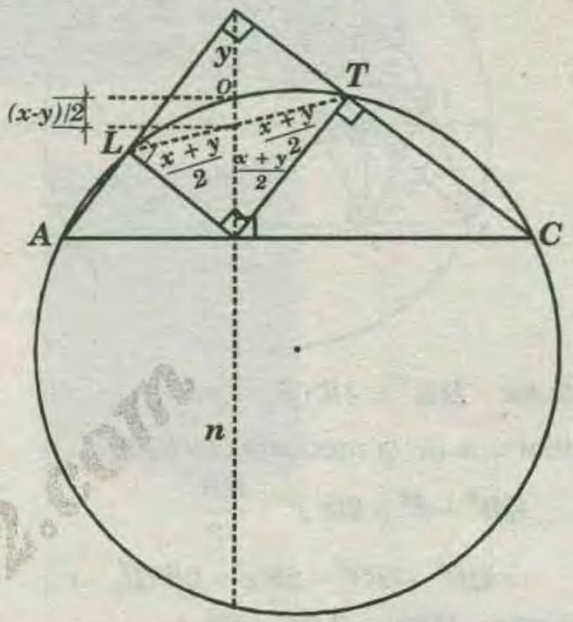
RPTA : "C"

PROBLEMA 25 :

En un triángulo ***ABC*** , recto en ***B***, se traza la altura $\overline{BH}$, luego se traza las perpendiculares $\overline{HL}$ y $\overline{HT}$ a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente . Si se traza la circunferencia que pasa por ***A, L*** y ***T*** que interseca a $\overline{BH}$ en ***O***, calcule $\dfrac{OH}{OB}$

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ***B)*** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ***C)*** $\dfrac{\sqrt{5-1}}{2}$ ***D)*** $\dfrac{\sqrt{5+1}}{2}$ ***E)*** 1

RESOLUCIÓN :



* Por teorema de las cuerdas :

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)\left[n+\frac{x-y}{2}\right]=\left[\frac{x+y}{2}\right]^2$$

$$(x-y)(2n+x+y)=(x+y)^2 \quad \text{.....(I)}$$

* También: $xn = ab = (x + y)^2$

$$n=\frac{(x+y)^2}{x} \quad \text{.....(II)}$$

* ***(II)*** en ***(I)***:

$$(x-y)\left(\frac{2(x+y)^2}{x}+x+y\right)=(x+y)^2$$

$$\Rightarrow (x-y)\left(\frac{2(x+y)}{x}+1\right)=x+y$$

* Simplificando: $x^2 - xy - y^2 = 0$

* Completando cuadrados:

$$x^2-xy+\frac{y^2}{4}=\frac{5y^2}{4}\Rightarrow\left[x-\frac{y}{2}\right]^2=\frac{5y^2}{4}$$

$$\Rightarrow x-\frac{y}{2}=\frac{y}{2}\sqrt{5}\Rightarrow x=\frac{y}{2}(\sqrt{5}+1)\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

RPTA : "D"

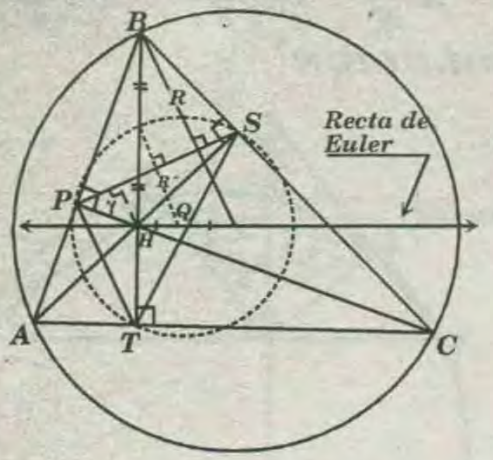
PROBLEMA 26 :

Un triángulo acutángulo ***ABC*** esta inscrito en una circunferencia de radio ***R*** . Si las alturas ***AS, BT*** y ***CP***

se cortan en H y Q es circuncentro del triángulo TPS, calcule $(HQ)^2+(QA)^2+(QB)^2+(QC)^2$

A) $2R^2$ B) $3R^2$ C) $4R^2$ D) $6R^2$

RESOLUCIÓN :



* Por Euler : $HB^2 = 4R'(R'_b - r')$

* Por teorema de la mediana : $DHQB$:

$$QB^2 + d^2 = 2(r')^2 + \frac{HB^2}{2}$$

$$\Rightarrow QB^2 + (R')^2 - 2R'r' = 2R'(R'_b - r')$$

* De donde: $QB^2 = R'(R' + 2R'_b)$

* Análogamente :

$$QA^2 = R'(R' + 2R'_a) \wedge QC^2 = R'(R' + 2R'_c)$$

* También: $d^2 = R'(R' + 2r')$

* Sumando miembro a miembro :

$$HQ^2 + QA^2 + QB^2 + QC^2 = 4(R')^2 + 2R'(R'_a + R'_b + R'_c) - 2R'r'$$

* Por Steiner: $4R' = R'_a + R'_b + R'_c - r'$

* Reemplazando :

$$HQ^2 + QA^2 + QB^2 + QC^2 = 4(R')^2 + 2R'(4R') = 12(R')^2$$

* Pero en el ΔHBO , por ***teorema de la mediana:***

$$R' = \frac{R}{2} \Rightarrow HQ^2 + QA^2 + QB^2 + QC^2 = 3R^2$$

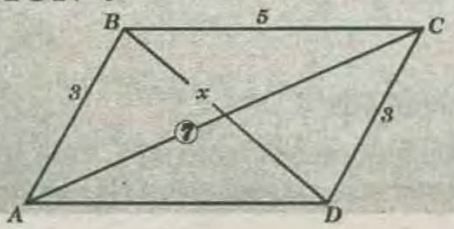
RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

En un paralelogramo $ABCD$ se cumple : $AB=3u$, $BC=5u$ y $AC=7u$. Halle la longitud de la otra diagonal.

A) $\sqrt{19}$ B) $\sqrt{17}$ C) $\sqrt{11}$ D) $\sqrt{21}$ E) $\sqrt{20}$

RESOLUCIÓN :



* Por Euler : $3^2 + 3^2 + 5^2 + 5^2 = x^2 + 7^2$

$$\Rightarrow 18 + 50 - 49 = x^2$$

$$68 - 49 = x^2 \Rightarrow 19 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{19}$$

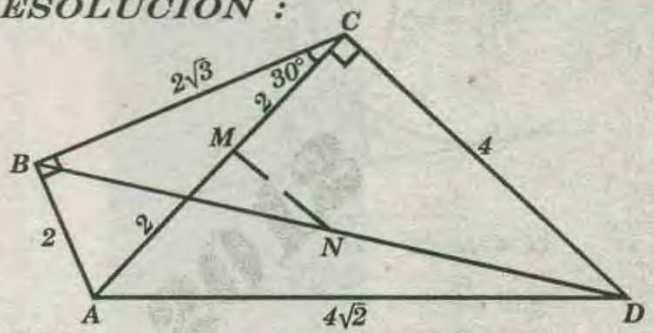
RPTA : "A"

PROBLEMA 28 :

En un cuadrilátero $ABCD, m\sphericalangle B=90°, m\sphericalangle BCD=120°$, si: $CD=4$, $AB=2$ y $m\sphericalangle ACD=90°$. Halle el segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

A) $\sqrt{5+\sqrt{3}}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$ D) $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$

RESOLUCIÓN :



* ΔBCD : $BD^2 = 12 + 16 + 8\sqrt{3} = 28 + 8\sqrt{3}$

* Por Euler :

$$4 + 12 + 16 + 32 = 16 + 28 + 8\sqrt{3} + 4x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 20 - 8\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 5 - 2\sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$$

RPTA : "D"

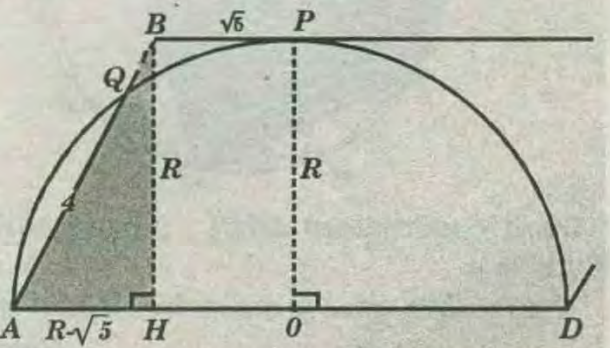
PROBLEMA 29 :

Sea $ABCD$ un paralelogramo donde $AB<BC$ y el ángulo BAD agudo. La semicircunferencia de diámetro AD intercepta a $\overline{AB}$ en Q y es tangente a $\overline{BC}$ en P.

Si $BP=\sqrt{5}$ y $BQ=1$, calcule la longitud del radio.

A) $2\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}$ D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :



* Por teorema de la tangente :

$$(\sqrt{5})^2 = (1)(1 + AQ) \Rightarrow AQ = 4$$

$$\Rightarrow 25 = R^2 + (R - \sqrt{5})^2$$

* Efectuando : $R = 2\sqrt{5}$

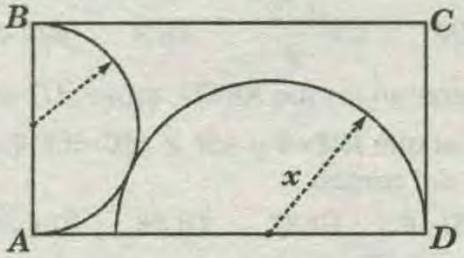
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

RELACIONES METRICAS EN EL TRIANGULO RECTANGULO

01 En un triángulo rectángulo ABC, por el vértice A se levanta una perpendicular a $\overline{AC}$ que corta a la prolongación de la bisectriz interior $\overline{CD}$ en R. Si $(RC)(RD)=288$, calcular AR

A) 8 B) 9 C)10 D) 11 E) 12

02 En el rectángulo $ABCD$, donde $BC=2(AB)=8$, calcular el valor del radio "x"

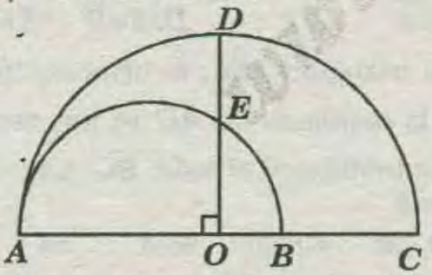


A) 2,6 B) 2,8 C) 3,0 D) 3,2 E) 3,4

03 La bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo, cuyo perímetro es 60, divide a la hipotenusa en dos segmentos tales que la medida de uno de ellos es $2,4$ veces la medida del otro. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

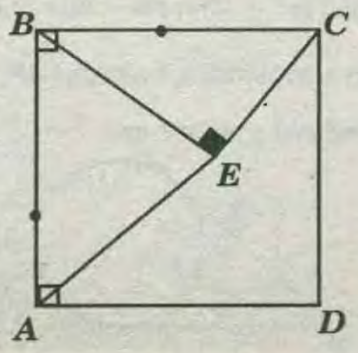
A) 24 B) 15 C) 30 D) 25 E) 26

04 En la figura: O es centro, AB es diámetro, $DE=3$ y $BC=4$. Calcular AO



A) 3,5 B) 4,5 C) 5 D) 7 E) 12

05 Calcular AE, si $ABCD$ es un cuadrado, $BE=12$ y $CE=7$



A) 9 B) 13 C) 14 D) 15 E) 17

06 En un triángulo acutángulo ABC: H es ortocentro. Si $(AC)^2+(BH)^2=100$, calcular la medida del circunradio

A) 2,5 B) 4 C) 5 D) $5\sqrt{2}$ E) 10

07 En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$ se toma el punto B y se traza $\overline{BH} \perp \overline{AC}$. En $\overline{BC}$ se considera el punto Q y se trazan $\overline{AQ}$; $\overline{BP} \perp \overline{AQ}$ (P en $\overline{AQ}$). Si: $AP=5$, $AH=4$ y $AC=10$, calcular PQ

A) 1 B) 2 C) 3 D) 2,5 E) 4

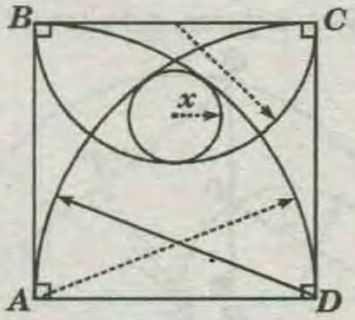
08 Se tiene una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y en ella se ubica un punto P, desde el cual se traza una tangente. Calcular AP, si $AB=9$ y la distancia de B a dicha tangente es 5

A) 4 B) $5\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{5}$ D) 6 E) 8

09 En un triángulo rectángulo ABC: $BC=a$, $AC=b$ y $\overline{BH}$ es altura. Calcular la proyección de HC sobre BC

A) a^2/b B) a^3/b^2 C) a^4/b^3 D) a^5/b^4 E) a^6/b^5

10 El lado del cuadrado $ABCD$ es "a". Calcular el valor de "x"

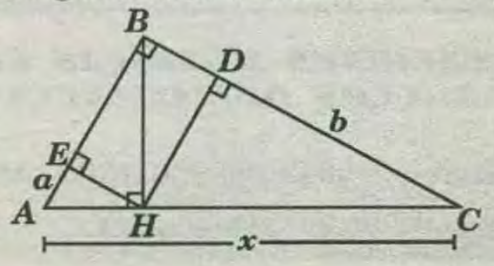


A) a/3 B) a/4 C) a/5 D) a/6 E) a/8

11 En un rectángulo $ABCD$ $(AB>BC)$, si: $AB=a$ y $BC=b$, calcular la longitud de la proyección de la diagonal $\overline{AC}$ sobre $\overline{BD}$

A) $\frac{2(a^2-b^2)}{\sqrt{a^2+b^2}}$ B) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ C) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a(a^2-b^2)}$ D) $\frac{a^2-b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ E) $\frac{a^2-b^2-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

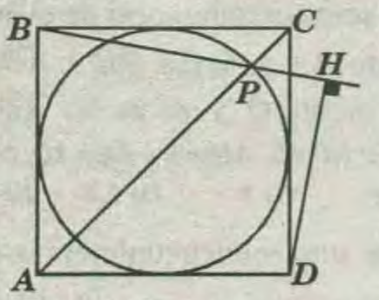
12 En la figura, calcular el valor de "x"



A) $\sqrt[3]{(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3})^2}$ B) $\sqrt{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^3}$ C) $\frac{a^3.b^3}{(a+b)^5}$

D) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}\right)^{3/2}$ E) $(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3})^2$

13 En el gráfico: *ABCD* es un cuadrado, $AB=6$ y $\overline{DH} \perp \overline{BP}$. Calcular *DH*



A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $3\sqrt{6}$ D) $3\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

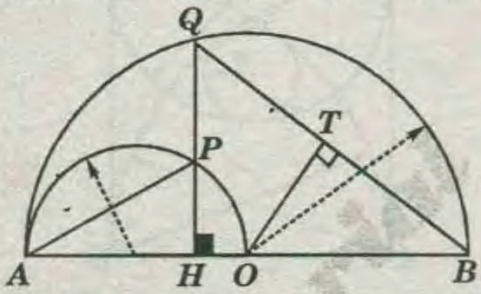
14 En un triángulo *ABC*, $m\sphericalangle B=135°$, se traza la altura $\overline{BH}$, tal que: $AH=5$ y $BH=3$. Calcular *HC*.

A) 13 B) 15 C) 16 D) 12 E) $5+\sqrt{34}$

15 Se tiene el triángulo equilátero *ABC*, tal que *N* es punto medio de $\overline{BC}$; desde *N* se traza $\overline{NP} \perp \overline{BA}$ (*P* en $\overline{BA}$). Calcular la distancia de *P* al punto medio de $\overline{AC}$, si $AB=4\sqrt{7}$

A) $2\sqrt{7}$ B) $\sqrt{21}$ C) 5 D) 7 E) $\sqrt{14}$

16 En el gráfico adjunto, calcular *OT*, si $AP=4$



A) 4 B) 3 C) 5 D) $2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

17 Se tiene un triángulo rectángulo *ABC*, recto en *B* y de incentro *I*, en el cual $IA=1$ e $IC=2\sqrt{2}$. Calcular la longitud del inradio de dicho triángulo

A) $\sqrt{13}$ B) $2\sqrt{13}$ C) $2\sqrt{13}/13$ D) $\sqrt{13}/13$ E) $3\sqrt{13}$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

RELACIONES METRICAS EN TRIANGULOS OBLICUANGULOS

01 Se tiene un paralelogramo *ABCD*, $AB=3$ *m*, $AD=5$ *m* y $AC=7$ *m*. Calcular la $m\sphericalangle A$

A) 60° B) 30° C) 45° D) 53° E) 37°

02 Las bases de un trapecio miden **4 m** y **10m**, las diagonales miden **13 m** y **15 m**. Calcular la longitud de la altura

A) 10 m B) 12 m C) 13 m D) 12,5 m E) 8,5 m

03 En un triángulo *ABC* las medianas $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ miden **9; 12** y **15 cm**, respectivamente. Calcular la longitud del menor lado del triángulo

A) 10 cm B) 8 cm C) 9 cm D) 12 cm E) 6 cm

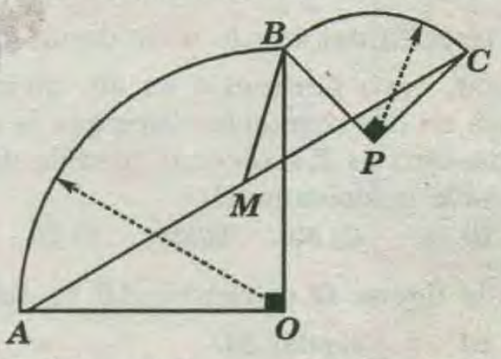
04 En un triángulo *ABC*, $AB=6$ y $BC=3$, se traza la altura $\overline{BH}$, tal que: $m\sphericalangle ABH=3(m\sphericalangle HBC)$. Calcular *AC*

A) 7 B) 5 C) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ D) 9 E) $7\sqrt{2}$

05 Se tiene un rombo *ABCD*; sobre $\overline{AC}$ se toma el punto *M*, tal que $BM=4$ y $AM \times MC=33$. Calcular el perímetro del rombo

A) 14 B) 16 C) 37 D) 28 E) $4\sqrt{17}$

06 Si: $AM=MC$, $AC=6$ y $(OA)^2+(PB)^2=13$, calcular *MB*



A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $2\sqrt{2}$ E) 3/2

07 En un triángulo *ABC*, la bisectriz interior del ángulo *A* y la mediatriz de $\overline{AC}$ se intersecan en un punto *P* que pertenece al lado $\overline{BC}$. Calcular *AC*, si: $BP=4$ y $PC=5$

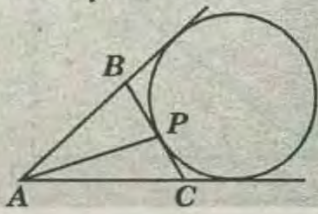
A) 6,5 B) 7,5 C) 8,5 D) 8 E) 7

08 Los lados de un triángulo miden **8 m, 10 m** y **12 m**. Calcular la longitud del circunradio

A) $\frac{16\sqrt{7}}{7}$ m B) $2\sqrt{2}$ m C) $4\sqrt{3}$ m D) $3\sqrt{2}$ m E) $4\sqrt{7}$ m

09 En la figura mostrada, calcular *AP*, si:

$AB=5$ *cm*, $BC=6$ *cm* y $AC=7$ *cm*



A) $\sqrt{30}$ cm B) $\sqrt{32}$ cm C) $\sqrt{33}$ cm
D) $\sqrt{34}$ cm E) $\sqrt{37}$ cm

10 En un triángulo ABC, obtuso en C, se cumple que: $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$. Calcular la $m\sphericalangle C$

A) 135° B) 120° C) 150° D) 100° E) 143°

11 En un triángulo ABC:

$m\sphericalangle ABC=63°$, $a^2-c^2=cb$, $AB=c$; $BC=a$ y $AC=b$. Calcular la $m\sphericalangle BCA$

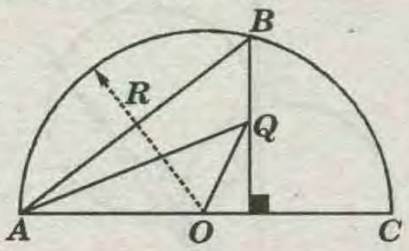
A) 30° B) 40° C) 47° D) 39° E) 37°

12 En el triángulo ABC se traza DM perpendicular a la mediana BM (D en $\overline{AB}$). Calcular la longitud de BM, si: $(AB)^2-(BC)^2=8\,m^2$ y $2(m\sphericalangle AMD)=m\sphericalangle MCB$

A) 2 m B) $2\sqrt{2}$ m C) 4 m D) 8 m E) 10 m

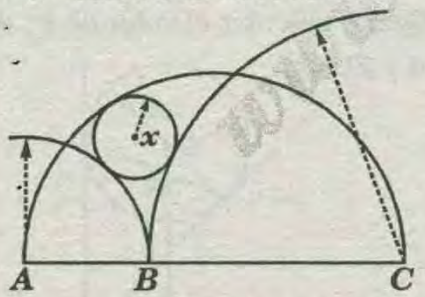
13 En la figura mostrada:

$AQ=8$ y $(AB)^2+(OQ)^2=100$. Calcular el radio de la semicircunferencia de centro O



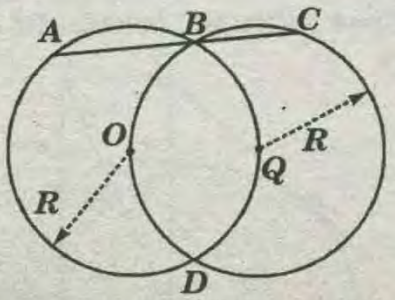
A) 8 B) 6 C) 10 D) $2\sqrt{2}$ E) 7

14 En la figura: $\overline{AC}$ es diámetro, A y C son centros; $AB=2$ y $BC=4$. Calcular el valor de "x"



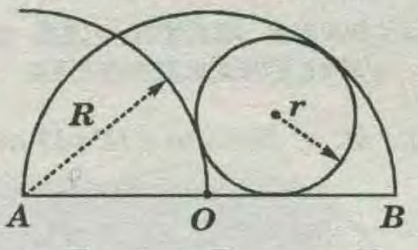
A) 4/3 B) 2/3 C) 1 D) 1/2 E) 2

15 En la figura: $AB=5$ y $BC=3$. Calcular BD



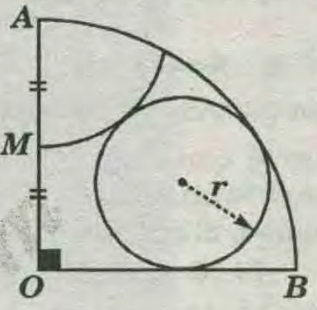
A) 4 B) 6 C) $4\sqrt{3}$ D) 7 E) $4\sqrt{6}$

16 Calcular el valor de "r", si: $AO=OB=R$. (O es centro de la semicircunferencia).



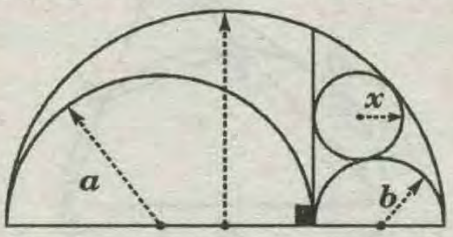
A) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{R\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{R\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{R\sqrt{6}}{3}$ E) $\frac{R\sqrt{3}}{8}$

17 Calcular el valor de "r", si: $AO=OB=2$ m



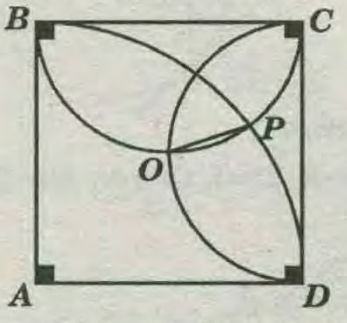
A) 2/5 B) 3/7 C) 7/11 D) 7/10 E) 1/4

18 Calcular el valor de "x" en función de a y b



A) $\sqrt{a^2-b^2}$ B) $\frac{ab}{a+b}$ C) $\frac{2ab}{a+b}$
D) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ E) $\sqrt{a^2+b^2+ab}$

19 En la figura: $ABCD$ es un cuadrado. Calcular PO, si $AB=\sqrt{10}$ m



A) $\sqrt{3}$ m B) 1,5 m C) 2 m D) 1 m E) 3 m

20 Se tiene un cuadrilatero $ABCD$ cuyas diagonales se intersecan en O, tal que: $AO=2$, $OD=3$ y $AD=4$. Calcular BC, si la $m\sphericalangle ABD=m\sphericalangle ACD=90°$.

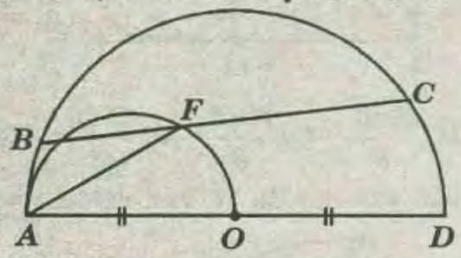
A) 0,6 B) 1,5 C) 1,25 D) 1 E) 3/4

WWW.GRATIS.COM

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

RELACIONES METRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

01 Calcular AF, si: $BF=3\ m$ y $FC=12\ m$

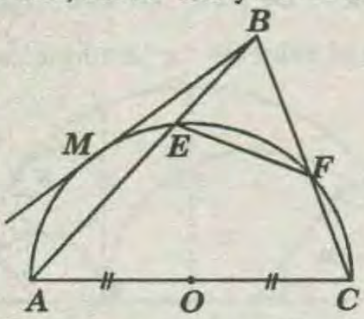


A) $\sqrt{8}\ m$ B) $2\sqrt{5}\ m$ C) $8\ m$ D) $2\sqrt{5}\ m$ E) $6\ m$

02 En una circunferencia, de radio 13, se trazan dos cuerdas que se cortan en L. Si el producto de los 4 segmentos formados es 625, calcular la distancia del punto L al centro de la circunferencia

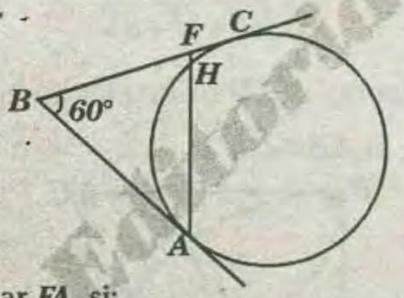
A) 12 B) 11 C) 10 D) 8 E) 6

03 Calcular BM, si: $AB=AC$ y $EF=4\ m$



A) $8\ m$ B) $6\sqrt{2}\ m$ C) $4\ m$ D) $4\sqrt{2}\ m$ E) $2\sqrt{2}\ m$

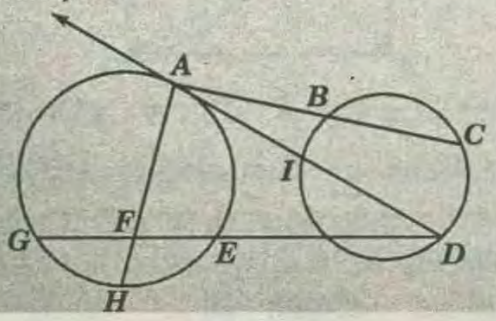
04 En la figura mostrada: $AB=BC=8\ m$ y $BF=3\ m$. Calcular HF



A) 3
B) 2
C) 24/7
D) 25/7
E) 25/4

05 Calcular FA, si:

$AB=6$, $BC=ED=8$, $ID=5$, $GF=4$ y $FH=3$. (A es punto de tangencia)

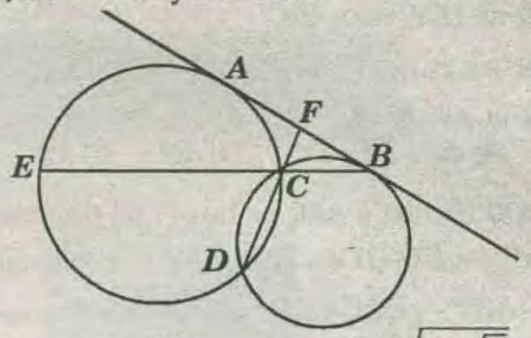


A) 10
B) 7
C) 6
D) 8
E) 5

06 Se tiene un cuadrado $ABCD$, en el $\overset{\frown}{AD}$ se considera el punto E, tal que: $AE+EC=4\sqrt{2}$. Calcular BE

A) 2 B) 4 C) $2\sqrt{2}$ D) 6 E) 8

07 Calcular FC en la figura, sabiendo que $AB=CD$, $EC=16\ m$ y $BC=2\ m$

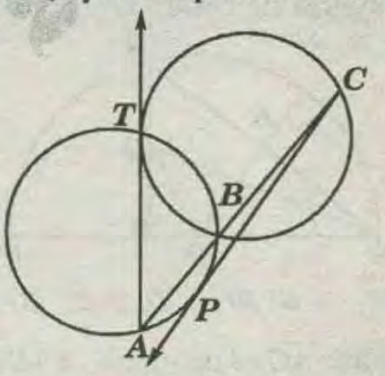


A) 3 B) 6 C) $3\sqrt{2+\sqrt{2}}$

D) $3(\sqrt{2}-1)$ E) $3(\sqrt{2}+1)$

08 De la figura siguiente, calcular AC, si:

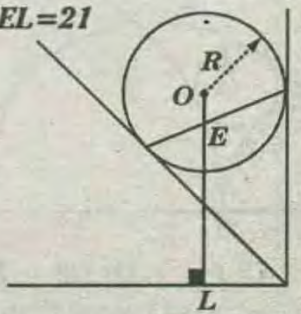
$AT=12$ y $CP=9$ (T y P son puntos de tangencia)



A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

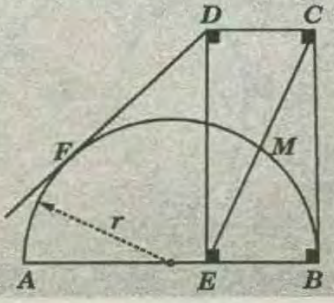
09 En la figura, calcular el valor de R, si:

$OE=4$ y $EL=21$



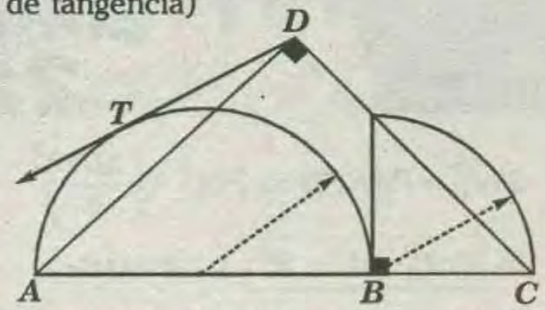
A) 5 B) 8 C) 9 D) 10 E) 7

10 Si: $r.(DC)=6$ y $EM=MC$, calcular DF (F es punto de tangencia)



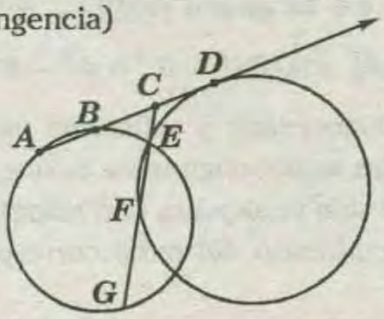
A) $2\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) 6 E) $4\sqrt{2}$

11 En la figura: $AB=3(BC)=6$. Calcular DT (T es punto de tangencia)



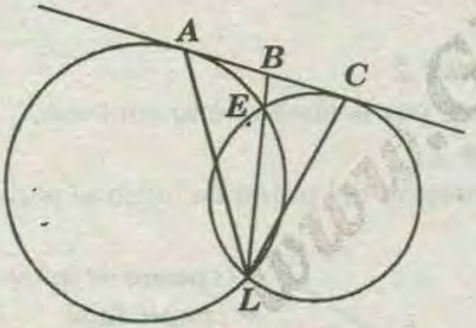
A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{3}$

12 Calcular FG, si: $AB=BC=CD$ y $CF=9$ (D es punto de tangencia)



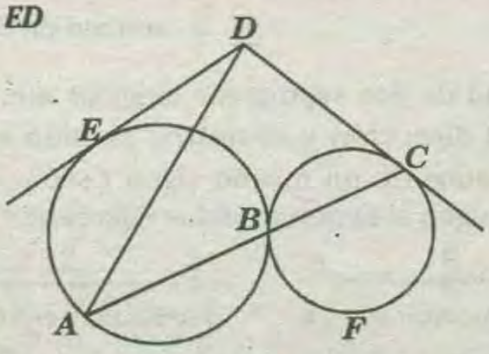
A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

13 En la figura: A y C son puntos de tangencia; $BC=2(BE)$ y $(AL)^2+(LC)^2=160$. Calcular AB



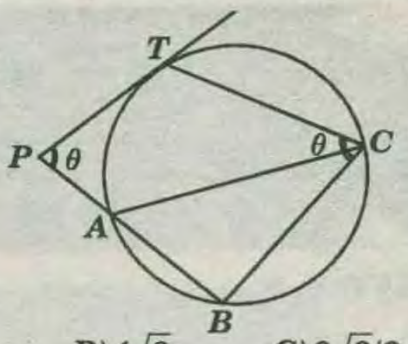
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14 Si: $m\overset{\frown}{AB}+m\overset{\frown}{BC}=4(m\sphericalangle ADC)$, $AB=5$ y $BC=4$, calcular ED



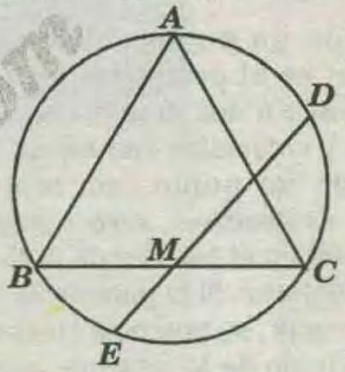
A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 7

15 Calcular AC, si: $PA=2$, $AB=4$ y $BC=6$



A) $6\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $8\sqrt{3}/3$
D) $10\sqrt{3}/3$ E) $10\sqrt{3}/7$

16 En la figura adjunta, el triángulo ABC es equilátero, M es punto medio del lado $\overline{BC}$ y D es punto medio del $\overset{\frown}{AC}$. Si x e y representan las longitudes de los segmentos $\overline{DM}$ y $\overline{ME}$, respectivamente, calcular x/y



A) 5/3 B) 2 C) 4 D) 8/3 E) 7/3

17 En un triángulo equilátero ABC. la circunferencia ex-inscrita relativa a $\overline{BC}$ es tangente en M y N a las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente; sobre el arco mayor $\overset{\frown}{MN}$ se ubica un punto F, tal que: $AF=10$ m y $MF\times NF=18$ m^2. Calcular AM

A) 4 m B) 6 m C) 5 m D) 7 m E) 8 m

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)E	2)D	3)E	4)B	5)B	6)C	7)C	8)D	9)B	10)D
11)B	12)D	13)B	14)D	15)D	16)D	17)C			

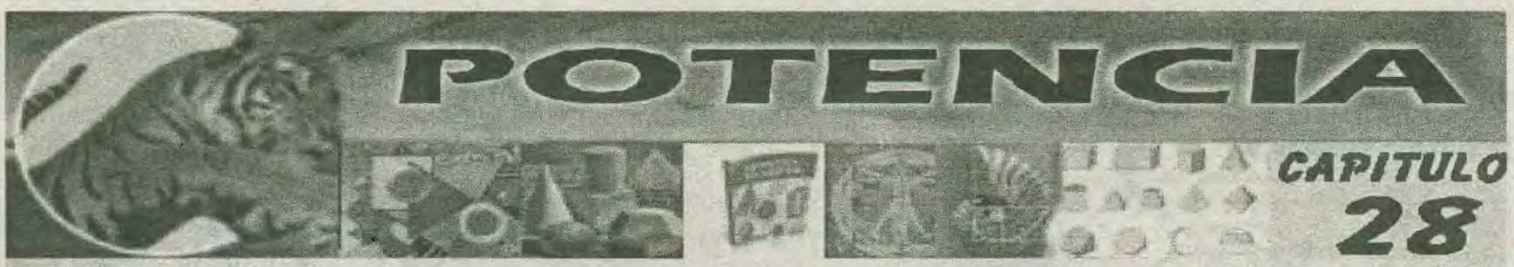
CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)A	2)B	3)A	4)C	5)D	6)C	7)B	8)A	9)C	10)A
11)D	12)A	13)B	14)B	15)D	16)B	17)D	18)B	19)D	20)D

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1)E	2)A	3)D	4)D	5)D	6)B	7)D	8)C	9)D	10)A
11)B	12)C	13)C	14)C	15)D	16)E	17)E			

www.GRATIS2.com



POTENCIA

CAPITULO 28

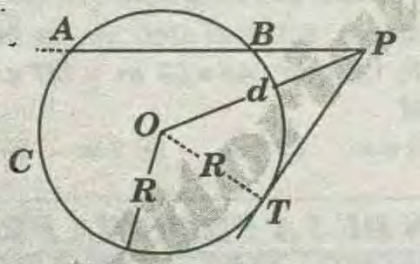
OBJETIVOS :

* Conocer la definición de potencia de un punto respecto a una circunferencia.
* Establecer cuándo la potencia es positiva o negativa.
* Comprender la definición del eje radical para aplicarla correctamente.
* Definir el centro radical.

INTRODUCCIÓN :

La potencia de un punto con respecto a una circunferencia es el producto de las distancias dirigidas del punto a dos puntos cualesquiera de la circunferencia y colineales con aquel. Se sigue que la potencia de un punto con respecto a una circunferencia es ***positiva*** , ***cero*** o ***negativa***, según que el punto esté en el exterior de la circunferencia, en ella o en su interior. Si el punto está en el exterior de la circunferencia , su potencia con respecto a ella es igual al cuadrado de la tangente que va desde el punto a la circunferencia ; si el punto está en el interior, su potencia con respecto a la circunferencia es el negativo del cuadrado de la mitad de la cuerda perpendicular al diámetro que pasa por el punto dado.

I)



$$Pot_C^P = PA \times PB \Rightarrow Pot_C^P = (PT)^2$$

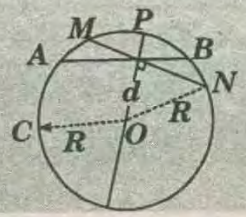
$$\Rightarrow \boxed{Pot_C^P = d^2 - R^2} \; ; d = OP$$

NOTA:

Si P está en la circunferencia $C \Rightarrow d = R$

II)

$$Pot_O^P = d^2 - R^2 = 0$$



$$Pot_C^P = PA \times PB \Rightarrow Pot_C^P = \left(\frac{MN}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{Pot_O^P = d^2 - R^2} \; ; \quad d = OP$$

Sea P un punto del plano de una circunferencia C de centro O y de radio R. Entonces, la potencia de P con respecto a C es igual a $(OP)^2 - R^2$

$$Pot_C^P = (OP)^2 - R^2 = d^2 - R^2$$

La condición necesaria y suficiente para que dos circunferencias sean ortogonales, es que la potencia del centro de una cualquiera con respecto a la otra sea igual al cuadrado del radio correspondiente a aquella.

SEGMENTOS DIRIGIDOS :

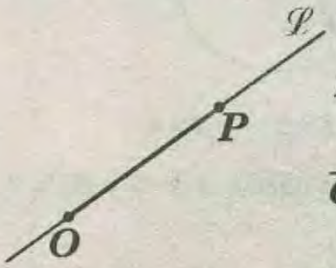
Son segmentos que tienen un punto de inicio y un punto de final ; por lo tanto , tienen dirección y sentido.

DIRECCIÓN :

se establece por la línea que lo contiene

SENTIDO :

es la orientación del punto de inicio al punto final .

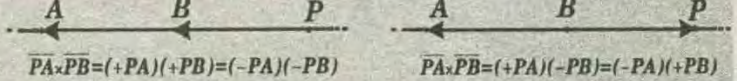


O : punto de inicio

P : punto final

$\overline{OP}$ segmento de dirección $\overline{\mathscr{L}}$ y sentido de O a P.

La longitud de dos segmentos dirigidos que tienen la misma dirección y el mismo sentido estarán acompañados de un mismo signo $(+$ ó $-)$, y de diferente signo si tienen sentidos diferentes .



$\overline{PA} \times \overline{PB} = (+PA)(+PB) = (-PA)(-PB)$ $\quad$ $\overline{PA} \times \overline{PB} = (+PA)(-PB) = (-PA)(+PB)$

Consideraremos como producto de segmentos dirigidos al producto de sus longitudes acompañados con respectivo signo .

$\overline{AB}\times\overline{CD}=(\pm AB)(\pm CD)$

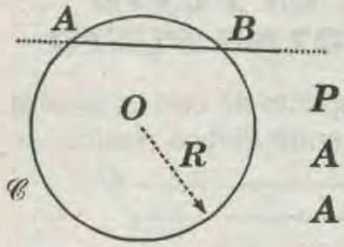
POTENCIA

Es el producto de los segmentos dirigidos de un punto, a cualquier par de puntos en la circunferencia, tal que resulten colineales con él.

NOTACIÓN :

pot. $P(\mathscr{C})$: potencia de $\mathscr{C}$ dependiendo de la posición del punto P, respecto a al circunferencia $\mathscr{C}(O;R)$, tenemos.

I Si P es exterior a una circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O y radio $R.(\mathscr{C}(O;R))$.



P: exterior a $\mathscr{C}$

$A\in\mathscr{C}$ y $B\in\mathscr{C}$; $(A\neq B)$

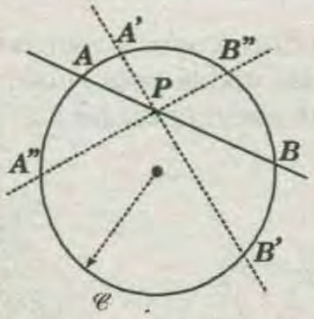
A; B y P son colineales

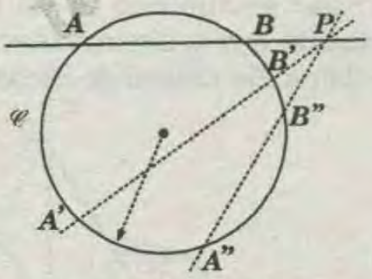
$Pot.P(\mathscr{C})=(-PA)\times(-PB)$

$\Rightarrow \boxed{Pot.P(\mathscr{C})=PA\times PB}$

OBSERVACIONES:

* Sea una circunferencia $\mathscr{C}$ y un punto P contenidos en un mismo plano. Si P se traza una recta secante a $\mathscr{C}$ en A y B; entonces; el producto de las longitudes de los segmentos PA y PB es constante.

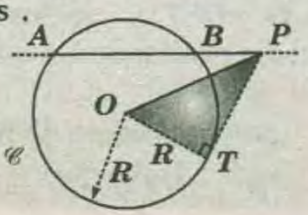




$(PA)\times(PB)=(PA')\times(PB')=...=cte.$ $(PA)\times(PB)=(PA')\times(PB')=...=cte.$

Esta propiedad característica de las relaciones métricas en la circunferencia no sugiere formular el concepto de potencia y, con ello, el concepto de segmentos dirigidos.

*



* Por teorema de las tangentes :

$PA\times PB=(PT)^2$

$\triangle PTO$:

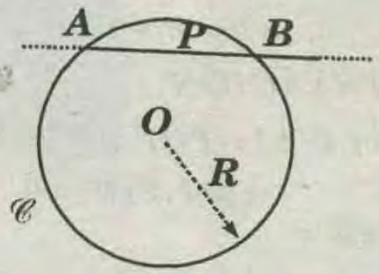
$(PT)^2=(PO)^2-R^2$

$\Rightarrow Pot\ P(\mathscr{C})=(PT)^2 \Rightarrow \boxed{Pot.P(\mathscr{C})=(PO)^2-R^2}$

* La potencia de P respecto de $\mathscr{C}$ es igual a cuadrado de la longitud del segmento tangente trazado de P a $\mathscr{C}$.

* La potencia de P respecto de $\mathscr{C}$ es igual a la diferencia de cuadrados, de la distancia de P al centro O y el radio R.

II Si P es interior a una circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O y radio $R(\mathscr{C}(O,R))$.



P: interior a $\mathscr{C}$

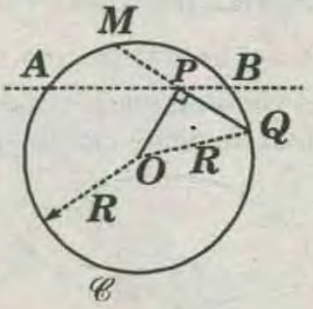
$A\in\mathscr{C}$ y $B\in\mathscr{C}$; $(A\neq B)$

A; B y P son colineales

$Pot.P(\mathscr{C})=(-PA)(+PB)$

$\Rightarrow Pot.P(\mathscr{C})=-PA\times PB$

NOTA :



$Pot.P(\mathscr{C})=(-PM)\times(PQ)$

* Como : $PM=PQ$

* Entonces : $Pot.P(\mathscr{C})=-(PQ)^2$

* También : $(PQ)^2=R^2-(PO)^2$

$\rightarrow Pot.P(\mathscr{C})=(PQ)^2-R^2$

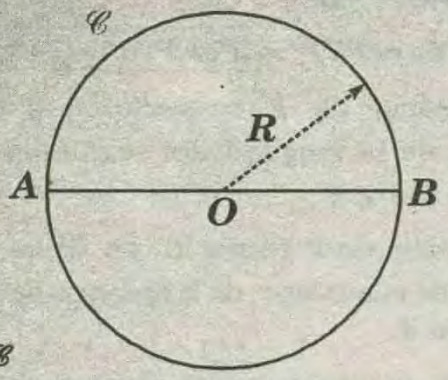
$\Rightarrow Pot.P(\mathscr{C})=(PO)^2-R^2 \ \vee \ Pot.P(\mathscr{C})=(PO)^2-R^2$

♠ La potencia de P respecto de $\mathscr{C}$ es igual a menos el cuadrado de la longitud de la semicuerda por P.

♠ La potencia de P respecto de $\mathscr{C}$ es igual a la

diferencia de cuadrados, de la distancia de P al centro y el radio R.

III Si P pertenece a la circunferencia $\mathscr{C}$.



Si : $P \in \mathscr{C}$

$\Rightarrow P=B \quad \Rightarrow PB=0$

$Pot.P(\mathscr{C}) = (PA)\times(PB) = (PA)\times(0)$

$\Rightarrow Pot.P(\mathscr{C}) = 0$

OBSERVACIÓN :

$Pot.P(\mathscr{C}) : (PO)^2 - R^2 = (R)^2 - R^2 = 0$

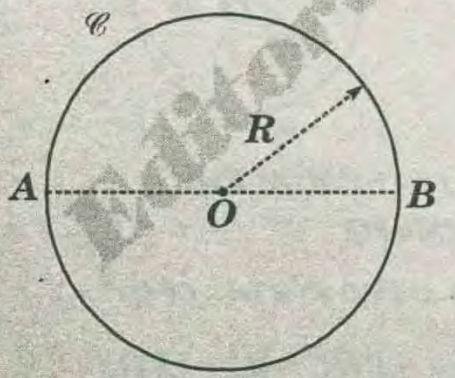
$\rightarrow pot.P(\mathscr{C}) = 0$

NOTAS :

◆ De **I** ; **II** y **III** podemos concluir que la potencia de un punto P, respecto de una circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O y radio R $(\mathscr{C}(O;R))$, es igual a la diferencia de cuadrados de la distancia de P al centro (O) y el radio (R) de la circunferencia.

$$Pot.P(\mathscr{C}(O,R)) = (PO)^2 - R^2$$

◆ La potencia del centro de una circunferencia respecto a dicha circunferencia es igual a menos al cuadrado del radio de dicha circunferencia .

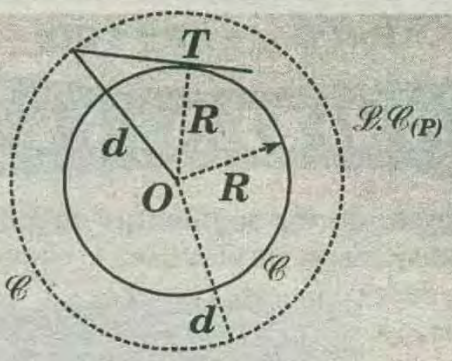


$Pot.O(\mathscr{C}(O,R)) = (-OA)(+OB)$

$\Rightarrow Pot.O(\mathscr{C}(O,R)) = (-R)(R) = -R^2$

$\Rightarrow Pot.O(\mathscr{C}(O;R)) = -R^2$

◆ Los puntos cuya potencia respecto de una circunferencia en un valor fijo (K) pertecen a una circunferencia concéntrica a la primera , si $K>0$.



T : punto de tangencia para todo punto P.

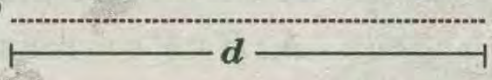
$$Pot.O(O;R)) = (PT)^2 = K$$

$$OPT : (PT)^2 + R^2 = d^2$$

Como $(PT)^2 = K = cte$, y R es constante por lo tanto d es diferente .

POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO DE OTRO PUNTO

La potencia de un punto respecto de otro es igual al cuadrado de las distancias entre dichos puntos.



$$Pot.P(O) = d^2$$

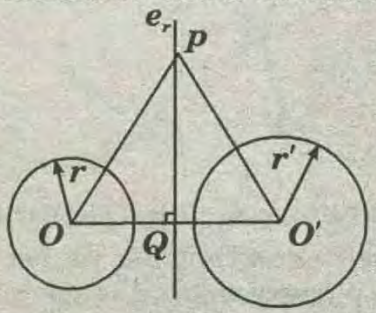
Un punto es considerado como una circunferancia de radio nulo (circunferencia puntual), por lo que al ubicar los puntos A y B en la circunferencia colineales con P , $A = B = O(O\ centro\ de\ \mathscr{C})$

De esta manera , $PA = PB = PO$

$$\rightarrow Pot.\ P(O) = (PO)^2 = d^2$$

EJE RADICAL

El lugar geométrico de un punto cuyas potencias respecto a dos circunferencias dadas sean iguales se llama eje radical de dichas circunferencias.



Consideramos dos circunferencias no concéntricas con centros O y O' y radios (r y r') y es P un punto del eje radical de las dos circunferencias . Sea P a OO'.

* Entonces : (por el teorema de potencias)

$$(PQ)^2 - (r)^2 = (PO')^2 - (r')^2$$

* restando $(PQ)^2$ de cada miembro tenemos :

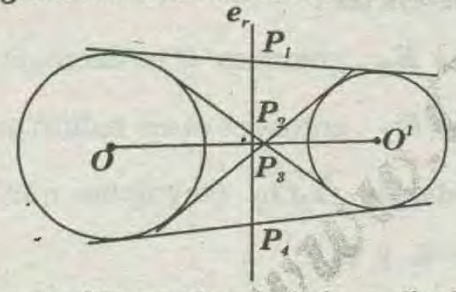
$(OQ)^2-(r)^2=(QO')^2-(r')^2$ o sea

$(OQ+QO')(OQ-QO')=(r)^2-(r')^2$ en donde

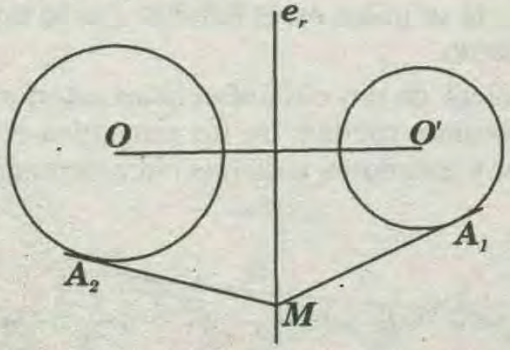
$$OQ-QO'=\frac{(r^2-r'^2)}{OQ+QO'}\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

Ahora sólo hay un punto Q sobre OO' que satisface la relación (I) , ya que si R es uno de esos puntos, tenemos : $OQ-QO'=OR-RO'$ o sea $(OR+RQ)-QO'=OR-(RQ+QO')$ o bien $OR+RQ=OR-RQ$ entonces $RQ=0$, o sea que R coincide con Q , se sigue que si un punto está en el eje radical de las dos circunferencias está en la perpendicular a la recta que une los centros en el punto Q. Recíprocamente, invirtiendo los pasos anteriores, puede demostrarse que un punto que esté en la perpendicular a OO' en Q estará en el eje radical de las dos circunferencias es la perpendicular a OO' en el punto Q.

♠ El eje radical pasa por el punto medio P de los segmentos de las tangentes comunes a las dos cirunferencias son exteriores admiten cuatro tangentes comunes y los cuatro puntos medios de dichos segmentos están en la línea recta .



♠ Todo punto M tomado en el eje radical y exterior a las dos circunferecias , es el centro de una circunferencia a la dos dadas.

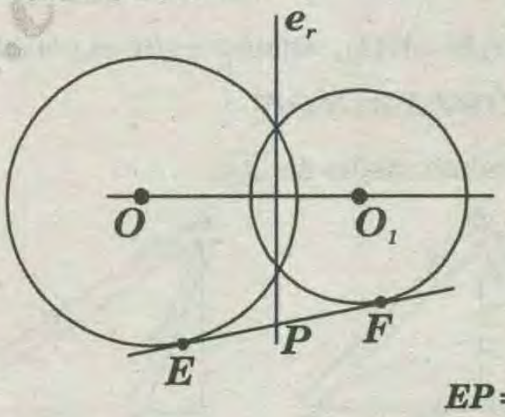


Las tangentes MA; MA' son radios de éstas circunferencias ortorgonales.

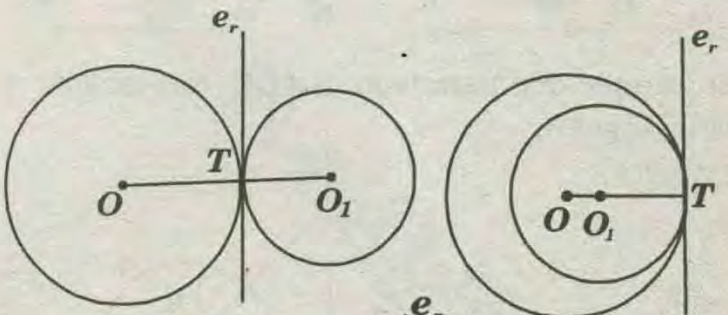
♠ ***Si la circunferencias son secantes :*** El eje radical es la recta soporte de la cuerda común , pues los puntos comunes tiene igual potencia (nula) respecto a las dos circunferencias. Dicha recta es penpendicular a la línea de los centros.

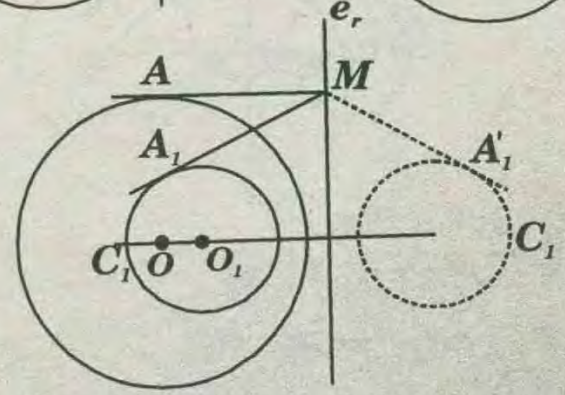
♠ ***Si las circunferencias son tangentes :*** El eje radical es la tangente común en el punto de contacto, pues este punto tiene potencia nula respecto a las dos circunferencias , y la tangente es perpendicular a la línea de los centros . Las circunferencias pueden ser tangentes interiores o exteriores.

♠ ***Si las circunferencias no tienen puntos comunes:*** En este caso el eje radical no puede tener ningún punto común con ninguno de las dos circunferencias , pues este punto tendría potencia nula respecto a una y no nula respecto de la otra . Si las circunferencias son exteriores el eje radical pasa por los puntos medios de los segmentos tangentes comunes a ambas circunferencias. Si una circunferencia es exterior a la otra , el eje radical es exterior a las circunferencias concéntricas está en el infinito(recta impropia).



$EP=PF$

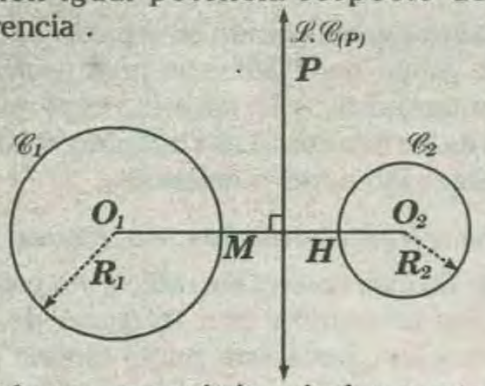




$MA=MA_1=MA'_1$

DEFINICIÓN :

El eje radical de dos circunferencias coplanares y no concéntricas es el lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto de dichas circunferencia .



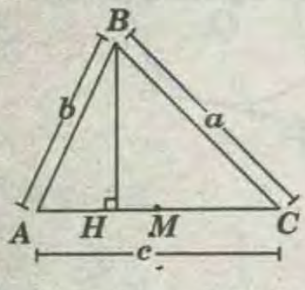
$\mathscr{L}.\mathscr{L}_{(p)}$: lugar geométrico de los puntos P que tienen igual potencia respecto de $\mathscr{C}_{(1)}$ y $\mathscr{C}_{(2)}$ entonces $Pot.P(\mathscr{C}_1) = Pot.P(\mathscr{C}_2)$.

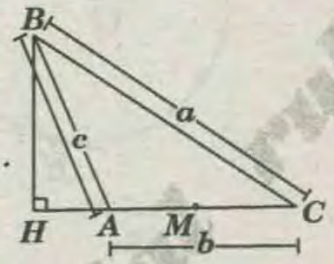
◆ $\overline{PH} \perp \overline{O_1O_2}(\overline{PH} : \mathscr{L}.\mathscr{L}_{(p)})$

◆ Si $O_1M=MO_2$, entonces MH es constante.

DEMOSTRACIÓN :

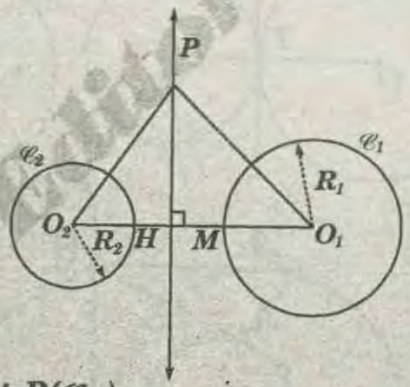
Si M es punto medio de $\overline{AC}$.





Se cumple que para todo $\triangle ABC$ (acutángulo u obtusángulo).

CASO 1 :



$Pot.P(\mathscr{C}_1)=Pot.P(\mathscr{C}_2)$

$(PO_1)^2 - R_1^2=(PO_2)^2 - R_2^2$

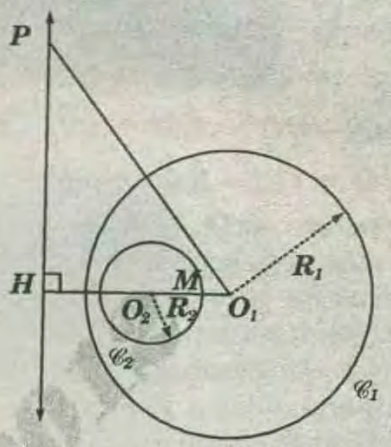
$\left|(PO_1)^2 - (PO_2)^2\right|=\left|R_1^2 - R_2^2\right|$

$2(O_1O_2)(HM)=\left|R_1^2 - R_2^2\right|$

$\rightarrow HM=\dfrac{\left|R_1^2 - R_2^2\right|}{2(O_1O_2)} \rightarrow MH$: constante

Como M es un punto fijo, entonces H es un punto fijo de $\overline{O_1O_2}$, para todo P que satisface la condición inicial y donde $\overline{PH} \perp \overline{O_1O_2}$.

CASO 2 :



Análogamente al caso anterior, H es un punto fijo de la recta O_1O_2, para todo P que tiene igual potencia respecto de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, donde $\overline{PH} \perp \overline{O_1O_2}$,.

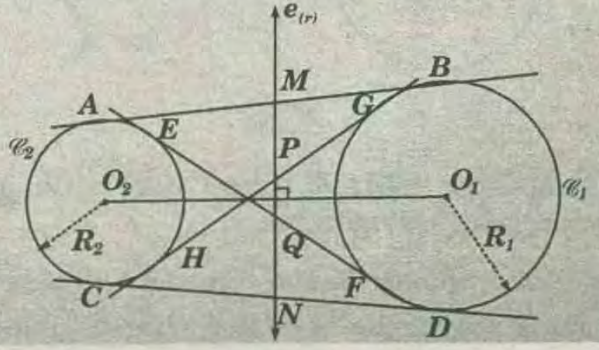
♠ El eje radical de dos circunferecias es perpendicular a la recta que pasa por los centros de las circunferencias .

♠ Si $R_1 \neq R_2$, entonces H es diferente de M.

♠ Si $R_1 = R_2$, entonces el eje radical pasa por el punto medio de $\overline{O_1O_2}$ (segmento que une los centros de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$).

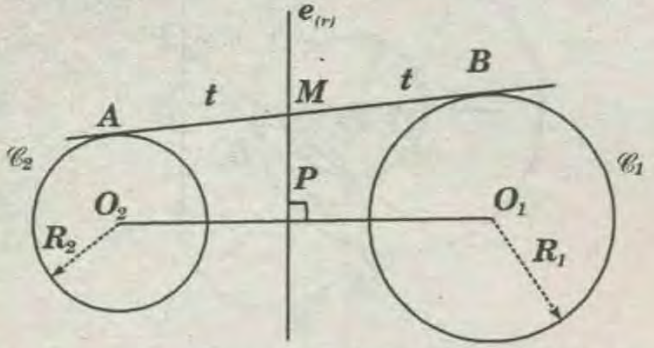
♠ Las circunferencias no pueden ser concéntricas $(O_1O_2=O)$; de lo contrario MH es indeterminado , es decir , H se ubica en el infinito , por lo tanto , no está definido.

El eje radical de dos circunferencias exteriores pasa por los puntos medios de las tangentes comunes interiores y exteriores a dichas circunferencias.



$e_{(r)}$; eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$. M,N,P y Q son puntos medios de $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{GH}$ y $\overline{EF}$, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN :



$\overleftrightarrow{AB}$: tangente común exterior de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$. si M es punto medio de $\overline{AB}$, confirmamos que $MA=MB=t$.

sabemos :

$Pot.M(\mathscr{C}_1)=(MB)^2=t^2$

$Pot.M(\mathscr{C}_2)=(MA)^2=t^2$

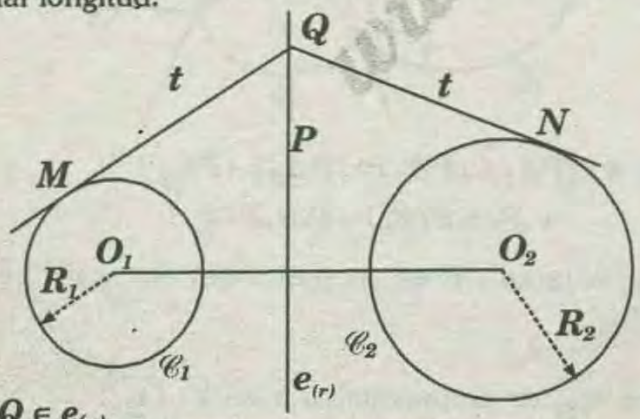
$\rightarrow Pot.M(\mathscr{C}_1)=Pot.M(\mathscr{C}_2)$

Así, M pertenece al eje radical $(e_{(r)})$ de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

análogamente M, P y Q pertenecen a $e_{(r)}$.

PROPIEDADES

● Si desde un punto del eje radical de dos circunferencias se trazan tangentes dichas circunferencias los segmentos tangentes comparten igual longitud.



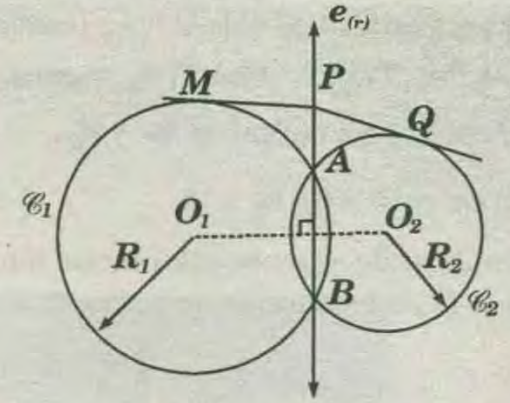
Si $Q \in e_{(r)}$

$e_{(r)}$: eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

$$\Rightarrow Pot.Q(\mathscr{C}_1)=Pot.Q(\mathscr{C}_2)$$

* Es decir : $(QM)^2=(QN)^2 \Rightarrow QM=QN$

● El eje de dos circunferencias secantes es la recta que pasa por sus puntos de intersección.



Sea

$$\mathscr{C}_2 \cap \mathscr{C}_2=\{A;B\}$$

$$\Rightarrow \text{el } \overleftrightarrow{AB} \text{ es el } e_{(r)}$$

$e_{(r)}$: eje radical respecto de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

DEMOSTRACIÓN :

$Pot.A(\mathscr{C}_1)=Pot.A(\mathscr{C}_2)=cero$

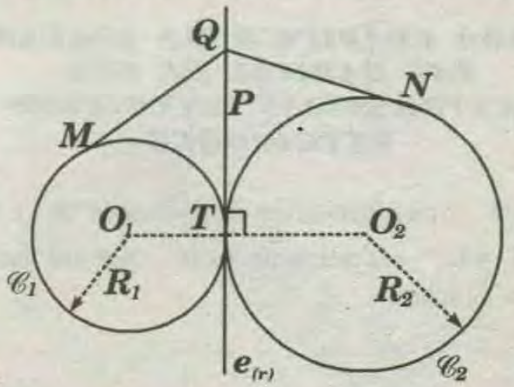
$Pot.B(\mathscr{C}_1)=Pot.B(\mathscr{C}_2)=cero$

Dado que los puntos A y B pertenecen al eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ pero se sabe que una recta es determinada por dos puntos , entonces la recta AB es el eje radical respecto de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

● Si : $P \in e_{(r)} \rightarrow PM=PQ$.

Resultando así que M y Q puntos de tangencia .

● El eje radical de dos circunferencias tangentes exteriores es la recta tangente común interior



Sea $\overleftrightarrow{PT}$ la recta tangente común interior de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

$\rightarrow \overleftrightarrow{PT}$: es el eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

DEMOSTRACIÓN :

En $\mathscr{C}_1$: $QT=QM$ (M y T : puntos de tangencia)

$\mathscr{C}_2$: $QT=QN$ (N y T : puntos de tangencia)

$\Rightarrow QM=QN$

$\Rightarrow Pot.Q(\mathscr{C}_1)=Pot.Q(\mathscr{C}_2)$

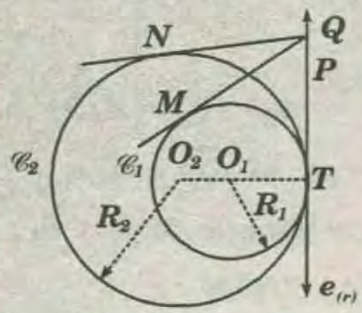
Es decir Q pertenece al eje radical ($e_{(r)}$), asi también

$$\rightarrow Pot.T(\mathscr{C}_1) = Pot.T(\mathscr{C}_2) = cero$$

Al pertenecer T al eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

$\Rightarrow \overline{PT}$ el eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

● El eje radical de dos circunferencias tangentes interiores es la recta tangente común exterior.



DEMOSTRACIÓN :

En $\mathscr{C}_1$: $QT = QM$ (T y M : puntos de tangencia)

En $\mathscr{C}_2$: $QT = QN$ (T y N : puntos de tangencia)

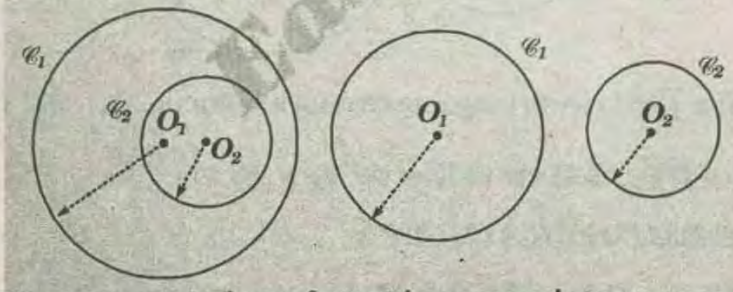
$$\Rightarrow QM = QN(\mathscr{C}_1)$$

$$\Rightarrow Pot.Q(\mathscr{C}_1) = Pot.Q(\mathscr{C}_2)$$

Es decir Q pertenece a $e_{(r)}$ (eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$), también $Pot.T(\mathscr{C}_1) = Pot.T(\mathscr{C}_2) =$ cero. por lo tanto , análogamente al caso anterior , $\overline{PT}$ es eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

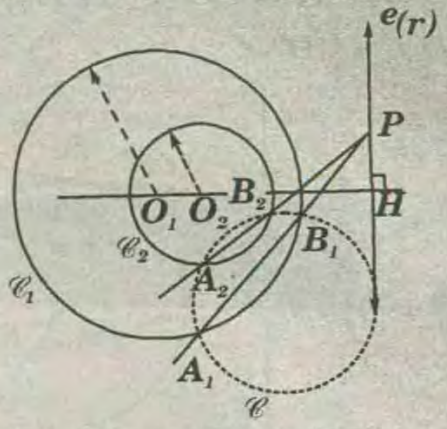
METODO GRÁFICO PARA HALLAR EL EJE RADICAL DE DOS CIRCUFERENCIAS INTERIORES O EXTERIORES

Dadas dos circunferencias coplanares $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, de centro O_1 y O_2, respectivamente , que no tienen un punto en común.



Se traza una circunferencia $\mathscr{C}$ que interseca a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ en $A_1; B_1$ y $A_2; B_2$, respectivamente se P el punto de intersección de las rectas $A_1; B_1$ y $A_2; B_2$. La recta perpendicular a la $\overline{O_1O_2}$, trazada por P es eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

INTERIORES (CASO I)



En $\mathscr{C}$: $(PA_1).(PB_1) = (PA_2).(PB_2)$

$$\rightarrow Pot.P(\mathscr{C}_1) = Pot.P(\mathscr{C}_2)$$

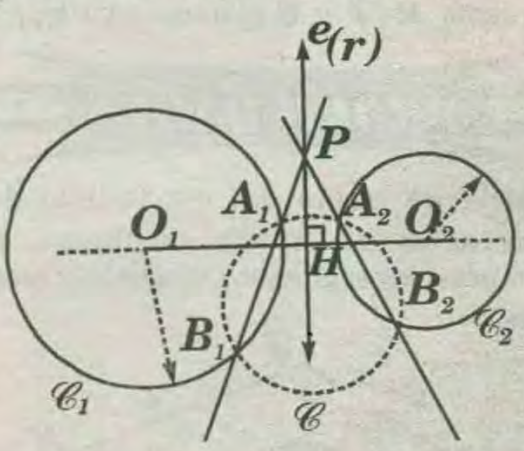
Por lo tanto , P es un punto del eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

Como $e_{(r)}$ es perpendicular a la $\overline{O_1O_2}$.

$\rightarrow \overline{PH}$: es eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

$e_{(r)}$: eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

EXTERIORES (CASO II) :



* En $\mathscr{C}$: $(PA_1).(PB_1) = (PA_2).(PB_2)$

$$\rightarrow Pot.P(\mathscr{C}_1) = Pot.P(\mathscr{C}_2)$$

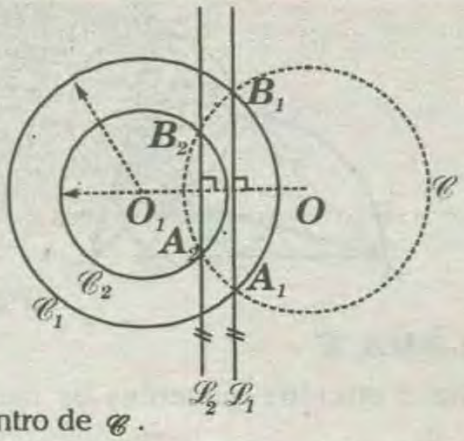
* Por lo tanto , P es un punto del eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

Como $e_{(r)}$ es perpendicular a ala $\overline{O_1O_2}$.

$\rightarrow \overline{PH}$ es eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

OBSERVACIÓN :

Cuando las circunferencias son concéntricas (caso particular de interiores), el punto P se encuentra en el infinito , es decir , el eje radical no está determinado para este caso .



Sea O centro de $\mathscr{C}$.

$$\Rightarrow \overline{O_1O} \perp \overline{A_1B_1}; \Rightarrow \vec{\mathscr{L}}_1 // \vec{\mathscr{L}}_2$$

entonces P, que es la intersección de $\vec{\mathscr{L}}_1$ y $\vec{\mathscr{L}}_2$, y se encuentre en el infinito

Dos rectas paralelas se intersecan en el infinito (si $\vec{\mathscr{L}}_1 // \vec{\mathscr{L}}_2 \rightarrow \vec{\mathscr{L}}_1 \cap \vec{\mathscr{L}}_2 = \phi$).

* En geometría proyectiva, el punto de intersección de dos rectas paralelas es llamado ***punto impropio***, por lo que el eje radical para este caso en una recta impropia.

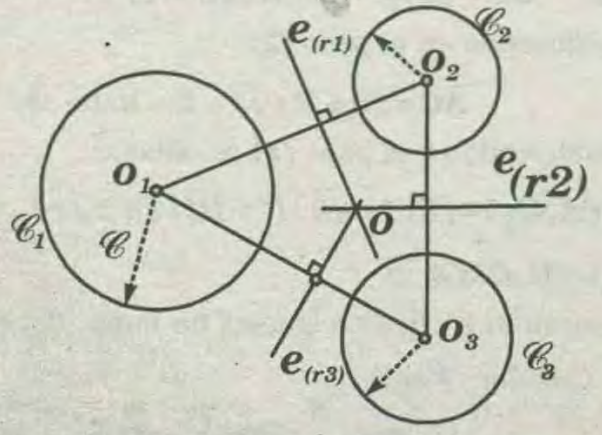
CENTRO RADICAL

Es el punto de concurrencia de los ejes radicales de tres circunferencias tomados de dos en dos.

O : centro radical respecto de $\mathscr{C}_1$; $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$.

PROPIEDAD :

Dadas tres circuferencias coplanares no concéntricas, cuyos centros no son colineales , los ejes radicales de las circunferencias tomadas de dos en dos son concurrentes .



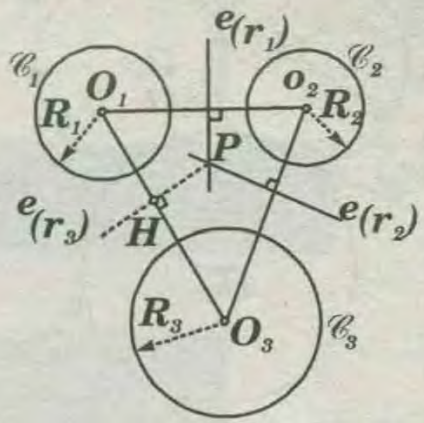
$e_{(r1)}$: eje radical respecto de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

$e_{(r2)}$: eje radical respecto de $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$

$e_{(r3)}$: eje radical respecto de $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_1$

DEMOSTRACIÓN :

Sea P el punto de intersección de los ejes radicales de $\mathscr{C}_1$; $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_2$; $\mathscr{C}_3$.



Entonces :

$Pot\,P.(\mathscr{C}_1) = Pot.P(\mathscr{C}_2)$

$(PO_1)^2 - R_1^2 = (PO_2)^2 - R_2^2$ .....(α)

$Pot\,P.(\mathscr{C}_2) = Pot.P(\mathscr{C}_3)$

$(PO_2)^2 - R_2^2 = (PO_3)^2 - R_3^2$ .....(β)

* De (α) y (β) : $(PO_1)^2 - R_1^2 = (PO_3)^2 - R_3^2$

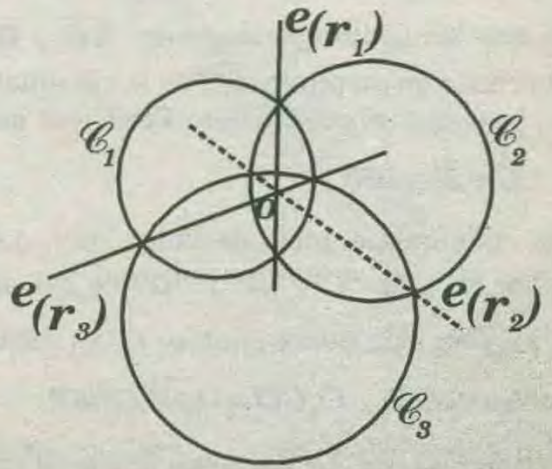
Entonces P pertenece al eje radical de $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_1$. por lo tanto , $\overleftrightarrow{PH}$ es eje radical de $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_1$, con lo cual queda demostrado que los ejes radicales de $\mathscr{C}_1;\mathscr{C}_2;\mathscr{C}_2,\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_3;\mathscr{C}_1$ son concurrentes en P.

$\rightarrow P = O$.

O : centro radical respecto de $\mathscr{C}_1;\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$

EN PARTICULAR :

1)



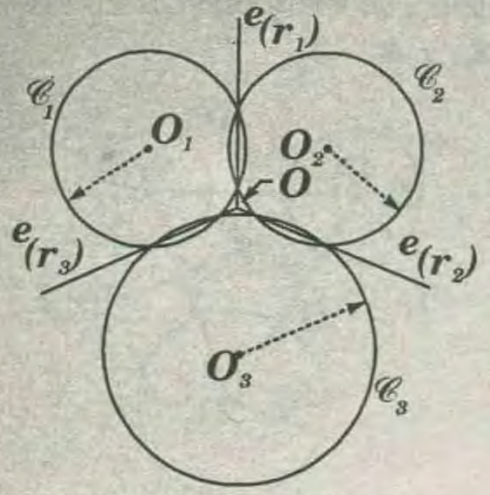
$e_{(r_1)}$: eje radical respecto de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

$e_{(r_2)}$: eje radical respecto de $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$

$e_{(r_3)}$: eje radical respecto de $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_1$

O: centro radical respecto de $\mathscr{C}_1$; $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$.

2)



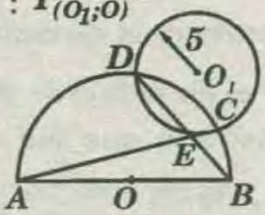
O: centro radical respecto de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Siendo : $O>O_1$, Los centros de los círculos mostrados, calcular : $P_{(O_1;O)}$

A) $5m^2$
B) 10
C) 15
D) 25
E) N.A



RESOLUCIÓN :

* Para aprovechar el diámetro $\overline{AB}$ se traza $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, entonces : $A\hat{D}B=A\hat{C}B=90°$

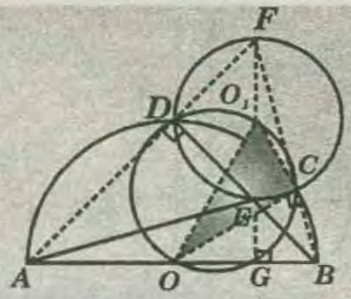
* Osea que las prolongaciones de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se deberán cortar en un punto ***"F"*** de la circunferencia menor , para que el cuadrilátero ***EDFC*** sea inscrito, ya que : $\hat{C}+\hat{D}=180°$.

* Ahora , la circunferencia de Euler , del $\triangle ABF$, pasará por los pies ***"C"***, ***"D"*** y ***"G"*** de sus alturas, siendo $\overline{OO_1}$ su diámetro ya que el $\hat{G}$ es recto.

* En consecuencia : $O_1\hat{C}O=O_1\hat{G}O=90°$

* Es decir que : $\overline{O_1C}\perp\overline{OC}$, o sea que los 2 círculos son otorgonales ,siendo $\overline{O_1C}=5m$, tangente al semicírculo, se tendrá que :

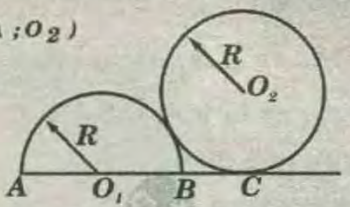
$$P_{(O_1;O)}=\overline{O_1C}^2=5^2=25m^2$$



RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

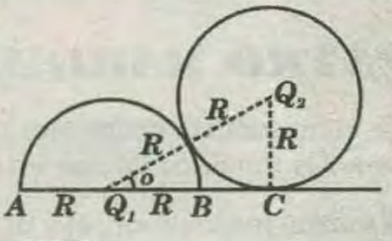
Se muestra 2 círculos tangentes de igual radio. Calcular : $P_{(A;O_2)}$



RESOLUCIÓN :

* Como ***"A"*** es punto exterior al círculo ***"O_2"***, será entonces : $P_{(A;O_2)}=\overline{AC}^2$

* Y Como se observa : $\overline{AC}=2R+\overline{BC}$



Calculemos : $\overline{BC}$.

* Para ésto , se observa que en el $\triangle O_1Q_1O_2$: $\phi=30°$.

Entonces : $\overline{Q_1C}=2R(\frac{\sqrt{3}}{2})=R\sqrt{3}$

Luego : $\overline{BC}=R\sqrt{3}-R=R(\sqrt{3}-1)$

* Sustituyendo en el paso *(2)*:

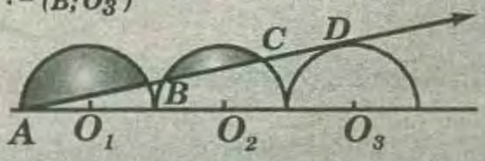
$$\overline{AC}=2R+R(\sqrt{3}-1)=R(1+\sqrt{3})$$

* Sustituyendo en el paso *(1)* se obtiene :

$$P(A,Q_2)=[R(1+\sqrt{3})]^2=R^2(4+2\sqrt{3})$$

PROBLEMA 3 :

Se muestran 3 círculos iguales de radio ***"R"*** cada uno. Calcular : $P_{(B;O_3)}$



A) $\frac{8}{5}R^2$ B) $\frac{5}{8}R^2$ C) $8R^2$ D) $16R^2$ E) N.A

RESOLUCIÓN :

* Como "B" es punto exterior al círculo "O_3", será entonces : $P_{(B,O_3)}=\overline{BD}^2$

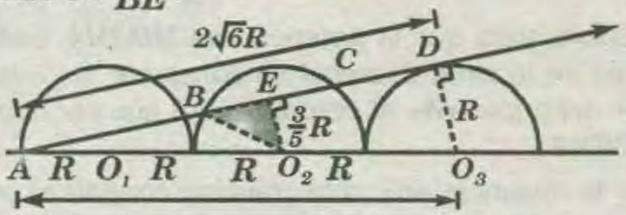
Calculemos "$\overline{BD}$".

*Para aprovechar los radios se traza :

$$\overline{O_2E}\perp\overline{BC} \text{ y } \overline{O_3D}\perp\overline{BD}$$

* Entonces se puede plantear que : $\overline{BD}=\overline{BE}+\overline{ED}$

* Cálculo de $\overline{BE}$:



* $\triangle ADO_3\sim\triangle AEO_2$: $\dfrac{5R}{3R}=\dfrac{R}{\overline{EO_2}}\Rightarrow\overline{EO_2}=\dfrac{3}{5}R$

* $\triangle BEO_2$: $\overline{BE}^2=R^2-\left(\dfrac{3}{5}R\right)^2=\dfrac{16}{25}R^2\Rightarrow\overline{BE}=\dfrac{4}{5}R$

Cálculo de $\overline{ED}$:

* $\triangle AEO_2$: $\overline{AE}=\sqrt{(3R)^2-(\frac{3}{5}R)^2}=\dfrac{6}{5}R\sqrt{6}$

* Luego: $\overline{ED}=\overline{AD}-\overline{AE}=2\sqrt{6}R-\dfrac{6\sqrt{6}}{5}R=\dfrac{4\sqrt{6}}{5}R$

* Sustituyendo en el paso *(3)* :

$$\overline{BD}=\frac{4}{5}R+\frac{4\sqrt{6}}{5}R=\frac{4}{5}R(1+\sqrt{6})$$

* Sustituyendo en el paso *(1)*:

$$P_{(B;O_3)}=\frac{16}{25}R^2(7+2\sqrt{6})$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 4 :

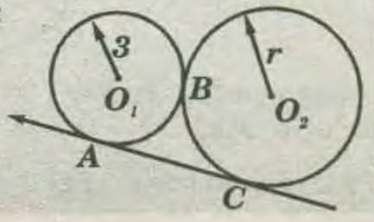
Se tienen 2, circunferencias tangentes exteriores en «B» y cuyos radios miden 3 y 7 se traza la tangente común exterior $\overline{AC}$ («A» en la circunferencia menor). Hallar la potencia de «C» respecto al centro de la circunferencia menor.

A) 24 B) 36 C) 48 D) 54 E) 84

RESOLUCIÓN :

* La potencia pedida es :

$$P_{(C;O_1)}=\overline{AC}^2$$



* Pero por un Teorema :

$$AC=2\sqrt{R.r}=2\sqrt{(7)(3)}=2\sqrt{21}$$

* Sustituyendo en el paso *(I)* se obtiene :

$$P_{(C;O_1)}=(2\sqrt{21})^2=84\,m^2$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 5 :

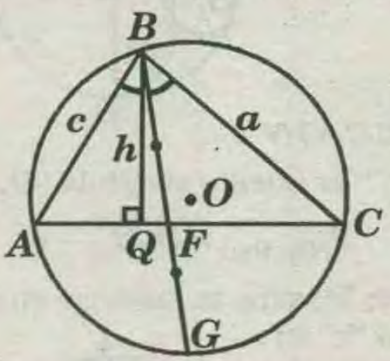
Un triángulo ABC, está inscrito a una circunferencia de radio "R". Se traza la bisectriz interior $\overline{BF}$ cuya prolongación corta en «G» a la circunferencia circunscrita , tal que : $\overline{BF}=\overline{FG}$, también se traza la altura $\overline{BQ}=h$. Hallar la potencia de «F» respecto al centro de la circunferencia antes mencionada, si: $R.h=10\,m^2$.

A) –2 B) –3 C)–4 D) –5 E) –10

RESOLUCIÓN :

* Como "F" es punto interior al círculo, será :

$$P_{(F;O)}=-\overline{BF}.\overline{FG}=\overline{BF}.\overline{BF}=-\overline{BF}^2$$



* Pero por el Teorema del cuadrado de la bisectriz :

$$\overline{BF}^2=\underbrace{a.c}-\underbrace{\overline{AF}.\overline{FC}}=(2R)(h)-\underbrace{\overline{BF}.\overline{FG}}=(2R)(h)-\overline{BF}^2$$

De donde: $\overline{BF}^2=R.h$

* Sustituyendo en el paso *(I)*:

$$P_{(F;O)}=-R.h=-10\,m^2$$

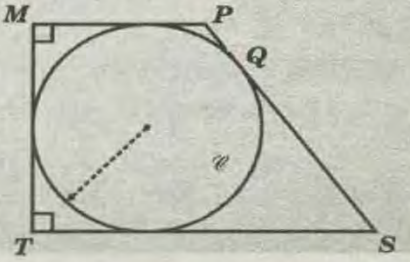
RPTA : "E"

PROBLEMA 6 :

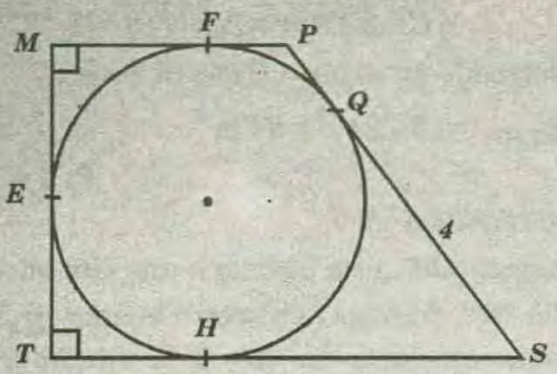
En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita en el trapecio rectángulo. Si $QS=4(PQ)=4$, calcule

$$POT(M;\mathscr{C})+POT(T;\mathscr{C})+POT(S;\mathscr{C})+POT(P;\mathscr{C})$$

A) 20
B) 22
C) 24
D) 25
E) 30



RESOLUCIÓN :



* Se pide : $x = 4 + 4 + 16 + 1 \Rightarrow x = 25$

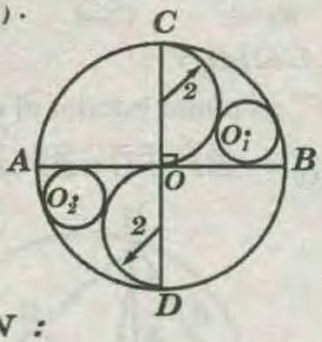
RPTA : "D"

PROBLEMA 7 :

En el círculo de centro "O": $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

Calcular : $P_{(O_1,O_2)}$.

A) $7m^2$
B) 14
C) 21
D) 35
E) 42



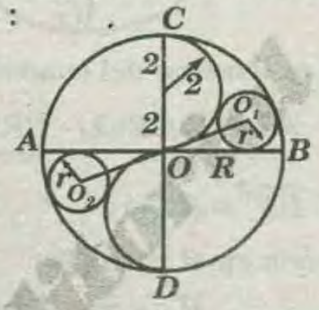
RESOLUCIÓN :

* Como "O_1" es exterior al círculo "O_2" será :

$$P_{(O_1,O_2)} = \overline{O_1O_2}^2 - r^2$$

* Pero por un Teorema se sabe que en el cuadrante BOC el radio "r" es :

$$r = \frac{R}{4} = \frac{4}{4} = 1m$$



* Entonces : $\overline{OO_1} = 4 - r = 4 - 1 = 3m$

En consecuencia : $\overline{O_1O_2} = 3 + 3 = 6m$

* Sustituyendo en el paso *(1)* se obtiene :

$$P(o_1,o_2) = 6^2 - 1^2 = 35m^2$$

RPTA : "D"

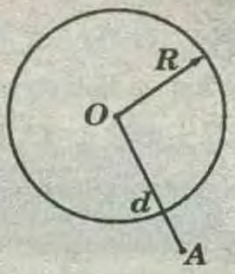
PROBLEMA 8 :

Hallar la *MINIMA* potencia de un punto «A» con respecto a una circunferencia «O» de radio «R».

A) 0 B) R^2 C) $-R^2$ D) $-\frac{R^2}{2}$ E) $\frac{R^2}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Se sabe que la potencia de un punto «A» respecto a una circunferencia es : $P(A;O) = d^2 - R^2$



* Ahora, para que la potencia sea *MINIMA*, como el radio de la circunferencia es constante, la distancia «d» del punto «A» al centro tendrá que ser también *MINIMA* .

* Y la distancia «d» será mínima cuando el punto «A» se halle en el centro, es decir que : $d = 0$

* Sustituyendo en el paso *(I)* : $P_{(A;O)} = O^2 - R^2$

* Finalmente : $P_{(A;O)} = -R^2$

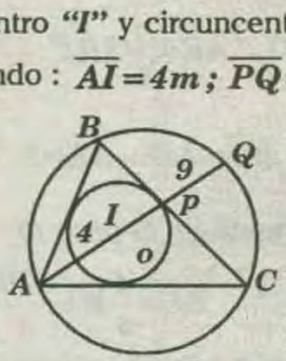
RPTA : "C"

PROBLEMA 9 :

En el $\triangle ABC$ de incentro "I" y circuncentro "O", $\overline{AQ} \cap \overline{BC}$ en "P" siendo : $\overline{AI} = 4m$; $\overline{PQ} = 9m$

Calcular $\overline{IP}$.

A) 3m
B) 4
C) 5
D) 6



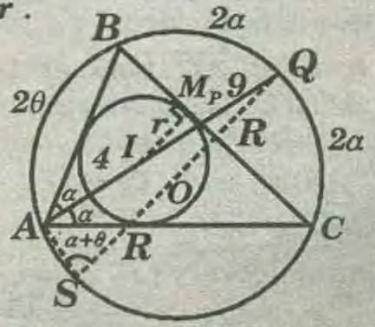
RESOLUCIÓN :

* Se sabe por un Teorema que :

$\overline{AI}$, $\overline{IQ} = 2Rr$ donde :

"R" es el circundario y "r" es el inradio .

* Llamado "x", a $\overline{IP}$, se tendrá en el paso *(1)*: $4(x+9) = 2.R.r$.



* Luego para hallar "x", se debe calcular el producto: $R.r$.

* Para esto se traza : $\overline{IM} \perp \overline{BC}$, siendo : $\overline{IM} = R$

* Además se traza el diámetro $\overline{QS}$, siendo : $\overline{QS}=2R$

* Ahora, llamando *"2a"* al $\hat{A}$, como $\overline{AQ}$ es bisectriz interior del $\hat{A}$ será entonces : $\overset{\frown}{BQ}=\overset{\frown}{QC}=2\alpha$.

* Y sí se llama "θ" al $\hat{C}$, entonces : $\overset{\frown}{AB}=2\theta$

*En consecuencia, se tendrá que :

$$A\hat{P}B=\frac{2\alpha+2\theta}{2}=\alpha+\theta \Rightarrow A\hat{S}Q=\frac{\overset{\frown}{ABQ}}{2}=\frac{2\alpha+2\theta}{2}=\alpha+\theta$$

* Ahora, como : $A\hat{P}B=A\hat{S}Q$ será :

$\triangle SAQ \sim \triangle IMP$, entonces : $\frac{r}{4+x+6}=\frac{x}{2R}$

* De donde : $2Rr=x(13+x)$.

* Sustituyendo en el paso *(2)* se obtiene :

$$4(x+9)=x(13+x).$$

* Efectuando : $x=3m$

RPTA : "A"

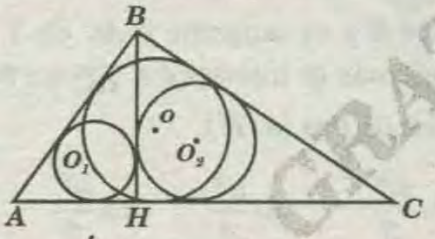
PROBLEMA 10 :

En el $\triangle ABC$, de altura $\overline{BH}$ se sabe que :

$$P_{(H;O_1)}=9m_2 ; P_{(H;O_2)}=16\,m^2$$

Calcular: $P_{(B;O)}$

A) 7 m²
B) 14
C) 28
D) 35
E) 25



RESOLUCIÓN:

Para aprovechar los radios, de cada círculo, se forman los *3* cuadrados sombreados .

Entonces, se puede afirmar que :

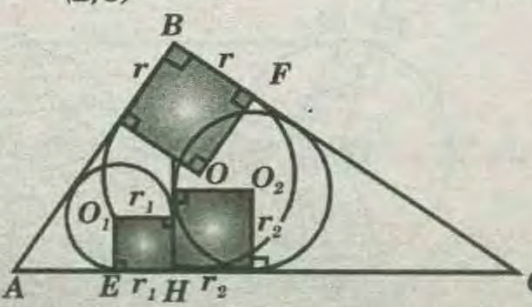
* $P_{(H;O_1)}=r_1^2=9\,m^2$ entonces : $r_1=3m$

* $P_{(H;O_2)}=r_2^2=16\,m^2$ entonces : $r_2=4m$

* $P_{(H;O)}=r^2$

* Pero, por un Teorema : $r^2=r_1^2+r_2^2=3^2+4^2=25$

* Entonces : $P_{(B;O)}=25\,m^2$



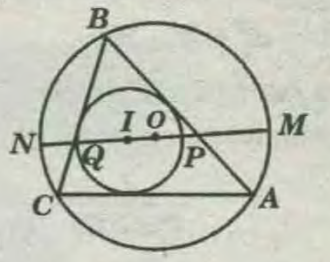
RPTA "E"

PROBLEMA 11 :

En el $\triangle ABC$, de incentro *"I"* y circuncentro *«O»*, se sabe que $\overline{MN}\cap$ a la circunferencia inscrita en *"P"* y *"Q"*, siendo : $\overline{PM}.\overline{NQ}=49\,m^2$.

Calcular el inradio *"r"*.

A) 3.5 m
B) 14 m
C) 7 m
D) 21 m



RESOLUCIÓN :

* Sabemos por un Teorema que : $\overline{NI}.\overline{IM}=2Rr$

* Ahora , del gráfico se puede plantear que :

$$(\overline{NQ}+r)(\overline{PM}+r)=2Rr$$

* Efectuando: $\overline{NQ}.\overline{PM}+r(\overline{PM})+r(\overline{NQ})+r^2=2Rr$

* Factorizando: $\overline{NQ}.\overline{PM}+r(\overline{PM}+\overline{NQ})+r^2=2Rr$

* Transformando el paréntesis :

$$\overline{NQ}.\overline{PM}+r(2R-2r)+r^2=2Rr$$

* Efectuando : $\overline{NQ}.\overline{PM}+2Rr-2r^2+r^2=2Rr$

* Finalmente : $\overline{NQ}.\overline{PM}=r^2$ Teorema

* Sustituyendo el dato: $49=r^2$

De donde $r=7\,m$

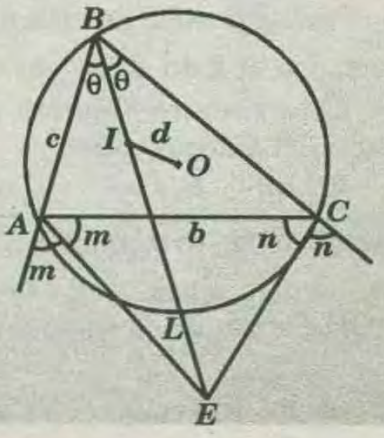
RPTA : "C"

PROBLEMA 12 :

Un triángulo *ABC* está inscrito en una circunferencia $\mathscr{C}$ donde *I es* el incentro y *E* el excentro relativo a $\overline{AC}$. Si $\frac{1}{POT(I;\mathscr{C})}-\frac{1}{POT(E;\mathscr{C})}=K$, calcule *(AB)(AC)*.

A)K **B) 1/K** **C) 2/K** **D) 2K** **E) 3/K**

RESOLUCIÓN :



WWW.GRATIS2.COM

* Por teoría :

Pot $I(O) = R^2 - d^2$

* Pero: $d^2 = R^2 - 2Rr$

$\Rightarrow$ Pot $I(O) = R^2 - R^2 + 2Rr$

$\Rightarrow$ Pot $I(O) = 2Rr$ ..... (I)

Pot $E(O) = d_1^2 - R^2$

* Pero : $d_1^2 = R^2 + 2Rr_b$

$\Rightarrow$ Pot $E(O) = R^2 + 2Rr_b - R^2 = 2Rr_b$ .....(II)

* Por condición :

$$\frac{1}{PotI(O)} - \frac{1}{PotE(O)} = K \quad .....(III)$$

* Reemplazando (I) y (II) en (III): $\frac{1}{2Rr} - \frac{1}{2Rr_b} = K$

* De donde : $\frac{Rrr_b}{r_b - r} = \frac{1}{2K}$ .....(IV)

* Por otro lado :

$$S = r_b(p-a) \;;\; S = pr \;\wedge\; S = \frac{abc}{4R}$$

* Tenemos: $S = r_b\left(\frac{S}{r} - a\right)$

$\Rightarrow Sr = r_b(S - ar) \rightarrow Sr = Sr_b - arr_b$

$\Rightarrow S(r_b - r) = arr_b \Rightarrow S = \frac{arr_b}{r_b - r}$

* También igualamos :

$$\frac{arr_b}{r_b - r} = \frac{abc}{4R} \Rightarrow \frac{Rrr_b}{r_b - r} = \frac{bc}{4} \quad .....(V)$$

* (IV) = (V) : $\frac{bc}{4} = \frac{1}{2K} \rightarrow bc = \frac{2}{K}$

RPTA : "C"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 En un triángulo ABC de circunradio $R=2$ cm y exradio relativo al lado BC, $r_a=3$ cm. Calcular la distancia del excentro relativo al lado $\overline{BC}$ al circuncentro del triángulo ABC.

A)2 cm B)3 cm C)4 cm D)5 cm E)6 cm

02 En un cuadrilátero bicéntrico $ABCD$ de Incentro I y circuncentro O, $IO=d$ y R es el circunradio. Si $R+d=20$; $R-d=15$. Calcule el inradio del cuadrilátero $ABCD$.

A) 5 B) 10 C)8 D)15 E)12

03 En dos circunferencias secantes de centros A y B donde la suma de los cuadrados de los radios es 13, en el eje radical se ubica el punto P, siendo $PA^2+PB^2=49$. Hallar la tangente PT a una de las circunferencias.

A)4 B) 6 C)8 D)10 E)12

04 En un cuadrado $ABCD$ de centro O y lado 4, el cuadrante ADC de centro D interseca a la circunferencia inscrita en el cuadrado en el punto E. Calcular la potencia del punto medio de ED, respecto de la circunferencia inscrita .

A) 1 B)3 C)2 D)5 E)4

05 En un triángulo ABC, de incentro I y excentro E (relativo a BC), $\mathscr{C}$ es la circunferencia circunscrita y

$$\frac{1}{Pot.I(\mathscr{C})} + \frac{1}{Pot.E(\mathscr{C})} = \frac{1}{K}.$$

Determine $(AB).(AC)$.

A) $\frac{1}{K}$ B)K C)$-K$ D)$-2K$ E) $\frac{K}{2}$

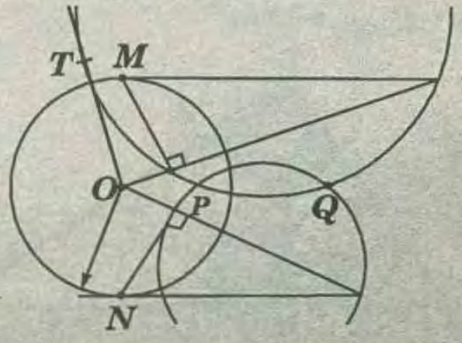
06 En un triángulo ABC, la circunferencia $\mathscr{C}$ pasa por B y es tangente a AC en T, tal que $CT=2(AT)$, además $\mathscr{C}$ interseca a $\overline{BC}$ en $N(BN=NC)$. Si $BC=a$, señale Pot. $A(\mathscr{C})$

A) $\frac{a^2}{2}$ B) $\frac{a^2}{4}$ C) $\frac{a^2}{6}$ D) $\frac{a^2}{3}$ E) $\frac{a^2}{8}$

07 Sobre el radio OA de una circunferencia, se ubica un punto P por el cual se trazan una perpendicular a OA y una secante BPC; las rectas AB y AC intersecan a dicha recta perpendicular en puntos M y Q respectivamente. Calcular el radio si $PM=2$; $PQ=4$ y $PO=1$.

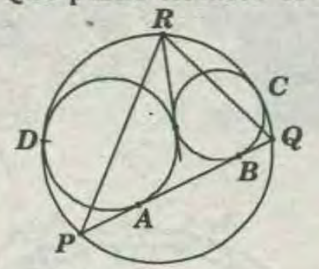
A) 1 B) 2 C) 2,2 D) 3 E) 5

08 Del gráfico T, M y N son puntos de tangencia $OT=4cm$, $OP=2CM$. Calcular PQ



A) 3 B)4 C)5 D)6 E)8

09 En la figura mostrada *A; B; C; D,* e *I* son puntos de tangencia ¿Qué punto notable es *I* del triángulo *PQR*.

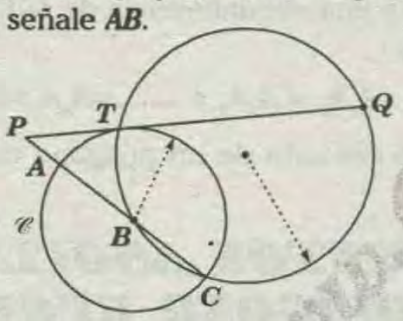


A)Baricentro B)Incentro C)Ortocentro
D) Circuncentro E) Punto de Brocard

10 Sean dos circunferencias tangentes exteriores $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ (tangentes en *T*); además, *A y B* equidistan del eje radical de dichas circunferencias ($A \in \mathscr{C}_2$ y $B \in \mathscr{C}_1$). Si $\overline{AB} \cap \mathscr{C}_2 = \{P\}$; *T* es la proyección ortogonal de *A* sobre el eje radical y $m\widehat{TP} = 53°$, indique la razón de radios.

A)1 B) 2 C)3 D)3/2 E) 1/4

11 En la figura, *T* es punto de tangencia, la razón de potencias de *Q* y *P,* con respecto a $\mathscr{C}$; es *4* y *PA = 1*, señale *AB*.

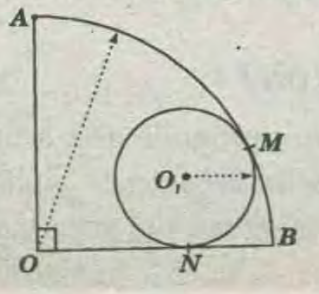


A)1 B)2 C)3 D)4 E)3/2

12 Dado un cuadrado *ABCD*, en su lado *CD* se ubica el punto medio *M*; *AC* y *BM* se intersecan en *P*. Calcular la potencia de *P* con respecto a la circunferencia inscrita al cuadrado cuyo radio es *3cm*.

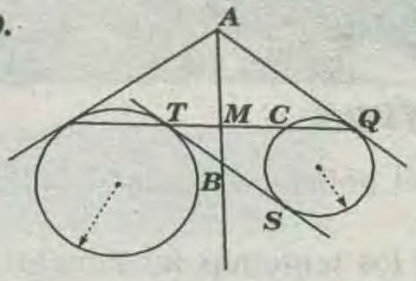
A) 3 cm² B)6 cm² C)7 cm² D)8 cm² E) 9 cm²

13 En el cuadrante mostrado, *M* y *N* son puntos de tangencia . Si *ON=a* calcular la potencia de *A* respecto a la circunferencia de centro O_1.



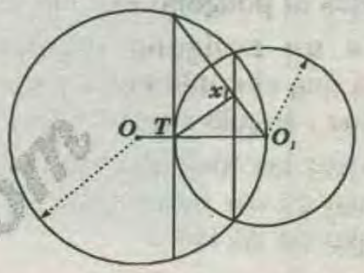
A)a_2 B)a C) $a\sqrt{2}$ D)$2a$ E)$2a^2$

14 Según la figura *P , T* y *S* son puntos de tangencia. Si *PT=5; TM=4; MC=3; BT = BS* y *AQ//TB*. indique *CQ*.



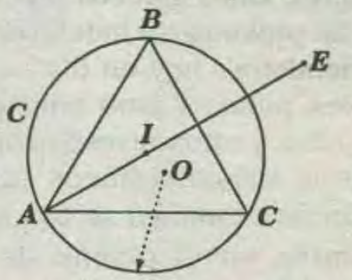
A)3 B)4 C)5 D)6 E) 9

15 En la figura mostrada *T*, es punto de tangencia. Calcule *x*.



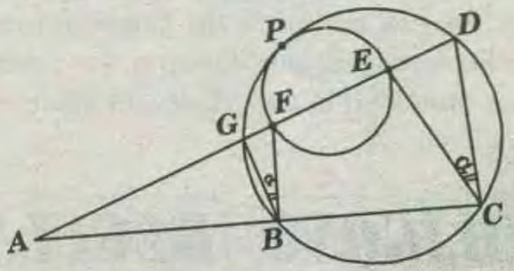
A) 90° B) 60° C) 75° D) 45° E) 105°

16 En el gráfico mostrado calcule *AB. AC*. Si *E* es excentro, *I* es incentro del triángulo *ABC* y $\frac{1}{pot\ I(C)} - \frac{1}{Pot\ E(C)} = k$



A) 2/k B) 1/k C) 3/k D) k E) 2k

17 En el gráfico *P* es punto de tangencia si *AB=4cm* y *BC=5cm*. Calcular *AP* .



A)4 B)6 C) D) E)9

PRIMERA PRACTICA — POTENCIA-EJE RADICAL

1) C	2)E	3) B	4) C	5) D	6) E	7) D	8) D	9) B	10) B
11) B	12) C	13) E	14) E	15)A	16) A	17) A			

WWW.GRATIS2.COM

POLIGONOS REGULARES

CAPITULO 29

OBJETIVOS :

* Definir el polígono regular , indicando sus elementos .

* Conocer los teoremas fundamentales de un polígono regular.

* Deducir la relaciones métricas entre las principales líneas asociadas al polígono regular .

* Conocer a un polígono regular inscrito y circunscrito a una circunferencia y sus elementos : lados , apótema , ángulo central y área .

* Deducir y usar las fórmulas de la apotema del polígono regular de «*n*» lados , así como el lado del polígono regular de *2n* lados .

INTRODUCCIÓN :

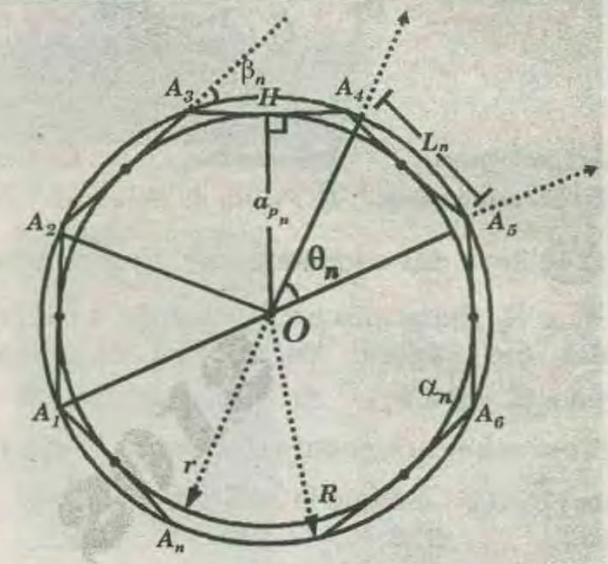
Desde la antigüedad. Se sabe que el hombre ha decorado sus viviendas con dibujos y ornamentos regulares. Estos gráficos repetitivos que nos dan la idea de prolongarse indefinidamente en el espacio se encuentra , hoy en día , en los tapices , en los papeles, pintados para empapelar paredes , en los enlosados y otros revestimientos del suelo , en los adornos arquitectónicos exteriores o interiores (mosaicos): también se usa las formas poligonales regulares en el diseño de las tuercas, en la distribución de los terrenos, etc. Inclusive hay poblaciones en las cuales la distribución de sus manzanas tienen una forma poligonal regular.

La naturaleza también nos brinda ejemplos de estas figuras y de esa armonía de proporciones que satisface los sentidos; por ejemplo, los cristales de nieve , las ondas en la superficie del agua, el panal de abejas, etc.

POLÍGONO REGULAR

Se llama polígono regular al polígono equiángulo y equilátero a la vez .

Todo polígono regular se puede inscribir y circunscribir a circunferencias concentricas , siendo el centro de estas circunferencias el centro del polígono regular .



En el gráfico, se muestra el polígono regular $A_1A_2A_3A_4$ ..... A_n inscrito en la circunferencia de radio R y circunscrito a una circunferencia de radio r.

* Del gráfico :

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \text{.....} = A_nA_1 = L_n$$

L_n: Longitud del lado de un polígono regular de n lados.

ELEMENTOS ASOCIADOS AL POLÍGONO REGULAR

CENTRO(O) :

Centro de circunferencia inscrita y circunscrita al polígono regular .

INRADIO (R) :

Radio de la circunferencia inscrita al polígono regular.

CIRCUNRADIO(R) :

Radio de la circunferencia circunscrita al polígono regular.

APOTEMA ($\overline{OH}$) :

Es el segmento perpendicular a un lado de un polígono regular, trazado desde centro . $OH = a_{p_n}$: longitud de la apotema del polígono regular de n lados .

ÁNGULO CENTRAL ($\sphericalangle A_4OA_5$):

Es un ángulo que tiene su vértice en el centro del polígono regular , cuyos lados lo determinan que pasan por dos vértices consecutivos del polígono regular .

* θ_n : Medida del ángulo central de un polígono regular de n lados .

$$\theta_n = \frac{360°}{n}$$

* n : Número de lados de polígono regular
* Además , en todo polígono regular de n lados :

* Medida del ángulo interior (α_n): $\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}$

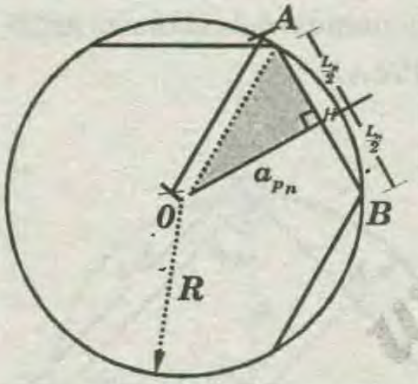
* Medida del ángulo exterior (β_n) : $\beta_n = \frac{360°}{n}$

TRIÁNGULO ELEMENTAL (ΔA_1OA_2)

Es el triángulo determinado por dos vértices consecutivos y el centro de un polígono regular .

APOTEMA DE UN POLÍGONO REGULAR

* En el $\triangle OHA$(Teorema de Pitágoras)



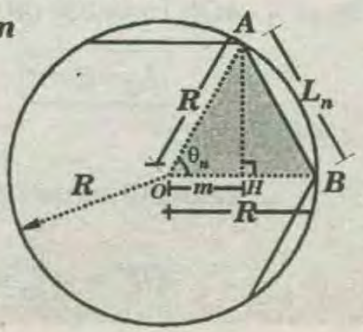
$$(a_{p_n})^2 = R^2 - \left(\frac{L_n}{2}\right)^2$$

* Luego : $a_{p_n} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - L_n^2}$

CALCULO DEL LADO EN FUNCIÓN DEL "R" Y "θ_N"

* En el ΔAOB(Teorema de Euclides)

$$(L_n)^2 = R^2 + R^2 - 2Rm$$



* pero , $\triangle AHO$:

$$OH = m = R\cos\theta_n$$

* Reemplazando:

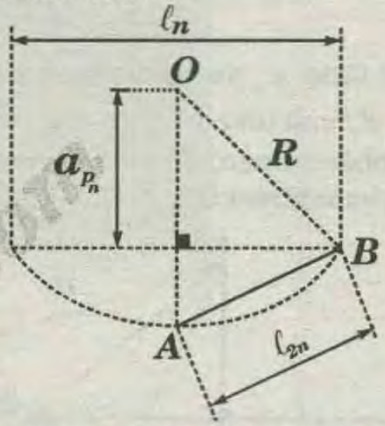
$$(L_n)^2 = 2R^2 - 2R \times R\cos\theta_n$$

* Luego :

$$L_n = R\sqrt{2(1-\cos\theta_n)}$$

CÁLCULO DE LA LONGITUD DEL LADO DE UN POLÍGONO REGULAR DE 2n LADOS , EN FUNCIÓN DE SU CIRCUNRADIO Y LA LONGITUD DEL LADO DEL POLÍGONO REGULAR INSCRITO DE n LADOS

Conocido el lado ℓ_n de un polígono regular y el circunradio R, calcular el lado ℓ_{2n} del polígono regular de doble número de lados inscrito en la misma circunferencia .



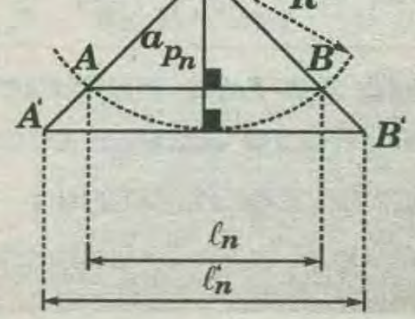
* En el triángulo AOB, aplicando el *1er* . Teorema de Euclides, se tiene :

$$\ell_{2n}^2 = R^2 + R^2 - 2Ra_{p_n} \Rightarrow \ell_{2n}^2 = 2R^2 - 2R \times \frac{\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}}{2}$$

$$\Rightarrow \ell_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}}$$

CÁLCULO DE LA LONGITUD DEL LADO DE UN POLÍGONO REGULAR CIRCUNSCRITO , EN FUNCIÓN DE SU RADIO DE LA CIRCUNFERTENCIA Y DE LA LONGITUD DEL LADO DEL POLÍGONO REGULAR DEL MISMO NÚMERO DE LADOS INSCRITO EN DICHA CIRCUNFERENCIA

Conocido el lado ℓ_n de un polígono regular y el circunradio R, calcular el lado ℓ_n del polígono regular del mismo número de lados pero circunscrito a la misma circunferencia .



www.ERATIS2.com

* La semejanza de triángulos entre $A'OB'$ y AOB, se tiene : $\frac{\ell'_n}{\ell_n}=\frac{R}{a_{p_n}}$

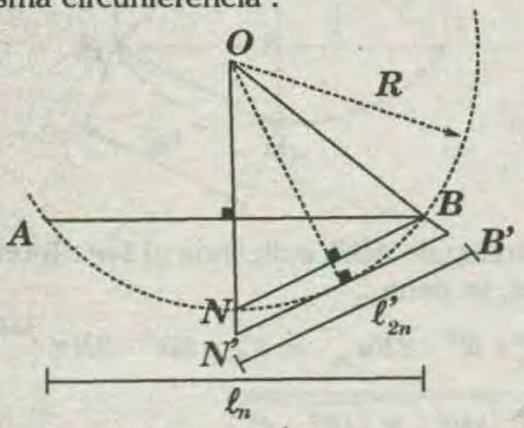
* Despejando : $\ell'_n=\frac{\ell_n R}{a_{p_n}}$

* Sustituyendo a_{p_n} por sù fórmula se tiene :

$$\boxed{\ell'_n=\frac{2\ell_n R}{\sqrt{4R^2-\ell_n^2}}}$$

CÁLCULO DE LA LONGITUD DEL LADO DE UN POLÍGONO REGULAR DE 2N LADOS CIRCUNSCRITO , EN FUNCIÓN DE SU CIRCUNRADIO Y LA LONGITUD DEL LADO DEL POLÍGONO REGULAR INSCRITO DE N LADOS

Conocido el lado ℓ_n de un polígono regular y el circunradio R, calcular el lado ℓ'_{2n} del polígono regular de doble número de lados pero circunscrito a la misma circunferencia .



$AB=\ell_n$; $NB=\ell_{2n}$; $N'B'=\ell'_{2n}$

* Por la propiedad anterior se tiene:

$$\ell'_{2n}=\frac{2\ell_{2n}R}{\sqrt{4R^2-\ell_{2n}^2}}$$

* Sustituyendo ℓ_{2n} por su fórmula, se tiene:

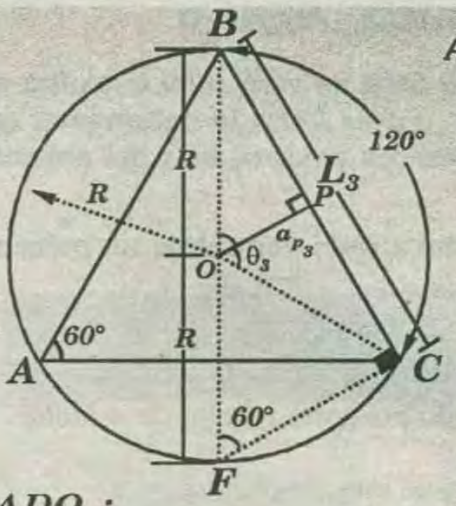
$$\ell'_{2n}=\frac{2R\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-\ell_n^2}}}{\sqrt{4R^2-(2R^2-R\sqrt{4R^2-\ell_n^2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell'_{2n}=2R\sqrt{\frac{2R^2-R\sqrt{4R^2-\ell}}{2R^2+R\sqrt{4R^2-\ell_n^2}}}}$$

ESTUDIO DE LOS PRINCIPALES POLÍGONO REGULARES

I) TRIÁNGULO EQUILÁTERO :

En el gráfico, R es el circunradio del triángulo equilátero ABC.



Ángulo Central :

$\theta_3=\frac{360°}{3}$

$\Rightarrow \boxed{\theta_3=120°}$

LADO :

En el $\triangle BCF$ (Notable : $30° \wedge 60°$)

$$L_3=\frac{2R}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{L_3=R\sqrt{3}}$$

APOTEMA :

* En el $\triangle BCF$(notable : $30° \wedge 60°$)

$OP=a_{p_3}=\frac{FC}{2}$ .....(Teorema de la base media)

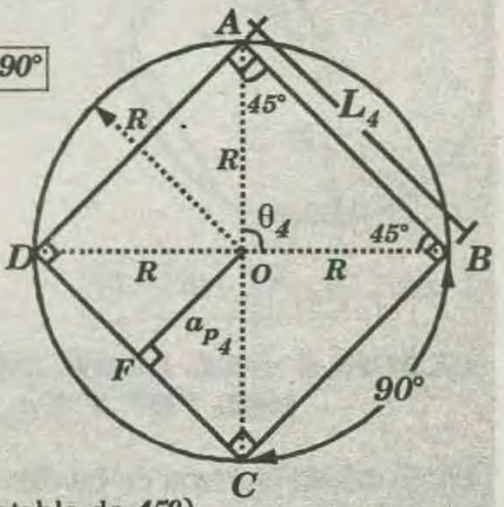
* pero : $FC=R$ e $\boxed{a_{p_3}=\frac{R}{2}}$

II) CUADRADO :

En el gráfico , R es el circunradio del cuadrado: $ABCD$

ÁNGULO CENTRAL :

$\theta_4=\frac{360°}{4} \rightarrow \boxed{\theta_4=90°}$



LADO :

En el $\triangle AOB$ (notable de $45°$)

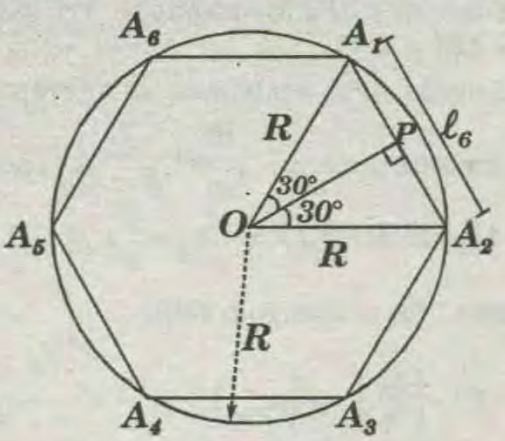
$$\boxed{L_4=R\sqrt{2}}$$

APOTEMA :

En el $\triangle BCD$(por teorema de la base media

$$OF=a_{p_4}=\frac{BC}{2} \Rightarrow \boxed{a_{p_4}=\frac{R\sqrt{2}}{2}}$$

III) HEXÁGONO REGULAR :



Medida del ángulo central (θ_6): $m\sphericalangle A_1OA_2=\theta_6$

$$\theta_6=\frac{360°}{6}\rightarrow \boxed{\theta_6=60°}$$

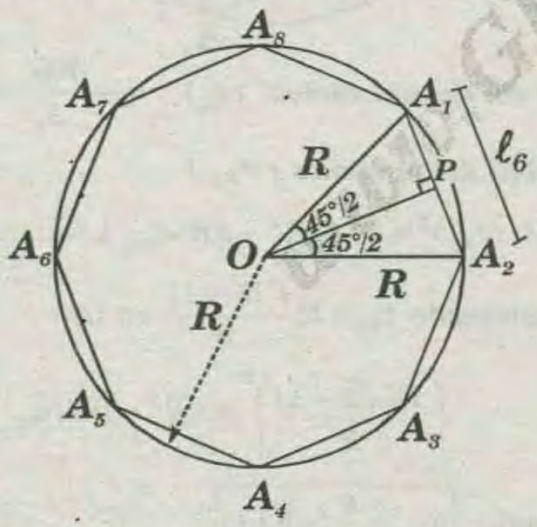
* Longitud del (ℓ_6), $\triangle A_1OA_2$ es equilátero : $\ell_6=R$

* Longitud del apotema a_{p_6} :

$a_{p_6}=\sphericalangle OPA_2$ el notable de $30°$ y $60°$:

$$\boxed{a_{p_6}=\frac{R}{2}\sqrt{3}}$$

IV) OCTÁGONO REGULAR U OCTÓGONO REGULAR :



Media del ángulo central (θ_8): $m\sphericalangle A_1OA_2=\theta_8$

$$\theta_8=\frac{360°}{8}\rightarrow \boxed{\theta_8=45°}$$

* Longitud del lado (ℓ_8):

$\triangle A_1OA_2$: teorema de cosenos

$$(\ell_8)^2=R^2+R^2-2(R)(R)\cos 45°$$

Operando : $\ell_8=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

* Longitud del apotema a_{p_8} : $a_{p_8}=OP$

* Se sabe que:

$$a_{p_n}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\ell_n^2}\quad\Rightarrow\quad \boxed{a_{p_8}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\ell_8^2}}$$

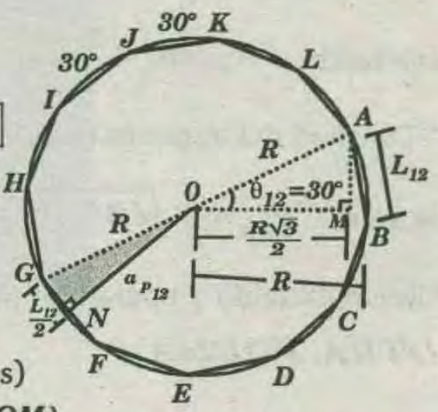
* Reemplazando y operando: $\boxed{a_{p_8}=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

V) DODECAGONO REGULAR :

En el gráfico se tiene el dodecágono regular *ABCDEFGHIJKL* , de circunradio *R* .

ÁNGULO CENTRAL :

$$\theta_{12}=\frac{360°}{12}\rightarrow \boxed{\theta_{12}=30°}$$



LADO :

En el $\triangle AOB$

(Teorema de Euclides)

$(L_{12})^2=R^2+R^2-(2R)(OM)$

* Pero : $OM=\frac{R\sqrt{3}}{2}$

* Efectuando : $\boxed{L_{12}=\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

APOTEMA :

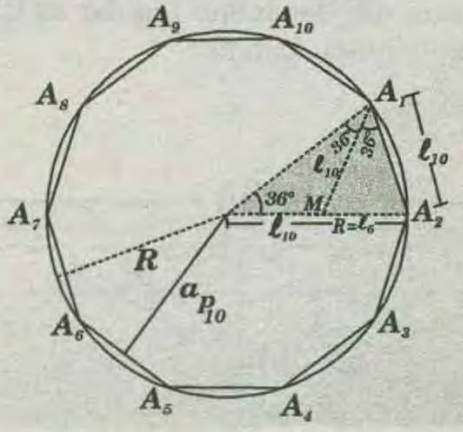
* En el $\sphericalangle GNO$ (Teorema de Pitágoras)

$$\left(a_{p_{12}}\right)^2=R^2-\left(\frac{L_{12}}{2}\right)^2$$

* Reemplazando :

$$\left(a_{p_{12}}\right)^2=R^2-\left(\frac{R\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2\Rightarrow \boxed{a_{p_{12}}=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

VI) DECÁGONO REGULAR :



GRATIS.com

* ***Medida del ángulo central*** (θ_{10}) :

$$\theta_{10}=\frac{R}{\ell_{10}}=\frac{360^\circ}{10}\rightarrow \boxed{\theta_{10}=360^\circ}$$

* ***Longitud del lado*** (ℓ_{10}) :

En el $\triangle A_1OA_2$ se traza la bisectriz interior $\overline{AM}$; así, los triángulos A_1MO y MA_1A_2 son isósceles, es decir:

$$A_1M=MO=\ell_{10}\ \Rightarrow\ MA_2=R-\ell_{10}$$

* En el $\triangle A_1OA_2$ se aplica el teorema de la bisectriz interior :

$$\frac{R}{\ell_{10}}=\frac{\ell_{10}}{R-\ell_{10}}$$

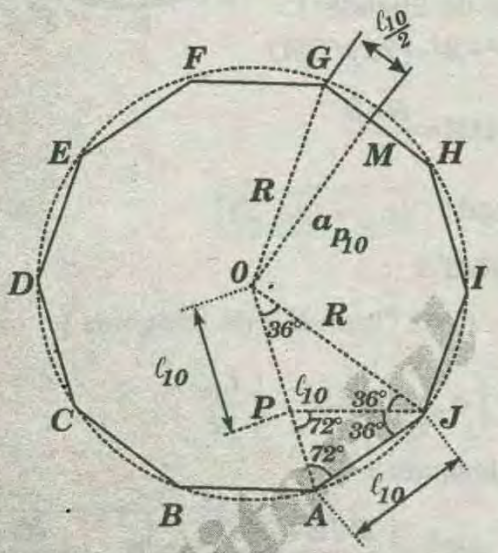
Operando : $\ell_{10}=R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

* Longitud del apotema $(a_{p(10)})$

Se sabe : $a_{p_n}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\ell_n^2}$

*Reemplazando y operando: $\boxed{a_{p_{10}}=\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

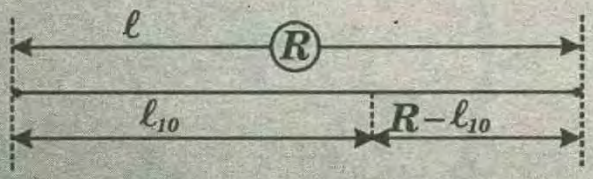
OTRA FORMA :



* ***Ángulo central***: $m\sphericalangle AOJ=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$

Lado : El lado del decágono regular es la porción área del circunradio. Esto es :

$\ell_{10}^2=R(R-\ell_{10})$



O bien : $\ell_{10}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)R$

ES DECIR : En el triángulo isósceles ***AOJ***, se traza la bisectriz interior ***JP***, formándose los triángulos isósceles ***AJP*** y ***JPO***.

En el triángulo ***APJ***, aplicando el Teorema de la bisectriz interior, se tiene : $\frac{R}{\ell_{10}}=\frac{\ell_{10}}{R-\ell_{10}}$, de donde:

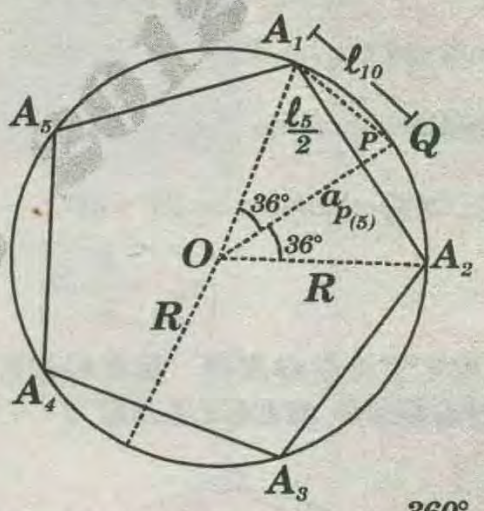
$$\ell_{10}^2=R(R-\ell_{10})\Rightarrow\ \ell_{10}=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

* ***Apotema*** : En el triángulo ***OMG*** :

$$\left(a_{p_{10}}\right)^2=R^2-\left[\frac{\ell_{10}}{2}\right]^2\Rightarrow\left(a_{p_{10}}\right)^2=R^2-\frac{\frac{R^2}{4}(5-2\sqrt{5}+1)}{4}$$

$$a_{p_{10}}=\frac{16R^2-6R^2+2\sqrt{5}R^2}{16}\ \Rightarrow\ \boxed{a_{p_{10}}=\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

VII)PENTAGONO REGULAR :



Medida del ángulo central (θ_5) : $\theta_5=\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$

* ***Longitud del apotema*** (a_{p_5})

$\triangle A_1QO$: $(\ell_{10})^2=R^2+R^2-2R(a_{p_5})$.....(I)

* Reemplazando $\ell_{10}=R\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ en ***(I)*** :

$$\left(\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}\right)^2=2R^2-2R(a_{p_5})$$

* Operando: $\boxed{a_{p_5}=\frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)}$

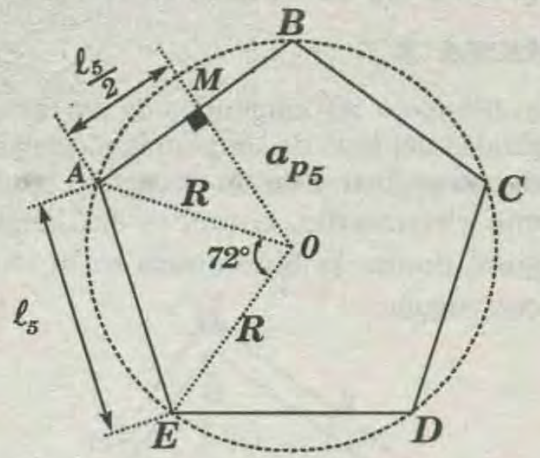
* ***Longitud del lado*** (ℓ_5):

$\triangle A_1PO$: por teorema de Pitágoras

$$\left(\frac{\ell_5}{2}\right)^2=R^2-(a_{p_5})^2$$

Operando : $\boxed{\ell_5=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

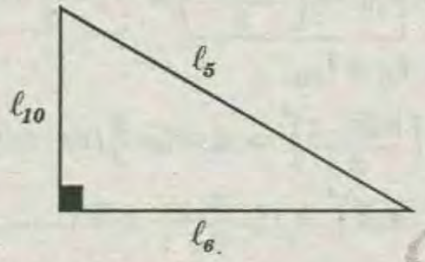
OTRA FORMA :



* *Ángulo central* : $m\angle AOE=\frac{360°}{5}=72°$

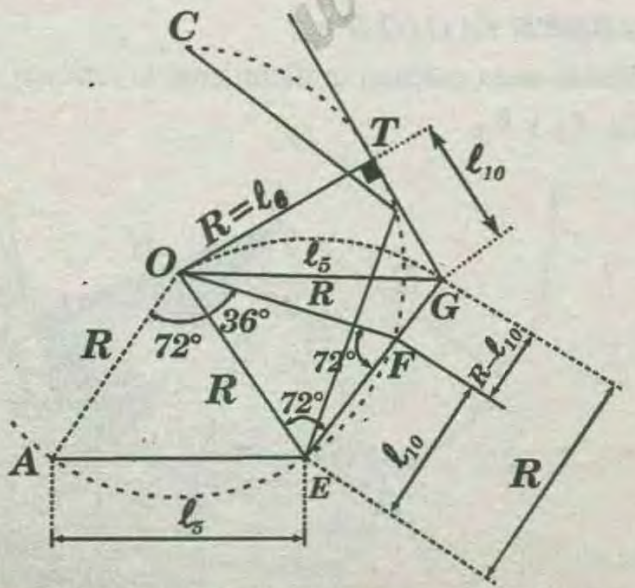
* ***Lado***: El lado del pentágono regular es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyo catetos son el lado del hexágono regular y el lado del decágono regular. Esto es :

$$\boxed{\ell_5^2=\ell_6^2+\ell_{10}^2}$$



DEMOSTRACIÓN :

Se toma *F* punto medio del arco *DE*. Se une *F* con *0* y con *E*, formándose el triángulo isósceles *EOF*; en donde: $EF=\ell_{10}$



Haciendo centro en *E* y con radio igual a *EO=R* se traza un arco de circunferencia que corta a la prolongación de *EF* en *G*, y a continuación se traza la tangente *GT*, uniendo finalmente *O* con *G* y con *T*; formándose así el triángulo isósceles *OEG* y el $\triangle OTG$.

* Aplicando el Teorema de Pitágoras en el $\triangle OTG$: $OG^2=OT^2+GT^2$.....*(I)*

* Por relaciones métricas en la circuferencia , se tiene : $GT^2=GE.GF$ y como $EF=\ell_{10}$ es la porción áurea del circunradio : $EF^2=GE\times GF$, luego:

$$GT=EF=\ell_{10}\text{.....}(II)$$

* Por el caso *LAL* de congruentes de triángulos . se tiene : triángulo *OEG* ≅ triángulo *AOE* .

* Así : $OG=AE=\ell_5$.....*(III)*

* De la figura : $OT=R\Rightarrow OT=\ell_6$.....*(IV)*

* Reemplazando *(II)* , *(III)* y *(IV)* en *(I)*:

* O sea: $\ell_5^2=\ell_6^2+\ell_{10}^2$

$$\ell_5^2=R^2+\frac{R^2}{4}(5-2\sqrt{5}+1)\Rightarrow \ell_5^2=\frac{4R^2+6R^2-2\sqrt{5}R^2}{4}$$

$$\Rightarrow \ell_5^2=\frac{R^2}{4}(10-2\sqrt{5})\Rightarrow \boxed{\ell_5=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

APOTEMA : En el $\triangle OMB$:

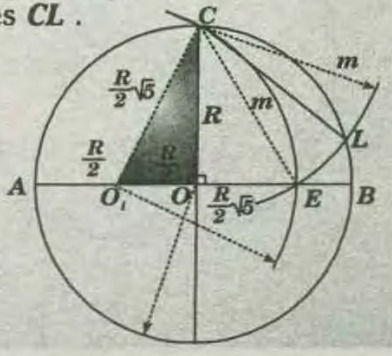
$$\left(a_{p_5}\right)^2=R^2-\left[\frac{\ell_5}{2}\right]^2\Rightarrow\left(a_{p_5}\right)^2=R^2-\frac{\frac{R^2}{4}(10-2\sqrt{5})}{4}$$

$$\Rightarrow\left(a_{p_5}\right)^2=\frac{16R^2-10R^2+2\sqrt{5}R^2}{16}\Rightarrow\left(a_{p_5}\right)^2=\frac{R^2}{16}(6+2\sqrt{5})$$

$$\Rightarrow a_{p_5}=\frac{R}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}\Rightarrow\boxed{a_{p_5}=\frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)}$$

MÉTODO GRÁFICO PARA ENCONTRAR EL LADO DE UN PENTÁGONO REGULAR

En una circunferencia de centro *O*, se trazan los diámetros perpendiculares $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, luego en *AO* se ubica el punto medio *O*. y se traza un arco *CE* de centro *O*, $(E\in\overline{OB})$; finalmente, se traza un arco *CE* de centro *C* $(L\in\overset{\frown}{CB})$. El lado del pentágono regular buscado es *CL* .



Según la figura :

$\triangle COE$: teorema de Pitágoras Operando

$$m^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\right)^2$$

* Operando :

$$m = \frac{R}{2} + \sqrt{10-2\sqrt{5}} \rightarrow m = \ell_5$$

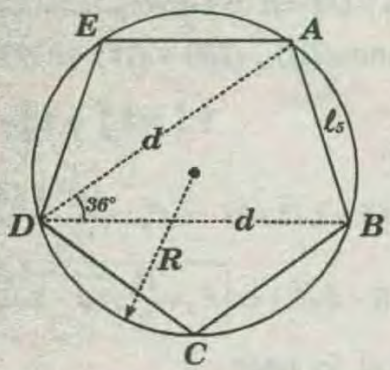
OBSERVACIÓN :

* De la figura : $CO = \ell_6 \ \wedge \ OE = \ell_{10}$

$$\wedge CE = \ell_5 \Rightarrow \boxed{\ell_5^2 = \ell_6^2 + \ell_{10}^2}$$

TEOREMA 1 :

La longitud del lado de un pentágono regular es igual a la longitud de la sección áurea de su diagonal.



Según la figura , ***ABCDE*** : polígono regular.

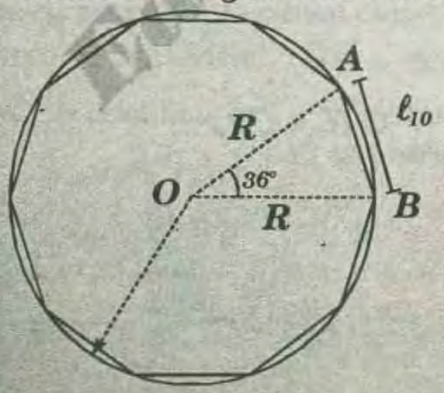
ΔAOB: triángulo elemental del decágono regular.

$$\boxed{\ell_5 = d\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$$

* ℓ_5 es la longitud de la sección áurea del segmento de longitud d, donde d es la longitud de la diagonal del pentágono regular .

TEOREMA 2 :

En todo decágono regular , la longitud de su lado es la sección áurea de la longitud de su circunradio .

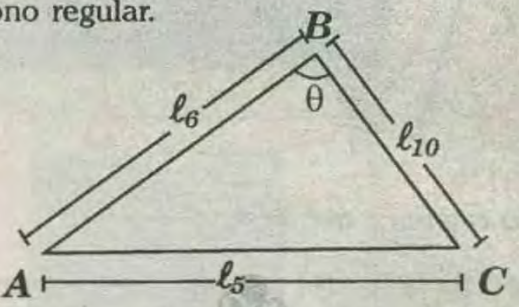


* De la figura : $\ell_{10} = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

Se deduce que ℓ_{10} es la sección áurea de R .

TEOREMA 3 :

Si en un triángulo las longitudes de sus lados son las longitudes del lado de un pentágono regular, de un hexágono regular y de un decágono regular de un mismo circunradio, entonces el triángulo es rectángulo; donde la hipotenusa es el lado del pentágono regular.



Si $AB = \ell_6 ; BC = \ell_{10}$ y $AC = \ell_5 \rightarrow \theta = 90°$

DEMOSTRACIÓN :

* Se sabe que :

$$\boxed{\ell_6 = R} \ \wedge \ \boxed{\ell_{10} = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} \ \wedge \ \boxed{\ell_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

* Tomando ℓ_6 y ℓ_{10}:

$$\ell_6^2 + \ell_{10}^2 = R^2 + \left(\frac{R\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell_6^2 + \ell_{10}^2 = \frac{R}{4}(10-2\sqrt{5}) \ldots\ldots (I)$$

$$\ell_5^2 = \left(\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2 \Rightarrow \ell_5^2 = \frac{R}{4}(10-2\sqrt{5}) \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

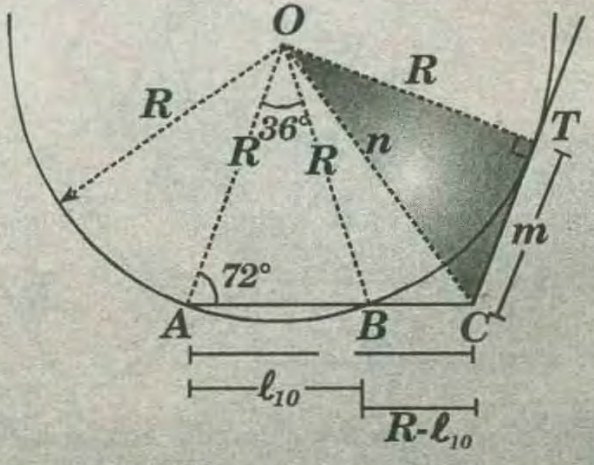
* Igualando *(I)* y *(II)*:

$$\ell_6^2 + \ell_{10}^2 = \ell_5^2$$

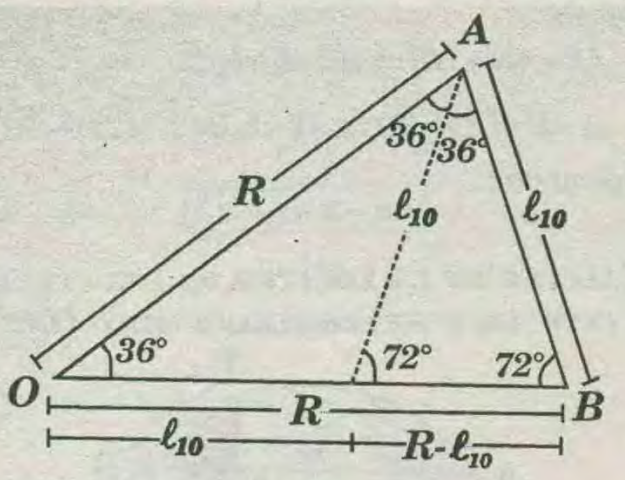
* Por lo tanto, se cumple el teorema de Pitágoras, es decir, $\theta = 90°$.

OBSERVACIÓN :

Método para calcular gráficamente la relación entre ℓ_6, ℓ_5 y ℓ_{10}.



* Se sabe que ΔAOB es elemental de ℓ_{10}:



* Por semejanza de triángulos :

$$\frac{\ell_{10}}{R-\ell_{10}}=\frac{R}{\ell_{10}} \rightarrow (\ell_{10})^2=R(R-\ell_{10}) \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Según la figura , teorema de la tangente :

$$(m)^2=R(R-\ell_{10}) \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* De *(I)* y *(II)*: $(\ell_{10})^2=m^2 \Rightarrow m=\ell_{10}$

* además :

$\triangle OAC$: $\triangle$ elemental de ℓ_5.

$$n=\ell_5$$

* luego $\triangle OTC$: $\ell_5^2=\ell_6^2+\ell_{10}^2$

* Se sabe :

$$\ell_6=R \quad \wedge \quad \ell_{10}=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

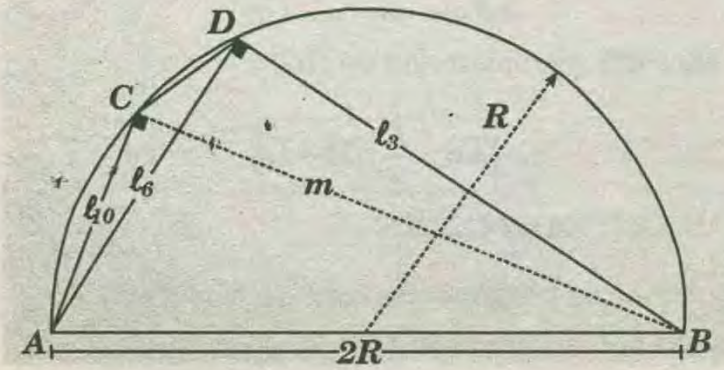
* De la relación : $(\ell_5)^2=\ell_6^2+\ell_{10}^2$

* Reemplazando:

$$(\ell_5)^2=R^2+\left(\frac{R}{2}\sqrt{5}-1\right)^2 \Rightarrow (\ell_5)^2=R^2+\frac{R^2(6-2\sqrt{5})}{4}$$

$$\Rightarrow \ell_5=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

CÁLCULO DE LA LONGITUD DEL PENTADECÁGONO REGULAR



* Se sabe :

$CD=?$

$m\widehat{CD}=24°$

$\ell_6=R \Rightarrow m\widehat{AD}=60°$

$\ell_{10}=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) \Rightarrow m\widehat{AC}=24°$

$\ell_3=R\sqrt{3}$, luego $m\widehat{CD}=24° \Rightarrow CD=\ell_{15}$

* Del $\triangle ABC$ (Pitágoras)

$$m^2=4R^2-(\ell_{10})^2$$

* Reemplazando :

$$m=\frac{R}{2}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}) \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

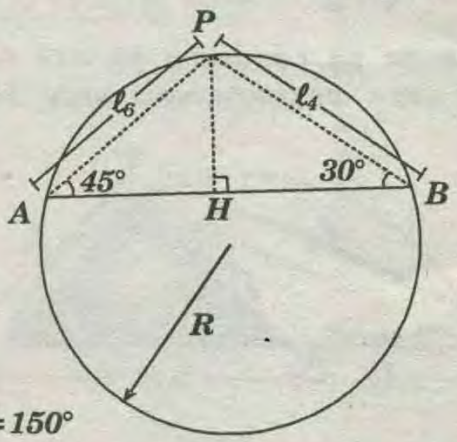
* Luego $\square ACDB$ (teorema de Ptolomeo)

$$m\ell_6=(\ell_{10})(\ell_3)+(\ell_{15})(2R) \ldots\ldots\ldots (II)$$

* Reemplazando *(I)* en *(II)* y operando :

$$\boxed{\ell_{15}=\frac{R}{2}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}-\sqrt{3})}$$

CÁLCULO DE LA LONGITUD DE UNA CUERDA CUYO ARCO DETERMINADO MIDE 150° .



Si $m\widehat{AB}=150°$

* Según la figura , se ubica P en $\overline{AB}$, tal que la $m\widehat{AP}=60°$ y $m\widehat{PB}=90°$.

* Luego: $AH=\ell_6(\cos 45°) \wedge HB=\ell_4(\cos 30°)$

* Se observa : $AB=AH+HB$

* Reemplazando : $AB=\ell_6(\cos 45°)+\ell_4(\cos 30°)$

* Operando :

$$AB=\frac{R\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3}) \Rightarrow \boxed{AB=R\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

CÁLCULO DE LONGITUD DE UNA CUERDA CUYO ARCO DETERMINADO MIDE 144°

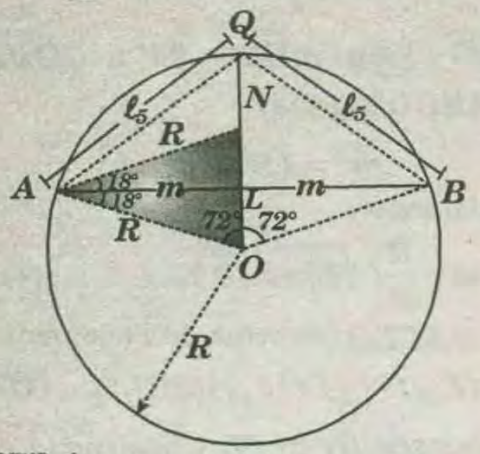
Si $m\widehat{AB}=144°$, Según la figura, se ubica Q en $\widehat{AB}$

WWW.GRATIS2.COM

, tal que la $m\widehat{AQ} = m\widehat{QB} = 72°$. Luego se traza $\overline{AN}$, tal que $AN = AO$; a si el $\triangle NAO$ es el $\triangle$ elemental del decágono regular.

$NO = \ell_{10}$

$$AL = LO = m = a_{p_{10}} \Rightarrow a_{p_{10}} = m = \frac{R}{4}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}$$

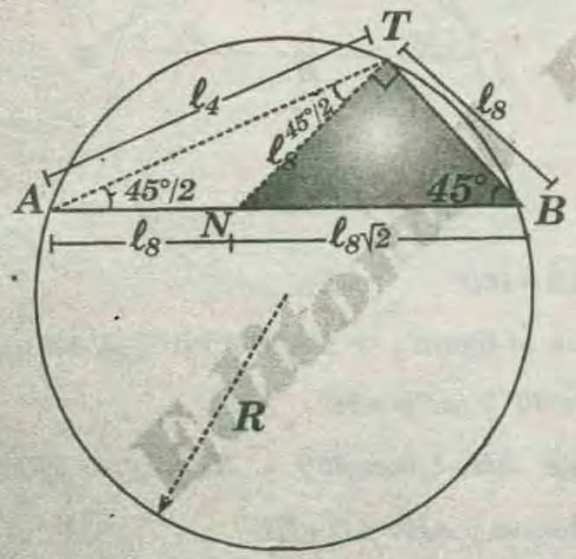


* Se observa :

$$AB = m + m \Rightarrow AB = 2\frac{R}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$$

$$\Rightarrow AB = R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow \boxed{AB = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

CALCULO DE LA LONGITUD DE UNA CUERDA CUYO ARCO DETERMINADO MIDE 135°



Si $m\widehat{AB} = 135°$, se ubica T en $\widehat{AB}$, tal que :

$m\widehat{AT} = 90°$ y $m\widehat{TB} = 45°$. Luego de traza $\widehat{TN}$, tal que $TN = TB$

$\triangle NTB : NB = \ell_8(\sqrt{2})$

* se nota : $AN = NT = \ell_8$

* Lo cual :

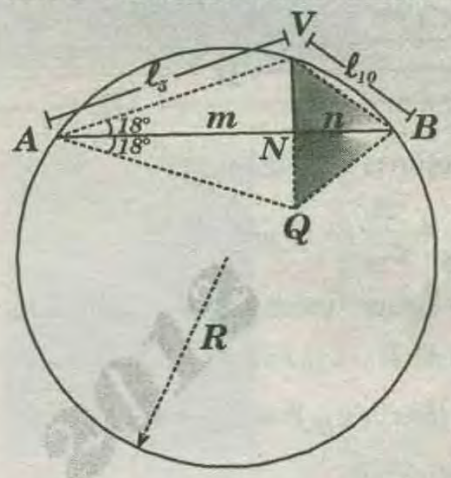
$$AB = AN + NB \Rightarrow AB = \ell_8 + \ell_8\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AB = \ell_8(1+\sqrt{2}) \Rightarrow AB = \ell_8 R\sqrt{2-\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})$$

* Operando :

$$\boxed{AB = R\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

CALCULO DE LA LOGITUD DE UNA CUERDA CUYO ARCO DETERMINADO MIDE 108°



Si $m\widehat{AB} = 108°$, se ubica V en $\widehat{AB}$, tal que $m\widehat{AV} = 72°$ y $m\widehat{VB} = 36°$.

* Luego se ubica Q : simétrico de V con respecto de $\overline{AB}$.

$\triangle VAQ$: $\triangle$ elemental del decágono regular.

$$a_{p_{10}} = m = \frac{\ell_5}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

* Pero:

$$\ell_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \rightarrow m = \frac{R\sqrt{5}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$\triangle VBQ$: elemental del decágono regular.

$$a_{p_5} = n = \frac{\ell_{10}}{4}(\sqrt{5}+1)$$

* Pero :

$$\ell_{10} = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \rightarrow n = \frac{R}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* Lo cual :

$\triangle VBQ$: elemental del pentágono regular :

$$AB = m + n \ldots\ldots\ldots (III)$$

* *(I)* y *(II)* reemplazando en *(III)* :

$$\boxed{AB = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)}$$

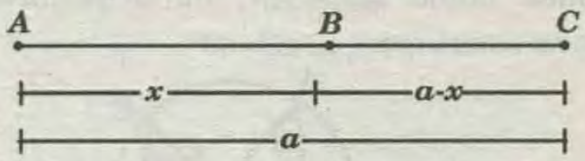
OBSERVACIONES :

(01) Para un polígono regular cuyo número de lados es una potencia de 2 se tiene :

$$L_{2K}=R\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....}}}}}_{(k-1)\ radicales}$$

donde **"R"** es el radio de la circunferencia circunscrita a dicho polígono regular .

02 Se denomina sección aúrea de un segmento a la división de dicho segmento en dos partes tales que la medida del mayor sea media proporcional entre las medidas del menor y el segmento total .



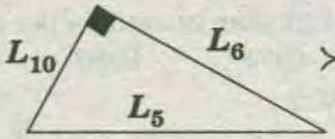
* Del gráfico :

$$x^2=(a-x)a \Rightarrow \boxed{x=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)}$$

* Para el decágono regular se tiene que su lado es la sección aúrea de su circunradio.

$$\ell_{10}=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

Los lados del pentágono regular, hexágono regular y decágono regular inscrito en la misma circunferencia, forman un triángulo rectángulo .



$$\rightarrow L^2_5=L^2_6+L^2_{10}$$

RESUMEN :

POLÍGONOS REGULARES	θ_n	L_n	a_{p_n}
TRIÁNGULO EQUILÁTERO	120°	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$
CUADRADO	90°	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$
PENTÁGONO REGULAR	72°	$\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$
HEXÁGONO REGULAR	60°	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$
OCTOGONO REGULAR	45°	$R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
DECAGONO REGULAR	36°	$\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
DODECAGONO REGULAR	30°	$R\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

PROBLEMAS RESUELTOS

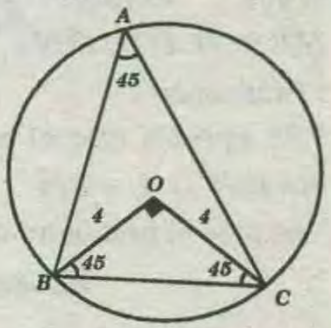
PROBLEMA 1 :

En un triángulo ABC, $m\hat{A}=45°$ y el circunradio mide **4**. Calcular BC .

A) 4 B) 6 C) 8 D) $4\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

* Después de graficar, se deduce que :
  $m\widehat{BC}=90°$
* Entonces $\triangle BOC$,
es notable ($\triangle$ 45° y 45°),
* Luego : $BC=4\sqrt{2}$



RPTA : "D"

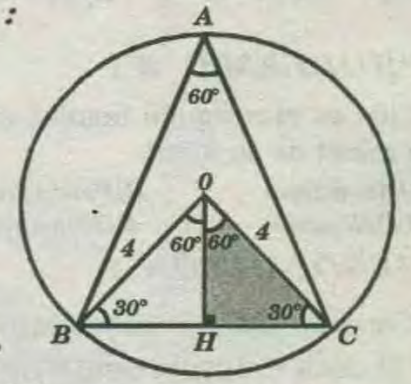
PROBLEMA 2 :

En un triángulo ABC, $m\hat{A}=60°$ y el circunradio mide **4**. Calcular la distancia del circunradio al lado BC.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Dato:
  $m\sphericalangle A=60°$; $R=4$
  $\rightarrow m\widehat{BC}=120°$
* El ángulo central :
  $m\hat{BOC}=m\widehat{BC}=120°$
* Del $\triangle OHC$(30° y 60°) :
  $\rightarrow$ $OH=2$

RPTA : "A"

PROBLEMA 3 :

En que la relación están los apotemas del cuadrado y del triángulo equilátero inscrito en la misma circunferencia.

A) $\sqrt{2}$:1 B) $\sqrt{3}$:1 C) $\sqrt{2}$:2 D) $\sqrt{3}$:2 E) $\sqrt{2}$:3

RESOLUCIÓN :

* Se sabe, por la teoría :

$$a_{p_4}=\frac{R\sqrt{2}}{2} \text{ y } a_{p_3}=\frac{R}{2}$$

www.GRATIS2.com

* Se pide :

$$\frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{\frac{R}{2}}=\sqrt{2}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 4 :

En un triángulo equilátero cuyo perímetro mide $18\sqrt{3}\,cm$, calcular el perímetro del hexágono regular inscrito en dicho triángulo equilátero.

A) $8\sqrt{3}$ B) $12\sqrt{3}$ C) $24\sqrt{3}$ D) $6\sqrt{3}$ E) $18\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

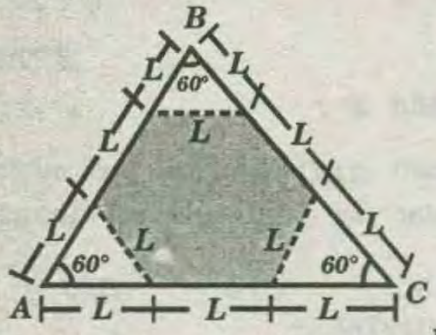
* Graficando :

* Se aprecia que el perímetro del triangulo es:

$9L=18\sqrt{3} \rightarrow L=2\sqrt{3}$

* Se pide el perímetro del hexágono, el cual será:

$$6L=6(2\sqrt{3})=12\sqrt{3}$$



RPTA : "B"

PROBLEMA 5 :

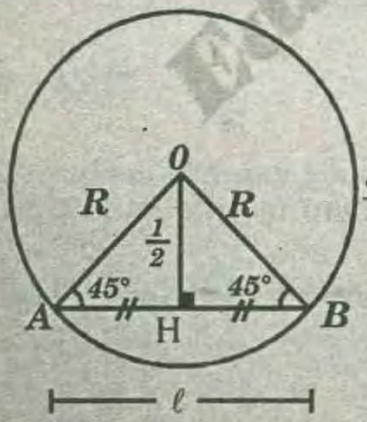
¿Cual es el polígono regular, donde su apotema es la mitad de su lado?.

A) Hexágono B) Pentágono C) Cuadrado D) Octógono E) Nonágono

RESOLUCIÓN :

*Como el ΔAOB es Isósceles luego la $m\sphericalangle AOB=90°$

* Es decir el ángulo central mide $90°$, entonces :



$\frac{360°}{n}=90° \rightarrow n=4$

fórmula del ángulo central

* Con lo que se deduce, que se trata de un cuadrado.

RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

En un triángulo ABC, $m\hat{A}=60°$ y el circunradio mide 4. calcular BC.

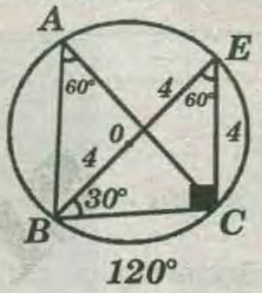
A) 4 B) 6 C) 8 D) $4\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

* Graficando :

* Construyendo el ΔBCE , donde BE es diámetro , es decir : $BE=2(R)=2(4)=8$

*Además como $m\sphericalangle A=60°$, entonces por arco capaz, se tendrá que : $m\sphericalangle E=60°$



Finalmente como $m\sphericalangle C=90°$, entonces de $30°$ y $60°$, se obtendrá : $BC=4\sqrt{3}$

RPTA : "E"

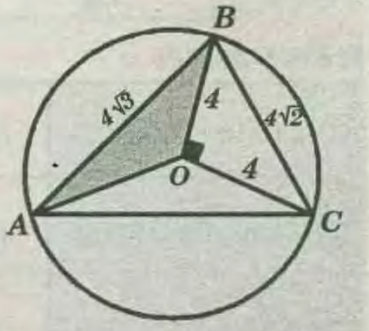
PROBLEMA 7 :

En un triángulo ABC, $AB=4\sqrt{3}$, $BC=4\sqrt{2}$ y el circunradio mide 4.Calcular la medida del ángulo B.

A)45° B)60° C)75° D)90° E)105°

RESOLUCIÓN :

* Graficando:



* Se deduce que:

$m\widehat{BC}=90°$ y $m\widehat{AB}=120°$

* Por ángulo inscrito :

$m\widehat{AC}=2(m\sphericalangle B)$

* Además:

$m\widehat{AB}+m\widehat{BC}+m\widehat{AC}=360°$

$\rightarrow 120°+90°+2(m\sphericalangle B)=360°$

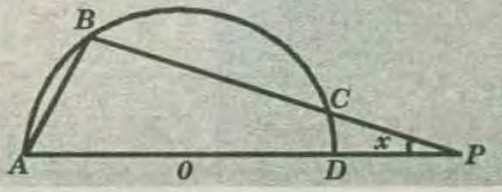
* Despejando : $m\sphericalangle B=75°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

Calcular "x" si: $AB=R$, $BC=R\sqrt{2}$, "0" es centro de la semicircunferencia , $AO=R$

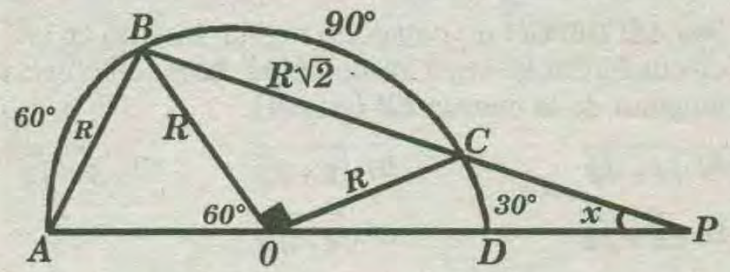
A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 30°
E) 37°



RESOLUCIÓN:

* Se deduce que:

$m\widehat{AB}=60°, m\widehat{BC}=90°$ y $mCD=30°$



* Pero por ángulo exterior, se obtendrá :

$$x=\frac{\widehat{AB}-\widehat{CD}}{2}=\frac{60°-30°}{2}=15°$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 9 :

Si un cuadrado y un hexágono regular se inscriben en una misma circunferencia, la razón de sus apotemas es:

A)2/3 B)3/2 C)2/3 D) $\sqrt{2/3}$ E) $\sqrt{2/3}$

RESOLUCIÓN :

* Sabemos , por teoría: $a_{p_4}=\frac{R\sqrt{2}}{2}$ y $a_{p_6}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$

* Se pide:

$$\frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{\frac{R\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 10 :

El radio de una circunferencia mide 8 . Hallar el lado del pentágono regular y apotema del dodecágono regular en la circunferencia.

A) $L_5=2\sqrt{5}$ B) $L_5=4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ C) $L_5=4\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$a_{p_{12}}=12\sqrt{2}$ · $a_{p_{12}}=4\sqrt{0-2\sqrt{5}}$ $a_{p_{12}}=4\sqrt{2+\sqrt{3}}$

RESOLUCIÓN :

* Por teoría: $L_5=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

* Luego para $R = 8$, se obtendrá :

$$L_5=4\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

* Ahora : $a_{p_{12}}=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

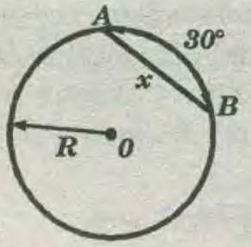
* Luego para $R = 8$: $a_{p_{12}}=4\sqrt{2+\sqrt{3}}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

Del gráfico. Hallar : x, si: $R=\sqrt{2+\sqrt{3}}$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 0,5



RESOLUCIÓN :

* Como $30°$ es la medida del ángulo central del dodecágono regular.

* Como : $x=L_{12} \rightarrow x=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

* Pero: $R=\sqrt{2+\sqrt{3}}$, luego: $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

* Efectuando :

$$x=\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \Rightarrow x=\sqrt{(2)^2-(\sqrt{3})^2}=1$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 12 :

Hallar la medida del ángulo central del pentadecágono regular.

A)24° B)25° C)26° D)27° E)28°

RESOLUCIÓN:

* Como: $\theta_n=\frac{360°}{n} \rightarrow \theta_{15}=\frac{360°}{15}=24°$

RPTA : "A"

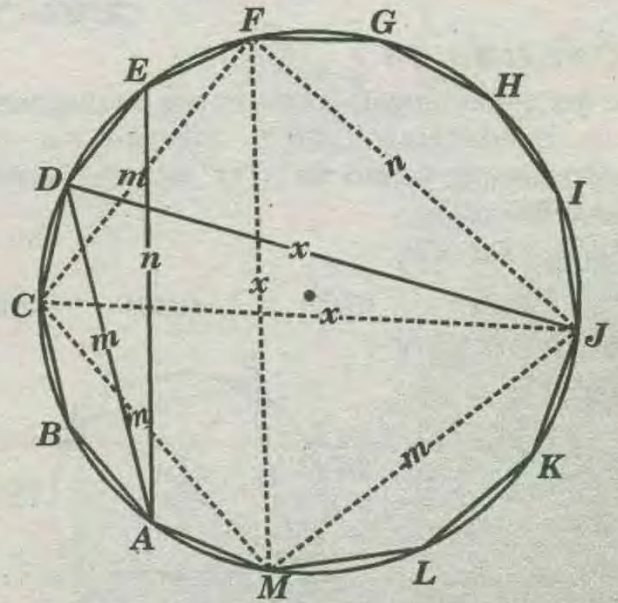
PROBLEMA 13 :

En un polígono regular de 13 lados $ABC.....LM$. Si $AD = m$, $AE = n$. Calcule DJ.

A) $\sqrt{m^2+2n^2}$ B) $\sqrt{n^2+mn}$ C) $\sqrt{m^2+mn}$

D) $\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}}$ E) $\sqrt{m^2+2mn}$

RESOLUCIÓN :



* Dato: $AD = m$, $AE = n$

* Se pide hallar: DJ

* En el cuadrilátero inscrito $MCFJ$, por el teorema de Ptolomeo : $x \times x = m \times n + m \times m$

$\Rightarrow x^2 = m^2 + mn \Rightarrow x = \sqrt{m^2 + mn}$

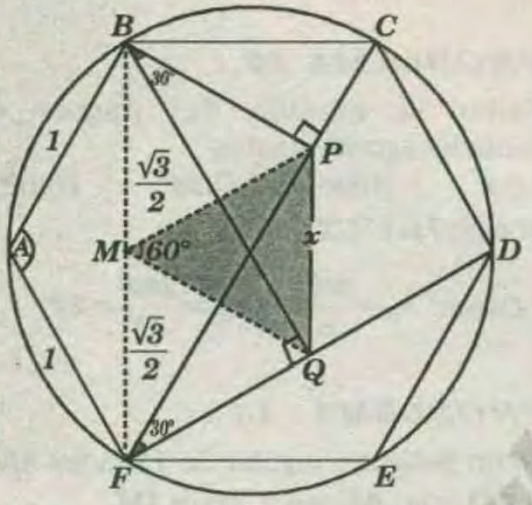
RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

El lado de un hexágono regular $ABCDEF$ mide $1cm$, desde B se trazan $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ perpendiculares a $\overline{CF}$ y $\overline{DF}$ respectivamente. Calcule PQ (en m).

A) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{7}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

RESOLUCIÓN :



ΔFAB isósceles :

$m\sphericalangle A = 120°$ y $AF = AB = 1 \Rightarrow BF = \sqrt{3}$

* Cuadrilátero $BPQF$ inscriptible, donde M es centro de la circunferencia circunscrito a dicho cuadrilátero.

* ΔMPQ equilátero : $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

RPTA :"E"

PROBLEMA 15 :

Hallar del menor ángulo formado por las diagonales de un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una circunferencia de centro "O" ("O" está en el interior del cuadrilátero), si $AB = L_4$ y $CD = L_5$

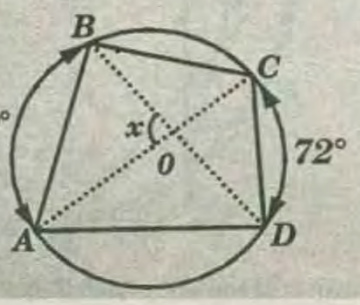
A)80° B)81° C)82° D)83° E)84°

RESOLUCIÓN :

* $m\widehat{AB} = \frac{360°}{4} = 90°$

$m\widehat{CD} = \frac{360°}{5} = 72°$

* Luego:



$x = \frac{m\widehat{AB} + m\widehat{CD}}{2} \Rightarrow x = \frac{90° + 72°}{2} = 81°$

RPTA : "B"

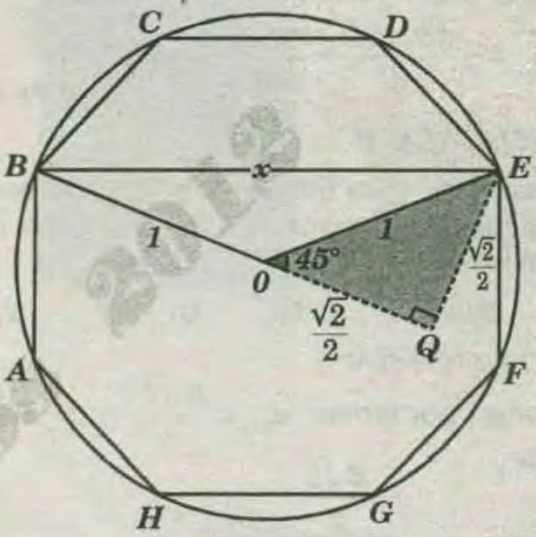
PROBLEMA 16 :

Sea $ABCDEFGH$ un octágono regular inscrito en una circunferencia cuyo radio mide $1cm$, calcule la longitud de la cuerda EB (en cm).

A) $\sqrt{4-\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ C) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

D) $\sqrt{3+\sqrt{2}}$ E) $\sqrt{4-\sqrt{2}}$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle OEQ$ isósceles : $OQ = EQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

* $\triangle BEQ$:

$$x^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

* Simplificando: $x = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

RPTA : "B"

PROBLEMA 17 :

Calcule la longitud de un polígono regular circunscrito a una circunferencia en función del radio de la circunferencia y de la longitud del lado del polígono regular del mismo número de lados inscrito en dicha circunferencia.

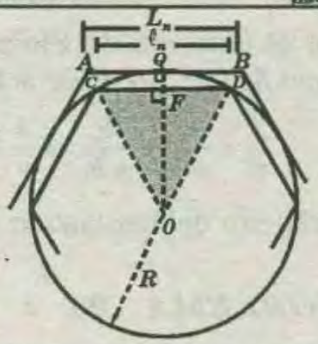
A) $L_n = \frac{2R\ell n}{3}$ B) $L_n = \frac{2R\ell_n}{\sqrt{R^2 - \ell_n^2}}$ C) $L_n = \frac{2R\ell_n}{\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}}$

RESOLUCIÓN:

* En el gráfico

L_n : La longitud del lado del polígono regular de n lados circunscrito a la circunferencia de radio R.

R_n: Longitud del lado del polígono regular de n lado inscrito en la circunferencia.



* $\Delta AOB - \Delta COD$

$$\frac{L_n}{\ell_n}=\frac{OQ}{OF}$$

* Pero :

$$OQ=R \text{ y } OF=a_{p_n}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\ell_n^2}$$

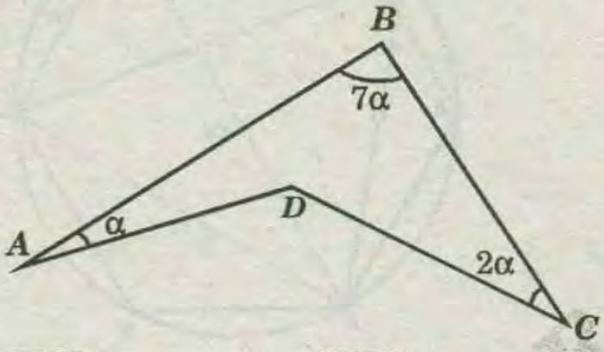
* Reemplazando:

$$\frac{L_n}{\ell_n}=\frac{R}{\frac{1}{2}4R^2-\ell_n^2}\rightarrow L_n=\frac{2R\ell_n}{\sqrt{4R^2-\ell_n^2}}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 18 :

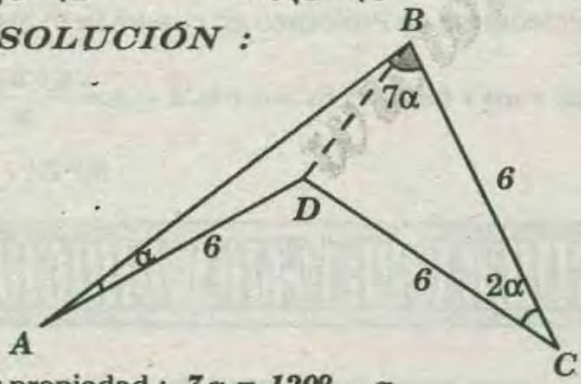
En la figura mostrada se cumple $AD=DC=BC=6\ cm$. Halle BD (en cm).



A) $5\sqrt{2-\sqrt{3}}$ B) $3\sqrt{2-\sqrt{3}}$ C) $3\sqrt{3-\sqrt{2}}$

D) $4\sqrt{3-\sqrt{2}}$ E) $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$

RESOLUCIÓN :



* Por propiedad : $7\alpha = 120^\circ - \alpha$

$8\alpha = 120^\circ \rightarrow \alpha = 15^\circ$

* ΔDBC isósceles : $BD = \ell_{12}$

$$BD=6\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

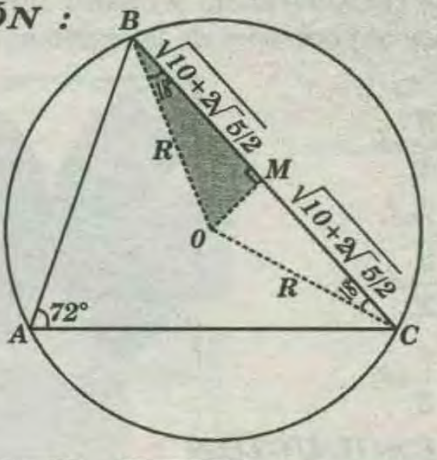
RPTA : "E"

PROBLEMA 19 :

Un triángulo ABC está inscrito en una circunferencia y $BC=6\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, $m\measuredangle A=72^\circ$. Calcule la longitud del radio de la circunferencia (en u).

A) 1 B)2 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E)1,2

RESOLUCIÓN :



* $\triangle OMB$:

$$Cos18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2R}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

* De donde : $R = 2$

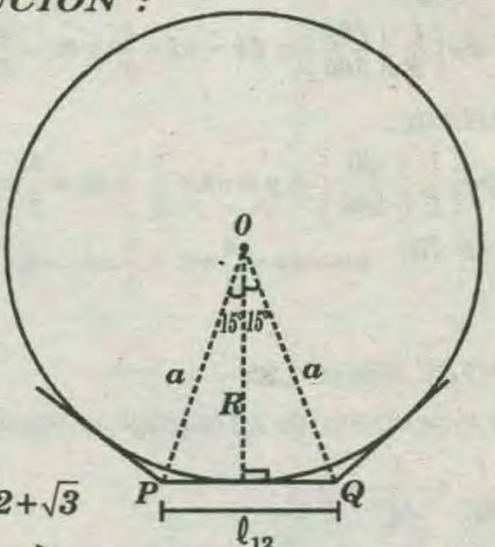
RPTA : "B"

PROBLEMA 20:

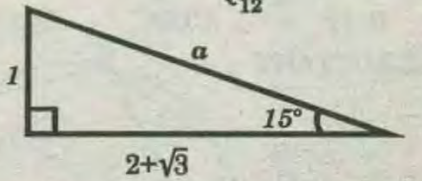
Calcule la longitud del lado del dodecágono regular circunscrito a una circunferencia , cuyo radio mide $(2+\sqrt{3})$.

A)2 B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :



* Dato: $R=2+\sqrt{3}$



$$\Rightarrow a^2=1^2+(2+\sqrt{3})^2\rightarrow a=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

* ΔPOQ:

$$\ell_{12}=a\sqrt{2-\sqrt{3}}\Rightarrow \ell_{12}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}\times\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \ell_{12}=2\sqrt{4-3}\Rightarrow \ell_{12}=2\mu$$

RPTA :"A"

PROBLEMA 21 :

La figura muestra un cuadrado cuyo lado mide L, una circunferencia y cuatro semicircunferencias. Halle el perímetro de la región sombreada.

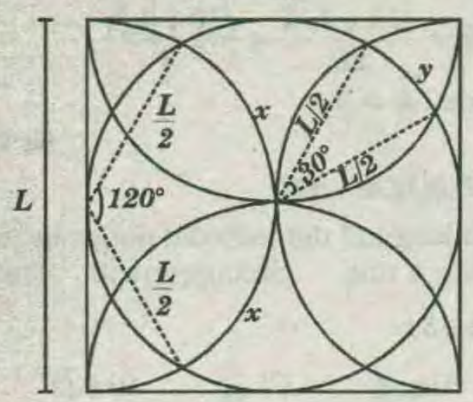
A) $\frac{5}{3}\pi L$

B) $2\pi L$

C) $\frac{4}{3}\pi L$

D) $\frac{7}{3}\pi L$

RESOLUCIÓN :



* De la figura :

$$2x = 2\pi\left(\frac{L}{2}\right)\left[\frac{120}{360}\right] \Rightarrow 2x = \pi L \times \frac{1}{3} \Rightarrow 8x = \frac{4}{3}\pi L \ldots\ldots\ldots (I)$$

* También :

$$y = 2\pi\left[\frac{L}{2}\right]\left[\frac{30}{360}\right] \Rightarrow y = \pi L \times \frac{1}{2} \rightarrow 4y = \frac{1}{3}\pi L \ldots\ldots\ldots (II)$$

* (I) + (II): $8x + 4y = \frac{4}{3}\pi L + \frac{1}{3}\pi L \Rightarrow 8x + 4y = \frac{5}{3}\pi L$

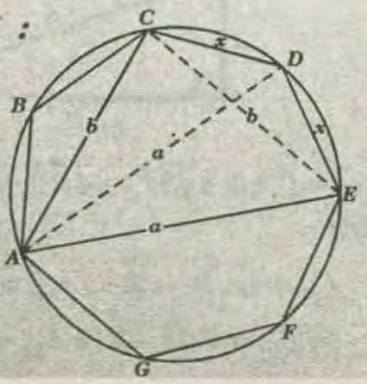
RPTA "A"

PROBLEMA 22 :

Halle el perímetro de un heptágono regular $ABCDEFG$ si: $\frac{1}{AE} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{6}$

A)40 B)41 C)42 D)43 E)44

RESOLUCIÓN :



* Por el teorema de Ptolomeo en el cuadrilátero inscrito $ACDE$: $ab = ax + bx \Rightarrow x(a + b) = ab$

$$\frac{1}{x} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}b} + \frac{\cancel{b}}{a\cancel{b}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = 6$$

* Perímetro del heptágono regular será: 42μ

RPTA : "C"

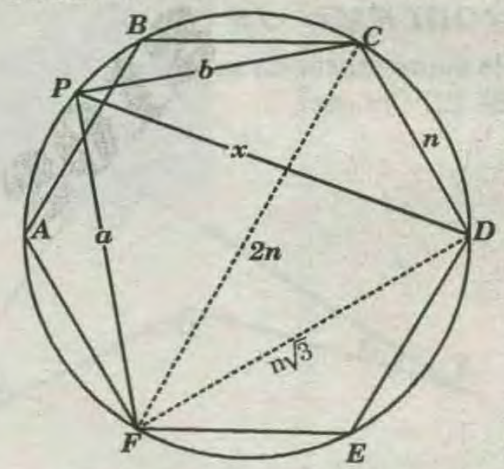
PROBLEMA 23 :

Se tiene el hexágono regular $ABCDEF$ inscrito en una circunferencia en el arco AB se ubica un punto P,

* Si $PF=a$ y $PC = b$. Halle PD. Además $a>b$.

A) $\frac{a+b\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{b+a\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{a+b}{2}$ D) $\frac{2ab}{a+b}$ E) $\frac{ab\sqrt{3}}{a+b}$

RESOLUCIÓN :



* Dato : $PF = a$ y $PC = b$

* Se pide hallar: $PD = x$

* Por el teorema de Ptolomeo en cuadrilátero inscrito $FPCD$:

$$x \times 2n = an + bn\sqrt{3} \Rightarrow 2x = a + b\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{a + b\sqrt{3}}{2}$$

RPTA : "A"

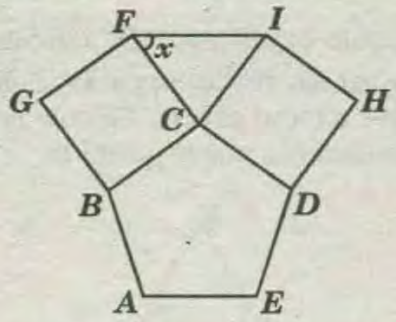
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

POLIGONOS REGULARES
LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

01 ¿Cuántos lados tiene un polígono convexo en el cual su número de diagonales excede en 8 al número de diagonales de otro polígono convexo que tiene un lado menos?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

02 En la figura mostrada se tiene 3 polígonos regulares $(ABCDE, BCFG, CDIH)$. Calcular "x".



A) 36° B) 50° C) 54° D) 60° E) 75°

03 En un polígono equiángulo la relación entre las medidas de un ángulo interior y de un ángulo exterior es de 7 a 2. Calcular el número de diagonales del polígono.

A) 18 B) 25 C) 27 D) 32 E) 36

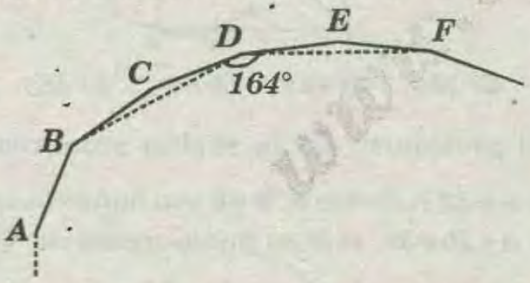
04 Se tiene un polígono regular de "n" lados $ABCDE$ ..... y otro polígono regular de $(n-2)$ lados $ABPQR$ ..... interior al primero. Si $m\sphericalangle CBP=6°$, calcular "n".

A) 14° B) 16° C) 17° D) 12° E) 15°

05 En un polígono equiángulo $ABCDEF$ ..... las bisectrices de los ángulos ABC y DEF son perpendiculares. Calcular el número de diagonales de dicho polígono.

A) 27 B) 35 C) 44 D) 54 E) 65

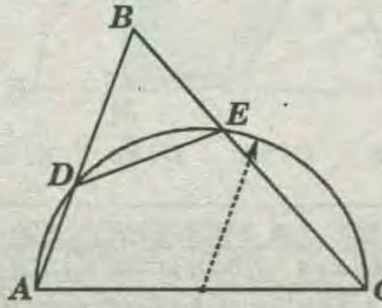
06 La figura muestra parte de un polígono regular de "n" lados. Calcular el valor de "n".



A) 40 B) 36 C) 45 D) 18 E) 24

07 Según el diagrama, el diámetro $AC=16$.

Si $m\sphericalangle ABC=m\overset{\frown}{DE}$ calcular DE.



A) 8 B) $8\sqrt{2}$ C) $8\sqrt{3}$ D) 4 E) $4\sqrt{2}$

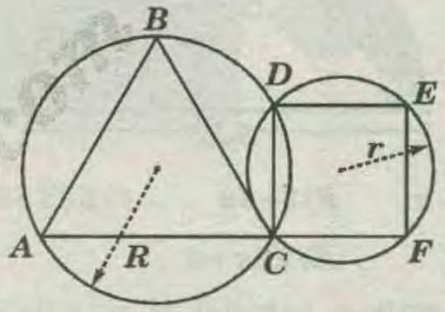
08 $ABCDEFGH$ es un polígono regular donde el radio de la circunferencia circunscrita mide $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$. M y N son puntos medios de $\overline{GH}$ y $\overline{EF}$, respectivamente. Calcular MN.

A) $2(\sqrt{2}+1)$ B) $4(\sqrt{2}+1)$ C) $3+\sqrt{2}$
D) $3(\sqrt{2}+1)$ E) $4(\sqrt{2}-1)$

09 Se tiene una circunferencia de diámetro $AE=2R$. En $\overset{\frown}{AE}$ se ubican los puntos B, C y D, tal que: $\overline{BC}\parallel\overline{AD}$, $\overline{CD}\parallel\overline{BE}$ y $\overline{BE}\cap\overline{AD}=\{P\}$.
Si $EP=\sqrt{2}(PB)$, hallar AC.

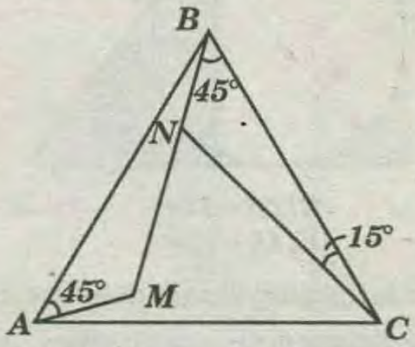
A) $\sqrt{2}R$ B) $\sqrt{3}R$ C) R D) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})R$ E) $2R$

10 Según el gráfico, los polígonos mostrados son regulares. Calcular R/r.



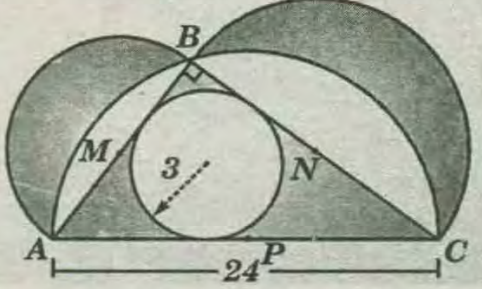
A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{2}$ E) 3

11 Del gráfico, el triángulo ABC es equilátero. $NC=8\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Calcular AM.



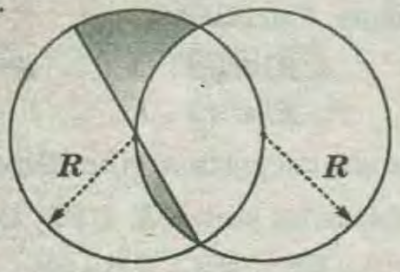
A) $2\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$ D) 8 E) $4\sqrt{2}$

12 Calcular el perímetro de la región sombreada, si: M, N y P son centros de las semicircunferencias.



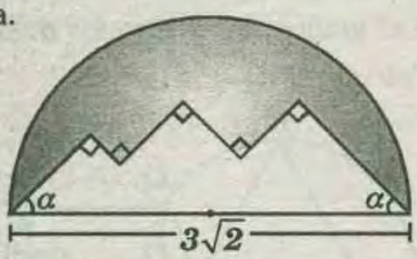
A) $34+34\pi$ B) $54+27\pi$ C) $33\pi+56$
D) $54+33\pi$ E) $27+17\pi$

13 En la figura, hallar el perímetro de la región sombreada.



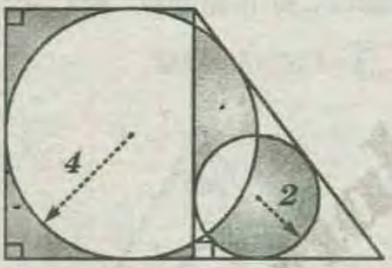
A) $R(\pi+3)$ B) $2R(\pi+1)$ C) $R(\pi+2)$
D) $3R(\pi+1)$ E) $6R(\pi+1)$

14 Del gráfico, calcular el perímetro de la región sombreada.



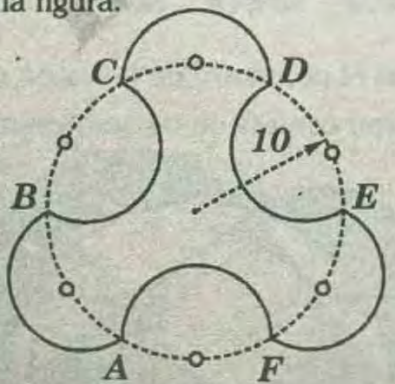
A) $6+\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$ B) $7+5\pi$ C) $8\sqrt{2}+3\pi$
D) $2\pi+\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}\pi+6$

15 Del gráfico, calcular el área de la región sombreada.



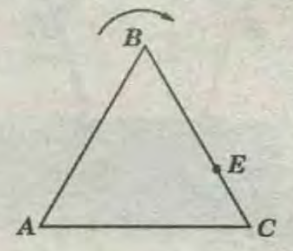
A) $11+6\pi$ B) $28+12\pi$ C) $22+12\pi$
D) $15+11\pi$ E) $18+12\pi$

16 Calcule la longitud del alambre que fue doblado en 6 semicircunferencias congruentes, tal como se muestra en la figura.



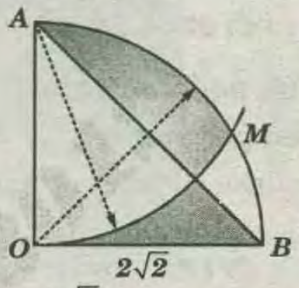
A) 20π B) 21π C) 25π D) 30π E) 36π

17 El triángulo equilátero ABC cuyo lado mide 3, empieza a girar sin resbalar, de tal manera que el punto A vuelve a tocar el piso. Calcule la longitud de la trayectoria descrita por el punto E.



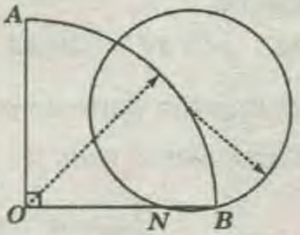
A) 2π B) 3π C) 4π D) 5π E) 7π

18 Calcular el perímetro de la región sombreada.



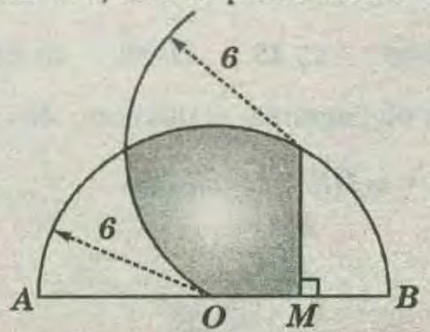
A) $2\sqrt{2}(\pi+3\sqrt{2})$ B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}(2\pi+3\sqrt{2}+3)$ C) $2\sqrt{2}(2\pi+3\sqrt{2})$
D) $2\sqrt{2}(2\pi+\sqrt{3})$ E) $2\sqrt{2}(\pi+\sqrt{3})$

19 Calcular la longitud de la circunferencia, si: $(OA)(NB)=16$.



A) 6π B) 10π C) 12π D) 8π E) 48π

20 El perímetro de la región sombreada es $(a+b\pi+c\sqrt{3})$, donde a, b y c son números enteros. Calcule $a+2b+3c$, si M es punto medio de $\overline{OB}$.



A) 11 B) 12 C) 18 D) 20 E) 10

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)B	2)A	3)B	4)A	5)D	6)C	7)C	8)D	9)B	10)D
11)D	12)B	13)A	14)C	15)B	16)C	17)D	18)D	19)B	20)D

AREAS DE REGIONES TRIANGULARES

CAPITULO 30

OBJETIVOS :

Al finalizar la unidad el alumno será capaz de :

* *Conocer la definición de área.*
* *Calcular el área de regiones triangulares.*
* *Establecer relaciones de áreas entre regiones triangulares.*
* *Comprender las definiciones básicas y conocer los postulados fundamentales y teoremas relacionados con las áreas de regiones triangulares.*
* *Aplicar las fórmulas correspondientes para determinar las áreas de las regiones triangulares .*
* *Resolver problemas relacionados al cálculo de áreas de regiones desconocidas , ya sea sumando , restando o trasladando regiones , para formar regiones conocidas .*

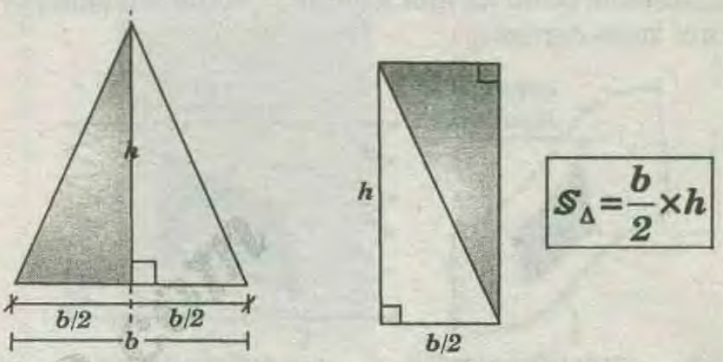
INTRODUCCIÓN :

A menudo al pasar por una calle habrás visto algunos carteles en la pared que dice: ***SE VENDE 300 m²*** o en algunos avisos publicitarios en los periódicos anunciando la venta de una casa o un terreno, en el cual te dan el área de cada uno de ellos y es que si te habras dado cuenta el tema de áreas es importante ya que se utiliza para poder realizar la compra o venta de un inmueble y para muchas cosas más.

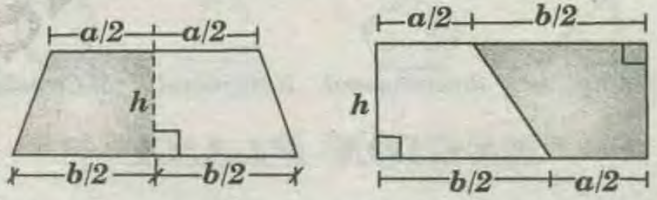
El historiador Griego Herodoto afirma que , el hecho de que todos los años con el desbordamiento del Nilo , se borrasen las lindes de los campos , fue lo que acentuó la necesidad de los agrimensores de volver a trazar los linderos de las tierras.

Estas habilidades de los «tensores de cuerdas» egipcios fueron admiradas por Demócrito (Matemático notable).

En parte por la precisión en la construcción de las pirámides. Pero lo cierto es que en el papiro de Ahmes se muestra que , para calcular el área de un triángulo isósceles , hay que tomar la mitad de lo que nosotros llamaríamos la base y multiplicar por la altura.



y trata análogamente el caso del trapecio isósceles



$$S_{\square} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) h \Rightarrow S_{\square} = \left(\frac{a+b}{2}\right) h$$

En ***1936*** se desenterró una colección de tablillas, procedentes de ***SUSA*** (a unos ***300 km*** al este de Babilonia), donde se compara las áreas y los cuadrados de los lados de los polígonos regulares de ***3 ; 4 ; 5; 6*** y ***7*** lados , de donde se puede deducir que la aproximación de ***p*** adoptada por el escriba, es de ***3,730*** ó ***3 1/8***. Este valor es tan bueno como el que adoptaron los egipcios.

Hay alusiones a trabajos perdidos sobre la geometría plana de Arquímedes y hay razón para creer que alguno de los teoremas de estos trabajos han sido conservados en *el* LIBRO DE LEMAS , colección que nos ha llegado por los Árabes. Un escritor árabe dice que Arquímedes fue el descubridor de la celebrada fórmula.

$$K = \sqrt{\{S(S-a)(S-b)(S-c)\}}$$

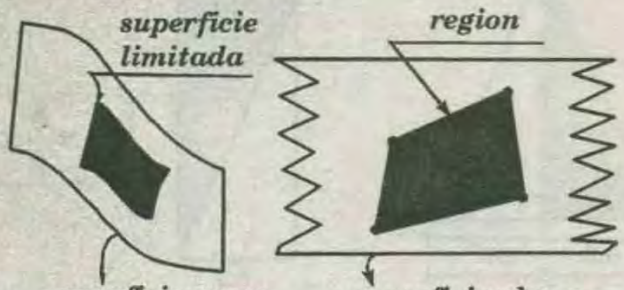
del área de un triángulo en función de sus tres lados.

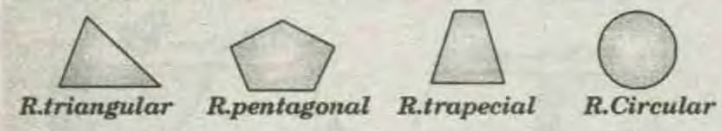
Esta fórmula se halla en un trabajo posterior de Herón de Alejandría.Fueron muchos los aportes que , en diferentes épocas y culturas , se han dado para llegar a calcular las áreas de las superficies de las figuras .

Estas han permitido hacer presupuestos en la ingeniería o en construcciones simples ; poder saber que cantidad de material se debe utilizar para tarrajear una pared, pintar un muro , saber qué área de un edificio se va a cubrir con vidrio , qué cantidad o porcentaje se va cubrir con concreto o madera , es decir la utilidad de conocer las áreas de las superficies es múltiple.

REGIÓN

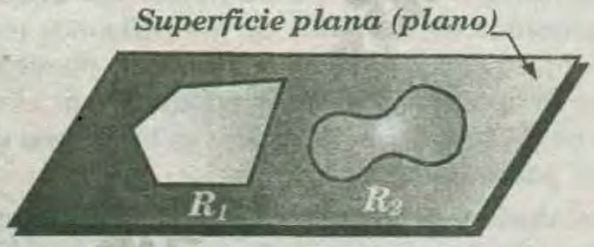
Es aquella parte de una superficie plana limitada por una línea cerrada.





REGIÓN PLANA

En una porción de plano limitado por una línea cerrada , también llamada frontera de la región. Una región triangular es la unión del triángulo y su región interior. Las regiones principales a tratarse en este capítulo son las regiones poligonales.



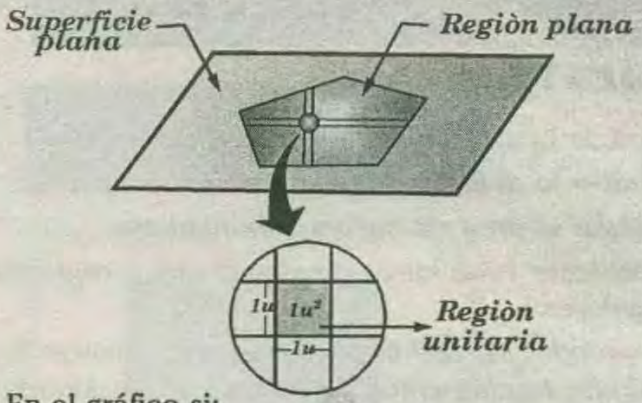
R_1 : Región poligonal(pentagonal)

R_2 : Región curvilínea

ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA($\mathbb{S}$ ó $\mathbb{A}$)

Es la medida numérica de una región plana, la cual resulta de comparar dicha región con otra tomada como unidad (región unitaria).

Entonces, para expresar la medida de una región , se tiene que disponer, en primer lugar de una unidad de longitud, por ejemplo, el metro *(m)* ; luego la unidad convencional de área es una región cuadrada cuyo lado tiene por longitud la unidad de longitud *(m)*. Esta unidad de área es la unidad elevado al cuadrado por ejemplo, la unidad es el metro cuadrado.



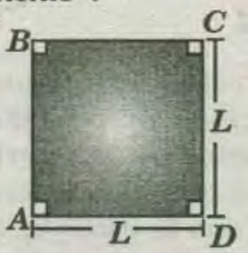
* En el gráfico si:

$\mathbb{S}_{\pentagon} = n$ veces $(1\mu^2)(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \mathbb{S} = n(\mu^2)$

$\mathbb{S}_{\pentagon}$: área de la región pentagonal

* De esta parte, podemos concluir que área de una región cuadrada es igual al cuadrado de la longitud de su lado:

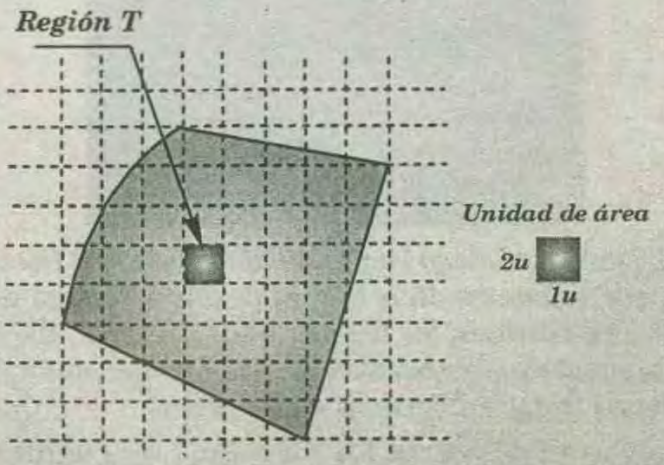
Gráficamente :



$\mathbb{S}_{\square ABCD} = L^2$

DEFINICIÓN :

Se llama área a la extensión de una porción limitada de una superficie. Para medir las áreas se toma como unidad el área de un polígono determinando , y entonces la medida de un área cualquiera será la relación de esta área a la unidad.



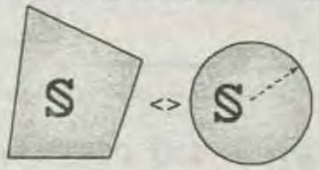
En general se toma como unidad de áreas , el área de un cuadrado cuyo lado sea la unidad de longitud.

EJEMPLO :

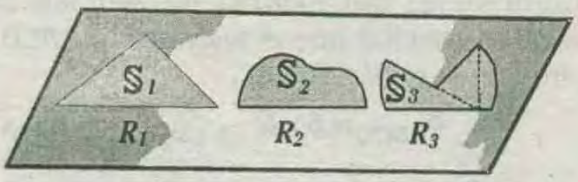
* La medida de una región triangular es igual a ***125***
* El área de una región triangular es igual a ***125u²***

FIGURAS EQUIVALENTES

En forrma general dos figuras son equivalentes si tiene diferentes formas pero igual tamaño , para figuras planas , el tamaño se refiere al área es decir dos figuras planas serán equivalentes si tienen la misma área y para dos figuras espaciales el tamaño se refiere al volumen es decir dos figuras serán equivalentes si sus volúmenes son iguales .



* Son regiones planas que tienen igual área.
* Sus formas no son necesariamente iguales.

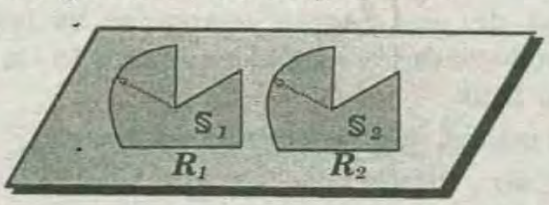


* En el gráfico se muestra tres regiones R_1 , R_2 y R_3 de áreas S_1, S_2 y S_3 respectivamente.

$$R_1 <> R_2 <> R_3 \Leftrightarrow A_1 = A_2 = A_3$$

REGIONES CONGRUENTES

Son dos regiones planas que están limitadas por figuras congruentes ; tienen igual área.

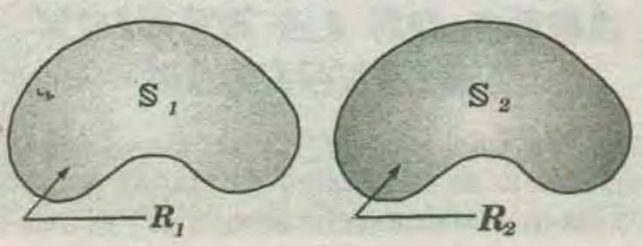


* En el grafico, se muestra la región R_1 y R_2 de área S_1 y S_2 respectivamente.

Si: $R_1 \cong R_2 \Rightarrow S_1 = S_2$

AXIOMA 1 :

Dos regiones congruentes , tienen áreas iguales.



S_1: área de la región R_1 .

S_1: área de la región R_2.

Si en la figura «las regiones R_1 y R_2 son congruentes $(R_1 = R_2)$. Entonces

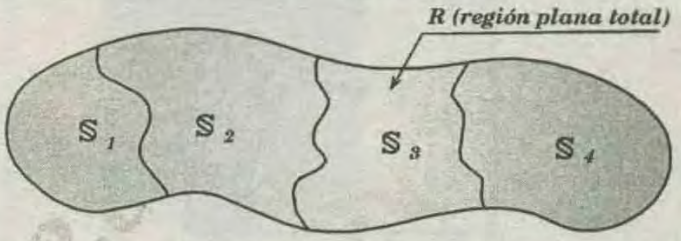
$$S_1 = S_2$$

Si dos figuras planas son congruentes , entonces las regiones determinadas por ellos tienen la misma área.

A toda región poligonal le corresponde un número positivo único .

AXIOMA 2 :

El área de una región plana es igual a la suma de las áreas de todas sus regiones parciales.



* Sean , S_1; S_2; S_3; y S_4, áreas de las regiones parciales y S, área de la región plana total.

* Entonces : $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S$

Tomando el principio de que todo es la suma de sus partes, podemos establecer que el área de una región plana es la suma de las áreas de las regiones planas que la componen.

AXIOMA 3 :

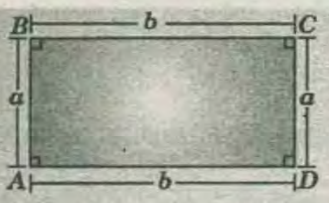
El área de una región cuadrada es igual al cuadrado de la longitud de su lado.

□ *ABCD* : Región cuadrada

* Entonces : $S_{\square ABCD} = (a)^2$

TEOREMA 1 :

El área de toda región rectangular es igual al producto de las longitudes de dos lados contiguos.

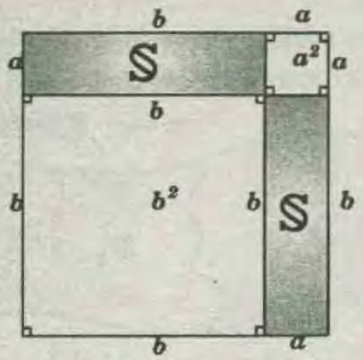


$$\mathbb{S}_{\square ABCD}=(a)(b)$$

En este caso se observa que basta multiplicar las longitudes de los lados adyacentes para conocer cuantas veces esta contenido la unidad de área en la región rectangular.

DEMOSTRACIÓN :

* Tomando dos lados consecutivos del rectángulo construimos cuadrados , relativos a dichos lados



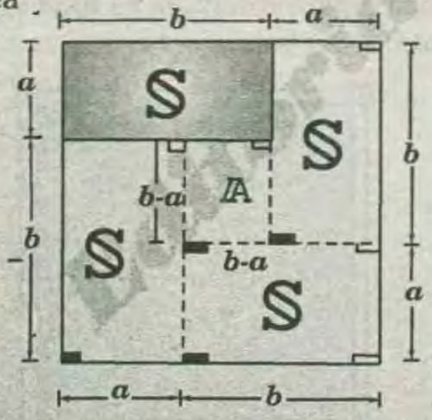
En la figura mostrada $\mathbb{S}$ denota el área desconocida del rectángulo , las áreas de los cuadrados son a^2 y b^2 por el postulado anterior el área de toda la figura es $(a+b)^2$. Por tanto , igual al mediante aplicación repetida del postulado de adición y áreas.

$$a^2 + 2\mathbb{A} + b^2 = (a+b)^2$$

de donde $\mathbb{A}=ab$

OTRO MÉTODO :

Como los rectángulos son congruentes tienen la misma área .

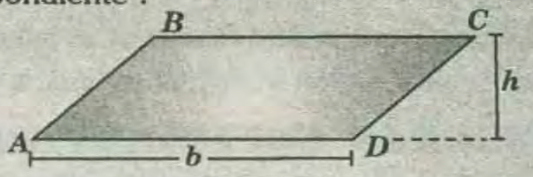


$4\mathbb{S}+\mathbb{A}=(a+b)^2$; pero $\mathbb{A}=(b-a)^2$

$\Rightarrow 4\mathbb{S}+(b-a)^2=(a+b)^2 \Rightarrow 4\mathbb{S}=4ab \Rightarrow \mathbb{S}=ab$

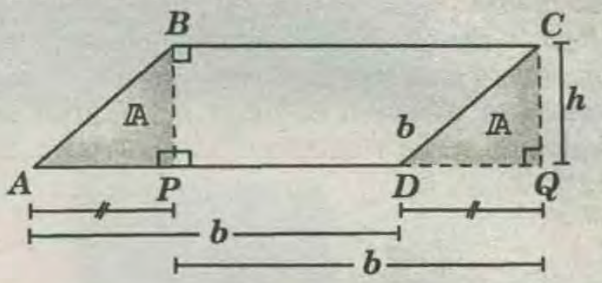
ÁREA DE UNA REGIÓN PARALELOGRÁMICA

El área de una región paralelográmica o romboidal es el producto de una base cualquiera y la altura correspondiente .



$$\mathbb{S}=b\times h$$

DEMOSTRACIÓN :



* Si trazamos $\overline{BP}$ y $\overline{CQ}$ perpendiculares a $\overline{AD}$ entonces los triángulos *ABP* y *DCQ* son congruentes por lo tanto sus áreas serán iguales(axioma de congruencia) del axioma de Adición de áreas podemos concluir que el área región *ABCD* es igual al área de la región *PBCQ* .

$$\mathbb{S}_{PBCQ}=b\times h \rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{PBCQ}=b\times h}$$

REGIÓN TRIANGULAR

Es una región plana cuyo contorno es un triángulo.

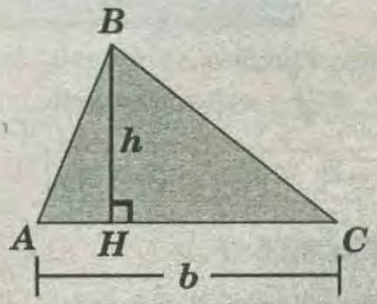
Ahora pasaremos a estudiar la principales expresiones para el cálculo de áreas de regiones triangulares en función de la longitud de ciertos elementos de triángulo.

FÓRMULA BÁSICA :

El área de una región triangular es igual al semiproducto de las longitudes de un lado y la altura a dicho lado.

* En el gráfico, $\overline{BH}$ es la altura relativa a $\overline{AC}$

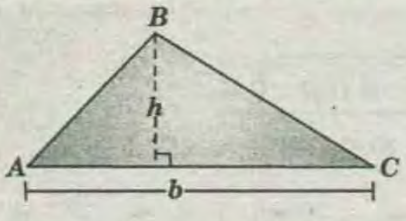
* Si: $AC=b$ y $BH=h$,



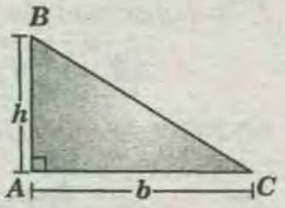
entonces: $\mathbb{S}_{\Delta ABC}=\dfrac{bh}{2}$

ÁREA DE LA REGIÓN TRIANGULAR

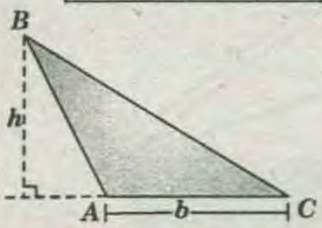
El área de una Región Triangular es igual al semiproducto de la longitud de uno de sus lados por la altura relativa a dicho lado.



$$S_{\triangle ABC} = \frac{b \times h}{2}$$

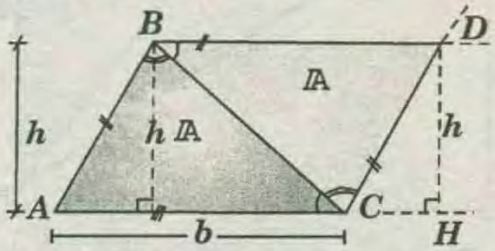


$$S_{\triangle ABC} = \frac{b \times h}{2}$$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{b \times h}{2}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Por el vértice ***B*** trazamos una paralela a $\overline{AC}$ y por ***C*** trazamos una paralela a $\overline{AB}$, determinándose un paralelogramo ***ABDC*** y como los triángulos ***ABC*** y ***BDC*** son congruentes las áreas de las regiones ***ABC*** y ***BDC*** son iguales .

$$S_{ABC} = S_{BCD} = \mathbb{A}$$

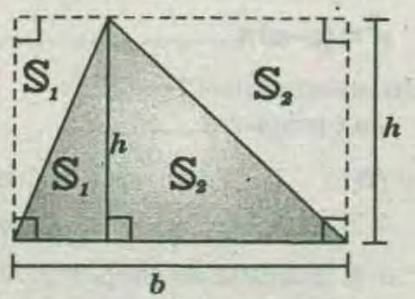
* Del axioma de adición de áreas , el área de la región paralelográmica ***ABCD*** sería : $2\mathbb{A}$.

* Pero también :

$$S_{ABCD} = b \times h = 2\mathbb{A}$$

* Entonces $\mathbb{A} = \frac{b \times h}{2}$ y $\mathbb{A}$ es el área de la región ***ABC*** por lo tanto : $S_{ABC} = \frac{b \times h}{2}$

OTRO MÉTODO :



$$2S_1 + 2S_2 = b \times h \Rightarrow 2(S_1 + S_2) = b.h$$

$$S_2 + S_2 = \frac{b \times h}{2}$$

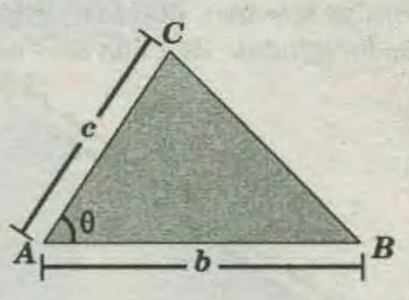
$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{b \times h}{2}}$$

FÓRMULA TRIGONOMÉTRICA

El área de una región triangular es igual al semiproducto de las longitudes de dos lados, multiplicados con el seno del ángulo determinados por dicho lados.

* En el grafico : $AB = b$; $AC = c$ y $m\sphericalangle BAC = \theta$

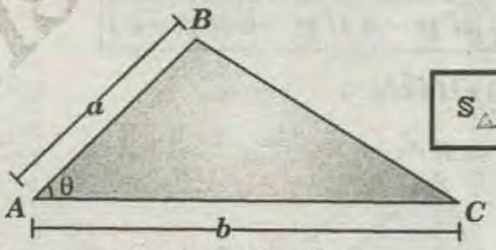
* Entonces:



$$S_{\triangle ABC} = \frac{bc}{2} sen\theta$$

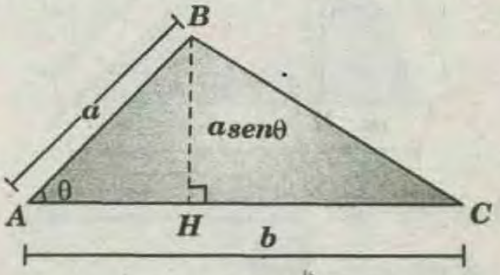
TEOREMA :

El área de una región triangular es igual al semiperímetro de las longitudes de dos de sus lados multiplicados por el seno de la medida del ángulo que estos determinan .



$$S_{\triangle ABC} = \frac{a \times b}{2} sen\theta$$

DEMOSTRACIÓN :

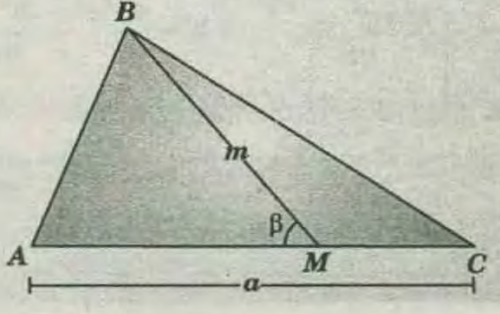


* Se traza la altura ***BH***, en el $\triangle ABH$: $BH = a\,sen\theta$

* Del teorema anterior :

$$S_{\triangle ABC} = \frac{ba\,sen\theta}{2} \Rightarrow \boxed{S_{\triangle ABC} = \frac{a \times b}{2} sen\theta}$$

NOTA :

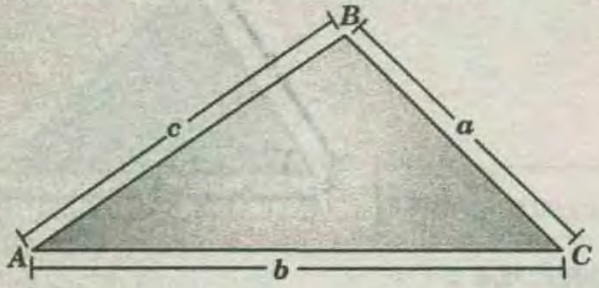


$\overline{BM}$ es una ceviana anterior $(BM=m)$ y β la mediana del ángulo determinando por $\overline{BM}$ y $\overline{AC}$

$$\boxed{S_{\triangle ABC}=\frac{a\,m\,sen\,\beta}{2}}$$

TEOREMA (FÓRMULA DE HERÓN) :

El área de una región triangular es igual a la raíz cuadrada de los productos , de la longitud del semiperímetro , con las sustracciones de este con las longitudes de cada uno de sus lados .



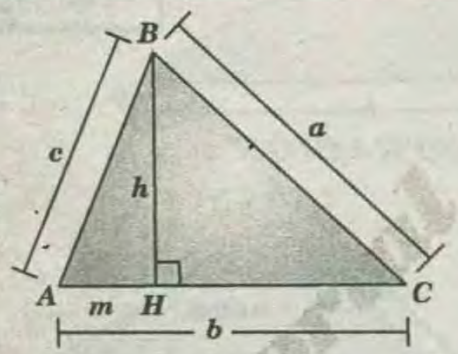
* Sea :

p : longitud del semiperímetro de la región triangular ABC

$$\rightarrow p=\frac{a+b+c}{2}$$

$$\boxed{S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

DEMOSTRACIÓN :



$\triangle ABH : h^2=c^2-m^2$ .....(I)

$\triangle ABC : a^2=b^2+c^2-2mb$

$$m=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\text{.....(II)}$$

* Reemplazando (II) en (I) :

$$h^2=c^2-\left[\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right]^2 \Rightarrow h^2=\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2}$$

$$h^2=\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4b^2} \Rightarrow h^2=\frac{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b^2-c^2]}{4b^2}$$

$$\Rightarrow h^2=\frac{(2p)(2p-2a)(2p-2c)(2p-2b)}{4b^2} \Rightarrow h^2=\frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4b^2}$$

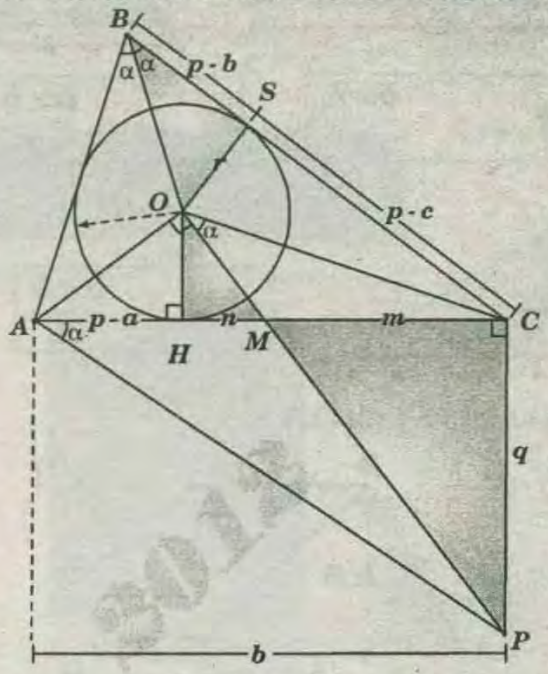
$$\Rightarrow h^2=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2} \Rightarrow h=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow \frac{b\times h}{2}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

* En consecuencia :

$$\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

*OTRO MÉTODO DE DEMOSTRAR :



* Por C trazamos $\overline{CP}\perp\overline{AC}$, tal que $m\sphericalangle AOP=90°$

* En el $\triangle ABC$:

$$m\sphericalangle AOC=90°+\frac{m\sphericalangle ABC}{2}=90°+\alpha$$

$$\rightarrow m\sphericalangle POC=\alpha$$

* Como $AOCP$ es un cuadrilátero inscriptible :

$$m\sphericalangle CAP=m\sphericalangle COP=\alpha$$

$\triangle OBS \sim \triangle RAC$ (A.A.A)

$$\frac{r}{q}=\frac{p-b}{b}\text{.....(I)}$$

$\triangle HOM \sim \triangle CPM$ (A.A.A)

$$\frac{r}{q}=\frac{n}{m}\text{.....(II)}$$

* En el $\triangle AOM$: relaciones métricas

$$r^2=(p-a)n\text{.....(III)}$$

* En la circunferencia $CH=CS$:

$$m+n=p-c\text{.....(IV)}$$

* De (I) y (II) :

$$\frac{r}{q}=\frac{p-b}{b}=\frac{n}{m}$$

* Al aplicar el teorema de proporciones , se tiene :

$$\frac{p-b}{p}=\frac{n}{m+n}\text{.....(V)}$$

* Reemplazando (IV) en (V) :

$$\rightarrow \frac{(p-b)}{p}=\frac{n}{(p-c)}$$

* Luego :

$$\frac{p}{p}\times\frac{(p-b)}{p}=\frac{n}{(p-c)}\times\frac{(p-a)}{(p-a)}$$

$$\Rightarrow p\times(p-a)(p-b)(p-c)=p^2\times(n(p-a))$$

* De la expresión *(III)* :

$$p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2r^2$$

Como $\rightarrow S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

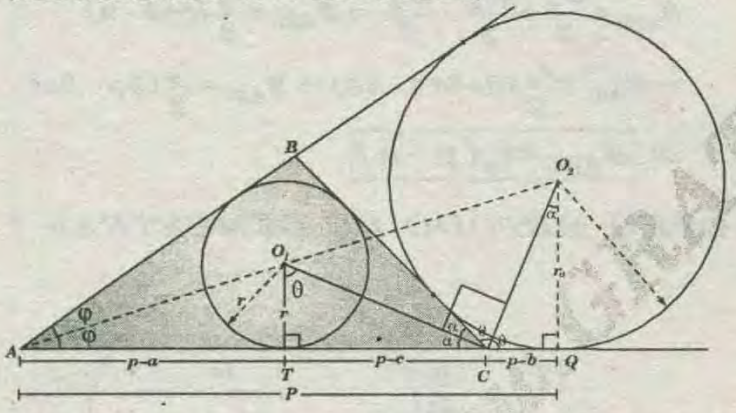
NOTA :

Triángulo heroniano: se dice que un triángulo es heroniano si las longitudes de sus lados y su área son números enteros.

Así , tenemos los siguientes triángulos , cuyas longitudes de sus lados son *(3 ; 4* y *5)*, *(13;14* y *15)*, *(4;13* y *15)*,.....pues sus áreas son: *6; 84; 24;...*

OTRA DEMOSTRACIÓN :

(TEOREMA DE HERÓN)



De la figura sabemos que $AQ=p$, siendo p la longitud del semiperímetro de la región *ABC* Al trazar la circunferencia inscrita del triángulo *ABC* de radio *r*.

Se sabe $S_{\triangle ABC}=p\times r$ .....*(I)*

* También $AT=p-a$, $TC=p-c$ y $CQ=p-b$.

* Se observa $\triangle ATO_1 \sim \triangle AQO_2$ *(A.A.A)*

$$\frac{r}{p-b}=\frac{r_a}{p}\Rightarrow p\times r=(p-a)\times r_a \text{.....(II)}$$

* Se presenta $\triangle O_1TC \sim \triangle O_2QC$ *(A.A.A)*

$$\frac{r}{p-b}=\frac{p-c}{r_a}\rightarrow r\times r_a=(p-b)(p-c)$$

* Despejando r_a:

$$r_a=\frac{(p-b)(p-c)}{r} \text{.....(III)}$$

* Reemplazando *(III)* en la ecuación *(II)* :

$$p\times r=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r}$$

* Despejando r y multiplicado por p :

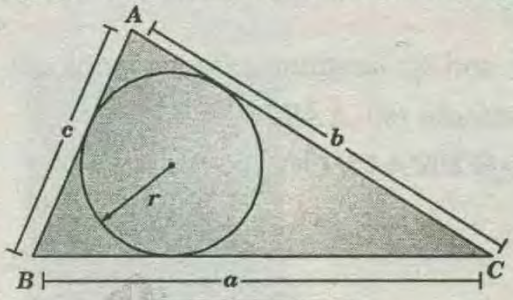
$$p^2r^2=(p-a)(p-b)(p-c)p \text{.....(I)}$$

$$\Rightarrow S^2_{\triangle ABC}=p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

ÁREA DE UN TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DEL RADIO

El área de una región triangular es igual al producto de la longitud del semiperímetro de la región y su inradio.



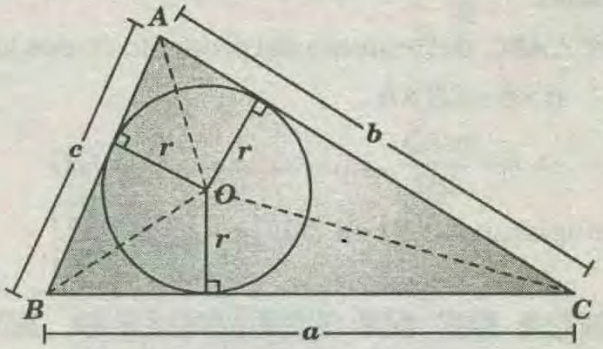
$$\boxed{S_{\triangle ABC}=p\times r}$$

Donde

$p=\frac{a+b+c}{2}$: longitud del semiperímetro de la región triangular *ABC*.

r : inradio del $\triangle abc$

DEMOSTRACION :



* Sea : $S_{\triangle ABC}=S$

se traza $\overline{AO}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ para obtener regiones triangulares parciales.

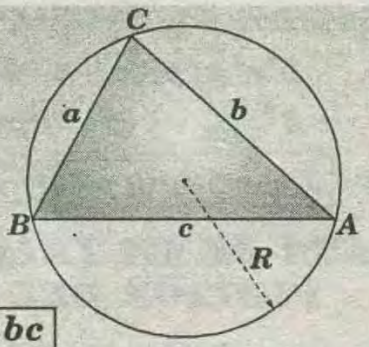
* Luego : $S=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}$

$$S=\frac{c\times r}{2}+\frac{a\times r}{2}+\frac{b\times r}{2}\rightarrow A=r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{\triangle ABC}=p\times r}$$

ÁREA DE UN TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DEL CIRCUNRADIO

El área de una región triangular es igual al producto de las longitudes de los tres lados entre cuatro veces su circunradio.



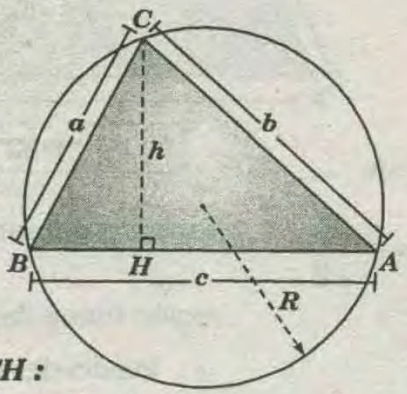
$$\boxed{S_{\triangle ABC}=\frac{abc}{4R}}$$

Donde:

a ; b; c : son las longitudes de los lados del $\triangle ABC$.

R : circunradio del $\triangle ABC$

DEMOSTRACIÓN :



* Se traza la altura CH :

$$\rightarrow S_{\triangle ABC}=\frac{c\times h}{2} \quad .....(I)$$

* En el $\triangle ABC$, del teorema del producto de dos lados

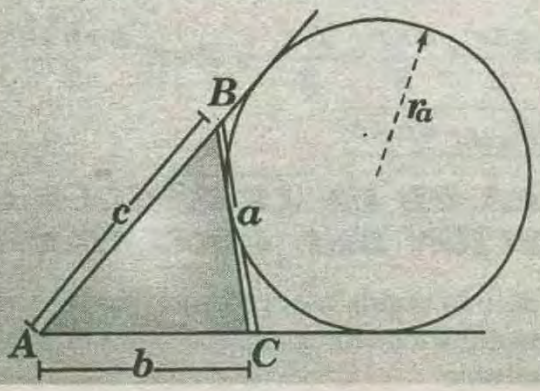
$$a\times b=2R\times h$$

$$\rightarrow h=\frac{a\times b}{2R} \quad .....(II)$$

* Reemplazando (II) en (I) : $\boxed{S_{\triangle ABC}=\frac{abc}{4R}}$

ÁREA DE UN TRIÁNGULO EN UNA FUNCIÓN DEL EXRADIO

El área de una región triangular es igual al producto de la sustracción de la longitud del semi perímetro de dicha región con la longitud de un lado , y el exradio relativo a dicho lado.



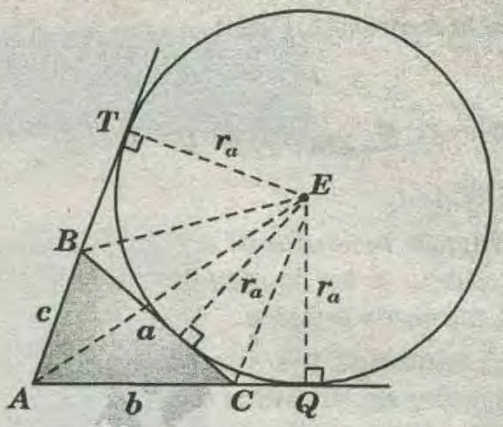
$$\boxed{S_{\triangle ABC}=(p-a)r_a}$$

Donde :

p : semiperímetro de la región triangular ABC.

r_a : exradio relativa a $\overline{BC}$

DEMOSTRACIÓN :



$$S_{ABC}=S_{ABEC}-S_{BEC}$$

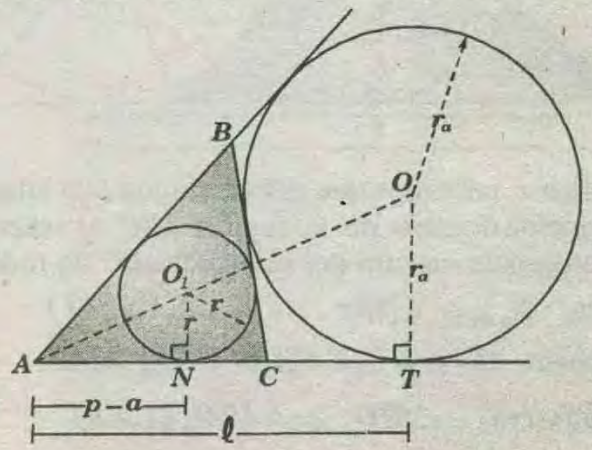
$$\Rightarrow S_{ABC}=S_{ABE}+S_{AEC}-S_{BEC}$$

$$S_{ABC}=\frac{cr_a}{2}+\frac{br_a}{2}-\frac{ar_a}{2}\Rightarrow S_{ABC}=\frac{r_a}{2}(b+c-a)$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{r_a}{2}(a+b+c-2a)\Rightarrow S_{ABC}=\frac{r_a}{2}(2p-2a)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{ABC}=r_a(p-a)}$$

OTRO MÉTODO DE DEMOSTRAR :



* Se traza la circunferencia inscrita al triángulo ABC

* Se sabe que :

$AT=\ell=p$ (longitud del semiperímetro de la región ABC)

* Se observa :

$$\triangle AO_1N\sim\triangle AOT \ (A.A.A)$$

* Entonces :

$$\frac{r}{r_a}=\frac{p-a}{p}\Rightarrow pr=(p-a)r_a \quad .....(I)$$

* Por propiedad :

$$S_{\triangle ABC}=pr \quad .....(II)$$

* De (I) y (II) :

$\rightarrow \mathbb{S}_{\triangle ABC}=(p-a)r_a$

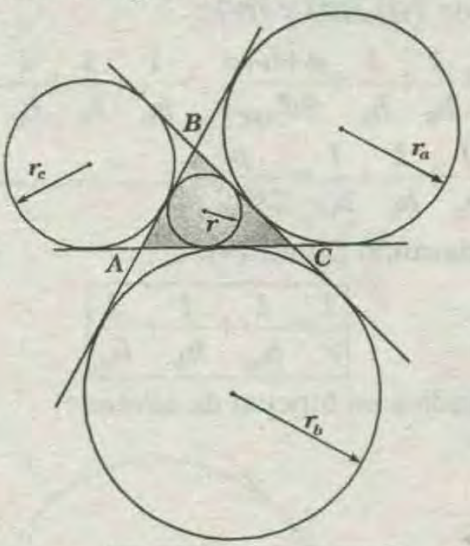
* Análogamente se cumple que :

$$\boxed{\mathbb{S}_{\triangle ABC}=(p-b)r_b}$$

$$\boxed{\mathbb{S}_{\triangle ABC}=(p-c)r_c}$$

ÁREA DE UN TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DE LOS EXRADIOS Y DEL INRADO

El área de una región triángular es igual a la raíz cuadrada del producto de los exradios relativos a tres lados del triángulo con su inradio .



$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{ABC}=\sqrt{rr_ar_br_c}}$$

DEMOSTRACION :

* Según las expresiones anteriores; para calcular el área de un triángulo tenemos :

$$\mathbb{S}_{ABC}= p\,r \quad ; \quad \mathbb{S}_{ABC} = r_a(p-a)$$
$$\mathbb{S}_{ABC} = r_b(p-b) \quad ; \quad \mathbb{S}_{ABC} = r_c(p-c)$$

* Multiplicando miembro a miembro estas expresiones:

$$\mathbb{S}^4_{ABC}=rr_ar_br_c\underbrace{p(p-a)(p-b)(p-c)}_{\mathbb{S}^2_{ABC}}$$

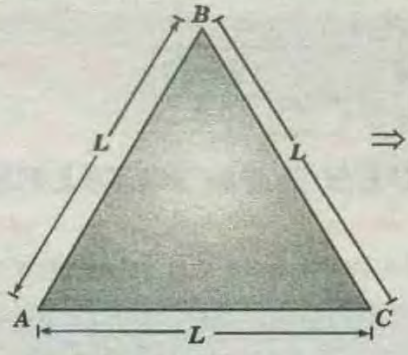
$$\Rightarrow \mathbb{S}^4_{ABC}=rr_ar_br_c\mathbb{S}^2_{ABC}$$

$$\Rightarrow \mathbb{S}^2_{ABC}=rr_ar_br_c$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{ABC}=\sqrt{rr_ar_br_c}}$$

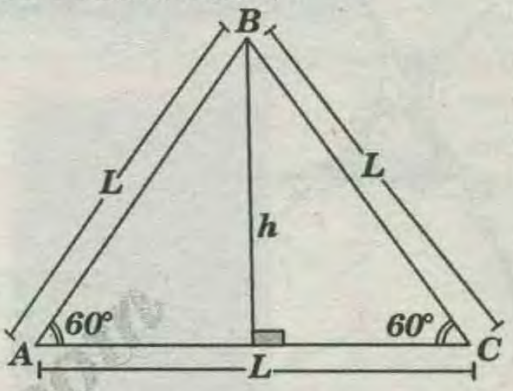
ÁREA DE UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO EN FUNCIÓN DEL LADO

El área de un triángulo equilátero es igual a la cuarta parte del cuadrado del lado por la raíz cuadrada de tres.



$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{ABC}=\frac{L^2\sqrt{3}}{4}}$$

DEMOSTRACIÓN :



$\mathbb{S}_{ABC}=L\,h/2$

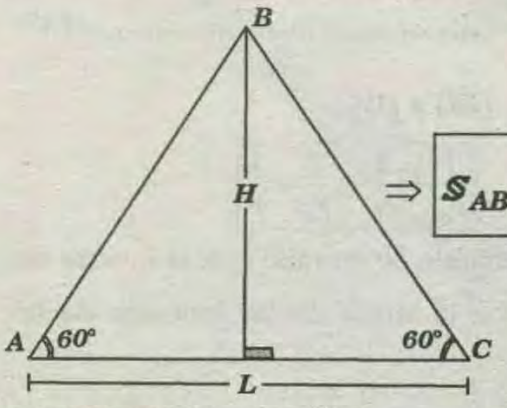
* pero $h=L\sqrt{3}/2$

* reemplazando :

$$\mathbb{S}_{ABC}=\frac{L}{2}\times\frac{L\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\boxed{\mathbb{S}_{ABC}=\frac{L^2\sqrt{3}}{4}}$$

ÁREA DE UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO EN FUNCIÓN DE LA ALTURA

El área de un triángulo equilátero es igual a la tercera parte del cuadrado de la altura por la raíz de 3



$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{ABC}=\frac{H^2\sqrt{3}}{3}}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Sabemos que :

$$S_{ABC}= L\,H/2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

* pero : $H=L\sqrt{3}/2$

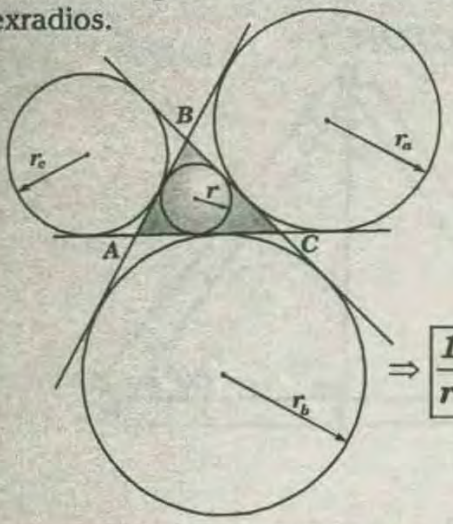
* despejando : $L=2H/\sqrt{3}$

* reemplazando en *(I)* :

$$S_{ABC}=\frac{2H}{\sqrt{3}}\times\frac{H}{2}\Rightarrow\boxed{S_{ABC}=\frac{H^2\sqrt{3}}{3}}$$

PROPIEDADES ADICIONALES

A En todo triángulo se cumple que la inversa del inradio es igual a la suma de las inversas de los exradios.



$$\Rightarrow\boxed{\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Sabemos que :

$$S_{ABC}=pr\Rightarrow\frac{1}{r}=\frac{p}{S_{ABC}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

* También:

$$S_{ABC}=r_a(p-a)\Rightarrow\frac{1}{r_a}=\frac{(p-a)}{S_{ABC}}\quad\ldots\ldots\ldots(II)$$

* Análogamente :

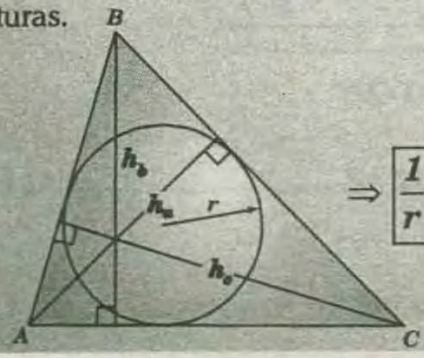
$$\frac{1}{r_b}=\frac{(p-b)}{S_{ABC}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(III)$$

$$\frac{1}{r_c}=\frac{(p-c)}{S_{ABC}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(IV)$$

* Sumando *(II)*, *(III)* y *(IV)*:

$$\boxed{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}}$$

B En todo triángulo se cumple que la inversa del inradio es igual a la suma de las inversas de las alturas.



$$\Rightarrow\boxed{\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Sabemos que :

$$S_{ABC}=pr\Rightarrow\frac{1}{r}=\frac{p}{S_{ABC}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

* También:

$$S_{ABC}=\frac{ah_a}{2}\Rightarrow\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S_{ABC}}\quad\ldots\ldots\ldots(II)$$

* Análogamente :

$$\frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S_{ABC}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(III)$$

$$\frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S_{ABC}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(IV)$$

* Sumando *(II)*,*(III)* y *(IV)* :

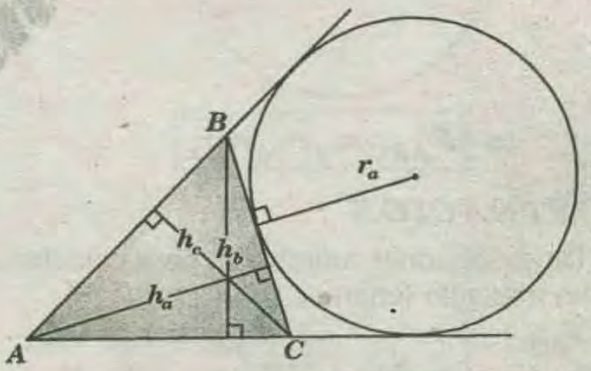
$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a+b+c}{2S_{ABC}}\Rightarrow\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{2p}{2S_{ABC}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{p}{2S_{ABC}}\quad\ldots\ldots\ldots(V)$$

* Reemplazando *(I)* en *(V)*:

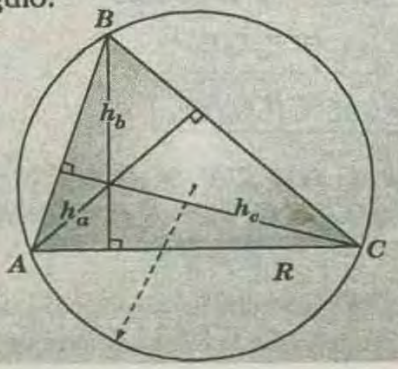
$$\boxed{\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}$$

C Exradios en función de alturas :



$$\Rightarrow\boxed{\frac{1}{r_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}}$$

D El área de una región triangular es igual a la raíz cuadrada del semiproducto del circunradio con las longitudes de las alturas relativas a cada lado de dicho triángulo.



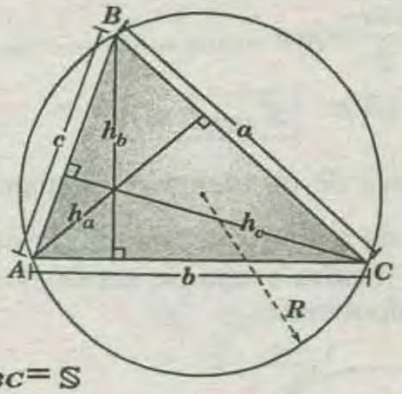
$$\mathbb{S}_{\triangle ABC}=\sqrt{\frac{R}{2}h_a h_b h_c}$$

Donde :

h_a; h_b y h_c: son las longitudes de las alturas relativas a cada lado del $\triangle ABC$.

R : circunradio del $\triangle ABC$.

DEMOSTRACIÓN :



* Sea $\mathbb{S}_{\triangle ABC}=\mathbb{S}$

* Se sabe :

$$\mathbb{S}=\frac{ah_a}{2} \quad \text{.....(I)}$$

$$\mathbb{S}=\frac{bh_b}{2} \quad \text{.....(II)}$$

$$\mathbb{S}=\frac{ch_c}{2} \quad \text{.....(III)}$$

* Las relaciones *(I)*, *(II)* y *(III)* se multiplican, para obtener

$$\mathbb{S}^3=\frac{abc}{4}\times\frac{h_a h_b h_c}{2}\Rightarrow \mathbb{S}^3=\frac{abc}{4R}\times\frac{Rh_a h_b h_c}{2}$$

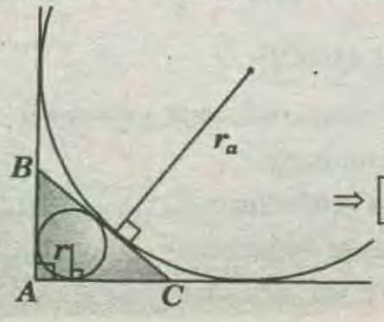
* Se sabe :

$$\mathbb{S}=\frac{abc}{4R}\rightarrow \mathbb{S}^3=\mathbb{S}\frac{Rh_a h_b h_c}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{S}^2=\frac{Rh_a h_b h_c}{2}\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}=\sqrt{\frac{1}{2}Rh_a h_b h_c}}$$

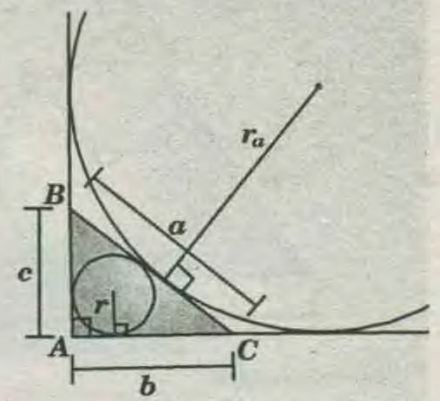
FÓRMULAS DE ÁREAS PARA TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

F El área de un triángulo rectángulo es igual al ex radio relativo a la hipotenusa multiplicado por el inradio.



$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{ABC}=r_a r}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Sabemos que :

$$\mathbb{S}_{ABC}=r_a(p-a) \quad \text{.....(I)}$$

* Por el teorema de Poncelet :

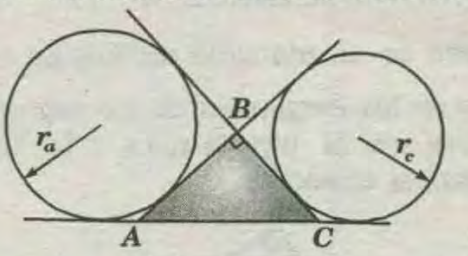
$$b+c=a+2r\Rightarrow a+b+c=2a+2r$$

$$\Rightarrow 2p=2a+2r\Rightarrow r=p-a \quad \text{.....(II)}$$

* Reemplazando *(II)* en *(I)*:

$$\boxed{\mathbb{S}_{ABC}=r_a r}$$

G El área de todo triángulo rectángulo es igual al producto de los exradios relativos a los catetos.



$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{ABC}=r_a r_c}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Sabemos que :

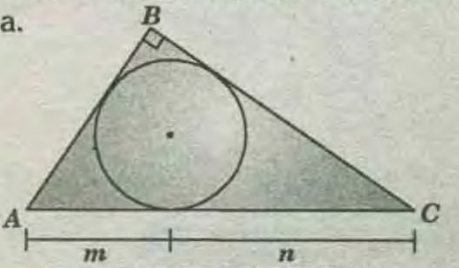
$$\mathbb{S}^2_{ABC}=r r_a r_b r_c \quad \text{.....(I)}$$

* También: $\mathbb{S}_{ABC}=r_b r$ *.....(II)*

* Reemplazando *(II)* en *(I)*;

$$\mathbb{S}^2_{ABC}=r_a r_c \mathbb{S}_{ABC}\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{ABC}=r_a r_c}$$

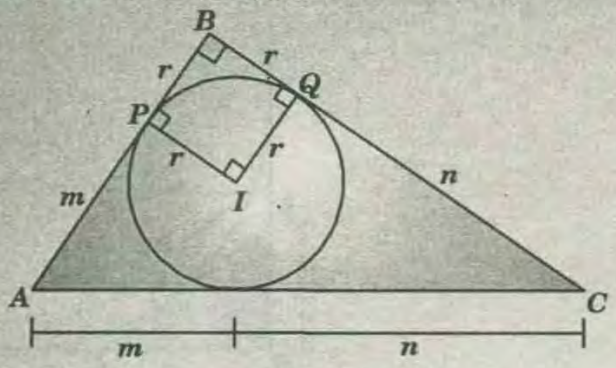
H El área de un triángulo rectángulo es igual al producto de las longitudes de los segmentos que determina la circunferencia inscrita sobre la hipotenusa.



$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{ABC}=mn}$$

LIBRO GRATIS2.com

DEMOSTRACIÓN :



* Sabemos que :

$$S_{ABC} = pr$$
$$\Rightarrow S_{ABC} = (m+n+r)r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Por el teorema de Pitágoras :

$$(m+r)^2 + (n+r)^2 = (m+n)^2$$

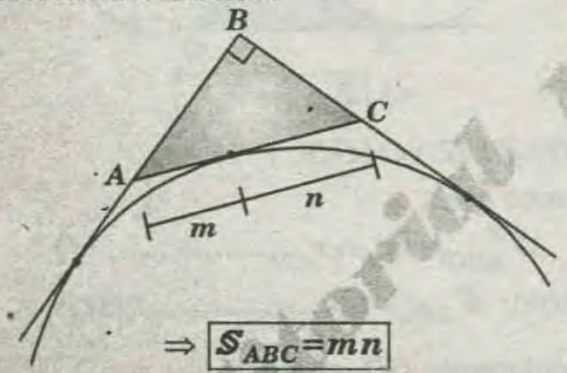
* Desarrollando:

$$m^2 + 2mr + r^2 + n^2 + 2nr + r^2 = m^2 + n^2 + 2mn$$
$$\Rightarrow 2mr + 2nr + 2r^2 = 2mn$$
$$\Rightarrow r(m+n+r) = mn \quad \ldots\ldots (II)$$

* De *(I)* y *(II)* :

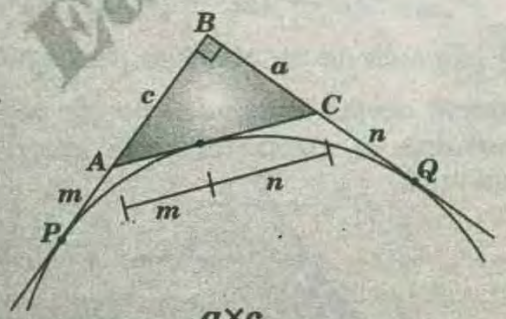
$$\boxed{S_{ABC} = mn}$$

I El área de un triángulo rectángulo es igual al producto de las longitudes de los segmentos que determina en la hipotenusa , la respectiva circunferencia exinscrita.



$$\Rightarrow \boxed{S_{ABC} = mn}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Fórmula básica : $S_{ABC} = \dfrac{a \times c}{2} \quad \ldots\ldots (I)$

* Tangentes : $\underbrace{BP} = \underbrace{BQ}$

$$(m+c) = (n+a) \Rightarrow m - n = a - c$$

* Elevando al cuadrado cada miembro :

$$m^2 - 2mn + n^2 = a^2 - 2ac + c^2 \quad \ldots\ldots (II)$$

* Por el teorema de Pitágoras :

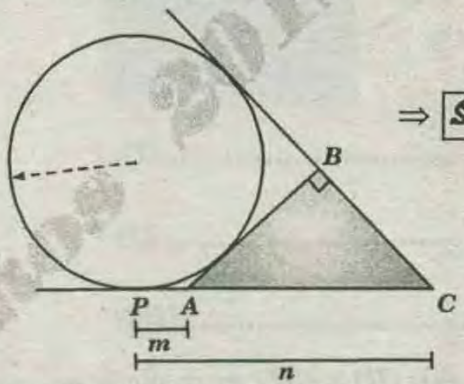
$$a^2 + c^2 = (m+n)^2$$
$$\Rightarrow a^2 + c^2 = m^2 + 2mn + n^2 \quad \ldots\ldots (III)$$

* Reemplazando *(III)* en *(II)*:

$$m^2 - 2mn + n^2 = m^2 + 2mn + n^2 - 2ac$$
$$\Rightarrow 2ac = 4mn$$
$$\Rightarrow \frac{a \times c}{2} = mn \quad \ldots\ldots (IV)$$

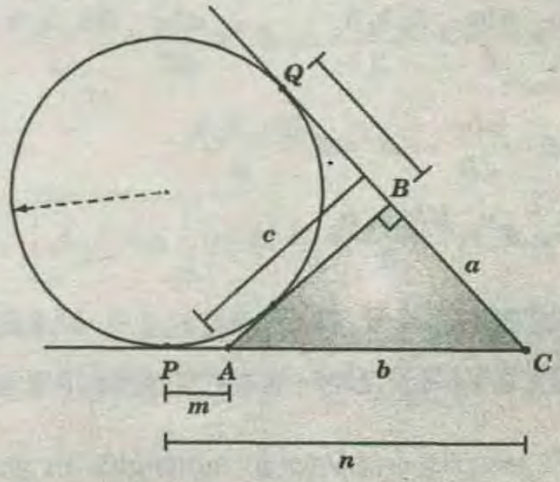
* De *(I)* y *(IV)*: $\boxed{S_{ABC} = mn}$

J El área de un triángulo rectángulo es igual al producto de los segmentos que la circunferencia exinscrita relativa a uno de los catetos , determina sobre la hipotenusa.



$$\Rightarrow \boxed{S_{ABC} = mn}$$

DEMOSTRACIONES :



* Fórmula básica : $S_{ABC} = \dfrac{a \times c}{2} \quad \ldots\ldots (I)$

* Tangentes : $\underbrace{CQ} = \underbrace{CP}$

$$c - m + a = n \Rightarrow a + c = m + n$$

* Elevando al cuadrado :

$$a^2 + c^2 + 2ac = m^2 + n^2 + 2mn \quad \ldots\ldots (II)$$

* Por el teorema de Pitágoras :

$$a^2 + c^2 = b^2 = (n-m)^2$$

* Desarrollando:

$$a^2 + c^2 = m^2 + n^2 - 2mn \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

* Reemplazando *(III)* en *(II)*:

$$m^2 + n^2 - 2mn + 2ac = m^2 + n^2 + 2mn$$

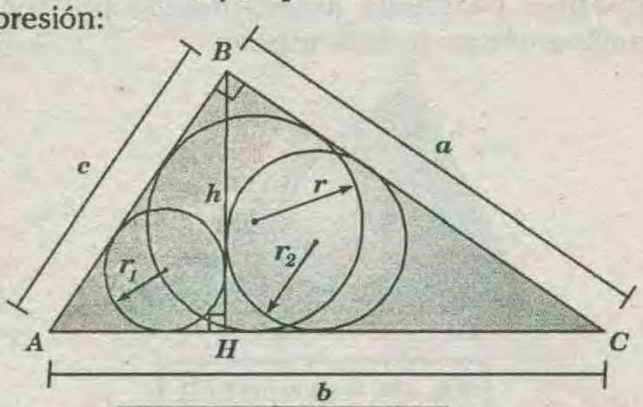
$$\Rightarrow 2ac = 4mn$$

$$\Rightarrow \frac{ac}{2} = mn \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (VI)$$

* De *(I)* y *(IV)*:

$$\boxed{S_{ABC} = m\,n}$$

K El área del triángulo rectángulo , en función de los inradios r, r_1 y r_2 está dada por la siguiente expresión:



$$\Rightarrow \boxed{S_{ABC} = r^2\left[\frac{r_1 + r_2 + r}{r_1 + r_2 - r}\right]}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Fórmula básica:

$$S_{ABC} = \frac{bh}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Por propiedad: $h = r + r_1 + r_2$

* Para calcular «*b*» en términos de otros elementos, tenemos :

$$\triangle ABC \sim \triangle ABH \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{r_1}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

$$\triangle ABC \sim \triangle BHC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{r_2}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

* Sumando *(II)* y *(III)*:

$$\frac{c+a}{b} = \frac{r_1 + r_2}{r} \Rightarrow a + c = \frac{b}{r}(r_1 + r_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (IV)$$

* Por el teorema de Poncelet : $a + c = b + 2r \quad \ldots\ldots (V)$

* Reemplazando *(V)* en *(IV)*:

$$b + 2r = \frac{b}{r}(r_1 + r_2) \Rightarrow br + 2r^2 = b(r_1 + r_2)$$

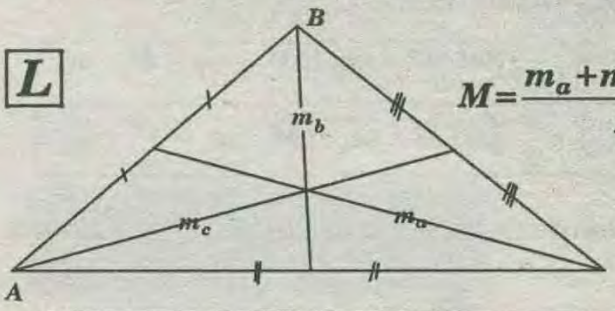
$$\rightarrow 2r^2 = b(r_1 + r_2 - r) \Rightarrow b = \frac{2r^2}{r_1 + r_2 - r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (VI)$$

* Reemplazando *(VI)* en *(I)*:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left[\frac{2r^2}{r_1 + r_2 - r}\right](r + r_1 + r_2) \Rightarrow \boxed{S_{ABC} = r^2\left[\frac{r_1 + r_2 + r}{r_1 + r_2 - r}\right]}$$

ÁREA DE UN TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DE SUS MEDIANAS

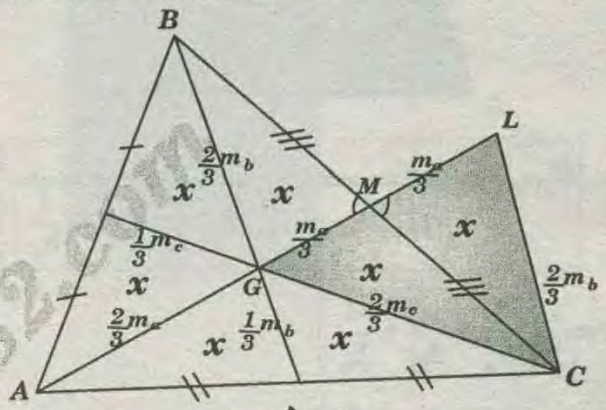
L



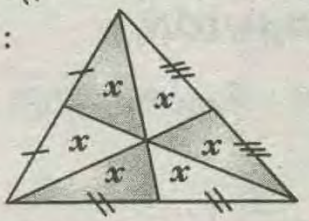
$$M = \frac{m_a + m_b + m_a}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{ABC} = \frac{4}{3}\sqrt{M(M - m_a)(M - m_b)(M - m_c)}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* por propiedad :



$$\triangle GMB \cong \triangle MLC \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (L.A.L)$$

* de la figura $6x = S_{ABC} \rightarrow 2x = S_{GLC}$

* luego :

$$6x = S_{ABC} = 3\,S_{GLC} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* cálculo de S_{GLC}: por fórmula de herón

$$S_{GLC} = \sqrt{p_{GLC}\left(p_{GLC} - \frac{2m_a}{3}\right)\left(p_{GLC} - \frac{2m_b}{3}\right)\left(p_{GLC} - \frac{2m_c}{3}\right)}$$

$$pero: 2p_{GLC} = \frac{2}{3}(m_a + m_b + m_c) \Rightarrow p_{GLC} = \frac{(m_a + m_b + m_c)}{3}$$

$$S_{GLC} = \sqrt{\frac{(m_a + m_b + m_c)}{3}\frac{(m_b + m_c - m_a)}{3}\frac{(m_a + m_c - m_b)}{3}\frac{(m_b + m_a - m_c)}{3}}$$

* haciendo : $M = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$

* reemplazando :

$$S_{GLC} = \sqrt{\frac{2M}{3}\frac{(2M - 2m_a)}{3}\frac{(2M - 2m_b)}{3}\frac{(2M - 2m_c)}{3}}$$

$$\Rightarrow S_{GLC} = \sqrt{\frac{2M}{3}\frac{2}{3}(M - 2m_a)\frac{2}{3}(M - 2m_b)\frac{2}{3}(M - 2m_c)}$$

WWW.GRATIS2.COM

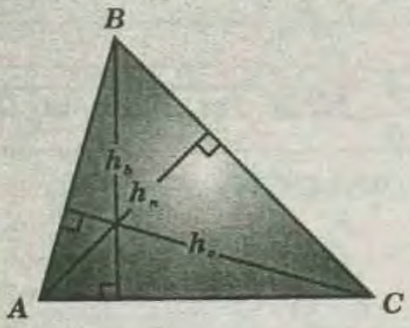
$$\Rightarrow \mathbb{S}_{GLC}=\frac{4}{9}\sqrt{(M-m_a)(M-m_b)(M-m_c)M}$$

* remplazando en *(I)* :

$$\mathbb{S}_{ABC}=3\left(\frac{4}{9}\right)\sqrt{M(M-m_a)(M-m_b)(M-m_c)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{ABC}=\frac{4}{9}\sqrt{M(M-m_a)(M-m_b)(M-m_c)}}$$

M Área de un triángulo en función de sus alturas.



$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{ABC}=\frac{1}{4\sqrt{H\left(H-\frac{1}{h_a}\right)\left(H-\frac{1}{h_b}\right)\left(H-\frac{1}{h_c}\right)}}}$$

Si $H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$

DEMOSTRACIÓN :

* Sabemos que : $\mathbb{S}_{ABC}=\sqrt{rr_ar_br_c}$ .....*(I)*

* También:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\\ \frac{1}{r_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}\\ \frac{1}{r_b}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_b}\\ \frac{1}{r_c}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\end{array}\right\} \text{.....(II)}$$

* Reemplazando *(II)* en *(I)* :

$$\mathbb{S}_{ABC}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}}}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}}}$$

* Hacemos : $H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$

* Entonces :

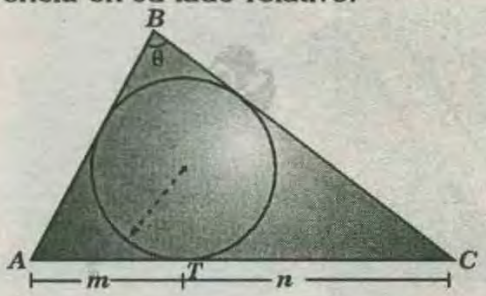
$$\mathbb{S}_{ABC}=\frac{1}{\sqrt{2H\left(2H-\frac{2}{h_a}\right)\left(2H-\frac{2}{h_b}\right)\left(2H-\frac{2}{h_c}\right)}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{S}_{ABC}=\frac{1}{\sqrt{16H\left(H-\frac{1}{h_a}\right)\left(H-\frac{1}{h_b}\right)\left(H-\frac{1}{h_c}\right)}}$$

* Luego :

$$\boxed{\mathbb{S}_{ABC}=\frac{1}{4\sqrt{H\left(H-\frac{1}{h_a}\right)\left(H-\frac{1}{h_b}\right)\left(H-\frac{1}{h_c}\right)}}}$$

N El área de una región triangular circunscrita a una circunferencia es igual al producto de la cotangente de la mitad de la medida de un ángulo interior del triángulo y las longitudes de los segmentos parciales determinados por dicha circunferencia en su lado relativo.

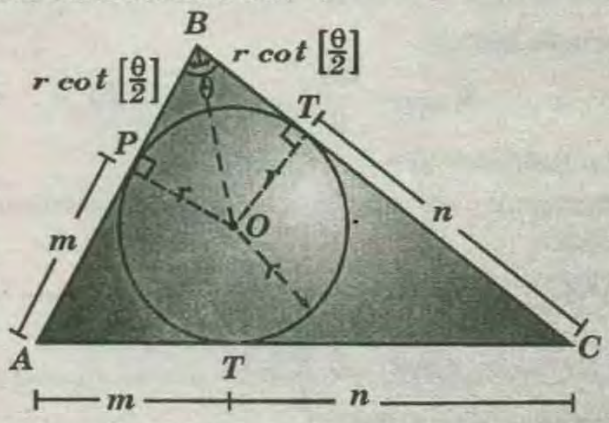


$$\boxed{\mathbb{S}_{\triangle ABC}=mn\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Donde:

$\theta : m\sphericalangle ABC$

DEMOSTRACIÓN :



* Sabemos:

$\mathbb{S}_{\triangle ABC}=pr$ .....*(I)*

$\mathbb{S}_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-BC)(p-AC)(p-AB)}$.....*(II)*

* Según la figura :

$$p=m+n+r\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

* Del teorema de la circunferencia inscrita :

$$r\times\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)=p-AC$$

$$m=p-BC \wedge n=p-AB$$

* Reemplazando en *(II)* y ordenando tenemos :

Editorial Rubiños

$$\mathbb{S}_{\triangle ABC}=\sqrt{p\times\left(r\cot\frac{\theta}{2}\right)(m)(n)}$$

* Elevando al cuadrado :

$$\mathbb{S}^2_{\triangle ABC}=prmn\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(III)$$

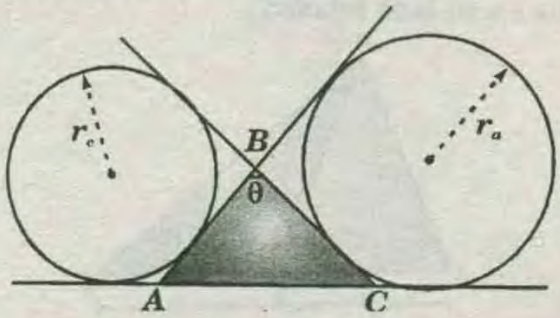
* Reemplazando *(I)* en *(II)* :

$$\mathbb{S}^2_{\triangle ABC}=\mathbb{S}_{\triangle ABC}\,mn\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

* Simplificando :

$$\mathbb{S}_{\triangle ABC}=mn\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Ñ El área de una región triangular es igual al producto de dos de sus exradios y la tangente de la mitad de la medida del ángulo determinado , por los lados relativos a dichos exradios.

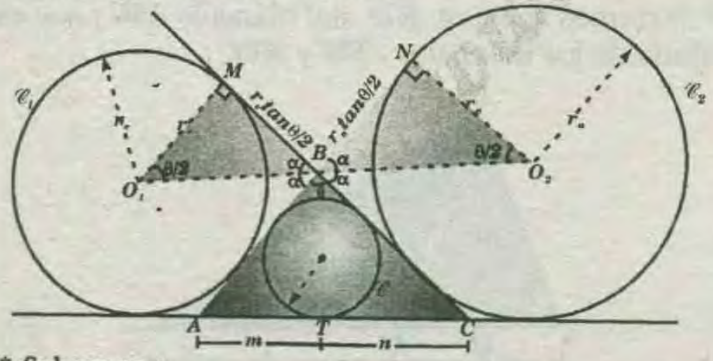


$$\mathbb{S}_{\triangle ABC}=r_a r_c\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Donde :

θ : medida del ángulo interior de *B*

DEMOSTRACIÓN .:



* Sabemos :

$$\mathbb{S}_{\triangle ABC}=mn\cot(\theta/2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

* Del teorema de dos circunferencias exteriores :

* En $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}$: $MB=TC=n$

* En $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}$: $NB=TA=m$

* Luego , en el $\triangle O_1MB$ y $\triangle O_2B$, respectivamente:

$$n=r_c\tan(\theta/2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

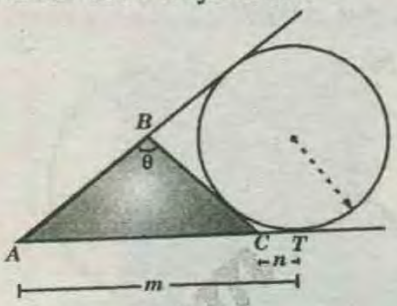
$$m=r_a\tan(\theta/2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(III)$$

* Reemplazando *(II)* y *(III)* en *(I)* :

$$\mathbb{S}_{\triangle ABC}=(r_a\tan\theta/2)(r_c\tan\theta/2)(\cot\theta/2)$$

$$\Rightarrow \mathbb{S}_{\triangle ABC}=r_a r_c\tan(\theta/2)$$

O El área de una región triangular exinscrito a una circunferencia es igual al producto de las longitudes de los segmentos parciales determinados por el punto de tangencia de dicha circunferencia , en uno de los lados adyacentes a él , y la tangente de la mitad de la medida del ángulo que se opone a dicho lado adyacente.



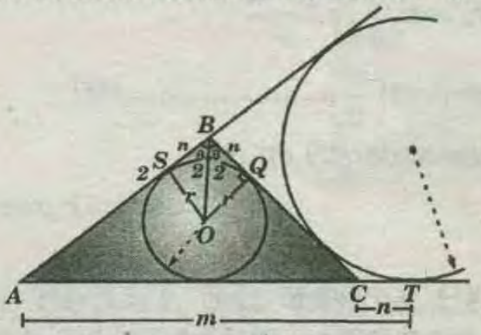
$$\mathbb{S}_{\triangle ABC}=mn\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Donde :

θ : medida de un ángulo interior del $\triangle ABC$.

DEMOSTRACIÓN :

* trazamos la circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$:



* Sabemos que :

$m=p$: longitud del semiperímetro de la región triangular *ABC*

* También : $\mathbb{S}_{\triangle ABC}=mr$ .....*(I)*

* Del teorema de circunferencias exteriores :

$$BQ=CT=n$$

* Se observa en el $\triangle BSO$:

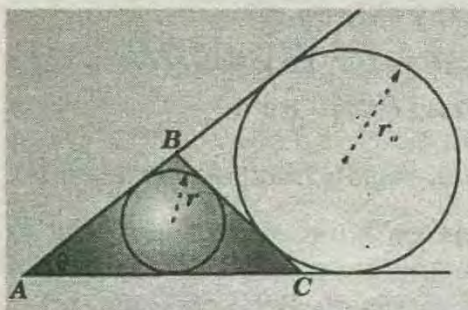
$$r=n\tan(\theta/2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

* Reemplazando *(II)* en *(I)*:

$$\mathbb{S}_{\triangle ABC}=mn\tan(\theta/2)$$

P El área de una región triangular es igual al producto del inradio , con uno de sus exradios y la cotangente de la medida del ángulo , que se opone al lado relativo a la circunferencia exinscrita.

GRATIS.com



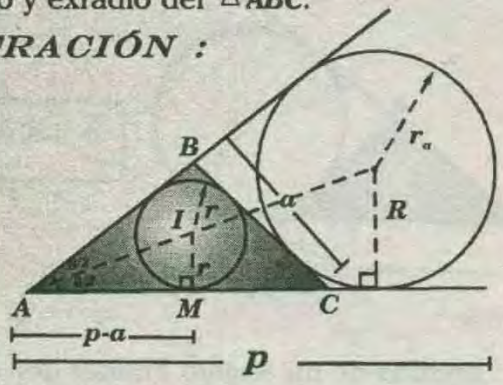
$$\boxed{S_{\triangle ABC} = r_a r \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Donde

θ : medida del ángulo interior en A.

r y r_a : inradio y exradio del $\triangle ABC$.

DEMOSTRACIÓN :



* Sabemos :

$$S_{\triangle ABC} = (p-a)r_a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$\triangle AMI: \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{p-a}{r}$$

$$\rightarrow p - a = r\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* Reemplazando *(II)* en *(I)* :

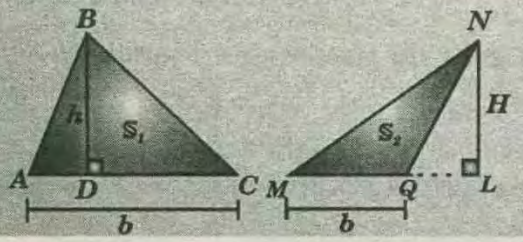
$$S_{\triangle ABC} = r_a r \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

RELACIÓN DE ÁREAS EN REGIONES TRIANGULARES

Es la comparación de las áreas de dos regiones triangulares. mediante el cociente , esto comúnmente se determinan en regiones triangulares cuyas dimensiones o medidas de determinados elementos guardan cierta relación .

TEOREMA 1 :

Si dos regiones triangulares tienen un lado igual longitud , sus áreas serán proporcionales a las longitudes de los lados a los cuales son relativas dichas alturas.



Sean S_1 y S_2 las áreas de las regiones triangulares *ABC* y *MNQ* respectivamente , se cumple :

$$\boxed{\frac{S_1}{S_2} = \frac{h}{H}}$$

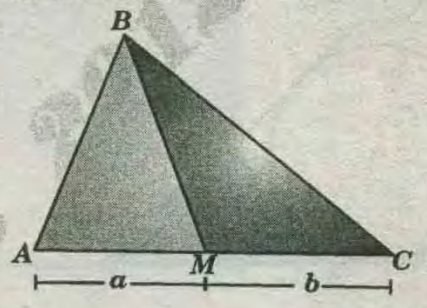
DEMOSTRACION :

* Sabemos que : $\boxed{S_1 = \frac{bh}{2}} \wedge \boxed{S_2 = \frac{bH}{2}}$

* Dividiendo S_1 y S_2 : $\frac{S_1}{S_2} = \frac{h}{H}$

COROLARIO :

La razón de áreas de las regiones parciales determinadas por una ceviana interior , en una región triangular , es igual a la razón de las longitudes de los segmentos parciales determinandos por dicha ceviana en su lado relativo .

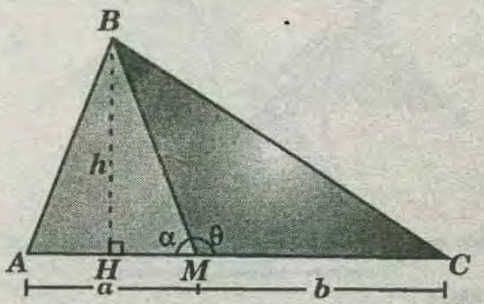


$\overline{BM}$: ceviana interior

$$\boxed{\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle MBC}} = \frac{a}{b}}$$

DEMOSTRACION :

* Trazamos la altura $\overline{BH}$ del triángulo *ABC* , que es altura de los triángulos *ABM* y *MBC* :



$$S_{\triangle ABM} = \frac{a \times h}{2}$$

$$S_{\triangle MBC} = \frac{b \times h}{2} \rightarrow \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle MBC}} = \frac{a}{b}$$

* Otra forma de demostrar :

$$S_{\triangle ABM} = \frac{(BM)a}{2} \operatorname{sen}\alpha$$

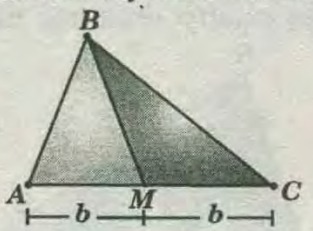
$$S_{\triangle ABM} = \frac{(BM)b}{2} \operatorname{sen}\theta$$

* Como $\alpha + \theta = 180° \rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\theta$

$$\rightarrow \frac{\mathbb{S}_{\triangle ABM}}{\mathbb{S}_{\triangle MBC}} = \frac{a}{b}$$

OBSERVACION :

Si $\overline{BM}$ es mediana del ángulo *ABC* entonces las regiones paralelas *ABM* y *MBC* son equivalentes .



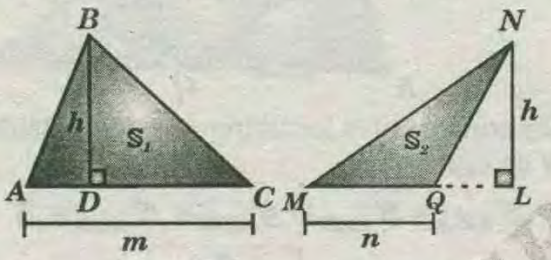
$\overline{BM}$: mediana

$$\rightarrow AM = MC = b$$

$$\boxed{\mathbb{S}_{\triangle ABM} = \mathbb{S}_{\triangle MBC}}$$

TEOREMA 2 :

Si dos regiones triangulares tienen una de sus alturas de igual longitud , sus áreas serán proporcionales a las longitudes de los lados a los cuales son relativas dichas alturas .



* Se cumple : $\boxed{\frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2} = \frac{m}{n}}$.

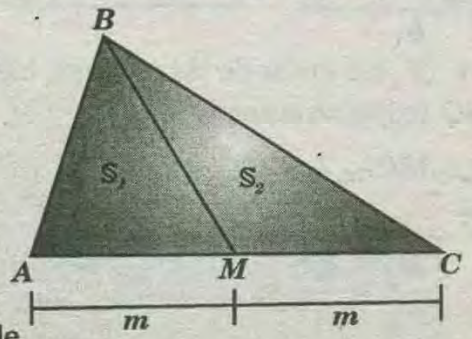
DEMOSTRACION :

* Sabemos que : $\mathbb{S}_1 = \frac{m \times h}{n} \wedge \mathbb{S}_2 = \frac{n \times h}{2}$

* Division $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$: $\frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2} = \frac{m}{n}$

TEOREMA 3 :

En todo triángulo, la mediana divide a la región triangular en dos regiones triangulares equivalentes.



Se cumple : $\mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2$

DEMOSTRACIÓN :

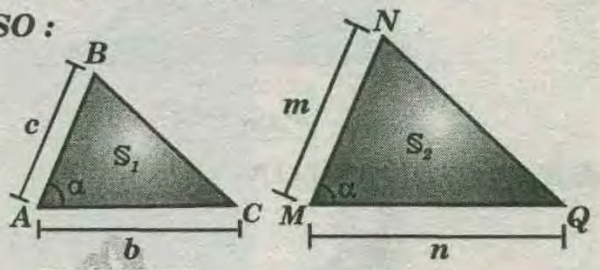
* Sabemos que :

$$\frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2} = \frac{m}{m} \Rightarrow \frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2} = 1 \Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2}$$

TEOREMA 4 :

Si dos regiones triangulares tienen uno de sus ángulos de igual medida o suplementarios , se cumple que sus áreas son proporcionales al producto de las longitudes de los lados que determinan a dichos ángulos.

1ER) CASO :



Se cumple : $\boxed{\frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2} = \frac{b \times c}{m \times n}}$

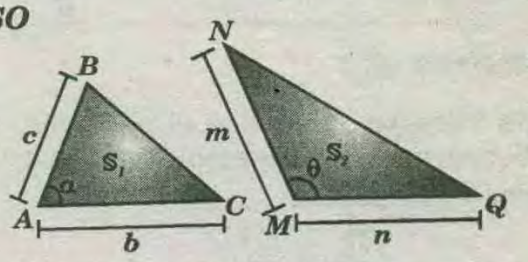
DEMOSTRACIÓN :

* Sabemos que : $\mathbb{S}_1 = \frac{bc\,sen\alpha}{2}$

$$\mathbb{S}_2 = \frac{mn\,sen\alpha}{2}$$

* Dividiendo $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$: $\boxed{\frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2} = \frac{bc}{mn}}$

2do) CASO



Si $\alpha + \theta = 180°$, se cumple :

$$\boxed{\frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2} = \frac{bc}{mn}}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Sabemos que : $\mathbb{S}_1 = \frac{bc\,sen\alpha}{2}$

$$\mathbb{S}_2 = \frac{mn\,sen\theta}{2}$$

* Dividiendo : $\frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2} = \frac{bc\,sen\alpha}{mn\,sen\theta}$

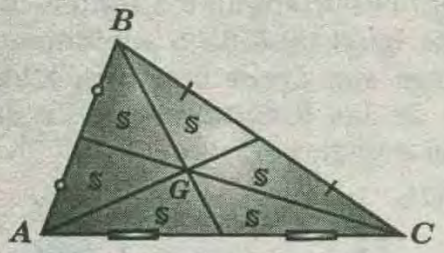
* Pero si $\alpha + \theta = 180° \Rightarrow sen\alpha = sen\theta$

www.GRATIS2.com

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{bc}{mn}$$

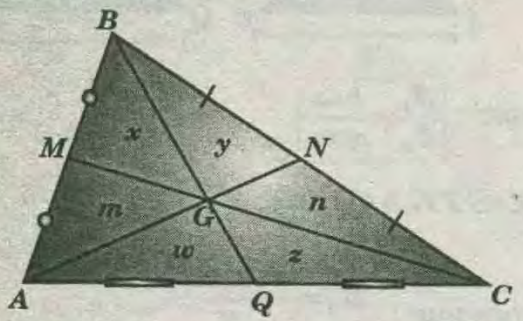
TEOREMA 5 :

En todo triángulo al trazar las tres medianas , la región triangular queda dividida en **6** regiones triangulares equivalentes .



$$S_{ABC}=6S$$

DEMOSTRACIÓN :



* Será suficiente demostrar que : $x=y$. $\overline{BQ}$ mediana, entonces :

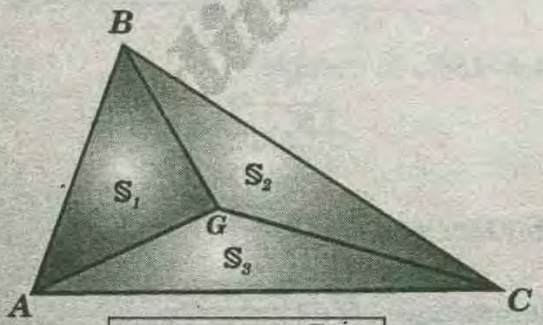
$$S_{ABQ}=S_{QBC} \Rightarrow \underline{x+m}+w=\underline{y+n}+z \Rightarrow 2x=2y \Rightarrow \boxed{x=y}$$

* Luego :

$$x=y=m=n=w=z=\frac{S_{ABC}}{6}$$

TEOREMA 6 :

En todo triángulo , si se une el baricentro «G» con los tres vértices se determinan tres triángulos parciales equivalentes.



$$S_1=S_2=S_1=\frac{S_{ABC}}{3}$$

DEMOSTRACIÓN :

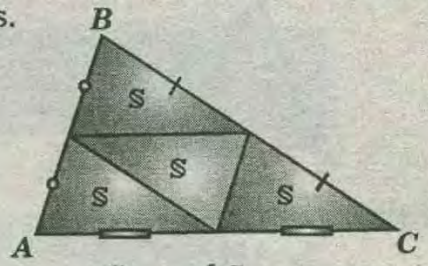
Por el teorema anterior :

$$\underline{S_{AGB}}=\underline{S_{BGC}}=\underline{S_{AGC}}=2S$$

$$S_1=S_2=S_3=\frac{S_{ABC}}{3}$$

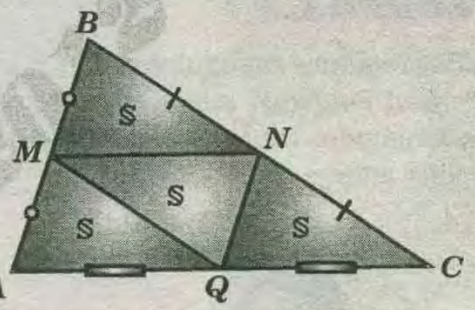
TEOREMA 7 :

En todo triángulo al unir los puntos medios de sus tres lados se obtienen cuatro triangulos congruentes, por lo tanto las cuatro regiones triángulares son equivalentes.



$$S_{ABC}=4S$$

DEMOSTRACIÓN :



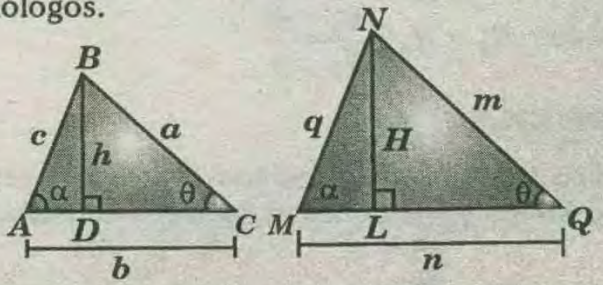
* Por ser congruentes los triángulos *AMQ, MBN, QNC* y *QMN* se cumple :

$$S_{AMQ}=S_{MBN}=S_{QNC}=S_{QMN}=S$$

* Pero : $4S=S_{ABC} \Rightarrow \boxed{S=\frac{S_{ABC}}{4}}$

TEOREMA 8 :

Si dos triángulos son semejantes , entonces la razón de las áreas de sus regiones es igual al cuadrado de la razón de las longitudes de sus elementos homólogos.



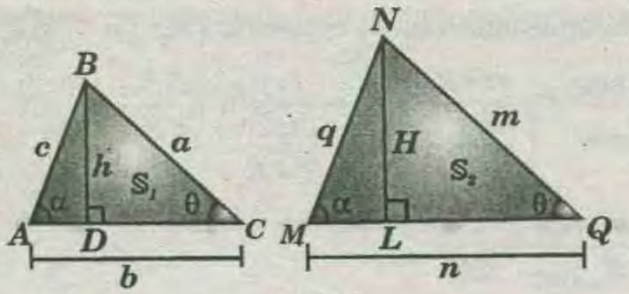
Sean S_1 y S_2 las áreas de las regiones triangulares *ABC* y *MNQ* respectivamente .

Ahora si $\triangle ABC \sim \triangle MNQ$

Se cumple :

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a^2}{m^2}=\ldots\ldots\ldots=\frac{h^2}{H^2}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Sabemos que : $S_{ABC}=\frac{bh}{2}$

$$S_{MNQ}=\frac{aH}{2}$$

* Dividiendo miembro a miembro :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNQ}}=\frac{bh}{nH}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

* Pero como $\triangle ABC \sim \triangle MNQ$; se cumple :

$$\frac{b}{n}=\frac{h}{H}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

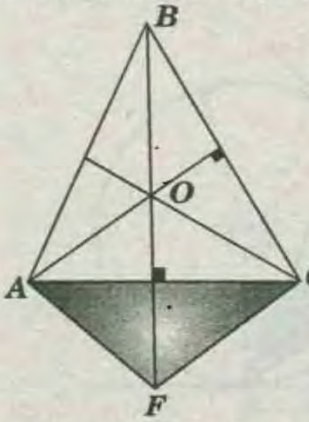
* Reemplazando *(II)* en *(I)*:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNQ}}=\frac{b^2}{n^2}=\frac{a^2}{m^2}=\ldots\ldots\ldots=\frac{h^2}{H^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{S_1}{S_2}=\frac{a^2}{m^2}=\ldots\ldots\ldots=\frac{h^2}{H^2}}$$

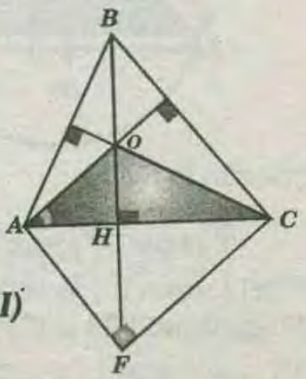
TEOREMA 9 :

Del gráfico mostrado se cumple :



$\Rightarrow \boxed{S^2_{AFC}=S_{ABC}\times S_{AOC}}$

DEMOSTRACION :



$S_{AFC}=AC\times FH/2$ ..... (I)

$S_{ABC}=AC\times BH/2$ ..... (II)

$S_{AOC}=AC\times OH/2$ ..... (III)

* remplazando *(II)* y *(III)* :

$$S_{ABC}\,S_{AOC}=AC^2\times BH\times OH/4\ldots\ldots\ldots\ldots(IV)$$

$\triangle AHO \sim \triangle BHC$: $\frac{OH}{HC}=\frac{AH}{BH}$

$\Rightarrow OH\times BH=AH\times HC\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(V)$

* remplazando *(IV)* :

$$S_{ABC}\,S_{AOC}=AC^2\times AH\times HC/4\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

* $\triangle AFC$: por relaciones métricas

$$FH^2=AH\times HC\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(VI)$$

* Luego en *(I)* :

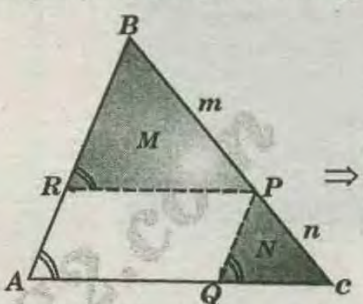
$$S_{ABC}\times S_{AOC}=AC^2\times FH^2/4$$

$$\Rightarrow S_{ABC}\times S_{AOC}=(AC\times FH/2)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{S^2_{AFC}=S_{ABC}\times S_{AOC}}$$

TEOREMA 10 :

Si PR // AC y PQ // AB luego se cumple :



$\Rightarrow \boxed{\sqrt{S_{ABC}}=\sqrt{M}+\sqrt{N}}$

DEMOSTRACIÓN :

$\triangle RBP \sim \triangle ABC$ por semejanza de áreas

$$\frac{M}{S_{ABC}}=\frac{m^2}{(m+n)^2}\Rightarrow\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{S_{ABC}}}=\frac{m}{m+n}\ldots\ldots(I)$$

$\triangle QPC \sim \triangle ABC$

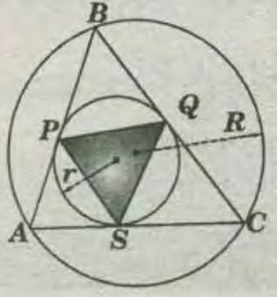
$$\frac{N}{S_{ABC}}=\frac{n^2}{(m+n)^2}\Rightarrow\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{S_{ABC}}}=\frac{n}{m+n}\ldots\ldots(II)$$

* Sumando *(I)* y *(II)* :

$$\frac{\sqrt{M}+\sqrt{N}}{\sqrt{S_{ABC}}}=\frac{m+n}{m+n}=1\Rightarrow\sqrt{S_{ABC}}=\sqrt{M}+\sqrt{N}$$

TEOREMA 11 :

Dado un triángulo *ABC*, inscrito en una circunferencia de radio *R* y su triángulo tangencial respectivo (inscrito en una circunferencia de radio *r*). La relación de áreas de la región *ABC* y la región *PQS* es igual a la relación de radio *r* y de *2R*.



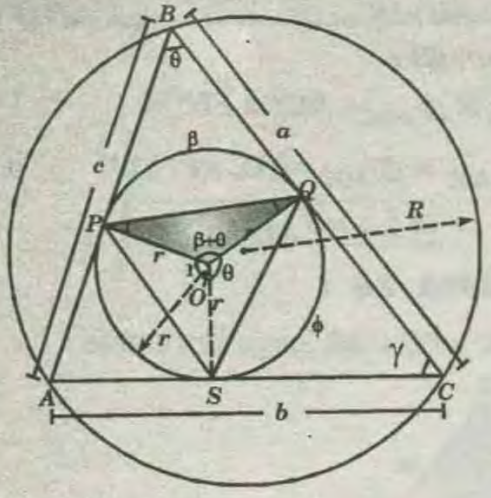
$\Rightarrow \boxed{\frac{S_{PQS}}{S_{ABC}}=\frac{r}{2R}}$

Donde :

P, Q, S : puntos de tangencia

$\triangle PQS$: triángulo tangencial del $\triangle ABC$.

DEMOSTRACIÓN :



* Según la figura : $\beta+\theta=180°$

* Por teorema (Relación de áreas) :

$$\frac{\mathbb{S}_{\triangle POQ}}{\mathbb{S}_{\triangle ABC}}=\frac{(r)(r)}{(a)(c)}$$

$$\rightarrow \mathbb{S}_{\triangle POQ}=\frac{r^2}{a\times c}\ \mathbb{S}_{\triangle ABC}.....(I)$$

* Análogamente :

$$\phi+\gamma=180°\rightarrow \frac{\mathbb{S}_{\triangle SOQ}}{\mathbb{S}_{\triangle ABC}}=\frac{(r)(r)}{(a)(b)}$$

$$\rightarrow \mathbb{S}_{\triangle SOQ}=\frac{r^2}{ab}\times\mathbb{S}_{\triangle ABC}.....(II)$$

* También :

$$\frac{\mathbb{S}_{\triangle PQS}}{\mathbb{S}_{\triangle ABC}}=\frac{(r)(r)}{(b)(c)}$$

$$\rightarrow \mathbb{S}_{\triangle PQS}=\frac{r^2}{bc}\mathbb{S}_{\triangle ABC}.....(III)$$

* Sumando las ecuaciones *(I)*, *(II)* y *(III)* :

$$\mathbb{S}_{\triangle POQ}+\mathbb{S}_{\triangle SOQ}+\mathbb{S}_{\triangle}=r^2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)\mathbb{S}_{\triangle ABC}$$

* De la figura , se observa :

$$\mathbb{S}_{\triangle PQS}=\mathbb{S}_{\triangle POQ}+\mathbb{S}_{\triangle SOQ}+\mathbb{S}_{\triangle POS}$$

* Luego :

$$\mathbb{S}_{\triangle PQS}=\mathbb{S}_{\triangle ABC}r^2\frac{(a+b+c)}{abc}.....(IV)$$

* De los teoremas anteriores se sabe :

$$a+b+c=2p$$

$$\mathbb{S}_{\triangle ABC}=pr=\frac{abc}{4R}$$

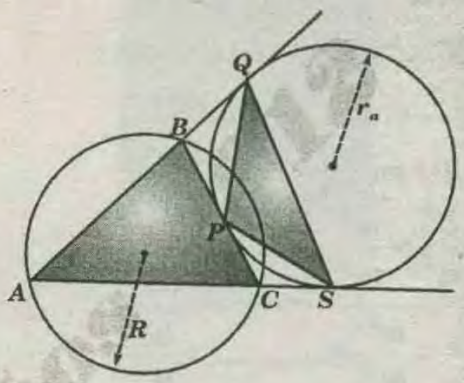
* Reemplazando en la ecuación *(IV)* :

$$\frac{\mathbb{S}_{\triangle PQS}}{\mathbb{S}_{\triangle ABC}}=\frac{r(r)(2p)}{\left(\frac{abc}{4R}\right)(4R)}=\frac{(rp)}{\left(\frac{abc}{4R}\right)}\left(\frac{2r}{4R}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\mathbb{S}_{\triangle PQS}}{\mathbb{S}_{\triangle ABC}}=\frac{r}{2R}$$

TEOREMA 12 :

Según la figura R y r_a son el circunradio y exradio del triángulo *ABC* , además *P* , *Q* y *S* son puntos de tangencia y la relación de áreas de las regiones *PQS* y *ABC* es igual a la relación del exradio (r_a) y el doble del circunradio *(2R)* , respecto del triángulo *ABC*.



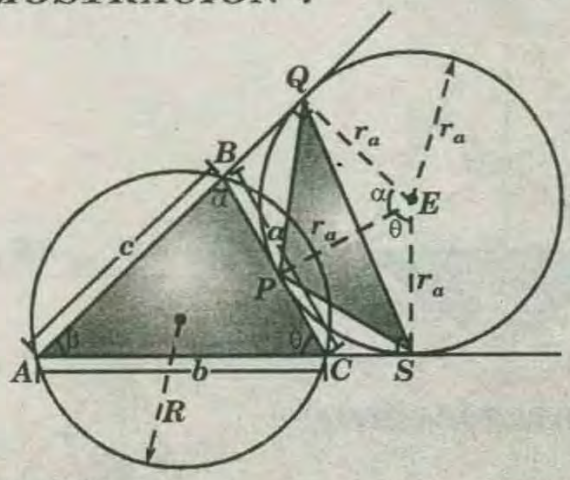
$$\boxed{\frac{\mathbb{S}_{\triangle PQS}}{\mathbb{S}_{\triangle ABC}}=\frac{r}{2R}}$$

Donde

P ; Q y *S* : puntos de tangencia

$\triangle PQS$: triángulo tangencial externo $\triangle ABC$

DEMOSTRACIÓN :



* Según la figura :

$$\mathbb{S}_{\triangle PQS}=\mathbb{S}_{\triangle PQE}+\mathbb{S}_{\triangle PES}-\mathbb{S}_{\triangle QES}.....(I)$$

* Del teorema , la relación de áreas con un ángulo de igual medida :

$$\frac{\mathbb{S}_{\triangle PQE}}{\mathbb{S}_{\triangle ABC}}=\frac{r_a r_a}{ac}.....(II)$$

$$\frac{\mathbb{S}_{\triangle PES}}{\mathbb{S}_{\triangle ABC}}=\frac{r_a r_a}{ab}.....(III)$$

* Del teorema , la relación de áreas con ángulos suplementarios :

$$\beta+(\alpha+\theta)=180°$$

$$\frac{S_{\triangle QES}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{r_a r_a}{bc} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV)$$

* Ecuaciones *(IV)*, *(III)* y *(II)* en *(I)* :

$$S_{\triangle PQS}=S_{\triangle ABC}\frac{r_a^2}{ac}+S_{\triangle ABC}\frac{r_a^2}{ab}-S_{\triangle ABC}\frac{r_a^2}{bc}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle PQS}}{S_{\triangle ABC}}=r_a^2\left(\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{bc}\right)$$

* Efectuando operaciones y recordando que :

$$\frac{S_{\triangle PQS}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2r_a^2(p-a)}{abc} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (V)$$

* Además :

$$S_{\triangle ABC}=(p-a)r_a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (VI)$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{abc}{4R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (VII)$$

* De *(VI)* y *(VII)* :

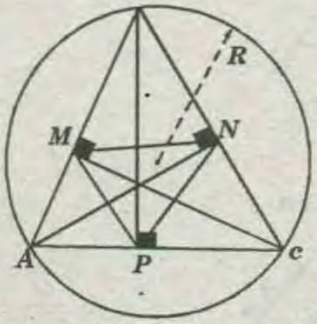
$$\frac{p-a}{abc}=\frac{1}{4Rr_a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (VIII)$$

* Reemplazando *(VIII)* en *(V)* :

$$\frac{S_{\triangle PQS}}{S_{\triangle ABC}}=2r_a^2\frac{1}{4Rr_a} \rightarrow \frac{S_{\triangle PQS}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{r_a}{2R}$$

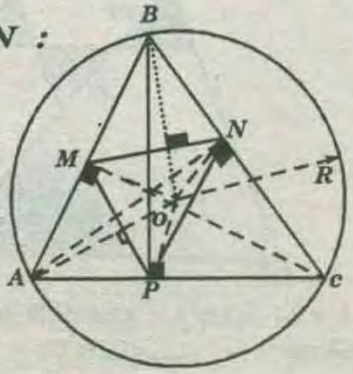
TEOREMA 13 :

El área de un triángulo es igual al semiperímetro del triángulo órtico multiplicado por el circunradio del triángulo.



$$\Rightarrow \boxed{S_{ABC}=p_{MNP}\times R}$$

DEMOSTRACIÓN :



$$S_{ABC}=S_{AMOP}+S_{BMON}+S_{NOPC}$$

* El circuncentro es perpendicular a los lados del triángulo órtico :

$$OB\perp MN;OA\perp MP \wedge OC\perp NP$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{OA\times MP}{2}+\frac{OB\times MN}{2}+\frac{OC\times NP}{2}$$

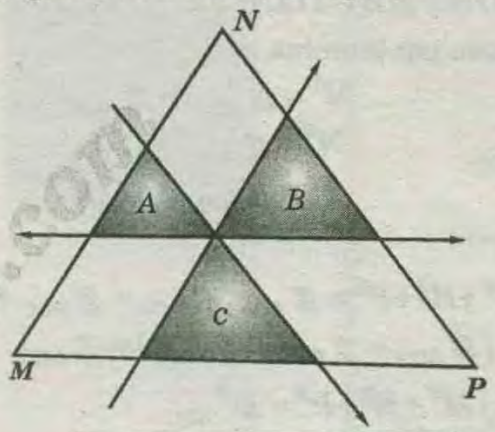
* pero : $OA=OB=OC=R$

$$S_{ABC}=\frac{R}{2}(MP+MN+NP)$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{R}{2}(2p_{MNP}) \Rightarrow \boxed{S_{ABC}=p_{MNP}\times R}$$

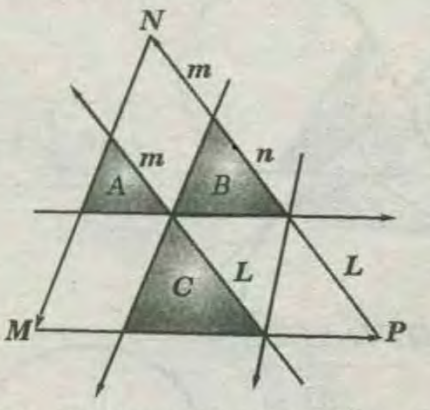
TEOREMA 14 :

En el triángulo mostrado se cumple :



$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{S_{MNP}}=\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}$$

DEMOSTRACION :



* Como las rectas son paralelas aplicamos semejanza de triángulos :

$$\frac{A}{S_{MNP}}=\frac{m^2}{(m+n+L)^2} \rightarrow \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{S_{ABC}}}=\frac{m}{m+n+L}$$

* Análogamente :

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{S_{ABC}}}=\frac{n}{m+n+L} \rightarrow \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{S_{ABC}}}=\frac{L}{m+n+L}$$

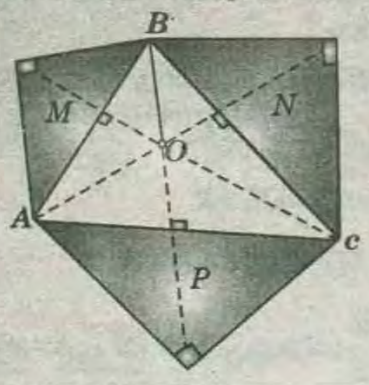
* Sumando :

$$\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}{\sqrt{S_{MNP}}}=\frac{n+n+L}{m+n+L}=1 \Rightarrow \boxed{\sqrt{S_{MNP}}=\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}$$

WWW.GRATIS2.COM

TEOREMA 15 :

Del gráfico mostrado se cumple :



$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{ABC}^2 = M^2 + N^2 + P^2}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Sabemos por teorema que :

$$M^2 = \mathbb{S}_{ABC} \times \mathbb{S}_{AOB}$$
$$N^2 = \mathbb{S}_{ABC} \times \mathbb{S}_{BOC}$$
$$P^2 = \mathbb{S}_{ABC} \times \mathbb{S}_{AOC}$$

* Sumando :

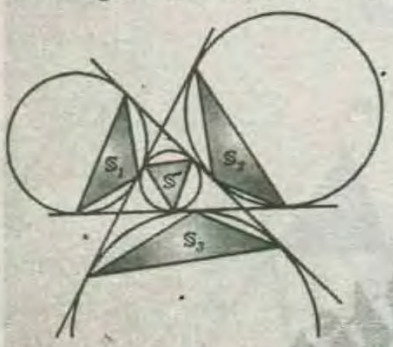
$$M^2 + N^2 + P^2 = \mathbb{S}_{ABC}(\mathbb{S}_{AOB} + \mathbb{S}_{BOC} + \mathbb{S}_{AOC})$$

* Pero : $(\mathbb{S}_{AOB} + \mathbb{S}_{BOC} + \mathbb{S}_{AOC}) = \mathbb{S}_{ABC}$

* Luego : $M^2 + N^2 + P^2 = \mathbb{S}^2_{ABC}$

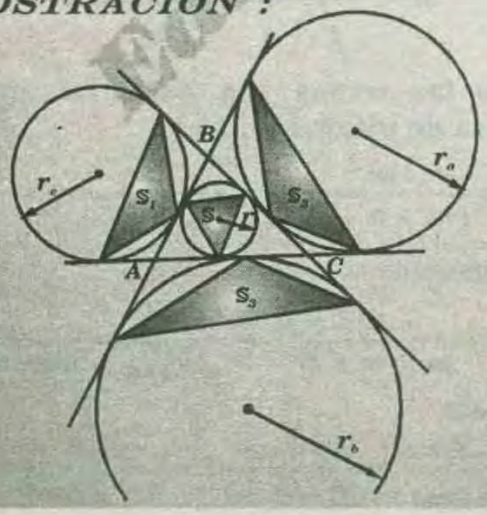
TEOREMA 16 :

En la figura mostrada , se cumple :



$$\boxed{\frac{1}{\mathbb{S}} = \frac{1}{\mathbb{S}_1} + \frac{1}{\mathbb{S}_2} + \frac{1}{\mathbb{S}_3}}$$

DEMOSTRACION :



* Sabemos por teorema anterior que se cumple :

$$\frac{\mathbb{S}_{ABC}}{\mathbb{S}_1} = \frac{2R}{r_c} \quad \text{.....(I)}$$
$$\frac{\mathbb{S}_{ABC}}{\mathbb{S}_2} = \frac{2R}{r_a} \quad \text{.....(II)}$$
$$\frac{\mathbb{S}_{ABC}}{\mathbb{S}_3} = \frac{2R}{r_b} \quad \text{.....(III)}$$

* Sumando *(I)* ,*(II)* y *(III)*

$$\mathbb{S}_{ABC} \times \left(\frac{1}{\mathbb{S}_1} + \frac{1}{\mathbb{S}_2} + \frac{1}{\mathbb{S}_3}\right) = 2R\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right)$$

* pero por propiedad : $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$

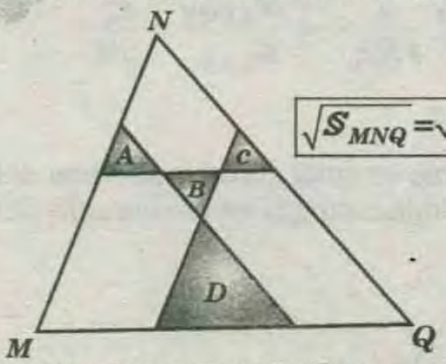
* Remplazando : $\mathbb{S}_{ABC} \times \left(\frac{1}{\mathbb{S}_1} + \frac{1}{\mathbb{S}_2} + \frac{1}{\mathbb{S}_3}\right) = \frac{2R}{r}$

* además : $\frac{S_{ABC}}{S} = \frac{2R}{r}$

$$\Rightarrow \mathbb{S}_{ABC}\left(\frac{1}{\mathbb{S}_1} + \frac{1}{\mathbb{S}_2} + \frac{1}{\mathbb{S}_3}\right) = \frac{\mathbb{S}_{ABC}}{\mathbb{S}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\mathbb{S}} = \frac{1}{\mathbb{S}_1} + \frac{1}{\mathbb{S}_2} + \frac{1}{\mathbb{S}_3}}$$

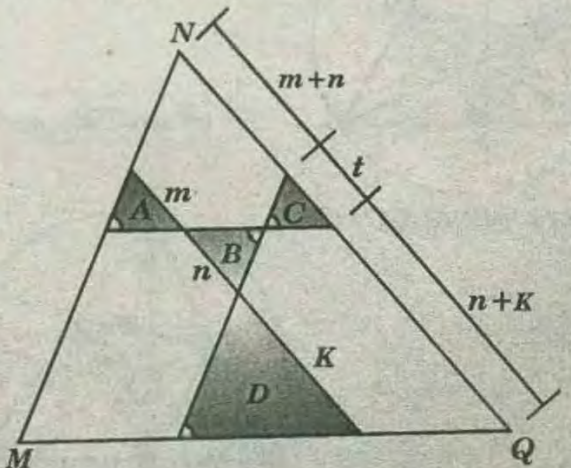
TEOREMA 17 :

En la figura mostrada los segmentos interiores son paralelas a los lados del triángulo respectivamente.



$$\boxed{\sqrt{\mathbb{S}_{MNQ}} = \sqrt{A} + 2\sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* En la figura , existen triángulos semejantes , entonces se cumplen :

♠ $\frac{A}{S_{MNQ}}=\frac{m^2}{(m+n+t+n+k)^2}\Rightarrow\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{S_{MNQ}}}=\frac{m}{m+n+t+n+k}$ .....(I)

♠ $\frac{C}{S_{MNQ}}=\frac{t^2}{(m+n+t+n+k)^2}\Rightarrow\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{S_{MNQ}}}=\frac{t}{m+n+t+n+k}$ .....(II)

♠ $\frac{D}{S_{MNQ}}=\frac{k^2}{(m+n+t+n+k)^2}\Rightarrow\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{S_{MNQ}}}=\frac{k}{m+n+t+n+k}$ .....(III)

♠ $\frac{B}{S_{MNQ}}=\frac{n^2}{(m+n+t+n+k)^2}\Rightarrow\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{S_{MNQ}}}=\frac{n}{m+n+t+n+k}$

* A esta última expresión lo multiplicamos por **2 :**

$$\frac{2\sqrt{B}}{\sqrt{S_{MNQ}}}=\frac{2n}{m+n+t+n+k}\text{ .....(IV)}$$

* Sumando *(I) ; (II) ; (III)* y *(IV)*:

$$\frac{\sqrt{A}+2\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}}{\sqrt{S_{MNQ}}}=\frac{m+2n+t+k}{m+2n+t+k}$$

$$\Rightarrow\boxed{\sqrt{S_{MNQ}}=\sqrt{A}+2\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

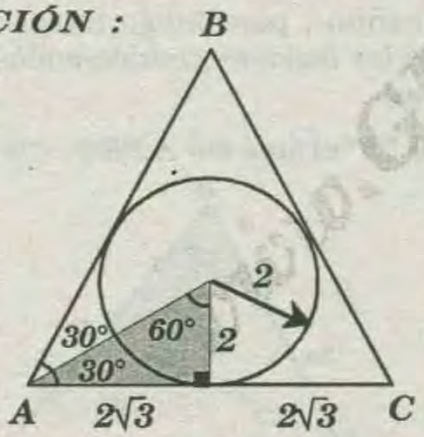
PROBLEMA 1 :

Calcular el área de un triángulo equilátero, sabiendo que el inradio mide **2**.

A)18μ^2 B)8$\sqrt{3}$ C)12$\sqrt{3}$ D)16$\sqrt{3}$ E)15$\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Luego de considerar el triángulo rectángulo notable de **30°** y **60°**, se obtendrá : $AC=4\sqrt{3}$

* Ahora aplicamos :

$$A_{ABC}=\frac{L^2\sqrt{3}}{4}\rightarrow A_{ABC}=\frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}=12\sqrt{3}$$

RPTA : "C"

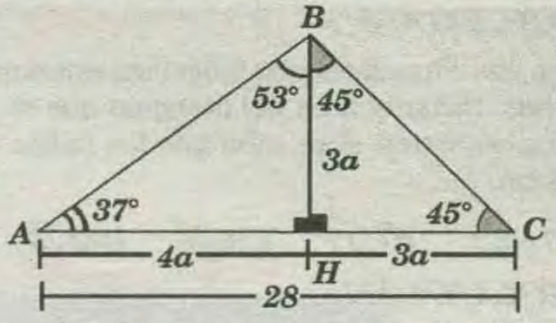
PROBLEMA 2 :

Hallar el área de un triángulo **ABC**, si: $m\sphericalangle A=37°$; $m\sphericalangle C=45°$ y $AC=28$

A)124 B)200 C)172 D)168 E)192

RESOLUCIÓN:

* De la figura :



$$4a+3a=28\rightarrow 7a=28\rightarrow a=4$$

* Luego: $BH=3(4)=12$

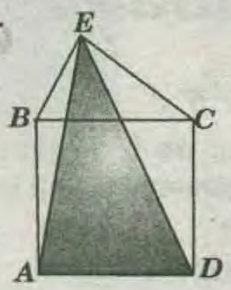
$$Area\Delta_{ABC}=\frac{28(12)}{2}=168$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3 :

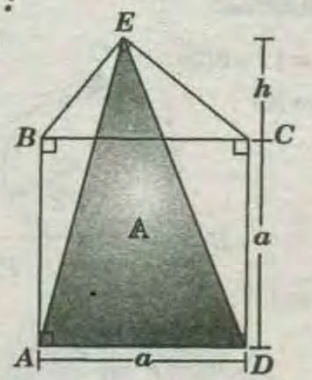
En la figura , **ABCD** es un cuadrado y el triángulo **BEC** es rectángulo recto en **E**. Si $\overline{BE}$ y $\overline{EC}$ miden **6cm** y **8 cm** , respectivamente , calcular el área de la región sombreada.

A) 64 cm²
B) 50 cm²
C) 54 cm²
D) 76 cm²
E) 74 cm²

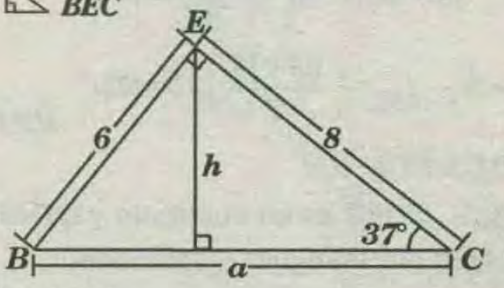


RESOLUCIÓN :

* Del gráfico piden **A**



* En el $\triangle$ **BEC**



• $m\sphericalangle BCE=37°$

• Por $\triangle$ notable $a=10$

• Por **R.M.** $\triangle$

$$(6)(8)=(h)(10)\Rightarrow h=\frac{24}{5}$$

$$A=\frac{(a)(a+h)}{2}\Rightarrow A=\frac{(10)(10+24/5)}{2}$$

$$\Rightarrow A=74\,cm^2$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 4 :

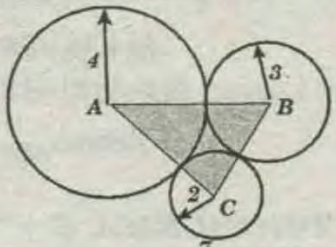
se tiene tres circunferencias tangentes exteriormente dos a dos. Hallar el área del triángulo que se forma al unir sus centros, si se sabe que los radios miden 2;3 y 4 cm.

A)$\sqrt{37}$cm2 B)$\sqrt{17}$ C)$6\sqrt{6}$ D)$9\sqrt{5}$ E)34

RESOLUCIÓN:

* Aplicamos el teorema de Herón, considerando que:

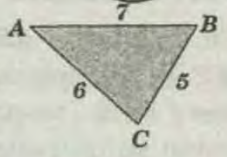
$$p=\frac{6+5+7}{2} \rightarrow p=9$$



* Entonces :

$$\rightarrow A_{ABC}=\sqrt{9(9-7)(9-6)(9-5)}$$

$$\Rightarrow A_{ABC}=\sqrt{9\times2\times3\times4}=6\sqrt{6}$$



RPTA : " C"

PROBLEMA 5 :

Calcular el área de la región de un triángulo rectángulo si la hipotenusa y su inradio miden 17 y 3.

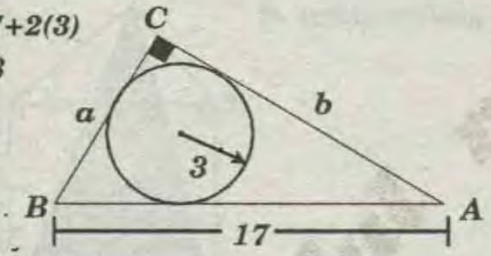
A)452μ^2 B)40 C)50 D)60 E)80

RESOLUCIÓN :

* Por Poncelet:

$$a+b=17+2(3)$$

$$\rightarrow a+b=23$$



* Sabemos :

$$A_{\triangle ABC}=p\times r=\left(\frac{a+b+17}{2}\right)\times3$$

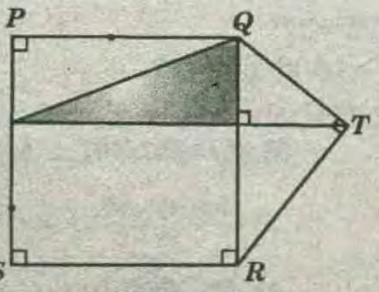
$$\rightarrow A_{\triangle ABC}=\left(\frac{23+17}{2}\right)\times3=60\mu^2$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 6 :

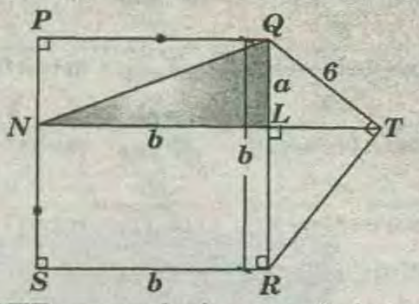
En la figura , PQRS es un cuadrado y QT=6 cm. Halle el área del triángulo sombreado.

A) 18 cm²
B) 24 cm²
C) 15 cm²
D) 21 cm²
E) 12 cm²



RESOLUCIÓN :

El gráfico SPQR es un cuadrado , además QL=a y QR=b.



En el $\triangle QTR$, por relaciones métricas

$$6^2=ab \rightarrow ab=36\ cm^2$$

Nos piden el área del triángulo sombreado

$$A_{\triangle NQL}=\frac{ab}{2}=\frac{36}{2}=18\ cm^2$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 7 :

En un triángulo ABC, sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se toman los puntos "P" y "Q" respectivamente , tal que : AP=2PB; BQ=QC.

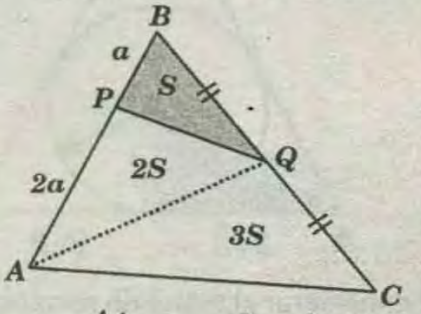
Hallar : $\frac{A\Delta_{PBQ}}{A\Delta_{ABC}}$

A)$\frac{1}{2}$ B)$\frac{1}{4}$ C)$\frac{1}{6}$ D)$\frac{1}{8}$ E)$\frac{1}{12}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando , para luego trazar la línea $\overline{AQ}$, llenando las regiones considerando la relación se sus bases:

* Siendo "S" el área del ΔPBQ, entonces:



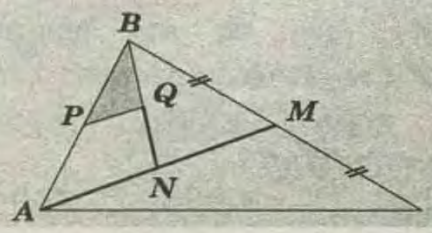
$$\frac{A\Delta_{PBQ}}{A\Delta_{ABC}}=\frac{S}{6S}=\frac{1}{6}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

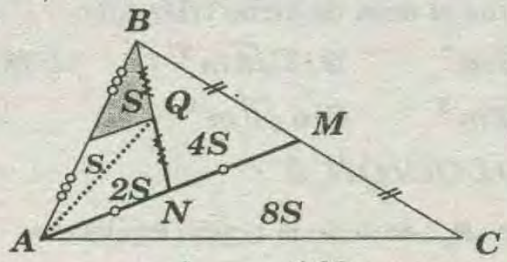
Si el área de la región triangular PBQ es S, hallar el área de la región triangular ABC. Además: AP=PB; BQ=QN; AN=MN.

A) 8S
B) 6S
C) 10S
D) 16S
E) 20S



RESOLUCIÓN :

* Después de llenar las regiones considerando las relaciones de sus bases , se obtendrá que:



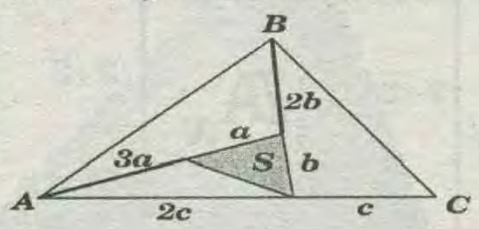
$A_{ABC} = 16S$

RPTA : "D"

PROBLEMA 9 :

Si el área total es $18\mu^2 m$ calcular ***"S"***

A) $2\mu^2$
B) 3
C) 1
D) 4
E) 1,5



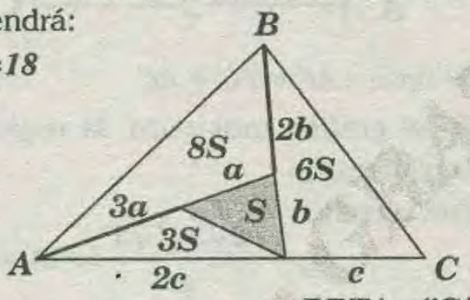
RESOLUCIÓN:

* Considerando la relación de las bases de cada triángulo , se obtendrá:

* Por dato : $A_{ABC}=18$

$\rightarrow \underbrace{18S}_{\text{Del gráfico}} = 18$

$\rightarrow S = 1$



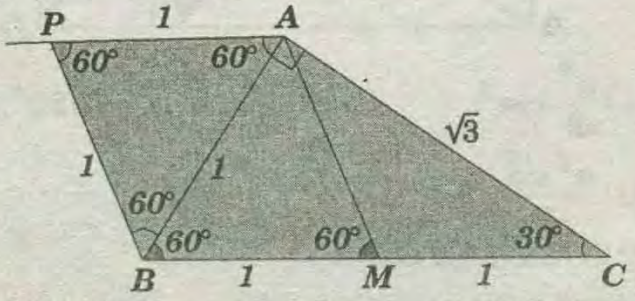
RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

En un triángulo ***ABC*** la hipotenusa ***BC*** mide ***2cm*** y ángulo ***BCA*** miden ***30,*** se traza la mediana ***AM*** y por los puntos ***A*** y ***B*** se trazan paralelas a $\overline{BC}$ y a $\overline{AM}$ intersectándose en ***P***. Halle el área de la región ***APBC*** (en cm^2).

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ***B)*** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ***C)*** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ***D)*** $\sqrt{3}$ ***E)*** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

RESOLUCIÓN :



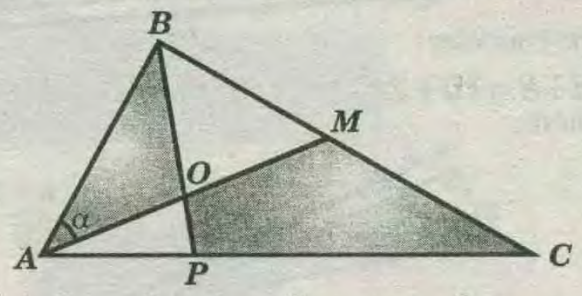
* Se pide hallar :

$$S_{PAB} + S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

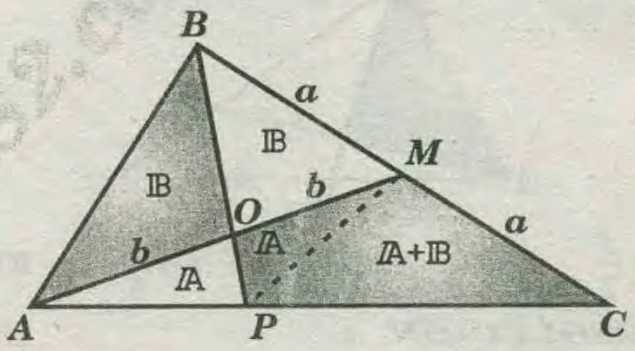
En la figura, ***BM=MC*** y ***AO=OM***. ¿Qué parte del área del triángulo ***ABC*** es al área de la región sombreada?



A) $\frac{2}{3}$ ***B)*** $\frac{3}{5}$ ***C)*** $\frac{3}{4}$ ***D)*** $\frac{2}{5}$ ***E)*** $\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

Se pide: $\frac{\text{Área Sombreada}}{\text{Área del } \triangle ABC}$



se traza $\overline{PM}$.

Por razón de áreas

$$\text{Área}(AOB) = \text{Área}(OBM) = \mathbb{B}$$

$$\text{Área}(AOP) = \text{Área}(POM) = \mathbb{A}$$

$$\text{Área}(BPM) = \text{Área}(MPC) = \mathbb{A}+\mathbb{B}$$

Piden:

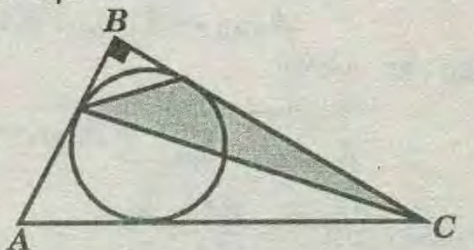
$$\frac{\mathbb{A}_{SOMB}}{\mathbb{A}_{total}} = \frac{2\mathbb{A}+2\mathbb{B}}{3\mathbb{A}+3\mathbb{B}} = \frac{2(\mathbb{A}+\mathbb{B})}{3(\mathbb{A}+\mathbb{B})} \Rightarrow \frac{\mathbb{A}_{SOMB}}{\mathbb{A}_{total}} = \frac{2}{3}$$

RPTA "A"

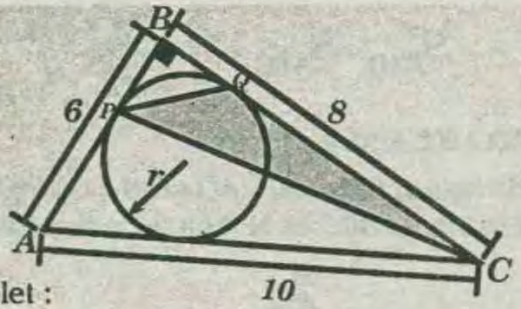
PROBLEMA 12 :

Calcular el área de la región sombreada si, $AB=6\mu$ y $BC=8\mu$.

A) $4\mu^2$
B) 8
C) 10
D) 9
E) 6



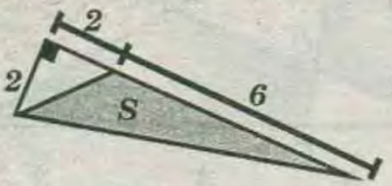
RESOLUCIÓN:



* Por Poncelet :

$$6+8=10+2r \Rightarrow 2=r \Rightarrow PB=BQ=2$$

* Ahora:

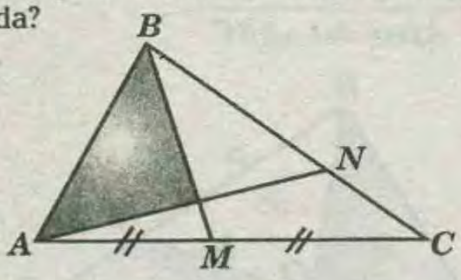


$$S=\frac{6\times 2}{2}=6$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 13 :

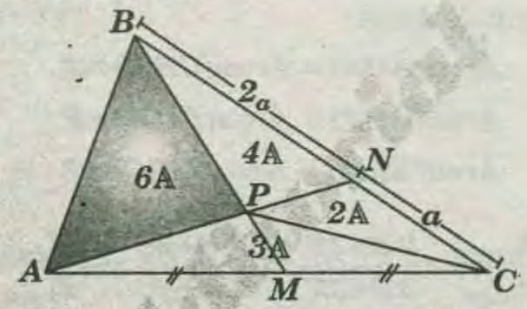
En la figura , $BN=2NC$. ¿Qué parte del área de la región triangular ABC es el área de la región sombreada?



A) $\frac{4}{7}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

RESOLUCIÓN :

En el gráfico , $BN=2NC$



Se traza $\overline{CP}$ y por relación de áreas tenemos que :

$$\frac{A_{\Delta CPN}}{A_{\Delta PBN}}=\frac{1(2A)}{2(2A)}$$

también , como $\overline{MB}$ es mediana

$$A_{\Delta ABP}=A_{\Delta PBC}=6A$$

* Luego , en ΔABC .

$$\frac{A_{\Delta ABN}}{A_{\Delta ANC}}=\frac{10A}{5A} \rightarrow A_{\Delta APC}=3A$$

* entonces: $\frac{A_{\Delta ABP}}{A_{\Delta ABC}}=\frac{6A}{15A}=\frac{2}{5}$

RPTA : "E"

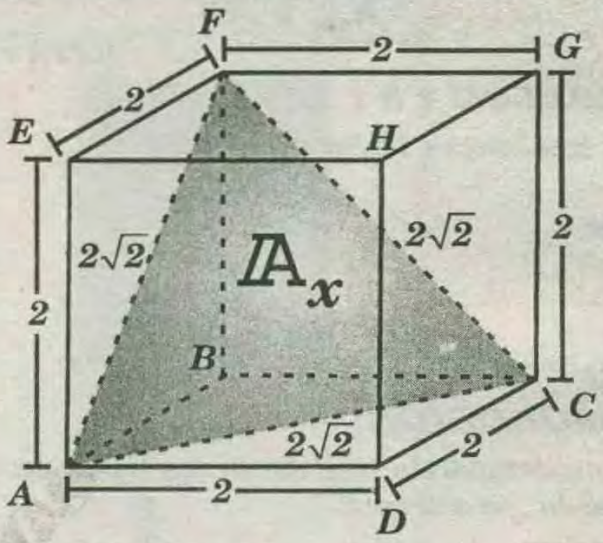
PROBLEMA 14 :

En un cubo de $2m$ de arista, se unen 3 vértices de modo que se forma un triángulo equilátero. Determine el área de dicho triángulo.

A) $4\sqrt{3}m^2$ B) $2\sqrt{3}m^2$ C) $3\sqrt{2}m^2$
D) $2\sqrt{2}m^2$ E) $6\sqrt{3}m^2$

RESOLUCIÓN 3 :

*Se pide $\mathbb{A}_x$: área de la región equilátera.



Se traza : $AF = FC = AC$

En el gráfico mostrado, la región sombreada es equilátera.

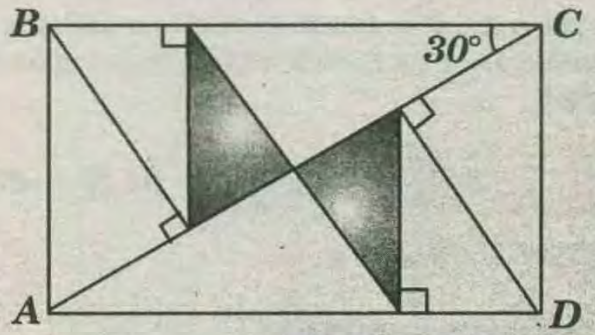
Por lo cual :

$$\mathbb{A}_x=\frac{(2\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \mathbb{A}_x=2\sqrt{3}m^2$$

RPTA "B"

PROBLEMA 15 :

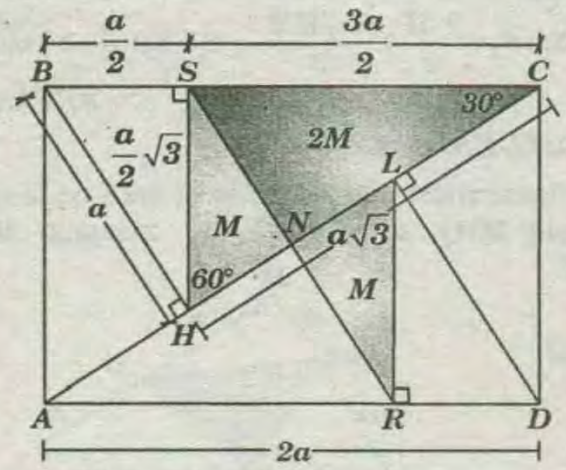
En el rectángulo $ABCD$, $BC=2acm$. Calcular el área de la región sombreada.



A) $\frac{a^2}{2}cm^2$ B) $a^2\frac{\sqrt{3}}{8}cm^2$ C) $2a^2cm^2$
D) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}cm^2$ E) $a^2\frac{\sqrt{3}}{4}cm^2$

RESOLUCIÓN :

* En el gráfico nos piden $2M$.



• $\triangle BAH \cong \triangle DCL$ (LAL)

$AH = LC$

• $\triangle HSN \cong \triangle LRN$ (ALA)

$HN = NL$

• Por relación de áreas.

$$\frac{A_{\triangle SHN}}{A_{\triangle SNC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow A_{\triangle SNC} = 2M$$

$$A_{\triangle HSC} = 3M = \frac{1}{2}\left(\frac{3a}{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow 2M = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$\Rightarrow$ Área sombreada $= \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\ cm^2$

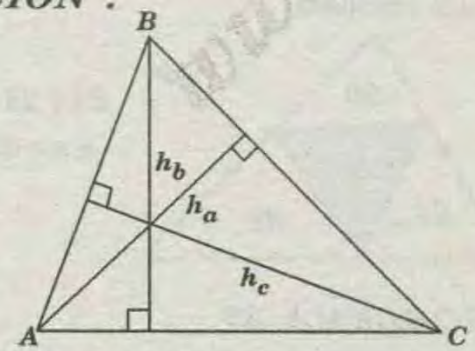
RPTA : "E"

PROBLEMA 16 :

En un triángulo ABC sus alturas miden $h_a = 12u$, $h_b = 15u$ y $h_c = 20u$. Calcule el área de la región triangular ABC (en u^2).

A)120 B)140 C)150 D)160 E)128

RESOLUCIÓN :



* Dato : $h_a = 12$; $h_b = 15$ y $h_c = 2a$

* Reemplazando en la expresión que nos permite calcular el área de la región triángular ABC, donde

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right] \quad \text{es:}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{4\sqrt{H\left[H - \frac{1}{h_a}\right]\left[H - \frac{1}{h_b}\right]\left[H - \frac{1}{h_c}\right]}}$$

* Reemplazando valores y simplificando:

$$S_{ABC} = 150\mu^2$$

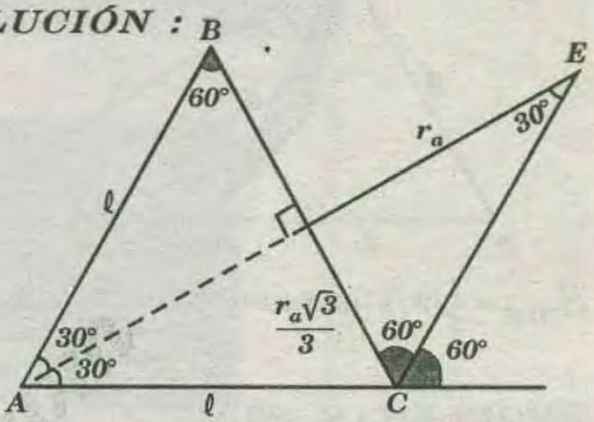
RPTA : "C"

PROBLEMA 17 :

Halle el área de una región triangular equilátera en función de la longitud de un ex radio r_a.

A) $2r_a^2$ B) $3r_a^2$ C) $\dfrac{r_a^2\sqrt{3}}{3}$ D) $3r_a^2\sqrt{3}$ E) $\dfrac{3r_a^2\sqrt{6}}{3}$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle ABC$:

$$\ell = \frac{2r_a\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \left[\frac{2r_a\sqrt{3}}{3}\right]^2\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{r_a^2\sqrt{3}}{3}$$

RPTA : "C"

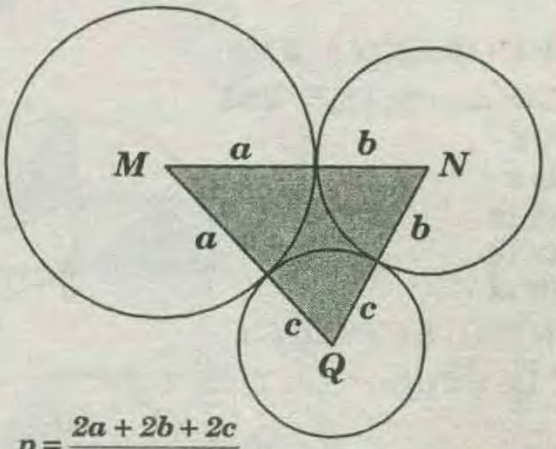
PROBLEMA 18 :

En tres circunferencias tangentes exteriormente entre si dos a dos, cuyos radios miden: a, b, y c, halle el área de la región triangular que determinan los segmentos que unen los centros.

A) $(a + b + c)c$ B) $\sqrt{abc(a+b+c)}$

C) $2\sqrt{abc(a+b+c)}$ D) $(a + b + c)a$

RESOLUCIÓN :



$$p = \frac{2a + 2b + 2c}{2}$$

$$p = a + b + c \Rightarrow S_{MNQ} = \sqrt{abc(a+b+c)}$$

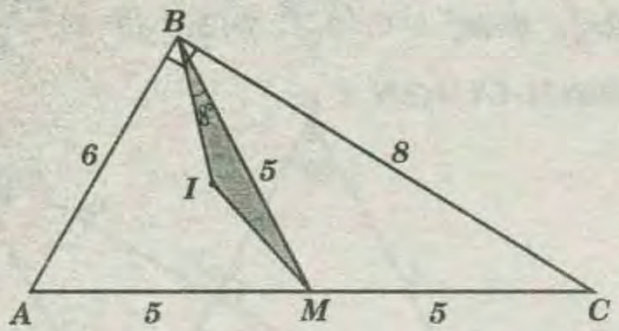
RPTA : "B"

PROBLEMA 19 :

Los catetos de un triángulo rectángulo miden $6u$ y $8u$, halle el área de la región triangular cuyos vértices son ortocentro, incentro y circuncentro del triángulo rectángulo (en u^2).

A)1,0 B)1,5 C)2,0 D)2,5 E)3,0

RESOLUCIÓN :



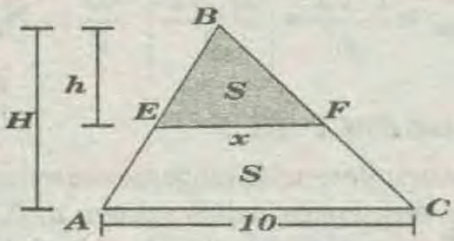
$$S_{BIM}=\frac{1}{2}(2\sqrt{2})(5)Sen8°=5\sqrt{2}\times\frac{1}{5\sqrt{2}}\Rightarrow S_{BIM}=1\mu^2$$

RPTA : "A"

PROBLEMAS 20 :

Hallar "EF" para que las áreas del triángulo "EBF" y el trapecio "AEFC" sean iguales ($\overline{AF}\,//\,\overline{AC}$).

A) $3\sqrt{2}$
B) $4\sqrt{5}$
C) $3\sqrt{7}$
D) $5\sqrt{2}$
E) 7



RESOLUCIÓN:

* Dado que $\Delta EBF\sim\Delta ABC$, entonces por semejanza de áreas se obtendrá :

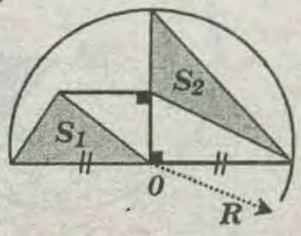
$$\frac{S}{x^2}=\frac{2S}{10^2}\rightarrow 50=x^2\rightarrow 5\sqrt{2}=x$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 21 :

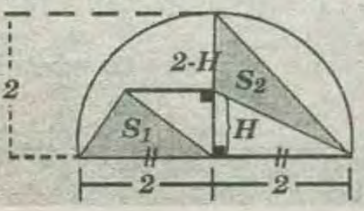
Calcular: "S_1+S_2": $R=2$

A) 6
B) 2
C) 12
D) 14
E) 16



RESOLUCIÓN :

* De la figura :



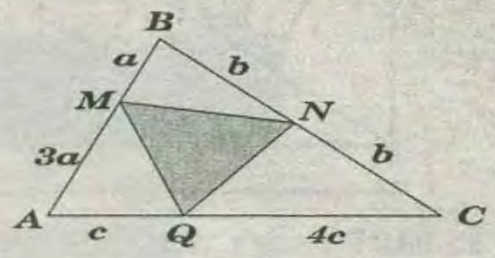
$$S_1+S_2=\frac{2.H}{2}+\frac{(2-H)2}{2}\rightarrow S_1+S_2=H+2-H=2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 22 :

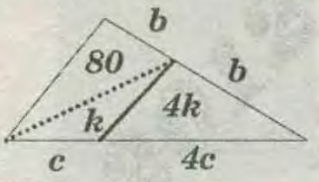
En la figura mostrada, calcular el área de la región triangular MNQ, si el área del triángulo ABC es $160\,\mu^2$.

A) $48\mu^2$
B) 32
C) 52
D) 64
E) 46



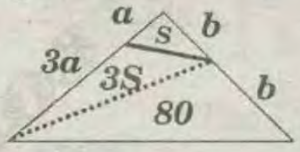
RESOLUCIÓN :

* Primero trazamos la siguiente línea auxiliar:



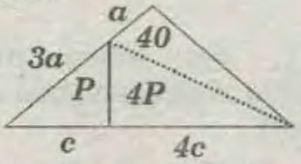
$80=5k\rightarrow k=16$

* Luego :



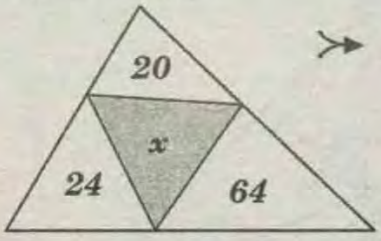
$\rightarrow 45=80\rightarrow S=20$

* Ahora :



$\rightarrow 5P=3(40)\rightarrow P=24$

* Finalmente reemplazamos en el triángulo original, el cual resultará:



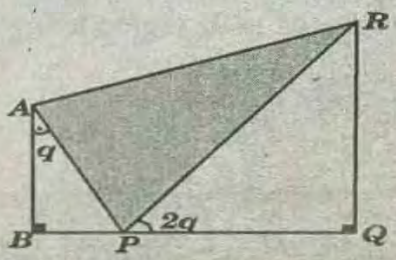
$20+24+64+x=160$
$\rightarrow x=52$

RPTA : "C"

PROBLEMA 23 :

De la figura calcular el área de la región triangular APR sabiendo que $AB=4$, $PQ=8$ y $QR=15$

A) $24\mu^2$
B) 36
C) 30
D) 28
E) 34

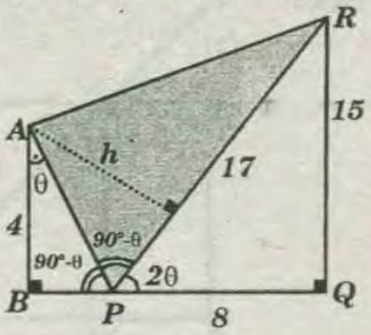


RESOLUCIÓN :

* Por el teorema de Pitágoras en el $\triangle PQR$: $PR=17$

* Además por el teorema de la bisectriz: $h=4$

* Luego:



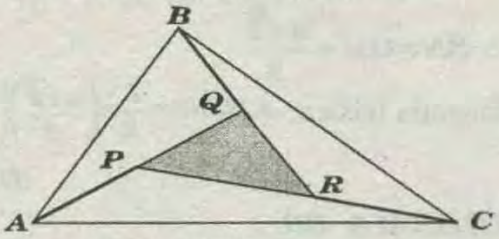
$$A_{\triangle AFP}=\frac{17\times 4}{2}=34$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 24 :

En la figura calcular el área de la región triangular ABC, si el área de la región triangular PQR es $6\mu^2$, además $AP=PQ$, $PR=RC$ y $BQ=QR$

A) $30\mu^2$
B) 42
C) 40
D) 48
E) 36

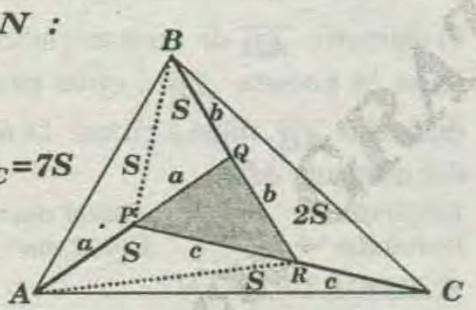


RESOLUCIÓN :

* Datos $S=6\mu^2$

* Se observa $A_{\triangle ABC}=7S$

$\rightarrow \triangle ABC=42\mu^2$

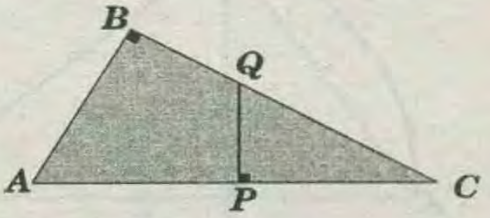


RPTA : "B"

PROBLEMA 25 :

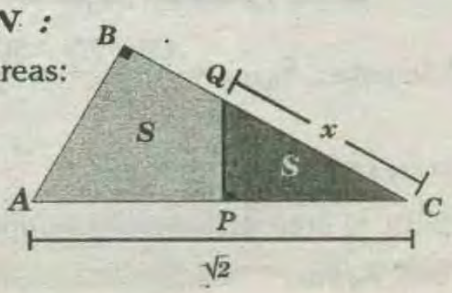
En la figura las regiones $ABQP$ y PQC son equivalentes, calcular QC, si $AC=\sqrt{2}$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 1/2



RESOLUCIÓN :

* Por relación de áreas:



$$\frac{S}{2S}=\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 \rightarrow x=1$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 26 :

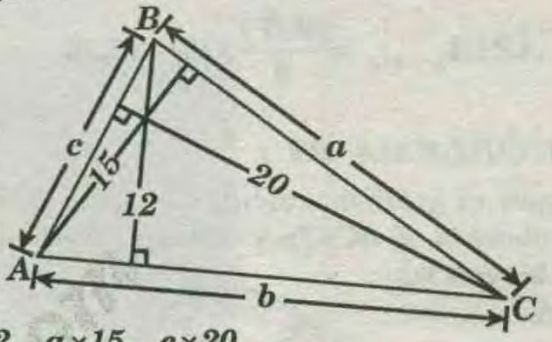
Si en un triángulo las alturas miden **12 cm, 15 cm** y **20 cm**, entonces su área en cm^2 es .

A)140 B)200 C)150 D)160 E)300

RESOLUCIÓN :

* Piden: Área $\triangle ABC=S$

* De la figura :

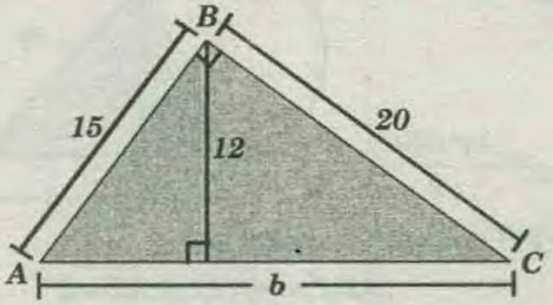


$$S=\frac{b\times 12}{2}=\frac{a\times 15}{2}=\frac{c\times 20}{2}$$

$$\rightarrow \frac{b}{5}=\frac{a}{4}=\frac{c}{3}=K$$

$$\rightarrow b=5K,\ a=4K,\ c=3K$$

* Luego: $\triangle ABC$ es rectángulo



$$S=\frac{15\times 20}{2}=150$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 27 :

En un círculo con radio de **4m** con centro en **H** se traza dos diámetros **JHP** y **VHT**, luego se traza una cuerda **JA** que cortará a **VHT** en **R**, de tal modo que la distancia **RH** sea de **3m**. Entonces el área del triángulo **JAP** es:

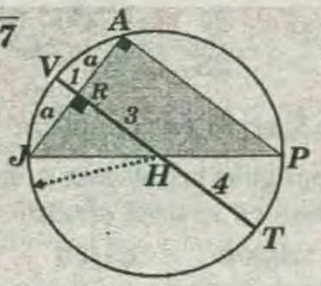
A)30,72 m^2 B)11,20m^2 C)15,36m^2
D)8m E)6m

RESOLUCIÓN:

* Piden: Área$_{\triangle JAP}=\frac{(AJ)(AP)}{2}$ ..... (I)

* De la figura: $a^2=(1)\times(7)$
(Teorema de las cuerdas)

$a=\sqrt{7} \rightarrow AJ=2\sqrt{7}$



* En $\triangle JAP$: Teorema de la base media $\rightarrow AP=6$

* Reemplazando en *(I)*

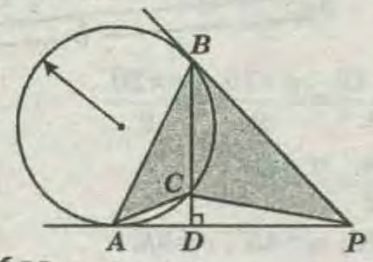
$$\text{ÁREA}_{\triangle JAP}=\frac{(2\sqrt{7})}{2}\times(6)=15{,}36$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 28 :

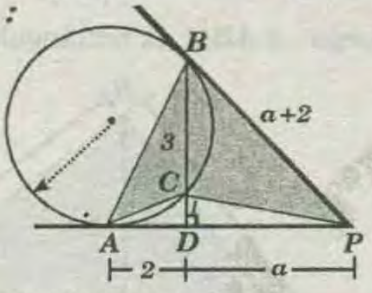
Según el gráfico, calcular el área de la región sombreada, si $BC=3\mu$ y $CD=1\mu$ (A y B son puntos de tangencia).

A) $6\mu^2$
B) $7{,}5\mu^2$
C) $10{,}5\mu^2$
D) $12\mu^2$
E) $9\mu^2$



RESOLUCIÓN :

* Piden :



$$S_{\triangleleft ABPC}=\frac{(AP)(BC)}{2}$$

* Pero por teorema de la tangente

$$(AD)^2=(4)(1) \rightarrow AD=2$$

y como: $PA=PB=3+2$

* $\triangle BDP$ (Teorema de Pitágoras)

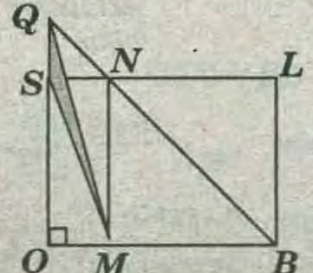
$$(a+2)^2=a^2+(4)^2 \rightarrow a=3 \rightarrow S_{\triangleleft ABPC}=7{,}5\mu^2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 29 :

En el gráfico. $MNLB$ es un cuadrado, calcular el área de la región triangular QMS, si $QN=a$

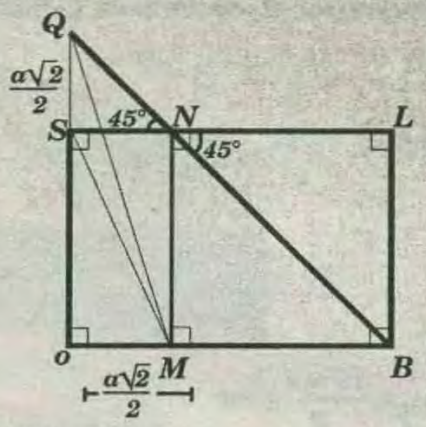
A) $2a^2\mu^2$
B) $a^2\mu^2$
C) $\frac{a^2}{2}\mu^2$
D) $\frac{3}{2}a^2\mu^2$
E) $\frac{a^2}{4}\mu^2$



RESOLUCIÓN :

* Piden: $A_{\Delta QMS}$

* Como:



$m\triangleleft BNL=m\triangleleft QNS=45°$

* Se observa: $\triangle QSN$:

Isósceles (Notable de $45°$)

$$QS=SN=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

* Pero: $SN=OM=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

* Por fórmula básica: $A\Delta QMS=\frac{1}{2}\times\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{a^2}{4}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 30 :

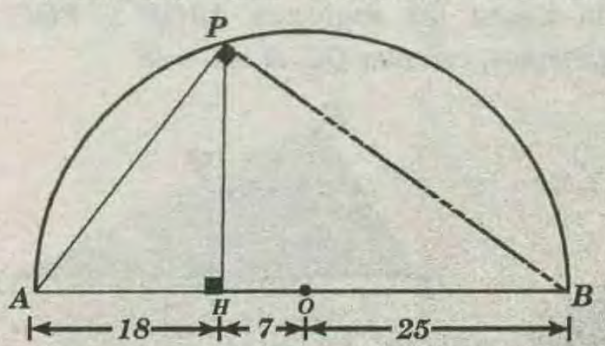
El diámetro $\overline{AB}$ de un semicírculo, mide **50 dm.**, se traza la cuerda $\overline{AP}$, cuya proyección sobre el diámetro $\overline{AB}$, mide a su vez **18 dm.** Calcular el área del triángulo APB.

A) $800\ dm^2$ B) $900\ dm^2$ C) $1200\ dm^2$
D) $400\ dm^2$ E) $600\ dm^2$

RESOLUCIÓN :

* Por la relaciones métricas: ·

$$PH^2=(AH)(HB) \rightarrow PH^2=(18)(32) \rightarrow PH=24$$



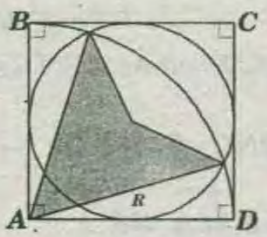
* Se pide : $S_{\Delta APB}=\frac{AB(PH)}{2}=\frac{50\times24}{2}=600$

RPTA : "E"

PROBLEMA 31 :

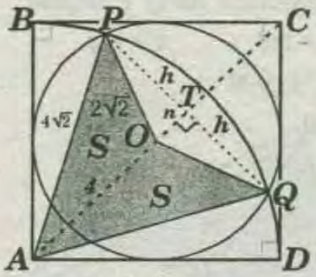
Hallar el área de la región sombreada, si el radio R mide $4\sqrt{2}m$.

A) $3\sqrt{5}m^2$
B) $3\sqrt{2}$
C) $4\sqrt{7}$
D) $3\sqrt{11}$
E) $2\sqrt{7}$



RESOLUCIÓN :

* En el ΔAPO, por el teorema de Euclides :



$$(4\sqrt{2})^2=(2\sqrt{2})^2+2(n)(4)\rightarrow n=1$$

* Ahora por el teorema del Pitágoras:

$$h^2+n^2=(2\sqrt{2})^2\rightarrow h^2+1^2=8\rightarrow h=\sqrt{7}$$

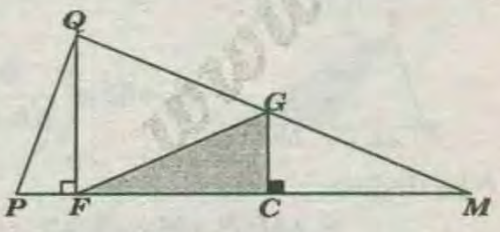
* Se pide: $S_{SOMB.}=2S=2\left(\dfrac{4\times h}{2}\right)=4\sqrt{7}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 32 :

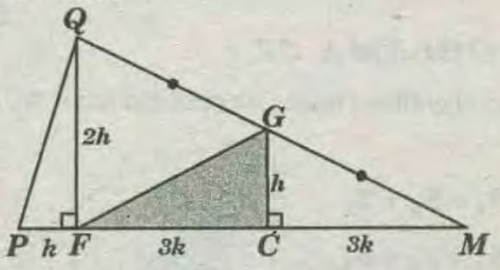
En la figura mostrada : $\dfrac{FP}{FM}=\dfrac{1}{6}$ $\overline{CG}\,//\,\overline{QF}$, G es el punto medio de $\overline{MQ}$ y el área de la región triángular PQM es $100m^2$. Hallar el área de la región sombreada (en m^2).

A) $1m^2$
B) 8
C) $\dfrac{150}{7}$
D) 31
E) 23



RESOLUCIÓN :

* Por dato:



$$S_{PQM}=100\rightarrow\frac{7K\times 2h}{2}=100\rightarrow kh=\frac{100}{7}$$

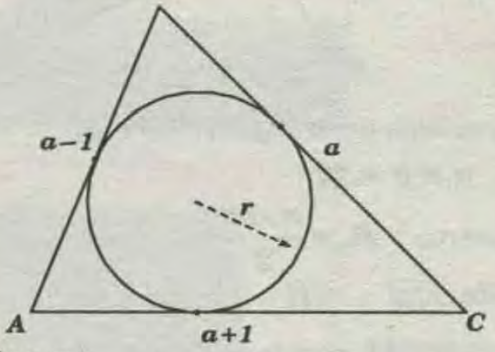
* Se pide: $S_{FGC}=\dfrac{3k\times h}{2}=3\left(\dfrac{100}{2}\right)=\dfrac{150}{7}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 33 :

El área de una región triangular es $6\sqrt{6}\,u^2$, las longitudes de los lados son números enteros consecutivos. Calcule la longitud del radio de la circunferencia inscrita al triángulo (en u: unidades)

RESOLUCIÓN :



* Nos piden r.
* Sea a un número entero y positivo.
* En el ΔABC:

$$BC=a\ ;\ AB=a-1\ ;\ AC=a+1$$

* Calculamos la longitud del semiperímetro del ΔABC

$$P=\frac{AB+BC+AC}{2}=\frac{3a}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (I)$$

* Sabemos por dato que el área de la región ABC es $6\sqrt{6}u^2$, y del teorema de Herón tenemos: ($[ABC]$ área de la región triangular ABC)

$$[ABC]=6\sqrt{6}=\sqrt{p(p-a)(p-a+1)(p-a-1)}$$

$$6\sqrt{6}=\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{a}{2}-1\right)}$$

* Luego , elevando al cuadrado tenemos :

$$36\times 6=\frac{3a^2}{4}\left(\frac{a^2}{4}-1\right)$$

* Resolviendo la ecuación : $a=6$
* Luego , reemplazando en (I): $p=9u$
* Como $[ABC]$ es $P\times r$ entonces : $6\sqrt{6}=9\times r$
* de donde : $r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}u$

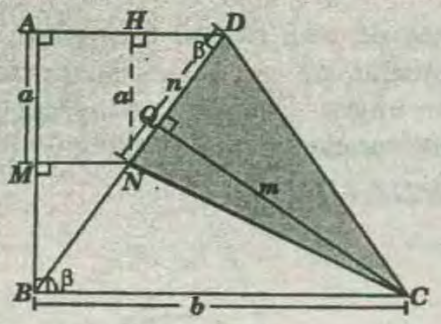
PROBLEMA 34 :

En un trapecio rectángulo $ABCD$ recto en A y B se ubica N en $\overline{BD}$ y se traza $\overline{NM}$ perpendicular a $\overline{AB}$ (M en $\overline{AB}$). Si $(AM)(BC)=20$, calcule el área de la región triangular CND.

A) 10 B) $10\sqrt{2}$ C) $10\sqrt{3}$ D) 20 E) $4\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

* Según el enunciado se tiene :



* Piden el área de la región $NCD = \mathbb{A}_x$

* Dato : $a \times b = 20$

* Se observa : $\mathbb{A}_x = \dfrac{n \times m}{2}$ .....(I)

* Se traza $\overline{NH} \perp \overline{AD}$

Luego $\square MNHA$: rectángulo

$\rightarrow AM = NH = a$

$\triangle NHD \sim \triangle CQB$

$$\frac{a}{n} = \frac{m}{b} \rightarrow ab = m \times n \Rightarrow m \times n = 20$$

* Reemplazando en (I) : $\mathbb{A}_x = \dfrac{20}{2} \rightarrow \mathbb{A}_x = 10$

RPTA : "A"

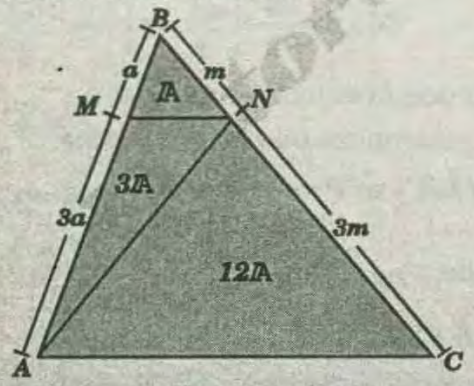
PROBLEMA 35 :

En un triángulo ABC se ubican M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$; $AM = 3(MB)$ y el área de la región triangular MBN es $\mathbb{A}$. calcule el área de la región cuadrangular $AMNC$.

A) $3\mathbb{A}$ B) $9\mathbb{A}$ C) $12\mathbb{A}$ D) $15\mathbb{A}$ E) $16\mathbb{A}$

RESOLUCIÓN :

* Según el enunciado tenemos :



* Piden : $\mathbb{A}_{\square AMNC} = A_x$

* Dato : $\mathbb{A}_{\triangle MBN} = \mathbb{A}$

Se traza $\overline{AN}$

$\rightarrow A_{AMN} = 3\mathbb{A}$ (por relación de áreas)

* Como : $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$

$\rightarrow NC = 3(BN)$

$\rightarrow \mathbb{A}_{\triangle ANC} = 3\mathbb{A}_{\triangle ABN} \rightarrow \mathbb{A}_{\triangle ANC} = 12\mathbb{A}$

* Luego :

$\mathbb{A}_{\square AMNC} = 3\mathbb{A} + 12\mathbb{A} \rightarrow A_x = 15\mathbb{A}$

RPTA "D"

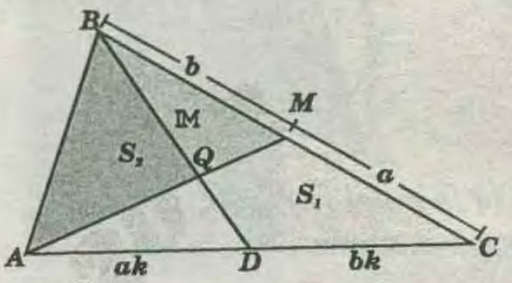
PROBLEMA 36 :

En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM y BD , $\overline{AM} \cap \overline{BD} = \{Q\}$.

Si $(MC)(CD) = (MB)(AD)$, calcule la razón de las áreas de las regiones ABQ y $DQMC$.

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4 D) 1 E) 2/3

RESOLUCIÓN :

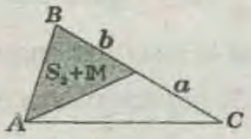


Nos piden : $\dfrac{S_1}{S_2}$

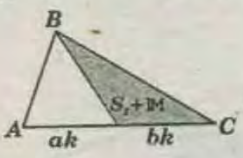
* Sea $BM = b$ y $MC = a$, del dato $\dfrac{CD}{MB} = \dfrac{AD}{MC}$

$\rightarrow AD = ak$ y $DC = bk$

* Luego :



$$S_2 + M = \left(\frac{b}{a+b}\right)\mathbb{A}_{\triangle ABC}$$



$$S_1 + M = \left(\frac{bk}{ak+bk}\right)\mathbb{A}_{\triangle ABC}$$

* Se deduce :

$$S_2 + M = S_1 + M \Rightarrow S_2 = S_1 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = 1$$

RPTA :"D"

PROBLEMA 37 :

Según el gráfico , halle una relación entre $\mathbb{S}_1$, $\mathbb{S}_2$ y $\mathbb{S}_3$

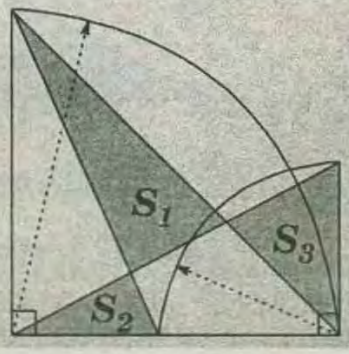
A) $\mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2 + \mathbb{S}_3$

B) $\mathbb{S}_3 = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$

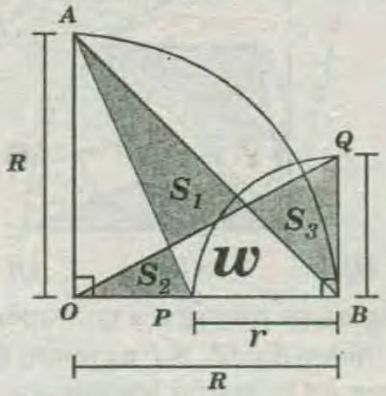
C) $\mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2 + \mathbb{S}_3$

D) $\mathbb{S}_3 = \mathbb{S}_1 - \mathbb{S}_2$

E) $\mathbb{S}_1 = \dfrac{\mathbb{S}_3 = \mathbb{S}_2}{2}$



RESOLUCIÓN :



$$S_{OQB} = S_2 + \varpi + S_3 = \frac{Rr}{2} \quad .....(I)$$

$$S_{PAB} = S_1 + \varpi = \frac{Rr}{2} \quad .....(II)$$

* (I) = (II): $S_1 + \cancel{\varpi} = S_2 + \cancel{\varpi} + S_3$

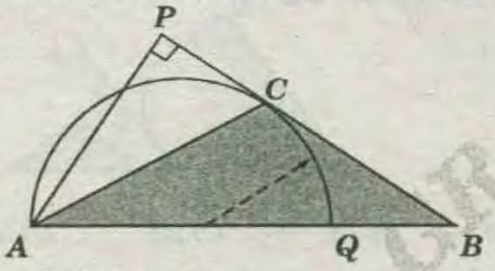
$$\Rightarrow S_1 = S_2 + S_3$$

RPTA : "C"

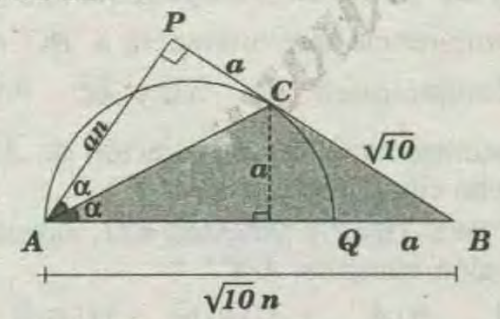
PROBLEMA 38 :

En el gráfico, ***C*** es punto tangencia. Si ***BQ = CP*** y ***BC*** $= \sqrt{10}$, calcule el área de la región sombreada.

A) 5
B) 7,5
C) 10
D) $5\sqrt{2}$
E) $5\sqrt{3}$



RESOLUCIÓN :



* Por teorema de la tangente :

$$10 = a \times \sqrt{10}n \rightarrow an = \sqrt{10} \quad .....(I)$$

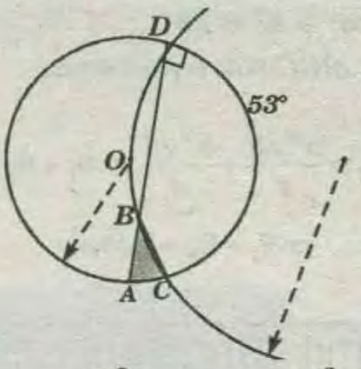
$$S_{ACB} = \frac{1}{2}(\sqrt{10}n)(a) = \frac{\sqrt{10}}{2} \times an \quad .....(II)$$

* (I) en (II): $S_{ACB} = \frac{\sqrt{10}}{2} \times \sqrt{10} = \frac{10}{2} = 5\mu^2$

RPTA : "A"

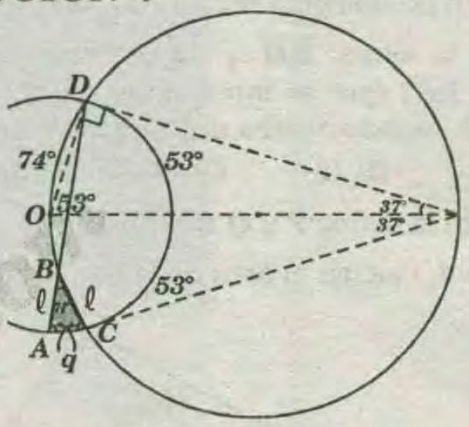
PROBLEMA 39 :

En el gráfico, $m\widehat{OD} = 74°$. y $AB = \ell$. Calcule el área de la región sombreada.



A) $\frac{2\ell^2}{25}$ ***B)*** $\frac{4\ell^2}{25}$ ***C)*** $\frac{8\ell^2}{25}$ ***D)*** $\frac{12\ell^2}{25}$

RESOLUCIÓN :



* De la figura : $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle E = 74°$

* Pero: $\theta = 53°$; $AB = BC = R$

* Luego:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\ell^2 Sen74° \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\ell^2}{2} \times 2Sen37° \times Cos37°$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{\ell^2}{2} \times 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{12\ell^2}{25}$$

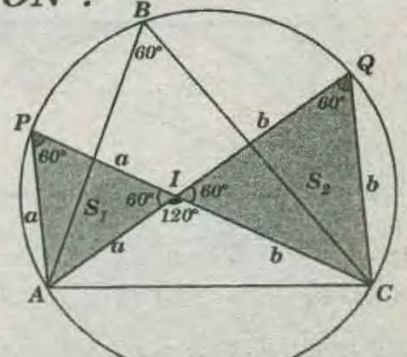
RPTA : "D"

PROBLEMA 40 :

En un triángulo ***ABC*** de incentro ***I*** está inscrito en una circunferencia. Si las prolongaciones de $\overline{CI}$ y $\overline{AI}$ intersecan a la circunferencia en ***P*** y ***Q*** . calcule la suma de áreas de las regiones ***AIP*** y ***CIQ*** . Considere que $m\sphericalangle ABC = 60°$ y $(AI)^2 + (IQ)^2 = 28$

A) $6\sqrt{3}$ ***B)*** $7\sqrt{3}$ ***C)*** $8\sqrt{3}$ ***D)*** 9 ***E)*** 12

RESOLUCIÓN :



* Por dato : $a^2 + b^2 = 28$

Pero ΔAPI y ΔIQC son equiláteros.

* Luego :

$$S_1 + S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\underbrace{(a^2 + b^2)}_{28}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = 7\sqrt{3}\mu^2$$

RPTA : "B"

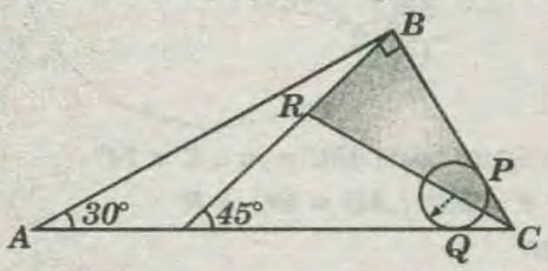
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se trazan la altura $\overline{BH}$ y la bisectriz interior $\overline{AP}$ (P en $\overline{BC}$) que se intersectan en Q. Si: $BQ=2$ y $AC=10$, calcule el área de la región triangular APC.

A) 10 B) 12 C) 16 D) 18 E) 20

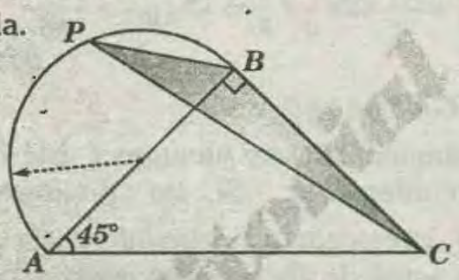
02 En la figura: P y Q son puntos de tangencia.

Si: $AC=4$, calcule el área de la región sombreada.



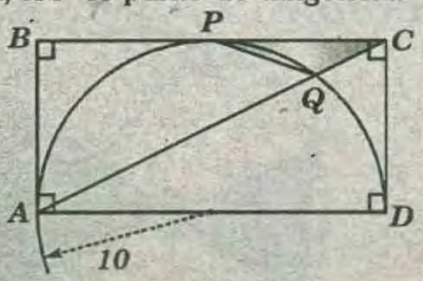
A) 1 B) 2 C) 3 D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

03 En la figura, si $PB=6$, calcule el área de la región sombreada.



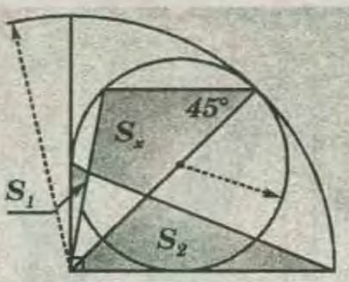
A) 18 B) 16 C) 20 D) 22 E) 24

04 En la figura, calcule el área de la región sombreada, si P es punto de tangencia.



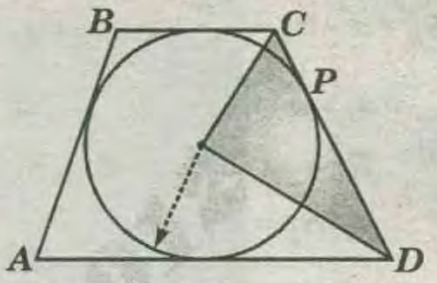
A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 13

05 De la figura, si: $S_1+S_2=6$, calcule S_x.



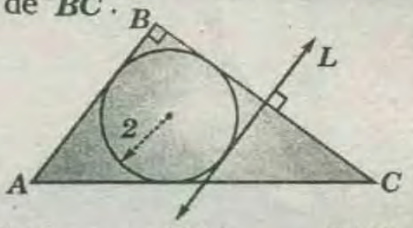
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

06 En la figura se muestra a un trapecio isósceles cuyas bases miden 8 y 18. Si P es punto de tangencia, calcule el área de la región sombreada.



A) 28 B) 39 C) 36 D) 24 E) 42

07 Calcule el área de la región sombreada, si $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{BC}$.



A) 20 B) 18 C) 22 D) 26 E) 24

08 Se tiene un triángulo ABC, se traza una circunferencia que intersecta a $\overline{BC}$ en T y a las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en P y Q, respectivamente, la prolongación de $\overline{AT}$ intersecta a dicha circunferencia en M.

Si: $CT=3$, $TB=2$ y $(AT)(AM)=81$, calcule el área de la región triangular ABC.

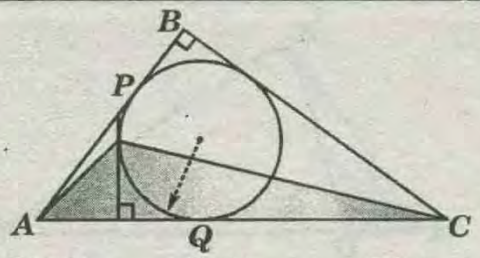
A) 3 B) 4 C) $3\sqrt{6}$ D) $6\sqrt{6}$ E) $4\sqrt{6}$

09 Se tiene un triángulo rectángulo ABC recto en B, en $\overline{AC}$ se ubica el centro de una semicircunferencia que es tangente a $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ en P y Q, respectivamente.

Si: $AQ=1$ y $PC=4$, calcule el área de la región triangular ABC.

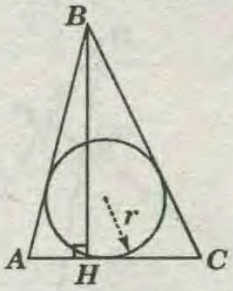
A) 6 B) 7 C) 9 D) 8 E) 10

10 En la figura: P y Q son puntos de tangencia. Si la $m\sphericalangle ACB=37°$ y $BC=8$, calcule el área de la región sombreada.



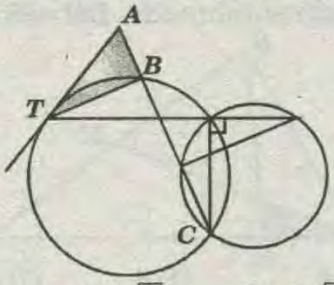
A) 12 B) 11 C) 10 D) 8 E) 6

11 En la figura, si: $AB+BC=3(AC)$ y $BH=16$, calcular "r".



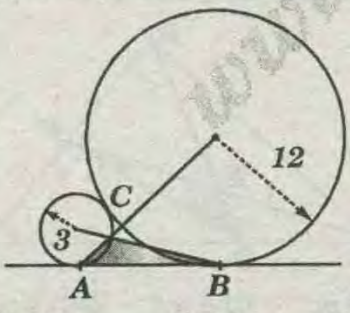
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

12 Si T es punto de tangencia, $BC=6$ y $AB=2$, calcule el área de la región sombreada.



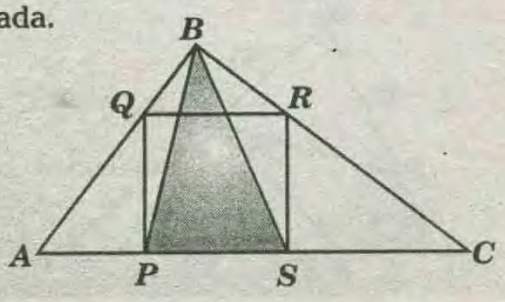
A) 3 B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

13 En la figura, si A, B y C son puntos de tangencia, calcule el área de la región sombreada.



A) 72/5 B) 25/2 C) 18 D) 36 E) 24

14 En la figura, si $PQRS$ es un cuadrado de lado 6 y $RC=2(BR)$, calcule el área de la región sombreada.



A) 18 B) 27 C) 25 D) 29 E) 24

15 Se tiene un triángulo ABC, tal que: $m\sphericalangle A=37°$, $m\sphericalangle C=8°$ y $AC=12$, se trazan las alturas $\overline{AH}$ y $\overline{CF}$. Calcule el área de la región AFM, siendo M punto medio de AC.

A) 20 B) 18 C) 16 D) 24 E) 22

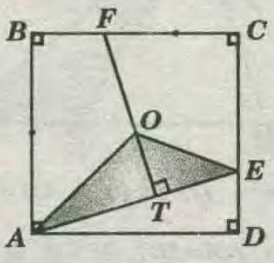
16 Si r y R son las longitudes del inradio y circunradio, respectivamente, de un triángulo rectángulo, entonces el área de dicha región triangular es:

A) $(2R-r)r$ B) $(2R+r)r$ C) $(R+r)r$
D) $(R-r)r$ E) $2Rr$

17 La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a $\overline{BC}$ en T. Si el radio de dicha circunferencia es 4, $BT=6$ y $TC=8$, calcule el área de la región triangular ABC.

A) 86 B) 90 C) 104 D) 84 E) 96

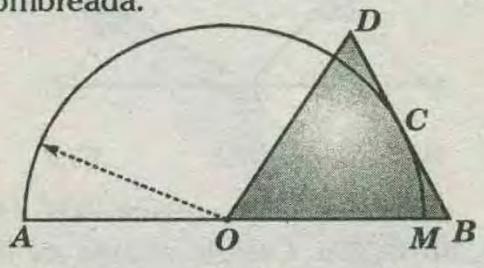
18 En la figura: $ABCD$ es un cuadrado de centro O. Si: $FO=a$ y $OT=b$, halle el área de la región sombreada.



A) $2ab$ B) $3ab$ D) ab C) a^2b E) ab^2

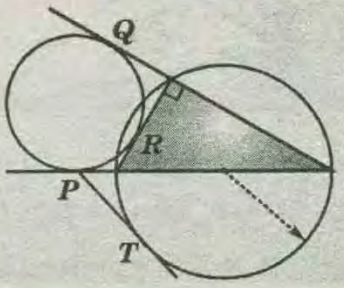
19 En la figura: C es punto de tangencia.

Si: $OD=OB$, $BM=1$ y $BC=3$, calcule el área de la región sombreada.



A) 8 B) 10 D) 14 C) 12 E) 16

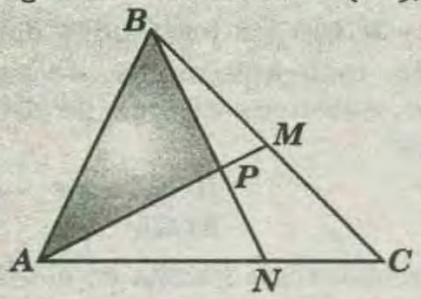
20 En la figura, si T, P, Q y R son puntos de tangencia y $PT=b$, halle el área de la región sombreada.



A) b^2 B) $2b^2$ D) $b^2/2$ C) $b^2/3$ E) $b^2\sqrt{2}$

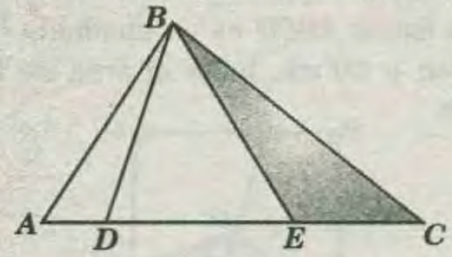
SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si el área de la región *APN* es $20\ m^2$, calcule el área de la región sombreada. *AN=2(NC), BM=MC.*



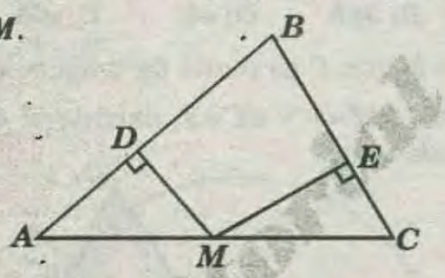
A) $20\ m^2$ B) $40\ m^2$ C) $60\ m^2$ D) $30\ m^2$ E) $50\ m^2$

02 Si el área de la región *ABD* es $8\ m^2$ y *EC=2(AD)*, calcule el área de la región sombreada.



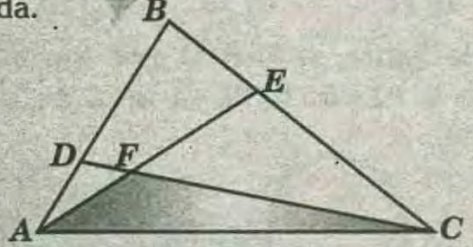
A) $8\ m^2$ B) $10\ m^2$ D) $14\ m^2$ C) $12\ m^2$ E) $16\ m^2$

03 En la figura: *AM=MC, BC=8, ME=6, AB=3(DM).* Calcule *DM*.



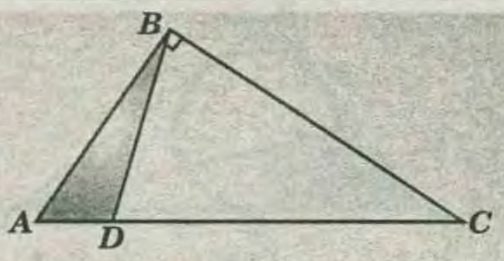
A) 1 B) 2 D) 3 C) 4 E) 5

04 El área de la región *ADF* es $10\ m^2$, *EC=2(BE), BD=2(AD)*. Calcule el área de la región sombreada.



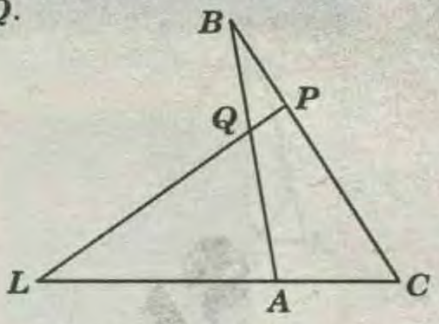
A) 40 B) 50 D) 30 C) 60 E) 80

05 En la figura: *AB=3, AD=1* y *BC=DC*. Calcule el área de la región sombreada.



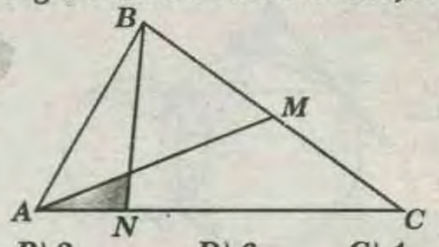
A) 1,2 B) 1,4 D) 1,6 C) 1,8 E) 2

06 En la figura: *PC=2(BP), AL=2(AC)* y *LQ=6*. Calcule *PQ*.



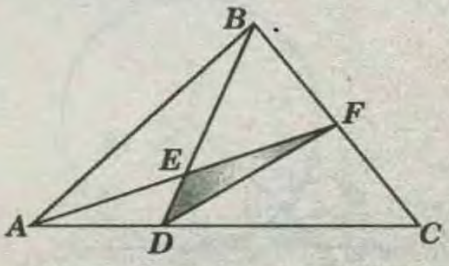
A) 2 B) 1 D) 3 C) 4 E) 5

07 Si el área de la región *ABC* es *60*, calcular el área de la región sombreada. *BM=MC, NC=3(AN).*



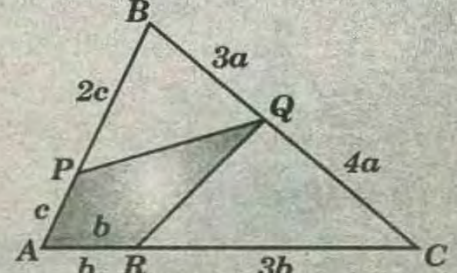
A) 8 B) 2 D) 6 C) 4 E) 3

08 En la figura, calcular el área de la región sombreada, si el área de la región triangular *ABC* es $72\ m^2$, además: *AE=EF* y *BF=FC*.



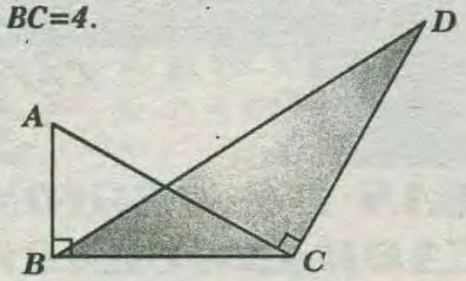
A) $4\ m^2$ B) $5\ m^2$ C) $6\ m^2$ DC) $9\ m^2$ E) $8\ m^2$

09 Si el área de la región sombreada es igual a *4*, calcular el área de la región triangular *ABC*.



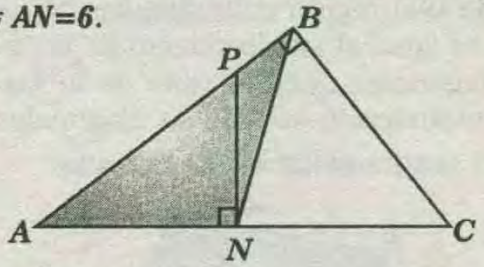
A) 8 B) 9 D) 12 C) 14 E) 16

10 Calcular el área de la región sombreada, si: $AC=CD$ y $BC=4$.



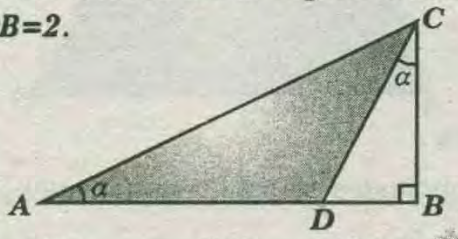
A) 6 B) 8 D) 10 C) 12 E) 4

11 Calcular el área de la región sombreada, si: $AP=BC$ y $AN=6$.



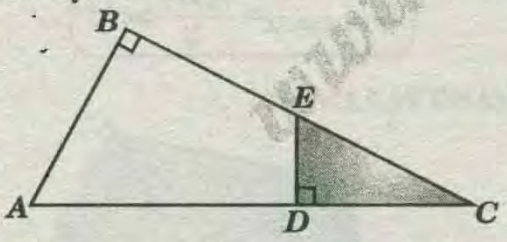
A) 20 B) 16 D) 14 C) 18 E) 12

12 Calcular el área de la región sombreada, si: $AD=6$ y $DB=2$.



A) 12 B) 8 D) 9 C) 10 E) 16

13 Calcular el área de la región sombreada, si: $AD=6$, $DC=4$ y $BE=EC$.

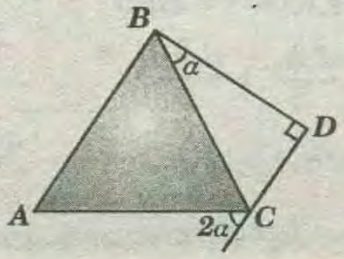


A) 3 B) 4 D) 6 C) 8 E) 5

14 Calcular el área de una región triangular cuyos lados miden 5; 7 y 8.

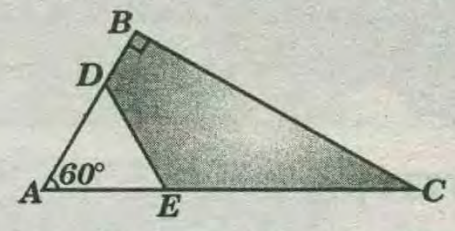
A) $6\sqrt{3}$ B) $10\sqrt{3}$ C) 8 D) 9 E) 12

15 Si: $BD=6$ y $AC=7$, calcular el área de la región sombreada.



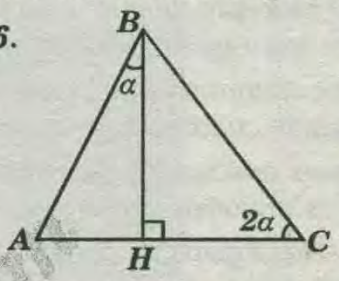
A) 42 B) 28 D) 35 C) 21 E) 14

16 Calcular el área de la región sombreada, si: $BD=2$; $AE=4$ y $EC=8$.



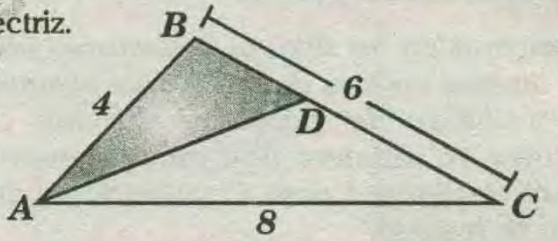
A) $14\sqrt{3}$ B) $10\sqrt{3}$ C) $12\sqrt{3}$ D) $9\sqrt{3}$ E) $8\sqrt{3}$

17 Calcular el área de la región ABC, si: $AH=4$ y $HC=6$.



A) 20 B) 40 C) 30 D) 50 E) 60

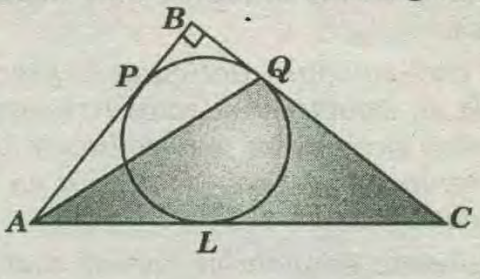
18 Calcule el área de la región sombreada, si $\overline{AD}$ es bisectriz.



A) $\sqrt{15}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{7}$ D) 4 E) 3

19 Si: $AB=QC$; P, Q y L son puntos de tangencia, el radio mide 2. Calcule el área de la región AQC.

A) 14
B) 16
D) 12
C) 18
E) 10



CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)A	2)A	3)A	4)B	5)C	6)B	7)E	8)D	9)C	10)C
11)A	12)E	13)A	14)B	15)B	16)B	17)D	18)C	19)D	20)A

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)C	2)E	3)D	4)D	5)A	6)B	7)E	8)C	9)C	10)B
11)D	12)A	13)B	14)B	15)D	16)A	17)B	18)A	19)D	

LIBROS GRATIS.com

AREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

CAPITULO 31

ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

OBJETIVOS :

Al finalizar la unidad el alumno será capaz de :

* *Comprender qué son regiones cuadrangulares.*
* *Diferenciar el concepto de una región cuadrangular con el área de una región cuadrangular.*
* *Reconocer los teoremas que permiten calcular el área de una región cuadrangular en los problemas.*
* *Conocer formas adecuadas de establecer la razón de áreas en dos regiones cuadrangulares.*
* *Identificar ciertas figuras de nuestra vida cotidiana y saber relacionarlas con las regiones cuadrangulares.*

INTRODUCCIÓN :

La comparación ha sido un mecanismo utilizado por el hombre para su desarrollo, por ejemplo para un incremento de' población de una ciudad específica se requiere una mayor cantidad de terrenos destinados para la vivienda ¿cuánto de terreno se requirió?

En la actualidad, este problema es una preocupación permanente ya que son escasos los terrenos que se pueden destinar para vivienda y en la mayoría de los casos se sacrifican terrenos agrícolas.

En las civilizaciones antiguas la preocupación consistía en establecer cuantos terrenos agrícolas se deberían incrementar para satisfacer la demanda de alimentación de una población en constante crecimiento.

Antiguamente emplearon formas rudimentarias para hacer mediciones, en principio para medir terrenos de forma cuadrangular y se vieron en la necesidad de estudiar este tipo de figura, con resultados sin mucha precisión.

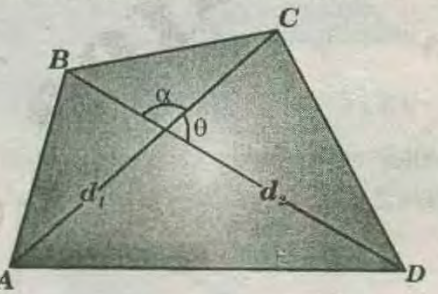
En la actualidad, podemos ver algunas de las figuras de forma cuadrangular, por lo cual al estudiarlas en cuanto al calculo de su área (puertas, mesas, edificios y paredes, etc.) nos damos cuenta que es importante conocer para nuestro entorno.

Por ejemplo al colocar una puerta en nuestra habitación necesitamos las medidas del largo y ancho de su respectivo marco.

FÓRMULA GENERAL :

El área de una región cuadrangular convexa o no convexa es igual al semiproducto de las longitudes de las diagonales , por el seno de la medida del ángulo determinado por dichas diagonales.

I) Región cuadrangular ***ABCD*** convexa.



En la figura :

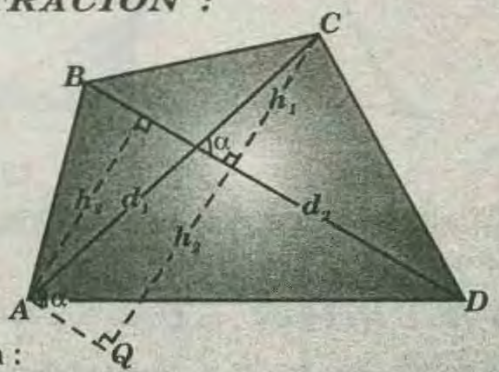
d_1 y d_2 : longitudes de las diagonales del $\square ABCD$.

α y θ : medida del ángulo determinado por las diagonal es del $\square$ ***ABCD.***

Entonces

$$\mathbb{S}_{\square ABCD}=\frac{d_1 d_2}{2}sen\alpha$$

DEMOSTRACIÓN :



* De la figura :

$$\mathbb{S}_{\square ABCD}=\mathbb{S}_{\triangle ABD}+\mathbb{S}_{\triangle BCD}$$

$$\Rightarrow \mathbb{S}_{\square ABCD}=\frac{d_2 h_2}{2}+\frac{d_2 h_1}{2}$$

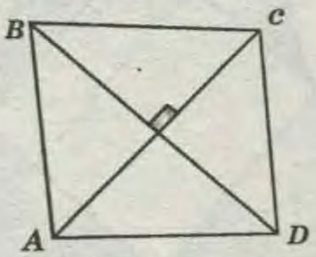
$$\Rightarrow \mathbb{S}_{\square ABCD}=(h_2+h_1)\frac{d_2}{2} \quad .....(I)$$

$\triangle AQC$: $h_1+h_2=d_1 sen\alpha$ .....(II)

* Reemplazando *(II)* en *(I)*

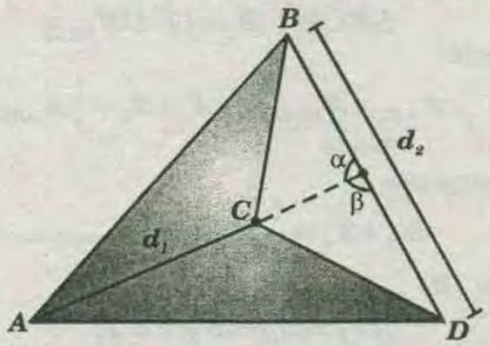
$$\Rightarrow \mathbb{S}_{\square ABCD}=\frac{d_1 d_2}{2}\,sen\alpha$$

CASO PARTICULAR :



$$\boxed{\mathbb{S}_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\times BD}$$

II) Región cuadrangular *ABCD* no convexa .



En la figura :

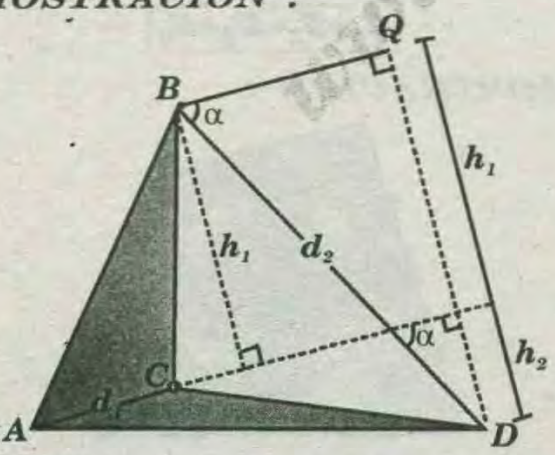
d_1 y d_2 : longitudes de las diagonal es del $\square ABCD$.

α ó β : medida del ángulo determinado por las diagonales del $\square$ *ABCD*.

* Entonces :

$$\boxed{\mathbb{S}_{\square ABCD}=\frac{d_1 d_2}{2}\,sen\alpha}$$

DEMOSTRACIÓN :



* De la figura :

$$\mathbb{S}_{\angle ABCD}=\mathbb{S}_{\blacktriangle ABC}+\mathbb{S}_{\blacktriangle ACD}$$

$$\Rightarrow \mathbb{S}_{\angle ABCD}=\frac{d_1 h_1}{2}+\frac{d_1 h_2}{2}$$

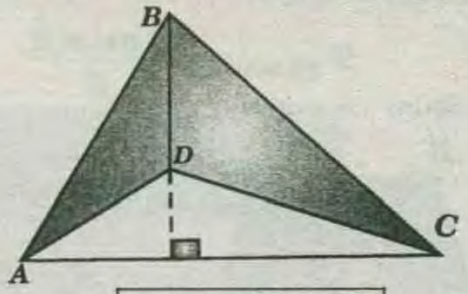
$$\Rightarrow \mathbb{S}_{\angle ABCD}=\frac{d_1}{2}(h_1+h_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$\triangle BQD$: $h_1+h_2=d_2 sen\alpha$ ..... *(II)*

* Reemplazando *(II)* en *(I)* :

$$\mathbb{S}_{\angle ABCD}=\frac{d_1 d_1}{2}\,sen\alpha$$

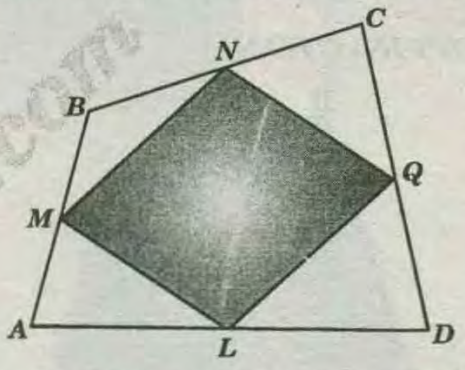
CASO PARTICULAR :



$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\times BD}$$

RELACIÓN DE ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

1)



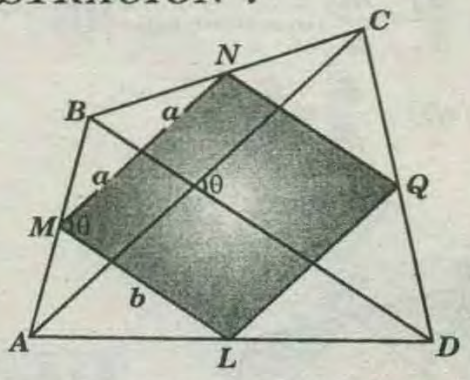
En la figura *M , N, Q* y *L* son puntos , medios de los lados *AB , BC, CD* y *AD* respectivamente .

Se cumple :

$$\boxed{\mathbb{S}_{\square MNQL}=\frac{\mathbb{S}_{\square ABCD}}{2}}$$

El cuadrilátero *MNQL* es un paralelogramo

DEMOSTRACIÓN :



Si *M, N,Q* y *L* son puntos medios de los lados del $\square ABCD$, entonces $\square MNLQ$ es un paralelogramo (teorema de varignón).

* Sabemos que :

$$\mathbb{S}_{\square MNQL}=ab\,sen\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$\mathbb{S}_{\square ABCD}=\frac{(AC)(BD)}{2}sen\theta$$

www.GRATIS2.com

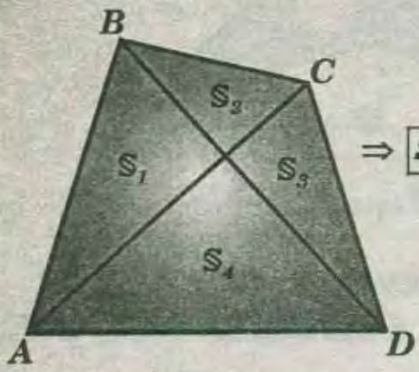
* Pero $AC=2a$ y $BD=2b$

$$\Rightarrow \mathbb{S}_{\square ABCD}=\frac{(2a)(2b)}{2}\,sen\,\theta \ldots\ldots (II)$$

* De *(I)* y *(II)* se obtiene :

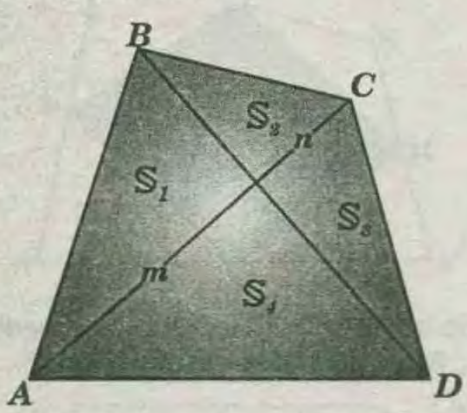
$$\mathbb{S}_{\square MNQL}=\frac{\mathbb{S}_{\square ABCD}}{2}$$

2) En la figura , se cumple :



$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_3=\mathbb{S}_2\mathbb{S}_4}$$

DEMOSTRACIÓN :



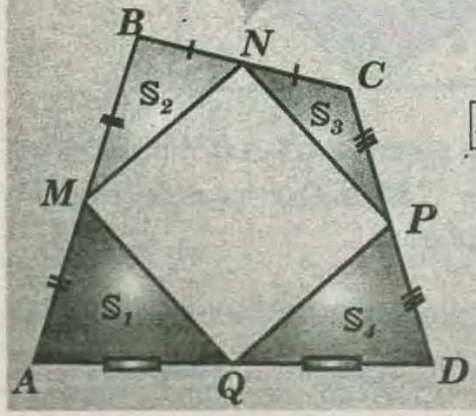
* Por relación de áreas :

$$\triangle ABC : \frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2}=\frac{m}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$\triangle ACD : \frac{\mathbb{S}_4}{\mathbb{S}_3}=\frac{m}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

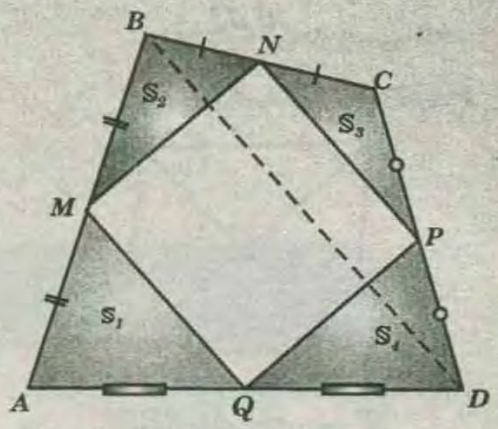
* De *(I)* y *(II)* : $\dfrac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2}=\dfrac{\mathbb{S}_4}{\mathbb{S}_3}$

3) $\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_3=\mathbb{S}_2\mathbb{S}_4}$



$$\boxed{\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_3=\mathbb{S}_2+\mathbb{S}_4}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Por relación de áreas :

$$\triangle ABD : \mathbb{S}_1=(1/4)\mathbb{S}_{ABD}$$

$$\triangle BCD : \mathbb{S}_2=(1/4)\mathbb{S}_{BCD}$$

* Sumando:

$$\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_3=\frac{1}{4}(\underbrace{\mathbb{S}_{ABD}+\mathbb{S}_{BCD}}_{\mathbb{S}_{ABCD}}) \Rightarrow \mathbb{S}_1+\mathbb{S}_3=\frac{1}{4}\mathbb{S}_{ABCD} \ldots\ldots (I)$$

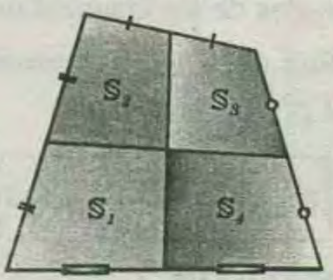
* Análogamente :

$$\mathbb{S}_2+\mathbb{S}_4=\frac{1}{4}\mathbb{S}_{ABCD} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* De *(I)* y *(II)* :

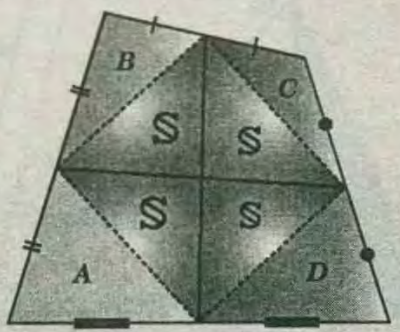
$$\boxed{\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_3=\mathbb{S}_2+\mathbb{S}_4}$$

4) en la figura , se cumple :



$$\boxed{\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_3=\mathbb{S}_2+\mathbb{S}_4}$$

DEMOSTRACIÓN :

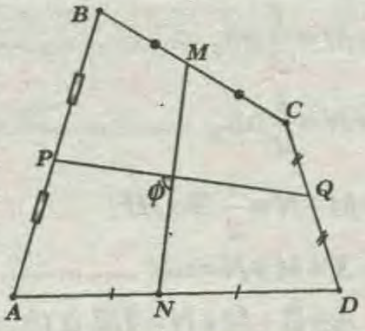


* Sabemos que : $A+C=B+D$

$$(\underbrace{A+\mathbb{S}}_{\mathbb{S}_1})+(\underbrace{C+\mathbb{S}}_{\mathbb{S}_3})=(\underbrace{B+\mathbb{S}}_{\mathbb{S}_2})+(\underbrace{D+\mathbb{S}}_{\mathbb{S}_4})$$

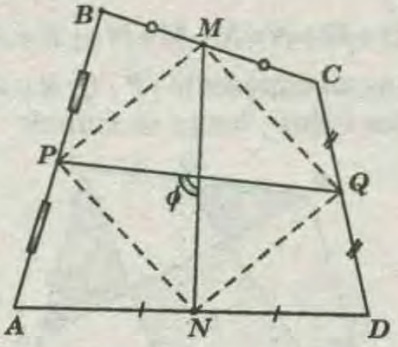
$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_3=\mathbb{S}_2+\mathbb{S}_4}$$

5) si *M, N, P* y *Q* son puntos medios de los lados del trapezoide mostrado luego se cumple :



$$\Rightarrow \boxed{S_{ABCD}=MN\times PQ\ sen\phi}$$

DEMOSTRACIÓN :



$S_{ABCD}=2\,S_{MPNQ}$ .....(I)

* Sabemos por propiedad que :

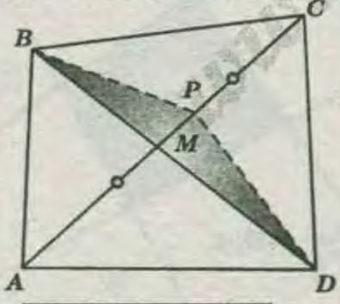
$$S_{MPNQ}=MN\times PQ\ \text{sen}\ \phi$$

* Remplazando en *(I)*:

$$S_{ABCD}=\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}MN\times PQ\ sen\phi$$

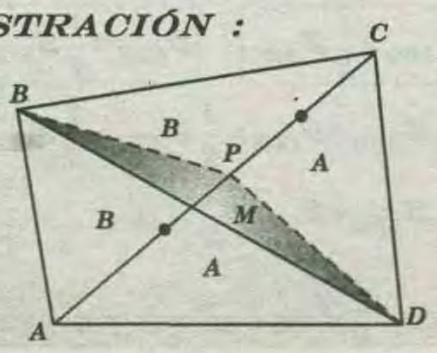
$$\Rightarrow \boxed{S_{ABCD}=MN\times PQ\ sen\phi}$$

6) Si *P* es punto medio de la diagonal luego se cumple :



$$\Rightarrow \boxed{M=\frac{S_{BCD}-S_{ABD}}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :



$S_{ABD}=S_{CPD}=A$; $S_{APD}=S_{BPC}=B$

* Es decir :

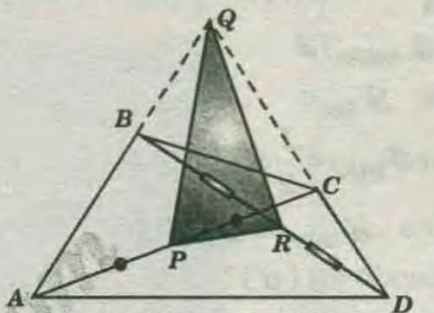
$$S_{ABPD}=S_{BCDP}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

* luego :

$$S_{ABPD}=S_{BCPD}\Rightarrow S_{ABD}+M=S_{BCD}-M$$

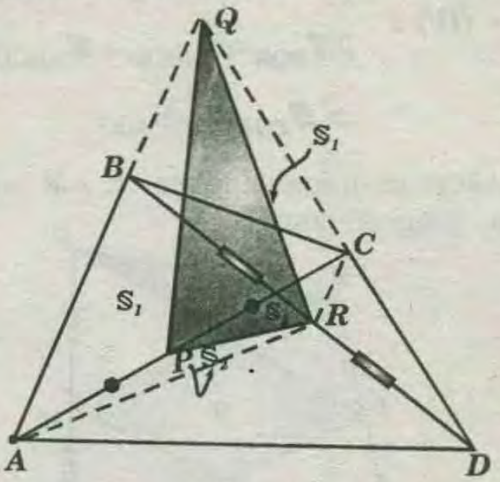
$$\Rightarrow \boxed{M=\frac{S_{BCD}-S_{ABD}}{2}}$$

7) Si *ABCD* es un trapezoide *P* y *R* son puntos medios de las diagonales , luego se cumple :



$$\Rightarrow \boxed{S_{PQR}=\frac{1}{4}S_{ABCD}}$$

DEMOSTRACIÓN :



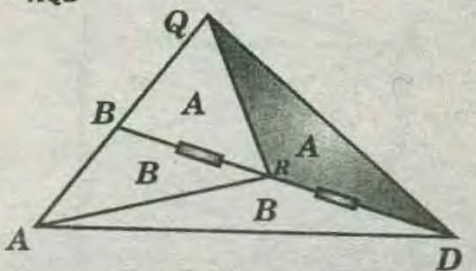
$\triangle AQC : S_{APQ}=S_{PQC}=S_1$

$\triangle ARC : S_{APR}=S_{PRC}=S_2$

* Luego :

$S_{AQR}=S_1+S_2+S_{PQR}$ .....(I)

$S_{AQR}=S_{AQD}/2$



* Pero : $S_{AQD}=S_{ABD}+S_{BQD}$

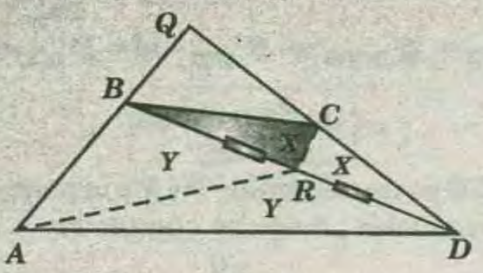
* Reemplazando:

WWW.GRATIS2.COM

$S_{AQR}=\frac{1}{2}(S_{ABCD}+S_{BQC})$ .....(II)

* De (I) y (II) :

$S_1+S_2+S_{PQR}=\frac{1}{2}S_{ABCD}+\frac{1}{2}S_{BQC}$ .....(III)



$S_{ABCR}=S_{ABCD}/2$

*Sumamos S_{BQC} :

$S_{ABCR}+S_{BQC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}+S_{BQC}$ .....(α)

* Del gráfico : $S_{AQCR}=2S_1+2S_2$

* Remplazando en (α) :

$2S_1+2S_2=S_{ABCD}/2+S_{BQC}$.....(IV)

* La expresion (II) y (IV) :

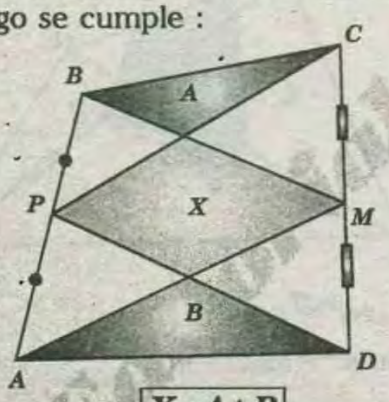
$2S_1+2S_2+2S_{PQR}=S_{ABCD}+S_{BQC}$ .....(V)

* (V) – (IV) :

$2S_{PQR}=S_{ABCD}-S_{ABCD}/2$

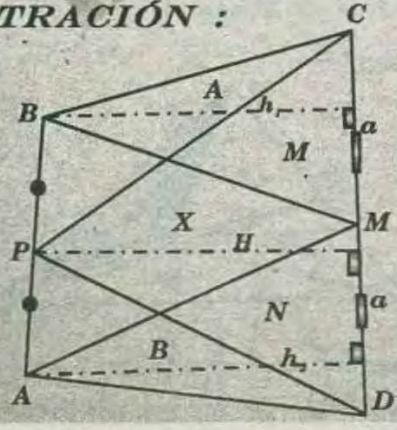
$\Rightarrow S_{PQR}=\frac{1}{4}S_{ABC}$

8) si *ABCD* es trapezoide de *P* y *M* son puntos medios, luego se cumple :



$\Rightarrow \boxed{X=A+B}$

DEMOSTRACIÓN :



$\triangle BCM$: $A+M=\frac{1}{2}ah_1$ .....(I)

$\triangle AMD$: $B+N=\frac{1}{2}ah_2$ .....(II)

$\triangle CPD$: $X+M+N=\frac{1}{2}(2a)H$

$\Rightarrow X+M+N=aH$ .....(III)

* (I) + (II) : $A+B+M+N=1/2\ a\ (h_1+h_2)$

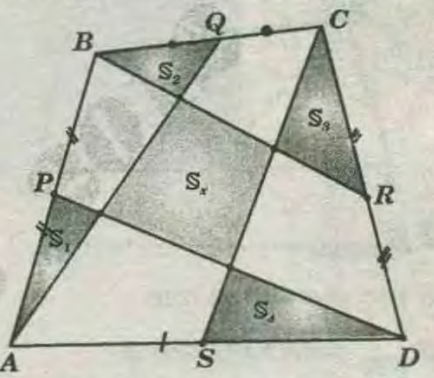
* Pero: $H=(h_1+h_2)/2$

$A+B+M+N=a\times H$ .....(IV)

* (III) – (IV):

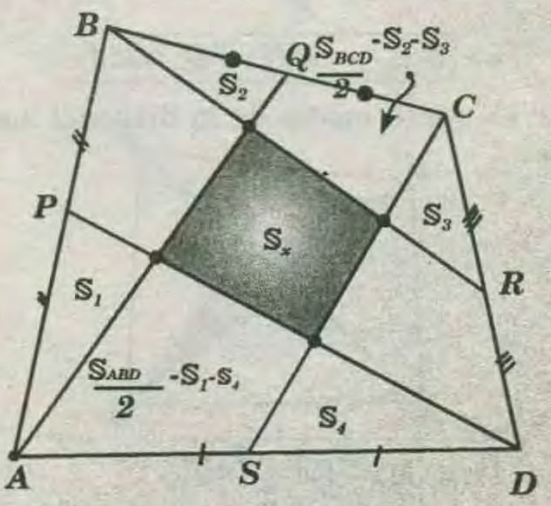
$A+B+M+N=X+M+N \Rightarrow X=A+B$

9) Si *ABCD* es un trapezoide ; *P ; Q; R* y *S* son puntos medios de los lados , luego se cumple :



$\Rightarrow \boxed{S_x=S_1+S_2+S_3+S_4}$

DEMOSTRACION :



$\boxed{S_{ABQ}=\frac{1}{2}S_{ABC}}$ $\boxed{S_{CDS}=\frac{1}{2}S_{ACD}}$

$\Rightarrow S_{ABQ}+S_{CDS}=\frac{1}{2}S_{ABC}+\frac{1}{2}S_{ACD}$

$\Rightarrow S_{ABQ}+S_{CDS}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$

* Luego :

$S_{AQCS}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$ .....(I)

* En el gráfico se observa :

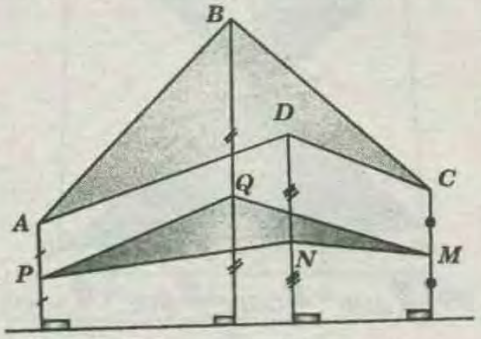
$\mathbb{S}_{AQCS} = \mathbb{S}_{ABCD}/2 - \mathbb{S}_2 - \mathbb{S}_3 + \mathbb{S}_{ABD}/2 - \mathbb{S}_1 - \mathbb{S}_4 + \mathbb{S}_x$

* Remplazando :

$\mathbb{S}_{AQCS} = \mathbb{S}_{ABCD}/2 - \mathbb{S}_2 - \mathbb{S}_3 + \mathbb{S}_{ABD}/2 - \mathbb{S}_1 - \mathbb{S}_4 + \mathbb{S}_x = \mathbb{S}_{ABCD}/2$

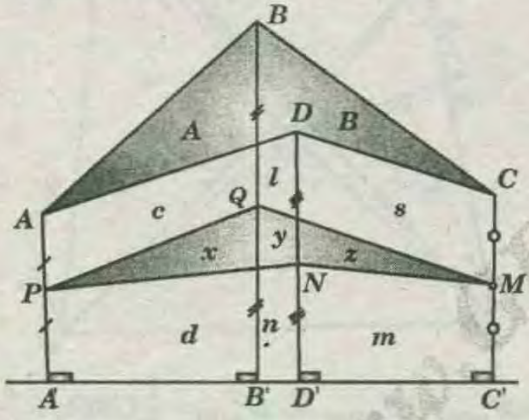
* Simplificando : $S_x = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 + \mathbb{S}_3 + \mathbb{S}_4$

10) ***ABCD*** es cuadrilátero cóncavo si ***M; N; P*** y ***Q*** son puntos medios , luego se cumple .

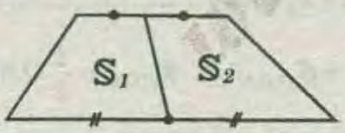


$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{PQMN} = \frac{1}{2}\mathbb{S}_{ABCD}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Por propiedad de los trapecios :



$$\boxed{\mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2}$$

* Del gráfico: $S_{PQMN} = x+y+z$; $S_{ABCD} = A+B$

$\square ABB'A : A+C = x+d$

$\square BCC'B' : B+l+s = y+z+m+n$

$\square ADD'A' : d+n = x+y+l+c$

$\square DCC'D' : m = z+s$

* Sumando :

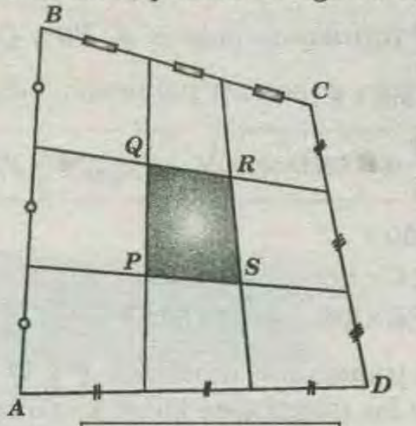
$A+C+B+d+l+s+m+n = 2x+2y+2z+m+n+d+s+l+c$

$\Rightarrow A+B = 2(x+y+z)$ .....(II)

* De *(I)* y *(II)* :

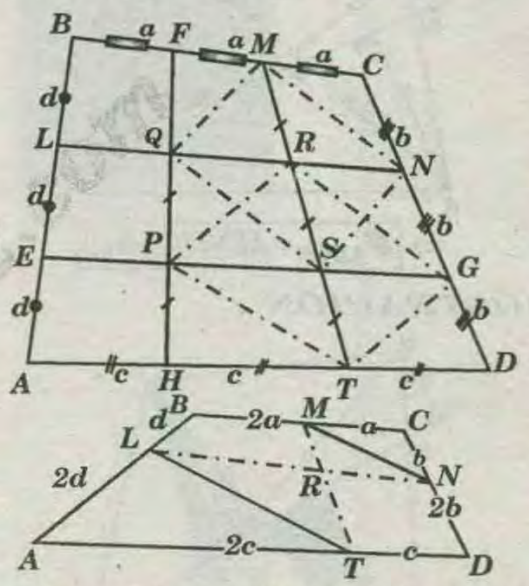
$$2\mathbb{S}_{PQMN} = \mathbb{S}_{ABCD} \Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{PQMN} = \frac{1}{2}\mathbb{S}_{ABCD}}$$

11) Si ***ABCD*** es un trapezoide luego se cumple :



$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{PQRS} = \frac{1}{9}\mathbb{S}_{ABCD}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Se va a demostrar que ***EG; LN; FH; MT*** se trisecan entre sí .

$\triangle BCD$: $MN // BD ; MN = BD/3$

$\triangle ABD$: $LT // BD ; LT = 2BD/3$

* Es decir : $LT = 2MN$; $MN // LT$

$\square LMNT$: trapecio

$\triangle LRT \sim \triangle MNR \Rightarrow \frac{RN}{RL} = \frac{m}{2m} \Rightarrow RL = 2RN$ .....(I)

* Análogamente : $QN = 2LQ$ .....(II)

* De *(I)* y *(II)*: $LQ = QR = RN$

* El procedimiento es análogo para los demás segmentos ; luego :

$\square PRGT$: romboide

$PR // GT$ pero $GT // AC$ $GT = AC/3 ; PR = AC/3$

$\square QMNS$: romboide

$QS // MN$ pero $MN = BD/3$; $QS = BD/3$

* Es decir:

$\square PQRS$: QS y PR son paralelas a BD y AC

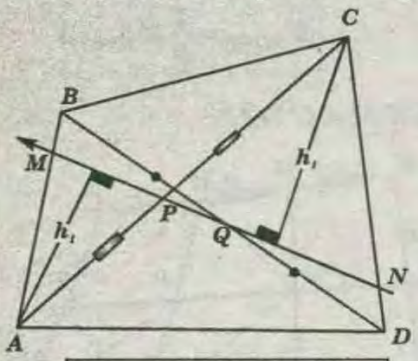
respectivamente y su valor representa la tercera parte si BD y AC forman un ángulo ϕ: PR y QS forman el mismo ángulo ϕ por ser paralelas , luego

$$\boxed{S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\times BD\,sen\phi} \qquad \boxed{S_{PQRS}=\frac{1}{2}PR\times QS\,sen\phi}$$

* Dividiendo :

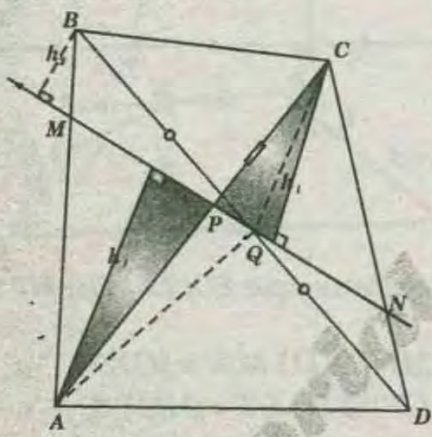
$$\frac{S_{ABCD}}{S_{PQRS}}=\frac{AC\times BD}{PR\times QS}=\frac{AC\times BD}{AC/3\times BD/3}\Rightarrow \boxed{S_{PQRS}=\frac{1}{9}S_{ABCD}}$$

12) En el trapezoide mostrado P y Q son puntos medios de las diagonales luego se cumple :



$$\Rightarrow \boxed{S_{ABCD}=MN(h_1+h_2)}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Los triángulos rectángulos sombreados son congruentes :

$$S_{BQC}=S_{CQD}\Rightarrow S_{QCD}=\frac{1}{2}QN\times h_1+\frac{1}{2}QN\times h_2$$

$$\Rightarrow S_{QCD}=\frac{1}{2}QN(h_1+h_2)$$

* además :

$$S_{BCD}=2S_{QCD}\Rightarrow S_{BCD}=QN(h_1+h_2).....(I)$$

$$\Rightarrow S_{ABQ}=S_{AQD}\Rightarrow S_{ABQ}=\frac{1}{2}MQ\times h_1+\frac{1}{2}MQ\times h_2$$

$$\Rightarrow S_{AQD}=\frac{1}{2}MQ(h_1+h_2)$$

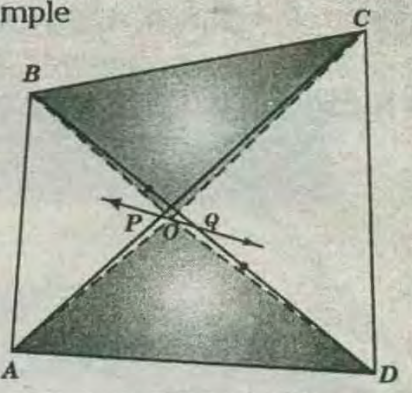
* además : $S_{ABD}=2S_{ABQ}$

$$S_{ABD}=MQ(h_1+h_2)\ .....(II)$$

* *(I)* + *(II)*: $S_{BCD}+S_{ABD}=(h_1+h_2)(QN+MQ)$

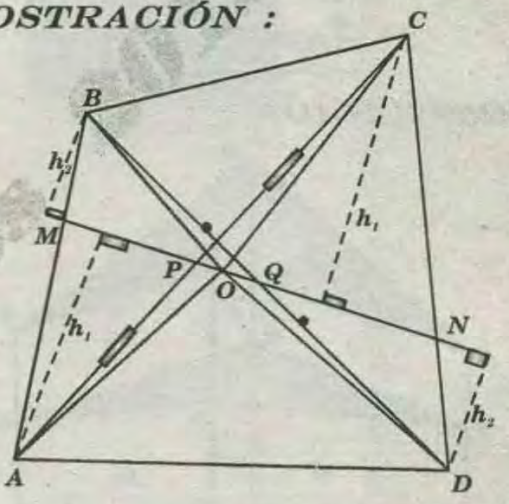
$$\Rightarrow S_{ABCD}=MN(h_1+h_2)$$

13) Si P y Q son puntos medios de las diagonales del trapezoide ademas O es punto cualquiera de PQ luego se cumple



$$\Rightarrow \boxed{S_{AOB}+S_{COD}=S_{BOC}+S_{AOD}}$$

DEMOSTRACIÓN :



$$S_{AOB}=S_{AOM}+S_{BOM}\Rightarrow S_{AOB}=\frac{1}{2}OMh_1+\frac{1}{2}OMh_2$$

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}OM(h_1+h_2).....(I)$$

$$S_{COD}=S_{OCN}+S_{ODN}\Rightarrow S_{COD}=\frac{1}{2}ONh_1+\frac{1}{2}ONh_2$$

$$\Rightarrow S_{COD}=\frac{1}{2}ON(h_1+h_2).....(II)$$

* *(I)* + *(II)* :

$$S_{AOB}+S_{COD}=\frac{1}{2}(h_1+h_2)(OM+ON)$$

$$\Rightarrow S_{AOB}+S_{COD}=\frac{1}{2}MN(h_1+h_2).....(III)$$

* Pero por propiedad :

$$S_{ABCD}=MN(h_1+h_2)\ .....(IV)$$

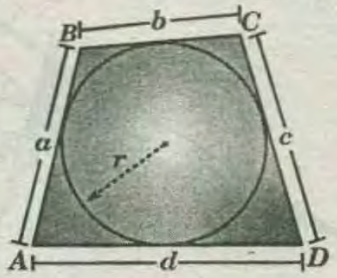
* De *(III)* y *(IV)* : $S_{AOB}+S_{COD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$

$$S_{BOC}+S_{AOD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

* Luego : $\Rightarrow \boxed{S_{AOB}+S_{COD}=S_{BOC}+S_{AOD}}$

CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO

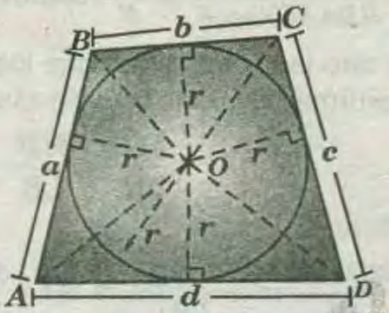
El área de la región limitada por un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia es igual al producto de la longitud de su semiperímetro *(p)* y su inradio *(r)*.



$$\mathbb{S}_{\square ABCD} = pr$$

Donde : $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$

DEMOSTRACIÓN :



* De la figura :

$$\mathbb{S}_{\square ABCD} = \mathbb{S}_{\triangle ABO} + \mathbb{S}_{\triangle BOC} + \mathbb{S}_{\triangle COD} + \mathbb{S}_{\triangle AOD}$$

$$\Rightarrow \mathbb{S}_{\square ABCD} = \frac{a\times r}{2} + \frac{b\times r}{2} + \frac{c\times r}{2} + \frac{d\times r}{2}$$

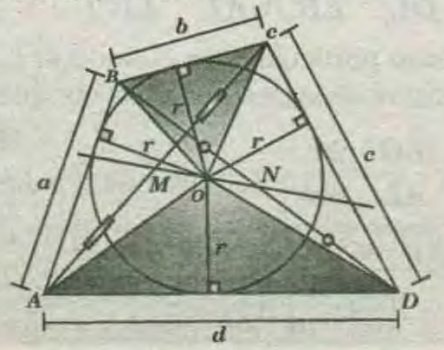
$$\Rightarrow \mathbb{S}_{\square ABCD} = \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)\times r$$

$$\Rightarrow \mathbb{S}_{\square ABCD} = p\times r$$

TEOREMA DE ISAAC NEWTON

En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, el segmento $\overline{MN}$ que une los puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ contiene al centro «*O*» de la circunferencia inscrita.

DEMOSTRACIÓN :



* De la figura :

$$\mathbb{S}_{AOB} + \mathbb{S}_{COD} = \frac{ar}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{r}{2}(a+c) \Rightarrow \mathbb{S}_{AOB} + \mathbb{S}_{COD} = \frac{1}{2}pr \ldots\ldots (I)$$

* También :

$$\mathbb{S}_{BOC} + \mathbb{S}_{AOD} = \frac{br}{2} + \frac{dr}{2} = \frac{r}{2}(b+d) \Rightarrow \mathbb{S}_{BOC} + \mathbb{S}_{AOD} = \frac{1}{2}pr \ldots\ldots (II)$$

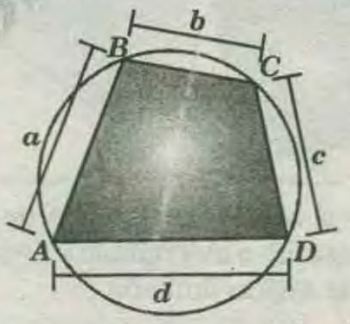
* De *(I)* y *(II)* :

$$\mathbb{S}_{AOB} + \mathbb{S}_{COD} = \mathbb{S}_{BOC} + \mathbb{S}_{AOD}$$

* Esto muestra que los puntos *M*, *O* y *N* son colineales

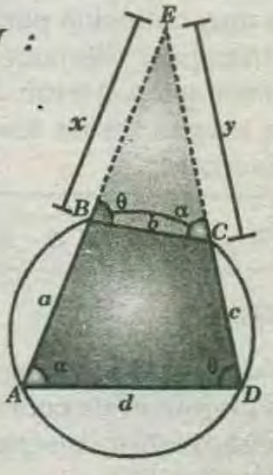
TEOREMA DE BRAMAGHUPTA

El área de una región cuadrangular inscrita o inscriptible en una circunferencia , es igual a la raíz cuadrada del producto de las diferencias del semiperímetro de dicha región cuadrangular con la longitud de cada uno de sus lados.



$$\mathbb{S}_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

DEMOSTARCIÓN :



* Por relación de áreas :

$$\frac{\mathbb{S}_{BEC}}{\mathbb{S}_{AED}} = \frac{b^2}{d^2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{S}_{ABCD} = \left(\frac{d^2-b^2}{b^2}\right)\mathbb{S}_{BEC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$\mathbb{S}_{BEC} = \sqrt{\left(\frac{x+y+b}{2}\right)\left(\frac{x+y-b}{2}\right)\left(\frac{x+b-y}{2}\right)\left(\frac{y+b-x}{2}\right)}$$

* Pero : $\triangle AED \sim \triangle CEB$

$$\Rightarrow \frac{x}{c+y} = \frac{y}{a+x} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{x+y}{x+y+a+c} = \frac{b}{d}$$

www.GRATIS2.com

* De donde : $x+y=\dfrac{b(a+c)}{d-b}$

* Análogamente : $x-y=\dfrac{b(c-a)}{b+d}$

* Reemplazando y simplificando:

$$\mathbb{S}_{BEC}=\sqrt{\left(\frac{b(p-b)}{d-b}\right)\left(\frac{b(p-d)}{d-b}\right)\left(\frac{b(p-a)}{b+d}\right)\left(\frac{b(p-c)}{b+d}\right)}$$

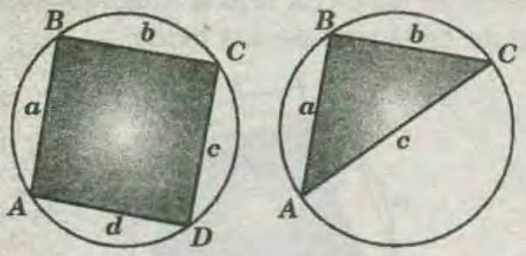
$$\Rightarrow \mathbb{S}_{BEC}=\left(\frac{b^2}{d^2-b^2}\right)\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\ldots.(II)$$

* Reemplazando *(II)* en *(I)*:

$$\mathbb{S}_{ABCD}=\left(\frac{d^2-b^2}{b^2}\right)\left(\frac{b^2}{d^2-b^2}\right)\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$$

* De lo general a lo particular :



Si a ; b ; c y d son las longitudes de los lados del cuadrilátero inscrito o inscriptible y de semiperímetro p, el área de la región limitada es :

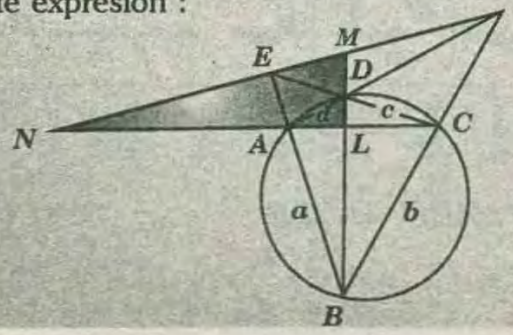
$$\mathbb{S}_{\square ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Si suponemos que $d=0$, nos encontramos con una fórmula muy conocida para el cálculo del área de la región triangular (llamada de Herón , en honor al matemático griego Herón de Alejandría). Así, a; b; c y p son longitudes de los lados y semiperímetro, respectivamente.

$$\boxed{\mathbb{S}_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

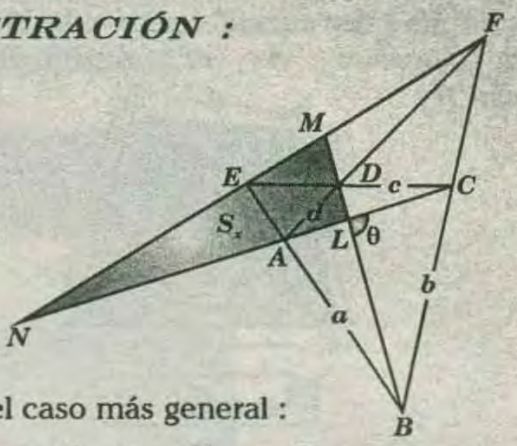
TEOREMA :

El área de la región triangular LMN , que tiene por vértices los puntos de concurso de las tres diagonales de un cuádrilatero inscriptible , está dada por la siguiente expresión :



$$\boxed{\mathbb{S}_{LMN}=\frac{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{\left(\frac{ab}{ad}-\frac{ad}{bc}\right)\left(\frac{ab}{cd}-\frac{cd}{ab}\right)}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Veamos el caso más general :

* Sea : $\mathbb{S}_{LMN}=\mathbb{S}_x$ y $\mathbb{S}_{ABCD}=\mathbb{S}$

* Por teoría :

$$\frac{\mathbb{S}_x}{\mathbb{S}}=\frac{ML\times NL\times sen\theta}{BD\times AC\times sen\theta}\Rightarrow \frac{\mathbb{S}_x}{\mathbb{S}}=ML\times NL\left(\frac{1}{BD}\right)\left(\frac{1}{AC}\right)\ldots\ldots(I)$$

* Por otro lado , sabemos que los puntos M; D; L y B son armónicos , entonces se cumple :

$$\frac{MD}{DL}=\frac{MB}{LB}$$

* Aplicando proporciones :

$$\frac{MD+DL}{DL}=\frac{ML+2LB}{LB}\Rightarrow ML=\frac{2LB\times DL}{LB-DL}\ldots\ldots(II)$$

* Análogamente : $NL=\dfrac{2LC\times AL}{LC-AL}$

* Reemplazando *(II)* en *(I)*:

$$\frac{\mathbb{S}_x}{\mathbb{S}}=\left(\frac{2LB\times DL}{LB-DL}\right)\left(\frac{2LC\times AL}{LC-AL}\right)\left(\frac{1}{LB+DL}\right)\left(\frac{1}{LC-AL}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbb{S}_x}{\mathbb{S}}=4\left(\frac{LB\times DL}{LB^2-DL^2}\right)\left(\frac{LC\times AL}{LC^2-AL^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathbb{S}_x}{\mathbb{S}}=\frac{4}{\left(\frac{LB^2}{LB\times DL}-\frac{DL^2}{LB\times DL}\right)\left(\frac{LC^2}{LC\times AL}-\frac{AL^2}{LC\times AL}\right)}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{S}_x=\frac{4\mathbb{S}}{\left(\frac{LB}{DL}-\frac{DL}{LB}\right)\left(\frac{LC}{AL}-\frac{AL}{LC}\right)}$$

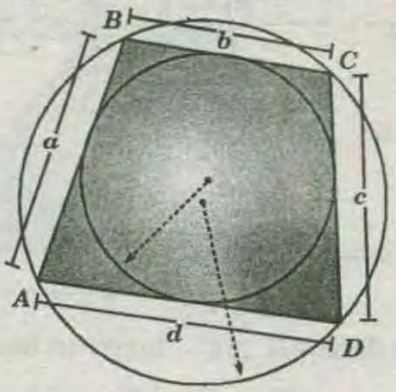
Ahora el caso partícular , es cuando el cuadrilátero $ABCD$ es inscriptible , es decir se cumple :

$$\frac{LB}{DL}=\frac{ab}{cd};\frac{LC}{AL}=\frac{bc}{ad}$$ Teorema de Packein

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_x=\frac{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{\left(\frac{ab}{cd}-\frac{cd}{ab}\right)\left(\frac{bc}{ad}-\frac{ad}{bc}\right)}}$$

CUADRILÁTERO INSCRITO Y CIRCUNSCRITO (BICÉNTRICO)

El área de la región limitada por un cuadrilátero bicéntrico es igual a la raíz cuadrada del producto de las longitudes de los cuatro lados



$$\mathbb{S}_{\square ABCD}=\sqrt{abcd}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Por la fórmula de Brahmagupta :

$$\mathbb{S}_{\square ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\ldots\ldots\ldots(I)$$

* En el $\square$ *ABCD*: Del teorema de Pithot :

$$a+c=b+d$$

* Reemplazando en :

$$p=\frac{a+b+c+d}{2}\Rightarrow p=a+c=b+d$$

* Luego :

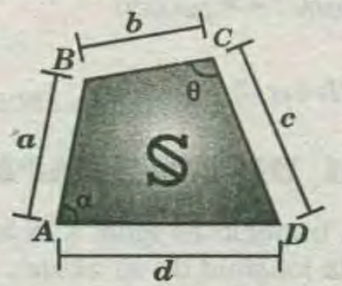
$$p-a=c\ ;\ p-b=d\ .\ p-c=a\ ;\ p-d=b$$

* Reemplazamos en *(I)* y ordenando :

$$\mathbb{S}_{\square ABCD}=\sqrt{abcd}$$

NOTA :

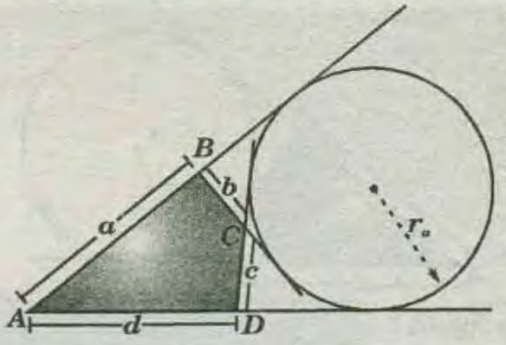
En la figura , si $2p=a+b+c+d$, se cumple :



$$\mathbb{S}^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$$

CUADRILÁTERO EXINSCRITO

El área de la región limitada por un cuadrilátero exinscrito o exinscriptible es igual al producto de la diferencia de las longitudes de dos lados opuestos y el radio de la circunferencia exinscrita.



Según la figura, $\square ABCD$: exinscrito a la circunferencia.

r_a: longitud del exradio , entonces :

$$\mathbb{S}_{\square ABCD}=(a-c)r_a$$

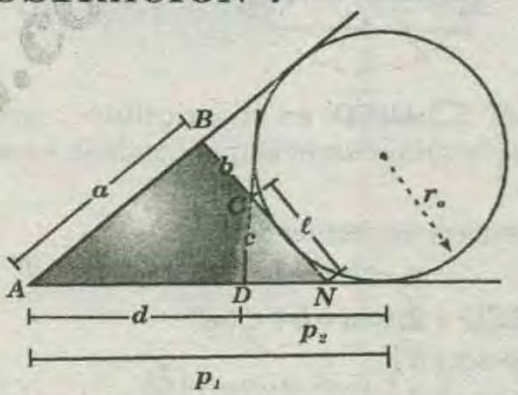
* En el $\square ABCD$, del teorema de Steiner.

$$a-c=d-b$$

* Por lo tanto:

$$\mathbb{S}_{\square ABCD}=(d-b)r_a$$

DEMOSTRACIÓN :



p_1 y p_2 : longitudes de los semiperímetros de las regiones *ABN* y *CDN*.

* De la figura , podemos obşervar que :

$$\mathbb{S}_{\square ABCD}+\mathbb{S}_{\triangle CDN}=\mathbb{S}_{\triangle ABN}$$

$$\mathbb{S}_{\square ABCD}+\mathbb{S}_{\triangle CDN}=(p_1-(b+\ell)r_a\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

* Se sabe que : $\mathbb{S}_{\triangle CDN}=(p_2-\ell)r_a\ \ldots\ldots\ldots(II)$

* Restando *(I)* y *(II)*: $\mathbb{S}_{\square ABCD}=(p_1-p_2-b)r_a$

* pero : $p_1-p_2=d$

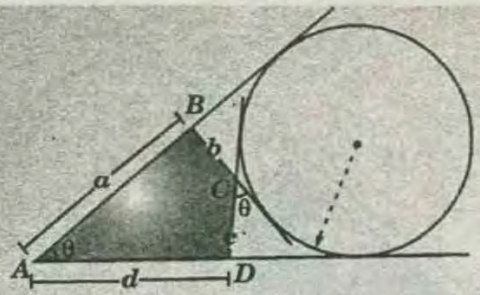
* Reemplazando se tiene :

$$\Rightarrow \mathbb{S}_{\square ABCD}=(d-b)r_a$$

CUADRILÁTERO INSCRITO Y EXINSCRITO

El área de la región limitada por un cuadrilátero inscrito o inscriptible y exinscrito es igual a la raíz cuadrada del producto de las longitudes de sus lados.

LIBROS GRATIS2.com

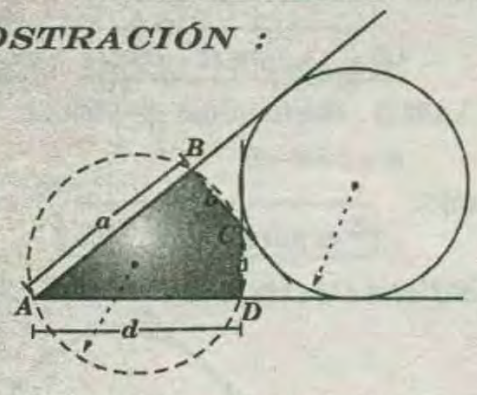


Según la figura :

$\square ABCD$: inscriptible y exinscrito , entonces

$$\mathbb{S}_{\square ABCD}=\sqrt{abcd}$$

DEMOSTRACIÓN :



Como el $\square ABCD$ es inscriptible , entonces trazamos la circunferencia que contiene a los cuatro vértices.

* Del teorema de Steiner :

$$a-c=d-b \quad \Rightarrow a+b=c+d$$

$$\square ABCD : 2p=a+b+c+d$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} p=a+b \\ p=c+d \end{matrix}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* de la fórmula de Bramhagupta :

$$\mathbb{S}_{\square ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \ldots\ldots\ldots (II)$$

* De *(I)*:

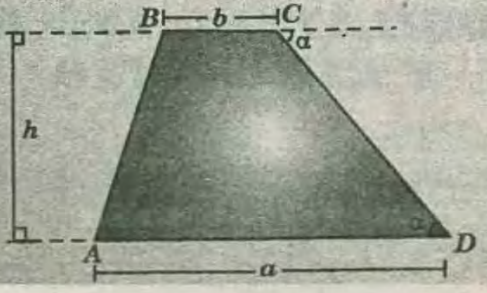
$$p-a=b \; ; \; p-b=a \qquad p-c=d \; ; \; p-d=c$$

* Reemplazando en *(II)*:

$$\mathbb{S}_{\square ABCD}=\sqrt{abcd}$$

REGIÓN TRAPECIAL

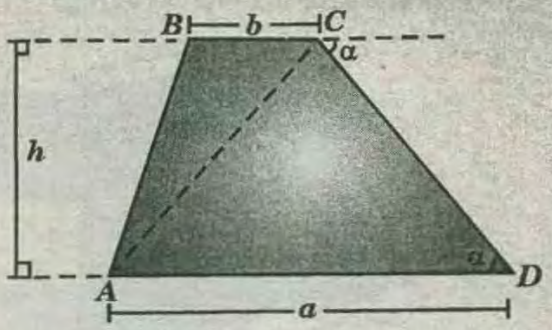
El área de la región trapecial es igual al producto de la semisuma de las longitudes de sus bases *(a* y *b)* y su altura *(h)*.



$$\mathbb{S}_{\square ABCD}=\left(\frac{a+b}{2}\right)h$$

DEMOSTRACIÓN :

* Primer método :



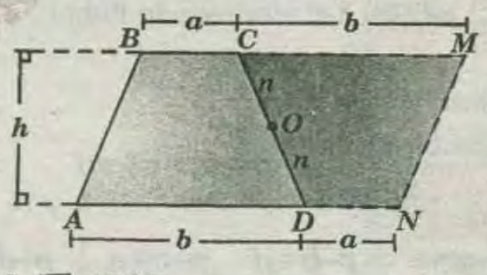
* Se traza la diagonal $\overline{AC}$, luego se tiene :

$$\mathbb{S}_{\square ABCD}=\mathbb{S}_{\triangle ABC}+\mathbb{S}_{\triangle ACD}$$

$$\Rightarrow \mathbb{S}_{\square ABCD}=\frac{b\times h}{2}+\frac{a\times h}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{S}_{\square ABCD}=\left(\frac{a+b}{2}\right)h$$

**** SEGUNDO MÉTODO :***



* Dado el $\square ABCD$

Se traza *MNDC* el simétrico de *ABCD* respecto de *O*. (*O*: punto medio de $\overline{CD}$) formándose el $\square ABMN$.

* Como $\square MNDC \cong \square ABCD$

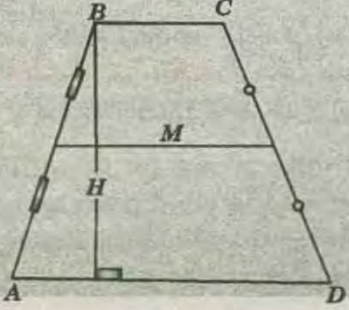
$$\Rightarrow \mathbb{S}_{\square ABMN}=2\mathbb{S}_{\square ABCD}$$

* Pero :

$$\mathbb{A}_{\square ABMN}=(b+a)h \quad \Rightarrow \mathbb{A}_{\square ABCD}=\left(\frac{a+b}{2}\right)h$$

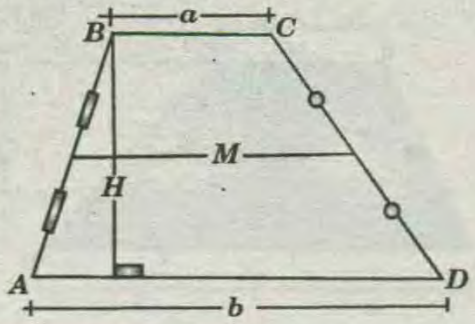
ÁREA DE UN TRAPECIO

El área de un trapecio es igual a la longitud de su mediana por la longitud de su altura .



$$\Rightarrow \mathbb{S}_{ABCD}=M\times H$$

DEMOSTRACIÓN :



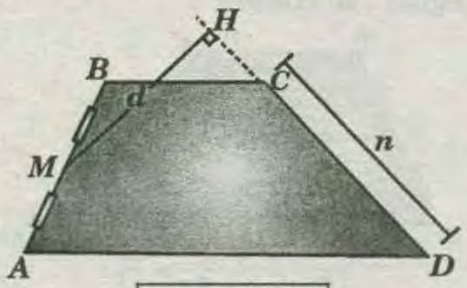
$\mathbb{S}_{ABCD}=[(a+b)/2]H$

* Pero : $M=(a+b)/2$

* Remplazando: $\mathbb{S}_{ABCD}=M\times H$

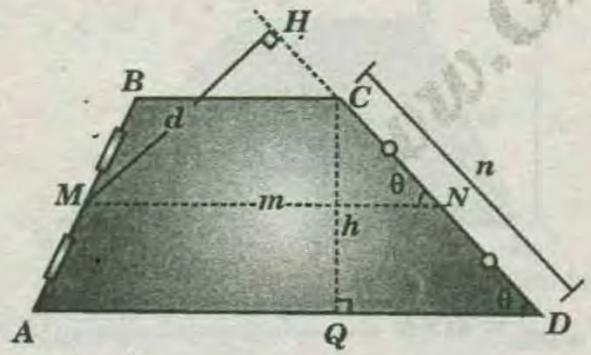
TEOREMA :

El área de una región trapecial , es igual al producto de la longitud de un lado lateral y la distancia del punto medio del otro lado lateral hacia él .



$\boxed{\mathbb{S}_{ABCD}=d\times n}$

DEMOSTRACIÓN :



$\triangle MHN \sim \triangle CQD$

$\Rightarrow \dfrac{d}{h}=\dfrac{m}{n} \Rightarrow m\times h=d\times n$ .....(I)

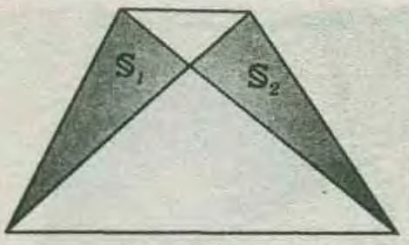
* Por la nota anterior :

$S_{ABCD}=m\times h$ .....(II)

* De *(I)* y *(II)* : $\mathbb{S}_{ABCD}=d\times n$

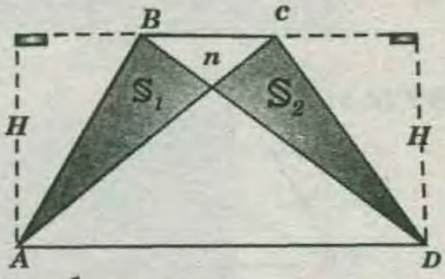
PROPIEDADES VALIDAS PARA LOS TRAPECIOS

I) Si la figura mostrada es un trapecio se cumple :



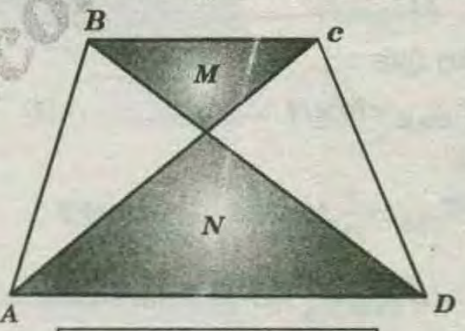
$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_1=\mathbb{S}_2}$

DEMOSTRACIÓN :



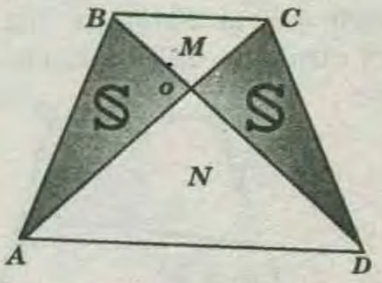
$\mathbb{S}_{BCD}=\mathbb{S}_{ABC}=\dfrac{1}{2}BC\times H \Rightarrow \mathbb{S}_2+n=\mathbb{S}_1+n \Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_1=\mathbb{S}_2}$

II) Si *ABCD* es un trapecio entonces se cumple :



$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{ABCD}=(\sqrt{M}+\sqrt{N})^2}$

DEMOSTRACIÓN :



* Sabemos que :

$\mathbb{S}_{AOB}=\mathbb{S}_{COD}=\mathbb{S}$

* Luego : $\mathbb{S}_{ABCD}=M+N+2\,\mathbb{S}$ .....(I)

* Por propiedad :

$M\times N=\mathbb{S}\times\mathbb{S}$

$\Rightarrow \mathbb{S}^2=MN \Rightarrow \mathbb{S}=\sqrt{MN}$

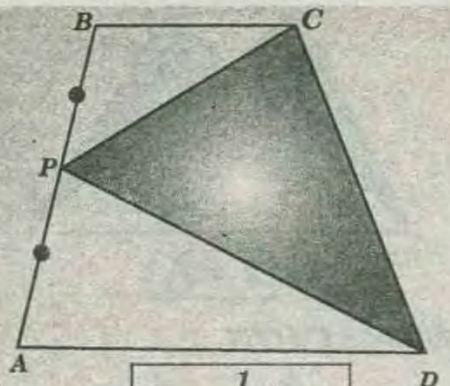
* Remplazando es *(I)*:

$\mathbb{S}_{ABCD}=M+N+2\sqrt{MN}$

$\Rightarrow \mathbb{S}_{ABCD}=(\sqrt{M}+\sqrt{N})^2$

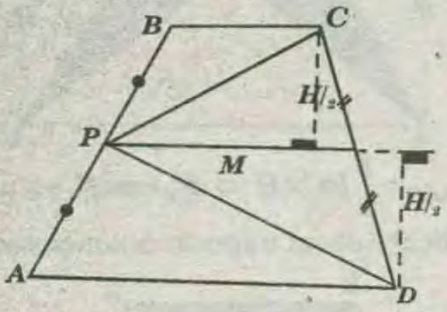
III) Si *ABCD* es un trapecio y *P* es punto medio de *AB* , luego se cumple :

WWW.GRATIS2.COM



$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{PCD}=\frac{1}{2}\mathbb{S}_{ABCD}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Sabemos que :

$$\mathbb{S}_{ABCD}=M\times H \quad \text{.....(I)}$$

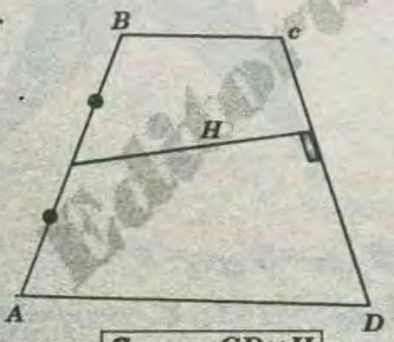
* Además :

$$\mathbb{S}_{PCD}=\frac{1}{2}M\times H/2+\frac{1}{2}M\times H/2$$

$$\Rightarrow \mathbb{S}_{PCD}=\frac{1}{2}M\times H \quad \text{.....(II)}$$

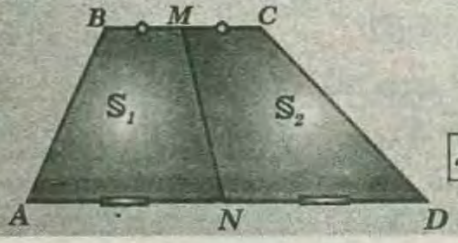
* Luego de *(I)* y *(II)* : $\mathbb{S}_{PCD}=\frac{1}{2}\mathbb{S}_{ABCD}$

IV) el área de un trapecio es igual a un lado oblicuo multiplicado por la distancia trazada del punto medio del otro lado oblicuo hacia el lado tomado como base .



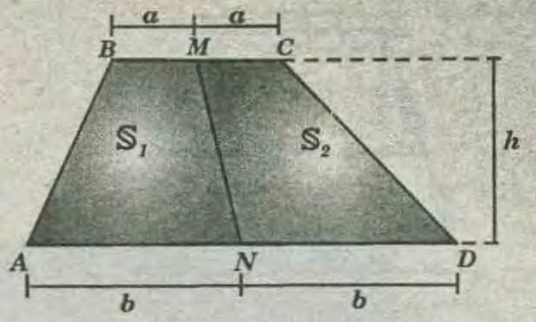
$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{ABCD}=CD\times H}$$

V) En la figura , se cumple :



$$\boxed{\mathbb{S}_1=\mathbb{S}_2}$$

DEMOSTRACIÓN :



* En el trapecio ***ABMN :***

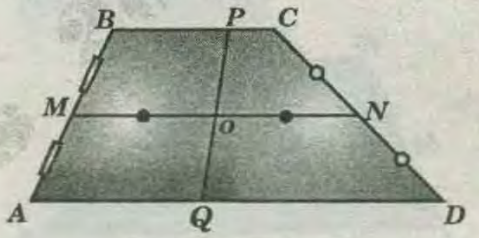
$$\mathbb{S}_1=\left(\frac{a+b}{2}\right)h \quad \text{.....(I)}$$

* En el trapecio ***NMCD:***

$$\mathbb{S}_2=\left(\frac{a+b}{2}\right)h \quad \text{.....(II)}$$

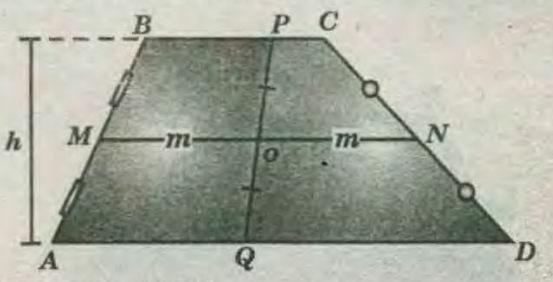
* De *(I)* y *(II)* : $\mathbb{S}_1=\mathbb{S}_2$

VI) En la figura , se cumple :



$$\boxed{\mathbb{S}_{ABPQ}=\mathbb{S}_{QPCD}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* En el trapecio ***ABPQ :***

$$\mathbb{S}_{ABPQ}=m\times h \quad \text{.....(I)}$$

* En el trapecio ***QPCD :***

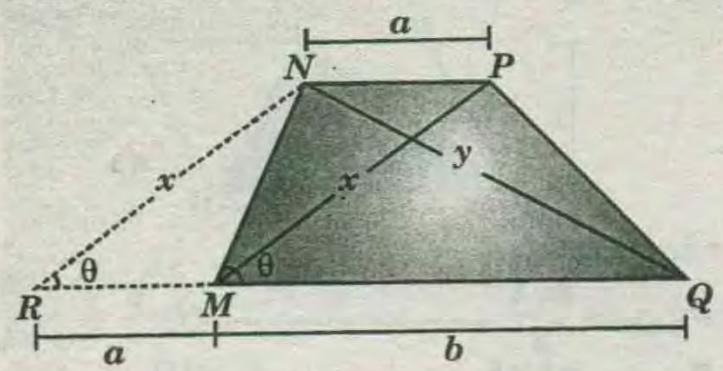
$$\mathbb{S}_{QPCD}=m\times h \quad \text{.....(II)}$$

* De *(I)* y *(II)*: $\boxed{\mathbb{S}_{ABPQ}=\mathbb{S}_{QPCD}}$

VII) En un trapecio, $\mathbb{S}$; $\mathbb{S}_1$ y d representa respectivamente la semisuma de las longitudes de las bases , la semisuma de las longitudes de las diagonales y la semidiferencia de las longitudes de las diagonales. Demuestre que el área $\mathbb{A}$ de la región trapezoidal está dada por la fórmula .

$$\boxed{\mathbb{A}=\sqrt{(\mathbb{S}+\mathbb{S}_1)(\mathbb{S}-\mathbb{S}_1)(d+\mathbb{S})(d-\mathbb{S})}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Si ***MNPQ*** es un trapecio , entonces :

$$\mathbb{S}_{MNPQ} = \mathbb{S}_{RNQ}$$

* Por dato : $\mathbb{S}=\frac{a+b}{2}$; $\mathbb{S}_1=\frac{x+y}{2} \wedge d=\frac{y-x}{2}$

* Del gráfico: $p=\frac{x+y}{2}+\frac{a+b}{2}$

$$\Rightarrow p=\mathbb{S}+\mathbb{S}_1 \quad \text{.....(I)}$$

* También: $\frac{x+y+a+b}{2}-x \wedge \frac{x+y+a+b}{2}-y$

$$\Rightarrow \frac{y-x}{2}+\frac{a+b}{2}=d+\mathbb{S} \wedge \frac{a+b}{2}-\frac{(y-x)}{2}=\mathbb{S}-d$$

* También: $\frac{x+y+a+b}{2}-(a+b)$

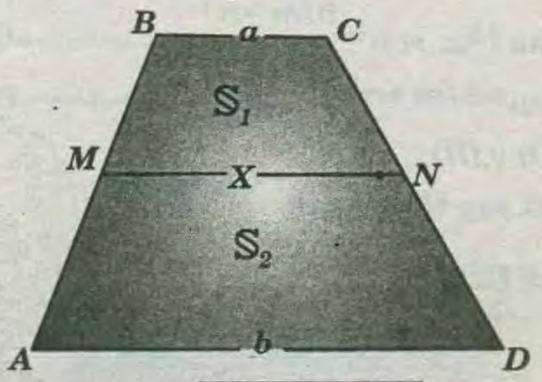
* Ahora: $\frac{x+y}{2}-\frac{(a+b)}{2}=\mathbb{S}_1-\mathbb{S}$

* Reemplazando en la fórmula de Herón :

$$A=\sqrt{(\mathbb{S}+\mathbb{S}_1)(-)(\mathbb{S}-\mathbb{S}_1)(-)(d-\mathbb{S})(d+\mathbb{S})}$$

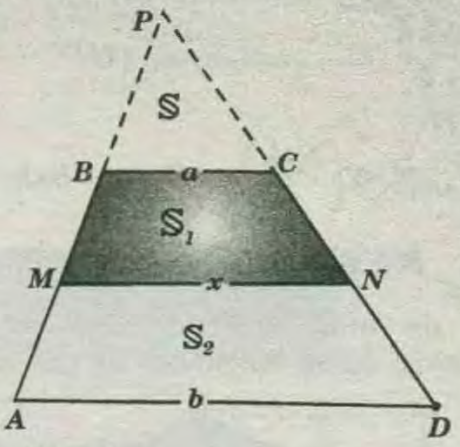
$$\Rightarrow \boxed{A=\sqrt{(\mathbb{S}+\mathbb{S}_1)(\mathbb{S}-\mathbb{S}_1)(d+\mathbb{S})(d-\mathbb{S})}}$$

VIII) Si ***BC//MN//AD*** se cumple :



$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2}=\frac{x^2-a^2}{b^2-x^2}}$$

DEMOSTRACIÓN :



$\triangle BPC \sim \triangle PMN$

$$\frac{\mathbb{S}+\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}}=\frac{x^2}{a^2} \quad \text{.....(I)}$$

$\triangle APD \sim \triangle PMN$

$$\frac{\mathbb{S}+\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}+\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2}=\frac{x^2}{b^2} \quad \text{.....(II)}$$

* de ***(I)*** por proporciones :

$$\frac{\mathbb{S}+\mathbb{S}_1-\mathbb{S}}{\mathbb{S}+\mathbb{S}_1}=\frac{x^2-a^2}{x^2} \Rightarrow \frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}+\mathbb{S}_1}=\frac{x^2-a^2}{x^2} \quad \text{.....(III)}$$

* de ***(II)*** aplicando proporciones :

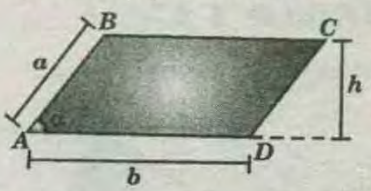
$$\frac{\mathbb{S}+\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2(\mathbb{S}+\mathbb{S}_1)}{\mathbb{S}+\mathbb{S}_1}=\frac{b^2-x^2}{x^2} \Rightarrow \frac{\mathbb{S}_2}{\mathbb{S}+\mathbb{S}_1}=\frac{b^2-x^2}{x^2} \quad \text{.....(IV)}$$

* ***(III)*** ÷ ***(IV)***: $\boxed{\frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2}=\frac{x^2-a^2}{b^2-x^2}}$

ÁREA DE UNA REGIÓN PARALELOGRAMICA

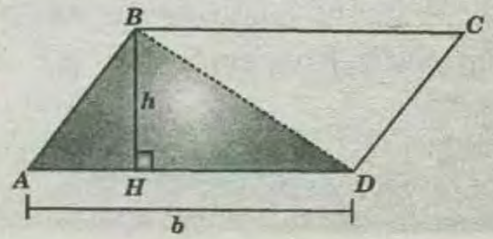
REGIÓN ROMBOIDAL

El área de una región romboidal es igual al producto de las longitudes de un lado y la altura relativa a dicho lado.



$$\boxed{\mathbb{S}_{ABCD}=b\times h} \Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{ABCD}=ab\,sen\alpha}$$

DEMOSTRACIÓN :



$\mathbb{S}_{ABCD}=2\mathbb{S}_{ABD}$ .....(I)

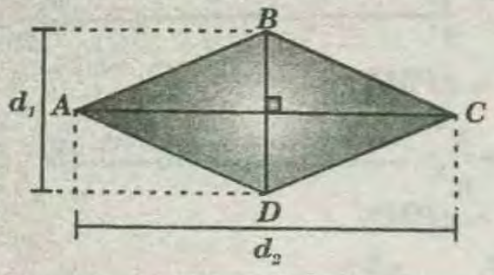
$\mathbb{S}_{ABD}=\dfrac{b\times h}{2}$ .....(II)

* (II) en (I) :

$$\mathbb{S}_{ABCD}=2\left(\frac{b\times h}{2}\right)\Rightarrow \mathbb{S}_{ABCD}=b\times h$$

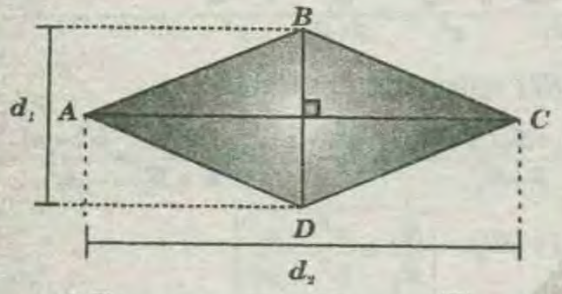
REGIÓN ROMBAL

El área de una región rombal es igual al semiproducto de las longitudes de sus diagonales.



$$\boxed{\mathbb{S}_{ABCD}=\frac{d_1\times d_2}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :



$\mathbb{S}_{ABCD}=2\mathbb{S}_{ABC}$ .....(I)

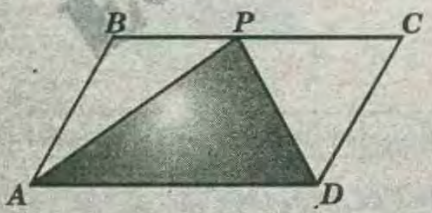
$\mathbb{S}_{ABC}=\dfrac{1}{2}(d_2)\left(\dfrac{d_1}{2}\right)$ .....(II)

* (II) en (I) :

$$\mathbb{S}_{ABCD}=2\left(\frac{1}{2}(d_2)\left(\frac{d_1}{2}\right)\right)\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{ABCD}=\frac{d_1\times d_2}{2}}$$

PROPIEDAD 1 :

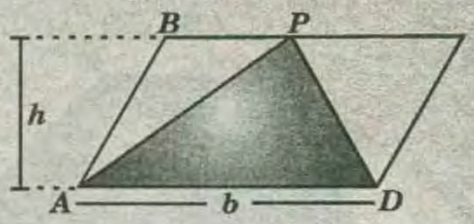
En una región paralelográmica :



Según la figura el cuadrilátero *ABCD* es un paralelogramo y *P* un punto de $\overline{BC}$ o de su prolongación.

Se cumple : $\boxed{\mathbb{S}_{\triangle APD}=\dfrac{\mathbb{S}_{\square ABCD}}{2}}$

DEMOSTRACIÓN :



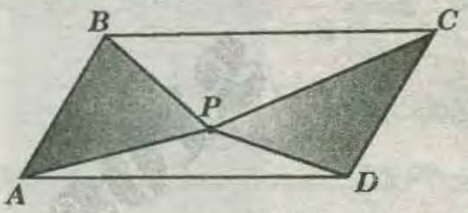
* Según la figura :

$\mathbb{S}_{\blacktriangle APD}=\dfrac{b\times h}{2}$ .....(I)

$\mathbb{S}_{\blacksquare ABCD}=b\times h$ .....(II)

* De (I) y (II) : $\mathbb{S}_{\triangle APD}=\dfrac{\mathbb{S}_{\triangle ABCD}}{2}$

PROPIEDAD 2 :

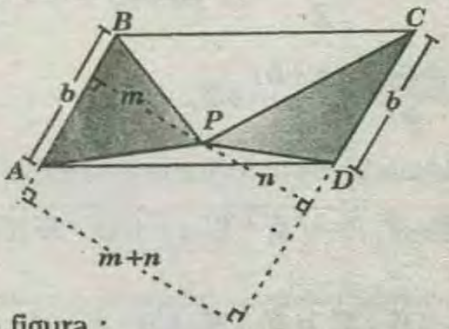


* Según la figura , el cuadrilátero *ABCD* es un paralelogramo y *P* es un punto interior.

* Se cumple :

$$\boxed{\mathbb{S}_{\triangle PAB}+\mathbb{S}_{\triangle PCD}=\frac{\mathbb{S}_{\square ABCD}}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Según la figura :

$\mathbb{S}_{\triangle ABC}+\mathbb{S}_{\triangle PCD}=\dfrac{b\times m}{2}+\dfrac{b\times n}{2}$

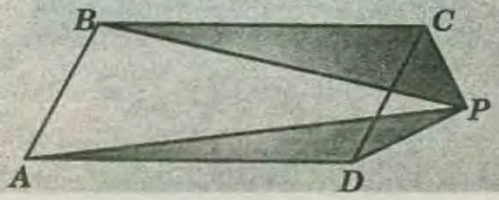
$\mathbb{S}_{\triangle PAB}+\mathbb{S}_{\triangle PCD}=\dfrac{b(m+n)}{2}$ .....(I)

$\mathbb{S}_{ABCD}=b(m+n)$ .....(II)

* De (I) y (II):

$\Rightarrow \mathbb{S}_{\triangle PAB}+\mathbb{S}_{\triangle PCD}=\dfrac{\mathbb{S}_{\square ABCD}}{2}$

PROPIEDAD 3 :



Según la figura , el cuadrilátero ***ABCD*** es un paralelogramo y ***P*** es un punto exterior.

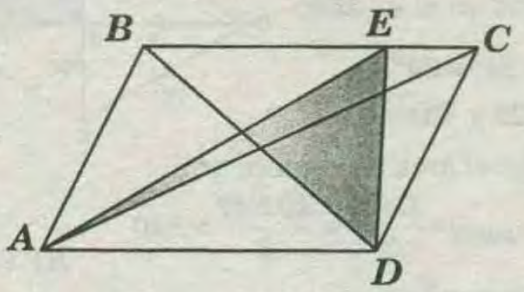
Se cumple :

$$\mathbb{S}_{\triangle PAD}+\mathbb{S}_{\triangle PCB}=\frac{\mathbb{S}_{\square ABCD}}{2}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

En la figura , ¿qué parte del área del paralelogramo ***ABCD*** es el área de la región sombreada?



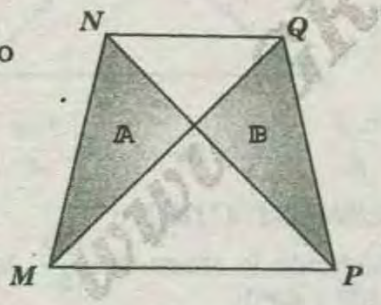
A) $\frac{3}{5}$ ***B)*** $\frac{2}{3}$ ***C)*** $\frac{2}{5}$ ***D)*** $\frac{1}{4}$ ***E)*** $\frac{1}{3}$

RESOLUCIÓN :

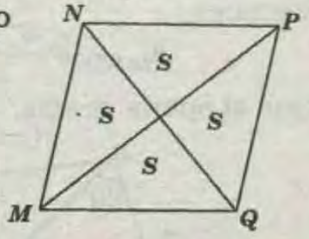
Piden : $\dfrac{\text{Área de la región sombreada}}{\text{Área } \square ABCD}$

Recordando que :

Si $\square MNQP$: Trapecio

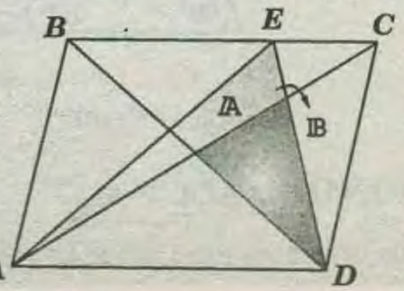


Si $\square MNPQ$: Paralelogramo

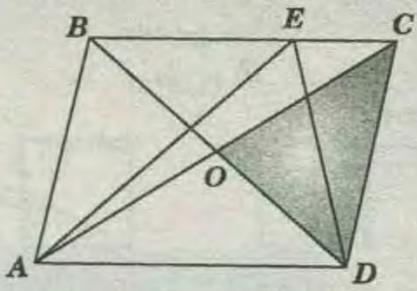


En la figura se observa $\square AECD$: Trapecio

$\Rightarrow$ Área $\mathbb{A}$ = Área $\mathbb{B}$



Realizando un traslado de áreas , tendremos :



Luego , la región sombreada inicial es equivalente a la región ***OCD***.

entonces $\dfrac{\text{Área región sombreada}}{\text{Área } \square ABCD}=\frac{1}{4}$

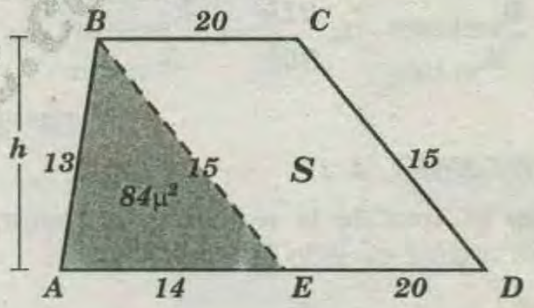
RPTA: "D"

PROBLEMA 2 :

Se tiene un trapecio cuyas bases miden ***20cm*** y ***34cm***. Si además sus lados laterales miden ***13cm*** y ***15cm***, entonces sus áreas es (en cm^2).

A)324 B)172 C)170 D)320 E)400

RESOLUCIÓN :



Se traza $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$

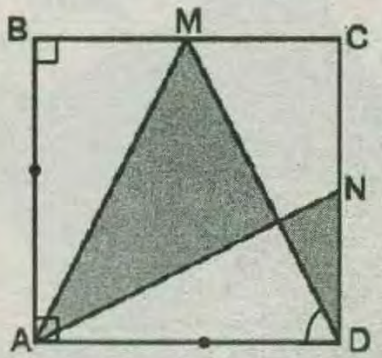
$$S_{ABE}=84 \Rightarrow \frac{(14)(h)}{2}=84 \rightarrow h=12 \Rightarrow S=240$$

* Luego : $S_{ABCD}=84+240=324m^2$

RPTA : "A"

PROBLEMA 3 :

En la figura , ***M*** y ***N*** son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ respectivamente. ¿Qué parte del área del cuadrado ***ABCD*** es el área de la región sombreada?



A) $\frac{7}{20}$ ***B)*** $\frac{7}{15}$ ***C)*** $\frac{7}{10}$ ***D)*** $\frac{9}{20}$ ***E)*** $\frac{5}{21}$

RESOLUCIÓN :

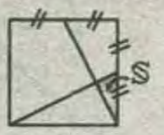
WWW.LIBROSGRATIS2.COM

En el gráfico, *ABCD* es un cuadrado

Se pide : $\frac{\mathbb{A}_{sombreada}}{\mathbb{A}_{\square ABCD}}$

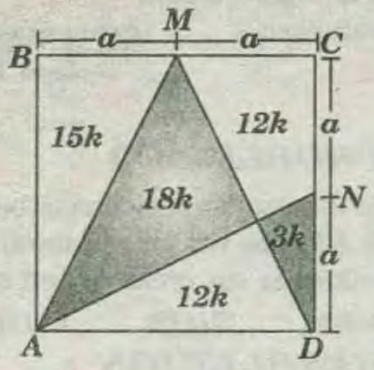
Recuerde que :

$\mathbb{S}=\frac{\text{área total}}{4}$



$\mathbb{S}=\frac{\text{área total}}{20}$

Sea $\mathbb{A}_{\square ABCD}=60k$



Reemplazamos :

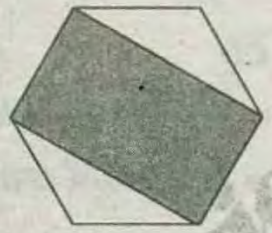
$$\frac{\mathbb{A}_{sombreada}}{\mathbb{A}_{\square ABCD}}=\frac{21k}{60k}\rightarrow\frac{\mathbb{A}_{sombreada}}{\mathbb{A}_{\square ABCD}}=\frac{7}{20}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 4 :

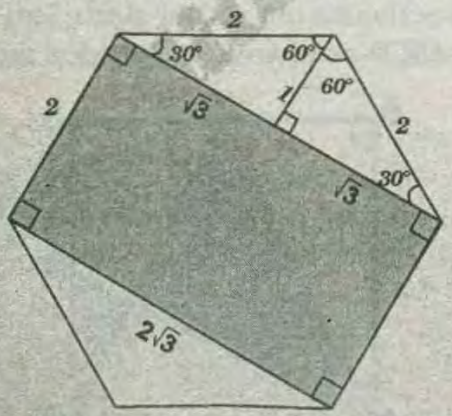
Calcular el área de la región sombreada, en el exágono regular de lado *2u*.

A) $\sqrt{3}u^2$
B) $3\sqrt{3}$
C) $2\sqrt{3}$
D) 3
E) $4\sqrt{3}$



RESOLUCIÓN:

* Considerando los ángulos internos :



* Se puede apreciar que el área de la región sombreada está dada por el área de un rectángulo.

$$S_{sombreada}=2\times(2\sqrt{3})=4\sqrt{3}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 5 :

Hallar el área de la región de un rombo si su perímetro es *116* y una de sus diagonales *42* .

A) 920 B) 840 C) 720 D) 800 E) 980

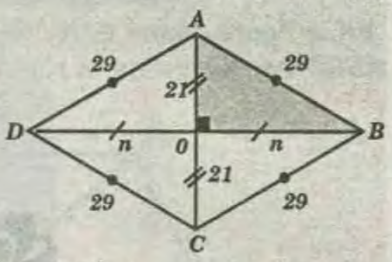
RESOLUCIÓN:

* En un rombo se verifica :

Perímetro = *4* (medida de su lado)

$\rightarrow 116=4L \quad \rightarrow 29=L$

* Ahora grafiquemos :



* Por el teorema de Pitágoras en el $\triangle ADB$:

$n^2+21^2=29^2$

$\rightarrow n=20$ y $BD=40$

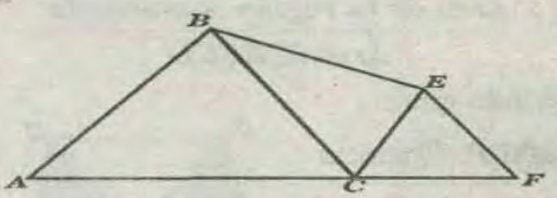
* Luego el área de rombo, será :

$$A_{ABCD}=\frac{D\times d}{2}=\frac{40\times 42}{2}=840$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 6 :

En el gráfico : $AC=2$ y $CF=1$. Si los triángulos *"ABC"* y *"CEF"* son equiláteros. Hallar el área del cuadrilátero *"ABEF"*.



A) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ B) $7\sqrt{3}$ C) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ E) 14

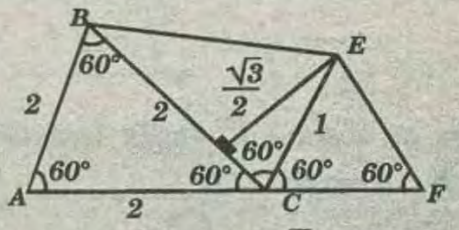
RESOLUCIÓN:

* Trazando la altura de $\frac{ED}{2}$, la cual medirá (debido a $30°$ y $60°$):

* Entonces :

$$A_{(ABEF)}=\frac{2^2\sqrt{3}}{4}+\frac{1^2\sqrt{3}}{4}+\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

* Que al operar resulta:



$$A_{(ABEF)}=\frac{7\sqrt{3}}{4}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 7 :

En un trapecio $ABCD(\overline{AB}//\overline{CD})$,calcular el área de

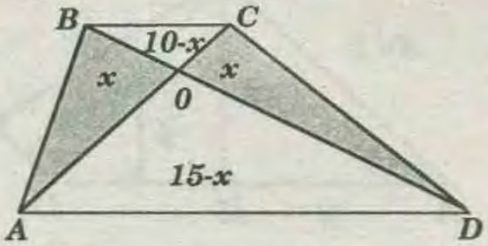
la región triangular *AOB*, si las áreas de las regiones triangulares *ABC* y *ACD* miden *10* y *15μ²*;*("O")* es el punto de corte de la diagonales).

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E)10

RESOLUCIÓN:

* Recordando la propiedad de los productos cruzados en cualquier cuadrilátero.....(referente A áreas)

* Entonces :



$x^2=(10-x)(15-x)$

$\rightarrow x^2=150-25x+x^2$

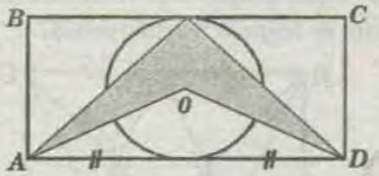
$\rightarrow 25x=150 \rightarrow x=6$

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

El área del rectángulo *ABCD* es *24 cm²* y *"O"* es centro del círculo, calcular el área del cuadrilátero sombreado:

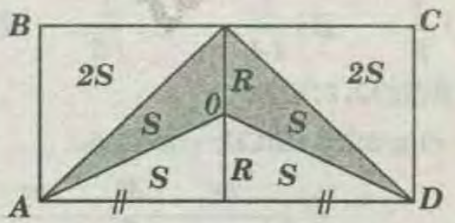
A) 8 cm²
B) 6
C) 10
D) 12
E) 9



RESOLUCIÓN :

* Colocando la variable en cada región , considerando *"O"* como centro :

* Pero por dato :



$A_{ABCD}=24$

$\rightarrow 8S=24$

$\rightarrow S=3$

* Se pide : $2S = 2(3) = 6$

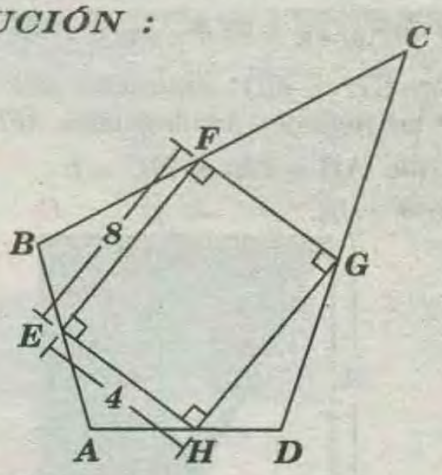
RPTA : "B"

PROBLEMA 9 :

En el cuadrilátero *ABCD*; *E*; *F*; *G* y *H* son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Si *EF=8 cm, HE=4 cm* y la medida del ángulo $H\hat{E}F$ es *90°*, hallar el área del cuadrilátero *ABCD* .

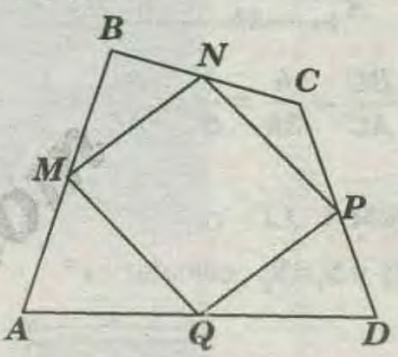
A)64 cm² B)60 cm² C)72 cm² D)70 cm² E)54 cm²

RESOLUCIÓN :



* Piden $A_{\square ABCD}$.

OBSERVACIÓN:



En el gráfico. si *M; N; P* y *Q* son puntos medios de $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente, entonces *MNPQ:* paralelogramo $A_{\square ABCD}=2(A_{\square MNPQ})$

En el problema:

$A_{\square ABCD}=2(A_{\square EFGH})$.....*(I)*

Del dato $m\measuredangle HEF=90°$

$\Rightarrow$ *EFGH:* rectángulo

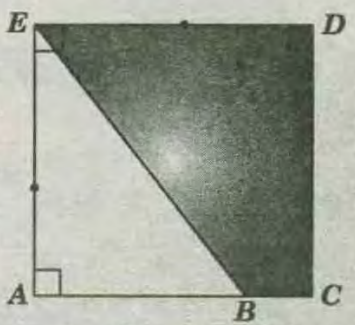
Luego: $A_{\square EFGH}=(8)(4)=32$

Reemplazamos en *(I)*: $A_{\square ABCD}=64\ cm^2$

RPTA : "A"

PROBLEMA 10 :

En la figura , *AEDC* es un cuadrado y el área de la región sombreada es el doble del área del triángulo *ABE*. Hallar $\frac{BC}{AC}$.



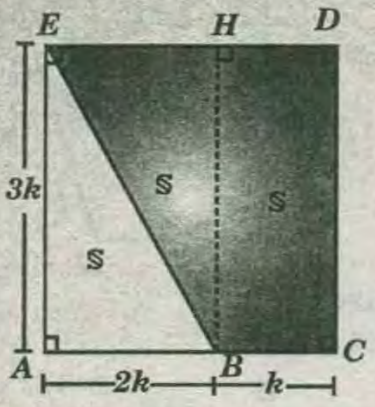
A) $\frac{1}{2}$ *B)* $\frac{1}{3}$ *C)* $\frac{2}{3}$ *D)* $\frac{1}{4}$ *E)* $\frac{2}{5}$

RESOLUCIÓN :

WWW.GRATIS2.COM

Por dato $\mathbb{A}_{\square EDCB} = 2(\mathbb{A}_{\triangle ABE}) = 2\mathbb{S}$

Trazamos $\overline{BH} \perp \overline{ED}$; entonces, por relación de áreas de las regiones rectangulares *AEHB* y *BHDC* se tiene que $AB = 2k \wedge BC = k$.



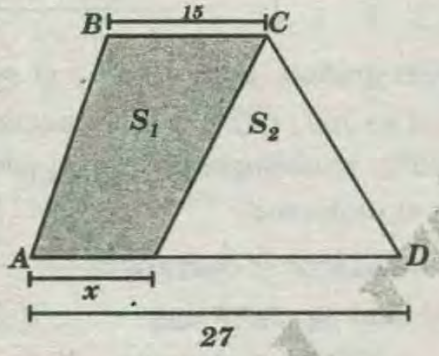
Nos piden $\frac{BC}{AC} = \frac{k}{3k} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$

RPTA : "B"

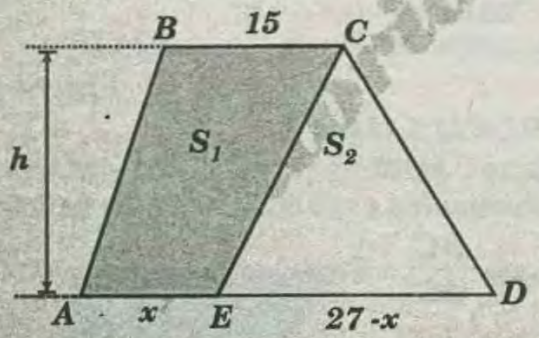
PROBLEMA 11 :

Si : $\overline{BC} // \overline{AD}$ y $S_1 = S_2$, calcular "x".

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 5



RESOLUCIÓN :



* Cálculo de las áreas :

$$S_1 = \left(\frac{15+x}{2}\right)h \quad \text{y} \quad S_2 = \left(\frac{27-x}{2}\right)h$$

* Pero por dato :

$$S_1 = S_2 \Rightarrow \left(\frac{15+x}{2}\right)h = \left(\frac{27-x}{2}\right)h$$

$$\Rightarrow 15+x = 27-x \Rightarrow x = 6$$

RPTA : "C"

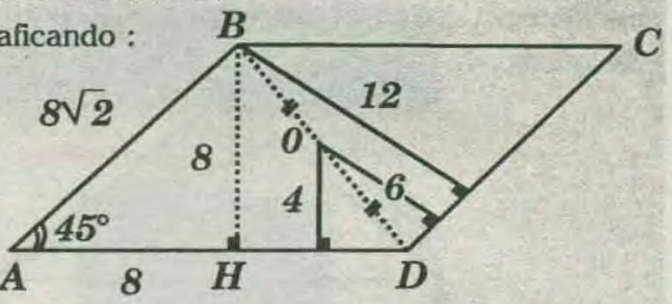
PROBLEMA 12 :

Calcular el área de la región de un paralelogramo *ABCD*, si: $m\measuredangle A = 45°$ y la distancia del centro del romboide al lado mayor es *4* y al lado menor es *6*.

A) 72 B) $72\sqrt{2}$ C) $84\sqrt{2}$ D) $96\sqrt{2}$ E) $76\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Del $\triangle_{AHB}$: isósceles

$$AB = 8\sqrt{2}$$

* Además : $AB = CD = 8\sqrt{2}$

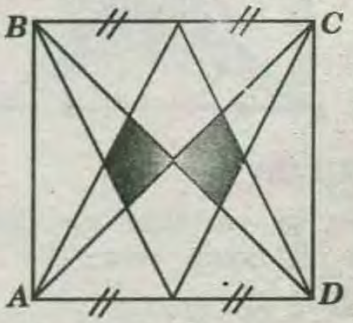
$\rightarrow$ Área de $\square_{ABCD} = 8\sqrt{2}(12)$

$\rightarrow A_{\square ABCD} = 96\sqrt{2}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 13 :

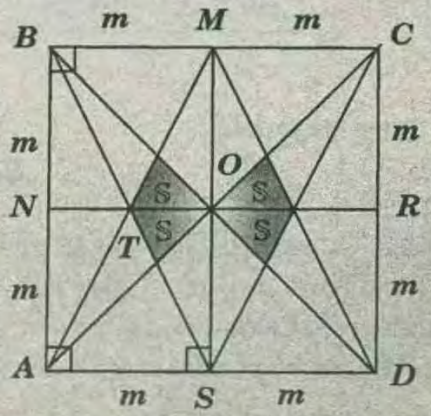
En la figura , ¿qué parte del área del cuadrado *ABCD* es el área de la región sombreada?



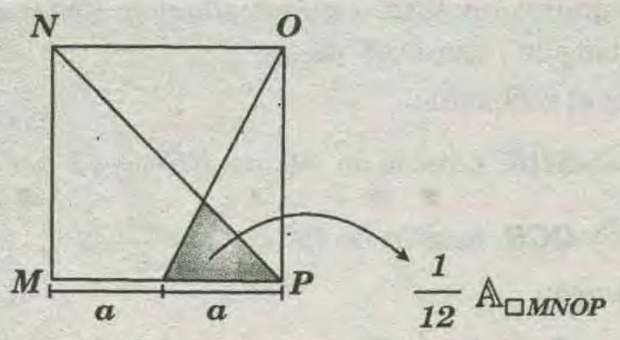
A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{14}$ C) $\frac{1}{13}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{12}$

RESOLUCIÓN :

En el gráfico *ABCD*: cuadrado.



Además , en todo cuadrado *MNOP* se cumple .



Se traza $\overline{NR}$, entonces O: centro del cuadrado además T:punto medio de $\overline{ON}$, luego $A_{\square NBMO}=12S$.

$$\frac{\text{Area sombreada}}{A_{\square ABCD}}=\frac{4S}{4(12S)}=\frac{1}{12}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 14 :

Dado un cuadrilátero $ABCD$, se sabe que las distancia del punto medio de $\overline{AB}$ a los puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ son respectivamente 4, 5 y 3. calcular el área de la región cuadrangular $ABCD$.

A) $20\mu^2$ B) 32 C) 16 D) 24 E) 48

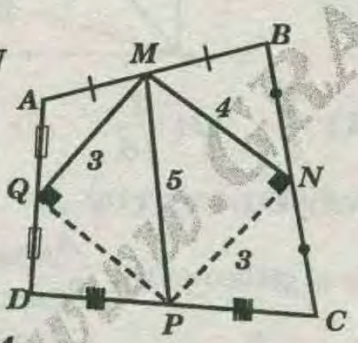
RESOLUCIÓN:

* Graficamos :

* Como : $QM=\frac{BD}{2}=PN$

$\rightarrow QM=PN$

$\rightarrow 3=PN$



* Entonces MNP es un triángulo rectángulo.

* Además : $QP = MN = 4$

* Se deduce:

$$A_{QMNP} = 4\times 3 = 12$$

* Se pide:

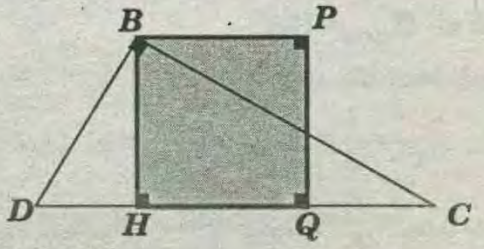
$$A_{ABCD} = 2(A_{QMNP})=2(12)=24$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

según la figura, calcular el área de la región cuadrada $PQHB$, si $DH = 2$ y $HC = 8$

A) $16\mu^2$
B) 12
C) 20
D) 10
E) 15



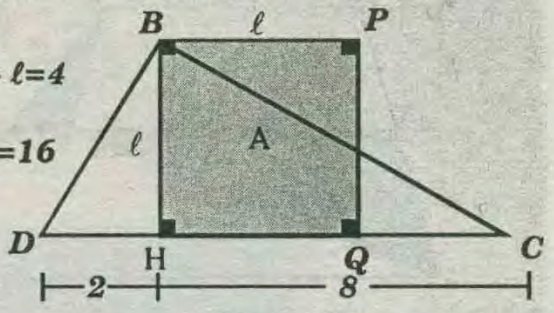
RESOLUCIÓN:

* Por relaciones métricas en el $\triangle DBC$:

$\ell 2=2\times 8 \rightarrow \ell=4$

* Se desea:

$A_{HBPQ}=4^2=16$

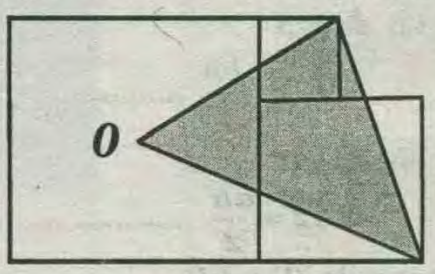


RPTA : "A"

PROBLEMA 16 :

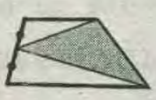
El gráfico muestra 3 cuadrados, calcular el área de la región cuadrada mayor, si el área de la región sombreada es $50\mu^2$ y que "O" es centro del cuadrado mayor.

A) $100\mu^2$
B) 80
C) 60
D) 120
E) 90



RESOLUCIÓN:

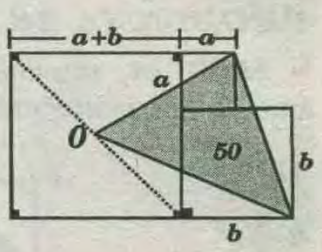
* En todo trapecio :



$$x=\frac{A_{TAL}}{2}$$

$$50=\frac{(2a+b+b)}{2}\times(a+b)\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 100=(a+b)^2$$



* Se pide:

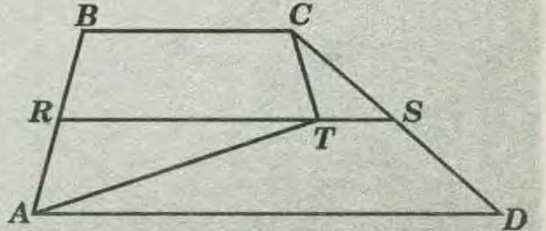
$$A_{MAYOR}=(a+b)^2=100$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 17 :

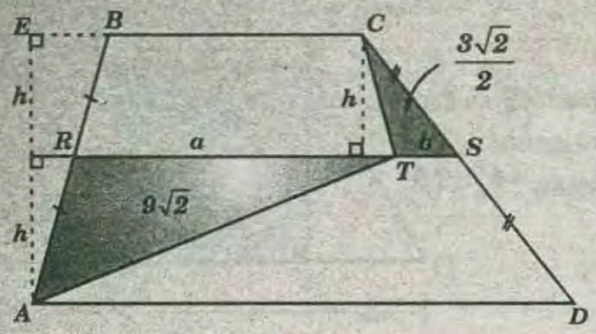
En la figura , $\overline{RS}$ es la mediana ; el área de la región triangular CTS es $\frac{3}{2}\sqrt{2}cm^2$, y el área de la región triangular ARTes $9\sqrt{2}\,cm^2$. Determine el área de la región trapezoidal $ABCD$.

A) $84\sqrt{2}\ cm^2$
B) $42\sqrt{2}\ cm^2$
C) $21\sqrt{2}\ cm^2$
D) $42\ cm^2$
E) $21\ cm^2$



WWW.CIRATE.com

RESOLUCIÓN:



* Piden área $\blacksquare ABCD$.

Datos:

Área $\blacktriangle ART = 9\sqrt{2}$ y Área $\blacktriangle CTS = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

* Por teorema.

Área $\blacksquare mABCD = (RS)(AE) = (a+b)2h$

* En $\blacktriangle TCS$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{bh}{2} \quad \text{.....(I)}$$

* En $\blacktriangle ART$

$$9\sqrt{2} = \frac{ah}{2} \quad \text{.....(II)}$$

Sumando *(I)* y *(II)*:

$$21\sqrt{2} = (a+b)h \Rightarrow (a+b)2h = 42\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{Área} \blacksquare ABCD = 42\sqrt{2}\ cm^2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 18 :

Si *ABCD* es un cuadrado y $PQ < QR$. Hallar el área de la región sombreada.

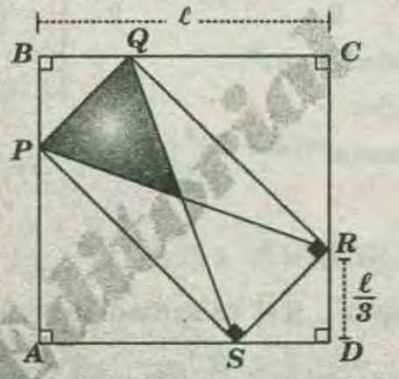
A) $\frac{\sqrt{2}\ell^2}{3}$

B) $\frac{2}{9}\ell^2$

C) $\frac{\ell^2}{9}$

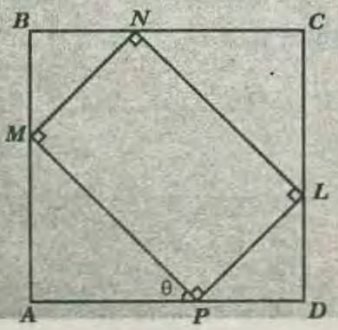
D) $\frac{\sqrt{2}\ell^2}{9}$

E) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\ell^2$



RESOLUCIÓN :

* Piden el área de la región $PQO = \mathbb{A}_{\blacktriangle PQO}$



Del gráfico , si *ABCD* es un cuadrado y *MNLP* es un rectángulo , entonces $\theta = 45°$

* En el problema:

$\blacktriangle SDR$: notable de $45° \Rightarrow RS = \frac{\ell}{3}\sqrt{2}$

$\blacktriangle QCR$: notable de $45° \Rightarrow QR = \frac{2\ell}{3}\sqrt{2}$

* Luego:

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle PQO} = \frac{1}{4}\mathbb{A}_{\blacksquare PQRS}$$

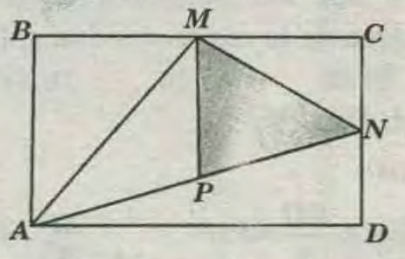
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle PQO} = \frac{1}{4}\left(\frac{2\ell}{3}\sqrt{2}\right)\left(\frac{\ell}{3}\sqrt{2}\right)$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle PQO} = \frac{\ell^2}{9}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 19 :

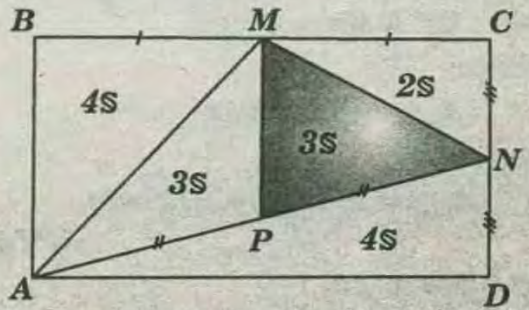
En la figura , *ABCD* es un rectángulo ; *M* y *N* son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Si *P* es punto medio de $\overline{AN}$, ¿qué parte del área del rectángulo *ABCD* es el área de la región sombreada?



A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{16}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

En el gráfico piden $\frac{\mathbb{A}_{\Delta PMN}}{\mathbb{A}_{\square ABCD}}$.



Datos

$$BM = MC \quad CN = ND \quad AP = PN$$

Sea el $\mathbb{A}_{total} = 16S$

Se determina que :

$$\mathbb{A}_{\triangle MCN} = \frac{1}{8} \times \mathbb{A}_{total} = 2S \quad \mathbb{A}_{\triangle ABM} = \frac{1}{4} \times \mathbb{A}_{total} = 4S$$

$$\mathbb{A}_{\triangle ADN} = \frac{1}{4} \times \mathbb{A}_{total} = 4S \quad \mathbb{A}_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} \times \mathbb{A}_{\triangle AMN} = 3S$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbb{A}_{\triangle PMN}}{\mathbb{A}_{\square ABCD}} = \frac{3\mathbb{S}}{16\mathbb{S}} = \frac{3}{16}$$

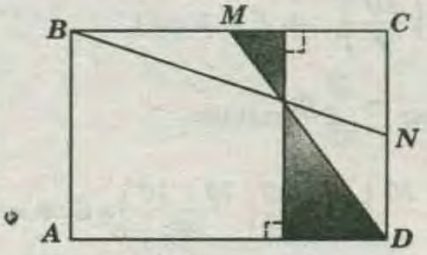
⇒ Relación pedida es $3/16$

RPTA : "B"

PROBLEMA 20 :

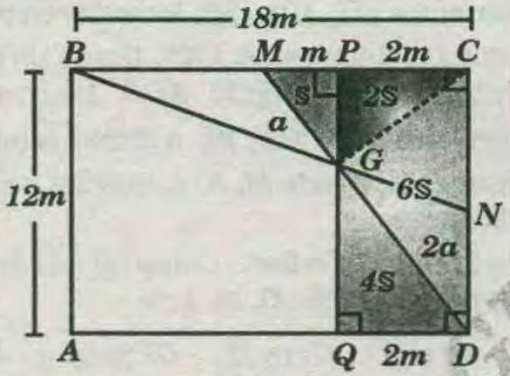
En la figura , $ABCD$ es un rectángulo , $AB = 12cm$ y $BC = 18cm$. Si M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Calcular el área de la región sombreada.

A) $30\ cm^2$
B) $36\ cm^2$
C) $42\ cm^2$
D) $25\ cm^2$
E) $32\ cm^2$



RESOLUCIÓN :

Piden $\mathbb{A}_{\triangle MPG} + \mathbb{A}_{\triangle GQD}$



* Del gráfico: G es baricentro del $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{MG}{GD} = \frac{1}{2}$$

Luego, como $\mathbb{A}_{\triangle MCG} = 3\mathbb{S}$, entonces , $\mathbb{A}_{\triangle GCD} = 6\mathbb{S}$. Además , $\overline{PG} // \overline{CD}$.

Por el teorema de Thales $\frac{MP}{PC} = \frac{1}{2}$

$$\triangle MPG \sim \triangle GQD \Rightarrow \frac{\mathbb{A}_{\triangle MPG}}{\mathbb{A}_{\triangle GQD}} = \frac{1}{4}$$

En el $\triangle MCD$: $9\mathbb{S} = \frac{9 \times 12}{2} \Rightarrow \mathbb{S} = 6$

Piden : $5\mathbb{S} = 30\ cm^2$

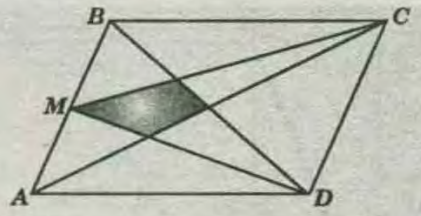
⇒ Área de la región sombreada $= 30cm^2$.

RPTA : "A"

PROBLEMA 21 :

En la figura , M es punto medio de $\overline{AB}$. Si el área del paralelogramo $ABCD$ es $360\ cm^2$, ¿cuál es el área de la región sombreada?

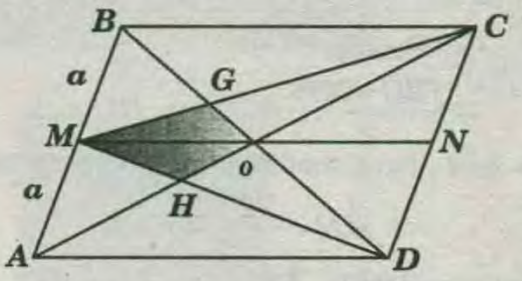
A) $30\ cm^2$
B) $10\ cm^2$
C) $18\ cm^2$
D) $24\ cm^2$
E) $60\ cm^2$



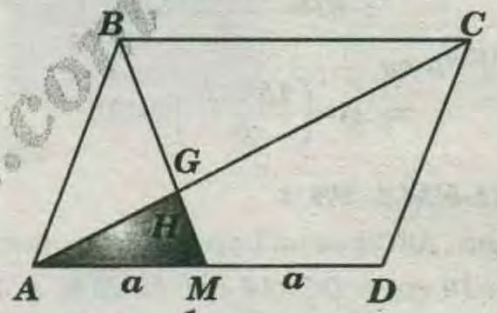
RESOLUCIÓN :

En el gráfico :

$BM = MA = a$ y $A_{\square ABCD} = 360\ cm^2$



* Si $ABCD$: Paralelogramo.



Entonces , $A_{\triangle AGM} = \frac{1}{12} A_{\square ABCD}$

Se traza $\overline{MN} // \overline{AD}$, entonces

N: Punto medio de $\overline{CD}$.

Además , O: Punto medio de $\overline{MN}$

* Luego:

$$\begin{cases} A_{\triangle MGO} = \frac{1}{2} A_{\square MBCN} = 15 \\ A_{\triangle MHO} = \frac{1}{12} A_{\square AMND} = 15 \end{cases}$$

Finalmente:

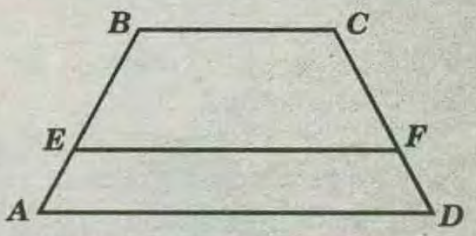
$$A_{\text{región sombreada}} = 30 \Rightarrow 30\ cm^2$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 22 :

En la figura, el trapecio $ABCD$ tiene área igual a $128m^2$, su altura mide $8m$ y $AD = 20m$. Halle el área del trapecio $AEFD$ si su altura mide $2m$.

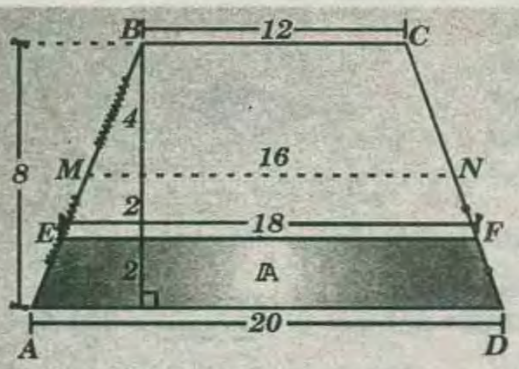
A) $38m^2$
B) $39m^2$
C) $32m^2$
D) $34\ m^2$
E) $37\ m^2$



RESOLUCIÓN :

En el gráfico :

WWW.GRATIS2.COM



Dato: $Área_{(ABCD)}=128$

$$\Rightarrow \frac{(BC+20)8}{2}=128 \Rightarrow BC=12$$

Se traza $\overline{MN}$, base media del trapecio $ABCD$

$$\Rightarrow MN=\frac{20+12}{2}=18$$

En el trapecio $AMND$, $\overline{EF}$ es base media

$$\Rightarrow EF=\frac{16+20}{2}=18$$

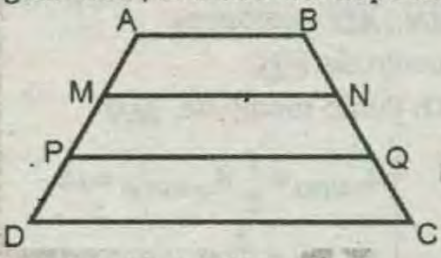
Piden : $Área_{(AEFD)}$

$$\Rightarrow A=\left(\frac{18+20}{2}\right)2=38$$

RPTA "A"

PROBLEMA 23 :

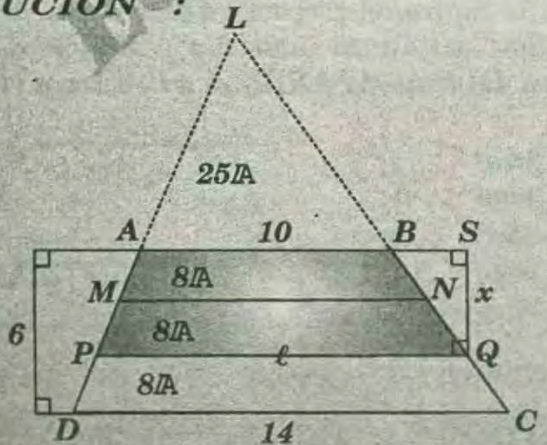
En la figura , $ABCD$ es un trapecio cuya altura mide $6\ cm$, $AB=10\ cm$ y $DC=14\ cm$. Si $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ son paralelos a las bases del trapecio y lo dividen en tres partes de igual área , la altura del trapecio $PABQ$ es



A) $\frac{48}{5+2\sqrt{41}}\ cm$ B) $\frac{48}{10+\sqrt{41}}\ cm$ C) $\frac{48}{-5+\sqrt{41}}\ cm$

D) $\frac{48}{-5+2\sqrt{41}}\ cm$ E) $\frac{48}{5+\sqrt{41}}\ cm$

RESOLUCIÓN :



Piden $SQ=x$

Prolongamos $\overline{DA}$ y $\overline{CB}$ hasta L.

$$\triangle ALB \sim \triangle DLC \Rightarrow \frac{A_{\triangle ALB}}{A_{\triangle DLC}}=\left(\frac{10}{14}\right)^2=\frac{25}{49}$$

Luego, si $A_{\triangle ALB}=25A$, entonces, las regiones trapeciales tienen área de $8A$

$$\triangle ALB \sim \triangle PLQ$$

$$\frac{25A}{41A}=\left(\frac{10}{\ell}\right)^2 \rightarrow \ell=2\sqrt{41}$$

$$A_{\square PABQ}=\frac{2}{3}A_{\square DABC}$$

$$\left(\frac{2\sqrt{41}+10}{2}\right)\times x=\frac{2}{3}\left(\frac{14+10}{2}\right)\times 6 \Rightarrow x=\frac{48}{5+\sqrt{41}}\ cm$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 24 :

Tres semirrectas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, tomadas en un plano forman entre sí ángulos de 120°. Desde un punto P en el interior del ángulo AOB se trazan las perpendiculares $\overline{PM}$, $\overline{PN}$, $\overline{PL}$ a dichas semirrectas, respectivamente, donde M, N, L, son los pies de las perpendiculares.

Si: $OM=2m$ y $ON=6m$. Calcular el área del cuadrilátero de vértices O, M, L, N.

A) $16\sqrt{3}$ B) $8\sqrt{3}$ C) $10\sqrt{3}$ D) $25\sqrt{3}$ E) $19\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

* Prolongamos NP y OL hasta su corte en T .

$\triangle TPE$; isósceles (tiene dos ángulos iguales)

$\rightarrow TL=LE$ ..... (I)

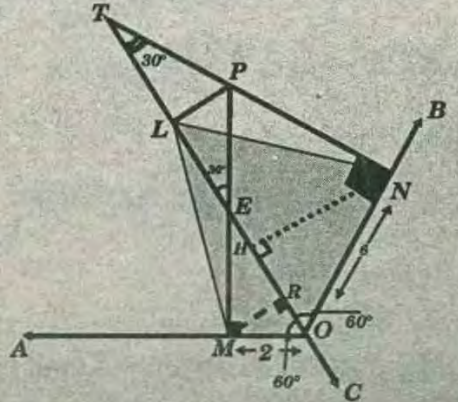
* Por 30° y 60°

$\triangle ONT$: $OT = 2(ON)$

$\rightarrow OT = 12$ .....(II)

* $\triangle EMO$: $OE=2(OM) \rightarrow OE=4$

$\rightarrow TI=LE=4$ y $OL=8$



* de *(I)* en *(II)* :

$\Delta ORM: RM=\sqrt{3}$ y $\Delta OHN: HN=3\sqrt{3}$

* Entonces :

$S_{OMLN}=S_{OML}+S_{ONL}$

$\rightarrow S_{OMLN}=\frac{(OL)(MR)}{2}+\frac{(OL)(HN)}{2}$

$\rightarrow S_{OMLN}=\frac{8(\sqrt{3})}{2}+\frac{8(3\sqrt{3})}{2}=16\sqrt{3}$

RPTA : "A"

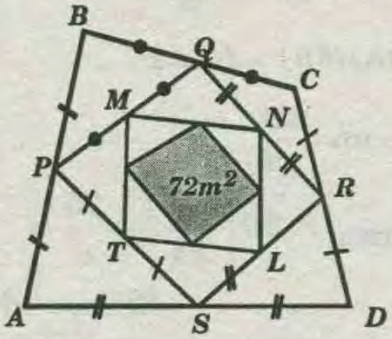
PROBLEMA 25 :

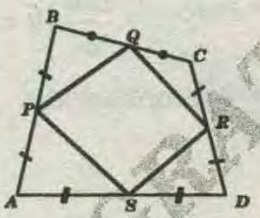
Sea un cuadrilátero *ABCD* ; los puntos medios de sus lados determinan el paralelogramo *PQRS* ; los puntos medios de los lados de éste determinan otro paralelogramo *MNLT* . Si los puntos medios de este último determinan un rombo de área $72\ m^2$, entonces el área de cuadrilátero *ABCD*, es:

A) $144\ m^2$ *B)* $188\ m^2$ *C)* $288\ m^2$ *D)* $376\ m^2$ *E)* $576\ m^2$

RESOLUCIÓN :

* Por propiedad : $\text{Área } PQRS=\frac{\text{área } ABCD}{2}$





* Entonces :

Área *ABCD*$=2$(área *PQRS*)

$\rightarrow$ área *ABCD*$=2$ (2 área *MNLT*)$=4$(área *MNLT*)$=4(2\times72)$

$\rightarrow$ área *ABCD* $= 576$

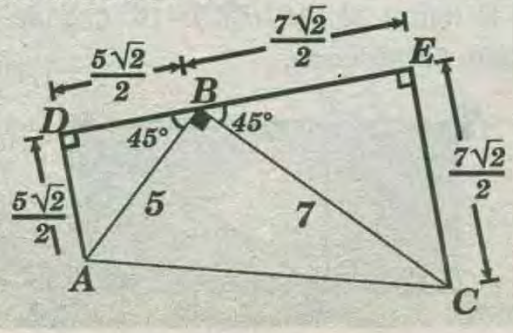
RPTA : : "E"

PROBLEMA 26 :

Sobre los catetos de un triángulo rectángulo *ABC*, de longitudes *5* y *7* respectivamente, construimos dos triángulos rectángulos isósceles *ADB* y *BEC*, tomando *AB* y *BC* por hipotenusas. Calcular el área del polígono resultante .

A) 30 *B) 26* *C) 28* *D) 36* *E) 45*

RESOLUCIÓN :



* Se observa que *D, B* y *E* son colíneales. Trapecio rectángulo *ADEC* :

$$S=(AD+EC)\frac{DE}{2}=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)\frac{6\sqrt{2}}{2}=36$$

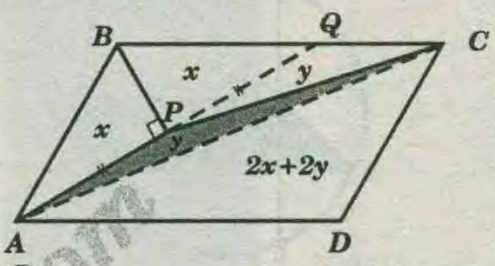
RPTA : "D"

PROBLEMA 27 :

En un paralelogramo *ABCD*, se trazan las bisectrices interiores de los ángulos, cuyos vertices son *A* y *B*, que se intersecan en *P* . Calcule el área de la región paralelográmica, si el área de la región *BPC* es *38*.

A) 38 *B)76* *C) 114* *D) 142* *E) 152*

RESOLUCIÓN :



* Dato : $S_{BPC}=x+y=38$ ..... *(I)*

* Pero : $S_{ABP}=x\ y$ $S_{APC}=y$

* Luego: $S_{ACD}=2x+2y$

* Se pide: $S_{ABCD}=4(x+y)$ .....*(II)*

* *(I)* en *(II)*: $S_{ABCD}=4(38)$

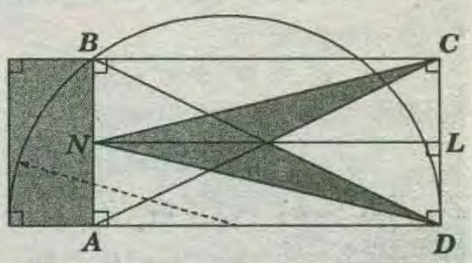
$\rightarrow S_{ABCD}=152\mu^2$

RPTA : "E"

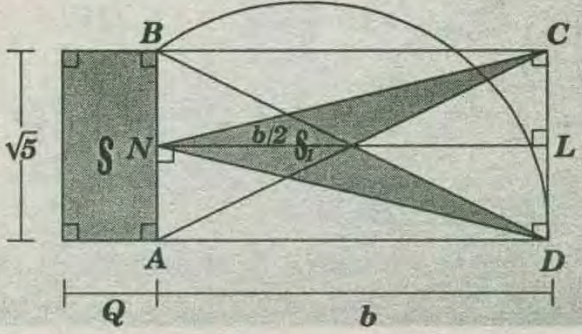
PROBLEMA 28 :

En el gráfico, $AB=\sqrt{5}$. Calcule el producto de áreas de las regiones sombreadas .

A) 20
B) $10\sqrt{2}$
C) $20\sqrt{2}$
D) 25
E) 25/2



RESOLUCIÓN :



www.GRATIS2.com

* Por **R.M.** : $(\sqrt{5})^2 = ab \rightarrow ab = 5$

* Ahora : $S = a\sqrt{5}$ .....(I)

$S_1 = \frac{1}{2} \times \frac{b}{R} \times \sqrt{5}$ .....(II)

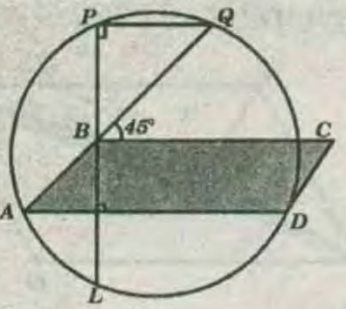
* (I) × (II): $SS_1 = \frac{5ab}{2} \Rightarrow SS_1 = \frac{25}{2}$

RPTA : "E"

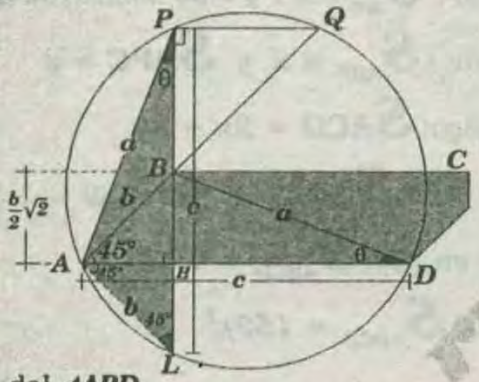
PROBLEMA 29 :

En el gráfico, $(AP)(BD)+16=(AB)^2+(PL)^2$. Calcule el área de la región paralelográmica **ABCD** .

A) 4
B) 6
C) 8
D) $8\sqrt{2}$
E) $8\sqrt{3}$



RESOLUCIÓN :



B: Ortocentro del ΔAPD

$\Rightarrow m\sphericalangle APL = m\sphericalangle ADB = \theta$

$\Delta LAP \cong \Delta ABD$ **(ALA)**

$\Rightarrow PL = AD = c$ y $AP = BD = a$

* Por condición :

$a^2 = b^2 + c^2 - 16$ .....(I)

* ΔABD ; por ley de cosenos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,Cos\,45°$

$a^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{2}$ .....(II)

* De (I) y (II): $bc\sqrt{2} = 16 \Rightarrow bc = 8\sqrt{2}$ .....(III)

* Ahora : $S_{ABCD} = C \times \frac{b}{2}\sqrt{2}$ .....(IV)

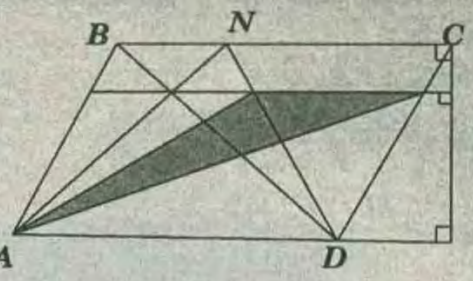
* (III) en (IV): $S_{ABCD} = 8\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = 8\mu^2$

RPTA : "C"

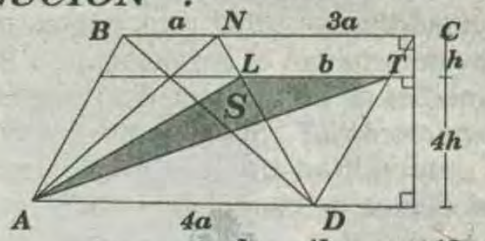
PROBLEMA 30 :

En el gráfico, $CN=3(BN)$. Si el área de la región sombreada es S, calcule el área de la región paralelográmica **ABCD**.

A) $\frac{25}{24}$S
B) $\frac{25}{6}$S
C) $\frac{16}{15}$S



RESOLUCIÓN :



$\Delta DLT \sim \Delta DNC \Rightarrow \frac{b}{3a} = \frac{4h}{5h} \rightarrow b = \frac{12a}{5}$

* Por dato : $S = \frac{1}{2}b(4h) \rightarrow bh = \frac{S}{4}$

* Luego : $S_{ABCD} = (4a)(5h) = 20\,ah$

* Pero : $\left[\frac{12a}{5}\right]h = \frac{S}{2} \rightarrow ah = \frac{5S}{24}$

* Reemplazando: $S_{ABCD} = 20\left[\frac{5S}{24}\right] = \frac{25}{6}S$

RPTA : "B"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

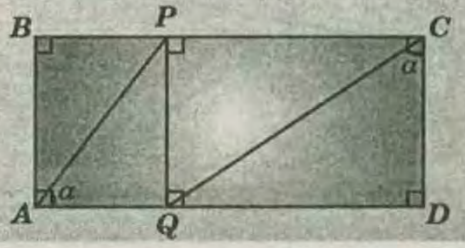
01 Se tiene un paralelogramo **ABCD**, tal que la $m\sphericalangle BCD=53°$, $m\sphericalangle BDA=45°$. Si: $CD=5$, calcule el área de la región **ABCD**.

A) 28 B) 29 C) 30 D) 32 E) 64

02 Se tiene un paralelogramo **ABCD**, tal que la $m\sphericalangle BAC=45°$, $AB=4$. Calcule el área de la región **ABCD**, si la mediatriz de $\overline{CD}$ contiene al vértice **B**.

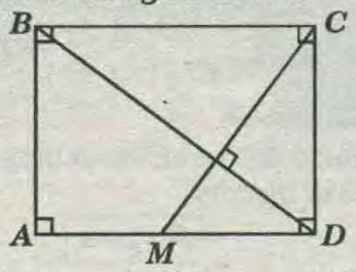
A) 16 B) 24 C) 32 D) 20 E) $16\sqrt{2}$

03 En la figura, si $(AP)(QC)=16$, calcule el área de la región sombreada.



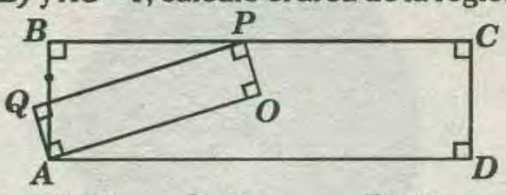
A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 18

04 En el rectángulo $ABCD$: $3(BD)=4(CM)$ y $CD=6$. Calcule el área de la región $ABCD$.



A) 36 B) 42 C) 48 D) 54 E) 60

05 En la figura, si O es centro del rectángulo $ABCD$, $PC=2(AB)$ y $AO=4$, calcule el área de la región $ABCD$.

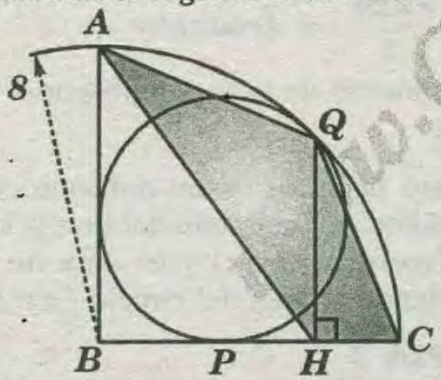


A) 8 B) 12 C) 14 D) 16 E) 20

06 Se tiene un paralelogramo $ABCD$, en $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos medios F y M respectivamente, tal que: $\overline{FM} \cap \overline{BD}=\{P\}$. Calcule el área de la región BFP.

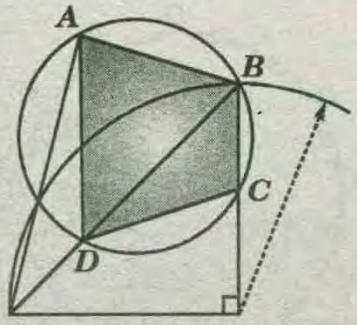
A) 20 B) 10 C) 15 D) 18 E) 24

07 En la figura, si P y Q son puntos de tangencia, calcule el área de la región sombreada.



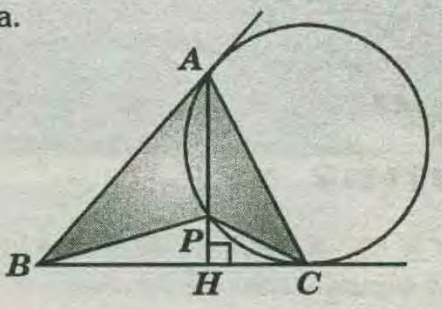
A) $8\sqrt{2}$ B) $10\sqrt{2}$ C) $14\sqrt{2}$ D) $15\sqrt{2}$ E) $16\sqrt{2}$

08 En la figura, si $(AC)(BD)=10$, calcule el área de la región sombreada.



A) 6 B) 8 D) 9 C) 5 E) 7

09 En la figura, si A y C son puntos de tangencia, $PH=1$ y $AP=3$, calcule el área de la región sombreada.

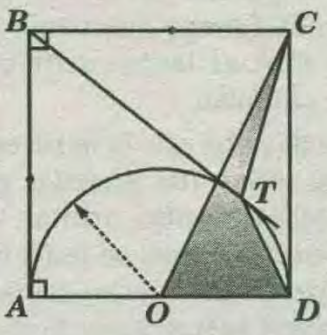


A) 6 B) 8 D) 7,5 C) 8,5 E) 10,5

10 Dado un trapecio $ABCD$, en $\overline{CD}$ y la base $\overline{AD}$ se ubican sus respectivos puntos medios M y N $\overline{AM} \cap \overline{BM}=\{P\}$. Calcule el área de la región triangular BMP, si las área de la regiones triangulares BCM y APN suman 8.

A) 6 B) 7 D) 8 C) 9 E) 10

11 Calcular el área de la región sombreada si $ABCD$ es un cuadrado de lado 10.



A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

12 Se tiene un cuadrilátero $ABCD$ circunscrito de centro O. Si las áreas de las regiones triangulares BCO y AOD son 4 y 6, respectivamente, calcule el área de la región $ABCD$.

A) 10 B) 15 C) 25 D) 30 E) 20

13 En un trapecio isósceles, la longitud de la base mayor es igual a la longitud de su diagonal y además la base menor tiene la misma longitud que su altura. Calcule el área de la región trapecial, sabiendo que su altura mide 9.

A) 54 B) 36 C) 108 D) 100 E) 98

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)A	2)B	3)D	4)C	5)D	6)C	7)E	8)D	9)C	10)C
11)D	12)E	13)C							

RD.GRATIS2.com

AREAS DE REGIONES CIRCULARES

CAPITULO 32

OBJETIVOS :

Al finalizar la unidad el alumno será capaz de :

** Definir el círculo y calcular su área.*

** Establecer teoremas que permiten calcular el área de las partes notables del círculo.*

** Utilizar correctamente dichos teoremas en la resolución de los problemas.*

** Relacionar con la realidad el concepto de perímetro.*

** Desarrollar la capacidad de abstracción, utilizando el concepto de área y perímetro de regiones planas.*

INTRODUCCIÓN :

Antiguamente se planteó la teoría geocentrica de Claudio Ptolomeo (griego que nació *85* a.C y murió 16 d.C.) que con el transcurrir del tiempo se demostró que era falso.

Esta teoría manifestaba que la tierra era el centro del universo, y que todos *105* planetas giran alrededor de la tierra describiendo orbitás circulares, se entiende que en esa época se tenía limitaciones no se puede comparar con nuestra actualidad, en dicha teoría de Ptolomeo se puedé ver el uso del concepto de círculo, aunque él lo entendió como circunferencia.

Nosotros sabemos que en la actualidad el círculo no es lo mismo que circunferencia por lo cual vamos aclarando definirlo de tal manera que no tengamos inconveniente en formular, resolver, formular y resolver un problema que involucra al círculo y a una circunferencia.

Además vamos a estudiar. analizar y abstraer problemas que esten relacionados con el término perímetro y que también vamos a delucidar.

REGIONES POLIGONALES

POLÍGONO CIRCUNSCRITO :

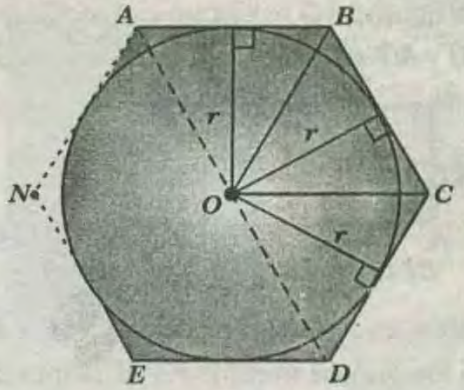
Es quel polígono cuyos lados son tangentes a una circunferencia interior .

TEOREMA :

En todo polígono circunscrito a una circunferencia, el área de su región poligonal puede expresarse como el producto del semiperímetro por el radio de la circunferencia inscrita .

$$\boxed{S=p\times r}$$

DEMOSTRACIÓN :



$$Área=\frac{AB\times r}{2}+\frac{BC\times r}{2}+\frac{CD\times r}{2}+.....$$

$$\Rightarrow Área=\frac{r}{2}\underbrace{(AB+BC+CD}\ \underbrace{.....)}$$

$$\Rightarrow Área=\frac{r\times 2p}{2}\ \Rightarrow Área=p\times r$$

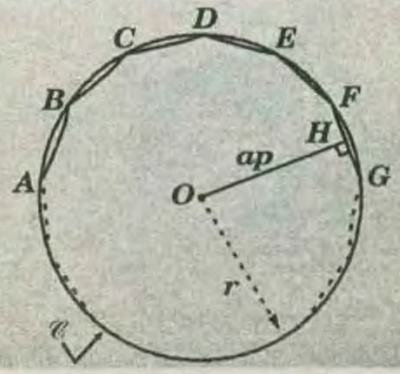
p : semiperímetro de la región poligonal

NOTA :

Si el número de lados de un polígono circunscrito tiende a infinito , el perímetro tiende a la longitud de la circunferencia $(2\pi r)$ y el área de la región poligonal tiende al área del círculo (πr^2).

TEOREMA :

Si el número de lados de un polígono regular inscrito en una circunferencia se aumenta indefinidamente, el apotema tiende hacer el radio , mientras que el perímetro va a coincidir con la circunferencia.



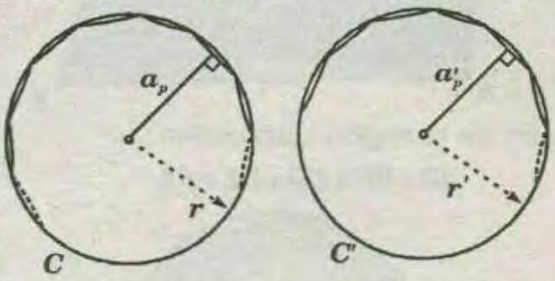
$\bigcirc ABCD...$: polígono regular de n lados.

$\overline{OH}$: apotema del polígono regular (a_p)

Si m tiende al ∞, entonces OH tiende a ser el radio r y $\bigcirc ABCD$ tiende a coincidir con la circunferencia $\mathscr{C}$.

NOTA :

* En dos polígono regulares semejantes :



Estos dos polígonos regulares tienes números de lados iguales a n

p y p' : perímetros de las regiones circulares

C y C': longitudes de las circunferencias

a_p y a'_p : apotemas de las circunferencias .

r y r': radios de las circunferencias

Según la condición del teorema :

Si n tiende al ∞, entonces p y p' tienden a C y C', respectivamente.

a y a' tienden a r y r', respectivamente.

* Luego , de un teorema anterior : $\dfrac{C}{C}=\dfrac{r}{r'}$

así $\dfrac{C}{2r}=\dfrac{C'}{2r'}$ .....(I)

* La expresión *(I)* es el resultado de la comparación de dos polígonos regulares semejantes del mismo número de lados ; en general , esto significa que :

$$\frac{C}{2r}=cte.$$

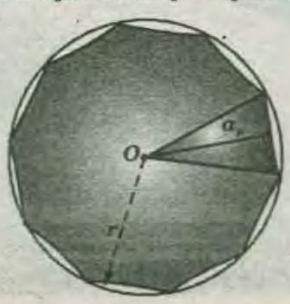
Posteriormente , $C=2r$ *(cte.)*

Sea la constante igual al valor del número pi (π).

$$\Rightarrow C=2r(\pi)$$

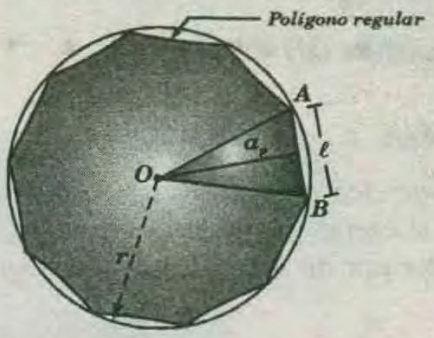
TEOREMA :

El área de una región poligonal regular es igual al semiproducto del apotema y el perímetro.



$$\mathbb{S}_{\substack{reg.\\ poligonal}}=\frac{a_p \times 2p_{(reg.pol.)}}{2}$$

DEMOSTRACIÓN :



Sea n: número de lados del polígono regular

ℓ : longitud de un lado del polígono regular

* Se observa la figura :

$$\mathbb{S}_{\substack{reg.\\ poligonal}}=n(\mathbb{S}_{\Delta AOB})$$

$$\Rightarrow \mathbb{S}_{\substack{reg.\\ poligonal}}=n\left(\frac{a_p \times \ell}{2}\right) \text{.....(I)}$$

* y como se sabe :

$\ell \times n=2p$ (región poligonal)

* Reemplazando en *(I)* obtenemos :

$$\mathbb{S}_{\substack{reg.\\ poligonal}}=a_p \times p_{(\text{reg.poligonal})}$$

SECTOR POLIGONAL REGULAR

Es la región del plano que encierra una línea polígonal regular , llamada base , y los extremos de los radios de la circunferencia circunscrita a dicha línea.

TEOREMA :

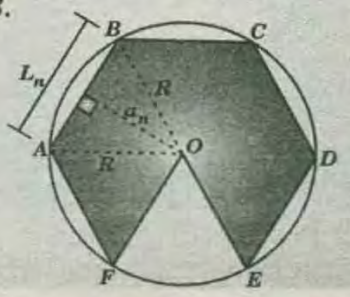
El área de todo sector poligonal es igual al semiperímetro de la base y la apotema.

$$\mathbb{S}=p' \times a$$

DEMOSTRACIÓN :

* Sea el sector poligonal $ABCD$ de «m» lados, originado por una poligonal de apotema «a» y longitud del lado «L_n».

* El área «S», del sector poligonal será m veces el de la región AOB.



* Luego : $S = m\left(\frac{L_n \times a_n}{2}\right)$ .....(I)

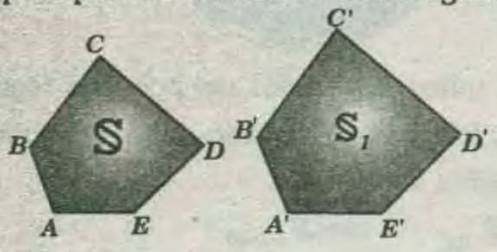
* Pero : $p' = \frac{m \times L_n}{2}$ .....(II)

* Reemplazando *(II)* en *(I)*:

$$\boxed{S = p' \times a_n}$$

TEOREMA :

Las áreas de dos regiones poligonales semejantes son entre sí como los cuadrados de las longitudes de cualquier par de elementos homólogos.



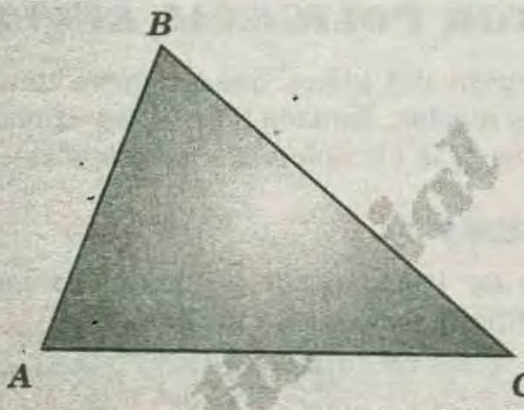
* Es decir :

$$\boxed{\frac{S}{S_1} = \frac{AB^2}{(A'B')^2} = \frac{BC^2}{(B'C')^2} = \frac{CD^2}{(C'D')^2} = ...}$$

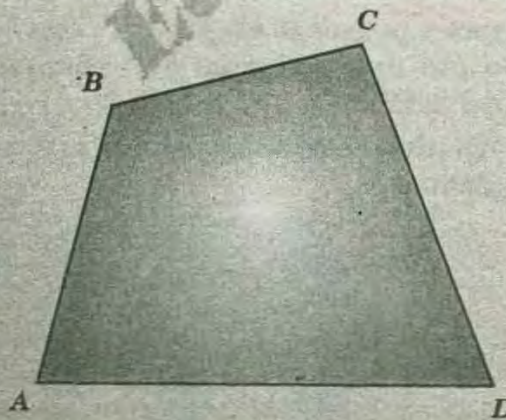
PERÍMETRO DE UNA REGIÓN PLANA

Es la longitud de la línea (o líneas) que conforma el borde o contorno de una región plana.

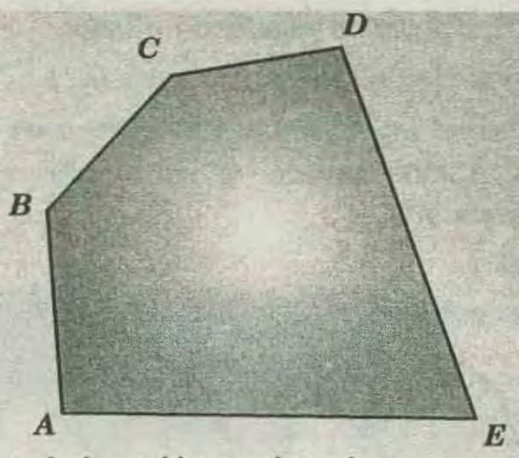
EJEMPLOS



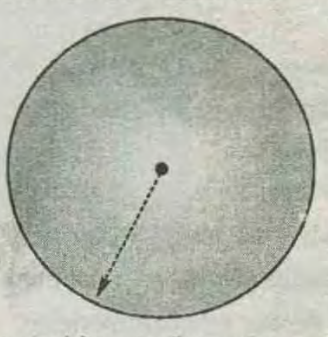
Perímetro de la región triangular $AB+BC+AC$



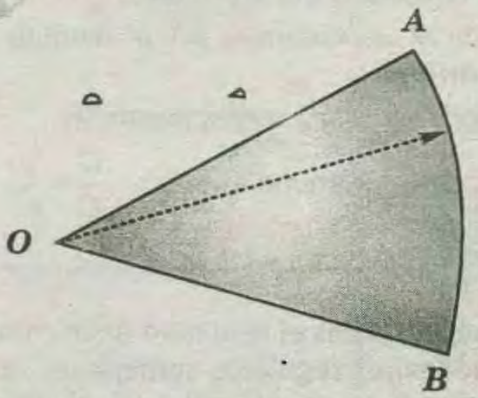
Perímetro de la región sombreada $AB+BC+CD+DA$



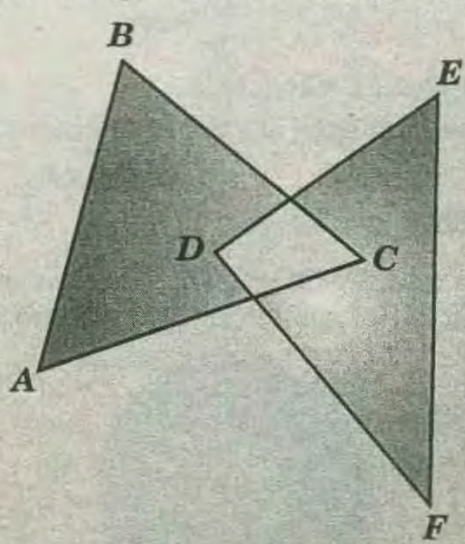
Perímetro de la región sombreada $AB+BC+CD+DE+EA$



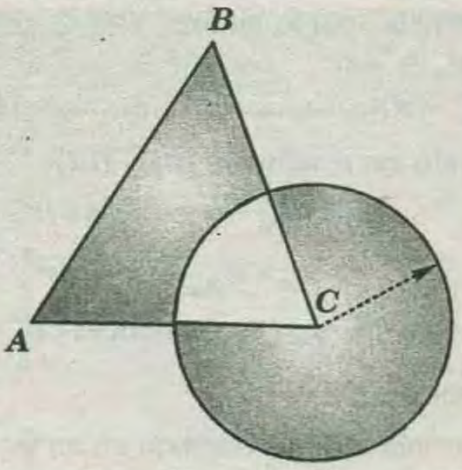
Perímetro de la región sombreada ; $\ell_{circunf}$



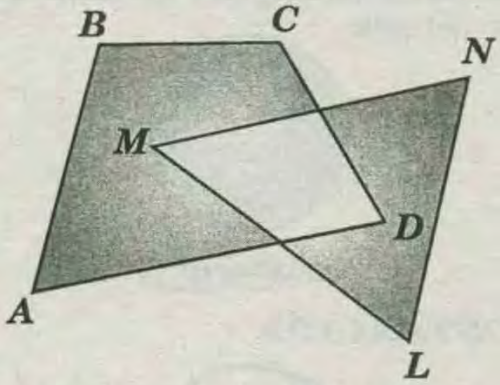
Perímetro de la región sombreada $OA+OB+\ell\widehat{AB}$



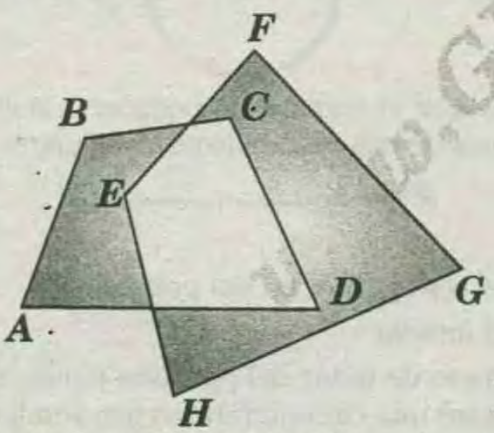
Perímetro de la región sombreada $AB+BC+CA+DE+EF+FD$



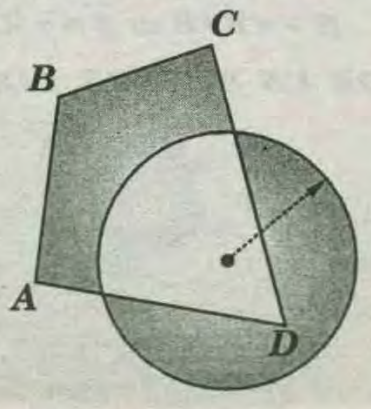
Perímetro de la región sombreada
$AB+BC+AC+\ell_{circunf}$



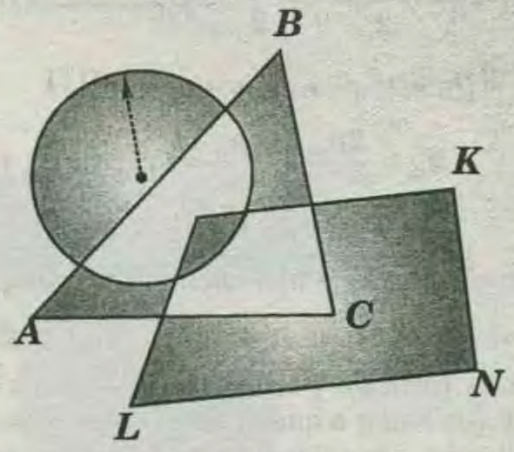
Perímetro de la región sombreada
$AB+BC+CD+DA+MN+NL+LM$



Perímetro de la región sombreada
$AB+BC+CD+DA+EF+FG+GH+HE$



Perímetro de la región sombreada
$AB+BC+CD+AD+\ell_{circunf}$



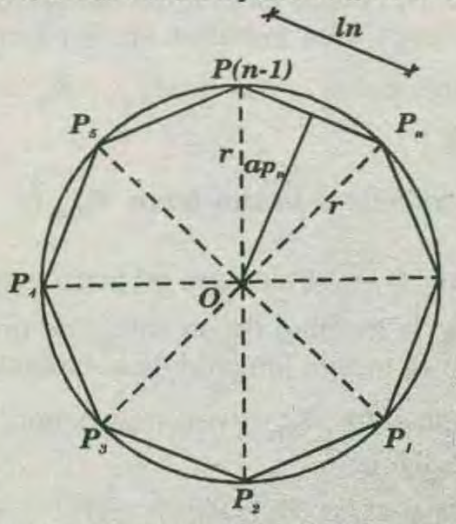
Perímetro de la región sombreada
$AB+BC+AC+LS+SL+KN+NL+\ell_{circunf}$

EL ÁREA DE UN CÍRCULO

CÍRCULO :

Es el conjunto de puntos de la circunferencia y de su interior. De otra manera , un círculo o una región circular es la reunión de una circunferencia y su interior. Cuando hablamos del «área del círculo», queremos decir el área de la región circular correspondiente. (Este es el mismo modo de abreviar que se utiliza cuando hablamos del «área de un triángulo», queriendo decir el área de la región triangular correspondiente).

Por brevedad , diremos simplemente : área de un círculo , en lugar de área de una región circular. Ahora , obtendremos una fórmula para el área de un círculo.



Dada una circunferencia de radio r, inscribimos en ella un polígono regular de n lados (n–gono regular). Como se acostumbra , denotamos el área del n-gono por $\mathcal{S}_n$, su perímetro por $2p_n$ y la apotema por ap_n

Además la longitud del lado del n-gono sea l_n.

* Luego :

$$\mathbb{S}_n = n\left(\frac{\ell_n \times ap_n}{2}\right) = \frac{n\ell_n}{2} \times ap_n \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* pero : $2p_n = n\ell_n \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$

$$\mathbb{S}_n = \frac{2p_n \times ap_n}{2} = (p_n \times ap_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_n = p_n \times a_{p_n}}$$

Esta fórmula contiene tres cantidades , cada una de las cuales depende de n, son p_n , a_{p_n} y $\mathbb{S}_n$. Para obtener la fórmula para el área de un círculo , tenemos que hallar a que límites se aproximan estas tres cantidades a medida que crece indefinidamente.

¿Qué le sucede a $\mathbb{S}_n$?

$\mathbb{S}_n$ es siempre un poco menor que el área del círculo, porque siempre hay algunos puntos que están dentro del círculo , pero fuera del polígono regular de n lados (n-gono regular).

Sin embargo , la diferencia entre $\mathbb{S}_n$ y $\mathbb{S}$ es muy pequeña cuando n es muy grande , porque entonces la región poligonal cubre casi completamente el interior de la circunferencia. Así es de esperar que :

$$\mathbb{S}_n \Rightarrow \mathbb{S} \ldots\ldots\ldots (I)$$

Pero lo mismo que en el caso de la longitud de una circunferencia , esto no puede demostrarse , puesto que no hemos dado todavía una definición del área de un círculo.

DEFINICIÓN :

El área de un círculo es el límite de las áreas de lo polígonos regulares inscritos en la circunferencia correspondiente. Así pues , $\mathbb{S}_n \Rightarrow \mathbb{S}$, por definición.

¿Qué le sucede a la apotema a_{p_n} ?

La apotema a_{p_n} es siempre un poco menor que r, puesto que la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo es menor longitud de la hipotenusa. Pero la diferencia entre a_{p_n} y r es muy pequeña cuando n es muy grande .

Así , pues $a_{p_n} = r \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$

¿Qué le sucede a_{p_n} ?

Por definición de la longitud de la circunferencia , tenemos $2p_n = c$, siendo c la longitud de la cincunferencia , por lo tanto :

$$2p_n = 2\pi r$$

$$p_n = \pi r \ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

* Reuniendo los resultados *(II)* y *(III)*:

$$p_n \times a_{p_n} \longrightarrow (\pi r)r$$

$$\Rightarrow p_n \times a_{p_n} \longrightarrow \pi r^2$$

* Pero , como $\mathbb{S}_n = p_n \times a_{p_n}$ entonces : $\mathbb{S}_n = \mathbb{S}$; en consecuencia : $\mathbb{S} = \pi r^2$

Así , la fórmula se ha convertido en un teorema

ÁREA DE UN CIRCULO

El área de un círculo es igual a π multiplicado por el cuadrado del radio .

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S} = \pi R^2}$$

DEMOSTRACIÓN :

Sabemos que el área de un polígono circunscrito a una circunferencia esta dado por la siguiente fórmula

$$\mathbb{S} = pr \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Donde:

$p \Rightarrow$ es el semiperímetro del polígono y

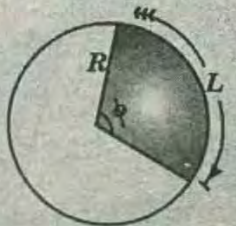
$r \Rightarrow$ es el inradio

Si el número de lados del polígono tiende al infinito pasaría a ser una circunferencia cuyo semiperímetro es igual a πR

* Reemplazando en *(I)*:

$$\mathbb{S} = \pi R \times R \Rightarrow \mathbb{S} = \pi R^2$$

ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR



$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{sector} = \pi R^2 \frac{\theta}{360^\circ}}$$

* Además : $\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{sector}=\frac{R\times L}{2}}$

DEMOSTRACIÓN :

* Para calcular el área de un sector circular se hace una regla de tres

$$360^\circ \longrightarrow \pi R^2$$

$$\phi \longrightarrow \mathbb{S}_{sector}$$

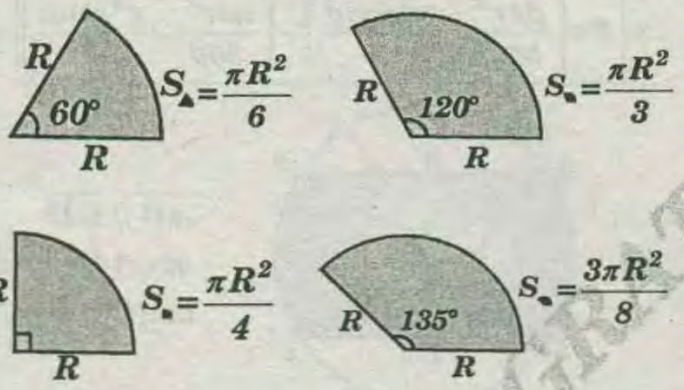
$$\mathbb{S}_{sector}=\frac{\pi R^2 \phi}{360^\circ}$$

$$además: L=\frac{2\pi R\phi}{360^\circ}$$

* remplazando en la expresión anterior tenemos :

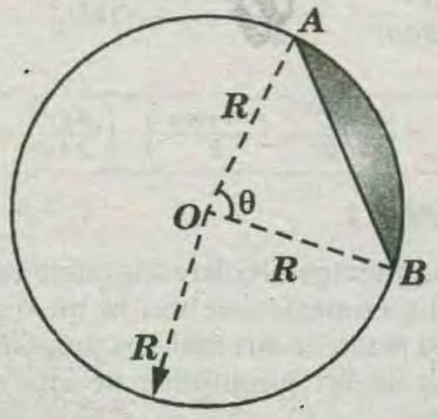
$$\Rightarrow \mathbb{S}_{sector}=\frac{R\times L}{2}$$

* Área de algunos sectores circulares



SEGMENTO CIRCULAR

Es aquella porción del círculo limitado por una cuerda y su correspondiente arco.

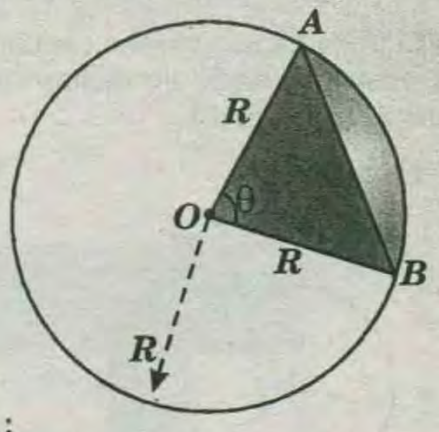


PROPIEDAD :

El área de todo segmento circular es igual a :

$$\boxed{\mathbb{S}_{\frown AB}=\frac{\theta\pi R^2}{360^\circ}-\frac{R^2 sen\theta}{2}} \quad \theta<180^\circ$$

DEMOSTRACIÓN :

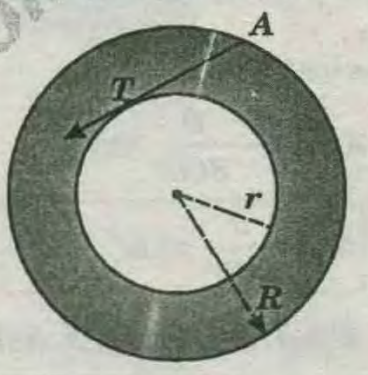


* Se observa :

$$\mathbb{S}_{\frown AB}=\mathbb{S}_{\sphericalangle AOB}-\mathbb{S}_{\triangle AOB}$$

$$\mathbb{S}_{\frown AB}=\frac{\theta\pi R^2}{360^\circ}-\frac{R^2 sen\theta}{2}$$

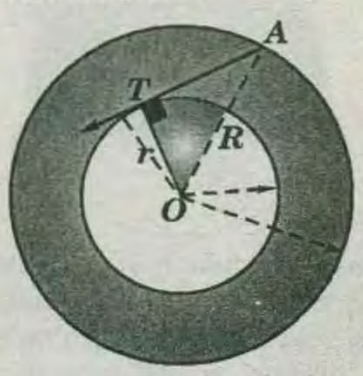
ÁREA DE UNA CORONA CIRCULAR



$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{CORONA}=\pi(R^2-r^2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{CORONA}=\pi AT^2}$$

DEMOSTRACIÓN :



$$\mathbb{S}_{CORONA}=\pi R^2-\pi r^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{S}_{CORONA}=\pi(R^2-r^2).....(I)$$

* además en el triángulo *OAT* por pitagoras :

$$AT^2=R^2-r^2$$

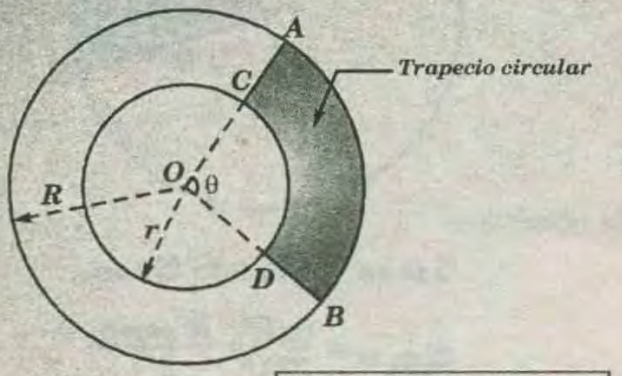
* remplazando en *(I)* : $\mathbb{S}_{CORONA}=\pi AT^2$

WWW.GRATIS2.COM

TRAPECIO CIRCULAR

Es aquella parte de una corona circular limitada por dos segmentos de radio de dichas circunferencias concéntricas y dos arcos.

PROPIEDAD :



$$\mathbb{S}_{\triangledown}=\frac{\theta}{360^\circ}\pi(R^2-r^2)$$

DEMOSTRACIÓN :

* Se observa :

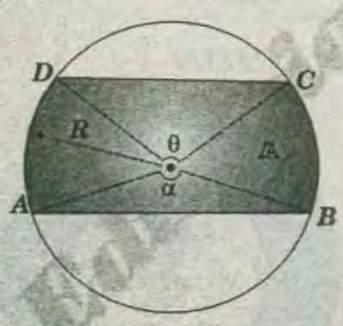
$\mathbb{S}_{\triangledown}=\mathbb{S}_{\sphericalangle AOB}-\mathbb{S}_{\triangle COB}$

$$\mathbb{S}_{\triangledown}=\frac{\theta}{360^\circ}\times\pi R^2-\frac{\theta}{360^\circ}\times\pi r^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{\triangledown}=\frac{\theta}{360^\circ}\pi(R^2-r^2)}$$

FAJA CIRCULAR

Se llama zona circular o segmento circular de dos bases , a la porción de círculo comprendida entre dos cuerdas paralelas.



El área de una faja circular que no contenga el centro de la circunferencia es igual a la diferencia de las áreas entre el segmento circular correspondiente a la cuerda mayor y el segmento circular correspondiente a la cuerda menor.

Si el centro de la circunferencia estuviera dentro de la faja circular , entonces se hallaría el área de la faja restando del área del círculo el área de los segmentos circulares correspondientes a las dos cuerdas.

Según la figura, $\overline{DC}//\overline{AB}$

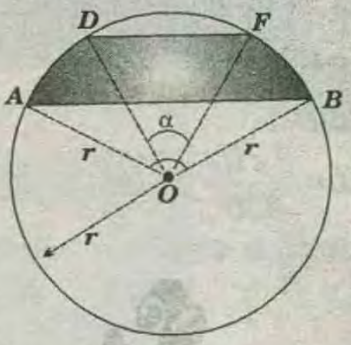
PROPIEDAD :

$\mathbb{S}=\mathbb{S}_{\circ}-\mathbb{S}_{\frown CD}-\mathbb{S}_{\frown AB}$

$$\Rightarrow \mathbb{S}=\pi R^2-\left[\left(\frac{\theta}{360^\circ}\pi R^2-\frac{R^2}{2}sen\theta\right)\left(\frac{\alpha}{360^\circ}\pi R^2-\frac{R^2}{2}sen\alpha\right)\right]$$

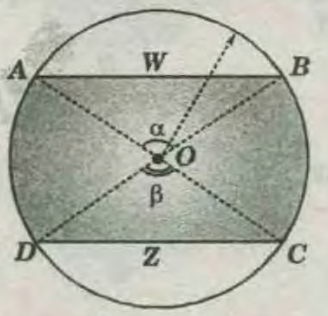
* como :

$$\Rightarrow \mathbb{S}=R^2\left[\pi-\frac{\pi}{360^\circ}(\theta+\alpha)+\frac{1}{2}(sen\theta+sen\alpha)\right]$$



$m\sphericalangle AOB=\beta \wedge m\sphericalangle COD=\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}=\left(\frac{\beta\pi r^2}{360^\circ}-\frac{r^2sen\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha\pi r^2}{360}-\frac{r^2sen\alpha}{2}\right)}$$



$\overline{AB}//\overline{CD}$

$m\sphericalangle AOB=\alpha$

$m\sphericalangle COD=\beta$

$Área=\pi r^2-w-z$.....(I)

*Pero : $w=\frac{\alpha\pi r^2}{360^\circ}-\frac{r^2sen\alpha}{2}$.....(II)

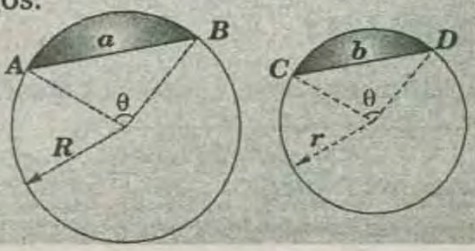
$z=\frac{\beta r^2}{360^\circ}-\frac{r^2sen\beta}{2}$.....(III)

* Luego :

$$\boxed{Área_{\square ABCD}=\left(\frac{\alpha\pi r^2}{360^\circ}-\frac{r^2sen\alpha}{2}\right)-\left(\frac{\beta\pi r^2}{360^\circ}-\frac{r^2sen\beta}{2}\right)}$$

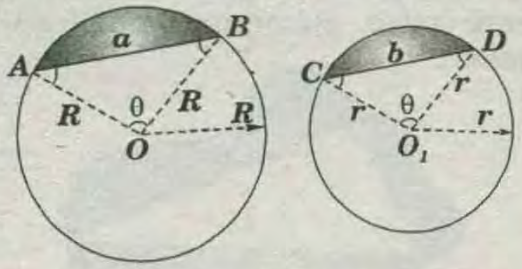
TEOREMA :

Si en dos segmentos circulares de diferentes círculos, los ángulos centrales tienen la misma medida; entonces la razón de sus áreas es proporcional a los cuadrados de las longitudes de sus elementos homólogos.



$$\frac{\mathbb{S}_{\text{AB}}}{\mathbb{S}_{\text{CD}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = ... = k^2$$

DEMOSTRACIÓN :



* Se observa : $\triangle AOB \sim \triangle CO_1D$ **(A.A.A)**

* Luego : $\triangleleft AOB \sim \triangleleft CO_1D$

* Entonces :

$$\frac{R}{r} = \frac{a}{b} = ... = k$$

* Sabemos :

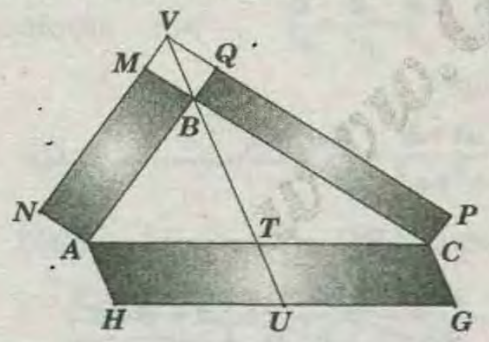
$$\mathbb{S}_{\text{AB}} = \left(\frac{\theta}{360°}\pi - \frac{sen\theta}{2}\right)R^2$$

* Posteriormente :

$$\frac{\mathbb{S}_{\text{AB}}}{\mathbb{S}_{\text{CD}}} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = ... = k^2$$

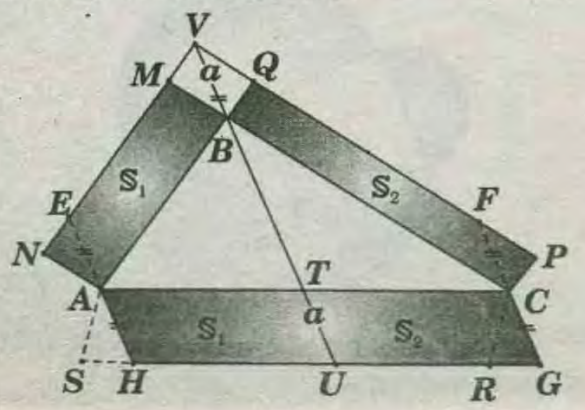
TEOREMA DE PAPPUS

Dado el triángulo *ABC*, al ser *VB = TU;* el área de la región paralelográmica *ACRS* es igual a la suma de las áreas de las regiones paralelográmicas *ABMN* y *BCPQ*.



$$\mathbb{S}\square_{ACGH} = \mathbb{S}\square_{ABMN} + \mathbb{S}\square_{BCPQ}$$

DEMOSTRACIÓN :



Si $VB = TU$

$\Rightarrow \mathbb{S}_{\blacksquare HUTA} = \mathbb{S}_{\blacksquare VBAE} = \mathbb{S}_1$

$\mathbb{S}_{\blacksquare GUTC} = \mathbb{S}_{\blacksquare VBCF} = \mathbb{S}_2$

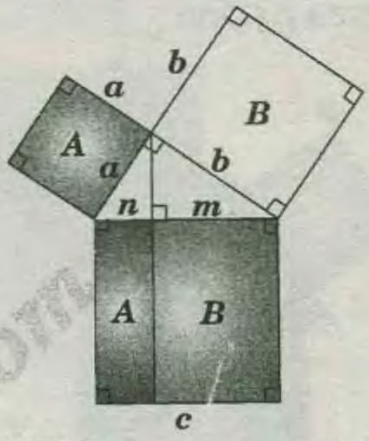
$\Rightarrow \mathbb{S}_{\blacksquare ACGH} = \mathbb{S}_{\blacksquare VBAE} + \mathbb{S}_{\blacksquare VBCF}$ .....(I)

* $\mathbb{S}_{\blacksquare ABMN} = \mathbb{S}_{\blacksquare VBAE} \wedge \mathbb{S}_{\blacksquare BCPQ} = \mathbb{S}_{\blacksquare VBCF}$

* También, $\mathbb{S}_{\blacksquare ACRS} = \mathbb{S}_{\blacksquare ACGH}$ .....(II)

* Reemplazando en *(I)* :

$$\mathbb{S}_{\blacksquare ACRS} = \mathbb{S}_{\blacksquare ABMN} + \mathbb{S}_{\blacksquare BCPQ}$$



El teorema de Pitágoras es un caso particular del teorema de Pappus.

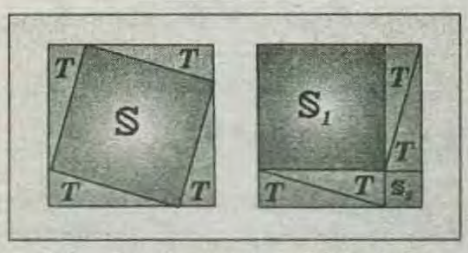
EL TEOREMA DE PITÁGORAS

Es más conocido Pitágoras por su famoso teorema referente al triángulo rectángulo. Las culturas orientales conocieron la propiedad de ser rectángulos de aquellos triángulos de lados cuyas longitudes son ***3 – 4 – 5*** y ***5 – 12 – 13*** unidades; se admite que fue Pitágoras quien generalizó y encontró la relación constante entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, àfirmando que:

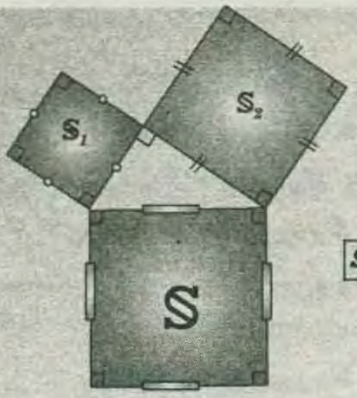
El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Existe hasta ahora algo más de cuarenta demostraciones de este teorema, siendo una de las más sencillas la del matemático hindú ***Bhaskara***, quien basándose en la figura adjunta demostró que:

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$$

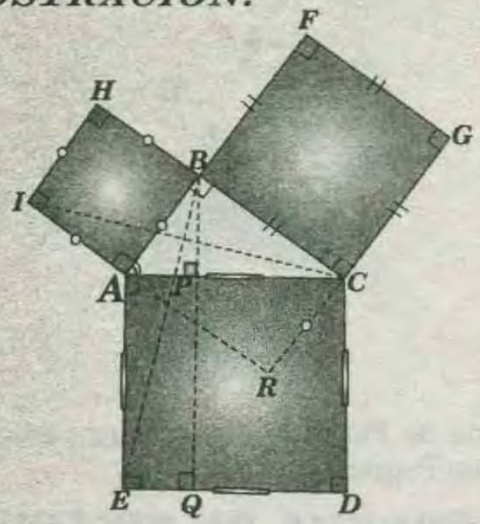


A continuación, la demostración del teorema de Pitágoras, en el cual se cumple:



$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$$

DEMOSTRACIÓN:



* En la figura observamos que:

$\Delta IAC \cong \Delta BAE \Rightarrow \mathbb{S}_{IAC} = \mathbb{S}_{BAE}$ .....(I)

* Pero : $CR = AB \Rightarrow \mathbb{S}_{IAC} = \dfrac{IA \times AB}{2}$

* Luego :

$$\mathbb{S}_{ABHI} = 2 \times \mathbb{S}_{IAC} \text{ .....(II)}$$

* Análogamente : $\mathbb{S}_{BAE} = \dfrac{AE \times AP}{2}$

$\Rightarrow \mathbb{S}_{EAPQ} = 2 \times \mathbb{S}_{BAE}$ .....(III)

* Ahora de *(I); (II)* y *(III)*:

$$\mathbb{S}_{EAPQ} = \mathbb{S}_{ABHI} \text{ .....(IV)}$$

* Otra vez por analogía se demuestra que :

$$\mathbb{S}_{QPCD} = \mathbb{S}_{BFGC} \text{ .....(V)}$$

* Sumando *(IV)* y *(V)* :

$$\mathbb{S}_{EAPQ} + \mathbb{S}_{QPCD} = \mathbb{S}_{ABHI} + \mathbb{S}_{BFGC}$$

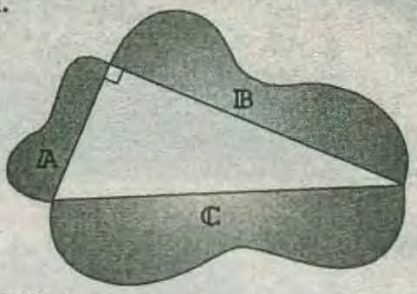
$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{EACD} = \mathbb{S}_{ABHI} + \mathbb{S}_{BFGC}}$$

GENERALIZACION :

Para cualquier par de figuras cerradas semejantes, las áreas de las superficies que determinan , son entre sí como los cuadrados de las longitudes de sus elementos homólogos.

TEOREMA :

La suma de áreas de las regiones semejantes ,que tienen como elemento homólogo los catetos de un triángulo rectángulo , es igual al área de la región semejante cuyo elemento homólogo es la hipotenusa.

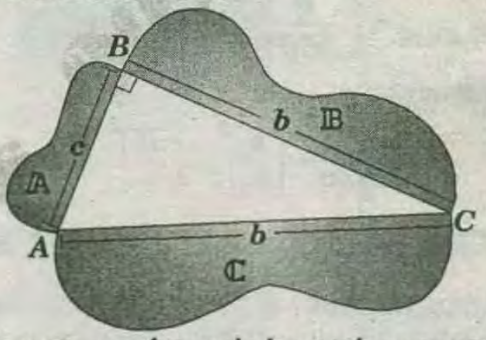


Según la figura :

$\mathbb{A}$; $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ son las áreas de las regiones semejantes.

$$\boxed{\mathbb{C} = \mathbb{A} + \mathbb{B}}$$

DEMOSTRACIÓN :



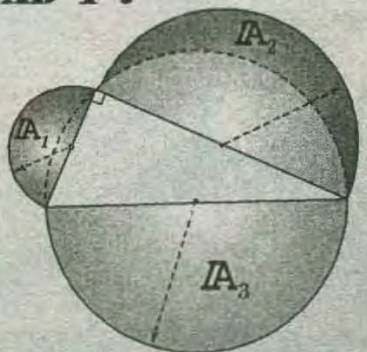
Si $\mathbb{A}$; $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ son áreas de las regiones semejantes; entonces $\dfrac{\mathbb{A}}{c^2} = \dfrac{\mathbb{B}}{a^2} = \dfrac{\mathbb{C}}{b^2}$, por propiedad de proporciones:

$$\frac{\mathbb{A}+\mathbb{B}}{c^2+a^2} = \frac{\mathbb{C}}{b^2} \text{ .....(I)}$$

* Luego en $\triangle ABC$: $a^2 + c^2 = b^2$.....(II)

$$\frac{\mathbb{A}+\mathbb{B}}{\cancel{c^2+a^2}} = \frac{\mathbb{C}}{b^2} \Rightarrow \boxed{\mathbb{A}+\mathbb{B}=\mathbb{C}}$$

PROPIEDAD 1 :

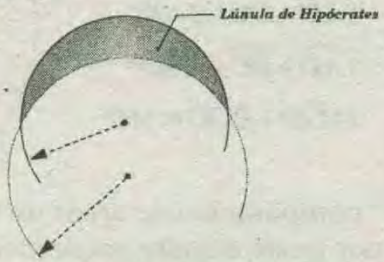


Se observa que $\mathbb{A}_1$; $\mathbb{A}_2$ y $\mathbb{A}_3$ son las áreas de las regiones semejantes.

Así : $\Rightarrow \boxed{\mathbb{A}_3 = \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2}$

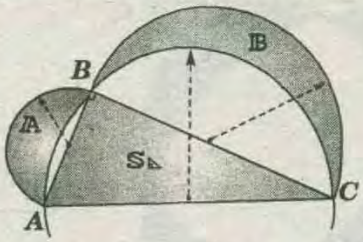
LÚNULA

Es una región no convexa limitada por dos arcos de circunfererencias secantes de diferente centro.



PROPIEDAD 2 :

Si en un triángulo rectángulo sobre sus lados se construyen exteriormente semicircunferencias se cumple que la suma de las áreas de las lúnulas formadas es igual al área del triángulo rectángulo .

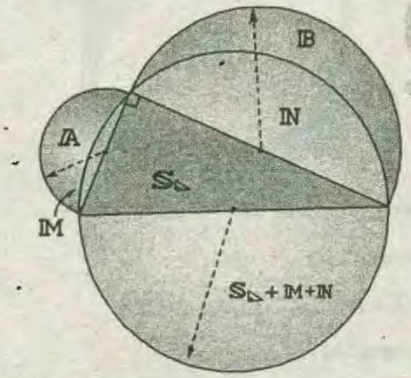


$\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$: son áreas de las lúnulas .

$\mathbb{S}_\triangle$: área de la región triangular *ABC*.

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_\triangle = \mathbb{A} + \mathbb{B}}$$

DEMOSTRACIÓN :



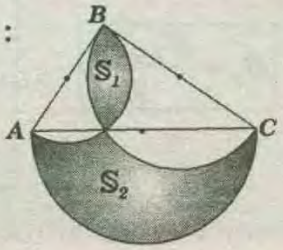
* Como los semicírculos son semejantes, aplicando el teorema anterior :

$$\mathbb{S}_\triangle \times M + N = \mathbb{A} + M + N + \mathbb{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_\triangle = \mathbb{A} + \mathbb{B}}$$

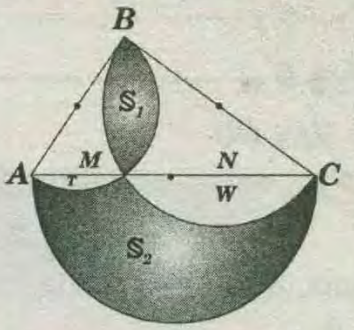
PROPIEDADES ADICIONALES

1) En la figura , se cumple :



$$\boxed{\mathbb{S}_{ABC} = \mathbb{S}_2 - \mathbb{S}_1}$$

DEMOSTRACIÓN :



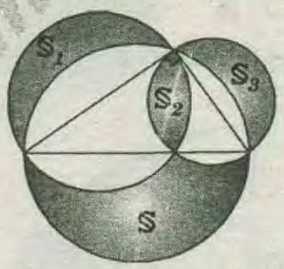
* Por teorema :

$$M + T + \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_1 + N + W = T + W + \mathbb{S}_2$$

$$\underbrace{M + \mathbb{S}_1 + N}_{\mathbb{S}_{ABC}} = \mathbb{S}_2 - \mathbb{S}_1$$

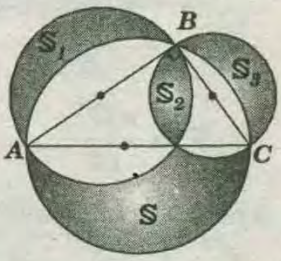
$$\Rightarrow \mathbb{S}_{ABC} = \mathbb{S}_2 - \mathbb{S}_1$$

2) En la figura, se cumple:



$$\boxed{\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 + \mathbb{S}_3}$$

DEMOSTRACIÓN :



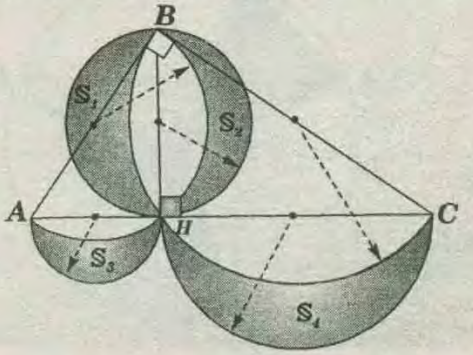
$\mathbb{S}_{ABC} = \mathbb{S} - \mathbb{S}_2$ ..... *(I)*

$\mathbb{S}_{ABC} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_3$ ..... *(II)*

* De *(I)* y *(II)*:

$$\mathbb{S} - \mathbb{S}_2 = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_3 \Rightarrow \boxed{\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 + \mathbb{S}_3}$$

3) En la figura, se cumple:



GRATIS2.com

$$\mathbb{S}_{ABC}=\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2+\mathbb{S}_3+\mathbb{S}_4$$

DEMOSTRACIÓN :

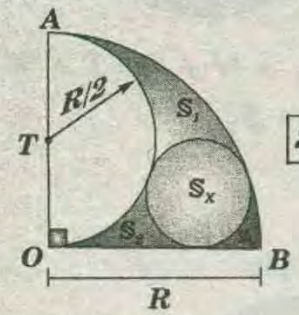
$\mathbb{S}_{AHB}=\mathbb{S}_2+\mathbb{S}_3$ ..... (I)

$\mathbb{S}_{BHC}=\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_4$ ..... (II)

* Sumando *(I)* y *(II)*:

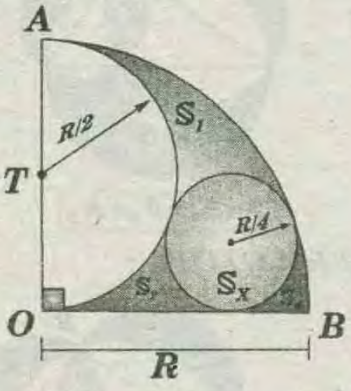
$$\mathbb{S}_{AHB}+\mathbb{S}_{BHC}=\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2+\mathbb{S}_3+\mathbb{S}_4$$
$$\Rightarrow \mathbb{S}_{ABC}=\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2+\mathbb{S}_3+\mathbb{S}_4$$

4) De la figura, ***AOB*** es un cuadrante.



$$\boxed{\mathbb{S}_x=\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2+\mathbb{S}_3}$$

DEMOSTRACIÓN :



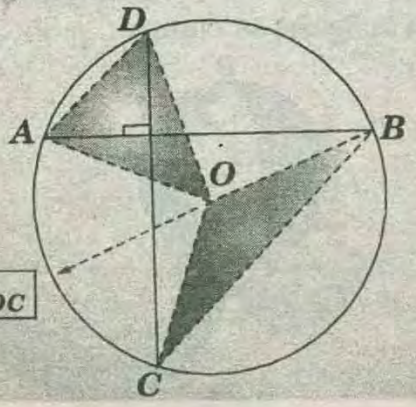
$$\mathbb{S}_x=\pi(R/4)^2 \Rightarrow \mathbb{S}_x=\frac{\pi R^2}{16} \quad \text{.....(I)}$$

$$\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2+\mathbb{S}_3=\frac{\pi R^2}{4}-\left(\frac{\pi R^2}{16}+\frac{\pi R^2}{8}\right)=\frac{\pi R^2}{16} \quad \text{.....(II)}$$

* De *(I)* y *(II)* :

$$\boxed{\mathbb{S}_x=\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2+\mathbb{S}_3}$$

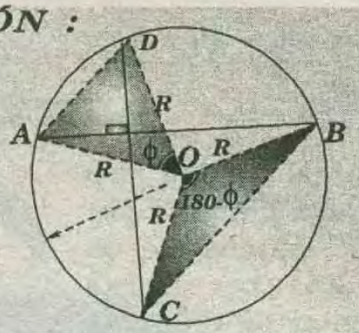
5) Si en un círculo se trazan cuerdas perpendiculares se cumple : (*O* es centro)



$\overline{AB} \perp \overline{CD}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{AOD}=\mathbb{S}_{BOC}}$$

DEMOSTRACIÓN :



Como $AB \perp CD$

$(\widehat{AD}+\widehat{BC})/2=90°$

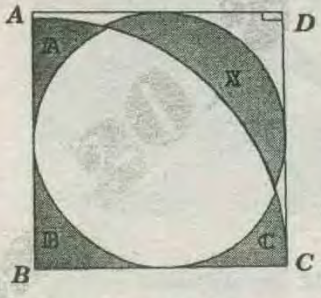
$(\widehat{AD}+\widehat{BC})=180°$

$(A\hat{O}D+B\hat{O}C)=180°$

* comparación de áreas de los triángulos ***AOD*** y ***BOC*** por tener ángulos suplementarios :

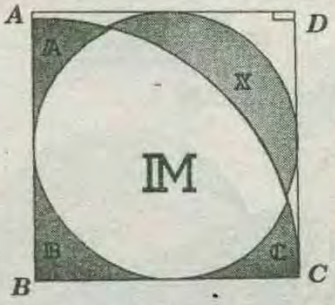
$$\frac{\mathbb{S}_{AOD}}{\mathbb{S}_{BOC}}=\frac{R\times R}{R\times R}$$
$$\Rightarrow \mathbb{S}_{AOD}=\mathbb{S}_{BOC}$$

6) Si ***ABCD*** es un cuadrado , luego se cumple:



$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{X}=\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C}}$$

DEMOSTRACIÓN :



$\mathbb{S}_{CIRCULO}=\pi(a/2)^2=\pi a^2/4$

$\Rightarrow \mathbb{S}_{CIRCULO}=\pi a^2/4$

$\Rightarrow \pi a^2/4=X+M$ .....(I)

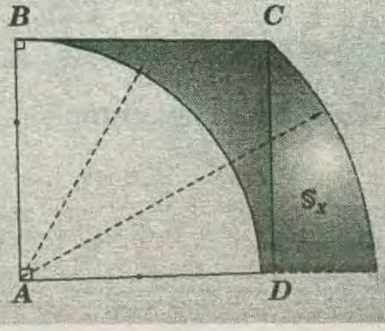
$\mathbb{S}_{CUADRANTE}=\pi a^2/4$

$\Rightarrow \mathbb{S}_{CUADRANTE}=\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C}+\mathbb{M}$ .....(II)

* *(I)=(II)* :

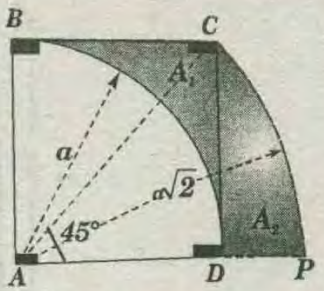
$$\mathbb{X}+\mathbb{M}=\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C}+\mathbb{M} \Rightarrow \boxed{\mathbb{X}=\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C}}$$

7) Si ***ABCD*** es un cuadrado luego se cumple:



$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_x=\frac{\mathbb{S}_{ABCD}}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :



$\mathbb{S}_x = A_1 + A_2$ .....(I)

$A_1 = \mathbb{S}_{ABCD} - \mathbb{S}_{CUADRANTE}$

$A_1 = \mathbb{S}_{ABCD} - \pi a^2/4$ .....(α)

$A_2 = \mathbb{S}_{SECTOR} - \mathbb{S}_{ACD}$

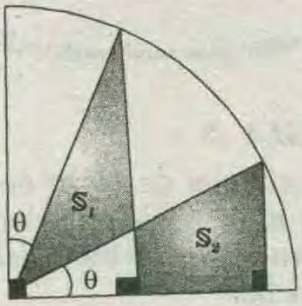
$A_2 = \mathbb{S}_{SECTOR} - \mathbb{S}_{ACD}$

$$A_2 = \frac{\pi(a\sqrt{2})^2}{8} - \frac{\mathbb{S}_{ABCD}}{2} \Rightarrow A_2 = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{\mathbb{S}_{ABCD}}{2} \text{.....}(\beta)$$

*$(\alpha+\beta)$: $A_1 + A_2 = \mathbb{S}_{ABCD}/2$

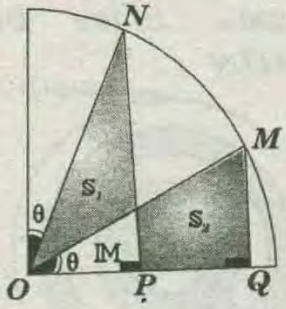
* en (I) : $\mathbb{S}_x = \mathbb{S}_{ABCD}/2$

8) En la figura mostrada , se cumple :



$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2}$

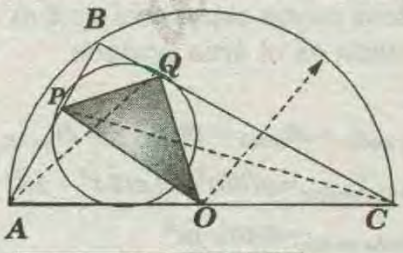
DEMOSTRACIÓN :



$\triangle ONP \equiv OMP$ .....A.L.A

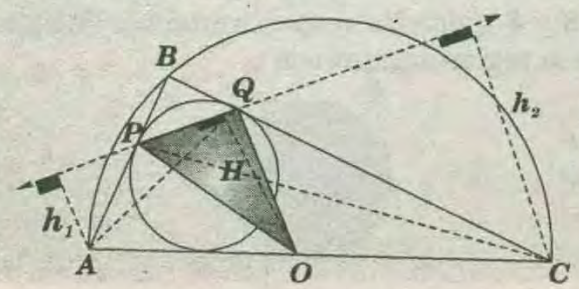
$\mathbb{S}_{ONP} = \mathbb{S}_{OMQ} \Rightarrow \mathbb{S}_1 + \mathbb{M} = \mathbb{S}_2 + \mathbb{M} \Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2}$

9) En la figura mostrada *O* es centro se cumple :



$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{OPQ} = \frac{\mathbb{S}_{APQ} + \mathbb{S}_{PQC}}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :



$\mathbb{S}_{OPQ} = PQ \times H/2$ ..... (I)

$\mathbb{S}_{APQ} = PQ \times h_1/2$

$\mathbb{S}_{PQC} = PQ \times h_2/2$

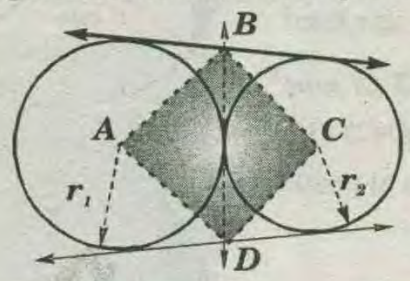
$\mathbb{S}_{APQ} + \mathbb{S}_{PQC} = PQ\,(h_1 + h_2)/2$

* Pero :$H = (h_1 + h_2)/2$.....mediana

$\mathbb{S}_{APQ} + \mathbb{S}_{PQC} = PQ \times (2H)/2 = PQ \times H$

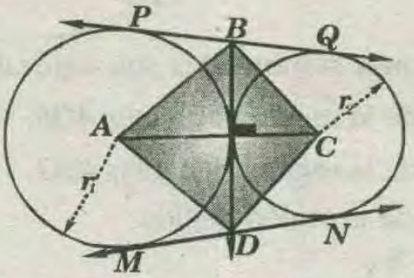
* Remplazando en (I) : $\mathbb{S}_{OPQ} = (\mathbb{S}_{APQ} + \mathbb{S}_{PQC})/2$

10) De la figura mostrada , se cumple :



$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{S}_{ABCD} = \frac{r_1 \times r_2 (r_1 + r_2)}{x}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* De la figura se tiene $AC \perp BD$

$$\mathbb{S}_{ABCD} = \frac{AC \times BD}{2} \text{.....(I)} .$$

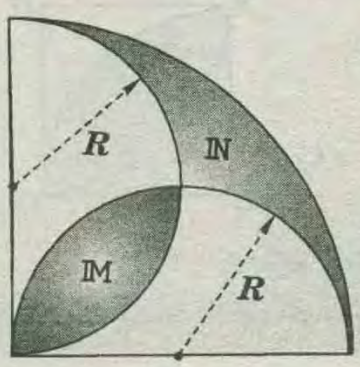
donde $AC = r_1 + r_2$

* Por propiedad : $BD = PQ = MN = 2\sqrt{r_1 r_2}$

* Reemplazando en (I) :

$$\mathbb{S}_{ABCD} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{x}(r_1 + r_2)$$

11) En la figura mostrada , se cumple :

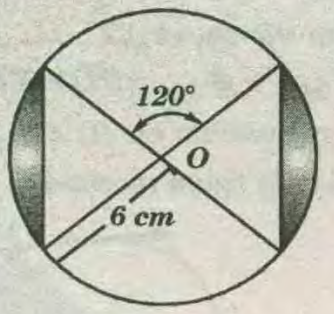


$\Rightarrow \boxed{\mathbb{M} = \mathbb{N}}$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Hallar el área de la región sombreada , donde O es el centro del círculo



A) $6(2\pi - 3\sqrt{3})cm^2$

B) $2(6\pi - 3\sqrt{3})cm^2$

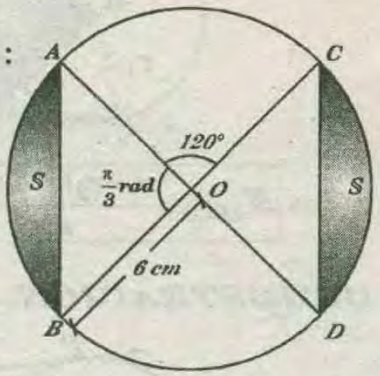
C) $(2\pi - 3\sqrt{3})cm^2$

D) $6(3\sqrt{3} - 2\pi)cm^2$

E) $3(2\pi - 3\sqrt{3})cm^2$

RESOLUCIÓN :

De acuerdo al problema :



* Las regiones sombreadas son equivalentes.

$\mathbb{S}_1$: área de la región del sector AOB.

$\mathbb{S}_2$: área de la región triángular ABO.

$2\mathbb{S}$: área de la región pedida.

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 - \mathbb{S}_2$$

$$\Rightarrow \mathbb{S} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)(6)^2 - \frac{6\times 6}{2} sen\frac{\pi}{3}$$

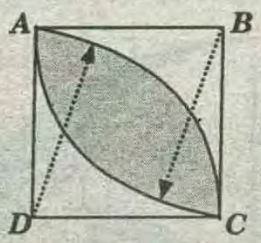
$$\Rightarrow \mathbb{S} = 6\pi - 18\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2\mathbb{S} = 2(6\pi - 9\sqrt{3}) \Rightarrow 2\mathbb{S} = 6(2\pi - 3\sqrt{3})cm^2$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 2 :

En la figura calcular el área de la región sombreada si $AB = 2m$, siendo $ABCD$ un cuadrado .



A) $\pi - 2$

B) $2\pi - 3$

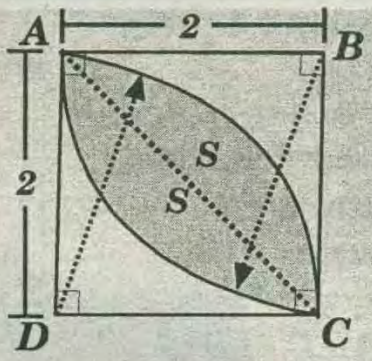
C) $2(\pi - 2)$

D) $2(\pi - 1)$

E) $3\pi - 2$

RESOLUCIÓN:

* Piden : Área(región sombreada) = $2S$



* Se observa :

$$S = Área_{(\text{⌓}ADC)} - Área_{(\text{◺}ADC)}$$

$$S = \frac{\pi}{4}(2)^2 - \frac{(2)\times(2)}{2} \Rightarrow S = \pi - 2$$

* Luego: $Área_{(región\ sombreada)} = 2(\pi - 2)$

RPTA : "C"

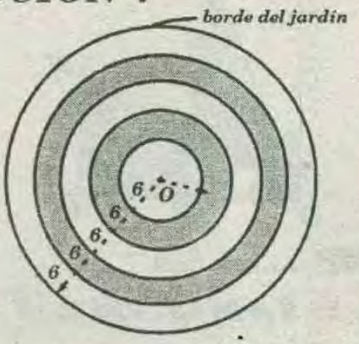
PROBLEMA 3 :

En un jardín circular de $60\ m$ de diámetro se han podado dos anillos concéntricos y simétricos ; además determinan en el radio del jardín segmentos de $6\ m$ de ancho.

¿Cuánto es el área que falta podar?

A) $25\pi m^2$ B) 250π C) 10π D) 540π E) 25π

RESOLUCIÓN :



Se muestran los dos anillos concéntricos y simétricos cuyos espesores es $6\ m$, donde la región sombreada es el área podada.

Luego

$$\mathbb{A}_{falta\ podar} = \mathbb{A}_{total} - \mathbb{A}_{podada} = \mathbb{A}_{jardín} - \mathbb{A}_{región\ sombreada}$$

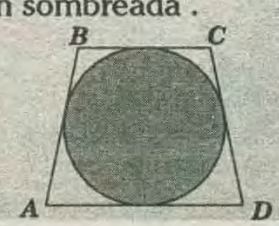
$$\Rightarrow \mathbb{A}_{falta\ podar} = \pi(30)^2 - [\pi(24^2 - 18^2) + \pi(12^2 - 6^2)]$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}_{falta\ podar} = 540\pi\ m^2$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 4 :

En el trapecio isósceles $ABCD$, cuyas bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ miden 6 y 8 unidades respectivamente. Calcular el área de la región sombreada .



A) $10\ m^2$

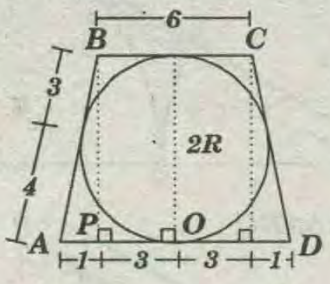
B) $12\ m^2$

C) $16\ m^2$

D) $24\ m^2$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando el teorema Pitágoras en el $\triangle APB$.



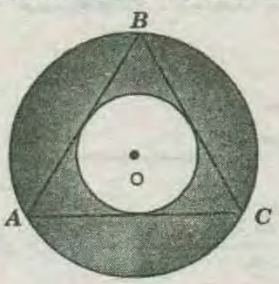
$$1^2 + (2R)^2 = 7^2 \rightarrow R = 2\sqrt{3}$$

* Se pide : $S_{sombreada} = S_{círculo} = \pi(2\sqrt{3})^2 = 12$

RPTA : "B"

PROBLEMA 5 :

En la figura , ABC es un triángulo equilátero cuyo lado mide $6\ cm$ y O es centro del círculo inscrito y circunscrito al triángulo ABC. Hallar el área de la región sombreada.

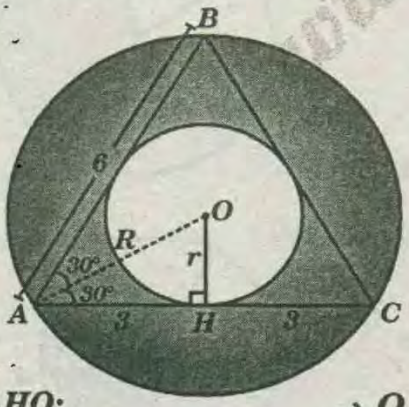


A) $3\pi\ cm^2$ B) $12\pi\ cm^2$ C) $9\pi\ cm^2$

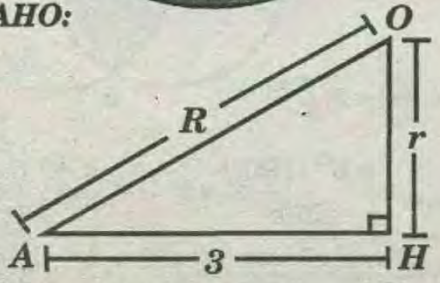
D) $6\pi\ cm^2$ E) $15\pi\ cm^2$

RESOLUCIÓN :

* Dato: ΔABC es equilátero además $AB=6$ se deduce que $\mathbb{A}_{sombreada} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$



En el $\triangle AHO$:



Del teorema de Pitágoras , se tiene $R^2 - r^2 = 9$

Reemplazamos en lo que nos piden

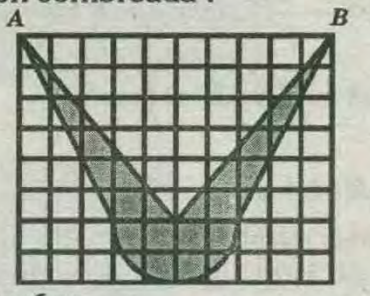
$$\mathbb{A}_{sombreada} = \pi(\underbrace{R^2 - r^2}) = \pi(9)$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}_{sombreada}\ es = 9\pi\ cm^2$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

Si cada cuadradrito tiene $1\ cm$ de lado . Calcular el área de la región sombreada .



A) $\pi - 2$
B) $(\pi + 2)/3$
C) $2(\pi + 6)$
D) $8\pi + 2$
E) $2 - 4\pi$

RESOLUCIÓN :

* Se puede apreciar que lo pedido equivale al área de 2 triángulos más el área de un semicírculo de radio 2.

$$S_{sombreada} = 2\,(S_{\triangle}) + S_{\smile}$$

$$\Rightarrow S_{sombreada} = 2\left(\frac{2 \times 6}{2}\right) + \frac{\pi(2)^2}{2} = 2(6 + \pi)$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 7 :

En la figura , el perímetro del triángulo equilátero ABC , circunscrito a la circunferencia de centro O , es $9\ cm$. Hallar el área de la región sombreada.

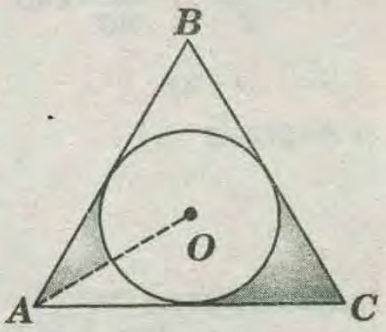
A) $\frac{3}{8}\left(3\sqrt{3} - \pi\right) cm^2$

B) $\frac{3}{8}\left(4\sqrt{3} - \pi\right) cm^2$

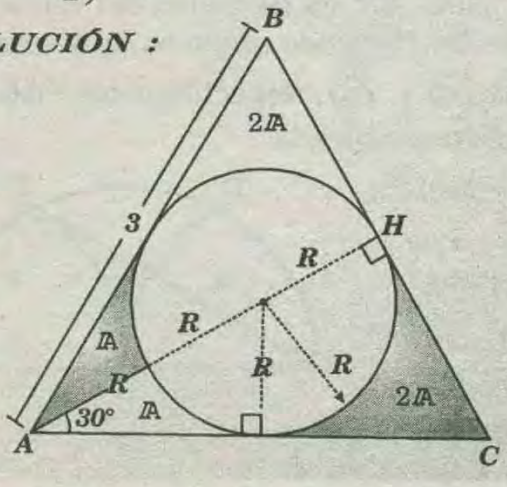
C) $\frac{3}{4}\left(3\sqrt{3} - \pi\right) cm^2$

D) $\frac{3}{4}\left(2\sqrt{3} - \pi\right) cm^2$

E) $\frac{1}{2}\left(2\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) cm^2$



RESOLUCIÓN :



Piden el área de la región sombreada $\mathbb{A}_s$.

Del dato: $\begin{cases} AB=3 \\ \mathbb{A}_s=3\mathbb{A} \end{cases}$

$\Delta ABC: AH=\frac{3}{2}\sqrt{3} \Rightarrow R=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Luego: $6\mathbb{A}=\mathbb{A}_{\triangle ABC}-\pi R^2$

$$6\mathbb{A}=\frac{3^2\sqrt{3}}{4}-\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}\sqrt{3}-\frac{3}{4}\pi$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}_s=3\mathbb{A}=\frac{3}{8}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)cm^2$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 8 :

Hallar el área sombreada, si: ABC es un triángulo equilátero de lados igual a 4, además "M", "N" y "P" son puntos medios .

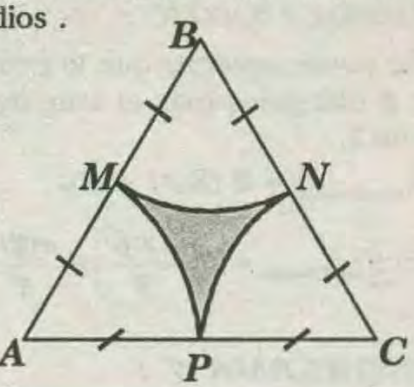
A) $3\sqrt{3}-1$

B) $3(\sqrt{3}-\pi)$

C) $2(2\sqrt{3}-\pi)$

D) $4(\sqrt{3}+\pi)$

E) $4(2\sqrt{3}\pi)$



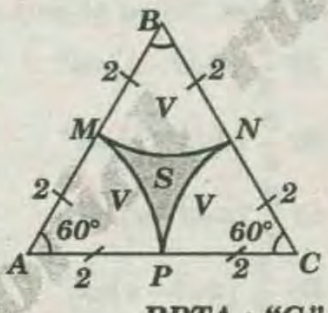
RESOLUCIÓN:

* De la figura, se deduce que : $S=A_{(ABC)}-3V$

$$\rightarrow S=\frac{4^2\sqrt{3}}{4}-\left(\frac{3\pi 2^2}{360^\circ}\times 60^\circ\right)$$

$$\rightarrow S=4\sqrt{3}-2\pi$$

$$\rightarrow S=2(2\sqrt{3}-\pi)$$



RPTA : "C"

PROBLEMA 9:

En la figura $\overline{AB}$ es diámetro del semicírculo y $AO=OB=2m$. Haciendo centro en A y B se ha trazado los arcos $\widehat{DO}$ y $\widehat{CO}$, respectivamente. Halle el área de la región sombreada.

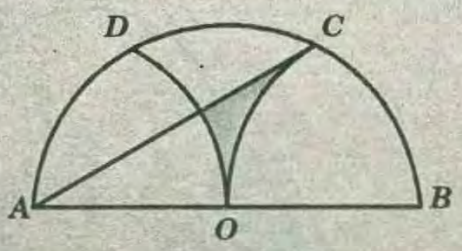
A) $(\sqrt{3}-2\pi)m^2$

B) $(2\sqrt{3}-\pi)m^2$

C) $(\sqrt{3}-\pi)m^2$

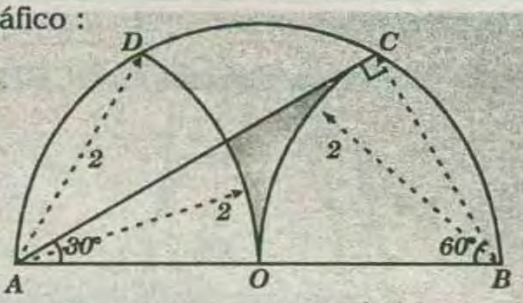
D) $(3\sqrt{3}-2\pi)m^2$

E) $(2\sqrt{3}-2\pi)m^2$

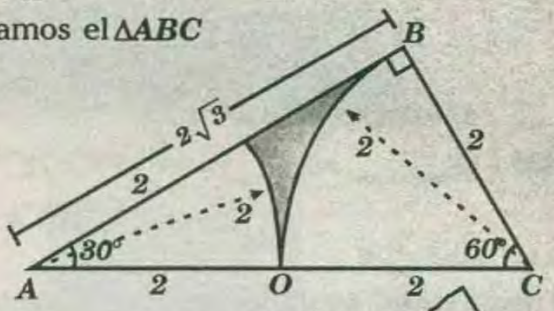


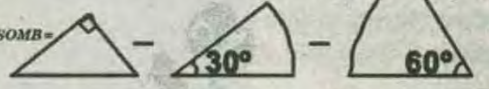
RESOLUCIÓN :

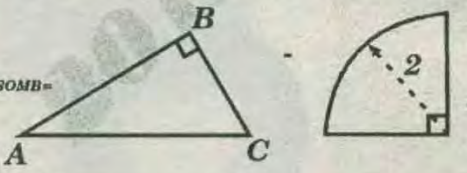
En el gráfico :



Analizamos el ΔABC



$A_{SOMB}=$ 

$A_{SOMB}=$ 

$$\mathbb{A}_{SOMB}=\frac{2\sqrt{3}\times 2}{2}-\frac{\pi(2)^2}{4} \Rightarrow \mathbb{A}_{SOMB}=2\sqrt{3}-\pi$$

RPTA "B"

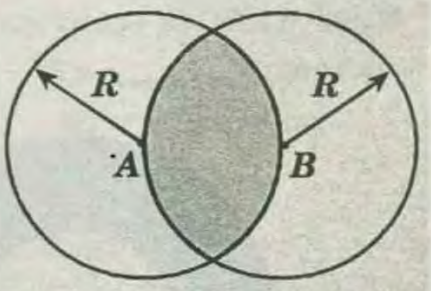
PROBLEMA 10 :

Hallar el área de la región sombreada en función de R.

A) $\frac{R^2}{6}(2\pi-\sqrt{3})$

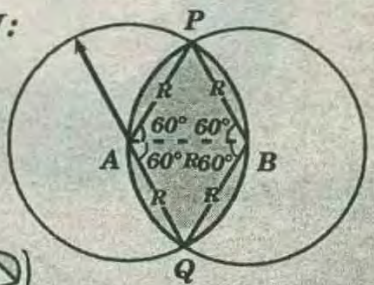
B) $\frac{R^2}{6}(\pi-3)$

C) $\frac{R^2}{6}(4\pi-3\sqrt{3})$



RESOLUCIÓN:

* De la figura :



$$S_{sombreada}=\text{(sector)}+2\text{(triángulo)}$$

$$\rightarrow S_{sombreada}=\frac{\pi R^2(120^\circ)}{360^\circ}+2\ (\triangleright-\triangle)$$

$$\rightarrow S_{sombreada}=\frac{\pi R^2}{3}+2\left(\frac{\pi R^2 60^\circ}{360^\circ}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\rightarrow S_{sombreada}=\frac{R^2}{6}(4\pi-3\sqrt{3})$$

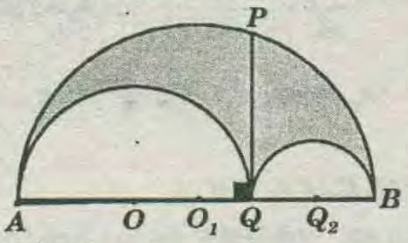
RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

Encontrar el área de la región sombreada , si :

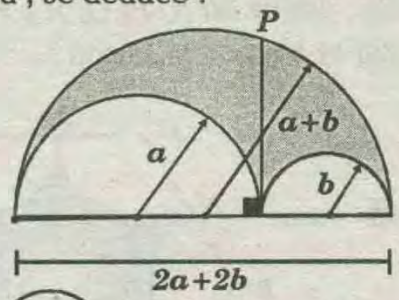
$PQ = 4\ cm$.

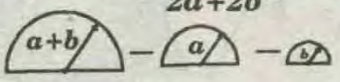
A) $3\pi cm^2$
B) 2π
C) 4π
D) 8π
E) 16π



RESOLUCIÓN:

* De la figura , se deduce :



$\rightarrow A_{somb} =$ 

$$\rightarrow A_{somb} = \frac{\pi(a+b)^2}{2} - \frac{\pi a^2}{2} - \frac{p\pi^2}{2}$$

$$\rightarrow A_{somb} = \pi ab$$

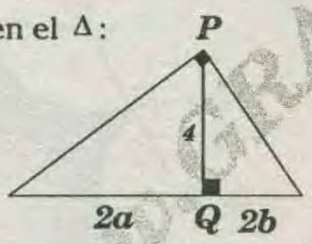
* Luego :

* Por relaciones métricas en el Δ :

$4^2 = 2a \times 2b$

$\rightarrow 4 = ab$

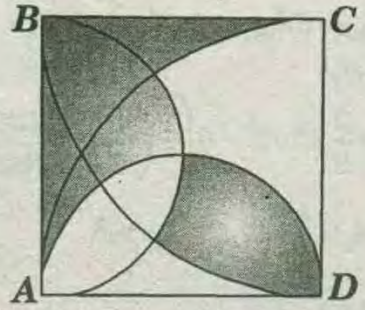
$\rightarrow A_{somb} = \pi ab = 4\pi cm^2$.



RPTA : "C"

PROBLEMA 12 :

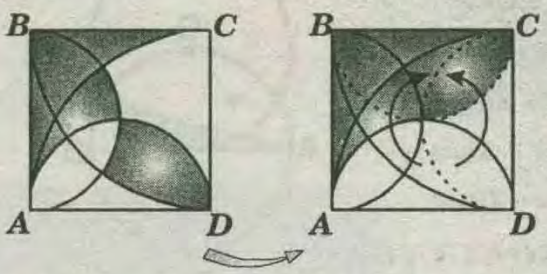
En la figura , $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ son diámetros de circulos ; C y D son centros de arcos de circunferencias. ¿Qué parte del área del cuadrado $ABCD$ es el área de la región sombreada?



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{5}$

RESOLUCIÓN :

* En el gráfico piden : $\frac{A_{sombreada}}{A_{\square ABCD}}$



por traslado de áreas (regiones equivalentes)

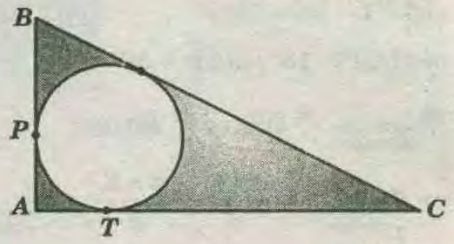
$$\frac{A_{sombreada}}{A_{\square ABCD}} = \frac{1}{2}$$

RPTA : "C"

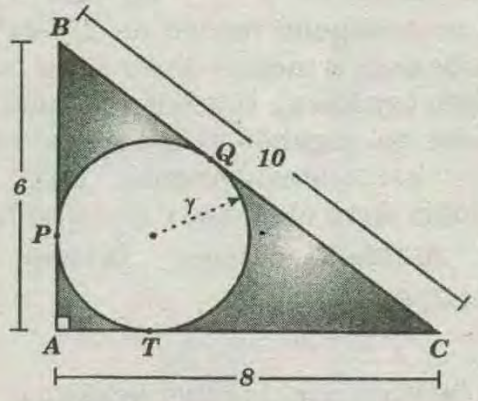
PROBLEMA 13 :

En la figura , $AB=6cm$ y $BC=10cm$; P , Q y T son puntos de tangencia. Calcular el área de la región sombreada.

A) $(18-2\pi)cm^2$
B) $(24-2\pi)cm^2$
C) $(18-4\pi)cm^2$
D) $(24-4\pi)cm^2$
E) $(24-\pi)cm^2$



RESOLUCIÓN :



Piden $A_{reg.sombreada}$

$\triangle BAC$ notable $37°; 53° \Rightarrow AC = 8$

$\triangle BAC$: Teorema de Poncelet

$\Rightarrow 6+8 = 10+2r \rightarrow r = 2$

$A_{reg.sombreada} = A_{\triangle} - A_{\circ}$

$$A_{reg.sombreada} = \frac{6\times 8}{2} - \pi(2)^2$$

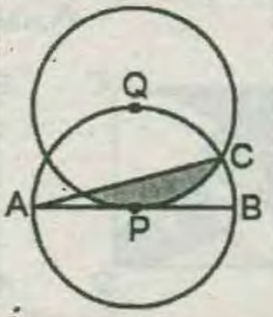
$$A_{reg.sombreada} = 24 - 4\pi \Rightarrow A_{reg.sombreada} = (24-4\pi)cm^2$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 14 :

En la figura , P y Q son centros de los círculos congruentes. Si $AP = PB = 2$ cm y P es punto de

tangencia , calcule el área de la región sombreada.



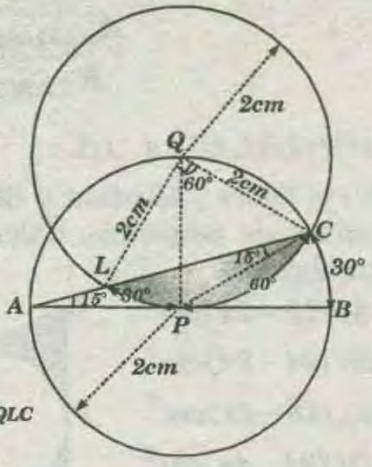
A) $(\pi - 2)cm^2$
B) $2(\pi - 2)cm^2$
C) $(\pi + 2)cm^2$
D) $2(\pi + 2)cm^2$
E) $(2\pi - 3)cm^2$

RESOLUCIÓN :

Notamos que el $\triangle QPC$ es equilátero

$$m\widehat{PC} = 60°$$

Además, $m\widehat{BC} = 30°$



Por $\sphericalangle$ inscrito

$$m\sphericalangle CAB = 15°$$

$\triangle APC$ isósceles

$m\sphericalangle LCP = 15°$; $m\widehat{LP} = 30°$

$$\mathbb{A}_{\substack{segmento\\circular}} = \mathbb{A}_{\triangle LQC} - \mathbb{A}_{\triangle QLC}$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}_{\substack{segmento\\circular}} = \frac{\pi(2)^2}{4} - \frac{2\times 2}{2} \Rightarrow \mathbb{A}_{\substack{segmento\\circular}} = (\pi - 2)\,cm^2$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 15 :

Se tiene un hexágono regular de $320\ m^2$ de área. Uniendo los puntos medios de los lados , se obtiene un segundo hexágono. Uniendo los puntos medios de los lados del segundo exágono , se obtiene un tercero y así sucesivamente. Halle el área comprendida entre el primer y el cuarto hexágono.

A)$215m^2$ B)$165m^2$ C)$185m^2$ D)$190m^2$ E)$205m^2$

RESOLUCIÓN :

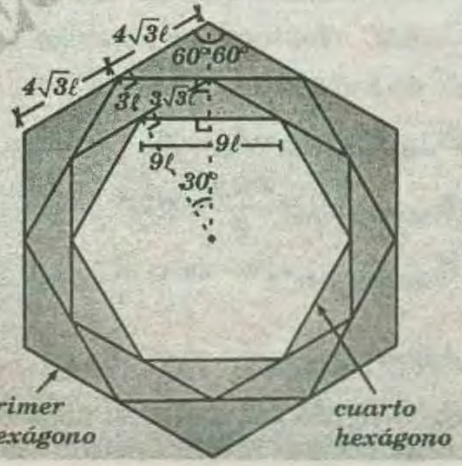
Sea :

$\mathbb{A}_1$:área limitada por el primer hexágono

$\mathbb{A}_4$:área limitada por el cuarto hexágono

Piden: $\mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_4$

Dato: $\mathbb{A}_1 = 320\ m^2$



Por semejanza :

$$\frac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_4} = \left(\frac{8\sqrt{3}\ell}{9\ell}\right)^2 \Rightarrow \mathbb{A}_4 = 135\ m^2$$

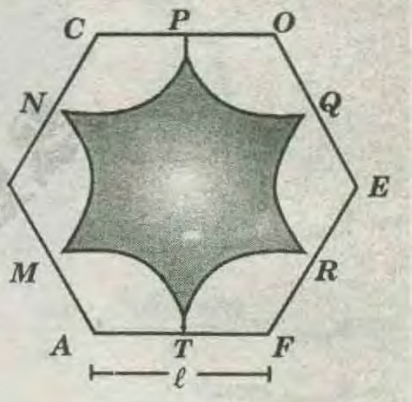
Luego :

$$\mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_4 = 320\ m^2 - 135\ m^2 \Rightarrow \mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_4 = 185\ m^2$$

RPTA "C"

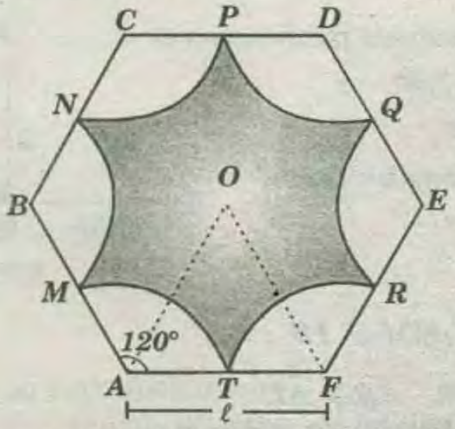
PROBLEMA 16 :

En la figura , *ABCDEF* es un hexágono regular. De cada uno de sus vértices se trazan arcos de circunferencia , donde *M; N; P; Q; R* y *T* son puntos medios , hallar el área de la región sombreada.



A) $\ell^2(3\sqrt{3} - \pi)u^2$
B) $\left(\frac{\ell}{2}\right)^2(3\sqrt{3} - \pi)u^2$
C) $\frac{\ell^2}{4}(6\sqrt{3} - \pi)u^2$
D) $\frac{\ell^2}{2}(3\sqrt{3} - \pi)u^2$
E) $\frac{\ell^2}{2}(\pi - \sqrt{3})u^2$

RESOLUCIÓN :



Piden: área de la región sombreada= $\mathbb{A}_s$,

$$\mathbb{A}_s = \mathbb{A}_{\hexagon ABCDEF} - 6\mathbb{A}_{\hexagon MAT} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

pero

$$\mathbb{A}_{\hexagon ABCDEF} = 6\mathbb{A}_{\triangle AOF} = 6\left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3}{2}\ell^2\sqrt{3}$$

* Luego , en *(I)*:

$$\mathbb{A}_s = \frac{3}{2}\ell^2\sqrt{3} - 6\left(\pi\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \times \frac{120°}{360°}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}_s = \frac{\ell^2}{2}(3\sqrt{3} - \pi)u^2$$

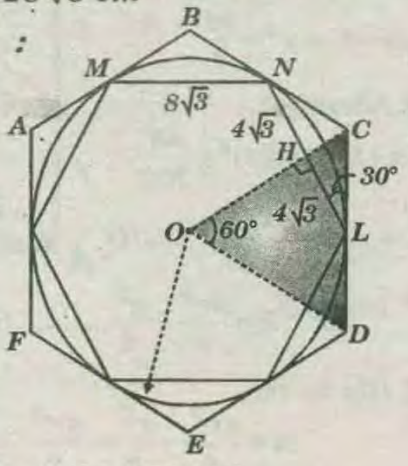
RPTA : "D"

PROBLEMA 17 :

El lado del hexágono regular inscrito en una circunferencia mide $8\sqrt{3}\,cm$. Hallar el área del hexágono regular circunscrito.

A) $376\sqrt{3}\ cm^2$ B) $464\sqrt{3}\ cm^2$ C) $296\sqrt{3}\ cm^2$
D) $384\sqrt{3}\ cm^2$ E) $428\sqrt{3}\ cm^2$

RESOLUCIÓN :



Piden $\mathbb{A}$

Siendo $\mathbb{A}$ el área de la región *ABCDEF*

Pero $\mathbb{A} = 6(\mathbb{A}_{\triangle COD})$

Como el $\triangle COD$ es equilátero

$$\Rightarrow \mathbb{A} = 6\left(\frac{(CD)^2\sqrt{3}}{4}\right) \quad \text{.....(I)}$$

También : $NH = HL = 4\sqrt{3}$

$\triangle CHL$ es notable de 30° y 60°

$\Rightarrow CL = 8$ y $DL = 8$

* Luego : $CD = 16$

* Reemplazamos en *(I)* :

$$\mathbb{A} = 6\left(\frac{16^2\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow \mathbb{A} = 384\sqrt{3}\ cm^2$$

RPTA : "D"

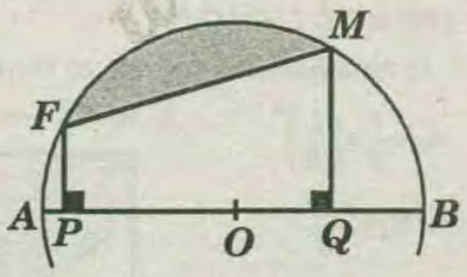
PROBLEMA 18 :

Calcular el área de la región sombreada, si: $m\widehat{FM} = 90°$, $FP = 3$ y $MQ = 4$

A) $\frac{17}{3}(\pi - 1)\mu^2$

B) $\frac{13}{2}(\pi - 2)$

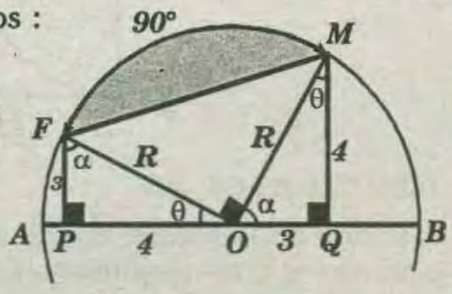
C) $\frac{25}{4}(\pi - 2)$



RESOLUCIÓN :

* Trazando los radios :

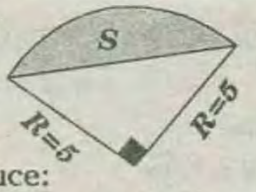
* Del gráfico :



$\triangle FPO \cong \triangle OQM$

$\rightarrow R = 5$

* Ahora :



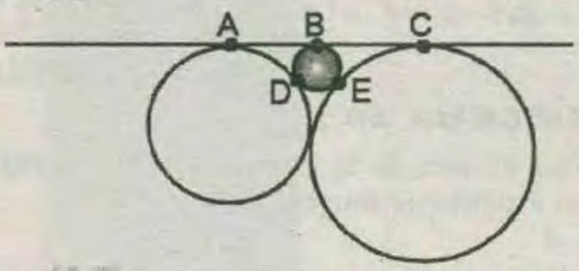
* De donde se deduce:

$$S = \frac{\pi 5^2}{4} - \frac{5\times 5}{2} \Rightarrow S = \frac{25\pi}{4} - \frac{25}{2} = \frac{25}{4}(\pi - 2)$$

RPTA : "C"

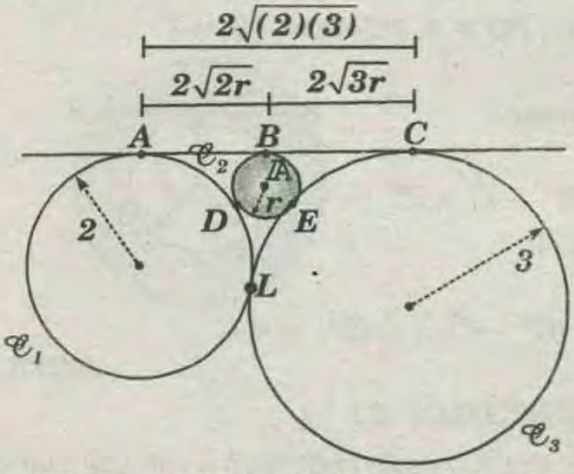
PROBLEMA 19 :

En la figura , A, B, C, D y E son puntos de tangencia. Si los radios de las circunferencias miden *2 cm* y *3 cm* respectivamente , hallar el área del círculo sombreado.



A) $34\pi(5 - 2\sqrt{6})^2 cm^2$ B) $26\pi(5 - 2\sqrt{6})^2 cm^2$
C) $33\pi(5 - 2\sqrt{6})^2 cm^2$ D) $25\pi(5 - 2\sqrt{6})^2 cm^2$
E) $36\pi(5 - 2\sqrt{6})^2 cm^2$

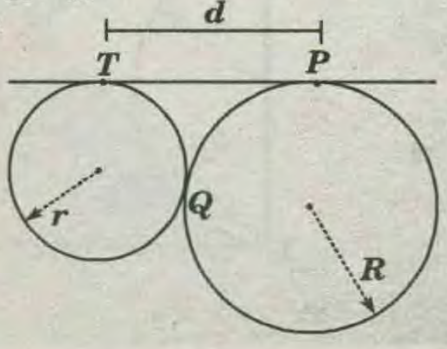
RESOLUCIÓN :



En el problema, el punto L debe ser punto de tangencia para que pueda ser resuelto

Piden $\mathbb{A}$, si $\mathbb{A}$ es el área del círculo de radio r, entonces. $\mathbb{A} = \pi r^2$

Teorema :



Si P, T y Q son puntos de tangencia

$$\rightarrow d = 2\sqrt{Rr}$$

En el problema:

$De\ \mathscr{C}_1\ y\ \mathscr{C}_2: AB = 2\sqrt{2r}$

$De\ \mathscr{C}_2\ y\ \mathscr{C}_3: BC = 2\sqrt{3r}$

$De\ \mathscr{C}_1\ y\ \mathscr{C}_3: AC = 2\sqrt{(2)(3)}$

$\Rightarrow 2\sqrt{(2)(3)} = 2\sqrt{6}$

$AB + BC = AC \Rightarrow 2\sqrt{2r} + 2\sqrt{3r} = 2\sqrt{6}$

$\Rightarrow \sqrt{2r} + \sqrt{3r} = \sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{r}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 2\sqrt{6}$

$$\Rightarrow \sqrt{r} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \Rightarrow r^2 = 36\left[(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2\right]^2$$

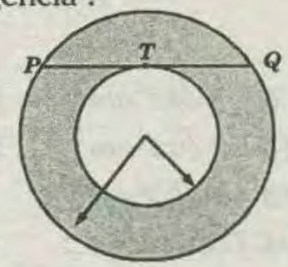
$$\Rightarrow r^2 = 36(5-2\sqrt{6})^2 \Rightarrow \boxed{A = 36\pi(5-2\sqrt{6})^2\,cm^2}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 20 :

Calcular el área de la corona circular, si $PQ = 4$, siendo T punto de tangencia .

A) $\pi\mu^2$
B) 2π
C) 6π
D) 8π
E) 4π



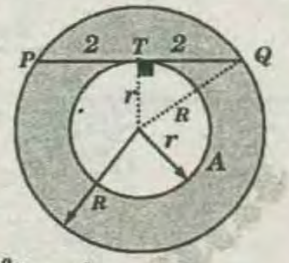
RESOLUCIÓN :

* Como $PQ = 4$, entonces $TQ = 2$

* Además :

$$R^2 - r^2 = 2^2$$

* Se pide :



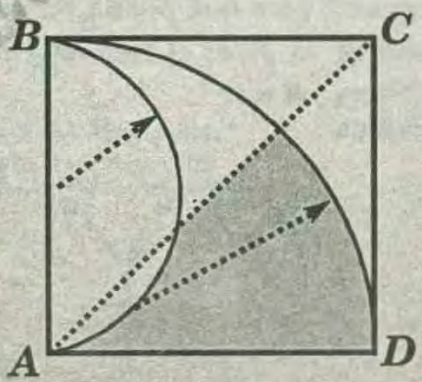
$$A = \pi(R^2 - r^2) = \pi(2^2) = 4\pi$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 21 :

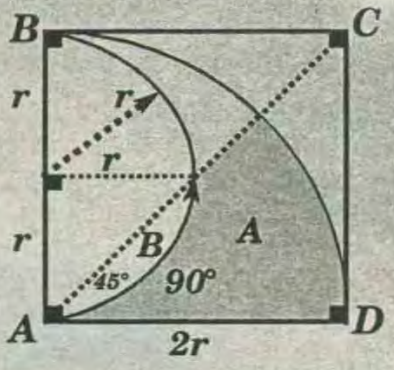
$ABCD$, es un cuadrado de lado $5\ cm$, calcular el área de la región sombreada .

A) $\frac{25}{16}(1+\pi)\mu^2$
B) $\frac{17}{11}(2+\pi)$
C) $\frac{25}{16}(3+\pi)$
D) $\frac{25}{16}(2+\pi)$



RESOLUCIÓN :

* De la figura :



$$2r = 5 \rightarrow r^2 = \frac{25}{4}$$

* Además :

$$A + B = \pi(2r)^2 \times \frac{45°}{360°}$$

$$\rightarrow A + B = \frac{\pi r^2}{2} \quad .....(I)$$

* Luego : $B = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$ .....(II)

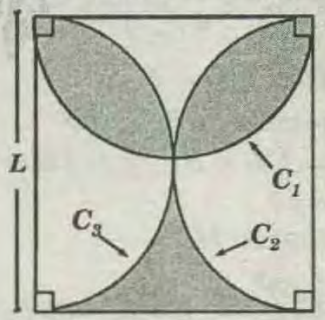
* (II) en (I) :

$$A + \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} = \frac{\pi r^2}{2} \rightarrow A = \frac{25}{16}(2+\pi)$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 22 :

Si C_1, C_2 y C_3 son semicírculos de radios iguales, entonces el área de la figura sombreada en función del lado L del cuadrado , es :



A) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)L^2$ B) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)L^2$ C) $\frac{\pi}{4}L^2$

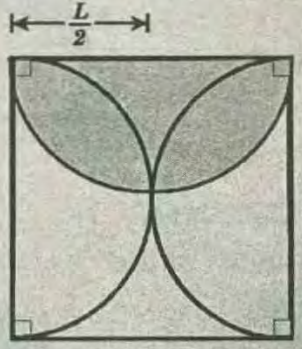
D) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{8}\right)L^2$ E) $\frac{1}{8}\pi L^2$

RESOLUCIÓN:

* El área pedida equivale al semicírculo

$$S_x = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow S_x = \frac{\pi L^2}{8}$$



RPTA : "E"

PROBLEMA 23 :

Si el lado del cuadrado inscrito en el circulo C_1 es L, entonces el área sombreada de la figura mostrada , en función de radio R de la circunferencia C_1, es :

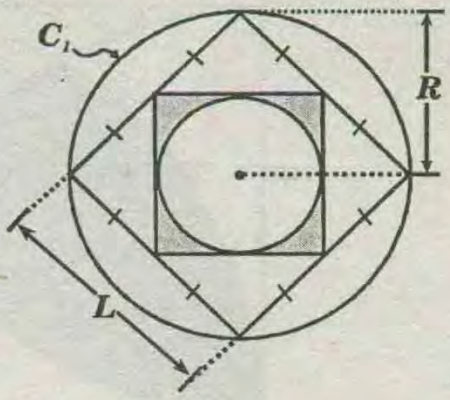
A) $\frac{\pi}{4}R^2$

B) $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)R^2$

C) $\left(2-\frac{\pi}{4}\right)R^2$

D) $\left(4-\frac{\pi}{4}\right)R^2$

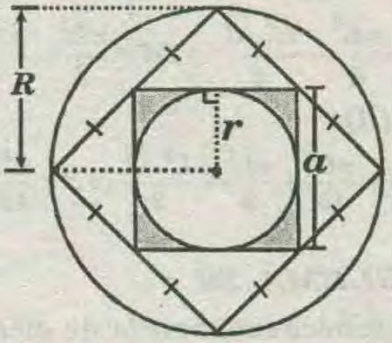
E) $\frac{3\pi}{4}R^2$



RESOLUCIÓN:

* El área pedida : $S=a^2-\pi r^2$

* Siendo :



$r=\frac{R}{2}$ y $a=2r$

$\rightarrow a=R$

$\Rightarrow S=R^2-\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)R^2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 24 :

Calcular el área de la región sombreada, si $AB = 20cm$. Además $ABCD$ es un cuadrado.

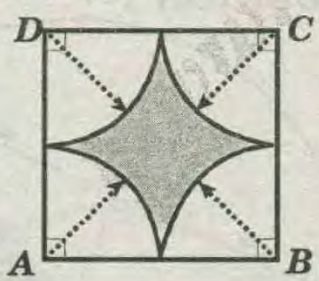
A) $100(\pi-1)$

B) $100(2+\pi)$

C) $100(4-\pi)$

D) 100π

E) $100(\pi-1)$



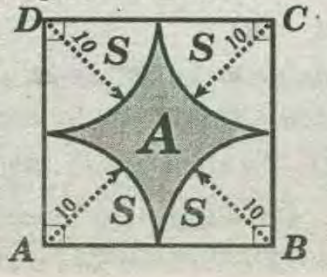
RESOLUCIÓN :

* Piden: $A=Área_{(\square ABCD)}-4S$

* Donde:

A : área de la región sombreada

S : área de la región cuadrantal



Se observa:

$Área_{(\square ABCD)}=(20)^2=400\,m^2$

$S=\frac{\pi}{4}(10)^2=25\pi cm^2 \rightarrow A=400-4(25\pi)$

$\rightarrow A=100(4-\pi)$

RPTA : "C"

PROBLEMA 25 :

En la figura, el área de la parte sombreada es : ($ABCD$: cuadrado).

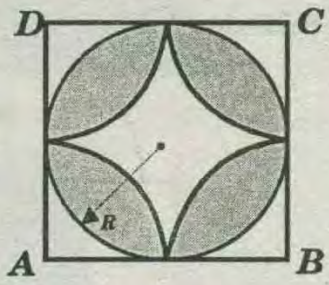
A) $R^2(\pi-2)$

B) $R^2(\pi+2)$

C) $2R^2(\pi-2)$

D) $R^2(3\pi-3)$

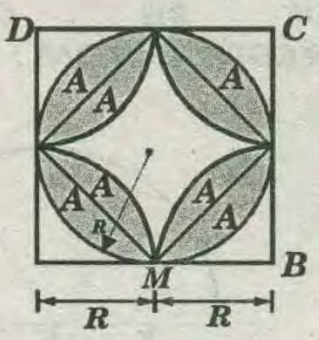
E) $R^2(\pi-1)$



RESOLUCIÓN :

* De la figuran: Piden $8A$

* Donde :



A = Área del segmento circular

* Calculando : A

$A = Área_{\triangle MAN} - Área_{\triangle MAN}$

$\rightarrow A=\left(\frac{\pi}{4}\right)R^2-\frac{R^2}{2}=R^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$

$\rightarrow 8A=2R^2(\pi-2)$

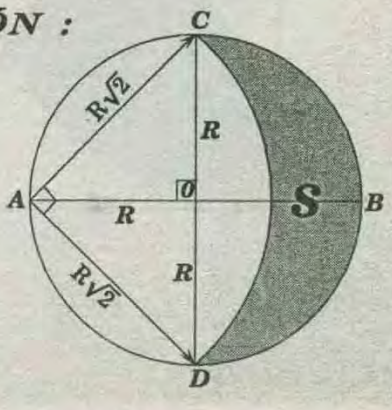
RPTA : "C"

PROBLEMA 26 :

En una circunferencia de centro O y radio R se tienen los diámetros perpendiculares $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ por A se traza un arco CD de radio AC, calcule el área de la región exterior al arco $\widehat{CD}$ e interior a la circunferencia.

A) $\frac{R^2}{\sqrt{2}}$ B) R^2 C) $\sqrt{2}R^2$ D) $\frac{\sqrt{2}\pi R^2}{3}$ E) $\sqrt{3}R^2$

RESOLUCIÓN :



$$S=\pi R^2-\left[\frac{\pi R^2}{2}+\frac{\pi(R\sqrt{2})^2}{4}-\frac{(R\sqrt{2})^2}{2}\right]$$

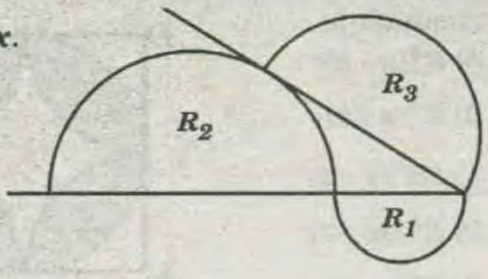
* Simplificando: $S=R^2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

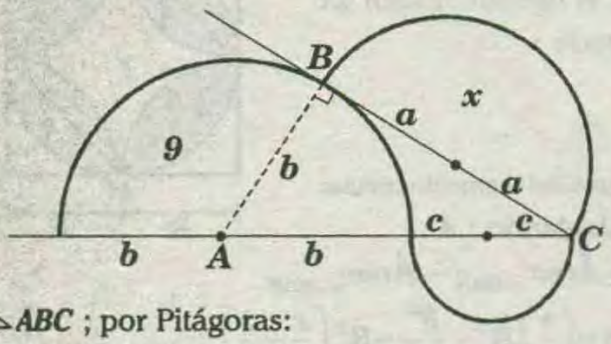
En el diagrama adjunto las áreas de las 3 semicírculos R_1, R_2 y R_3 son: 4, 9 y x respectivamente.

Halle el valor de x.



A)8 B)9 C)10 D)11 E)12

RESOLUCIÓN :



* $\triangle ABC$; por Pitágoras:

$$b^2+4a^2=(b+2c)^2 \rightarrow a^2=bc+c^2$$

* Pero :

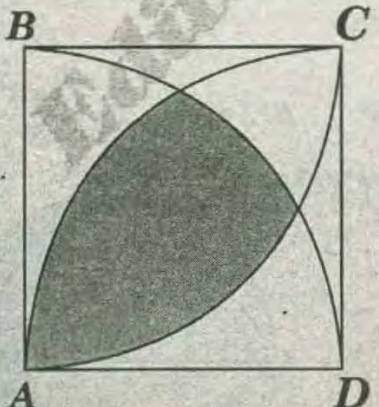
$$x=\frac{\pi a^2}{2};\ 9=\frac{\pi b^2}{2};\ 4=\frac{\pi c^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{\pi}=\frac{\sqrt{9.16}}{\pi}+\frac{8}{\pi} \rightarrow x=10$$

RPTA : "C"

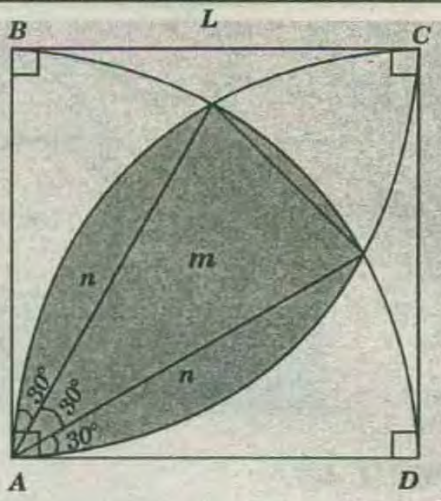
PROBLEMA 28 :

En la figura si $AB=L$, halle el área de la región sombreada.



A) $\frac{L^2}{12}(\pi-1)$ B) $\frac{L^2}{3}$ C) $\frac{L^2}{4}$ D) $\frac{L^2}{12}(5\pi-6\sqrt{3})$

RESOLUCIÓN :



$$m=\frac{\pi L^2(30°)}{360°} \rightarrow m=\frac{\pi L^2}{12} \quad \text{.....(I)}$$

$$n=\frac{\pi L^2}{6}-\frac{L^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow 2n=\frac{\pi L^2}{3}-\frac{L^2\sqrt{3}}{2} \quad \text{.....(II)}$$

* (I) + (II):

$$S=\frac{\pi L^2}{12}+\frac{\pi L^2}{3}-\frac{L^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S=\frac{L^2}{12}(5\pi-6\sqrt{3})$$

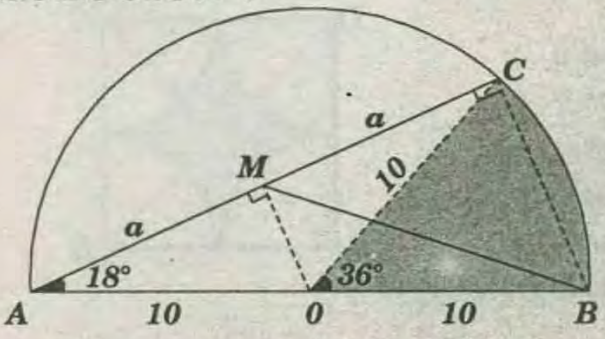
RPTA : "D"

PROBLEMA 29 :

En una semicircunferencia de diámetro AB donde $AB=20$ se ubica el punto C en el arco $\overset{\frown}{AB}$ tal que $m\sphericalangle BAC=18$, $M\in \overline{AC}$, $AM=MC$, halle el área de la región limitada por $\overline{MC}$, $\overline{MB}$, $\overset{\frown}{BC}$.(en u^2).

A)15π u² B)4π u² C)12π u¹ D)10π u² E)8π u²

RESOLUCIÓN :



$S(\triangle MCB)=S(\triangle OCB)$. $(\overline{OM}\ //\ \overline{BC})$

* Área pedido :

$$S=\frac{\pi(10)^2(36)}{360}=10\pi$$

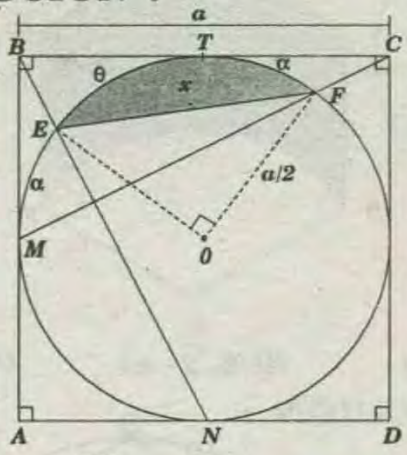
RPTA : "D"

PROBLEMA 30 :

$ABCD$ es un cuadrado de lado a ; M y N son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita, con los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. Sean E y F los puntos de intersección de $\overline{BN}$ y $\overline{CM}$ con la circunferencia. Halle el área del segmento circular EF.

A) $a^2(p-2)$ B) $\frac{a^2}{8}(\pi-2)$ C) $\frac{a^2}{16}(\pi-2)$

RESOLUCIÓN :



$m\widehat{ME} = m\widehat{TF} = \alpha$

* Pero : $m\widehat{MET} = m\widehat{ETF} = \alpha + \theta = 90°$

* Luego : $m\sphericalangle EOF = \alpha + \theta = 90°$

* Ahora : $x = \frac{\pi(a/2)^2}{4} - \frac{(a/2)^2}{2} \Rightarrow x = \frac{a^2}{12}(\pi - 2)$

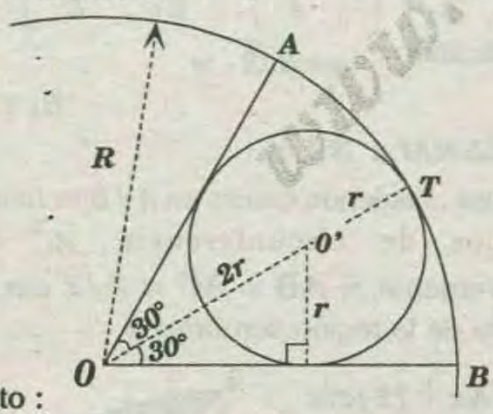
RPTA : "C"

PROBLEMA 31 :

Un sector circular de $60°$ de ángulo central tiene $18u^2$ de área. Halle el área del círculo inscrito en el sector (en u^2).

A)9 B)12 C) $6\sqrt{5}$ D)14 E)15

RESOLUCIÓN :



* Por dato :

$$\frac{\pi R^2}{6} = 18 \Rightarrow \pi(3r)^2 = 6\times 18 \Rightarrow \pi r^2 = 12$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 32 :

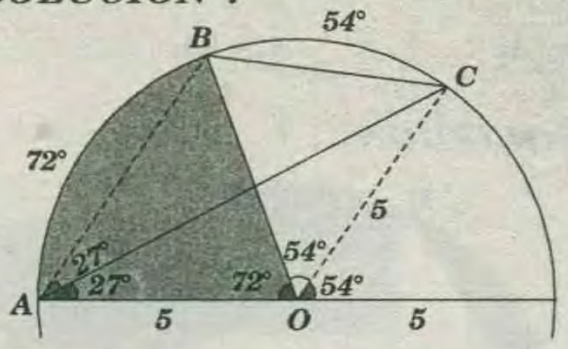
En una circunferencia cuyo radio mide $5m$, se ubican los puntos consecutivos A, B y C tal que :

$$m\widehat{AB} = 72°,\ m\widehat{BC} = 54°.$$

Calcule el área de la región limitada por $\widehat{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ (en m^2).

A)2π B)3π C)4π D)5π E)6π

RESOLUCIÓN :



$\overline{OC} \parallel \overline{AB} \Rightarrow S_{(\Delta ABC)} = S_{(\Delta ABO)}$

Área pedido :

$$S_{\sphericalangle ABO} = \frac{\pi\times 5^2\times 72°}{360°} \Rightarrow S_{\sphericalangle ABO} = 5\pi$$

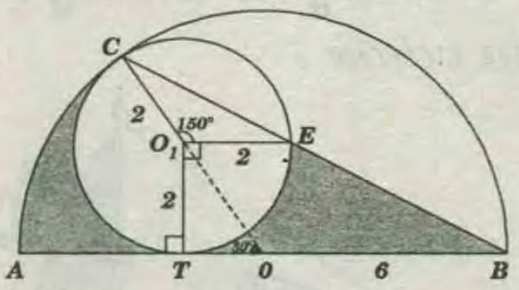
RPTA : "D"

PROBLEMA 33 :

Se tiene una semicircunferencia de diámetro AB y centro O, en la cual se inscribe la circunferencia de centro O' que es tangente al arco AB en C y al diámetro AB = en D, luego se traza la cuerda BC que Intersecta a la circunferencia inscrita en E. Si $O'C=2m$, $OB = 6m$. Calcule el área de la región limitada por $\widehat{AC}$, $\widehat{CTE}$, $\overline{EB}$ y $\overline{AB}$ (en m^2).

A) $\frac{\pi}{3}+5$ B) $\frac{2\pi}{3}+6$ C) $\frac{2\pi}{3}+8$ D) $\pi+8$ E) $\pi+9$

RESOLUCIÓN :



* Área pedido :

$$S = \frac{\pi\times 6^2}{12} + \frac{6.3}{2} - \left[\frac{\pi\times 2^2\times 210}{360} + \frac{4Sen30°}{2}\right]$$

* Simplificando : $S = \frac{2\pi}{3} + 8$

RPTA : "C"

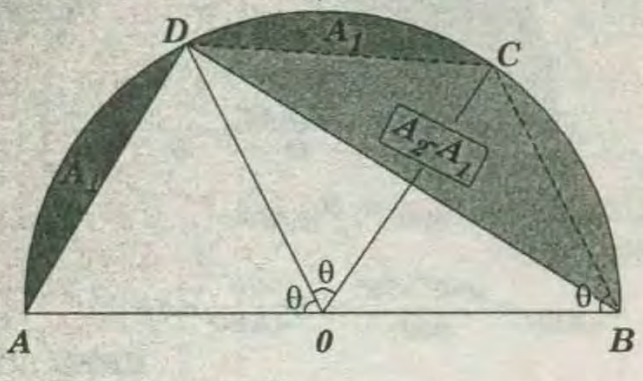
PROBLEMA 34 :

En el semicírculo de diámetro AB y centro O, se trazan los radios $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ con $\overline{OD}$ bisectriz de $\sphericalangle AOC$: Si los segmentos circulares determinados por $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ tienen por área A_1 y A_2, calcule el área del sector circular BOC.

A) $A_2 - A_1$ B) $\frac{A_2 + A_1}{2}$ C) $A_2 - 2A_1$

D) $\frac{A_2 - A_1}{2}$ E) $\frac{A_2 + 2A_1}{3}$

RESOLUCIÓN :



$\overline{OD} // \overline{BC} \Rightarrow S_{(\Delta OCB)} = S_{(\Delta DCB)}$

* Área pedido : $S_{COB} = A_2 - A_1$

RPTA : "A"

PROBLEMA 35 :

Sea el sector circular ***AOB(OA=OB=R)*** cuyo ángulo central mide ***30.***

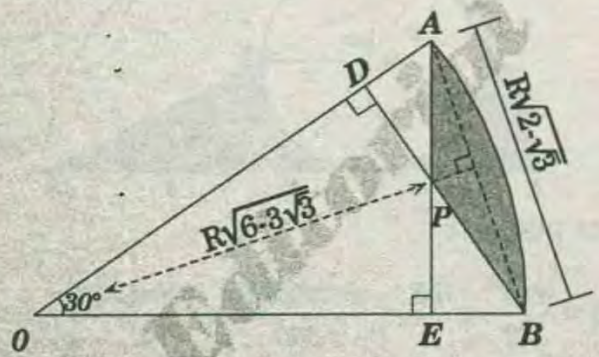
Se trazan $\overline{BD} \perp \overline{OA}$ y $\overline{AE} \perp \overline{OB}$.

Si $\overline{BD}$ y $\overline{AE}$ se intersectan en ***P.***

Calcule el área de la región del triángulo mixto ***APB.***

A) $\frac{R^2}{12}(\pi - 18 + 12\sqrt{3})$ B) $\frac{R^2}{12}(\pi + 18 - 12\sqrt{3})$ C) $\frac{R^2}{12}(\pi + 12 + 6\sqrt{3})$

RESOLUCIÓN :



Área pedido :

$$S = \frac{\pi R^2}{12} - \left[\frac{1}{2} \times R\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} \times R\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right]$$

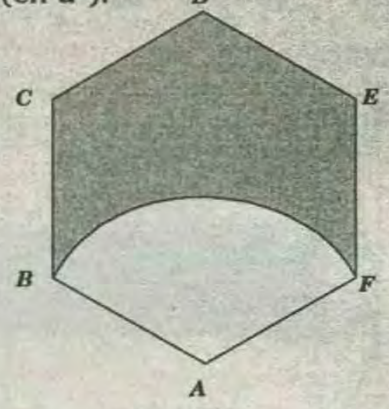
* Simplificando :

$$S = \frac{R^2}{12} - \left(\pi + 18 - 12\sqrt{3}\right)$$

RPTA : "B"

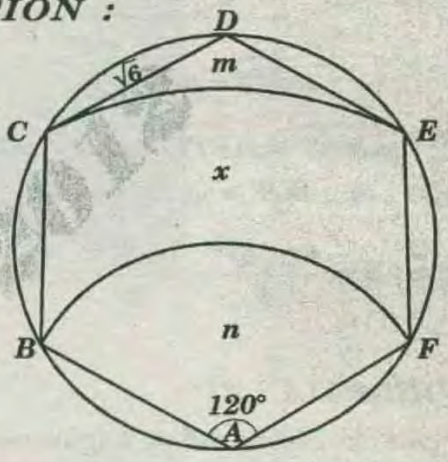
PROBLEMA 36 :

En la figura mostrada ***ABCDEF*** es un hexágono regular de lado igual a $\sqrt{6}\,u$, haciendo centro en ***A*** se trazan los arcos ***CE*** y ***BF***. Calcule el área de la región sombreada (en u^2).



A) $(3\sqrt{3} - \pi)$ B) $(2\sqrt{3} - \pi)$ C) $(3\sqrt{3} + \pi)$

RESOLUCIÓN :



$$m = 6\left(\frac{6\sqrt{3}}{4}\right) - \left[\frac{6\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi \times 18}{6}\right]$$

$$x = 6\left(\frac{6\sqrt{3}}{4}\right) - \left[6\left(\frac{6\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{6\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi \times 18}{6}\right) + \frac{\pi \times 6}{3}\right]$$

* Simplificando : $x = 3\sqrt{3} - \pi$

RPTA : "A"

PROBLEMA 37 :

En la figura , haciendo centro en ***A*** y ***B*** se han trazado los arcos de circunferencia $\widehat{BC}$ y $\widehat{AT}$ respectivamente. Si $AB = AC = 2\sqrt{2}\ cm$, halle el perímetro de la región sombreada.

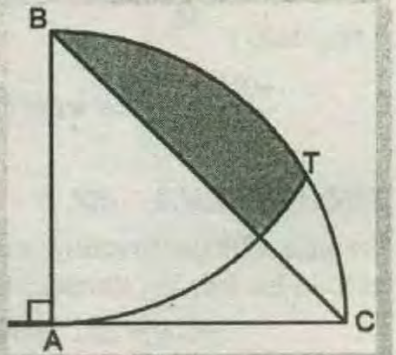
A) $\frac{\sqrt{2}}{6}(5\pi + 12)cm$

B) $2\sqrt{2}(\pi + 6)cm$

C) $\frac{\sqrt{2}}{6}(5\pi + 10)cm$

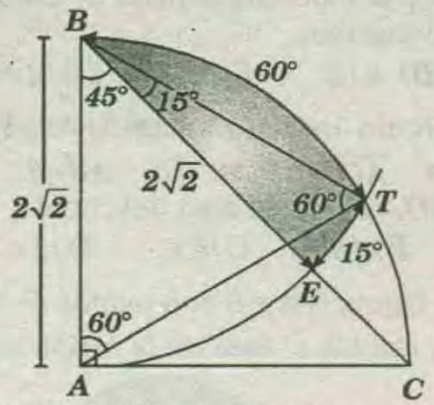
D) $\sqrt{2}(2\pi + 3)cm$

E) $\frac{\sqrt{2}}{3}(5\pi + 12)cm$



RESOLUCIÓN :

En el gráfico, el $\triangle ABT$ es equilátero de lado $2\sqrt{2}$, además, $m\sphericalangle ABC=45°$; entonces, $m\sphericalangle EBT=15°$.



Perímetro de la región sombreada :

$$\ell_{\widehat{TE}} + \ell_{\widehat{BT}} + BE$$

$$* \ell_{\widehat{TE}} = 2\pi(2\sqrt{2})\left(\frac{15°}{360°}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}cm$$

$$* \ell_{\widehat{BT}} = 2\pi(2\sqrt{2})\left(\frac{60°}{360°}\right) = \frac{4\pi\sqrt{2}}{6}cm$$

$$* BE = 2\sqrt{2}cm$$

$$\text{Perímetro de la zona sombreada} = 2\sqrt{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{6} + \frac{4\pi\sqrt{2}}{6}$$

$$\Rightarrow \text{Perímetro de la zona sombreada} = \frac{\sqrt{2}}{6}(5\pi + 12)cm$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 38 :

En la figura , haciendo centro en C se ha trazado el arco $\widehat{AD}$ Si $\overline{AB}$ es diámetro del semicírculo , $AB=BC=2cm$ y $CD = DE$, calcular el perímetro de la región sombreada.

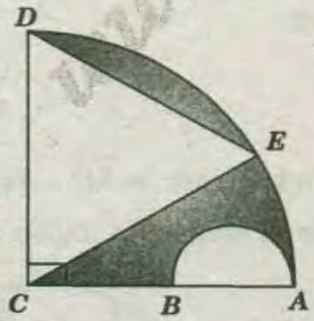
A) $(9+2\pi)$ cm

B) $(8+3\pi)$ cm

C) $\left(10+3\frac{\pi}{2}\right)$ cm

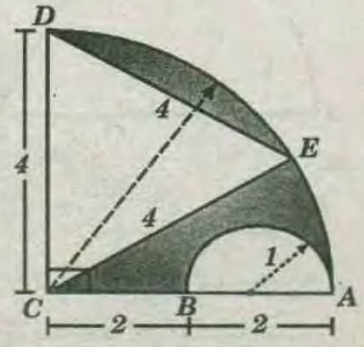
D) $\left(8+5\frac{\pi}{2}\right)$ cm

E) $(10+3\pi)$ cm



RESOLUCIÓN :

* En el gráfico:



Nos piden el perímetro de la región sombreada $= DE + CE + CB + \ell_{\widehat{AB}} + \ell_{\widehat{DEA}}$

$$\bullet \ \ell_{\widehat{AB}} = \frac{2\pi(1)}{2} = \pi\, cm$$

$$\bullet \ \ell_{\widehat{DEA}} = \frac{2\pi(4)}{4} = 2\pi\, cm$$

* Entonces:

Perímetro de la región sombreada $= 4+4+2+\pi+2\pi$

$\Rightarrow$ perímetro de la región sombreada es :

$$(10+3\pi)\ cm$$

RPTA "E"

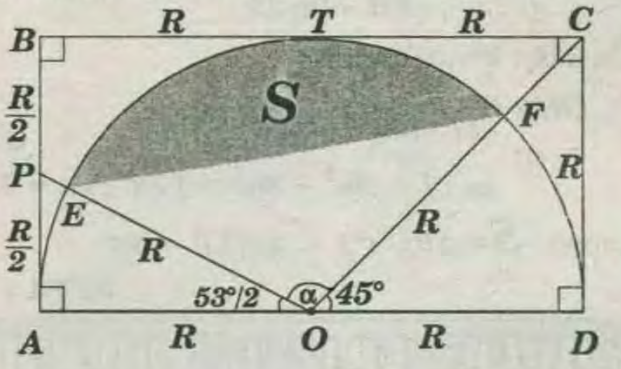
PROBLEMA 39 :

En un rectángulo $ABCD$, con diámetro $\overline{AD}$, se traza una semicircunferencia interiormente tangente a $\overline{BC}$ en T, luego se ubican a P y O como puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. Si $\overline{OP}$ y $\overline{OC}$ intersectan a la semicircunferencia en E y F, calcule el área del segmento circular de arco EF. Considere que $AT=2$

A) $\pi-1$ B) $\frac{\pi}{2}-1$ C) $\frac{217\pi}{360}-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

D) $2(\pi-2)$ E) $2(\pi-1)$

RESOLUCIÓN :



*Considere: $AT = 2 = R\sqrt{2} \rightarrow R = \sqrt{2}$

* $\triangle PAO$: $m\sphericalangle AOP = \frac{53°}{2}$

* $\triangle CDO$: $m\sphericalangle COD = 45°$

$$\Rightarrow \frac{53°}{2} + \alpha + 45° = 180° \rightarrow \alpha = \frac{217°}{2}$$

* Luego :

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{R^2 Sen\alpha}{2} \Rightarrow S = \frac{\pi(2)\alpha}{360} - \frac{(2)Sen\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\pi\alpha}{180} - Sen\alpha \Rightarrow S = \frac{217\pi}{360} - Sen(108,5°)$$

$$\Rightarrow S = \frac{217\pi}{360} - Sen(71,5°) \Rightarrow S = \frac{217\pi}{360} - Cos(18,5°)$$

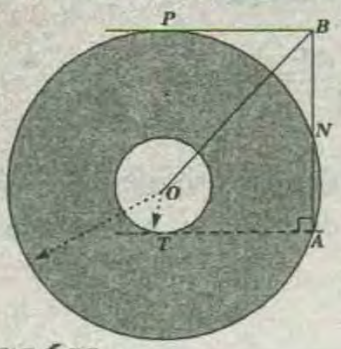
$$\Rightarrow S = \frac{217\pi}{360} - \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

RPTA : " C"

PROBLEMA 40 :

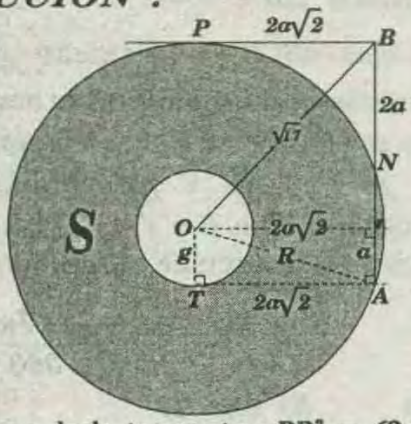
En el gráfico, P y T son puntos de tangencia.

Si $AN = NB$ y $OB=\sqrt{17}$. calcule el área de la región sombreada.



A) 9π
B) 8π
C) 10π
D) 12π
E) 15π

RESOLUCIÓN :



*Por *Teorema* de la tangente : $PB^2 = (2a)(4a)$

$$PB = 2a\sqrt{2}$$

* $\triangle OTA : R^2 - r^2 = 8a^2$

* $\triangle OHB : \; 17 = (3a)^2 + (2a\sqrt{2})^2$

$$\Rightarrow 17 = 9a^2 + 8a^2 = 17a^2 \Rightarrow a = 1$$

* Luego : $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi 8(1)^2 = 8\pi$

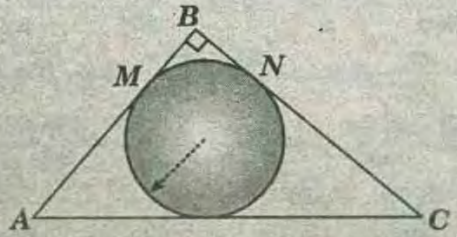
RPTA : "B"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 El lado de un cuadrado mide *10*. Calcule el área de la corona circular formada por sus circunferencias inscrita y circunscrita.

A) 18π B) 19π C) 25π D) 36π E) 49π

02 Calcule el área de la región sombreada, si M y N son puntos de tangencia, $AB = NC = 3$.



A) $2\pi/3$ B) $\pi/2$ C) $\pi/3$ D) $3\pi/2$ E) π

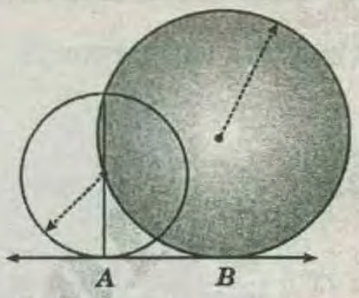
03 Las medidas de los catetos de un triángulo suman *10* y la hipotenusa mide *8*. Calcule el área del círculo inscrito.

A) π B) $\pi/2$ C) $\pi/3$ D) 2π E) 3π

04 El círculo inscrito en un triángulo ABC es tangente a $\overline{AC}$ en M. Si: $AB=6$, $BC=10$ y $MC= 3(AM)$, calcule el área del círculo.

A) 2π B) 4π C) 6π D) 8π E) 9π

05 En la figura, si A y B son puntos de tangencia, $AB^2=8$, calcule el área de la región sombreada.



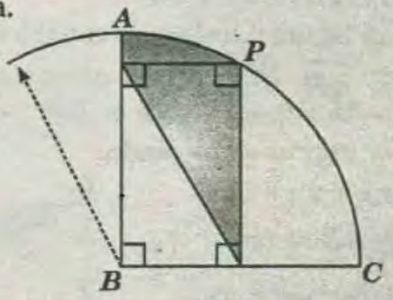
A) 3π B) 6π C) 7π D) 9π E) 12π

06 Se tiene tres circunferencias que son tangentes exteriores entre sí y sus radios miden *1; 2* y *3*. Calcule el área del círculo que contiene los puntos de tangencia.

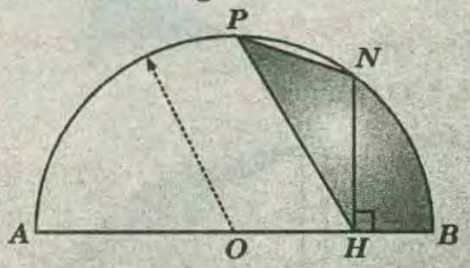
A) 2π B) 3π C) π D) $\pi/3$ E) $\pi/2$

07 En la figura, si $BP = PC = 4$, calcule el área de la región sombreada.

A) $2\pi/3$
B) $4\pi/3$
C) $6\pi/5$
D) $5\pi/3$
E) $\pi/2$

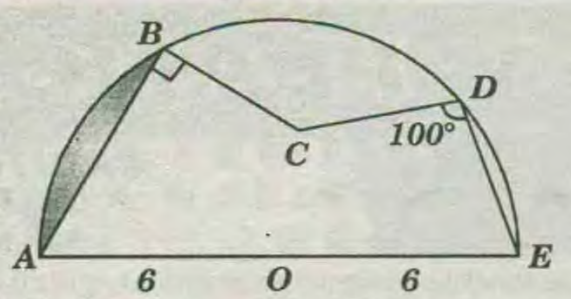


08 En la figura: $m\widehat{AP} = m\widehat{PB}$, $NH=4$ y $HB=2$. Calcule el área de la región sombreada.



A) $\frac{260}{35}\pi$ B) $\frac{260}{72}\pi$ C) $\frac{265}{36}\pi$ D) $\frac{265}{72}\pi$ E) $\frac{260}{36}\pi$

09 De la figura: O es centro. Calcule el área de la región sombreada, si: $BC=CD=DE$.



A)$3\pi-3\sqrt{2}$ B)$4\pi-2\sqrt{3}$ C)$6\pi-4\sqrt{3}$
D)$6\pi-9\sqrt{3}$ E)$6\pi-6\sqrt{2}$

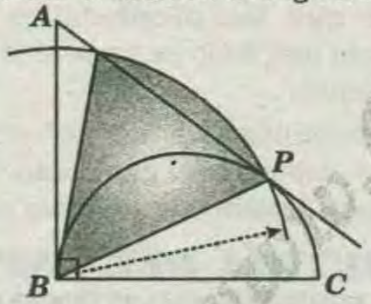
10 En una semicircunferencia, de diámetro $\overline{AC}$, se traza la cuerda $\overline{AB}$ tal que $m\sphericalangle BAC = 20°$ y M es punto medio de $\overline{AB}$. Si $AC = 10$, calcule el área de la región limitada por $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ y $\overline{BC}$.

A)$\frac{24\pi}{9}$ B)$\frac{25\pi}{9}$ C)$\frac{26\pi}{9}$ D)$\frac{28\pi}{9}$ E)$\frac{20\pi}{9}$

11 Se tiene un círculo inscrito en un cuadrilátero $ABCD$, de modo que: $m\sphericalangle BAD = 90°$, $m\sphericalangle ABC = 53°$, $BC=6$ y $AD= CD$. Calcule el área del círculo.

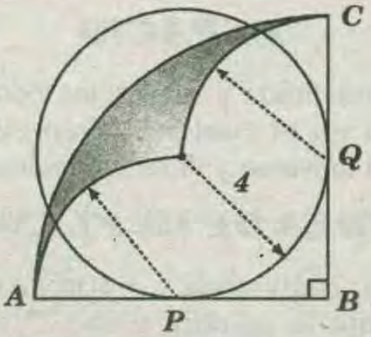
A)2π B)3π C)4π D)5π E)6π

12 En la figura: P es punto de tangencia. Si $AB=BC=5$, calcule el área de la región sombreada.



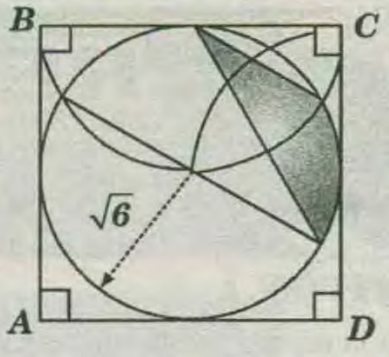
A)$\frac{53\pi}{8}$ B)$\frac{53\pi}{9}$ C)$\frac{63\pi}{4}$ D)$\frac{27\pi}{4}$ E)$\frac{36\pi}{7}$

13 En la figura: $AP = PB$. Calcule el área de la región sombreada.



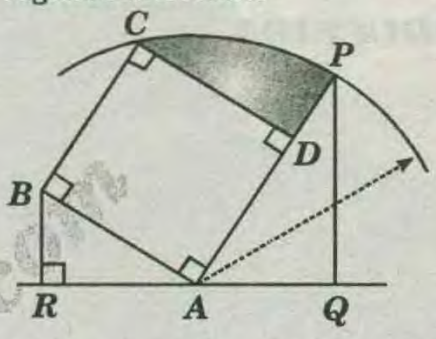
A)$4(\pi-2)$ B)$6(\pi-2)$ C)$8(\pi-2)$ D)$10(\pi-2)$ E)$12(\pi-2)$

14 De la figura, calcule el área de la región sombreada.



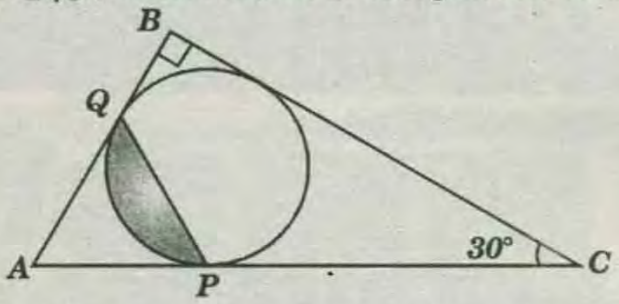
A)2π B)3π C)π D)$\frac{\pi}{2}$ E)$\frac{\pi}{3}$

15 En la figura, si $BR=2$ y $PQ=2\sqrt{6}$, calcule el área de la región sombreada.



A)$6\pi-3$ B)$4\pi-2$ C)$6\pi+3$ D)$8\pi+4$ E)$8\pi-8$

16 En la figura: P y Q son puntos de tangencia. Si $AP = 2\sqrt{3}$, calcule el área de la región sombreada.



A)$\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$ B)$\frac{2\pi}{3}-\sqrt{2}$ C)$\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$ D)$\frac{4\pi}{3}-\sqrt{2}$ E)$2\pi-\sqrt{3}$

17 Se tiene un triángulo ABC, se ubican los puntos M y N en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, de modo que $AB = BC$, $CN = 6$ y $m\sphericalangle AMN = 2\,(m\sphericalangle MAN) = 90°$. Calcule el área del círculo inscrito en el triángulo BMN.

A)6π B)7π C)8π D)9π E)5π

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)E	3)A	4)B	5)D	6)C	7)B	8)D	9)D	10)B
11)C	12)A	13)C	14)C	15)E	16)A	17)D			

WWW.GRATIS2.COM

RECTAS Y PLANOS

CAPITULO 33

OBJETIVOS :

Al finalizar la unidad el alumno será capaz de:

* *Tener un concepto más claro de la figura geométrica en el espacio .*

* *Establecer las distintas propiedades entre puntos y rectas ubicadas en plano .*

INTRODUCCIÓN :

La geometría del espacio presenta a veces gran dificultad de comprensión, debido a una escasa visión espacial. En gran parte, esta dificultad es consecuencia de tener que representar sobre el plano lo que se ve en el espacio. Por tanto, conviene tener muy claros los elementos fundamentales de la geometría del espacio, que son el punto, la recta y el plano.

Existen en la actualidad gran número de impresionantes grabados, en los que se explotan magistralmente ilusiones geométricas, que en último término consisten en la exclusión velada de algunos axiomas de la geometría euclídeana

EL CONCEPTO DE ESPACIO

Como resultados del los trabajos de Gauss y Reimman , entre otros , el mundo matemático se adaptó a la idea de que aquello que llamamos espacio no es más que un caso particular de otro caso más general con múltiples dimensiones cuantitativas.

Por ejemplo , el espacio que corresponde a la vista y al tacto es una multiplicidad de tres dimensiones.

Por consiguiente , cualquier punto que le corresponda es posible de ser definido por tres datos distintos e independientes .

Pero también puede concebirse una multiplicidad cuádruple o múltiple en general análoga al espacio.

Este concepto es muy importante ya que de él se desprende que las propiedades del espacio efectivamente percibido se presentan como objetos de la experiencia .

Queda así destruidas las "teorías" de la geometría que intentan sostener esas propiedades sobre la base de argumentos puramente metafísicos .

GEOMETRÍA DEL ESPACIO O ESTEREOMETRÍA

Estudia la forma y extensión de las figuras geométricas cuyos puntos no están en un mismo plano (espacio tridimensional).

ESPACIO

Extensión indefinida y sin limites conocidos , que es el medio en el cual se hallan cuantas cosas existen en el universo y tiene naturaleza material .

IDEA DE UN PLANO

En algunas actividades cotidiana se utiliza intuitivamente la palabra plano , esto se puede apreciar cuando los niños o personas adultas eligen un lugar plano para practicar su deporte el fútbol, para apoyar ciertos objetos materiales de manera que permanezcan fijos , estos se eligen teniendo la

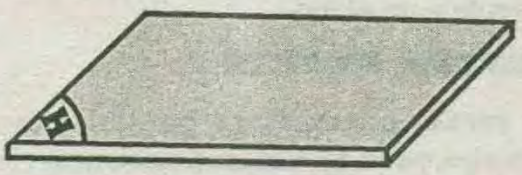
intuición de horizontabilidad .

Los geómetras, considera un plano como una superficie perfectamente lisa y de extensión ilimitada en todas sus direcciones , esto es ideal .

Pero desde el punto de vista físico un plano puede ser representado por diversos objetos, así tenemos, la pizarra , las paredes , el espejo , una plancha de triplay , una mesa , el tablero de dibujo , etc.

REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS DE UN PLANO

Un plano geométricamente es representado por cualquier región plana, convencionalmente se considera la región paralelográmica .



Para denotar un plano, se ubica una letra en una de sus esquinas, luego se identifica así:

Notación:

Plano $H: \square H$

El plano puede considerarse como ilimitado en los sentidos , no tiene figura alguna y sería imperceptible para nuestros sentidos si no séñalaramos en él ciertos límites , los límites con que señalamos una parte del plano son arbitrarios así podemos limitarlo en forma de triángulo de polígono , de círculo , pero la costumbre de limitar un plano la mayor parte de las veces por un rectángulo o romboide como se ve , en el suelo , paredes , en los cuadros , en la mesas etc.

DETERMINACIÓN DE UN PLANO

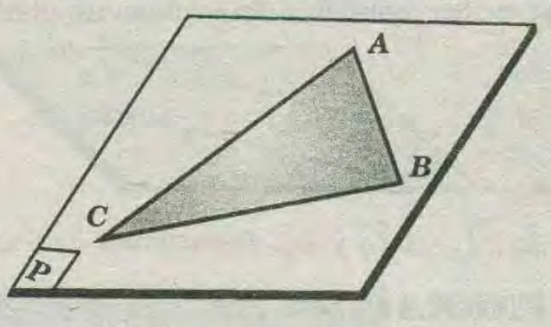
Determinar un plano significa ubicarlo o fijarlo en un determinado lugar , así por ejemplo , como ubicar la pizarra en la pared de manera que quede fijo ; para ello es necesario clavar en tres de sus esquinas o vértices .

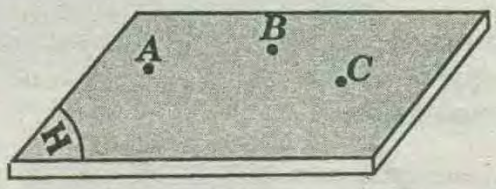
Entonces geométricamente ubicar tres puntos no colineales .

El plano es una superficie ilimitado en todas sus partes que contiene exactamente a toda recta que pase por dos puntos cualesquiera de dicha superficie la idea del plano , la recta y el punto es un concepto intuitivo puramente experimental .

A continuación veamos los elementos necesarios para determinar un plano :

I) Tres puntos no colineales determinan un plano .

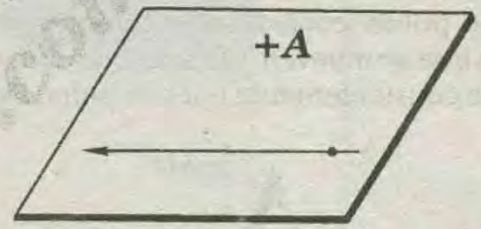


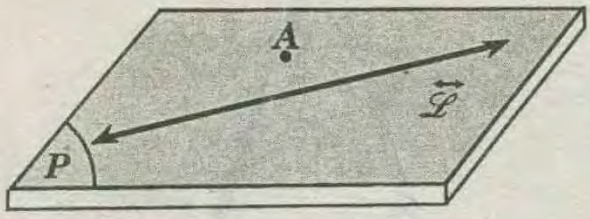


* Sea ***A, B*** y ***C*** puntos no colineales.

* Entonces con dichos puntos se determina el plano ***H***.

II) Una recta y un punto exterior a ella determinan un plano.

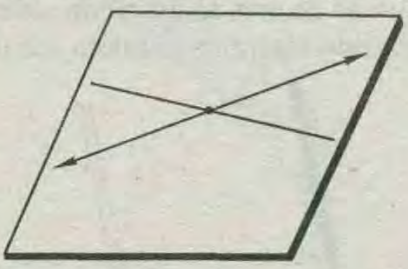


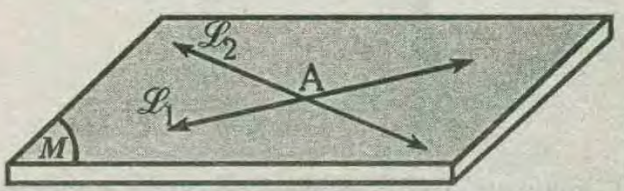


* Sea : $A \notin \overleftrightarrow{\mathcal{L}}$

* Entonces ***A*** y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ se determinan el plano ***P***.

III) Dos rectas secantes determinan un plano





* $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} \cap \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2} = \{A\}$

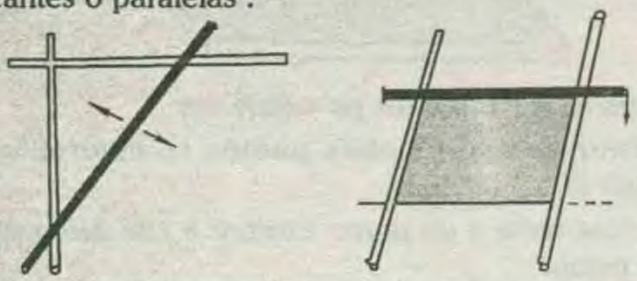
* Entonces $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ determina el plano ***M***.

IV) Dos rectas paralelas determinan un plano

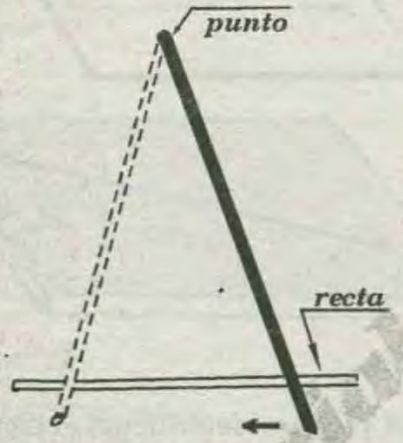
* Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} \rightarrow \overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ determinan $\square S$.

GENERACIÓN DE UN PLANO

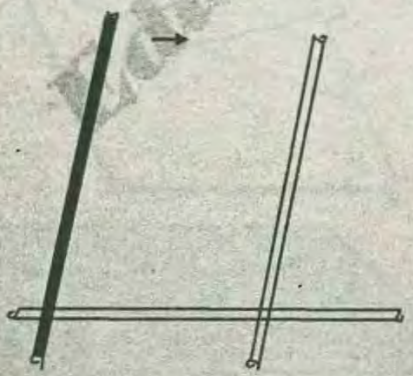
* El plano puede considerarse como generado por una recta que se mueve resbalando sobre dos rectas secantes o paralelas .



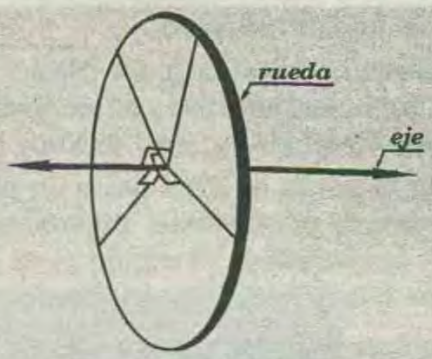
* El plano puede considerarse como generado por una recta que se mueven resbalando sobre una recta y pasando constantemente por una punto fijo exterior a ella .



* El plano puede considerarse como generado por una recta que se mueve resbalando sobre una recta y permaneciendo siempre paralela asi misma .



* El plano puede considerarse como generado por una recta que se mueve girando alrededor de una recta fija y permaneciendo constantemente perpendicular a dicha recta .



POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTAS Y PLANOS

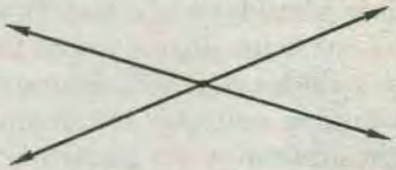
En el espacio , se puede analizar las posiciones relativas entre dos rectas, entres dos planos y entre una recta y un plano .

I) ENTRE RECTAS :

Dos rectas pueden ser paralelas, secantes o alabeadas, ya se analizó las posiciones relativas entre dos rectas paralelas y dos rectas secantes, las cuales son coplanares porque determinan un plano.

Luego, si dos rectas no son coplanares entonces a dichas rectas se denominan alabeadas o cruzadas.

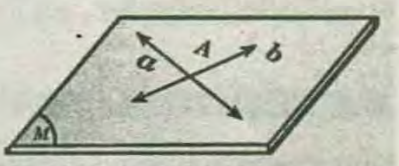
a) RECTAS SECANTES : si tienen un punto común



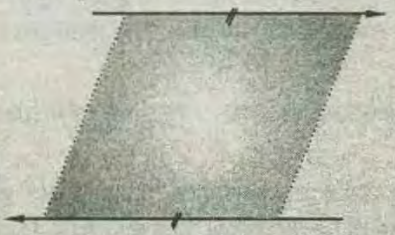
Son aquellas rectas que tienen un sólo punto en común. Existe un sólo plano en el cual están contenidos dichas rectas.

Si: $\overleftrightarrow{a} \cap \overleftrightarrow{b} = \{A\}$

$\rightarrow \overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$: secantes



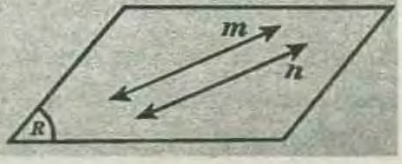
b) RECTAS PARALELAS : si no tienen ningún punto común y forman plano



Son aquellas rectas que no tienen puntos en común y existe un solo plano que las contiene.

* Si: $\overleftrightarrow{m} \cap \overleftrightarrow{n} = \phi$ y

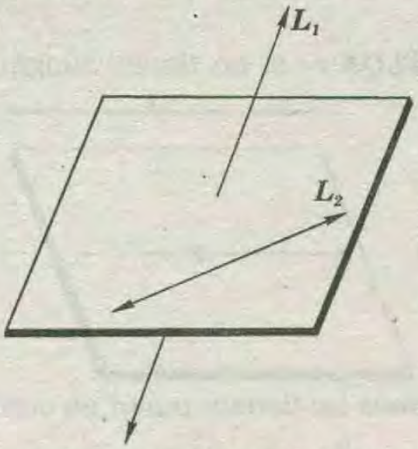
$\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$: coplanares



$\rightarrow \overrightarrow{m}$ y $\overrightarrow{n}$: paralelas

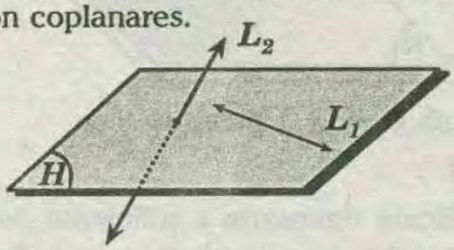
C) RECTAS ALABEADAS O RECTAS CRUZADAS.

no tienen ninún punto común y no forman plano



L_1 y L_2 son rectas cruzadas o alabeadas .

Son aquellas rectas que no tienen puntos en común y que no son coplanares.



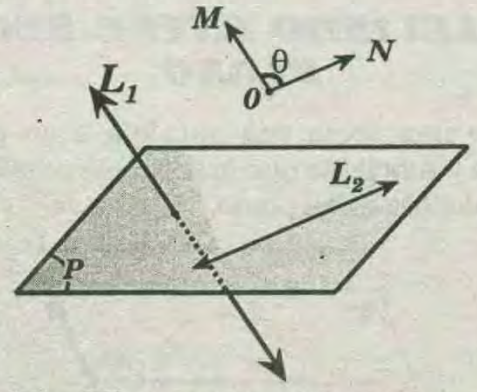
* Si: $\overrightarrow{L_1} \cap \overrightarrow{L_2} = \phi$; y

$\overrightarrow{L_1}$ y $\overrightarrow{L_2}$: no coplanares

$\rightarrow \overrightarrow{L_1}$ y $\overrightarrow{L_2}$: son alabeadas o cruzadas

ÁNGULOS ENTRE DOS RECTAS ALABEADAS

El ángulo entre rectas alabeadas, es el ángulo determinado por dos rayos respectivamente paralelos a dichas rectas, siendo su vértice un punto cualesquiera del espacio .



* Sean : $\overrightarrow{L_1}$ y $\overrightarrow{L_2}$ las rectas alabeadas

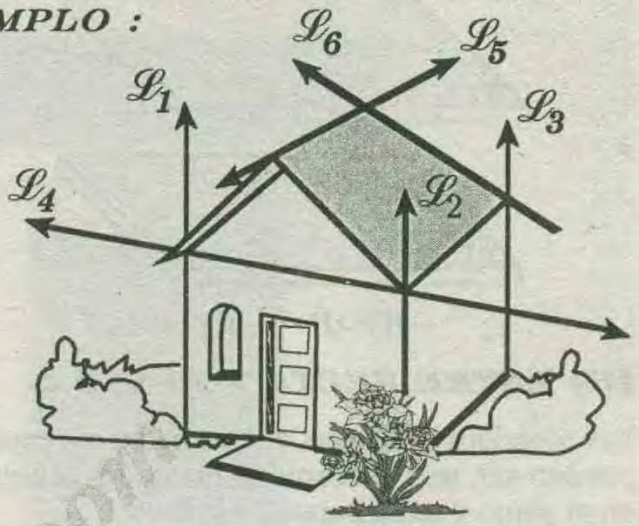
* Si: $\overrightarrow{OM} // \overrightarrow{L_1}$ y $\overrightarrow{ON} // \overrightarrow{L_2}$

$\rightarrow m\sphericalangle MON$. Es el ángulo entre $\overrightarrow{L_1}$ y $\overrightarrow{L_2}$ y la $m\sphericalangle MON = \theta$: es la medida del ángulo entre $\overrightarrow{L_1}$ y $\overrightarrow{L_2}$

NOTA :

Si: $\theta = 90° \rightarrow \overrightarrow{L_1}$ y $\overrightarrow{L_2}$: son perpendiculares u ortogonales .

EJEMPLO :



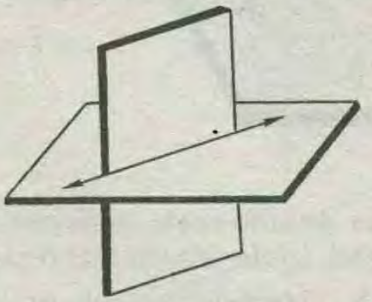
* En el gráfico se muestra una casa, en la cual se observa rectas paralelas como $\overrightarrow{\mathscr{L}_1}, \overrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overrightarrow{\mathscr{L}_3}$ y rectas alabeadas como:

$\overrightarrow{\mathscr{L}_4}$ y $\overrightarrow{\mathscr{L}_5}$, $\overrightarrow{\mathscr{L}_4}$ y $\overrightarrow{\mathscr{L}_6}$, $\overrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overrightarrow{\mathscr{L}_6}$.

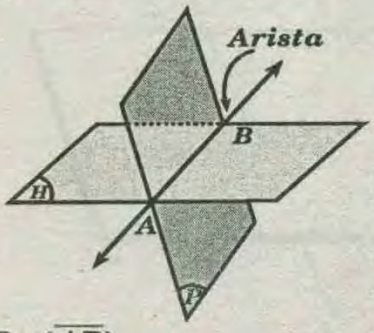
II) ENTRE PLANOS :

Dos planos pueden se paralelos o secantes .

a) PLANOS SECANTES: si tienen un punto común



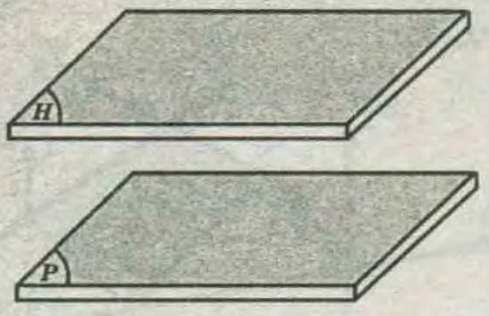
son aquellos que tienen en común un conjunto de puntos que forman una recta.



$\sqcup H \cap \sqcup P = \{\overline{AB}\}$

b) PLANOS PARALELOS : si no tienen ningún punto común

Son aquellos que no tiene punto en común.



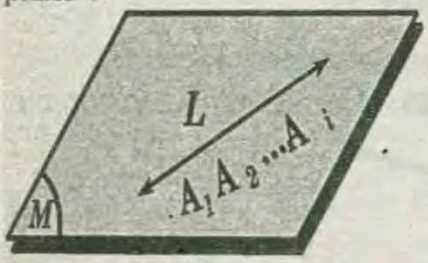
$\sqcup H // \sqcup P \leftrightarrow \sqcup H \cap \sqcup P = \phi$

III) ENTRE RECTA Y PLANO :

Las posiciones relativas entre una recta y un plano pueden ser, recta secante al plano, recta contenida en el plano y recta paralela al plano.

RECTA CONTENIDA EN UN PLANO

Una recta está contenida en un plano, cuando todos los puntos de dicha recta pertenecen a dicho plano .



Si: $A_i \in \overline{L}$

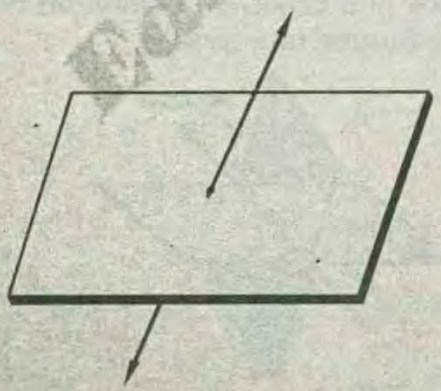
$A_i \in \square M / i \in \mathbb{N}$

$\rightarrow \overline{L} \subset \square M$

NOTA :

Si dos puntos de una recta pertenece a un plano dicha recta está contenida en dicho plano .

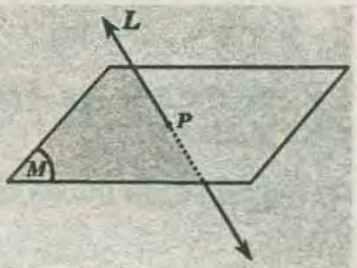
a) SECANTES : si tienen un punto en común



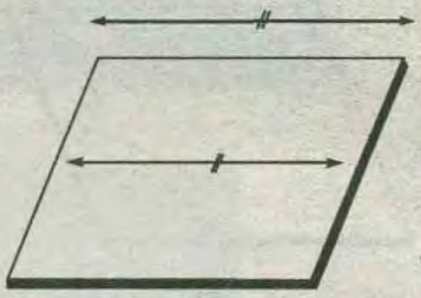
Una recta y un plano son secantes , cuando ambos tienen un punto en común , denominado punto de intersección .

* Si: $\square M \cap \overline{L} = \{P\}$

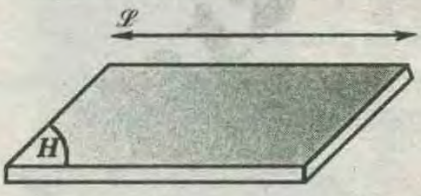
$\rightarrow \overline{L}$ y $\square M$ son secantes



b) PARALELOS : si no tienen ningún punto en común



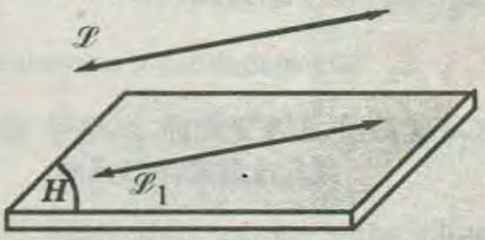
Cuando ambos no tienen punto en común .



$\overleftrightarrow{\mathcal{L}} //$ plano $H \leftrightarrow \overleftrightarrow{\mathcal{L}} \cap$ plano $H = \phi$

NOTA :

La condición necesaria y suficiente para que una recta sea paralela a un plano es que dicha recta no contenida en el plano sea paralela a una recta cualquiera contenida en dicho plano.

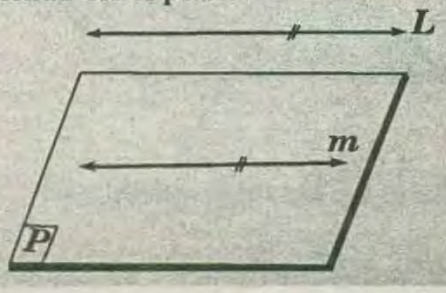


* Sea $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} \subset \square H$, $\overleftrightarrow{\mathcal{L}} \not\subset \square H$, y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}} // \overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$

$\ast \rightarrow \overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} // \square H$

PARALELISMO ENTRE RECTA Y PLANO

Para que una recta sea paralela a un plano es necesario y suficiente que la recta sea paralela a una recta contenida en el plano.



si $L \parallel m$

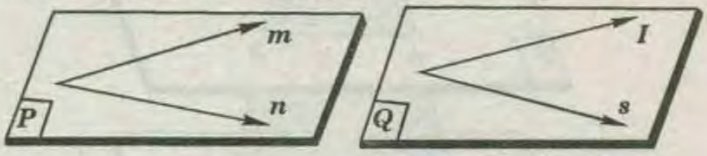
$m \subset P$

$\boxed{L \parallel P}$

Si una recta es paralela a un plano , dicha recta no será paralela a cualquier recta contenida en el plano

PARALELISMO ENTRE DOS PLANOS

Para que dos planos sean paralelos es necesario y suficiente que dos rectas secantes contenidas en uno de ellos , sean paralelas a dos rectas secantes contenidas en el otro plano .



* $m \parallel I$, $n \parallel s$ y $m \cap n$, $I \cap s$

$\boxed{P \parallel Q}$

PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTA Y PLANO

Se define como aquellas perpendiculares a todas las rectas contenidas en el plano.

Si: $\vec{L} \perp \square H$

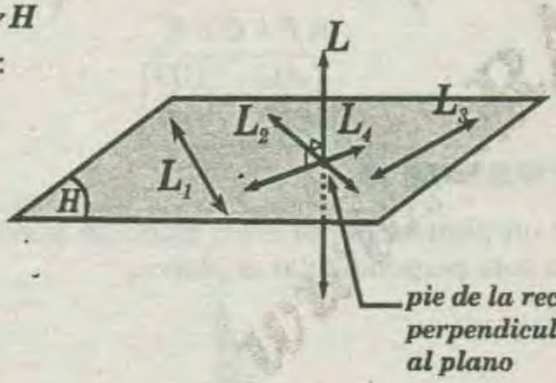
Entonces:

$\vec{L} \perp \vec{L}_1$

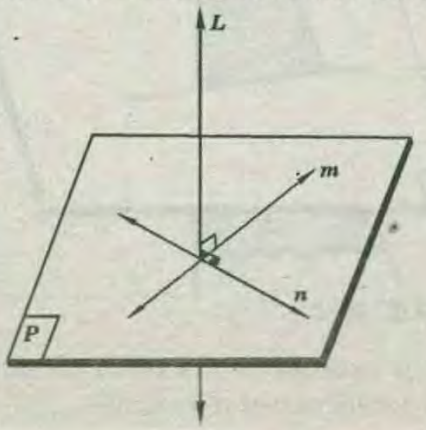
$\vec{L} \perp \vec{L}_2$

$\vec{L} \perp \vec{L}_3$

$\vec{L} \perp \vec{L}_4$



Para que una recta sea perpendicular a un plano es necesario y suficiente que esta recta sea perpendicular a dos rectas secantes contenidas en el plano



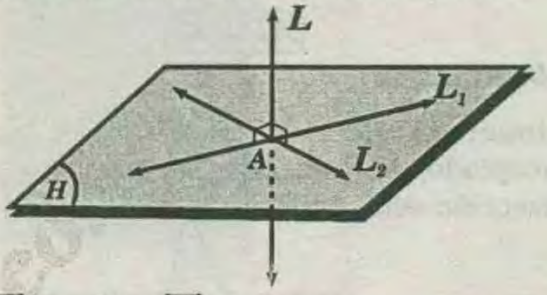
si $L \perp m$ $L \perp m$ y $m \cap n$

$\boxed{L \perp P}$

Si una recta es perpendicular a un plano será perpendicular a cualquier recta contenida en el plano

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE UNA RECTA SEA PERPENDICULAR A UN PLANO

Una recta será perpendicular a un plano , si y sólo si , es perpendicular a dos rectas secantes contenidas en dicho plano , luego dicha recta será perpendicular a todas las rectas contenidas en dicho plano .



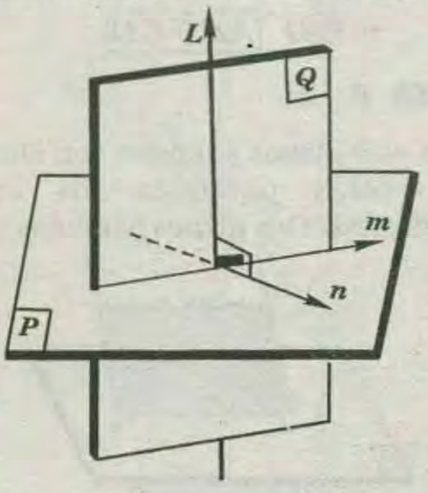
* Sean: $\overrightarrow{L_1} \subset \square H$ y $\overrightarrow{L_2} \subset \square$

H , además $\overrightarrow{L_1}$ y $\overrightarrow{L_2}$ son secantes en A

* Si : $\vec{L} \perp \overrightarrow{L_1}$ y $\vec{L} \perp \overrightarrow{L_2}$, entonces, $\vec{L} \perp \blacksquare H$

PERPENDICULARIDAD ENTRE PLANOS

Para que dos planos sean perpendiculares es necesario y suficiente que una recta contenida en una de ellos sea perpendicular al otro plano



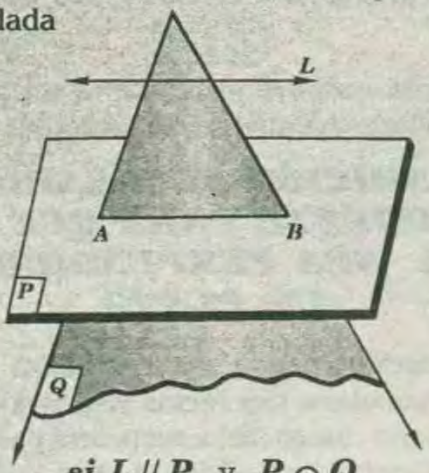
si $L \perp m$ $L \perp n$ *y* $L \subset Q$

$\boxed{P \perp Q}$

TEOREMA 1 :

Si tenemos una recta paralela a un plano , todo plano secante al plano dado y que contiene a la recta

determina una recta de intersección que es paralela a la recta dada

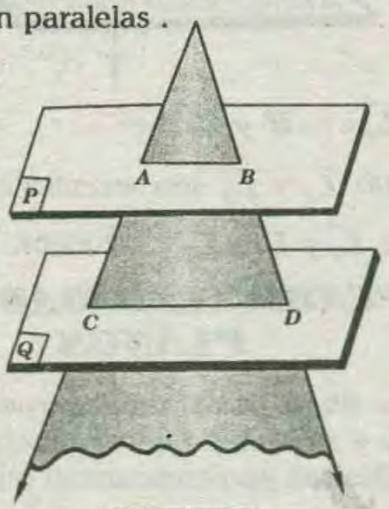


si $L \parallel P$ y $P \cap Q$

$\boxed{AB \parallel Q}$

TEOREMA 2 :

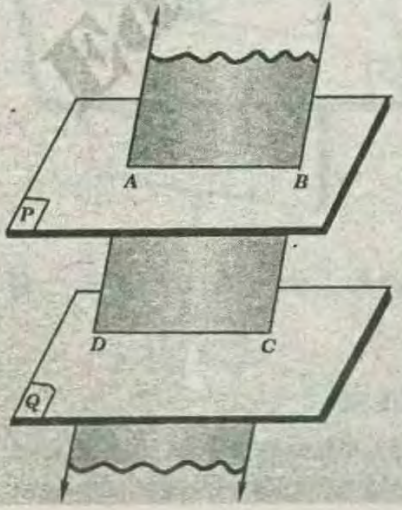
Si tenemos dos o más planos paralelos interceptados por un plano secante , las rectas de intersección son paralelas .



- si: $P \parallel Q$ $\boxed{AB \parallel CD}$

TEOREMA 3 :

Sean dos o más planos paralelos son interceptados por dos rectas paralelas los segmentos comprendidos entre los planos paralelos son iguales .

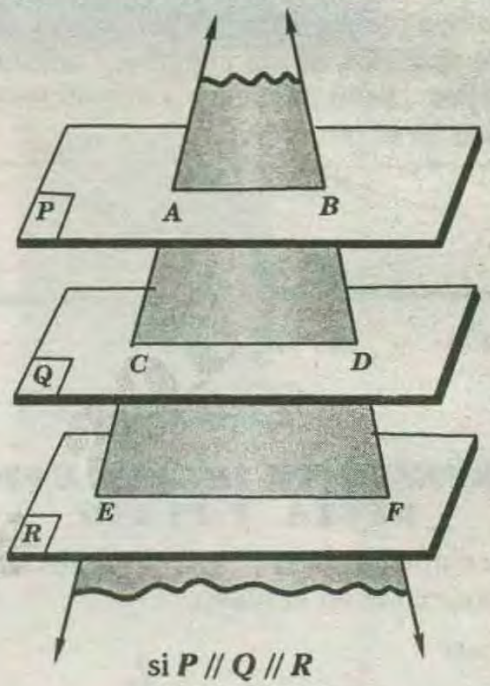


si $P \parallel Q$ $a \parallel b$

$\boxed{AD = BC}$

TEOREMA 4: TEOREMA DE THALES

Si tres o más planos paralelos son interceptados por dos rectas secantes los segmentos que se determinan entre los planos son proporcionales

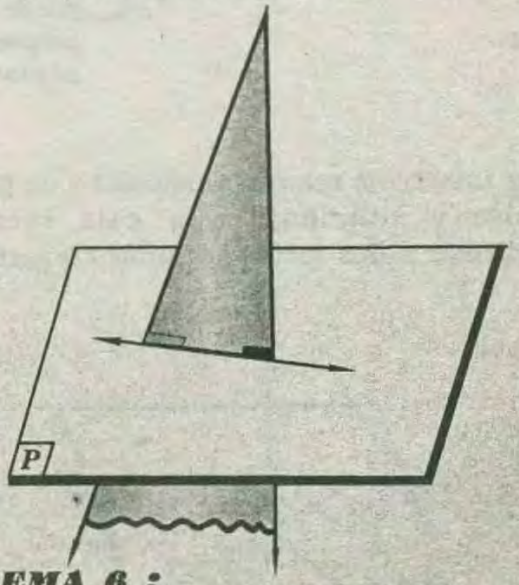


si $P \parallel Q \parallel R$

$$\boxed{\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}}$$

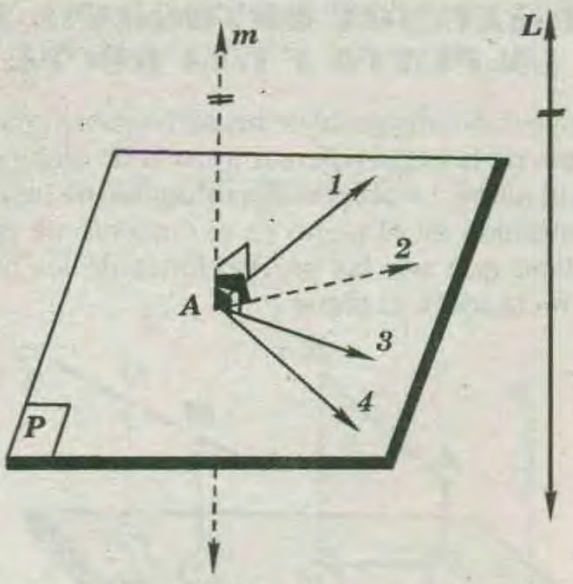
TEOREMA 5 :

Por un punto exterior a un plano se pueden trazar una sola perpendicular al plano .



TEOREMA 6 :

Por un punto exterior a una recta se puede trazar infinitas perpendiculares a la recta .



DEMOSTRACIÓN :

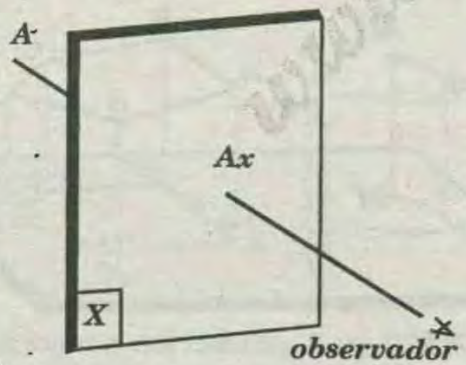
$m \perp P$ luego trazamos $L // m$ luego L es perpendicular al plano P donde :

$$L \perp 1 \Rightarrow 1 \perp L$$
$$L \perp 2 \Rightarrow 2 \perp L$$
$$L \perp 3 \Rightarrow 3 \perp L$$
. . . . . .
. . . . . .

* Es decir del punto A se pueden trazar infinitas perpendiculares a la recta L.

PROYECCIÓN

proyección es la interseccción de la línea visual con el plano de proyección



A : objeto

X : plano de proyección

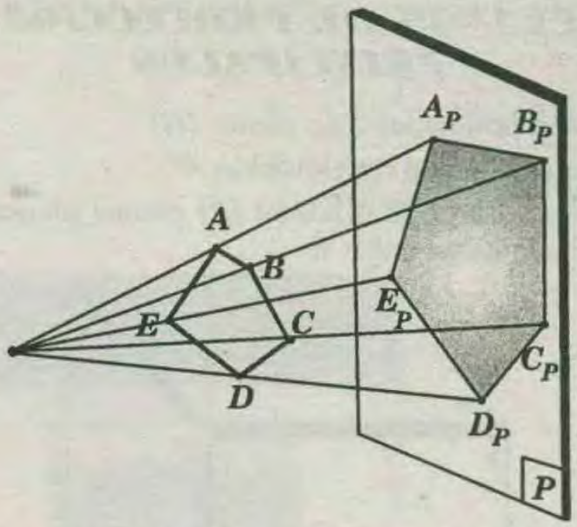
A_x : punto de proyección de A en el plano de proyección X

AA_x : proyectante

TIPOS DE PROYECCIÓN

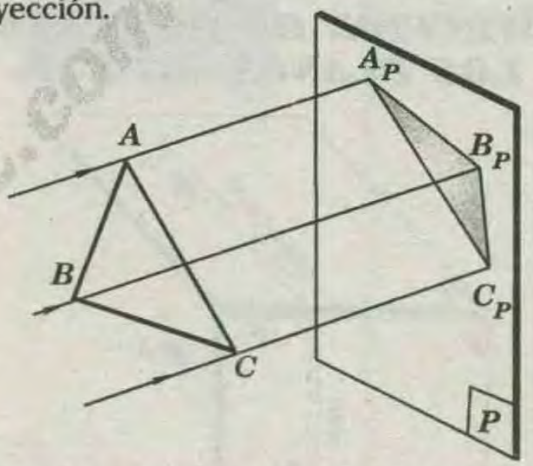
1) PROYECCIÓN CÓNICA :

Los rayos proyectantes parten de un punto



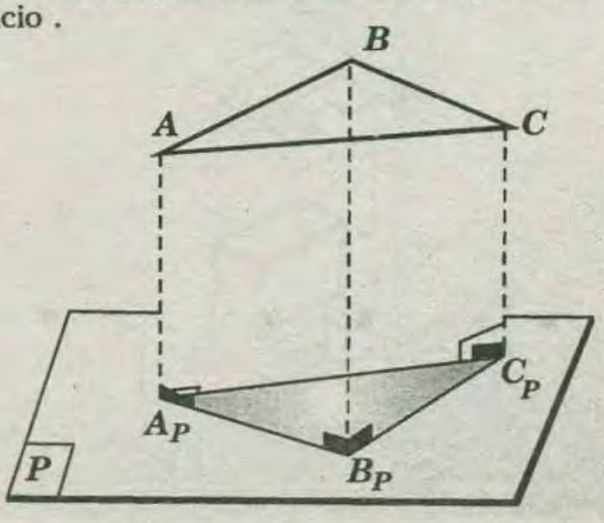
II) PROYECCIÓN CILÍNDRICA :

Los rayos proyectantes son paralelos entre sí formando estos un ángulo cualquiera con el plano de proyección.



III) PROYECCIÓN ORTOGONAL :

Los rayos proyectantes son paralelos y además perpendiculares al plano de proyección el tamaño de la proyección es menor al tamaño del objeto . será del mismo tamaño siempre y cuando el objeto y el plano de proyección sean paralelos . La proyección ortogonal se utilizará en geometría del espacio .



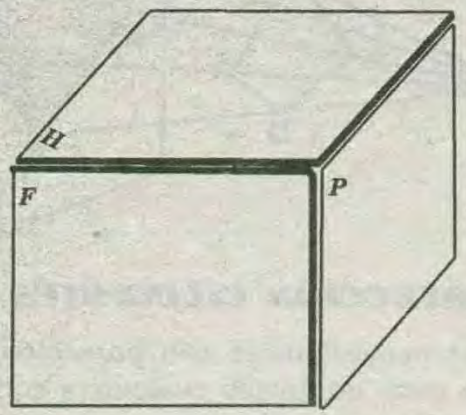
www.GRATIS2.com

PLANOS DE PROYECCIÓN PRINCIPALES

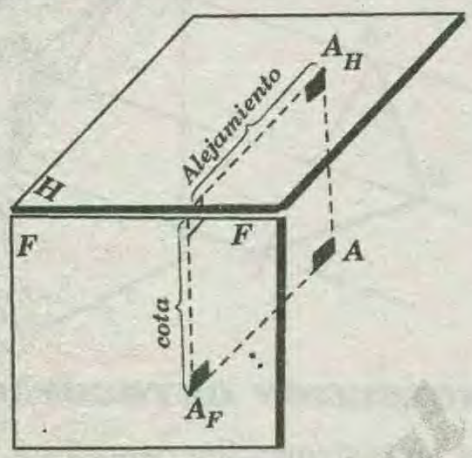
I) plano horizontal o de planta *(H)*

II) plano frontal o de elevación *(F)*

III) plano de perfil o lateral *(P)* dichos planos son perpendiculares entre si



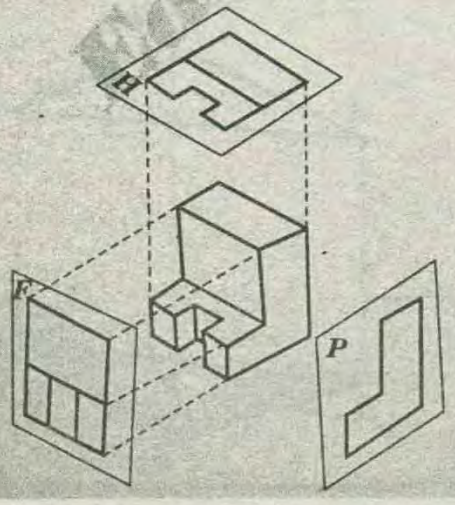
PROYECCIÓN DE UN PUNTO EN LOS PLANOS «H» Y «F»



* *COTA* : distancia del punto *A* al punto horizontal

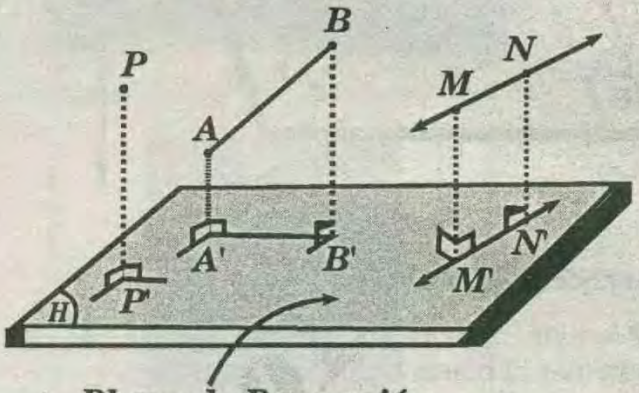
* *ALEJAMIENTO*: distancia del punto *A* al plano frontal

PROYECCIONES PRINCIPALES DE UN SÓLIDO



PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO Y UNA RECTA

La proyección ortogonal de un punto sobre un plano, es el pie de la perpendicular trazada de dicho punto hacia el plano. La proyección ortogonal de una recta no contenida en el plano es el conjunto de puntos del plano que son las proyecciones de los puntos de la recta sobre el plano .



Plano de Proyección

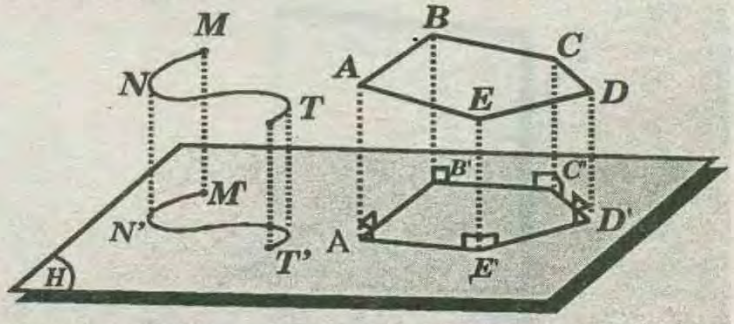
* P' : proyección de P sobre el plano $H (P \notin \square H)$

* $\overline{A'B'}$: proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre el plano H . $(\overline{AB} \not\subset \square H)$.

* $\overline{M'N'}$: proyección ortogonal de $\overline{MN}$ sobre el plano H. $(\overline{MN} \not\subset \square H)$

NOTA :

La proyección ortogonal de una figura sobre un plano es el conjunto de puntos del plano que son las proyecciones ortogonales de los puntos de la figura en dicho plano .

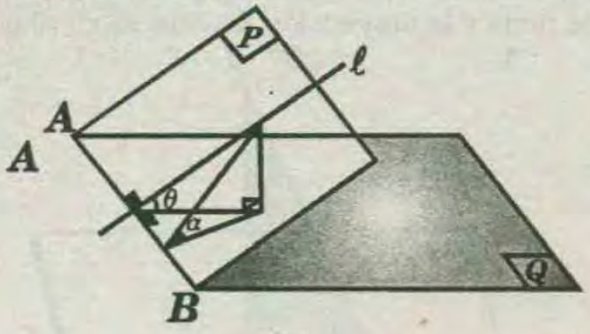


* Línea *M'N'T'*: es la proyección ortogonal de *MNT* sobre el plano H, así como *A'B'C'D'E'* lo es de *ABCDE* .

LÍNEA DE MÁXIMA PENDIENTE

Se llama recta o línea de máxima pendiente de un plano *"P"* con respecto a otro *"Q"* al cual intersecta, a la recta "ℓ" del primer plano *"P"* que es perpendicular a la intersección $\overleftrightarrow{AB}$ de los dos planos.

Esta línea "ℓ", por ser perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ en uno y otro plano, es la recta del primer plano que forma con el segundo un ángulo máximo .



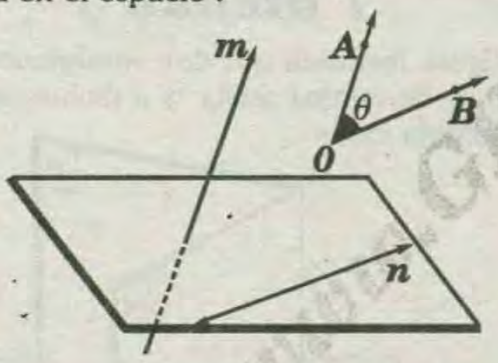
$\theta > \alpha$

"ℓ": Línea de máxima pendiente

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS CRUZADAS ALABEADAS

El ángulo entre dos rectas se determina en una proyección donde se vean las dos rectas en su real magnitud.

Es decir el ángulo entre dos rectas alabeadas, es el ángulo determinado por dos rayos respectivamente paralelos a las rectas dadas y cuyo origen es un punto cualquiera en el espacio .



Si $m // \overrightarrow{OA}$ y $n // \overrightarrow{OB}$.

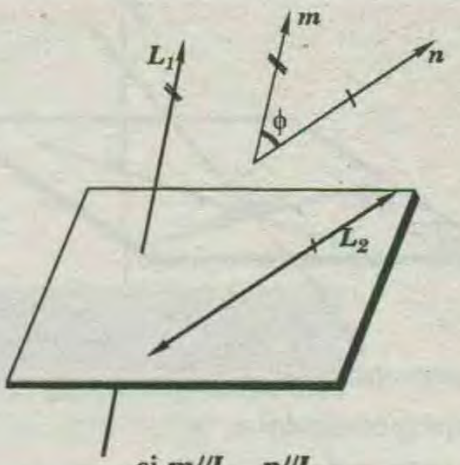
Entonces "θ" es la medida del ángulo formado por las rectas "*m*" y "*n*".

NOTA :

El ángulo entre dos rectas alabeadas se determina en una proyección donde se vean las dos rectas en su verdadera magnitud .

PROCEDIMIENTO 1 :

Para calcular el ángulo formado por dos rectas cruzadas se toma un punto arbitrario en el espacio y por dicho punto se trazan paralelas a las rectas cruzadas de modo que el ángulo formado por las paralelas es el ángulo formado por las rectas cruzadas

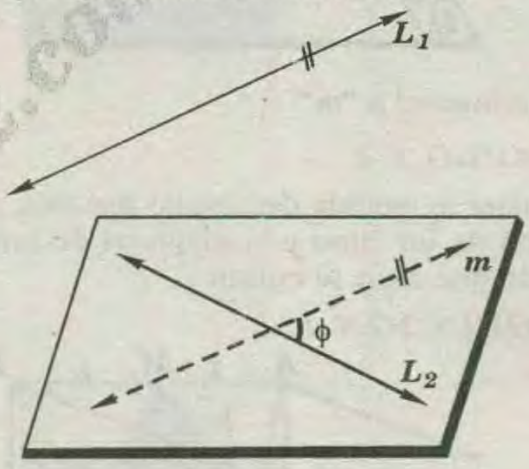


si $m // L_1$ $n // L_2$

luego ϕ es el ángulo formado por las rectas L_1 y L_2

PROCEDIMIENTO 2 :

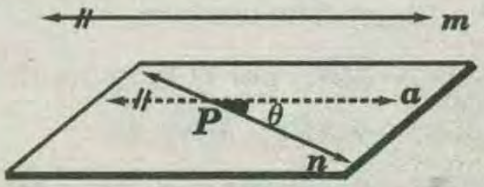
Se toma un punto en una de ellas y por dicho punto trazar una paralela a la otra recta obteniéndose el ángulo que forman las rectas alabeadas



si $m // L_1$ ϕ es el ángulo formado por L_1 y L_2

OTRA FORMA DE UBICAR EL ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS ALABEADAS

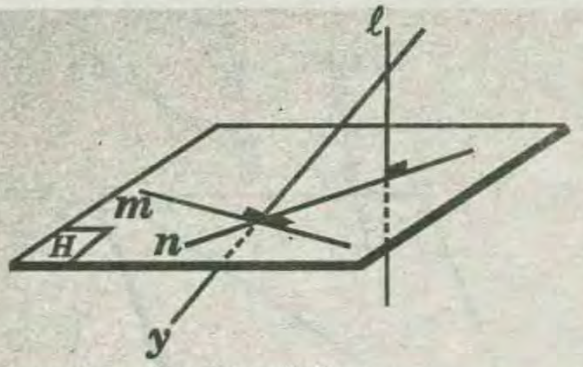
Se considera un punto cualquiera en una de ellas y por dicho punto trazamos una paralela a la otra recta, obteniéndose el ángulo que forman las rectas alabeadas .



Si por "*P*" trazamos $a // m$, entonces la medida del ángulo formado por "*m*" y "*n*" es "θ" .

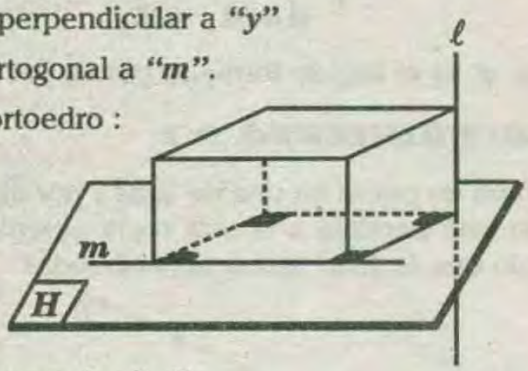
NOTAS :

I) Si $\ell \perp H$.



* "ℓ" es perpendicular a *"n"*
* *"m"* es perpendicular a *"n"*
* *"m"* es perpendicular a *"y"*
* "ℓ" es ortogonal a *"m"*.

II) En el ortoedro :

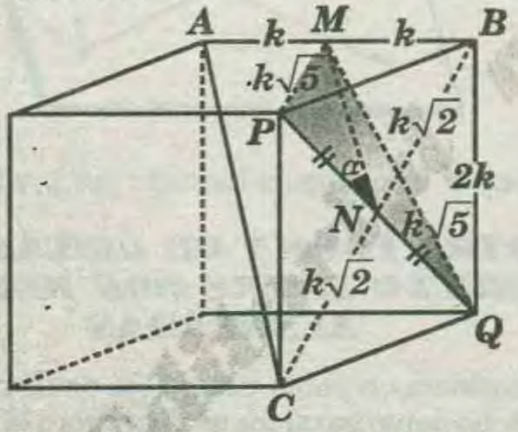


"ℓ" es ortogonal a *"m"*.

EJEMPLO 1 :

Determinar la medida del ángulo formado por la , diagonal de un cubo y la diagonal de una cara, sabiendo que éstas se cruzan .

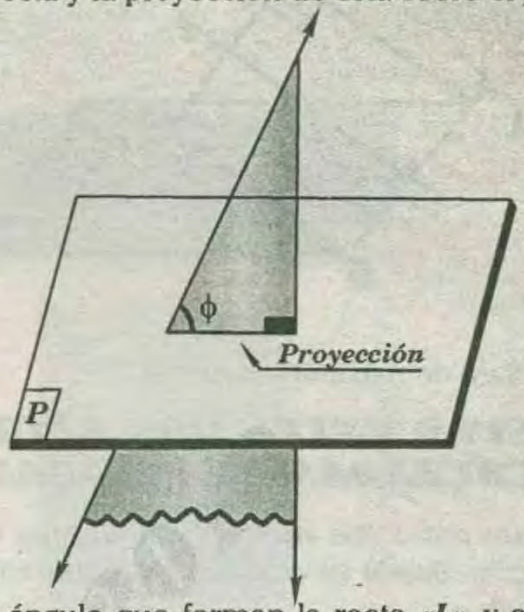
RESOLUCIÓN :



* $\overline{AC}$: Diagonal del cubo.
* $\overline{PO}$: Diagonal de una cara.
* Trazamos $\overline{MN}$, por el teorema de los puntos medios en el $\triangle ABC$: $\overline{MN} // \overline{AC}$.
* Entonces el ángulo entre $\overline{AC}$ y $\overline{PQ}$ es *PNM* , donde la $\measuredangle PNM = \alpha$.
* El $\triangle PMQ$ es isósceles $PM = MQ$.
* Pero $PN = NQ$, etonces $\overline{MN}$ es mediatríz de $\overline{PQ}$
* Finalmente se deduce que : $\alpha = 90°$

ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO

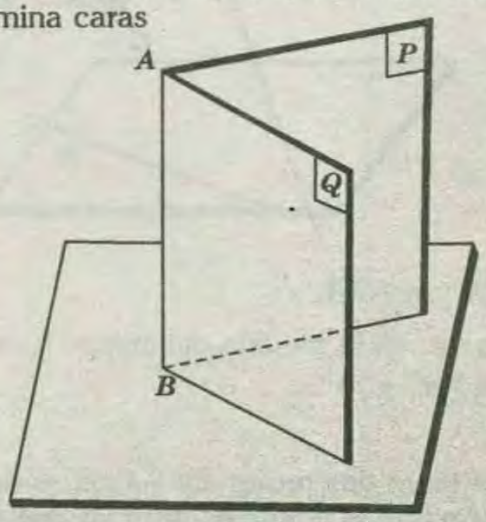
El ángulo entre una recta y un plano es el formado por la recta y la proyección de esta sobre el plano



ϕ es el ángulo que forman la recta *«L»* y el plano *«P»*

ÁNGULO ENTRE PLANOS (DIEDRO)

Es la figura formada por dos semiplanos la recta común se denomina arista y a dichos semiplanos se denomina caras



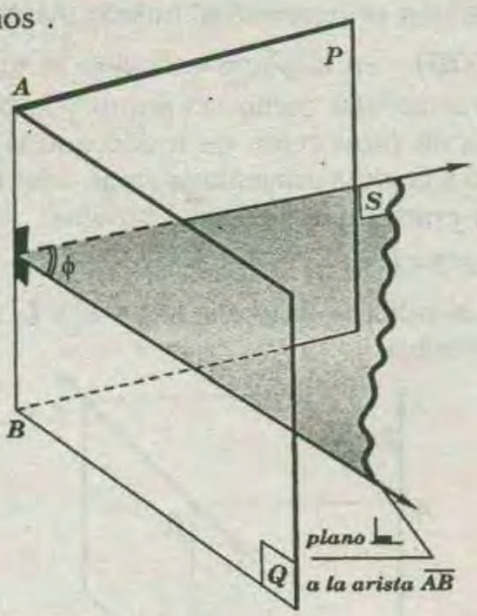
P y *Q* son las caras del diedro *AB* arista del diedro

**** NOTACIÓN :*** diedro *AB*

ÁNGULO PLANO O ÁNGULO RECTILINEO DE UN PLANO

Para obtener la medida de un diedro se toma un punto cualquiera de su arista y se levantan perpendiculares a la arista en cada uno de los semiplanos el ángulo formado por las perpendiculares es el ángulo formado por los

semiplanos .



* ϕ ángulo plano del diedro *AB*

* *AB* ⌞ plano *S*

NOTAS:

♠ Un diedro puede tener infinitos planos perpendiculares sin que varíe su medida

♠ Ángulo entre dos planos se medirá en una proyección donde los dos planos aparecen de canto estando la recta de intersección de punta

TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES

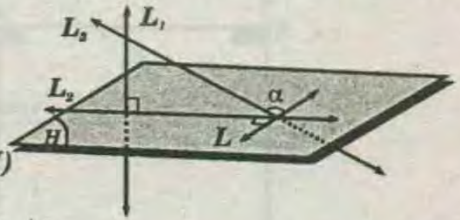
Si por el pie de una recta perpendicular a un plano, se traza otra recta perpendicular a una de las rectas contenidas en dicho plano, entonces, toda recta trazada por el pie de ésta última recta y un punto cualquiera de la recta perpendicular al plano, será perpendicular a la recta contenida en dicho plano.

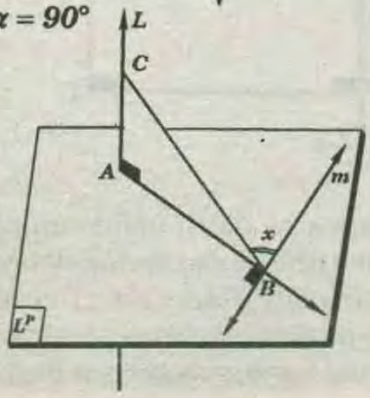
* Sea : $\overline{L} \perp H$

* Si : $\overline{L_1} \perp \text{plano } H$

y $\overline{L_2} \perp L (\overline{L_2} \subset \text{plano } H)$

$\rightarrow \overline{L_3} \perp \overline{L}\ ; \alpha = 90°$



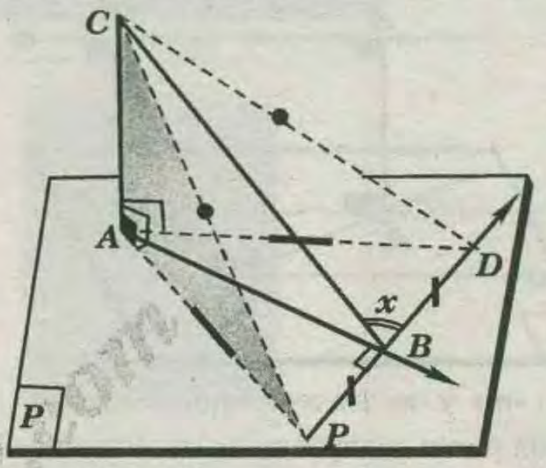


Es decir si por el pie de una recta perpendiculares a un plano se traza una segunda perpendicular a una recta contenida en el plano , el pie de la segunda perpendicular con un punto cualquier de la primera perpendicular se determinará una recta perpendicular a la recta contenida en el plano .

$$L \perp \mathbb{P} \quad AB \perp m \Rightarrow BC \perp m$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 90°}$$

DEMOSTRACIÓN :



* tomamos $BD = BP$

$\triangle ABP \cong \triangle ABD$ ..... *L.A.L*

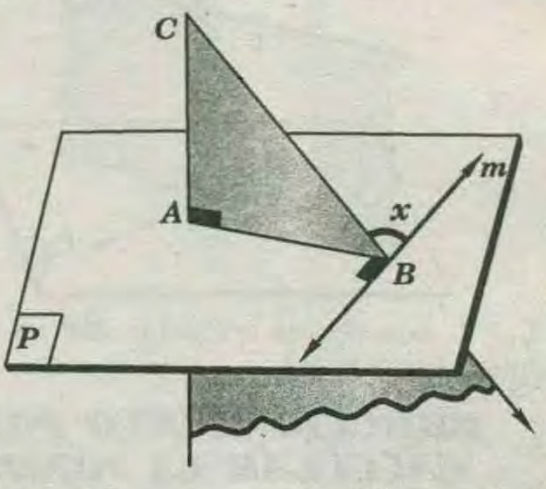
$AP = AD$

$\angle ACP \cong \angle ACD$ ..... *L.A.L*

$CP = CD$

$\triangle CPD$: *CB* es mediatriz $\Rightarrow x = 90°$

**** OTRO MÉTODO :***



si $AC \perp \mathbb{P} \Rightarrow AC \perp m \Rightarrow m \perp AC$

$\Rightarrow AB \perp m \Rightarrow m \perp AB$

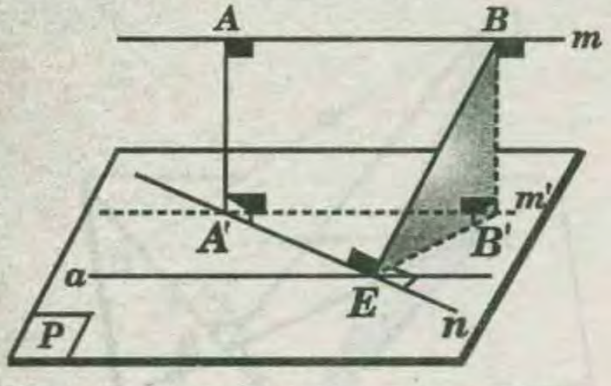
como «*m*» es perpenducular a *AB* y a *AC* luego «*m*» será perpendicular la plano formado por *AB* y *AC*

$$m \perp \text{plano } ABC \Rightarrow m \perp BC$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 90°}$$

MENOR DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN(MÍNIMA DISTANCIA)

Si dos rectas del espacio se cruzan existe una recta, y sólo una, que es perpendicular a ambas; y el segmento de ésta perpendicular que tiene sus extremos sobre dichas rectas es menor que cualquier otro segmento análogo (con un extremo sobre cada una de las rectas mencionadas)



* Sean «*m*» y «*n*» las rectas que se cruzan .

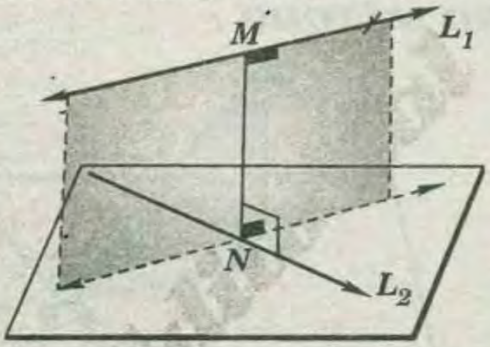
* Por un punto cualquiera de «*n*» tracemos la recta *a*//*m*.

* Si *P* es el plano determinado por «*n*» y «*a*» tendremos *m* // *P* .

$\overline{AA'}$: Mínima distancia

NOTA :

La misma distancia entre dos rectas cruzadas es el segmento de recta perpendicular a ambas rectas



si L_1 y L_2 son rectas cruzadas *MN* es la mínima distancia entre L_1 y L_2

PROCEDIMIENTO PARA CALCULAR LA MÍNIMA DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS CRUZADAS

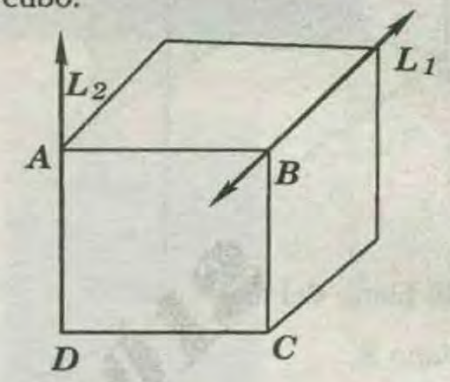
♠ *Paso(I)* : se escoge un plano que sea perpendicular a una de las dos rectas

♠ *Paso(II)* : dicha recta perpendicular al plano se proyectará como un punto en dicho plano. la otra recta también se proyecta al mismo plano

♠ *Paso (III)* : en el plano escogido se encuentran las dos rectas una como un punto y la otra como una recta de proyección de modo que la distancia del punto a la recta proyectada viene a ser la mínima distancia entre las dos rectas cruzadas

EJEMPLO :

Calcular la mínima distancia entre L_1 y L_2 siendo la figura un cubo.

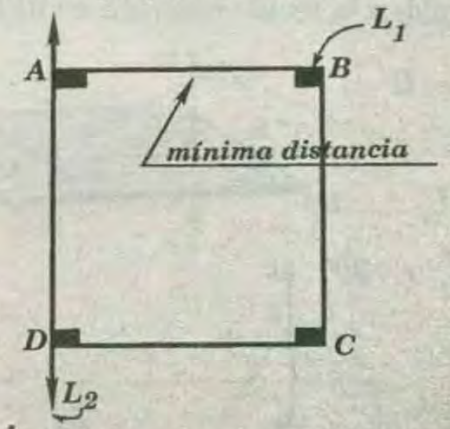


RESOLUCIÓN :

* Paso *(I)* : escogemos el plano *ABCD* que es perpendicular a L_1.

* Paso *(II)* : proyectamos las rectas L_1 y L_2 en el plano escogido *ABCD* .

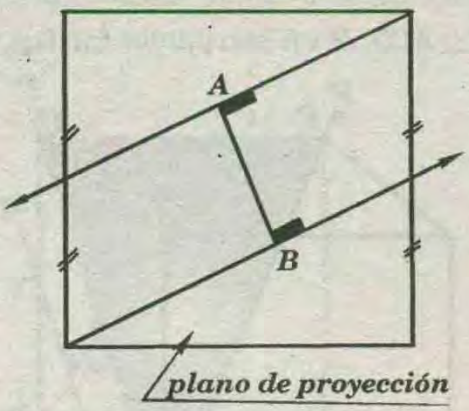
* Paso *(III)*: en el cuadro *ABCD* se encuentyra la recta L_1 como un punto *B* y la recta L_2 luego la mínima distancia será la perpendicular de *B* a *AD*



NOTA :

en algunos casos es difícil ubicar un plano que sea perpendicular a una de dos rectas alabeadas en éstos casos se ubica un plano en el cual dos rectas alabeadas se proyectan como paralelas luego en el plano en la cual las dos rectas sus proyecciones son

paralelas la mínima distancia será la perpendicular a ambas rectas



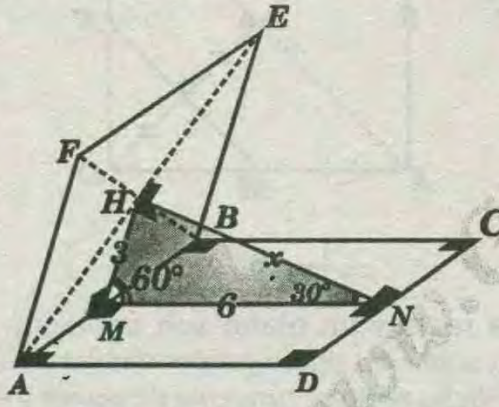
AB : mínima distancia

EJEMPLO:

Si ***ABCD*** y ***ABEF*** son cuadrados de lados iguales a ***6m*** y forman un ángulo de ***60°***; determinar la mínima distancia entre $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$.

RESOLUCIÓN :

* Por dato , la medida del ángulo diedro es ***60°***. Por esto $\overline{NH}$ es perpendicular en el centro del cuadrado ***AFEB***.

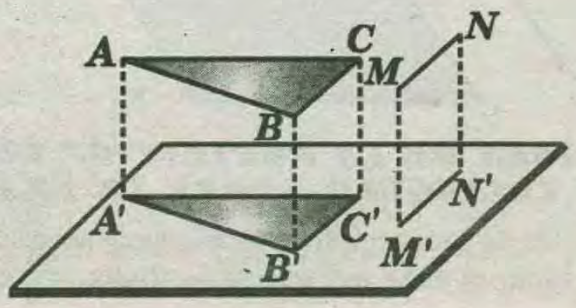


* Luego la mínima distancia entre $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ es $\overline{NH}$.

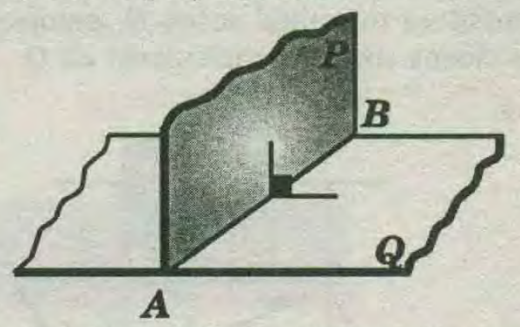
* Finalmente en el $\triangle MHN$: $x = 3\sqrt{3}\ m$

NOTAS:

◆ Se dice que una figura plana se proyecta en verdadera magnitud ***(V.M.)*** sobre un plano , cuando el plano que la contiene es paralela a dicha figura plana .



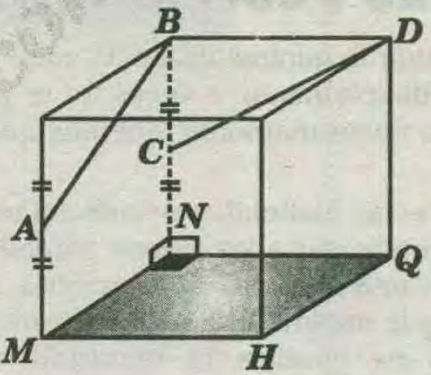
◆ Se dice que un plano se proyecta de canto , sobre otro plano , si le es perpendicular.



* El plano ***P*** es perpendicular al plano ***Q***.

* La proyección de canto del plano ***P*** sobre el plano ***Q*** es la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

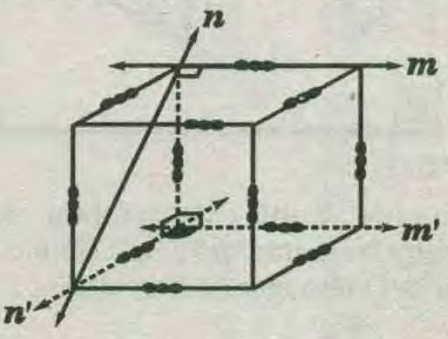
◆ Si dos planos perpendiculares entre sí se proyectan de canto a un tercer plano , entonces dos rectas , cualquiera en los dos primeros , tienen sus proyecciones perpendiculares entre sí, en el tercer plano.



* $\overline{MN}$ proyección de $\overline{AB}$ en ***MNQH***.

* $\overline{NQ}$ proyección de $\overline{CD}$ en ***MNQH***.

◆ Si dos rectas perpendiculares se proyectan sobre un plano paralelo a una de ellas , entonces sus proyecciones son perpendiculares entre sí .



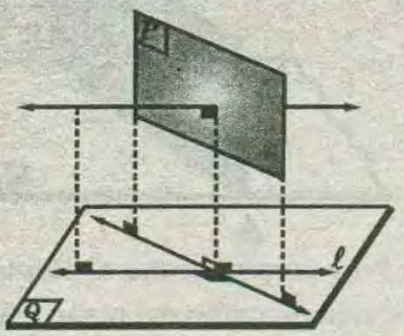
Si $m \perp n \Rightarrow m' \perp n'$

OBSERVACIÓN :

El caso recíproco también se cumple, es decir si dos rectas ***m*** y ***n*** se proyectan sobre un plano y sus proyecciones ***m'*** y ***n'*** forman ángulo recto, entonces las rectas ***m*** y ***n*** son perpendiculares entre si .

UNO-GRATIS2.com

◆ Si el plano P se proyecta de canto sobre el plano Q y la recta ℓ perpendicular al plano P se proyecta en verdadera magnitud sobre Q, entonces ambas proyecciones son perpendiculares en Q.

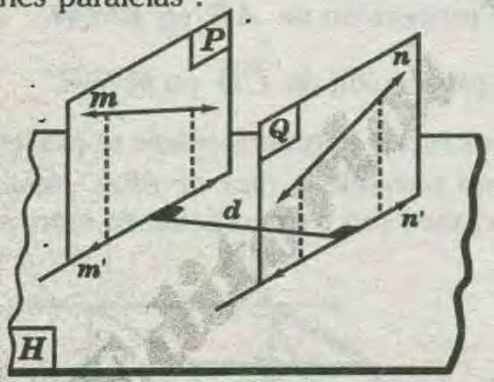


PROCEDIMIENTO PARA CALCULAR LA MÍNIMA DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS ALABEADAS

(OTRO PROCEDIMIENTO)

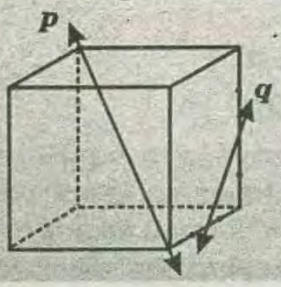
Para encontrar la mínima distancia entre dos rectas alabeadas directamente, a veces no es posible, en estos casos necesariamente tenemos que hacer lo siguiente:

1) Si dos rectas alabeadas se proyectan sobre un plano perpendicular a los planos paralelos que las contienen , entonces sus proyecciones son rectas paralelas , y la mínima distancia entre dichas rectas alabeadas es igual a la distancia entre las proyecciones paralelas .



EJEMPLO :

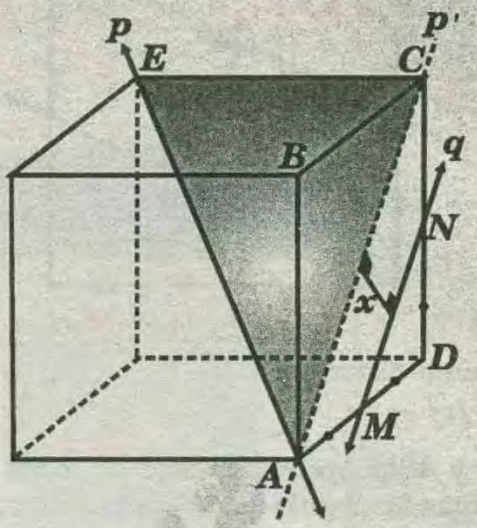
En el siguiente cubo , determinar la mínima distancia entre las rectas "p" y "q", siendo la longitud de la arista del cubo igual a 8 unidades .



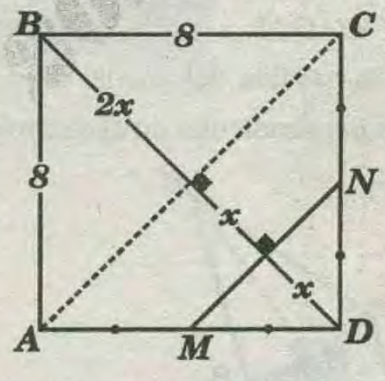
RESOLUCIÓN :

* La proyección de p sobre $ABCD$ es p'.

* En el $\triangle ACD$; M y N son puntos medios, entonces $p' \parallel q$.

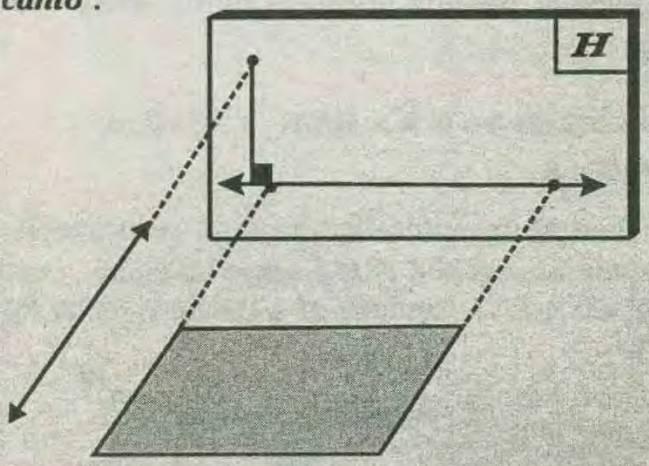


* Entonces la mínima distancia es "x".



$$\Rightarrow \boxed{x=2\sqrt{2}}$$

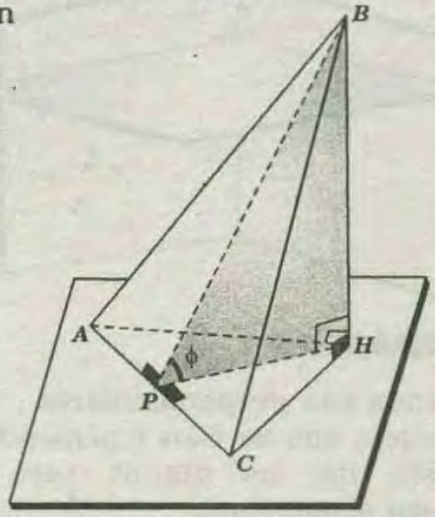
2) Si una recta y un plano son paralelos , y se proyectan sobre un plano perpendicular a la recta , entonces dicha recta se proyecta de ***punta*** y el plano de ***canto*** .



ÁREA DE LA PROYECCIÓN DE UN TRIÁNGULO SOBRE UN PLANO

El área de proyección de un triángulo sobre un plano es igual al área del triángulo multiplicado por el

coseno del diedro formado por el triángulo y su proyección



$$Area_{(ACH)} = Area_{(ABC)} \cos\phi$$

DEMOSTRACIÓN :

Area $_{(AHC)} = 1/2\ AC \times HP$

Área $_{(ABC)} = 1/2\ AC \times BP$

* Dividiendo:

$$\frac{Area(ACH)}{Area(ABC)} = \frac{HP}{BP} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (I)$$

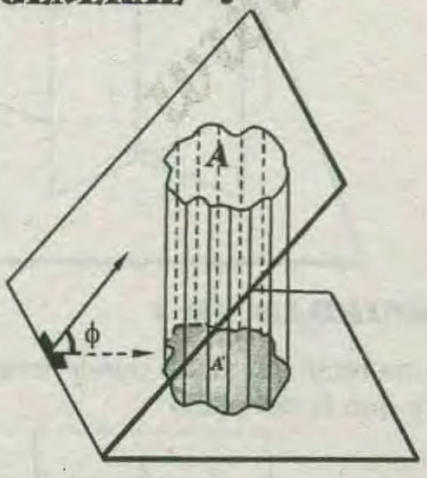
$\triangle PHB$: cos $\phi = HP/BP$

* Remplazando en *(I)* :

$$\frac{Area_{(ACH)}}{Area_{(ABC)}} = \cos\phi$$

$$\Rightarrow Area_{(ACH)} = Área_{(ABC)} \cos\phi$$

EN FORMA GENERAL :

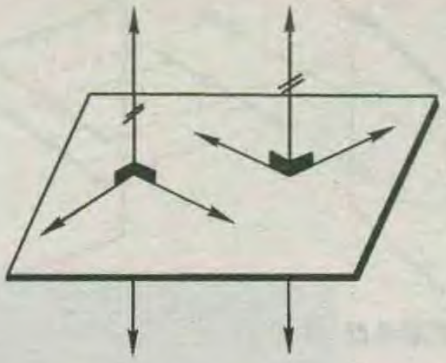


$$A' = A\ Cos\phi$$

PROPIEDADES FUNDAMENTALES

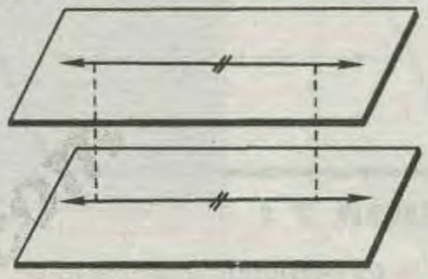
PROPIEDAD 1 :

Dos rectas perpendiculares al mismo plano son paralelas entre sí .



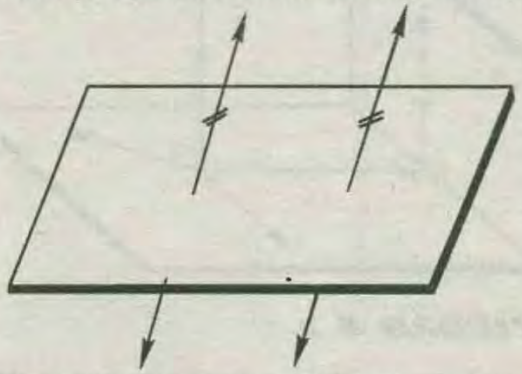
PROPIEDAD 2 :

Si dos planos son paralelos cualquier recta perteneciente a uno de ellos es también paralelo al otro plano .



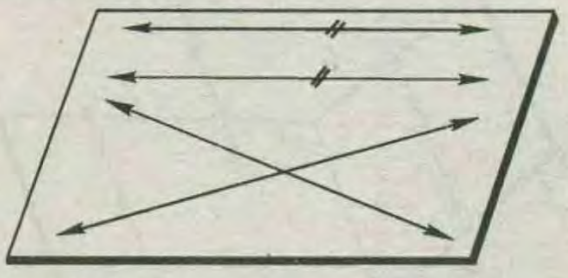
PROPIEDAD 3 :

Si dos rectas son paralelas , todo plano que corte a una de ellas , corta necesariamente a la otra .



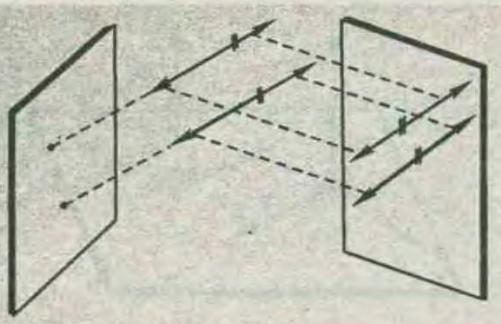
PROPIEDAD 4 :

Dos rectas pertenecientes a un mismo plano pueden ser paralelas o cortarse



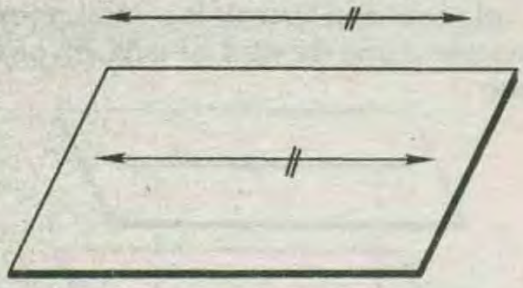
PROPIEDAD 5 :

Dos paralelas entre sí en el espacio , sus proyecciones sobre un plano de proyección serán paralelas o aparecerán como puntos .



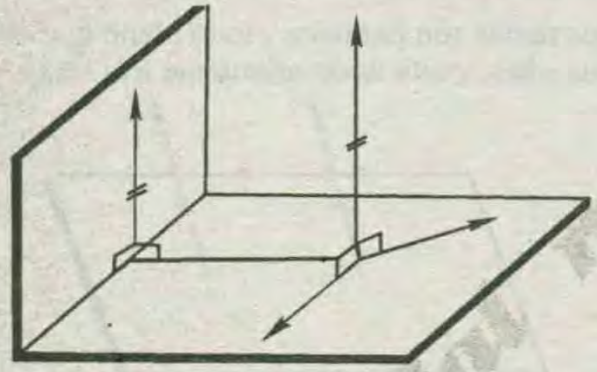
PROPIEDAD 6 :

Una recta exterior a un plano y paralela a cualquier recta de este es también paralela al plano



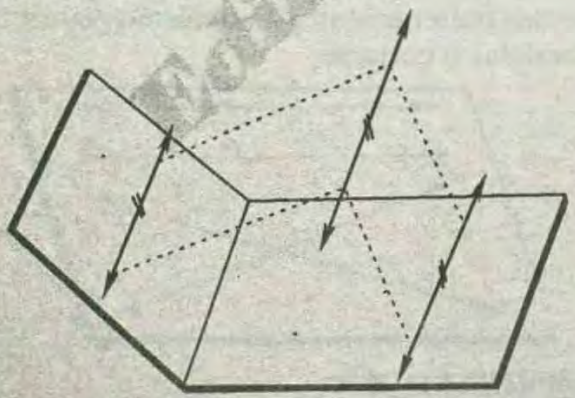
PROPIEDAD 7 :

Si una recta es perpendicular a uno de dos planos perpendiculares es paralela al otro plano.



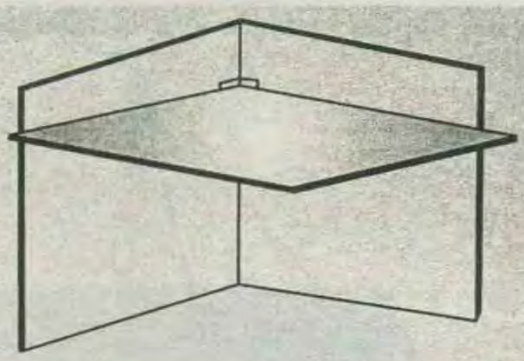
PROPIEDAD 8 :

Si una recta es paralela a dos planos secantes , será paralela a la intersección de estos



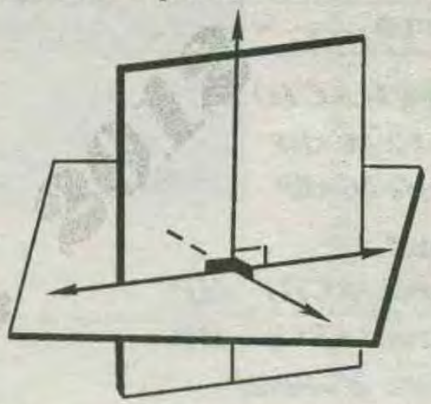
PROPIEDAD 9 :

Si un plano es perpendicular a dos planos secantes es también perpendicular a la intersección.



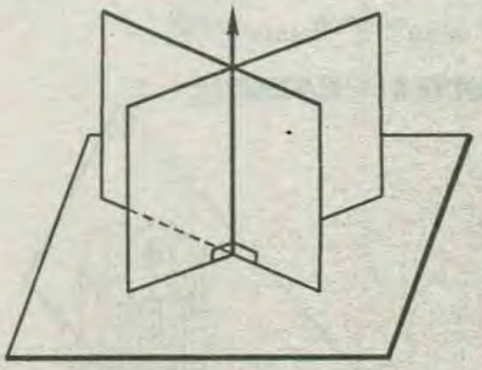
PROPIEDAD 10 :

Si dos planos son perpendiculares , una recta perteneciente a uno de ellos y perpendicular a la intersección de los planos será también perpendicular al otro plano



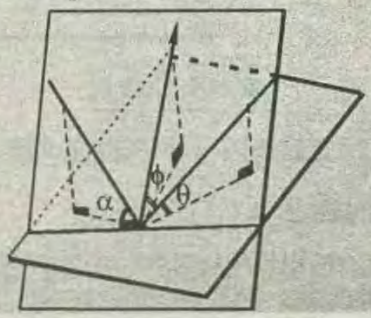
PROPIEDAD 11 :

Si una recta es perpendicular a un plano ; todo plano que pase por dicha recta será perpendicular al primer plano .



PROPIEDAD 12 :

Ninguna recta del plano puede tener una pendiente mayor que la del plano .

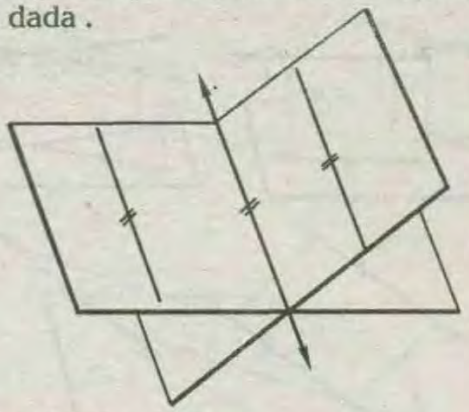


$\phi > \theta$

$\phi > \alpha$

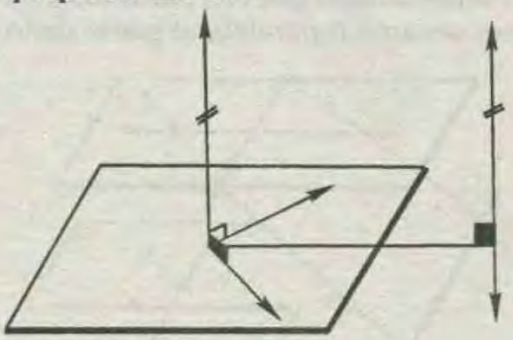
PROPIEDAD 13 :

Si dos rectas son paralelas : la intersección de los planos que pasan por dichas rectas serán paralelas a la recta dada .



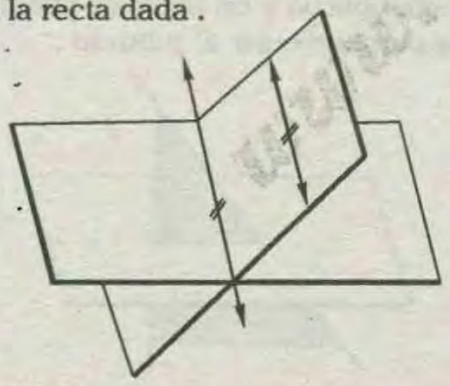
PROPIEDAD 14 :

Por un punto exterior a una recta se pueden trazar infinitas perpendiculares



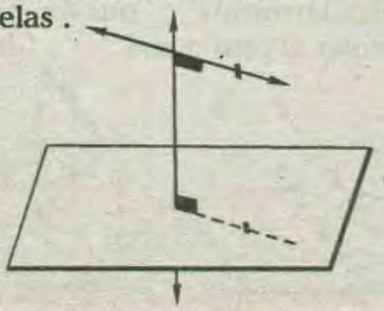
PROPIEDAD 15 :

Si una recta es paralela a un plano , todo plano que pase por la recta intercepta al plano según una recta paralela a la recta dada .



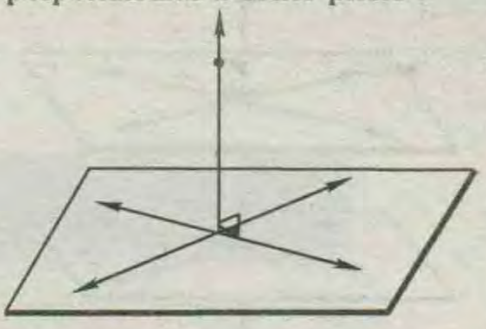
PROPIEDAD 16 :

Una recta y un plano perpendiculares a una misma recta son paralelas .



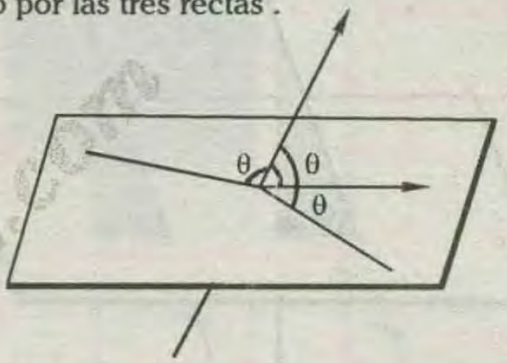
PROPIEDAD 17 :

Desde un punto exterior a un plano , se pueden trazar una sola perpendicular a dicho plano .



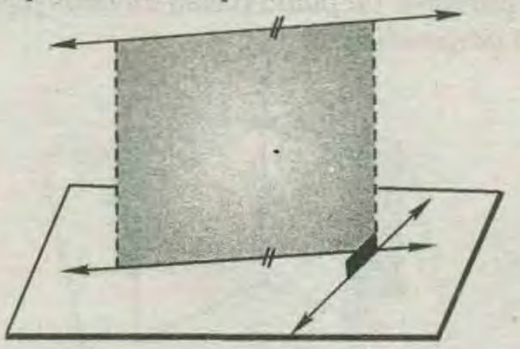
PROPIEDAD 18 :

Una recta que forma ángulos iguales con otras tres rectas que pasan por su pie ; es secante al plano formado por las tres rectas .



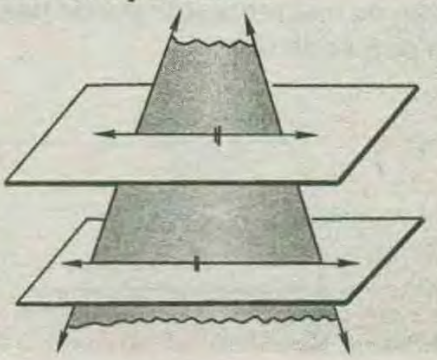
PROPIEDAD 19 :

Por una recta paralela a un plano se puede trazar un plano perpendicular al primero .



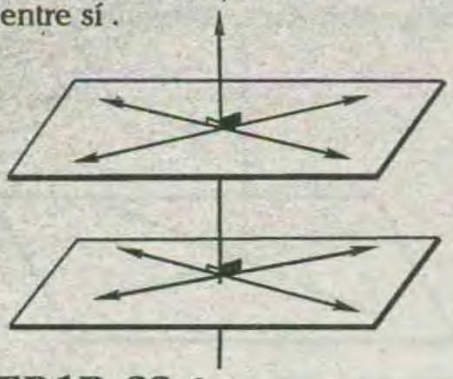
PROPIEDAD 20 :

Si dos planos son paralelos la intersección de estos con un tercero son paralelos .



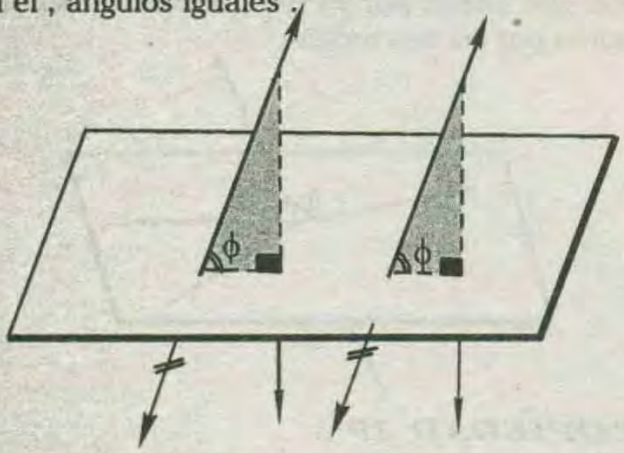
PROPIEDAD 21 :

Dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos entre sí .



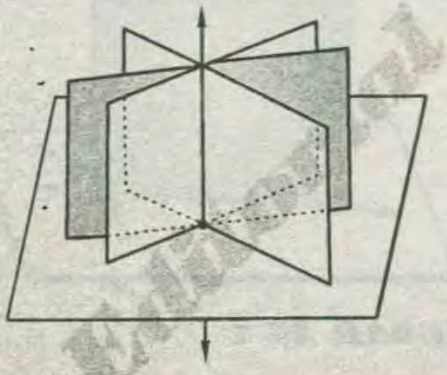
PROPIEDAD 22 :

Dos rectas paralelas que cortan a un plano forman con él , ángulos iguales .



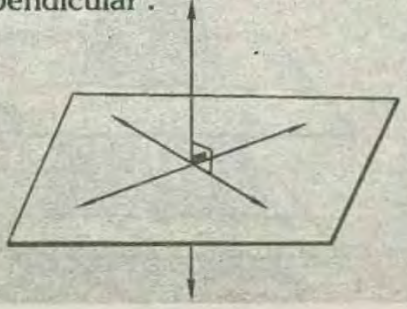
PROPIEDAD 23 :

Por un punto de un plano pasan infinitos planos que le sean perpendiculares .



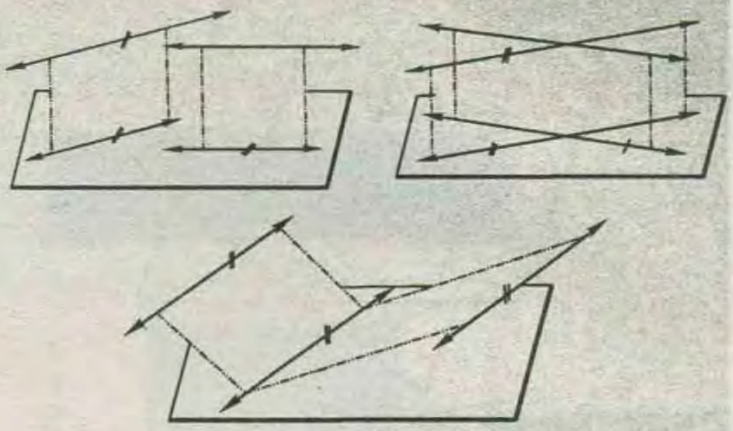
PROPIEDAD 24 :

Por un punto de una recta solo puede pasar un plano que le sea perpendicular .



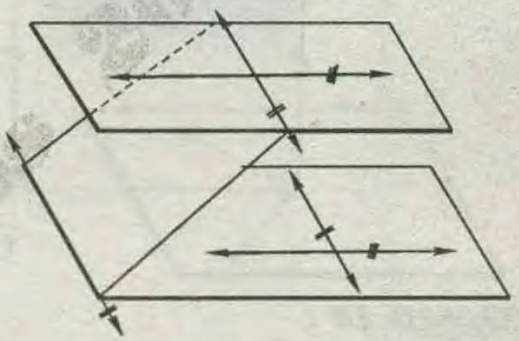
PROPIEDAD 25 :

Si dos rectas son paralelas a un plano ; las rectas pueden ser cruzadas , secantes o paralelas .



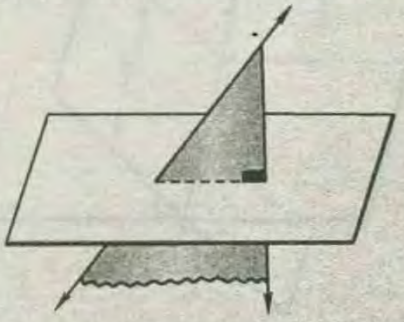
PROPIEDAD 26 :

El plano determinado por dos paralelas a otro plano, puede ser secante o paralela al plano dado .



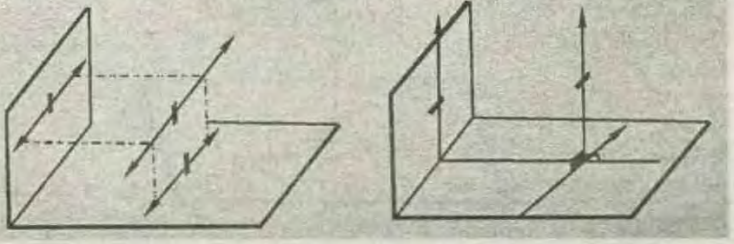
PROPIEDAD 27 :

Por una recta oblicua a un plano se puede trazar un solo plano perpendicular al primero .



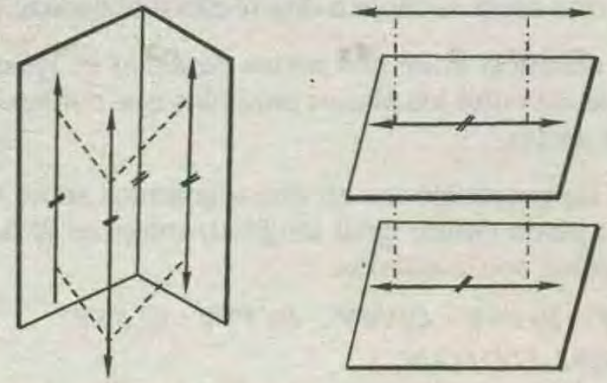
PROPIEDAD 28 :

Una recta paralela a uno de dos planos que se cortan perpendicularmente ; puede ser paralela o perpendicular al otro plano .



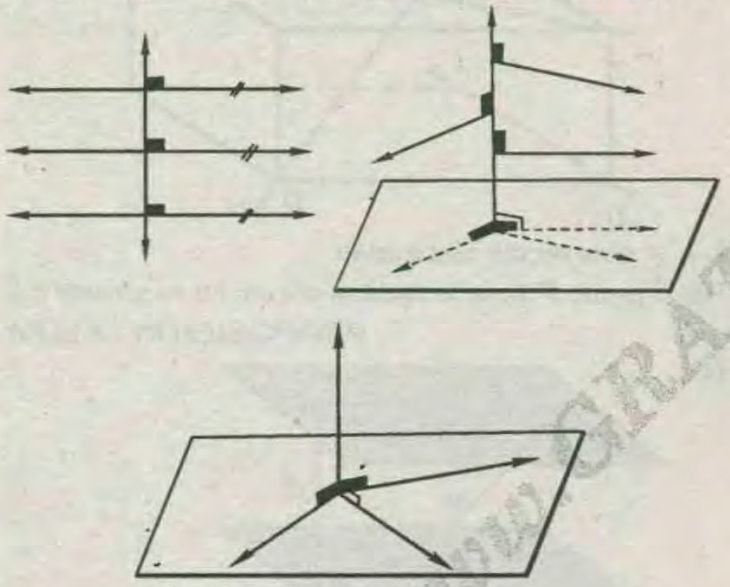
PROPIEDAD 29 :

Los planos paralelos a una recta dada pueden ser secantes o paralelas entre sí .



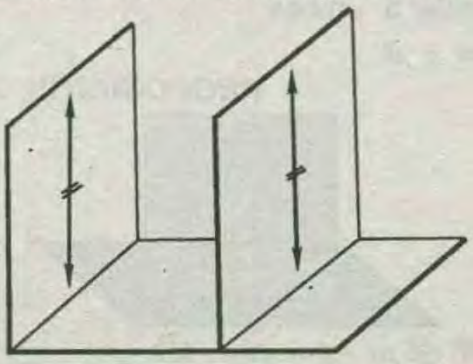
PROPIEDAD 30 :

Si una recta es perpendicular a tres rectas dadas, las tres rectas pueden ser paralelas , cruzadas o secantes.



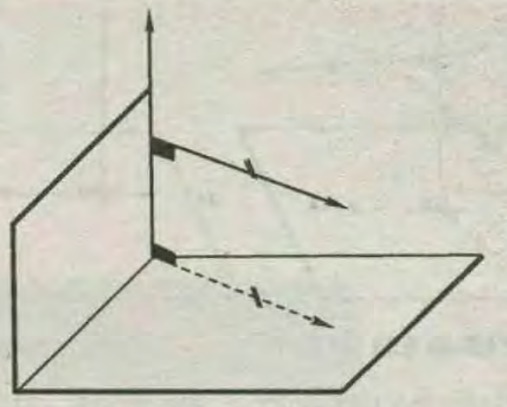
PROPIEDAD 31 :

si dos planos son perpendiculares todo plano perpendicular a uno de ellos es paralelo al otro .



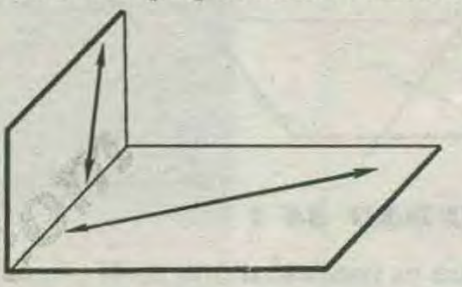
PROPIEDAD 32 :

Si dos planos son perpendiculares toda recta perpendicular a la intersección de ambos no necesariamente esta contenido en uno de ellos .



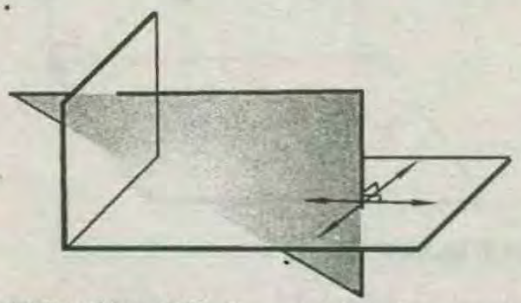
PROPIEDAD 33 :

Si dos planos son perpendiculares no todas las rectas de uno de ellos son perpendiculares al otro plano .



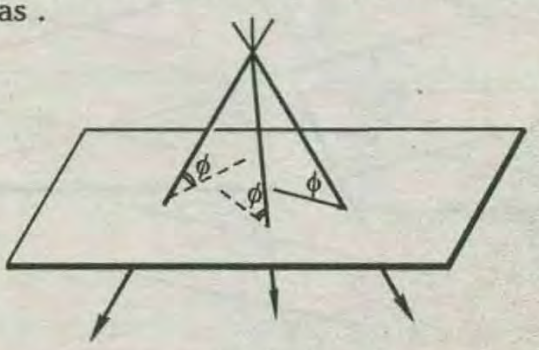
PROPIEDAD 34 :

Si dos planos son perpendiculares todo plano perpendicular a su intersección es perpendicular a ambos .



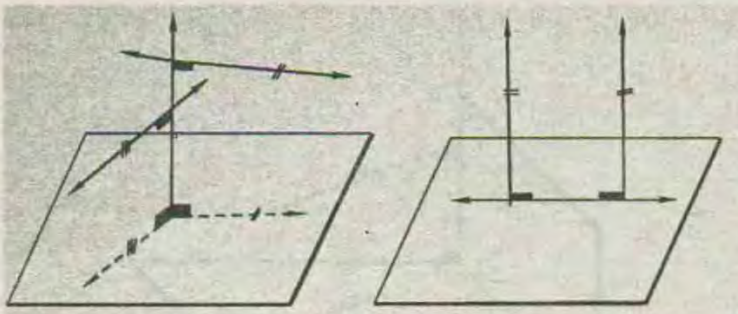
PROPIEDAD 35 :

Si dos o más rectas forman el mismo ángulo con un plano , estas rectas no necesariamente son paralelas .



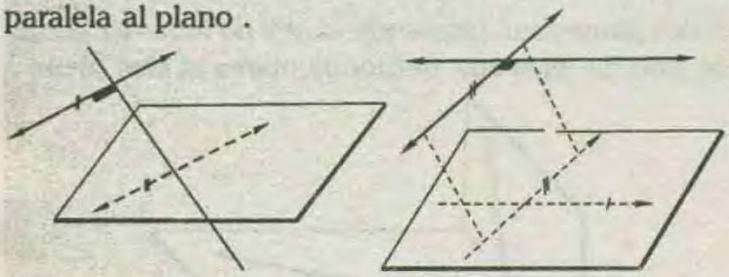
PROPIEDAD 36 :

En el espacio dos rectas perpendiculares a una tercera ; pueden ser rectas cruzadas, secantes o paralelas .



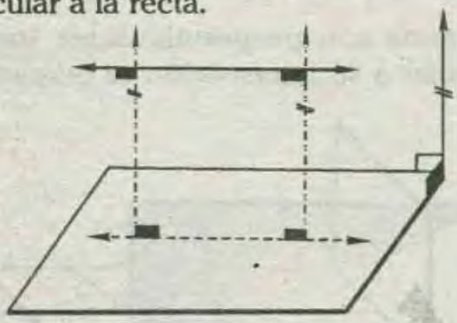
PROPIEDAD 37 :

Si un plano es paralelo a una recta , toda recta perpendicular a la recta dada puede ser secante o paralela al plano .



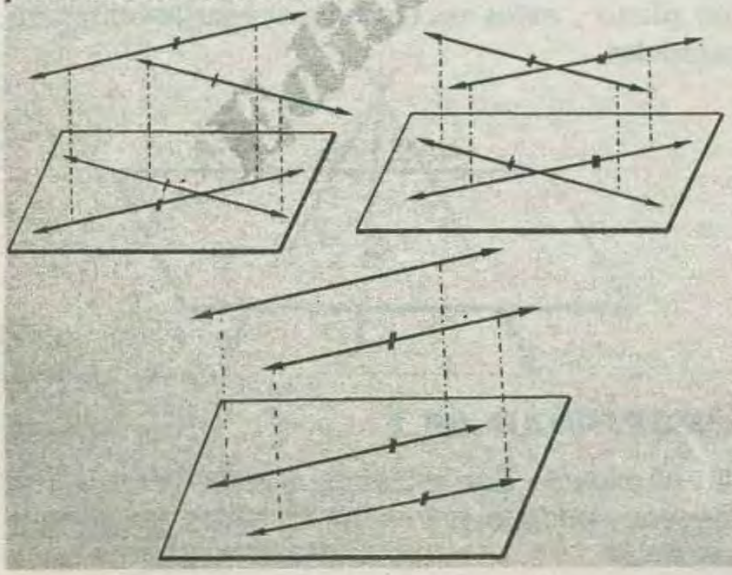
PROPIEDAD 38 :

Si un plano es paralelo a una recta , toda recta que es perpendicular al plano tendrá que ser perpendicular a la recta.



PROPIEDAD 39 :

Si un plano es paralelo a una recta , toda recta paralela al plano puede ser cruzada , secante o paralela a la recta dada.



EJERCICIO :

Indique el valor de las siguientes proposiciones.

I) Por un punto cualquiera del espacio se puede trazar una recta secante a dos rectas alabeadas.

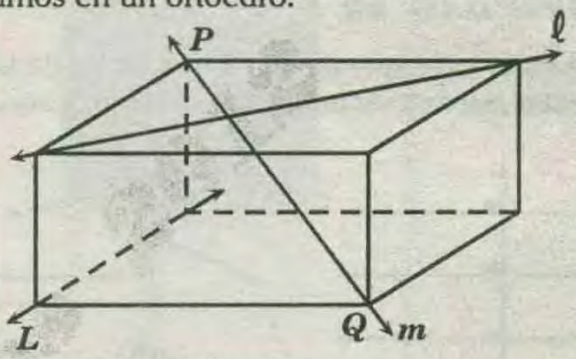
II) La distancia entre dos rectas paralelas es igual a la distancia entre los planos paralelos que contienen dichas rectas.

III) Si las proyecciones en dos segmentos sobre un mismo plano tienen igual longitud, entonces dichos segmentos son paralelos.

A) FFF B) FVF C) VVV D) FVV E) FFV

RESOLUCIÓN :

I) Veamos en un ortoedro.

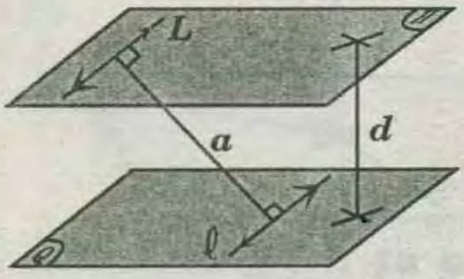


L y ℓ son rectas alabeadas.

Por el punto P pasa la recta m el cual no es secante a L y ℓ.

PROPOSICIÓN FALSA

II)

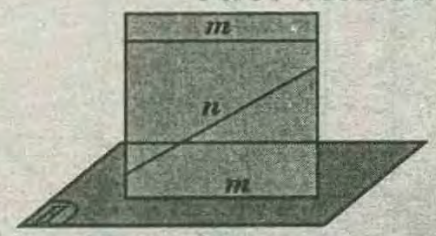


Distancia entre los planos H y Q es d perpendicular a ambas. Distancia entre las rectas L y ℓ es a perpendicular a ambas .

Luego : $a \neq d$

PROPOSICIÓN FALSA

III)



Proyección de m sobre H es m.

Proyección de n sobre H es n.

Además : $m \neq n$ y no son paralelos.

PROPOSICIÓN FALSA

RPTA : "A"

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I) Dos rectas paralelas al mismo plano son paralelas entre sí.

II) Por un punto de un plano solo se puede trazar una recta perpendicular al plano.

III) Todas las rectas paralelas entre si son coplanares.

A)FVF B)FFF C)VVV D)FVV E)VFF

RESOLUCIÓN :

I) Si dos rectas paralelas al mismo plano; las rectas pueden ser cruzadas, secantes o paralelas.

PROPOSICIÓN FALSA

II) Veamos el caso recíproco; por un punto de una recta solo puede pasar un plano que le sea perpendicular.

PROPOSICIÓN VERDADERA

III) Las rectas que pasan por los puntos de la circunferencia dada se llama a directriz de la superficie cilíndrica , dicha recta son paralelas entre sí y no son coplanares.

PROPOSICIÓN FALSA

RPTA : "A"

PROBLEMA 2 :

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I) Si tres o más rectas son concurrentes, entonces dichas rectas son coplanares.

II) Una recta alabeada a la arista de dos planos secantes es secante a ambos planos.

III) Si tres rectas son paralelas, entonces son necesariamente coplanares.

IV) Si dos rectas determinan un plano una recta exterior a dicho plano es paralela a dichas rectas.

A) VFVF B) FVFV C) FVVF D) FFFV E) FFFF

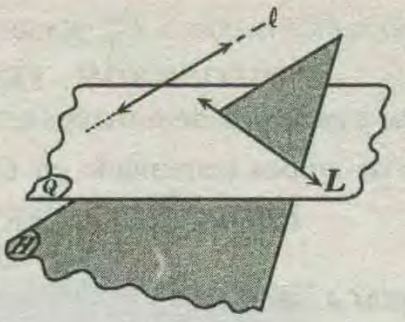
RESOLUCIÓN :

I) Ejemplo de rectas concurrentes en el plano , las bisectrices interiores de un triángulo.

Ejemplo de rectas concurrectes en el espacio, los rayos incidentes paralelos al eje convergen hacia el foco de un espejo cóncavo.

PROPOSICIÓN FALSA

II)

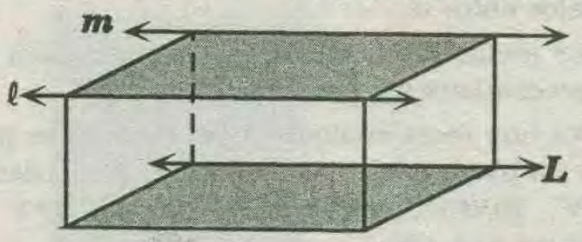


$R \parallel H$; R y L son alabeadas.

$\Rightarrow \ell \cap Q \neq \{\phi\}$

PROPOSICIÓN FALSA

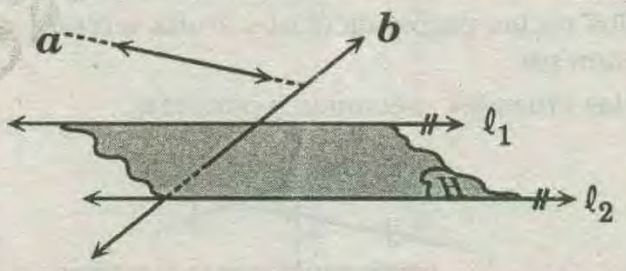
III)



En el rectoedro podemos poner como ejemplo tres rectas paralelas y no son coplanares necesariamente.

PROPOSICIÓN FALSA

IV)



$\ell_1 \parallel \ell_2$ determinan el plano H ; a y b son rectas exteriores, los cuales no son paralelas a las rectas ℓ_1 y ℓ_2.

PROPOSICIÓN FALSA

RPTA : "E"

PROBLEMA 3 :

Indique verdadero *(V)* o falso *(F)*

I) n puntos determinan como máximo C_3^n planos .

II) n rectas determinan como máximo C_2^n planos.

III) n puntos y n rectas determinan como máximo $nm+C_3^n+C_2^m$ planos .

A) VVV B) VFF C)VFV D) FVV E) FVF

RESOLUCIÓN :

I) Un plano queda determinado por tres puntos no colineales , n puntos determinan como máximo C_3^n planos.

PROPOSICIÓN VERDADERA

II) Un plano queda determinado por dos rectas paralelas o dos rectas secantes , n rectas

determinano como máximo C_2^n planos.

PROPOSICIÓN VERDADERA

III) *n* puntos y *m* rectas determinan como máximo el producto de ambos aumentado en C_3^n y C_2^n.

PROPOSICIÓN VERDADERA

RPTA : "A"

PROBLEMA 4 :

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I) Dos rectas paralelas a un mismo plano son paralelos entre sí.

II) Dos rectas perpendiculares a una tercera recta son necesariamente paralelas entre sí.

III) Por una recta cualquiera del espacio se puede trazar un plano perpendicular a otro plano dado.

A)FVV B)VFV C)VVF D)VVV E)FFV

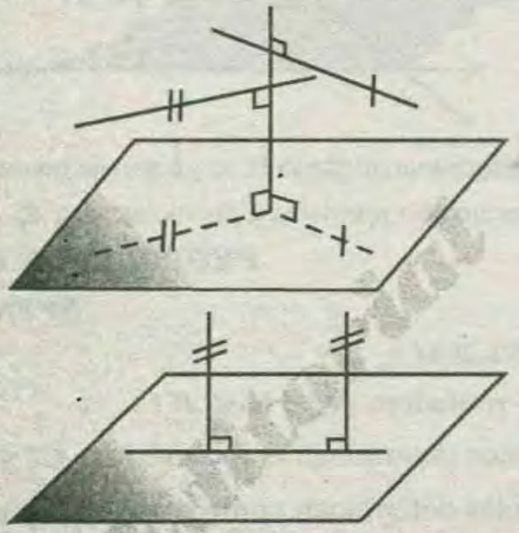
RESOLUCIÓN :

I) Si dos rectas paralelas a un mismo plano; las rectas pueden ser cruzadas , secantes o paralelas.

PROPOSICIÓN FALSA

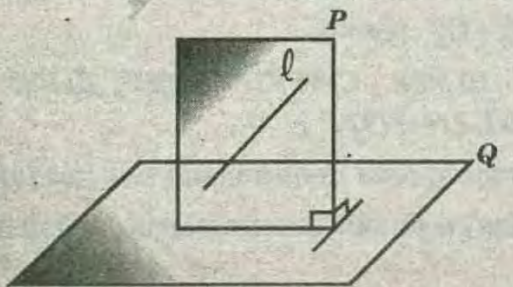
II)Dos rectas perpendiculares a una tercera recta; pueden ser :

Rectas cruzadas , secantes o paralelas.



PROPOSICIÓN FALSA

III)



El plano *P* contiene a *R* y es perpendicular a *Q*.

PROPOSICIÓN VERDADERA

RPTA : "E"

PROBLEMA 5 :

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I) Dos rectas cruzadas determinan un plano.

II)Todos los planos paralelos a un plano dado son paralelos entre sí.

III) Por un punto del plano , se puede trazar solo una recta perpendicular al plano.

A)VVV B)FFV C)FFF D)FVV E)VFF

RESOLUCIÓN :

I) Dos rectas cruzadas están en planos distintos.

PROPOSICIÓN FALSA

II) PROPOSICIÓN VERDADERA

III) Por un punto de un plano pasan infinitos planos perpendiculares al plano dado , la recta de intersección de dicho plano es perpendicular al plano dado en dicho punto

PROPOSICIÓN VERDADERA

RPTA : "D"

PROBLEMA 6 :

Indicar la proposición correcta :

A) Dos rectas que no tiene un punto en común son paralelas.

B) Dos rectas que no tienen punto en común son del mismo plano.

C) La rectas paralelas son coplanares.

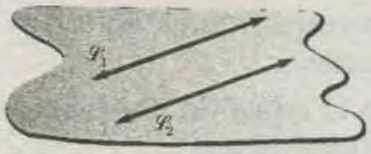
D) Ninguna.

E) La rectas paralelas pueden ser concurrentes.

RESOLUCIÓN:

* Por teoría :

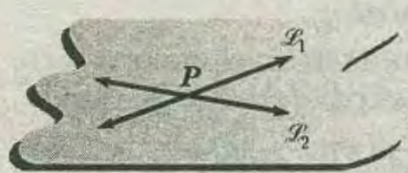
Rectas paralelas



$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} \wedge \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$: coplanares

$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} \cap \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2} = \{\phi\}$

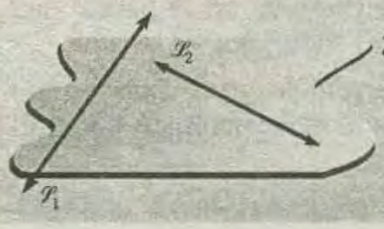
Rectas secantes :



$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} \wedge \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$: coplanares

$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} \cap \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2} = \{p\}$

Rectas alabeadas o cruzadas:



$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} \wedge \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$: no coplanares

$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} \cap \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2} = \{\phi\}$

* Luego :

A) FALSO : (pueden ser alabeadas)

B) FALSO : (las rectas alabeadas, no son del mismo plano)

C) VERDADERO: (las rectas paralelas pertenecen a un mismo plano)

D) FALSO :

E) FALSO : (las rectas paralelas, no tienen ningún punto en común)

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

Un triángulo equilátero **ABC** está en un plano perpendicular a un cuadrado **ABDE** , siendo $\overline{AB}$ el lado común de ambos polígonos . El segmento de recta que une el punto medio del lado $\overline{AC}$ del triángulo con el punto medio del lado $\overline{BD}$ del cuadrado mide **1**m. ¿Cuál es la longitud del lado del triángulo o del cuadrado?

A) $\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{3}$ **C)1,5** **D)1** **E)2**

RESOLUCIÓN :

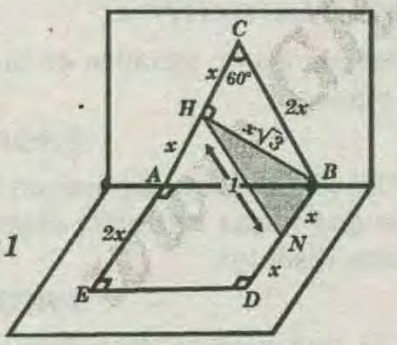
* Como los planos del triángulo y cuadrado, son perpendiculares y $\overline{DB}$ es perpendicular a la intersección, entonces $\overline{DB}$ es perpendicular al plano del triángulo, por lo que $\overline{DB} \perp \overline{BH}$.

* $\triangle HBN$:

$x^2+(x\sqrt{3})^2=1^2$

$\rightarrow 4x^2=1$

$\rightarrow x=1/2 \rightarrow AE=2x=1$



RPTA : "D"

PROBLEMA 8 :

De las siguientes afirmaciones cual(les) son falsas:

I) Dos rectas perpendiculares a una tercera necesariamente son paralelas.

II) La intersección de tres planos es necesariamente una recta.

III) Dos planos que forman ángulos iguales con un tercero son paralelos entre sí.

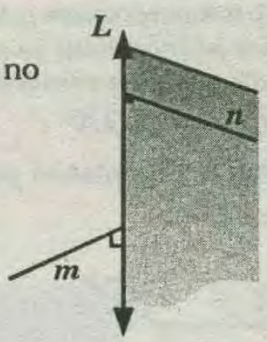
IV) La intersección de dos planos paralelos con un tercero determina dos rectas paralelas.

A) Sólo I y II **B) Sólo I y II** **C) Sólo I, II y III**
D) Sólo II y III **E) Sólo III y IV**

RESOLUCIÓN :

I) Proposición **FALSA** :

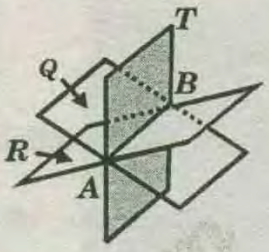
Ejemplo: $m \perp L$, $n \perp L$ y no Necesariamente $m \parallel n$



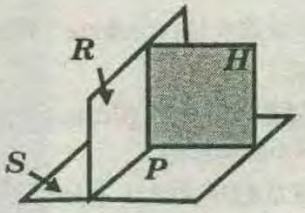
II) Proposición **FALSA** :

(puede ser una recta o un punto)

EJEMPLO :



$\overleftrightarrow{AB}: R \cap Q \cap T$



$\{P\}: H \cap R \cap S$

III) Proposición **FALSA :**

IV) Proposición **VERDADERA :**

RPTA : "C"

PROBLEMA 9 :

Tres planos paralelos determinan sobre una recta secante L_1, los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$ y sobre otra L_2, secante, los segmentos $\overline{CF}$ y $\overline{FD}$. Si **AB=8m, CD=12m** y **FD – EB=1m**. Hallar el valor de **CF**.

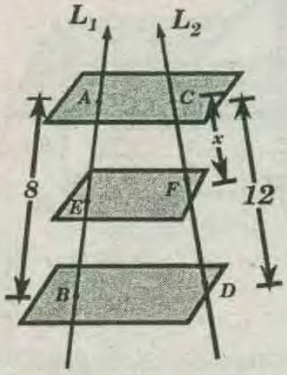
A) 4m **B)7m** **C) 5m** **D) 1m** **E) 9m**

RESOLUCIÓN :

$FD = 12 - x$, y como : $EB = FD - 1$

$\rightarrow EB = 11 - x$

* Por el teorema de Thales :



$$\frac{AB}{EB}=\frac{CD}{FD}$$

$$\rightarrow \frac{8}{11-x}=\frac{12}{12-x} \rightarrow x = 9$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 10 :

Indicar la proposición verdadera:

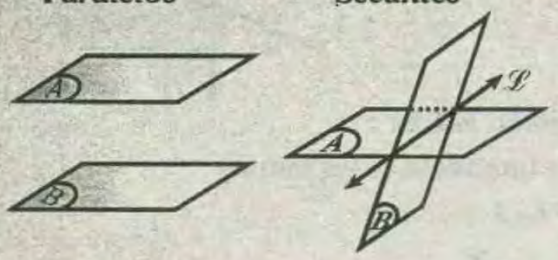
A) Dos planos pueden tener un único punto común.
B) Si dos planos son distintos y tienen por lo menos un punto en común, entonces son secantes.

C) Dos planos secantes pueden ser paralelos.
D) Si dos planos tiene por lo menos un punto en común, entonces son coincidentes.

RESOLUCIÓN :

* Por teoría, dos planos pueden ser:

Paralelos ***Secantes***



$\square A \cap \square B = \{\phi\}$ $\square A \cap \square B = \{\overleftrightarrow{\mathcal{L}}\}$

* Luego :

A) FALSO : (dos planos secantes, tienen infinitos punto comunes)

B) VERDADERO : (dos planos secantes, tiene muchos puntos comunes).

C) FALSO : (por teoría, dos planos paralelos no tienen puntos comunes).

D) FALSO : (no existen, planos coincidentes)

E) FALSO :

RPTA : "B"

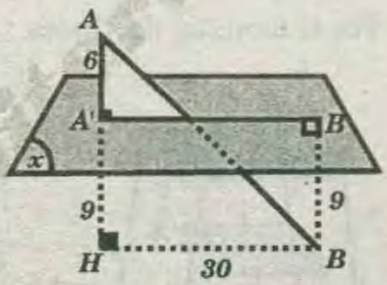
PROBLEMA 11 :

Dos puntos ***A*** y ***B***, situados a uno y otro lado de un plano ***x***, distan de dicho plano, ***6cm***, y ***9cm***, respectivamente. Si la proyección del segmento $\overline{AB}$ sobre el plano es ***30cm*** . Hallar la distancia entre los puntos ***A*** y ***B***.

A) $15\sqrt{5}$ ***B)15*** ***C)*** $12\sqrt{3}$ ***D)*** $12\sqrt{5}$ ***E)12***

RESOLUCIÓN :

* Trazamos $\overline{BH} \parallel \overline{A'B'}$



→ $\triangle AHB$:

$AB^2 = BH^2 + HB^2$

$\rightarrow AB^2 = 15^2 + 30^2$

$\rightarrow AB = 15\sqrt{5}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 12 :

La distancia entre las proyecciones de un segmento de recta $\overline{AB}$ sobre un plano ***x, y*** sobre una recta perpendicular al plano es igual a ***7cm***. Si el segmento $\overline{AB}$ mide un centímetro más que su proyección sobre ***x***. ¿Cuánto mide el segmento $\overline{AB}$?.

A) 13cm ***B) 5cm*** ***C) 10cm*** ***D) 8cm*** ***E) 12cm***

RESOLUCIÓN :

* Incógnita : ***AB***

Del gráfico : $AE = PQ = a - 7, \ldots\ldots (a > 7)$

$EB = A'B' = a$

* En $\triangle AEB$:

$AB^2 = AE^2 + EB^2 \Rightarrow (a+1)^2 = (a-7)^2 + a^2$

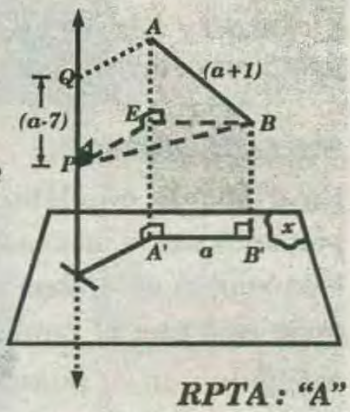
* De aquí :

$a^2 - 16a + 48 = 0$

$\rightarrow (a-4)(a-12) = 0 \rightarrow a = 12$

* Luego:

$AB = a + 1 = 13$



RPTA : "A"

PROBLEMA 13 :

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I) Tres puntos determinan un plano.

II) Dos rectas cruzadas están contenidos en un plano.

III) La intersección de tres planos pueden ser un punto.

A)FFV ***B)FVV*** ***C)VFV*** ***D)VVF*** ***E)FFF***

RESOLUCIÓN :

I)Tres puntos no situados en línea recta determinan un plano.

PROPOSICIÓN FALSA

II) Dos rectas que se intersecan determinan un plano, pero dos rectas cruzadas están contenidos en dos planos distintos.

PROPOSICIÓN FALSA

II) Si dos planos diferentes se intersecan, su intersección es una recta.

PROPOSICIÓN FALSA

RPTA : "E"

PROBLEMA 14 :

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

A) Dos rectas perpendiculares a una misma recta son paralelas.

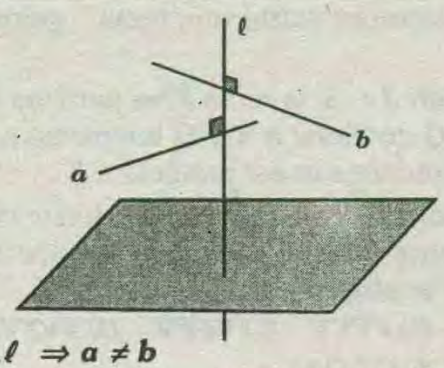
B) Dos rectas perpendiculares al mismo plano son paralelas.

C) La intersección de tres planos es un punto.

A)VFF ***B)FFF*** ***C)VVV*** ***D)FVV*** ***E)FVF***

RESOLUCIÓN :

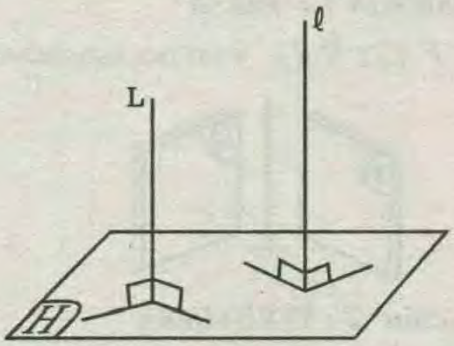
A)



$\ell \perp$ y $b \perp \ell \Rightarrow a \neq b$

PROPOSICÓN FALSA

B)



Si $\ell \perp H$ y $L \perp H$
$\Rightarrow \ell \parallel L$

PROPOSICIÓN VERDADERA

C) La intersección de tres planos es una recta.

PROPOSICIÓN FALSA

RPTA : "E"

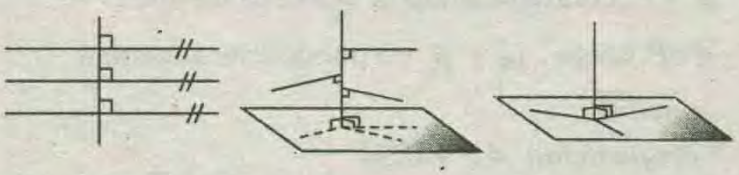
PROBLEMA 15 :

Si una recta perpendicular a tres rectas dadas, entonces:

A) Las tres rectas tienen que ser paralelas.
B) Las tres rectas tienen que estar en un mismo plano que contenga a la perpendicular.
C) Por las tres rectas pueden pasar planos paralelos entresí.
D) Por las tres rectas no pueden pasar planos paralelos entre sí.
E) Las tres rectas son perpendiculares entre sí.

RESOLUCIÓN :

* Si una recta perpendicular a tres rectas dadas , las tres rectas pueden ser paralelas , cruzadas o secantes.



RPTA : "A"

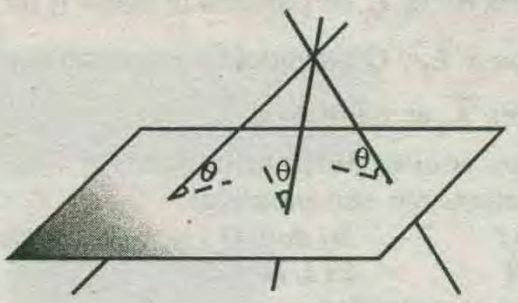
PROBLEMA 16 :

Si dos ó más rectas determinan ángulos congruentes con un plano , entonces es siempre verdad :

A) Las rectas tendrán longitudes congruentes.
B) Las rectas son paralelas.
C) Las rectas son perpendiculares.
D) Las rectas no necesariamente son paralelas.
E) Las rectas serán paralelas únicamente cuando el ángulo que determinan con el plano mide 90°.

RESOLUCIÓN :

Las rectas no necesariamente son paralelas.



RPTA : "D"

PROBLEMA 17 :

En las siguientes proposiciones cuales son verdaderas o falsos :

I) Si las proyecciones ortogonales de una figura sobre dos planos perpendiculares son rectas , entonces dicha figura es una recta.

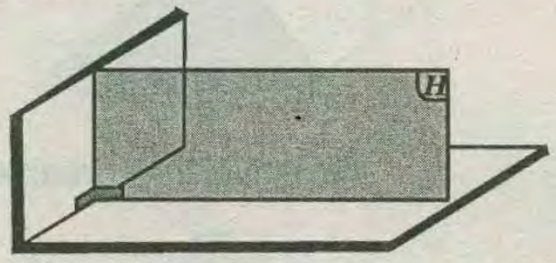
II) Si dos planos son perpendiculares a un tercer plano, entonces los dos primeros planos son paralelos.

III) Si las medidas de los ángulos entre una recta y dos planos son congruentes , entonces dichos planos son paralelos.

A)FFF B)FFV C)FVV D)VVV E)VVF

RESOLUCIÓN :

I)



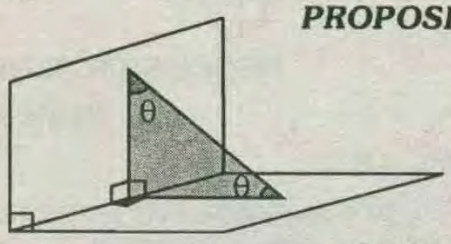
Las proyecciones ortogonales del plano ***H*** sobre dos planos perpendiculares son rectas.

PROPOSICIÓN FALSA

II) Si dos planos son perpendiculares , todo plano perpendicular a su intersección es perpendicular a ambos.

PROPOSICIÓN FALSA

III)



PROPOSICIÓN FALSA

RPTA : "A"

PROBLEMA 18 :

Dadas las siguientes proposiciones. ¿Cuáles son correctas?.

I) Todos los planos paralelos a una recta son paralelos entre sí.

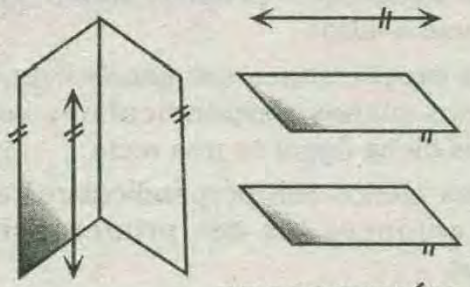
II) Si una recta $\overleftrightarrow{L_1}$ es paralela al plano *P*, un plano *Q* contiene a $\overleftrightarrow{L_1}$ y *Q* intersecta a *P* en una recta L_2, entonces $\overleftrightarrow{L_2}$ es paralelo a $\overleftrightarrow{L_1}$.

III) Dos rectas perpendiculares a una tercera necesariamente son paralelos.

A) Solo I *B) Solo II* *C) Solo III*
D) I y II *E) I, II y III*

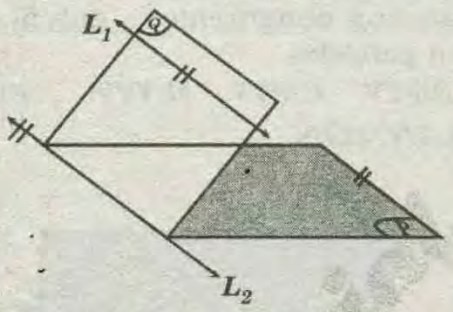
RESOLUCIÓN :

I) Los planos paralelos a una recta dada puede ser secante o paralelas entre si.



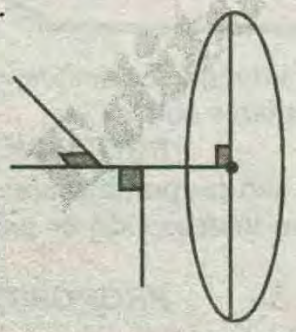
PROPOSICIÓN FALSA

II)



PROPOSICIÓN VERDADERA

III)



Puede ser alabeadas o cruzadas.

PROPOSICIÓN FALSA

RPTA : "B"

PROBLEMA 19 :

Proposición 1 : Si dos planos son paralelos a la misma recta, entonces ellos son paralelos entre sí.

Proposición 2 : Dadas dos rectas que se cruzan, entonces siempre existe una recta perpendicular a ambas.

Proposición 3 : Si la recta *K* es paralela al plano *P*, un plano *Q* contiene a *K* y *Q* intersecta a *P* en una recta m, entonces m es paralela a *K* .

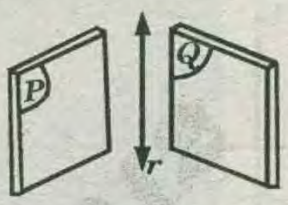
Proposición 4 : Una recta que intersecta a una de dos rectas que se cruzan, siempre intersecta también a la otra .

A) FVVF *B) FVVV* *C) VFFV* *D) FVFV* *E) VFFF*

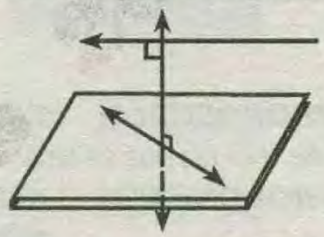
RESOLUCIÓN :

*** PROPOSICIÓN 1 : FALSA**

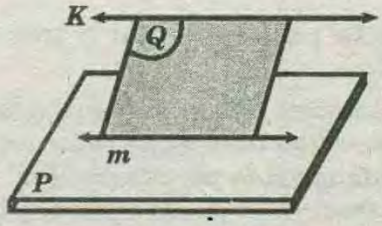
Ejemplo: $P \parallel \overleftrightarrow{r}$; $Q \parallel \overleftrightarrow{r}$ y no necesariamente $P \parallel Q$



*** Proposición 2 : VERDADERA**



*** Proposición 3 : VERDADERA**



Hipótesis : $\overleftrightarrow{K} \parallel p$: $\overleftrightarrow{K} \subset Q; Q \cap P : \overleftrightarrow{m}$

* Tésis : $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{K}$

* ***Demostración:*** supongamos que *m* y *K* son secantes.

$\rightarrow$ tendría un punto común, el cual pertenecería a $\overleftrightarrow{K}$ y *P*, contradiciendo la hipótesis de que :

$\overleftrightarrow{K} \parallel P$, luego , $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{K}$ no pueden ser secantes

$\rightarrow \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{K}$

*** Proposición 4 : FALSA**

RPTA : "A"

PROBLEMA 20 :

Un punto *P* dista *12cm* de un plano . Un segmento de recta *AB = 8cm* está en el plano . Encontrar la distancia, en cm desde *AB* al pie de la perpendicular bajada desde *P*, si

$AP = BP = 13cm$

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 3 D) $3\sqrt{2}$ E) 6

RESOLUCIÓN :

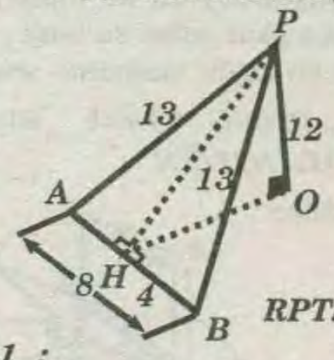
* $OH = ?$

* Por ser $AP = BP$, H cae con el punto medio de $\overline{AB}$

* $\triangle HOP : OH^2 = HP^2 - 12^2$ ..... (I)

* $\triangle BHP: HP^2 = 13^2 - 4^2$ ..... (II)

* De (II) en (I) :



$OH^2 = 13^2 - 4^2 - 12^2$

$\rightarrow OH = 3$

RPTA : "C"

PROBLEMA 21 :

Si un plano es paralelo a una recta:

A) Toda perpendicular a la recta será paralelo al plano.

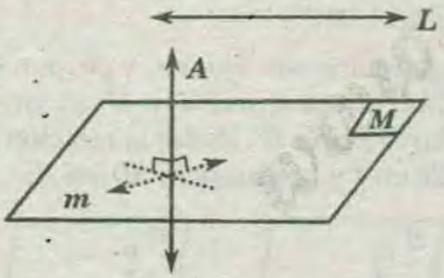
B) Toda recta paralela al plano será paralela a la recta dada.

C) Todo plano perpendicular al plano dado, será paralelo a la recta dada.

D) Toda recta que es perpendicular al plano tendrá que ser perpendicular a la recta

E) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

RESOLUCIÓN :



* Sea : $\overline{L}//$ plano M lo que implica que también es paralela a "m" (por estar "m" contenida en M).

* De la figura :

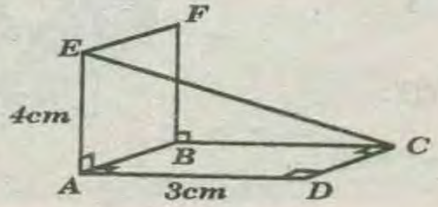
$$m \perp A, \rightarrow A \perp m$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 22 :

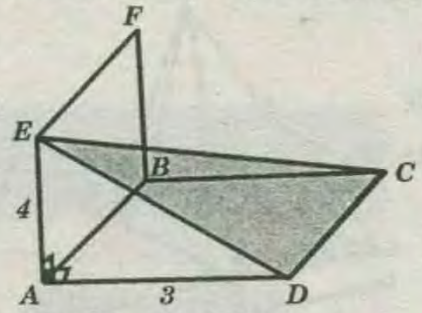
Hallar la menor distancia entre $\overline{EC}$ y $\overline{AB}$ en la figura mostrada.

A) 1cm
B) 2cm
C) 2,4cm
D) 3,5cm
E) 5cm



RESOLUCIÓN :

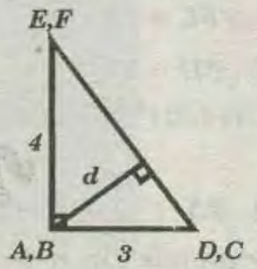
* Como el plano ECD es paralelo a la recta AB entonces la mínima distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{EC}$ es la que existe entre AB y el plano ECD.



* Por la relaciones métricas :

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$$

$\rightarrow d = 2,4$



RPTA : "C"

PROBLEMA 23 :

Si dos o más rectas forman el mismo ángulo con un plano:

A) Estas rectas tendrán longitudes iguales

B) Estas rectas serán paralelas.

C) Estas rectas serán paralelas únicamente cuando el ángulo que forman con el plano es 90°.

D) Estas rectas no necesariamente tienen que ser paralelas.

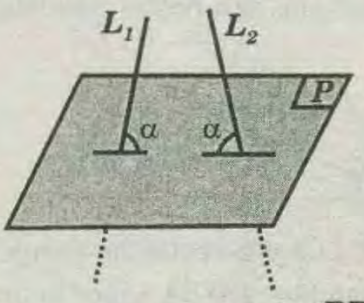
E) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

RESOLUCIÓN :

* De la figura :

* Sean "L_1" y "L_2" rectas son el mismo ángulo de inclinación con respecto a "P" .

* Observemos que L_1 y L_2 no necesariamente son paralelas.



RPTA : "D"

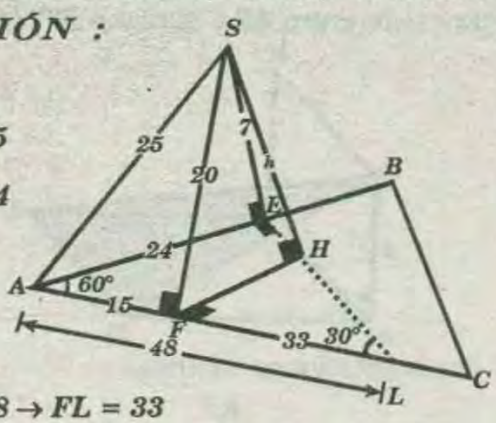
PROBLEMA 24 :

En el plano P se mide el triángulo ABC, cuyo ángulo A mide $60°$. Se tiene un punto S fuera del plano P. si las distancias , de S al punto A es igual a $25cm$, de S

al lado $\overline{AC}$ igual a $20cm$, y de S al lado $\overline{AB}$ igual a $7cm$. Hallar la distancia de S al plano P.

A) $\sqrt{37}cm$ B) $\sqrt{39}cm$ C) $\sqrt{38}cm$ D) $6cm$ E) $\sqrt{31}cm$

RESOLUCIÓN :



* $\Delta AFS : AF=15$
* $\Delta AES : AE=24$
* $\Delta_{AEL} : AL = 48 \rightarrow FL = 33$
* $\Delta HFL(30°, 60°) : FH = 11\sqrt{3}$
* $\Delta_{SHF} : h^2=20^2-(11\sqrt{3})^2 \rightarrow h=\sqrt{37}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 25 :

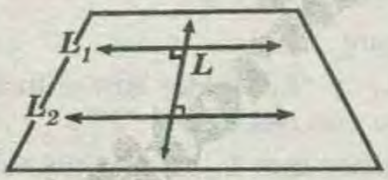
Si una recta es perpendicular a dos rectas:

A) Estas rectas son paralelas entre si:
B) Estas se cortan .
C) Todo plano paralelo a una de las dos rectas será perpendicular a la primera recta.
D) Todo plano perpendicular a una de las dos rectas será también perpendicular a la otra de las dos rectas.
E) Ninguna de las afirmaciones anteriores completa correctamente a la proposición inicial.

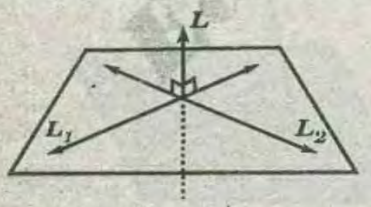
RESOLUCIÓN :

(A) Proposición FALSA :

Hay más de una posibilidad :



(1°) las dos rectas paralelas



(2°) La dos rectas no paralelas

(B) proposición FALSA : (por la anterior)

(C) Proposición FALSA :

Hay infinitos planos paralelos a L_1 (ó a L_2) y no necesariamente perpendiculares a L .

D) Proposición FALSA :

Sólo es en *(1°)*, todo plano perpendicular a L_1, lo será también a L_2 .

RPTA : "E"

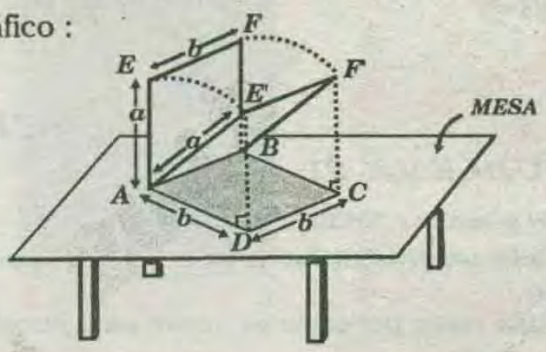
PROBLEMA 26 :

En una mesa se coloca perpendicularmente una lámina rectangular apoyada sobre su base. Si la altura y la base de la lámina mide ***"a"*** cm y ***"b"*** cm, respectivamente ¿Qué relación debe de existir entre estas longitudes de tal manera que si la lámina empieza a girar sobre su base , la proyección sobre la mesa en algún momento sea un cuadrado?

A) $a<b$ B) $a=b$ C) $a>b$ D) $a=\sqrt{2}b$ E) $b=\sqrt{2}a$

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico :



* Las distintas posiciones de $\overline{EF}$ son paralelas al plano de la mesa, por eso sus proyecciones tendrán longitud ***"b"***.

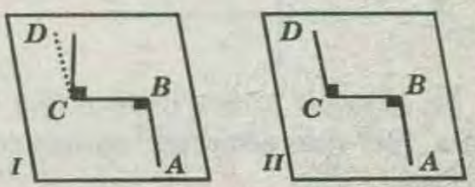
$\rightarrow$ el cuadrado ***ABCD*** tiene lado ***"b"***

* En $\Delta ADE'$: $a>b$

RPTA : "C"

PROBLEMA 27 :

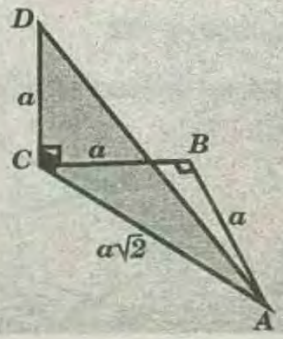
Todos los segmentos son iguales y perpendiculares. La única diferencia entre ***I*** y ***II*** es que ***CD*** es perpendicular al plano ***II*** . Hallar la relación entre las distancias ***AD*** en ***I*** y la distancia ***AD*** en ***II***.



A) 5/3 B) $\sqrt{5}/\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}/2$ D)1 E)1/2

RESOLUCIÓN :

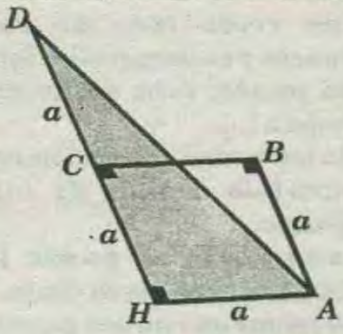
* ΔACD : $AD=a\sqrt{3}$



* ΔAHD :

$AD=a\sqrt{5}$

* Se pide:



$$\frac{a\sqrt{5}}{a\sqrt{3}}=\frac{5}{3}$$

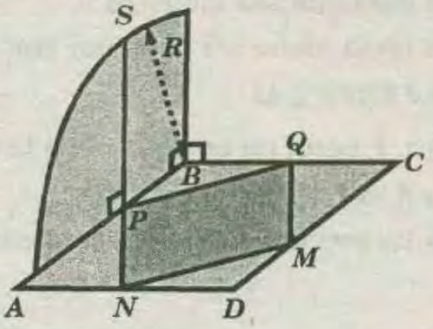
$$\rightarrow \frac{AD_I}{AD_{II}}=\frac{5}{3}$$

RPTA : "B"

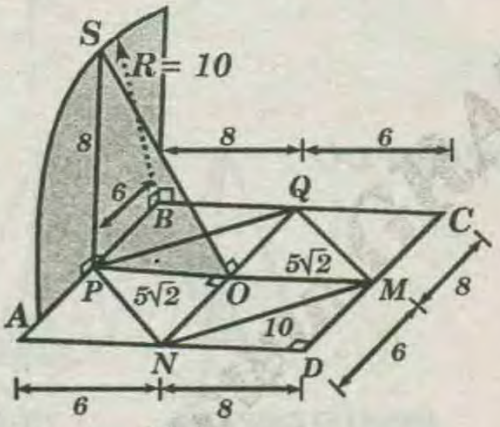
PROBLEMA 28 :

Según el gráfico de *ABCD* y *PQMN* son cuadrados . si *PB = 6, ND = 8* y *QM = R* ¿Cuánto dista *S* de $\overline{NQ}$?.

A) 10
B) 14
C) $\sqrt{13}$
D) 15
E) $\sqrt{114}$



RESOLUCIÓN:



* Piden : *OS*
* En *ABCD* :

$\triangle PBQ \cong \triangle QCM \cong \triangle MDN \cong \triangle NAP$

$\rightarrow OP=5\sqrt{2}$

* En $\triangle PSB$: $\rightarrow SP=8$

* $\triangle SPO$: $(OS)^2=8^2+(5\sqrt{2})^2 \rightarrow OS=\sqrt{114}$

RPTA : "E"

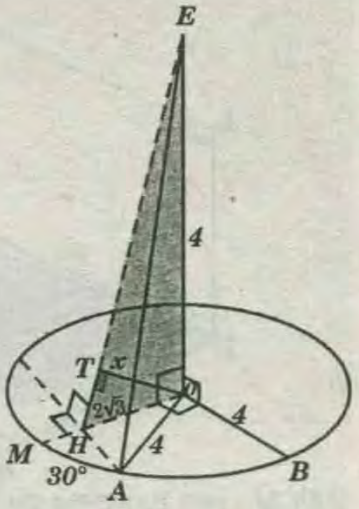
PROBLEMA 29 :

En una circunferencia de centro *O* y radio *4* se tiene el arco *AB* cuya medida es *60*, se traza $\overline{OE}$ perpendicular al plano de la circunferencia tal que que *OE = 4.* Calcule la distancia entre $\overline{AE}$ y $\overline{OB}$.

A) $\frac{4}{7}\sqrt{21}$ B) $\frac{2}{7}\sqrt{7}$ C) $\frac{3}{7}\sqrt{21}$ D) $\frac{3}{7}\sqrt{7}$ E) $\sqrt{7}$

RESOLUCIÓN :

La distancia entre $\overline{AE}$ y $\overline{DB}$ es la distancia de *O* al plano *EHA* que contiene a $\overline{AE}$, es decir $\overline{DT}$.



$\triangle EOH$:

$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4^2}+\frac{1}{(2\sqrt{3})^2}$$

* De donde : $x=\frac{4}{7}\sqrt{21}$

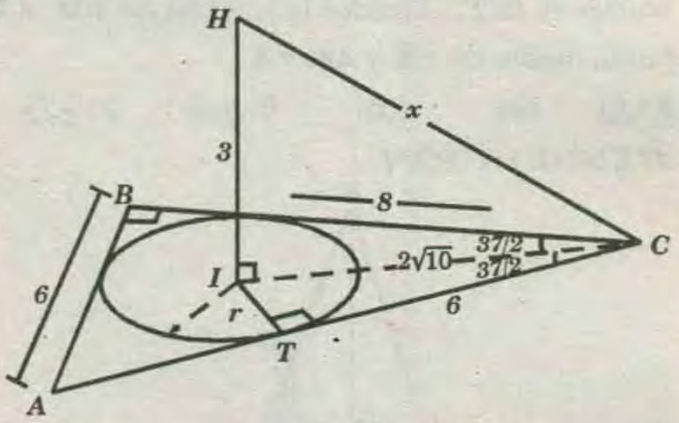
RPTA : "A"

PROBLEMA 30 :

En un triángulo *ABC* , la $m\sphericalangle B = 90$, *AB = 6u* y *BC=8u*. Por su incentro *I* se traza $\overline{IH}$ perpendicular al plano *ABC*. Si *IH=3u*. Calcule *HC*(en *u*).

A)6 B)7 C)8 D)10 E)12

RESOLUCIÓN :



* $\triangle ABC$; por Poncelet : $6 + 8 = 10 + 2r \rightarrow r = 2$

* $\triangle ITC$ notable aproximado: $\Rightarrow TC = 6$ y $IC=2\sqrt{10}$

$\triangle HIC$: $x^2 =3^2 +(2\sqrt{10})^2$

* De donde : $x = 7$

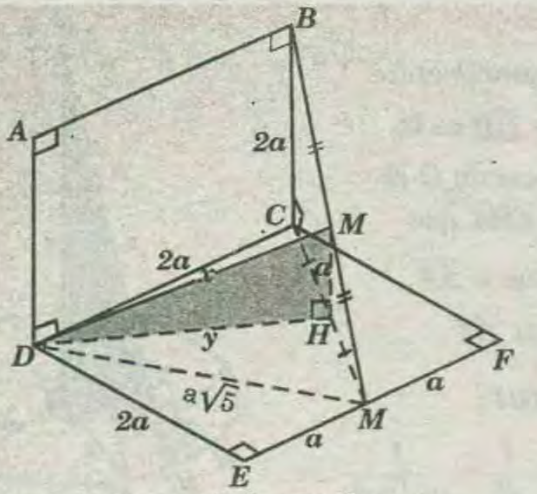
RPTA : "B"

PROBLEMA 31 :

ABCD y *CFED* son regiones cuadradas contenidos en planos perpendiculares, *M* puntos medios de $\overline{EF}$ y *N* punto medio de $\overline{BM}$. Si *AB = 2a* entonces $\overline{DN}$ miden :

A) $\frac{\sqrt{19}}{2}a$ B) $\frac{\sqrt{17}}{2}a$ C) $\frac{\sqrt{15}}{2}a$ D) $\frac{\sqrt{13}}{2}a$ E) $\frac{\sqrt{11}}{2}a$

RESOLUCIÓN :



ΔDCM ; por teorema de la mediana:

$$y^2 = \frac{13a^2}{4} \quad .....(I)$$

* $\triangle MHD : x^2 = a^2 + y^2$ .....(II)

* (I) en (II):

$$x^2 = a^2 + \frac{13a^2}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{17a^2}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{17}}{2}a$$

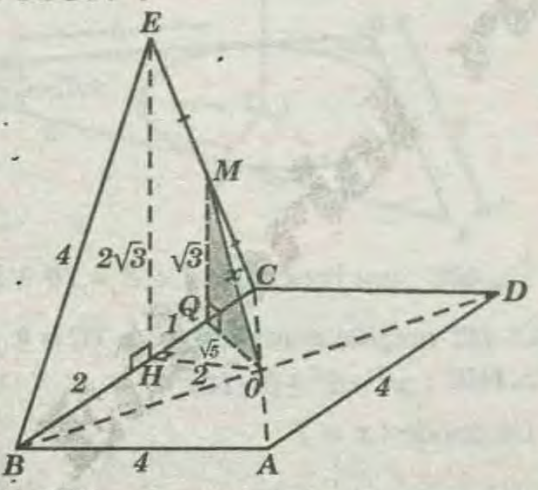
RPTA : "B"

PROBLEMA 32 :

Se tiene un cuadrado de centro O y un triángulo equilátero BCE, ubicados la longitud de $\overline{OM}$ si M es punto medio de $\overline{CE}$ y $AB = 4$.

A) $\sqrt{2}$ B)3 C)2 D) $3\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :



Se trata $\overline{MQ} \perp \overline{BC} \Rightarrow MQ = \sqrt{3}$ (TPM)

* $\triangle QHO$: $OQ = \sqrt{5}$

* $\triangle MQO$; por Pitágoras:

$$x^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 \Rightarrow x^2 = 3 + 5 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}\mu$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 33 :

¿Cuál de las afirmaciones es correcta?:

A) Si una recta toca un solo punto de un circunferencia y es perpendicular al radio que pasa por dicho punto, ésta recta será tangente a la circunferencia .

B) En todo tetraedro, la sección reproductiva por un plano paralelo a una de las aristas, es un paralelogramo.

C) Por una recta se puede trazar un plano perpendicular a otra recta dada.

D) Por dos rectas que no son paralelas y no se cortan, pueden pasar más de dos planos paralelos entre sí.

E) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

RESOLUCIÓN :

A) para que sea tangente :

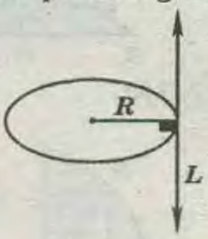
La recta debe ser coplanar con la circunferencia.

EJEMPLO :

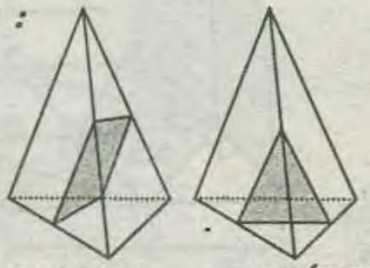
$R \perp L$ pero, no es tangente a la circunferencia.

$\rightarrow$ *A* es ***FALSA***

B) La sección puede ser paralelogramo o triángulo .



EJEMPLO :



PARALELOGRAMO ***TRIÁNGULO***

$\rightarrow$ *B* es ***FALSA***

C) Para que ocurra, las dos rectas deben ser perpendiculares . $\rightarrow$ *C* es ***FALSA***

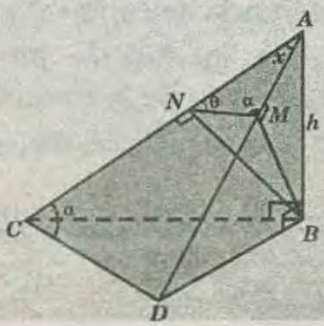
D) Sólo puede pasar *2* planos $\rightarrow$ *D* es ***FALSA***

RPTA : "E"

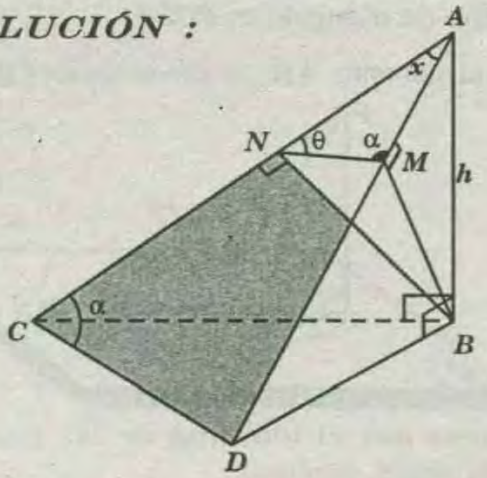
PROBLEMA 34 :

Según el gráfico , $BC=EN$, $BM=BD$ y $\alpha+\theta=100°$. Calcule x .

A) 80°
B) 100°
C) 60°
D) 140°
E) 160°



RESOLUCIÓN :



* $\triangle ABC$: $h^2 = AN \times AC$ .....(I)

$h^2 = AM \times AD$ .....(II)

* (I) = (II): $AN \times AC = AM \times AD$

Esto demuestra que el cuadrilátero *CNMD* es inscriptible, donde

$m\sphericalangle ACD = m\sphericalangle NMA = \alpha$

ΔNAM : $x + \underbrace{\alpha + \theta} = 180°$

$dato :\rightarrow 100°$

$x = 80°$

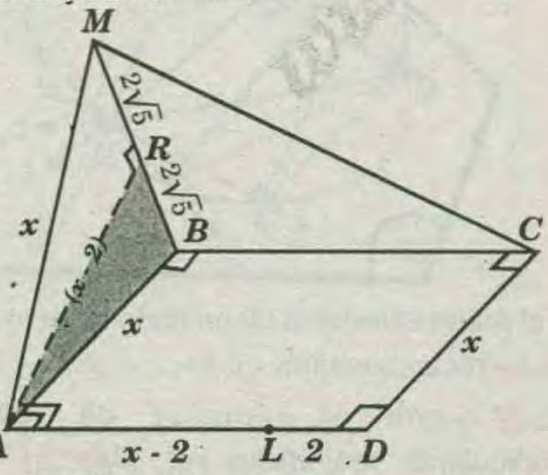
RPTA: "A"

PROBLEMA 35 :

El cuadrado *ABCD* y el triángulo *ABM* se encuentra en planos perpendiculares . Si en $\overline{AD}$ se ubica el punto *L* , tal que equidiste de las regiones *ABM* y *BMC*, calcule *CD*. Considere que $DL=2$; $BM=4\sqrt{5}$ y $AB=AM$.

A) 3 B) 6 C) 4 D) 5 E) 7

RESOLUCIÓN :



$AR = AL = x - 2$

$\triangle ARB$:

$x^2 = (x-2)^2 + (2\sqrt{5})^2 \Rightarrow x^2 = x^2 - 4x + 4 + 20$

$\Rightarrow 4x = 24 \rightarrow x = 6$

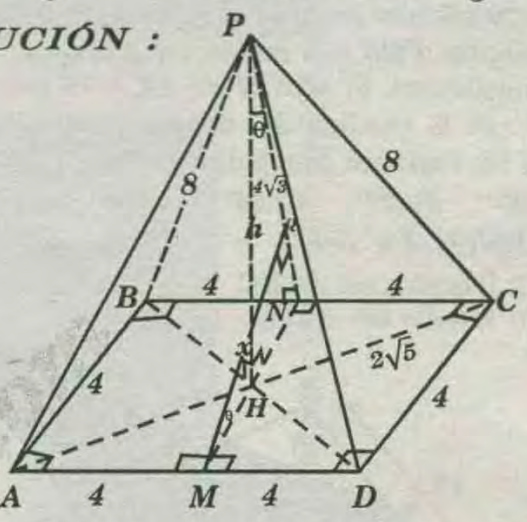
RPTA : "B"

PROBLEMA 36 :

Se tiene el rectángulo *ABCD*, donde $2(AB)=AD=8$. Si se ubica el punto *P* exterior al plano que contiene a dicho rectángulo. tal que *P* equidista de *A; B;* C y *D* y el triángulo *BPC* es equilátero , calcule la distancia entre $\overline{AD}$ y el plano que contiene al triángulo equilátero.

A) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B) $\frac{2}{3}\sqrt{33}$ C) $100\sqrt{3}$ D) $\frac{4\sqrt{33}}{3}$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle PHC$: $h^2 = 64 - 20 = 44 \Rightarrow h = 2\sqrt{11}$

* $\triangle MQN \sim \triangle PHN$:

$$\Rightarrow \frac{x}{2\sqrt{11}} = \frac{4}{4\sqrt{3}} \rightarrow x = \frac{2}{3}\sqrt{33}$$

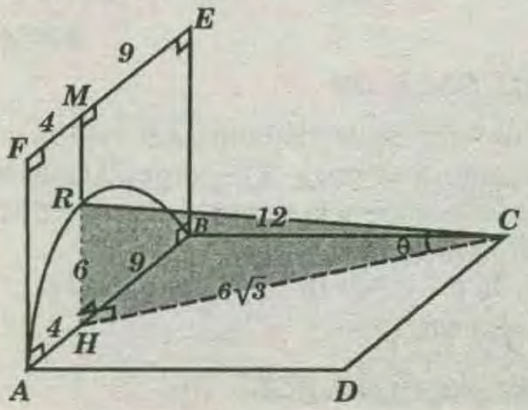
RPTA : "B"

PROBLEMA 37 :

Se tienen los rectángulos *ABCD* y *ABEF* ubicados en planos perpendiculares; con diámetro *AB* . Si se traza una semicircunferencia en *ABEF*y se ubica el punto *R* en dicha circunferencia, calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{RC}$ y el plano *ABCD*. Considere $RC=12$, $FM=4$ y $ME=9$ ($M \in \overline{FE}$ y $\overline{RM} \perp \overline{EF}$)

A) 45° B) 37° C) 53° D) 30° E) 60°

RESOLUCIÓN 42 :



En la semicircunferencia:

$$RH^2 = (4)(9) = 36 \rightarrow RH = 6$$

$\triangle RHC$; notable de 30° y 60°.

$$\rightarrow \theta = 30^\circ$$

RPTA : "D"

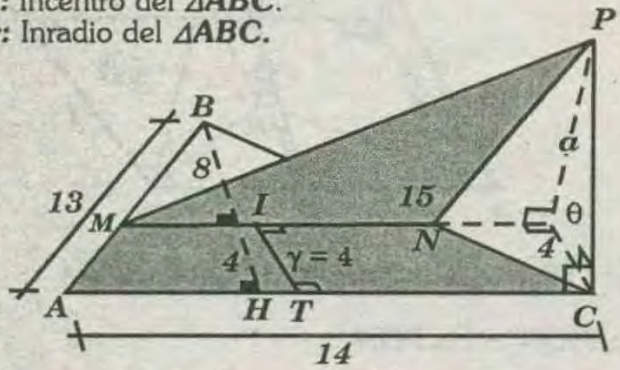
PROBLEMA 38 :

Por el incentro de un triángulo ABC se traza $\overline{MN}$ paralelo a $\overline{CA}(M \in \overline{AB}$ y $N \in \overline{BC})$, luego se traza $\overline{CP}$ perpendicular al plano del triángulo , tal que la región triangular PMN y la región cuadrangular $AMNC$ sean equivalentes. Si $AB=13\ u$; $BC= 15\ u$ y $AC= 14\ u$, calcule la medida del ángulo diedro determinado por las regiones triangulares ABC y PMN

A) 53° B) 37° C) 45° D) 60° E)ArcCos(2/5)

RESOLUCIÓN :

I: Incentro del ΔABC.
r: Inradio del ΔABC.



$$\underbrace{S_{ABC}} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} \rightarrow S_{ABC} = 84$$

$$(21)r = 84 \rightarrow r = 4\ ;\ BH = 12$$

* Por condición : $S_{PMN} = S_{AMNC}$

* Pero: $\Delta ABC \sim \Delta MBN$

$$\Rightarrow \frac{MN}{14} = \frac{8}{12} \rightarrow MN = \frac{28}{3}$$

* En la condición :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{28}{3}\right)(a) = \frac{(14+28/3)}{4}4 \rightarrow a = 10$$

* $\triangle PCL$: $Cos\theta = \frac{4}{10} \rightarrow \theta = arcCos\left(\frac{2}{5}\right)$

RPTA : "E"

PROBLEMA 39 :

Una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ está en un plano Q por el punto A se traza $\overline{AP}$ perpendicular al plano Q y en la circunferencia se ubica el punto C; calcular PC, si $PB=13cm$ y $BC = 5cm$.

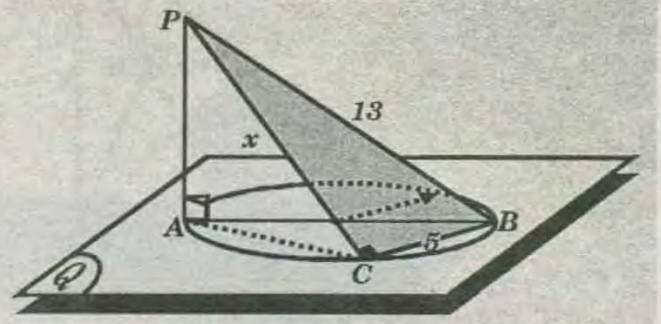
A)13 B) 8 C) 10 D) 12 E)14

RESOLUCIÓN :

* $PC = x$, está en el ΔPCB

* ¿Qué tipo de triángulo es PCB?

* Dando el diámetro $\overline{AB}$, tenemos $m\measuredangle ACB = 90^\circ$



* Entonces por el teorema de las tres rectas perpendiculares, tenemos :

$$\rightarrow \overline{PA} \perp \square Q$$

$$\overline{AC} \perp \overline{CB} \rightarrow \overline{PC} \perp \overline{CB}$$

* Luego en el $\triangle PCB$: $x^2 = 13^2 - 5^2 \Rightarrow x = 12$

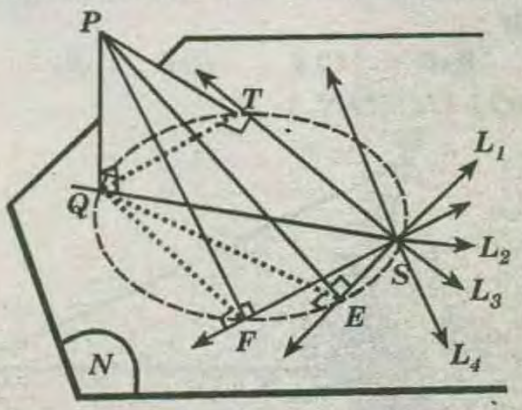
RPTA : "D"

PROBLEMA 40 :

Hallar el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares bajadas desde un punto dado del espacio, a las rectas que se encuentran en un plano dado y que se cruzan en un punto.

A) Es un triángulo equilátero.
B) Es un círculo.
C) Es una circunferencia.
D) Es un cuadrado .
E) Es una elipse.

RESOLUCIÓN:



* P es el punto exterior al plano dado N, en el cual se halla la rectas secantes en S.

* $\overline{PQ} \perp N \rightarrow$ con el teorema de las tres perpendiculares se grafican $\overline{PE}$, $\overline{PT}$.....

* Como $Q\hat{F}S = Q\hat{E}S = 90^\circ$

$$Q\hat{T}S + QFS = 180^\circ, \text{ etc.}$$

$\rightarrow Q, T, S, E, F,$ .... pertenecen a una circunferencia

RPTA : "C"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Por el vértice B de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza $\overline{BP}$ perpendicular al plano de dicho triángulo. Calcular la distancia de P al punto medio de $\overline{AC}$, si $PB=8$ y $AC=12$.

A) 15 B) 14 C) 9 D) 10 E) $5\sqrt{2}$

02 Se tiene un cuadrado $ABCD$ y un triángulo equilátero ABQ ubicados en planos perpendiculares. Si $AB=2$, calcular la distancia de Q al punto medio de $\overline{CD}$.

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{7}$ D) $2\sqrt{2}$ E) 3

03 Se tiene un triángulo rectángulo isósceles ABC recto en B; se traza $\overline{BQ}$ perpendicular al plano que lo contiene. Calcular el área de la región triangular AQC, si: $AC=6$ y $BQ=4$.

A) 12 B) 15 C) 20 D) 24 E) 18

04 Se tiene un cuadrado $ABCD$ y se traza $\overline{AQ}$ perpendicular al plano que lo contiene. Si $AQ=AD=2$, calcular la distancia de A hacia $\overline{QC}$.

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{3}$

05 Se tiene un cuadrado $ABCD$ y un triángulo equilátero ABQ ubicados en planos perpendiculares. Si $AD = 6$, calcular la distancia entre los centros de dichos polígonos

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

06 Se tiene un rectángulo $ABCD$ y un triángulo equilátero ABQ ubicados en planos perpendiculares. Si el ángulo entre $\overline{QC}$ y el plano del rectángulo mide $30°$ y $QC = 2\sqrt{3}$, calcular el área de la región rectangular $ABCD$

A) $4\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$ D) $3\sqrt{5}$ E) $4\sqrt{3}$

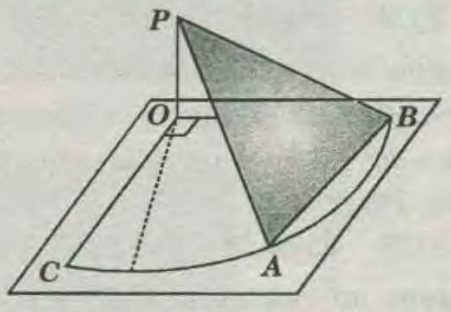
07 Se tiene un cuadrado $ABCD$ cuyo lado mide 6; a un mismo lado del plano que lo contiene se trazan $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ perpendiculares a su plano. Si $AE = 2$ y $CF = 4$, calcular la distancia del punto medio de $\overline{EF}$ hacia D.

A) 5 B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{7}$ E) $\sqrt{6}$

08 Por el baricentro G de un triángulo rectángulo, recto en B, se traza $\overline{GH}$ perpendicular al plano que contiene al triángulo. Si $3(BH) = 2(AC)$, calcular el ángulo entre $\overline{BH}$ y el plano del triángulo.

A) 60° B) 53° C) 75° D) 45° E) 36°

09 Si $m\widehat{AC}=16°$; $AB=6$; $OP=4$ y $\overline{OP}$ es perpendicular al plano que contiene al cuadrante, calcular el área de la región sombreada.



A) $12\sqrt{2}$ B) 16 C) 24 D) $3\sqrt{6}$ E) $5\sqrt{2}$

10 En un plano H están contenidos los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$; A es un punto exterior a dicho plano. Si $\overline{AD}$ es perpendicular al plano dado; $AD=24$ y $BC=10$, calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$.

A) 13 B) 15 C) 11 D) 10 E) 12

11 Se tiene un triángulo ABC contenido en el plano P; se trazan $\overline{AD}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CE}$ perpendiculares al plano P situados a un mismo lado del plano. Si $AD=1$; $BF=7$ y la mediana $\overline{EM}$ del triángulo DEF es paralela al plano P, calcular CE.

A) $\sqrt{7}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 3 D) $\sqrt{6}$ E) 4

12 Se tiene un cuadrado $ABCD$ y se traza $\overline{MP}$ perpendicular al plano de dicho cuadrado, siendo M punto medio de $\overline{AB}$. Si $AB=2$ y $MP=\sqrt{3}$, calcular PC.

A) $2\sqrt{2}$ B) 3 C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{7}$

13 Se tiene un triángulo equilátero ABC y una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ ubicados en planos perpendiculares; en $\widehat{AB}$ se ubica el punto P, tal que: $m\widehat{AP}= 60°$ y $AB=4$. Calcular la distancia entre los puntos P y C.

A) 6 B) $2\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{5}$ E) 4

14 Se tiene un hexágono regular $ABCDEF$ de centro O; se traza $\overline{OP}$ perpendicular a su plano, tal que $PD=2(AB)$. Calcular la medida del ángulo entre $\overline{PO}$

y dicho plano.
A)30° B)60° C)90° D)37° E)53°

15 Por el vértice *C* de un cuadrado *ABCD* se traza la perpendicular $\overline{CP}$ a su plano. Calcular la medida del ángulo que forma $\overline{OP}$ con el plano que contiene al cuadrado, siendo *O* centro del cuadrado, además $AB=2$ y $PA=\sqrt{10}$.
A) 30° B) 37° C) 60° D)53° E)45°

16 Se tiene un cuadrado *ABCD* y un Rectángulo *ABEF* ubicados en planos perpendiculares. Si $m\sphericalangle ECB=60°$ y $AD=4$, calcular el área de la región rectangular *FECD*
A)32 B)36 C)24√3 D)12√6 E)25√2

17 Se tiene un cuadrado *ABCD* y se traza $\overline{PB}$ perpendicular al plano que contiene al cuadrado. Calcular el área de la región *PMC*, si $AB=2\sqrt{5}$ y $PB=3$ (*M* es punto medio de $\overline{AB}$).
A)15 B)17 C)10 D)12,5 E)8,5

18 Se tiene un triángulo rectángulo *AOB*, recto en *O*, se traza $\overline{OM}$ perpendicular al plano que lo contiene. Si $OA=OB=OM=2$, calcular el área de la región triangular *ABM*.
A)3√6 B)2√2 C)2√3 D)√6 E)3√7

19 Por el vértice *B* de un rectángulo *ABCD* se levanta una perpendicular $\overline{BP}$ al plano del rectángulo; $AC=10$; $m\sphericalangle AOD=127°$ (*O* es punto de intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$), $PB=4$. Calcular $S_{(OPC)}$.
A)10 B)10√2 C)10√3 D)20 E)10√5

20 Dado un triángulo rectángulo *ABC*: $m\sphericalangle A=90°$; $AB=6$ y $AC=8$; $\overline{IH}$ es perpendicular al plano *ABC* (*I* es incentro del $\triangle ABC$), $IH=3$. Calcular *HC*.
A)3 B)4 C)9 D)7 E)8

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dados *20* puntos no colineales y no coplanares, calcule el número máximo de planos que se determinen con estos puntos.
A) 1140 B) 1150 C)1160 D) 1170 E) 1180

02 Se tiene *10* rectas secantes y *8* puntos no colineales y no coplanares. Calcule el número máximo de planos que se pueden determinar.
A) 180 B) 181 C) 182 D) 183 E) 184

03 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

( ) En todo plano hay infinitos puntos y rectas.

( ) Dos rectas perpendiculares a un plano son paralelas entre sí.

( ) Dos rectas cruzadas pueden estar en un mismo plano.
A)VVF B) VFV C) FFF D)VVV E)VFF

04 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F):*

( ) Dos rectas paralelas al mismo plano son paralelos entre sí.

( ) Por un punto de un plano sólo se puede trazar una perpendicular al plano.

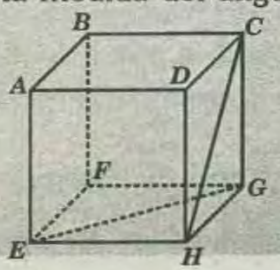
( )Todas las rectas paralelas entre sí son coplanares.
A) FVF B) VVV C) FFV D) FFF E) VFF

05 Un punto *P* dista *12cm* de un plano. Un segmento de recta *AB* está en el plano. Calcular la distancia desde $\overline{AB}$ al pie de la perpendicular bajada desde *P* al plano, si: $AP=BP=13$ y $AB=8$.
A)2 B)2√2 C) 3√2 D)√6 E)3

06 Si una recta es perpendicular a tres dadas:
A)Las rectas dadas tienen que ser paralelas.
B)Las tres rectas dadas tienen que estar en un mismo plano que contenga a la perpendicular.
C)Por las tres rectas pueden pasar tres planos paralelos entre sí.
D)Por las tres rectas dadas no pueden pasar planos paralelos entre sí.
E)Las tres rectas dadas deben estar contenidas en un mismo plano.

07 Determinar el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde un punto del espacio a las rectas que se encuentran en un plano dado y que concurren en un punto.
A) Triángulo equilátero B) Un círculo
C) Una circunferencia D) Un cuadrado
E)Una elipse

08 La figura que a continuación se presenta es un cubo. ¿Cuál es la medida del ángulo que forman $\overline{EG}$ y $\overline{CH}$?



A)90° B)45° C)30° D)60° E)53°

09 En una mesa se coloca perpendicularmente una lámina rectangular apoyada sobre su base. Si la altura y la base de la lámina miden a y b cm, respectivamente, ¿qué relación debe existir entre estas longitudes de tal manera que si la lámina empieza a girar sobre su base, la proyección sobre la mesa en algún momento sea un cuadrado?

A)$a<b$ B)$a=b$ C)$a>b$ D)$a=\sqrt{2}b$ E)$b=\sqrt{2}a$

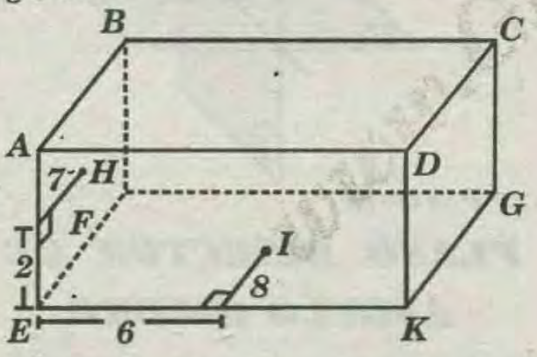
10 La proyección de un segmento de 17cm de longitud sobre un plano, mide 15cm. Determinar las distancias de sus extremos al plano, sabiendo que la suma de tales distancias es 28cm.

A) 11 y 17 B) 15 y 13 C) 23 y 5
D) 12 y 16 E) 10 y 18

11 Desde un punto exterior a un plano se trazan cuatro segmentos oblicuos congruentes de 15cm de longitud, de manera que sus pies son los vértices de un cuadrado de $36\sqrt{2}$ cm de perímetro. Calcular la distancia del punto al plano.

A) 10 B) 11 C) 14 D) 12 E) 16

12 La figura representa una caja. En el punto H sobre la cara $ABFE$ se encuentra una hormiga, y en el punto I sobre la cara $EFGK$ se encuentra su comida. Calcular la mínima distancia recorrida por la hormiga para llegar a I.



A)$6+\sqrt{5}$ B)$2+\sqrt{37}$ C)8 D)$\sqrt{65}$ E)9

13 En el plano P se tiene un ángulo ABC de 60° ; S es un punto exterior al plano, tal que sus distancias al vértice B y los lados $\overline{BC}$ y $\overline{BA}$ son 25; 20 y 7, respectivamente. Calcular la distancia de S al plano P.

A)$\sqrt{37}$ B)$\sqrt{39}$ C)$\sqrt{38}$ D)$\sqrt{31}$ E)6

14 Indicar con (V) si es verdadero o con (F) si es falso:

( ) Toda recta paralela a un plano, es paralela a todas las rectas de dicho plano.

( ) Si $\vec{a}\,//\,\square P \wedge \vec{b} \subset P \Rightarrow \vec{a}\,//\,\vec{b}$

( ) Si $\vec{a} \subset \square P; \vec{b} \subset Q \wedge \square P\,//\,\square Q \Rightarrow \vec{a}\,\#\,\vec{b}$

( ) Si una recta es perpendicular a dos rectas contenidas en un plano, entonces la primera recta es perpendicular a dicho plano.

A)VVVV B)VVFF C)FFFF D)VFVF E)VFFV

15 Dados los segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ alabeados; $AD=21$ y $BC=30$. Calcular el máximo valor entero del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

A)25 B) 27 C) 28 D)26 E)30

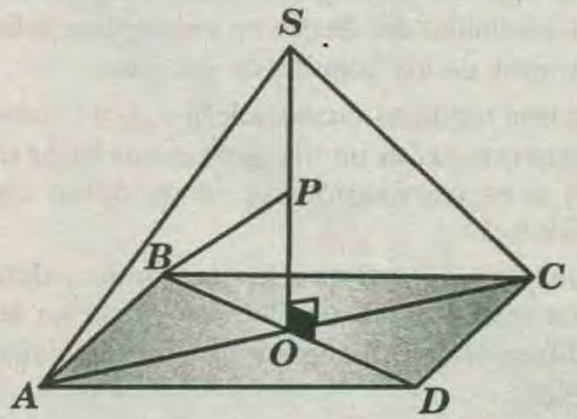
16 Dados dos planos no paralelos, se toma un segmento $\overline{AD}$ perteneciente a uno de los planos. Si $\overline{BC}$ es la proyección de $\overline{AD}$ sobre el otro plano, el área de la región $ABCD$ es $60m^2$ y $\frac{BC}{6}=\frac{DC}{3}=\frac{AB}{2}$, calcular AB.

A) 1 m B) 2 m C) 3m D)4m E) 5m

17 $ABCD$ es un rectángulo y $\overline{AE}$ es un segmento perpendicular al plano de dicho rectángulo. Calcular la menor distancia entre $\overline{EC}$ y $\overline{AB}$, si: $AE = 15$ y $AD=20$.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

18 En la figura: $SP=PO$; $AB=1$; $BC=\sqrt{7}$ y $\overline{SO}$ es perpendicular al rectángulo $ABCD$. Calcular la medida del ángulo que forman $\overline{BP}$ y el triángulo ASC. si $\overline{SC}$ forma 60° con el plano del rectángulo.



A)30° B)37° C)45° D)53° E)60°

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)D	2)C	3)B	4)C	5)C	6)A	7)C	8)A	9)A	10)A
11)E	12)A	13)E	14)B	15)E	16)A	17)D	18)C	19)B	20)D

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)D	2)B	3)A	4)A	5)E	6)C	7)C	8)D	9)C	10)E
11)D	12)D	13)A	14)C	15)A	16)D	17)C	18)A		

DIEDROS Y TRIEDROS

CAPITULO 34

OBJETIVO :

Reconocer a un ángulo ***DIEDRO*** , ángulo ***TIEDRO*** y en general ángulos poliedros .

INTRODUCCIÓN :

Si observas la habitación en la que te encuentras puedes ver cómo dos paredes contiguas junto con el techo se encuentran en un punto .

El espacio en torno a ese punto que está comprendido entre las paredes y el techo se denomina ***triedro*** o ***ángulo triedro***.

En general se llama ***ángulo poliedro*** a la región del espacio limitada por tres o más planos que se cortan dos a dos según rectas concurrentes en un punto ***(vértice)***. al igual que ocurre con los ángulo diedros los ángulos poliedros tienen caras y aristas.

Según el números de ángulo diedros el ángulo poliedro se llamará triedro, tetraedro, pentaedro, hexaedro, heptaedro, etc.

Cada uno de ellos puede ser también cóncavo o convexo según que la sección producida por un plano que lo corta sea un polígono cóncavo o convexo, respectivamente.

Al igual que en un ángulo diedro hablábamos de ángulo rectilíneo del diedro en los ángulos poliedros hablaremos de los ángulos de las caras.

Dadas tres medidas cualesquiera a, b y c sabemos que para que exista un triángulo cuyos lados midan ***a, b*** y ***c*** es necesario que se cumplan ciertas condiciones.

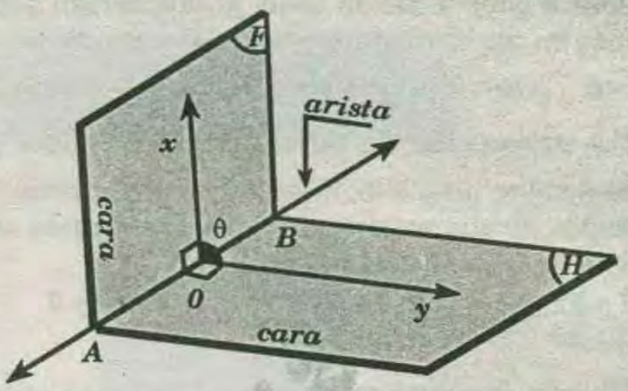
Al igual que ocurre con los triángulos, dados ***n*** ángulos cualesquiera no siempre existe un ángulo poliedro en el que los ángulos de sus caras coincidan con ellos.

ÁNGULO DIEDRO

Es la figura geométrica formada por la unión de dos semiplanos que tienen en común una recta de origen a la cual se le denomina arista del ángulo diedro.

NOTACIÓN :

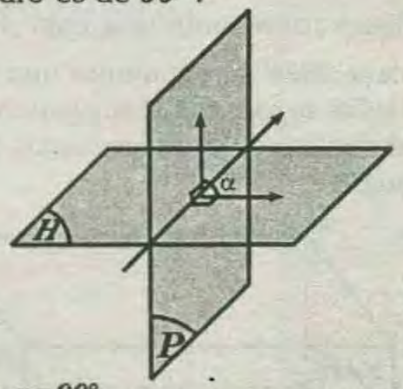
* Ángulo diedro , $\overline{AB}$ ángulo diedro $H-\overline{AB}-F$



* $\sphericalangle xoy$: ángulo plano o rectilíneo del ángulo diedro
* θ : medida del ángulo diedro .

PLANOS PERPENDICULARES

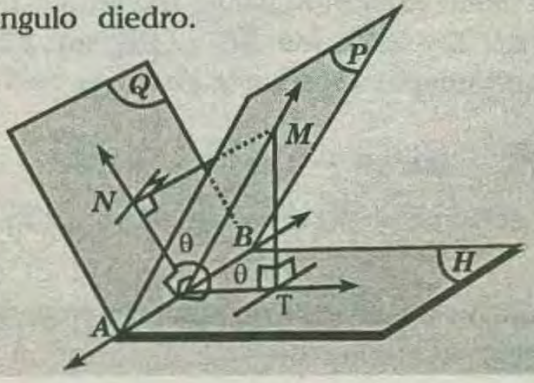
Dos planos son perpendiculares cuando la medida del ángulo diedro es de ***90°*** .



$\square H \perp \square P \rightarrow \alpha = 90°$

UN PLANO BISECTOR DE UN ÁNGULO DIEDRO

Es aquel plano que contiene a la arista del ángulo diedro y que determina con las caras otros ángulos diedros de igual medida .Todo punto del plano bisector esta a igual distancia de las caras de dicho ángulo diedro.



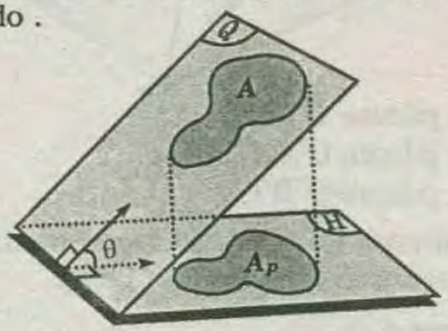
* $\measuredangle P$: plano bisector del ángulo diedro

$$Q-\overline{AB}-H$$

* Se cumple : $MN=MT$

ÁREA DE LA PROYECCION ORTOGONAL DE UNA REGION PLANA SOBRE UN PLANO DADO

EL área de la proyección ortogonal de una región plana sobre un plano dado , es igual al producto del área de dicha región con el coseno del ángulo diedro determinado por el plano de la región y el plano dado .



* Si :

A : área de la región plana

A_p : área de la proyección ortogonal de la región sobre el plano H .

θ : medida del ángulo diedro determinado por los planos Q Y H .

$$\boxed{A_p = A\cos\theta}$$

ÁNGULO POLIEDRO

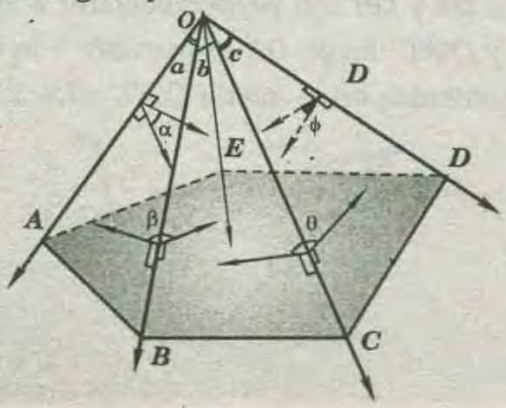
Es aquella figura geométrica determinada por tres o más regiones angulares que tienen el mismo vértice.

además dos regiones consecutivas deben estar en planos diferentes .

El punto común a todos los planos que limitan al ángulo poliedro recibe el nombre de ***vértice***.

Las intersecciones de cada dos planos concurrentes consecutivos se denomina ***aristas.***

Los ángulos formados por cada dos aristas consecutivas se denomina ***caras*** y los diedros formadas por cada dos caras consecutivas se llaman ***diedros*** del ángulo poliedro .



ELEMENTOS :

* Vértice : O

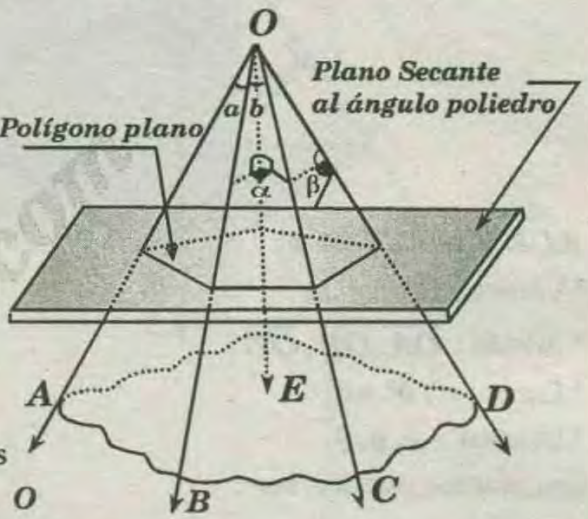
* Aristas : $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$.....

* Caras : $A\hat{O}B, B\hat{O}C, C\hat{O}D, D\hat{O}E$.....
$: a°, b°, c°, d°$,.....

* Diedros : $\alpha, \beta, \phi, \theta$,.....

* ***Notación:*** ángulo poliedro ***O–ABCD***.....

* Se designa un ángulo poliedro por la letra del vértice seguida de las letras relativas a las diferentes aristas o simplemente por la letra del vértice cuando no puede haber ambigüedad alguna



Elementos

* Vértice : O

* Arista : $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$,...

* Caras : AOB , BOC,.... (medidas ....a , b..)

* Diedros : $\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD}$ ..... (medidas a , b .....)

CLASIFICACIÓN :

Según sea el número de caras si tiene ***3*** caras , el ángulo poliedro se llama ángulo triedro , si tiene ***4*** caras se llama ángulo tetraedro , si tiene ***5*** caras se llama ángulo pentaedro , si tiene ***6*** caras se llama ángulo hexaedro. etc .

* ***ÁNGULO TRIEDRO :*** Si tiene ***3*** caras

* ***ÁNGULO TETAEDRO :*** Si tiene ***4*** caras

* ***ÁNGULO PENTAEDRO:*** Si tiene ***5*** caras

Cuando el número de caras es tres se puede suprimir la palabra ángulo y llamar simplemente ***triedro*** pero si es mas de tres no se puede suprimir la palabra ángulo , porque existen cuerpos geométricos llamados tetraedros , pentaedros , hexaedros , las cuales podrían confundirse .

* De todos los ángulos poliedros el más importante es el ***TRIEDRO*** .

PROPIEDAD :

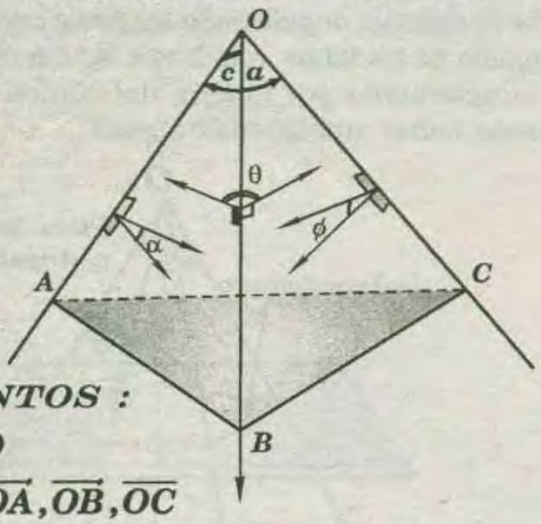
En todo ángulo poliedro convexo la suma de las medidas de sus caras es mayor de $0°$ y menor de $360°$

TEOREMA :

En todo ángulo poliedro la suma de las medidas de todas las caras es mayor que $0°$ y menor que $360°$.

ÁNGULO TRIEDRO (TRIEDRO)

El triedro es un ángulo poliedro de tres caras



ELEMENTOS :

* Vértice : O
* Aristas : $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$
* Caras : $a°$, $b°$ y $c°$
* Diedros : α, ϕ, θ

Los triedros pueden ser :

I) Triedro escaleno : $a° \neq b° \neq c°$, $\alpha° \neq \theta° \neq \phi°$

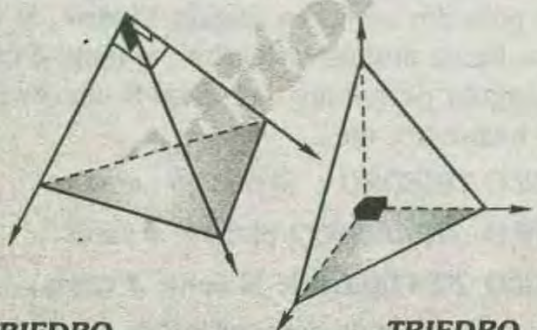
II) Triedro isósceles : $a° = b° \neq c°$, $\alpha° = \theta° \neq \phi°$

III) Triedro equilátero : $a° = b° = c°$, $\alpha° = \phi° = \theta°$

IV) Triedro uni rectángulo : $a=90°$

V) Triedro bi rectángulo : $a=b=90°$

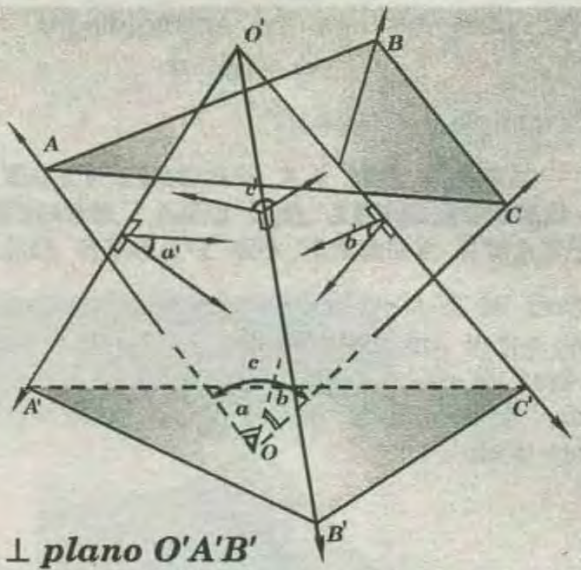
VI) Triedro trirectángulo : $a=b=c=90°$



TRIEDRO TRIRECTÁNGULO TRIEDRO TRIRECTÁNGULO

TRIEDRO POLAR O TRIEDRO SUPLEMENTARIO

Se llama triedro polar o suplementario de un triedro dado aquel cuyas aristas son perpendiculares a las caras del otros .

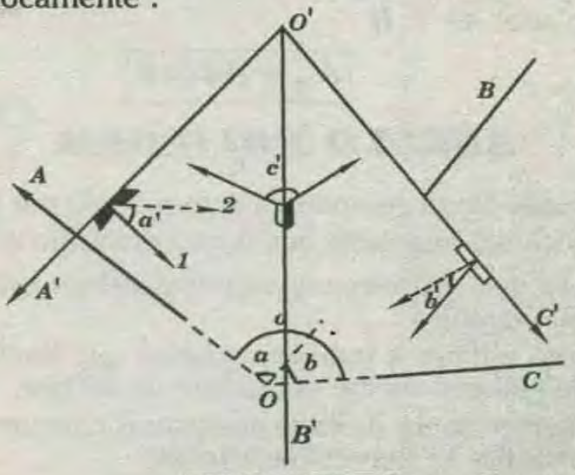


si $OA \perp$ *plano* $O'A'B'$
$OB \perp$ *plano* $O'A'C'$
$OC \perp$ *plano* $O'B'C'$

luego el triedro $O - ABC$ se llama triedro polar o suplementarios del triedro $O'- A'B'C'$.

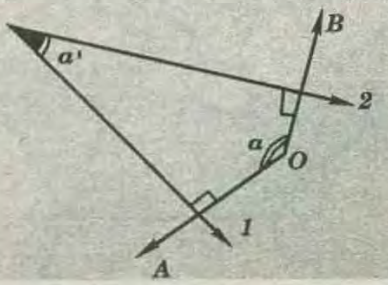
TEOREMA :

Cuando dos triedros son suplementarios o polares se cumple que las caras de uno de ellos son los suplementos de los diedros del otro triedro , y recíprocamente .



$$a + a' = 180°$$
$$b + b' = 180°$$
$$c + c' = 180°$$

* Como OA y OB son perpendiculares a los planos $O'A'B'$ y $O'A'C'$ luego OA forman $90°$ con cualquier recta contenida en el plano $O'A'C'$: $OB \perp 2$

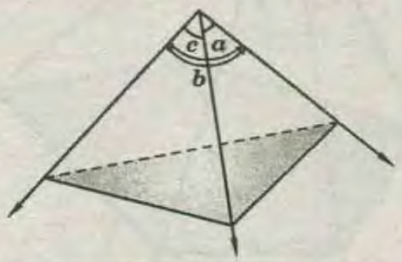


donde : $a+a'=180°$ en forma análoga se demostraría los demás .

PROPIEDADES DE LOS TRIEDROS

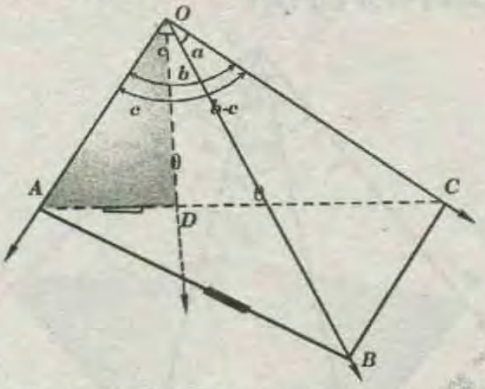
PROPIEDAD 1 :

En todo triedro una cara es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia .



$$a° - c° < b° < a° + c°$$

DEMOSTRACIÓN :



* ΔAOC: se traza OD tal que $AOD=c°$ y $OD=OB$

* $\triangle AOD \cong \triangle OAB$ ..... L.A.L $AD = AB$

* ΔABC : $AC<AB+BC$

* Los ΔBQC y ΔDOC tienen dos lados iguales ; OC es común y $OD=OB$ y el tercer lado desigual donde $DC<BC$

* Luego a menor lado le corresponde menor ángulo

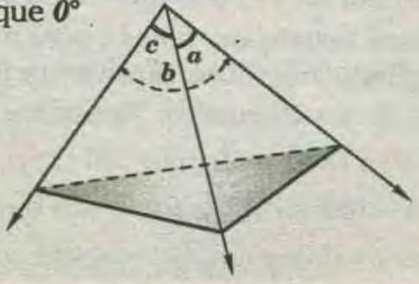
$$b°-c°<a° \qquad b°<a°+c° \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

del mismo modo se demostrará que $a<b+c$ de donde $a°-c°<b°....(\beta)$

* luego de (α) y (β) : $a°-c°<b°<a°+c°$

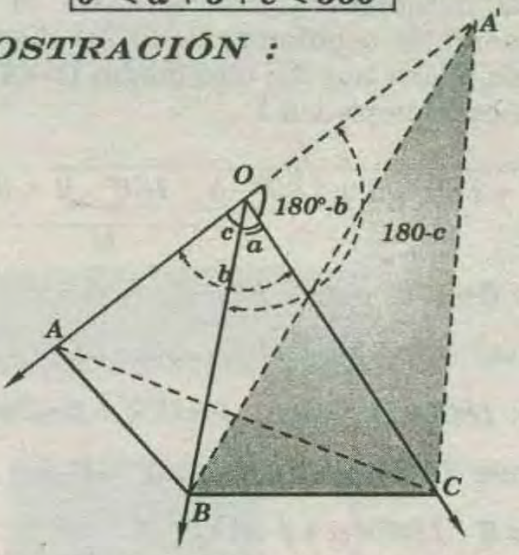
PROPIEDAD 2 :

En todo triedro la suma de las caras es menor que $360°$ y mayor que $0°$



$$0° < a+b+c < 360°$$

DEMOSTRACIÓN :



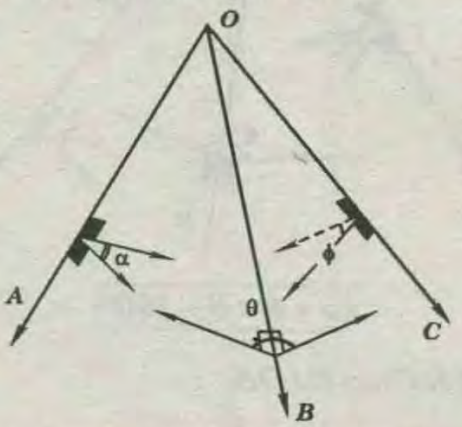
* Sea el triedro $O-ABC$ prolongamos la arista AO hasta A'.

* Triedro $O-BCA'$ le aplicamos la propiedad *1*

$a < 180°- b+180°- c$ de donde $a + b + c < 360°$ y también $a+b+c > 0° \Rightarrow 0°<a+b+c<360°$

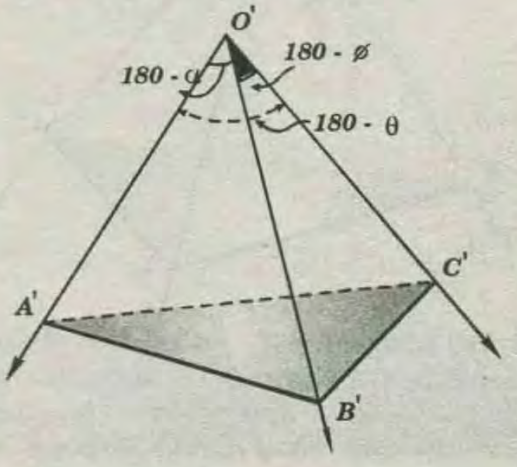
PROPIEDAD 3 :

En todo triedro la suma de los ángulos diedros es mayor que $180°$ y menor que $540°$



$$180° < \alpha + \phi + \theta < 540°$$

DEMOSTRACIÓN :



Para la demostración se utilizara al triedro suplementario o polar es decir los diedros los llevamos a las caras del otro triedro $O'-A'B'C'$ y le aplicamos la propiedad **2** .

$$\underbrace{0° < \underbrace{180°-\alpha + 180°-\phi + 180°-\theta}_{II} < 360°}_{I}$$

* De *I* : $0<180°-\alpha+180°-\phi+180°-\theta$

donde $\alpha+\phi+\theta<540°$.....*(I)*

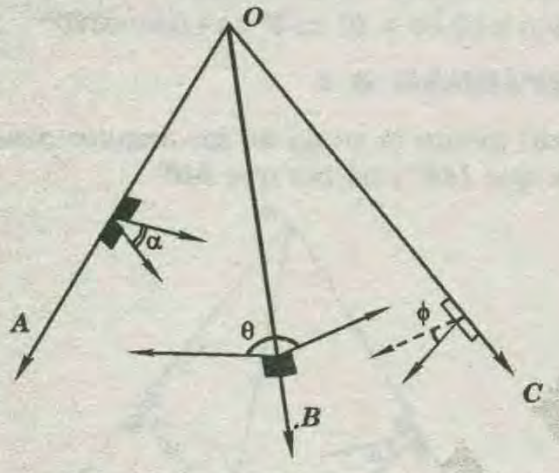
* De *II*: $180°-\alpha+180°-\phi+180°-\theta<360°$

donde $180°<\alpha+\phi+\theta$ .....*(II)*

* De *I* y *II* : $180°<\alpha+\phi+\theta<540°$

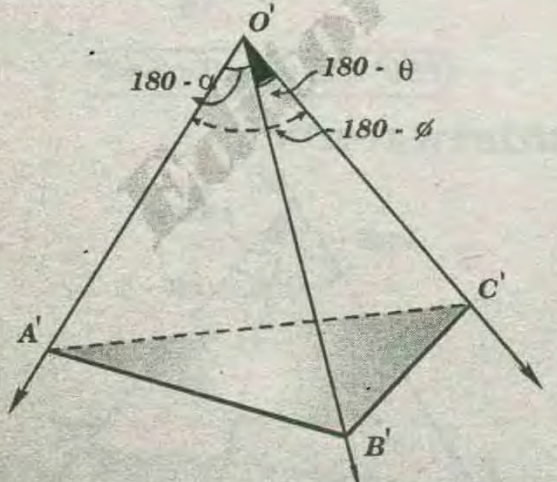
PROPIEDAD 4 :

En todo triedro la suma de dos diedros es menor al tercero aumentado en *180°*



$$\alpha+\phi<\theta+180°$$

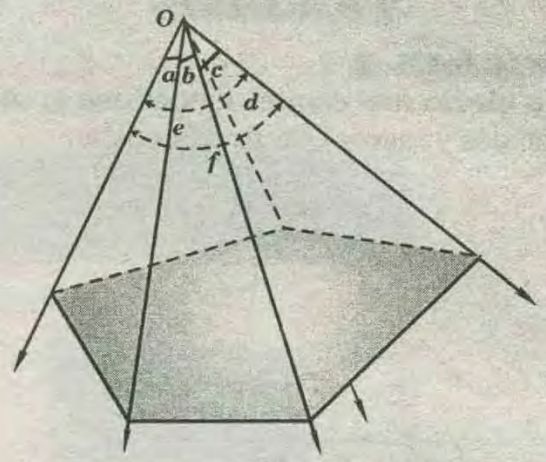
DEMOSTRACIÓN :



Se utiliza el triedro polar : los diedros del uno es el suplemento de las caras del otro en el triedro $O'-A'B'C'$ le aplicamos la propiedad $180°-\theta < 180°-\alpha+180-\phi$ donde $\alpha+\phi<\theta+180°$

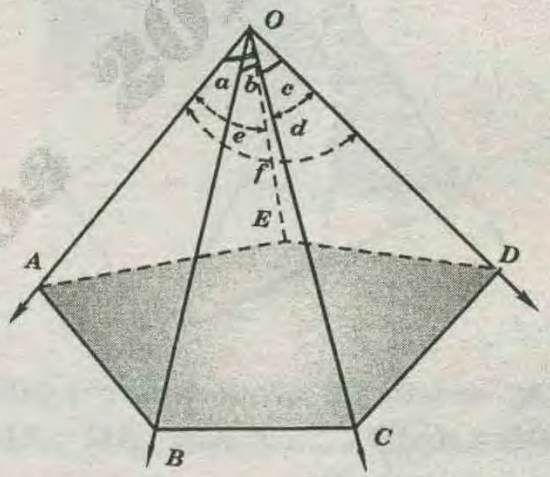
TEOREMA :

En todo ángulo poliedro la suma de las caras es menor que *360°* y mayor que *0°*



$$0°<a+b+c+d+e+f<360°$$

DEMOSTRACIÓN :



Triedro *A* : $EAB < EAO + BAO$

Triedro *B* : $ABC < OBA + OBC$

Triedro *C* : $BCD < BCO + DCO$

Triedro *D* : $CDE < EDO + CDO$

Triedro *E* : $AED < AEO + DEO$

Sumando miembros a miembros :

$$EAB + ABC + BCD + CDE + AED < EAO + BAO + OBA + OBC + BCO + DCO + EDO + CDO + AEO + DEO$$

el primer miembro se representa la suma de los ángulos internos del polígono de la base $180°(n-2)$.

* Si la base tuviera «*n*» lados (para nuestro gráfico) y el segundo miembro representa la suma de los ángulos de los triángulos. Menos los ángulos *O*

$180°(n-2)<180n$ – ángulos en *O*

$\Rightarrow 180n-360°<180n-(a+b+c+d+e+f+.....)$

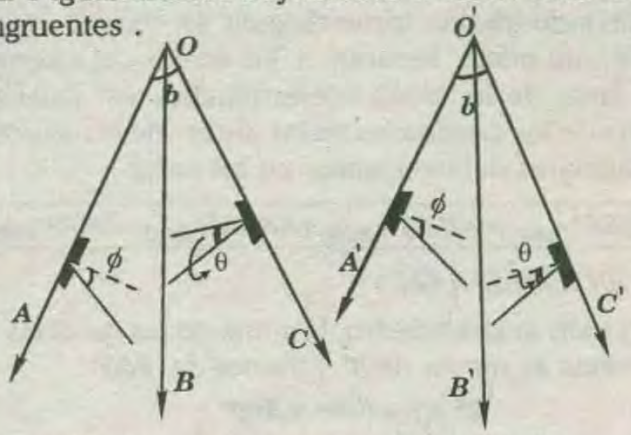
$\Rightarrow a+b+c+d+e+.....<360°$

CONGRUENCIA DE TRIEDROS

En los triedros pueden demostrarse estos cuatro criterios de congruencia , los tres primeros se corresponden con los tres de los triángulos

PRIMER CRITERIO :

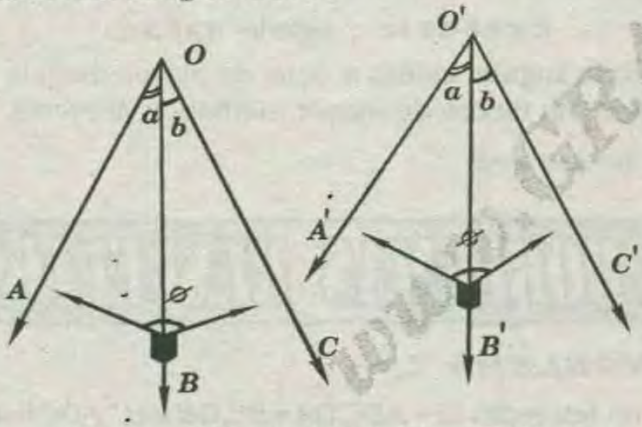
Dos triedros que tengan respectivamente iguales una cara e igual diedros adyacentes a dicha cara serán congruentes .



Triedro $O - ABC \cong$ Triedro $O' - A'B'C'$

SEGUNDO CRITERIO :

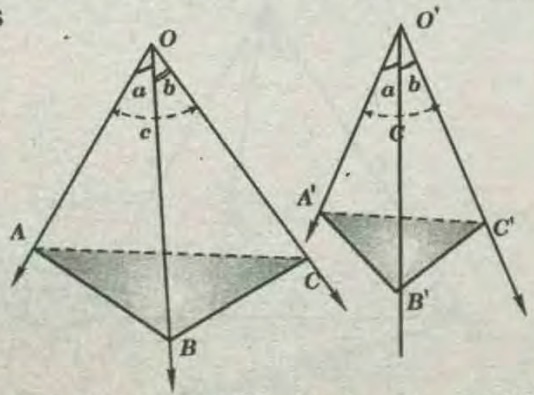
Dos triedros que tengan respectivamente iguales dos caras e igual el diedro comprendidas por dichas caras serán congruentes .



Triedro $OBC \cong$ triedro $O' - A'B'C'$

TERCER CRITERIO :

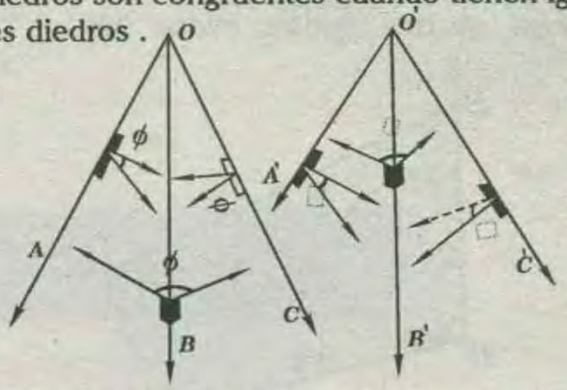
Dos triedros son congruentes si tienen sus tres caras iguales



Triedro $O - ABC \cong$ triedro $O' - A'B'C'$

CUARTO CRITERIO :

Dos triedros son congruentes cuando tienen iguales los tres diedros .



triedro $O–ABC \cong$ triedro $O' – A'B'C'$

NOTAS :

♠ En todo triedro a dos diedros desiguales se oponen caras desiguales , y a mayor diedro se opone mayor cara .

♠ Si un triedro tiene dos caras iguales los diedros opuestos son también iguales .

♠ En todo triedro isósceles , el plano bisector del diedro comprendido entre las caras iguales , es perpendicular a la tercera cara , y determina dos ángulos iguales .

PROPIEDAD :

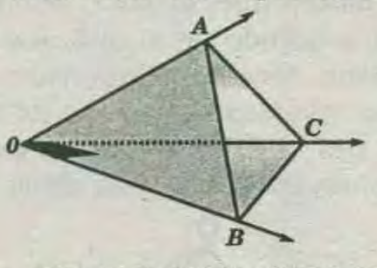
En todo triedro isósceles :

* Si : $m\sphericalangle AOB = m\sphericalangle AOC$; y $\overline{PH}$ perpendicular a la cara BOC.

→ $\overline{OH}$: bisectriz del $\sphericalangle BOC$

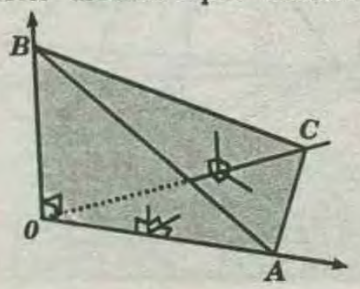
TRIEDRO RECTÁNNGULO :

Es aquel que tiene una cara que mide $90°$.



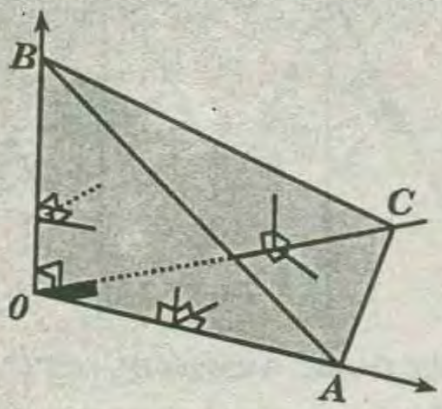
TRIEDRO BI-RECTANGULAR :

Es aquel que tiene dos caras que miden $90°$, a los cuales se oponen diedros que miden $90°$.



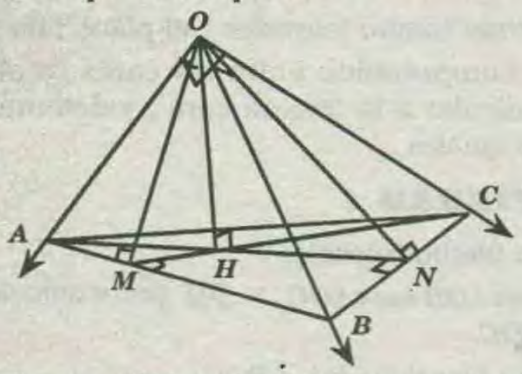
TRIEDRO TRI-RECTÁNGULO:

Es aquel que tiene sus tres caras que miden $90°$; entonces sus tres diedros miden $90°$.



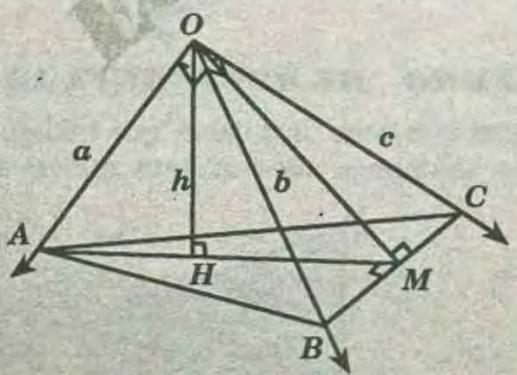
PROPIEDADES EN EL TRIEDRO TRIRECTÁNGULO

1) En todo trirectangulo se cumple que la proyección del vértice sobre un plano secante a las aristas coincide con el ortocentro de la sección determinada por dicho plano .



* En la figura *"H"* es el ortocentro del triángulo *ABC* y además es la proyección del vértice *"O"* sobre el plano *ABC* .

2) En todo triedro trirectángulo se cumple que la inversa del cuadrado de la distancia del vértice hacia un plano secante a las aristas , es igual a la suma de las inversas de los cuadrados de las distancias del vértice hacia los puntos de intersección de las aristas con dicho plano .



$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

3) En todo triedro trirectángulo se cumple que la trazar un plano secante a las aristas, el área de una región triangular determinado en una cara, es media proporcional entre el área de su proyección sobre dicho plano y el área de la sección determinada por el plano.

$$[AREA_{(\Delta BOC)}]^2=AREA_{\Delta BHC}\times AREA_{(\Delta ABC)}$$

4) En todo triedro trirrectángulo se cumple que al trazar un plano secante a las aristas , el cuadrado del área de la sesión determinada. es igual a la suma de los cuadrados de las áreas de las regiones triangulares determinadas en las caras .

$$ÁREA^2_{(\Delta ABC)}=ÁREA^2_{(\Delta AOB)}+ÁREA^2_{(\Delta BOC)}+ÁREA^2_{(\Delta AOC)}$$

¡RECORDAR¡

* En todo ángulo triedro la suma de las medidas de las caras es mayor de $0°$ y menor de $360°$.

$$0° < a+b+c < 360°$$

* En todo ángulo triedro la suma de los ángulos diedros es mayor de $180°$ y menor de $540°$.

$$180° < \alpha+\beta+\theta < 540°$$

* En todo ángulo triedro la medida de cualquiera de las tres caras es menor que la suma y mayor que la diferencia de las medidas de las otras dos caras.

$$a-c<b<a+c \ ; \text{ siendo } a>b>c$$

En todo ángulo triedro a cara de mayor medida se opone un diedro de mayor medida y viceversa.

si : $a>c \rightarrow \alpha>\theta$

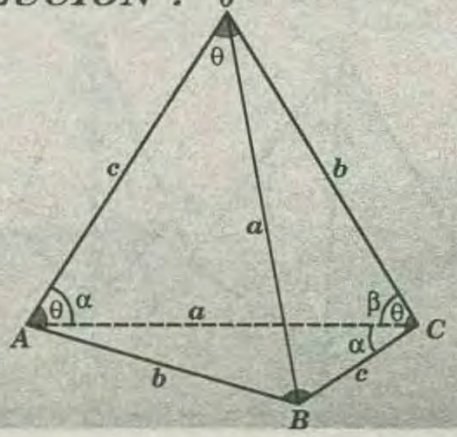
PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

En un tetraedro $O-ABC, OA=BC, OB=AC$ y $OC=AB$. Además se cumple $AC>OC>AO$. Halle la suma del máximo y mínimo entero de la cara AOC.

A) $90°$ *B)* $100°$ *C)* $120°$ *D)* $150°$ *E)* $160°$

RESOLUCIÓN :



* Dato : $a > b > c \Rightarrow \theta > \alpha > \beta$

$\Delta AOC \cong \Delta OAB \cong \Delta CBA$ (LLL)

$\Rightarrow m\sphericalangle AOC = m\sphericalangle OCB = \theta$

$m\sphericalangle OAC = m\sphericalangle ACB = \alpha$

ΔAOC :

$\alpha+\beta+\theta=180° \rightarrow \alpha+\beta=180°-\theta$.....(I)

* Por teorema : $\alpha - \beta < \theta < \alpha + \beta$ .....(II)

* (I) en (II): $\theta < 180° - \theta \rightarrow \theta < 90°$

* Por condición : $\alpha < \theta \ ; \beta < \theta$

* Sumando $\underbrace{\alpha+\beta} < 2\theta$

$180° - \theta < 2\theta$

$180° < 2\theta \quad y \quad 60° < \theta$

$\Rightarrow 60° < \theta < 90°$

* Luego : $\theta_{mín} = 61 \Rightarrow \theta_{máx} = 89$

$\Rightarrow \theta_{mín} + \theta_{máx} = 150°$

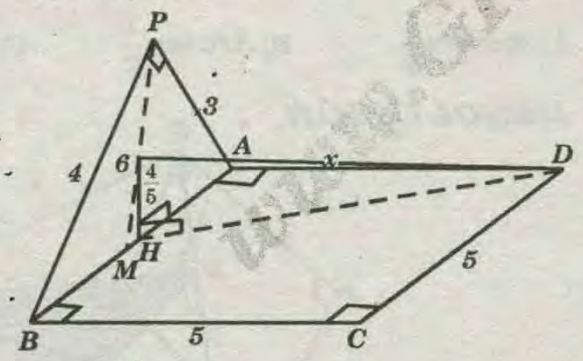
RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

Un cuadrado *ABCD* y un triángulo rectángulo *APB* están contenidos en dos planos perpendiculares. Halle la distancia entre el vértice *D* y el baricentro del triángulo *APB* ; si se sabe que: $AP = 3$ y $BP = 4$.

A) $\frac{17}{3}$ B) $\frac{16}{3}$ C) $\frac{\sqrt{277}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{276}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{275}}{3}$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle APB$: $AH = \frac{34}{15}$

* $\triangle HAD$:

$HD^2 = \left(\frac{34}{12}\right)^2 + 5^2$.....(I)

* $\triangle GHD$:

$x^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + HD^2$.....(II)

* (I) en (II):

$x^2 = \frac{16}{25} + \frac{34^2}{15^2} + 25$

* Simplificando: $x = \frac{\sqrt{277}}{3}$

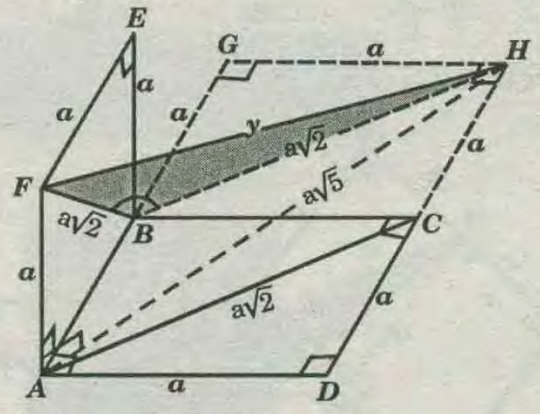
RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

Dos regiones cuadradas están contenidos en plano perpendiculares ; *ABCD* y *ABEF*. Halle la medida del ángulo que determinan las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BF}$.

A)45 B)150 C)90 D)120° E)135

RESOLUCIÓN :



Se traza por *B* ; $\overline{BH} \parallel \overline{AC}$

$\Rightarrow$ «θ» es la medida del ángulo pedido ΔFBH ; por ley de cosenos :

$y^2 = a^2 + 2a^2 - 2(a\sqrt{2})^2 \cos\theta$.....(I)Sen

* $\triangle FAH$: $y^2 = a^2 + 5a^2 = 6a^2$ .....(II)

* (II) en (I): $6a^2 = 4a^2 - 4a^2\cos\theta$

$\Rightarrow Cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 4 :

Dados 2 planos *P* y *Q* perpendiculares entre si, una recta intersecta a los planos *P* y *Q* en los puntos *A* y *B* respectivamente.

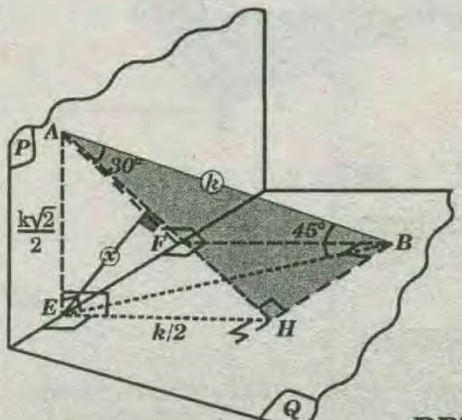
Si $AB = K$, $m\sphericalangle(\overline{AB}, P) = 30°$, $m\sphericalangle(\overline{AB}, Q) = 45°$.

Halle la distancia entre $\overline{AB}$ y la recta de intersección de los planos.

A)K B) $\frac{3K}{2}$ C) $\frac{K}{2}$ D) $\frac{K}{3}\sqrt{3}$ E) $\frac{K}{6}\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN :

* $\triangle AEH$; por *R.M* : $\frac{1}{x^2} = \frac{2}{K^2} + \frac{4}{K^2} \rightarrow x = \frac{K\sqrt{6}}{6}$



RPTA : "E"

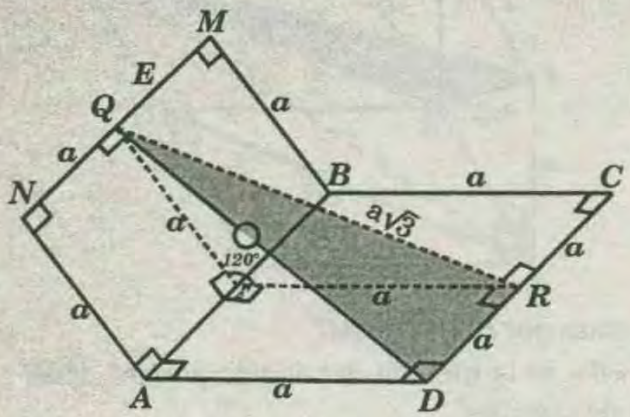
PROBLEMA 5 :

Las regiones rectangulares $ABCD$ y $ABMN$ determinan un diedro que mide $120°$.

Si $2BM = AB = 2BC = 2a$. Halle la distancia de D al punto medio de $\overline{MN}$.

A) a B) $\frac{3a}{2}$ C) $2a$ D) $\sqrt{3}a$ E) $\frac{5}{2}a$

RESOLUCIÓN :



* ΔQER isósceles : $QE = ER = a$

$m\sphericalangle QER = 120° \Rightarrow QR = a\sqrt{3}$

* $\triangle QRD$: $x^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow x = 2a$

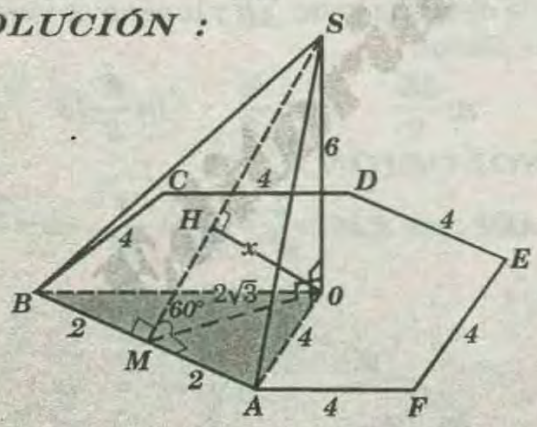
RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

Dado un exágono regular $ABCDEF$ de y de centro el punto O y $AB = 4$. Se traza $\overline{OS}$ perpendicular al plano del exágono , de modo que el diedro $S - \overline{AB} - O$ mide $60°$. Halle la distancia del punto O al plano ABS.

A)4 B)3 C)5 D)2 E)1

RESOLUCIÓN :



* $\triangle SOM$: $MO = 2\sqrt{3} \Rightarrow SO = 6$

* Luego: $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{36} \rightarrow x = 3$

RPTA : "B"

PROBLEMA 7 :

En la figura , P es un triedro cuyas caras son mutuamente ortogonales y longitud de sus tres aristas es : $PA = PB = PC = 6m$

Halle el área del triángulo ABC .

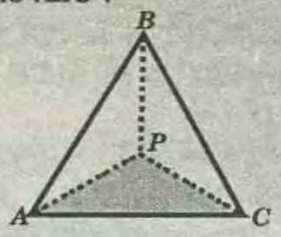
A) $18\sqrt{2}m^2$

B) $18\sqrt{3}m^2$

C) $16\sqrt{3}m^2$

D) $16\sqrt{2}m^2$

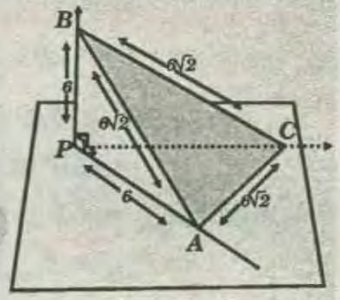
E) $12\sqrt{3}m^2$



RESOLUCIÓN:

* Haciendo un gráfico más conveniente :

$BC = AC = AB = 6\sqrt{2}$



* $\Delta ABC \rightarrow$ equilátero

$S_{ABC} = (6\sqrt{2})^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}$

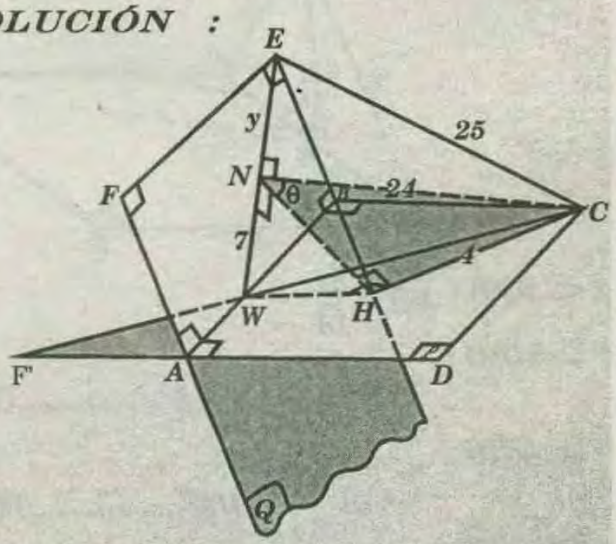
RPTA : "B"

PROBLEMA 8 :

$ABCD$ y $ABEF$ son regiones rectangulares , contenidos en los planos P y Q respectivamente , F' es un punto en la prolongación de $\overline{DA}$ tal que $\overline{F'C} \cap \overline{AB} = \{W\}$, $WC = EC = 25u$, $EW = 14u$, si la distancia de C al plano Q es $4u$, halle la medida del ángulo diedro determinado por el plano Q y el plano que contiene a $F'CE$.

A) $Arc\,sen\frac{1}{6}$ B) $Arc\,sen\frac{1}{7}$ C) $Arc\,sen\frac{1}{8}$

RESOLUCIÓN :



$\overline{CH} \perp Q \Rightarrow \overline{CH} \perp \overline{NH}$

* Luego ; «θ» es la medida del ángulo diedro pedido.

* $\triangle CHN$:

$Sen\theta = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \Rightarrow \theta = ArcSen\frac{1}{6}$

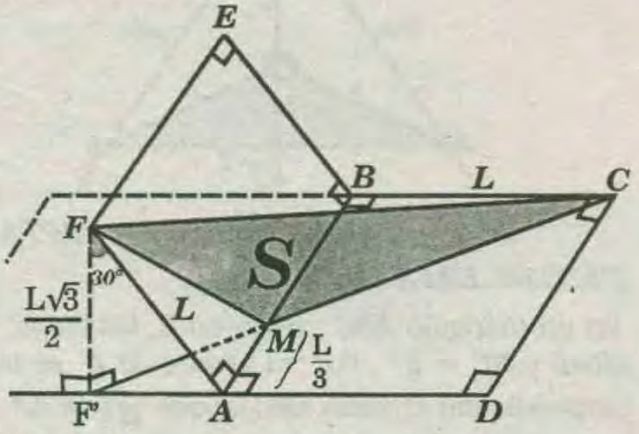
RPTA : "A"

PROBLEMA 9 :

Se tiene dos regiones cuadradas **ABCD** y **ABEF** formando un ángulo diedro que mide **120°**. La proyección de **F** sobre el plano **ABCD** es **F'**. Halle el área de la región triangular obtenida al intersectar el ángulo diedro con la región triangular **FF'C**, si **AB= L**.

A) $\frac{\sqrt{39}}{12}L^2$ B) $\frac{\sqrt{40}}{12}L^2$ C) $\frac{\sqrt{35}}{11}L^2$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle MBC$: $b^2 = \left(\frac{2L}{3}\right)^2 + L^2 \Rightarrow b = \frac{L}{3}\sqrt{13}$

* Luego :

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{3}\sqrt{13}\right)\left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow S = \frac{\sqrt{39}}{12}L^2$$

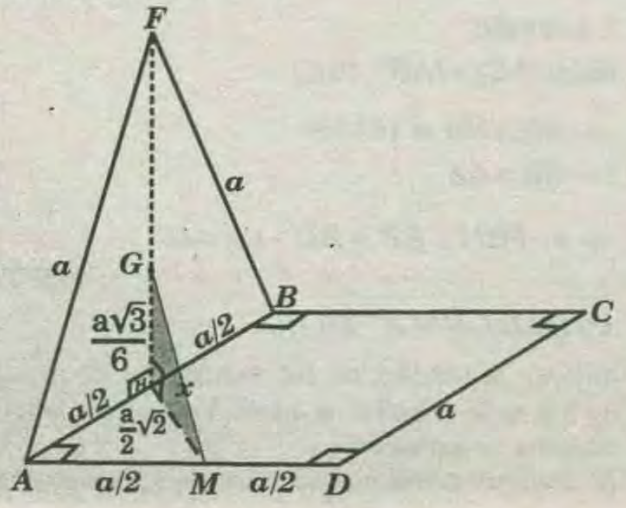
RPTA : "A"

PROBLEMA 10 :

Un cuadrado **ABCD** de lado **a** y un triángulo equilátero **ABF**, forman un ángulo diedro **AB** recto. Calcule la longitud del segmento que une el baricentro del triángulo **ABF** y el punto medio de **AD**.

A) $\frac{a\sqrt{21}}{6}$ B) $\frac{a\sqrt{21}}{3}$ C) $\frac{a\sqrt{21}}{2}$ D) $a\sqrt{21}$ E) $2a\sqrt{21}$

RESOLUCIÓN :



$\overline{GH} \perp \overline{HM}$

$\triangle HAM$: $HM = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

Si «G» baricentro del $\triangle ABF$.

$$\Rightarrow GH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

* $\triangle GHM$; por el teorema de Pitágoras :

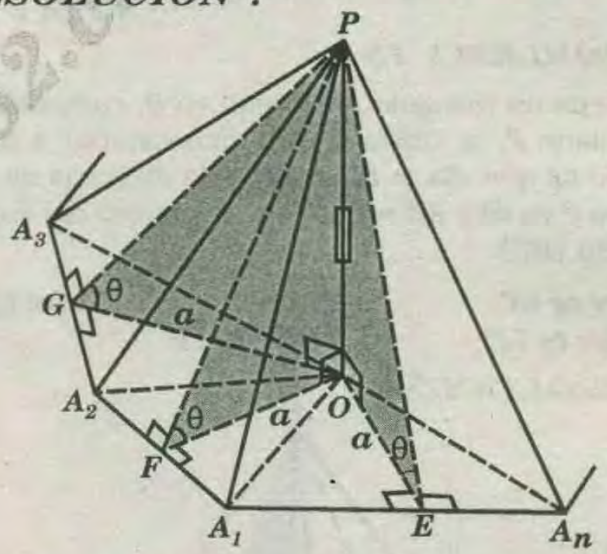
$$x^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 11 :

Desde un punto **O** exterior a un plano **P**, se trazan rayos que intersecan a **P** en A_1, A_2 .....A_n, tal que $A_1A_2A_3$.....A_n es un polígono convexo ; demuestre que si los diedros de aristas A_1A_2, A_2A_3.....,A_nA_1 son congruentes , entonces el polígono $A_1A_2A_3$.....A_n es circunscriptible.

RESOLUCIÓN :



$\triangle POE \cong \triangle POF \cong \triangle POG$ .....

$\Rightarrow OE = OF = OG$ .....

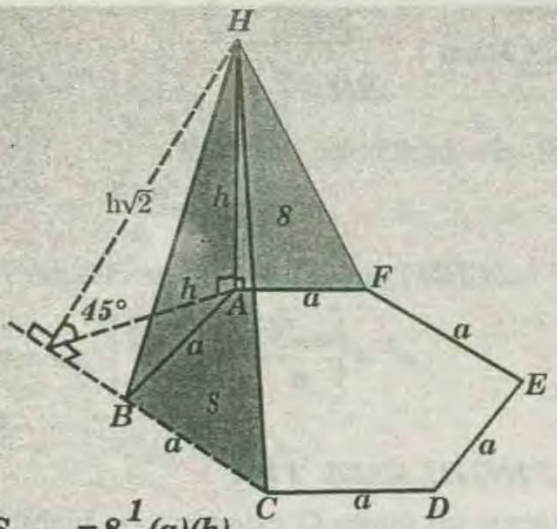
Esto demuestra que , el polígono $A_1A_2A_3$.....A_n es circunscriptible.

PROBLEMA 12 :

ABCDEF es un exágono regular contenido en un plano **P**. Se traza $\overline{AH}$ perpendicular al plano, tal que los planos **HBC** y **P** formen un diedro que mide **45**. Si el área de la región triangular **AHF** es **8cm²**. Calcule (en **cm²**) el área de la región triangular **HBC**.

A)4 B) $4\sqrt{2}$ C)8 D) $8\sqrt{2}$ E)16

RESOLUCIÓN :



* Por dato :

$$S_{AHF} = 8\frac{1}{2}(a)(h)$$

$$\rightarrow ah = 16\mu^2 \quad \text{.....(I)}$$

* Se pide :

$$S = \frac{1}{2}(a)(h\sqrt{2}) \quad \text{.....(II)}$$

* (I) en (II) : $S = \frac{1}{2}(16)\sqrt{2} \Rightarrow S = 8\sqrt{2}\mu^2$

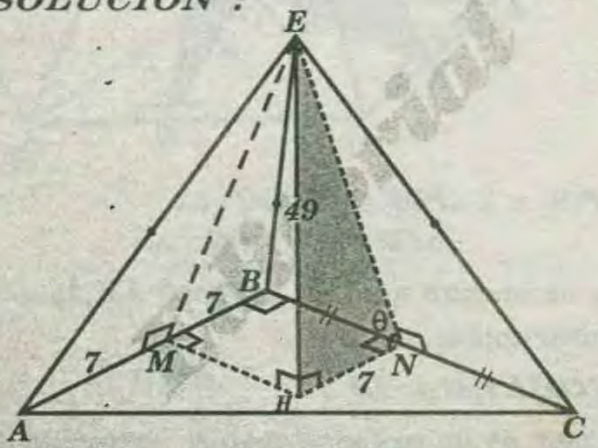
RPTA : "D"

PROBLEMA 13 :

Se tiene un triángulo ABC recto en B, contenido en un plano P, se ubica E un punto exterior a dicho plano tal que $EA = EB = EC$, si la distancia de E al plano P es 49 y $AB = 14$. Halle la medida del ángulo diedro (BC).

A) Arc tg 45° B) Arc tg 7° C) Arc tg 10°
D) Arc tg 11° E) Arc tg 13°

RESOLUCIÓN :



* Si $\overline{HM} \perp \overline{AB} \Rightarrow \overline{EM} \perp \overline{AB}$ y $AM = MB = 7$

* Si $\overline{HN} \perp \overline{BC} \Rightarrow \overline{EN} \perp \overline{BC}$ y $BN = NC$

$BMNH$ es un rectángulo : $MB = HN = 7$

* $\triangle EHN$: $Tg\theta = \frac{49}{7} \rightarrow Tg\theta = 7$

$\Rightarrow \theta = Arc\ tg\ 7$

RPTA : "B"

PROBLEMA 14 :

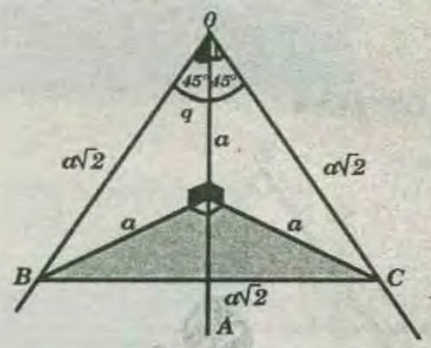
En un triedro $O - ABC$ si el diedro A mide $90°$ y las caras $b = c = 45°$ Entonces la magnitud de la cara "a", es :

A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) 90°

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que $\triangle BOC$ es equilátero , luego :

$\theta = 60$



RPTA : "C"

PROBLEMA 15 :

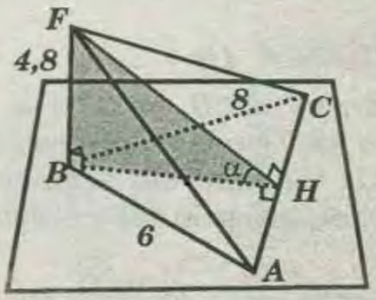
En un triángulo ABC , recto en B, los lados miden $AB = 6$ y $BC = 8$. Por el vértice de B se traza BF perpendicular al plano ABC tal que $\overline{BF} = 4{,}8$. Hallar la medida del ángulo diedro que forman los planos ABC y AFC .

A) 15° B) 30° C) 45° D) 75° E) 90°

RESOLUCIÓN :

* α : ángulo plano del diedro $F\text{–}AC\text{–}B$

* $\triangle ABC$:



$$AC = \sqrt{6^2 + 8^2}$$

$$\rightarrow AC = 10$$

* Ademas:

$(BH)(AC) = (AB)(BC)$

$\rightarrow (BH)(10) = (6)(8)$

$\rightarrow BH = 4{,}8$

$\rightarrow \triangle FBH$: $BF = BH \rightarrow \alpha = 45°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 16 :

Indicar la verdad de las siguientes proposiciones :

A) En todo triedro a caras congruentes se oponen diedros congruentes.

B) En todo triedro la suma de las medidas de los

ángulos de sus caras está entre 180° y 540°
C) Triedro equilátero es aquel cuya medida de los ángulos de sus caras miden 60° cada uno .

A)VVF B) VFF C) FFF D) FFV E) FVV

RESOLUCIÓN:

I) VERDADERA :

Ya que en todo triedro, a caras congruentes se oponen diedros congruentes.

* Sí: $a=b=c \rightarrow \alpha=\theta=\beta$ (triedro equilátero)

II) FALSA :

Por que en todo triedro , la suma de las medidas de las caras es menor que *360°* y mayor que *0°* .

$$0° < a + b + c < 360°$$

III) FALSA :

Ya que : un triedro es equilátero si cumple la proposición *I* , es un caso particular si:

$$a=b=c=60°$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 17 :

Sea *ABC* un triángulo equilátero de lado *18 cm.* y cuyo ortocentro es *M*. Si de *M* se levanta una perpendicular $MD=\sqrt{27}\,cm$, al plano *ABC* entonces el ángulo diedro formando por *ABC* y *ABD* , es:

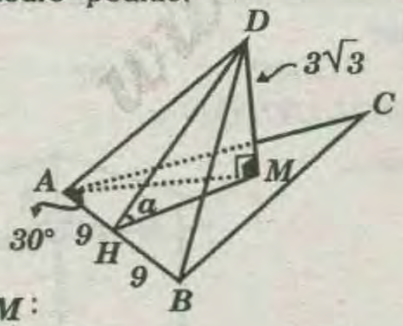
A) 90° B)45° C)30° D)37° E)53°

RESOLUCIÓN:

$$DM=2\dot{7}=3\sqrt{3}$$

$\alpha \rightarrow$ medida del diedro pedido.

* $\triangle AHM$:



$$HM=\frac{AH}{3}$$

$$\rightarrow HM=3\sqrt{3}$$

* Lluego , en $\triangle AHM$:

$$HM=DM \rightarrow \alpha = 45°$$

RPTA : "B"

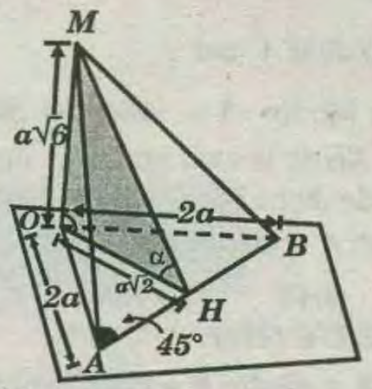
PROBLEMA 18 :

Dado un triángulo rectángulo *AOB* , siendo *OA = OB=2* a ; en *O* se levanta una perpendicular al plano *AOB* , sobre la que se toma $OM=a\sqrt{6}$ y luego se une *M* con los puntos *A* y *B* . Calcular la medida del diedro *AB* .

A) 30° B) 75° C)60° D) 53° E) 37°

RESOLUCIÓN:

* $\alpha \rightarrow$ medida del ángulo diedro plano *M – AB – O*



* *AOB* , isósceles :

$$OH=\frac{AB}{2}=\frac{2a\sqrt{2}}{2} \rightarrow OH=a\sqrt{2}$$

* En el $\triangle MOH$, se observa que :

$$MO=(OH)\sqrt{3} \rightarrow x=60°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 19 :

Un triángulo isósceles *ABC* , donde *AB = AC = a* está inscrito en un círculo de radio a . en *A* se levanta una perpendicular $\overline{AD}$ al plano del triángulo y se une el punto *D* con los vértices, *B* y *C* . calcular la longitud del segmento $\overline{DB}$ para que el diedro *D – BC – A* mida *30°* .

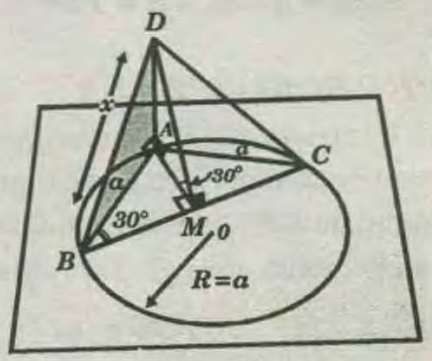
A) $a\sqrt{\frac{13}{3}}$ *B)* $a\sqrt{\frac{13}{2}}$ *C)* $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{13}{3}}$ *D)* $\frac{a}{2}\sqrt{13}$ *E)* $a\sqrt{13}$

RESOLUCIÓN :

* trazamos $\overline{AM} \perp \overline{BC}$ y luego , por el teorema de las tres perpendiculares , $\overline{DM} \perp \overline{BC}$

AMD =30° , es el ángulo plano del diedro *D–BC – A*

* Como :



$$AC=a=R$$

$$\rightarrow AC=L_6 \rightarrow \overset{\frown}{AB}=60°$$

* Además :

$$ABC=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}=30°$$

* $\triangle AMB$:

$$AM=\frac{AB}{2} \rightarrow AM=\frac{a}{2}$$ y en

* $\triangle MAD$: $AD=\frac{AM}{\sqrt{3}}=\frac{a}{2\sqrt{3}}$

* $\triangle BAD$:

$$x^2=(AB)^2+(AD)^2=a^2+\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow x=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{13}{3}}$$

RPTA : "C"

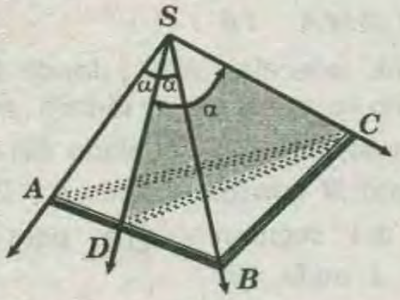
PROBLEMA 20 :

Dado un triedro $S-ABC$, si $\overline{SC}$ forma con la bisectriz $\overline{SD}$ de la cara opuesta un ángulo igual a la mitad de dicha cara, calcular el diedro C.
Si : diedro A + diedro $B = 120^\circ$.

A)90° B)45° C) 135° D) 60° E) 120°

RESOLUCIÓN :

* Diedro A + diedro $B = 120^\circ$
* Incógnita : diedro $A-SC-B$
* " En todo triedro isósceles, a caras congruentes se oponen diedros, respectivamente congruentes ".
* Triedro $S-ADC$: caras ASD y DSC, congruentes
→ diedro $A-SC-D$ = diedro A .



* Triedro $S-DBC$: caras DSB y DSC, congruentes
→ diedro $D-SC-B$ = diedro B
* Sumando miembro a miembro :
(Diedro $A-SC-D$) + (Diedro $D-SC-B$) = diedro A + diedro B
→ diedro $A-SC-B$ = diedro A + diedro B
→ diedro $A-SC-B = 120^\circ$

RPTA : "E"

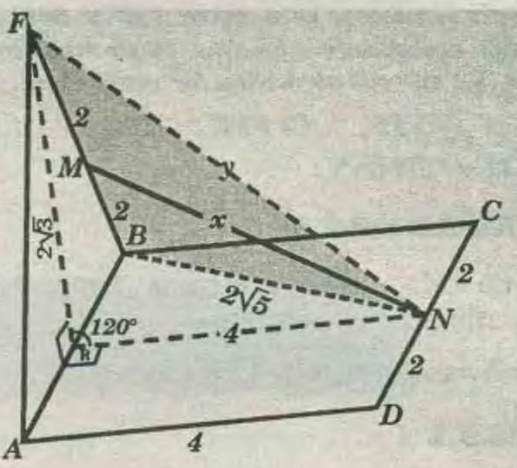
PROBLEMA 21 :

Un cuadrado $ABCD$ y un triángulo equilátero ABF están contenidos, en planos que forman un ángulo Diedro de 120°, sea M el punto medio de $\overline{FB}$ y N el punto medio de $\overline{CD}$; si : $AB=4\mu$. calcular MN.

A) $2\sqrt{5-\sqrt{3}}$ B) $2\sqrt{5+\sqrt{3}}$ C) $2\sqrt{3+\sqrt{2}}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3-\sqrt{3}}$

RESOLUCIÓN :

* Aplicamos :
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta$ " ley de cosenos"
* En el ΔRFN :



$$y^2=(2\sqrt{3})^2+4^2-2(3)(\sqrt{4})\cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow y^2=12+16-8\sqrt{3}\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y^2=28+8\sqrt{3} \quad \ldots\ldots (I)$$

* Ahora por el teorema de la mediana en el ΔFBN :

$$y^2+(2\sqrt{5})^2=2x^2+\frac{4^2}{2} \quad \ldots\ldots (II)$$

* De (I) y de (II) : $28+8\sqrt{3}+20=2x^2+8$
* Al efectuar: $x=2\sqrt{5+\sqrt{3}}$

RPTA : " B"

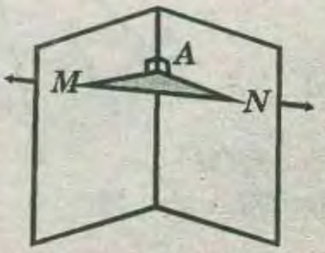
PROBLEMA 22 :

Las caras de un ángulo diedro son cortadas en los puntos M y N por una recta; siendo A la proyección ortogonal de estos puntos sobre la arista . la mitad del ángulo diedro es igual a la semidiferencia de los ángulos $A\widehat{N}M$, $A\widehat{M}N$; y si estos últimos están en la relación de 3 a 1 ¿cual es el valor del ángulo diedro?

A)30° B)40° C)50° D)60° E)70°

RESOLUCIÓN :

* Datos :



$$\frac{1}{2}\hat{A}=\frac{1}{2}(\widehat{N}-\widehat{M})$$

$$\rightarrow A=\widehat{N}-\widehat{M} \quad \ldots\ldots (I)$$

* Ademas: $\frac{\widehat{N}}{\widehat{M}}=3 \quad \ldots\ldots (II)$
* Pero : $A+\widehat{N}+\widehat{M}=180^\circ$
* Luego: con lo anterior : $M = 30^\circ$

* Entonces : $A = 60^\circ$

RPTA : "D"

PROBLEMA 23 :

Una hoja de papel de forma triangular $ABCD$ tiene como dimensiones : $AB=3(\sqrt{5}-1)\ m;\ BC=3m$. Por los puntos medios de AB y CD se dobla la hoja de papel de manera que el ángulo diedro formado es de $72°$. Hallar la distancia minima que existe entre la arista del diedro y el segmento que une el centro de sus caras .

A) $2m$ B) $3m$ C) $5m$

D) $(\sqrt{5}+1)m$ E) $\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,m$

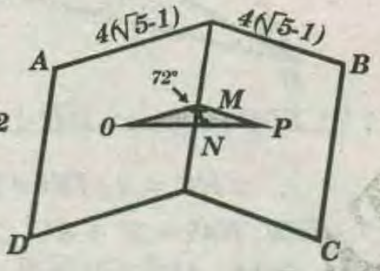
RESOLUCIÓN :

* $\widehat{OMP}=72°$, ángulo plano del diedro

* ΔOMP , elemento del pentágono regular donde $OM=MP=2(\sqrt{5}-1)$ y $\overline{MN}$ es apotema .

$$\rightarrow MN=\frac{(OM)}{4}\times(\sqrt{5}+1)$$

$$\Rightarrow MN=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{4}(\sqrt{5}+1)=2$$



RPTA : "A"

PROBLEMA 24 :

De las siguientes proposiciones.

I) En todo triedro convexo , un diedro exterior es menor que la suma de los otro dos y mayor que su diferencia.

II) La distancia de dos rectas que se cruzan en el espacio es el segmento perpendicular a ambas y cuyos extremos se encuentran uno en cada recta .

III) La proyección de toda poligonal sobre un plano es otra poligonal .

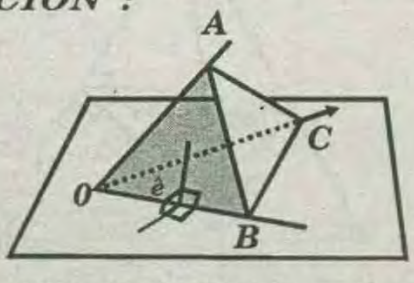
Son verdaderas :

A) Todas B) Sólo II C) I y III

D) I y II E) II y III

RESOLUCIÓN :

I) FALSA :

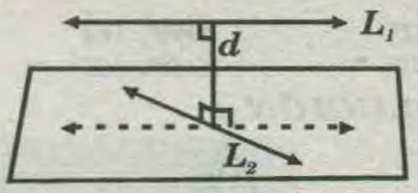


* Triedro $O-ABC$; $\hat{e}$: ángulo plano de un diedro exterior .

* Sólo se sabe :

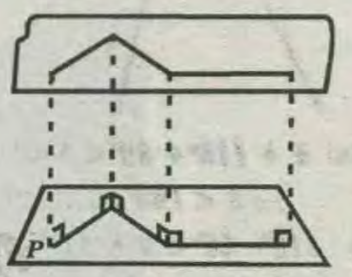
$0° <$ suma de diedros externos $< 360°$.

II) VERDADERO :



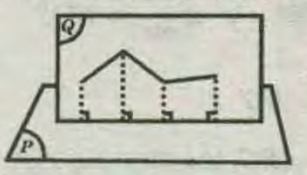
*d : mínima distancia entre $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$

III) FALSA :



* Poligonal en un plano oblicuo al plano P .

→ La proyección es otra poligonal .



* Poligonal en un plano perpendicular al plano P.

→ La proyección es un segmento .

RPTA : "B"

PROBLEMA 25 :

Se tiene un ángulo triedro equilátero donde cada cara mide $45°$. ¿cuanto mide uno de los diedros del triedro?

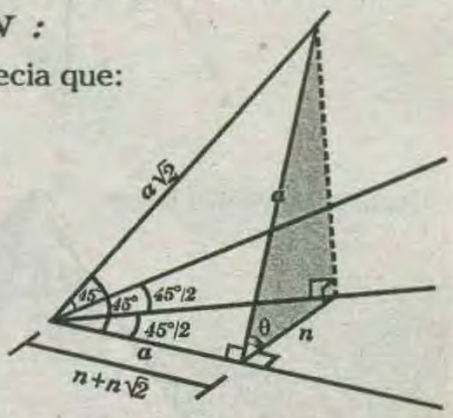
A) $arcos(\sqrt{2}-1)$ B) $arcos(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ C) $arcos\,(\sqrt{3}-1)$

RESOLUCIÓN :

* Del grafico se aprecia que:

$$n+n\sqrt{2}=a$$

$$\rightarrow n=a(\sqrt{2}-1)$$



* Además por trigonometría:

$$Cos\theta=\frac{n}{a}\Rightarrow Cos\theta=a\frac{(\sqrt{2}-1)}{a}$$

$$\Rightarrow Cos\theta=\sqrt{2}-1\Rightarrow = arcCos(\sqrt{2}-1)$$

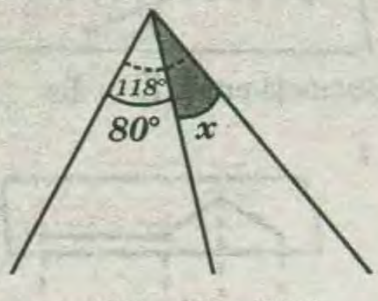
RPTA : "A"

PROBLEMA 26 :

Dos caras de un triedro miden $80°$ y $118°$ respectivamente. Halle los valores enteros, mínimo y máximo de la medida de la tercera cara.

A) $40°, 161°$ B) $60°, 161°$ C) $30°, 161°$
D) $28°, 161°$ E) $39°, 161°$

RESOLUCIÓN :



* Por teoría: $x + 118° + 80° < 360°$

$\Rightarrow x < 162°$ .....(I)

* También : $118° - 80° < x < 118° + 80°$

$\Rightarrow 38 < x < 198°$ .....(II)

* De (I) y (II): $38° < x < 162°$

* Luego: $x_{mín} = 39°$ y $x_{máx} = 161°$

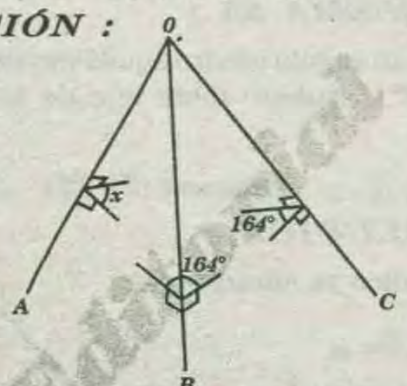
RPTA : "E"

PROBLEMA 27 :

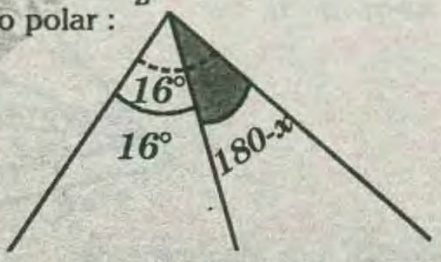
En un triedro $O - ABC$, los diedros $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ miden $164°$. Halle la medida del diedro $\overrightarrow{OA}$, si su medida es menor a $150°$ y es entero.

A) $145°$ B) $130°$ C) $140°$ D) $149°$ E) $148°$

RESOLUCIÓN :



* Usando el triedro polar :



* Por condición: $x < 150°$ .....(I)

* Por teoría: $180° - x < 32$

$\Rightarrow 148° < x$ .....(II)

* De (I) y (II): $148° < x < 150°$

* De donde : $x = 149°$

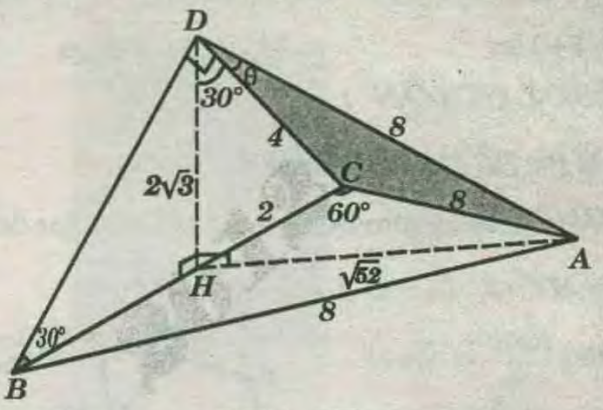
RPTA : "D"

PROBLEMA 28 :

ABC es un triángulo equilátero y BDC un triángulo rectángulo contenidos en planos perpendiculares, $AC = 8, DC = 4$. Determine la medida de la cara ADC en el triedro $D - BAC$.

A) $Arc\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ B) $Arc\cos\left(\frac{1}{3}\right)$ C) $Arc\cos\left(\frac{1}{4}\right)$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle BDC$; se traza $\overline{DH} \perp \overline{BC}$

$\Rightarrow HC = 2 ; DH = 2\sqrt{3}$

* $\Delta HCA : HA^2 = 2^2 + 8^2 - (2)(8) \Rightarrow HA^2 = 5^2$

* $\triangle DHA : AD^2 = (2\sqrt{3})^2 + 52 \Rightarrow AD = 8$

* ΔCDA ; por ley de cosenos:

$$64 = 64 + 16 - 2(4)(8)\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \theta = Arc\cos\left(\frac{1}{4}\right)$$

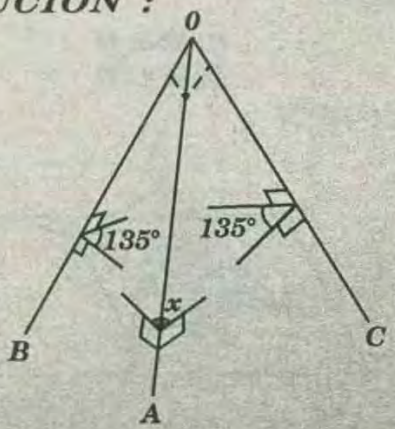
RPTA : "C"

PROBLEMA 29 :

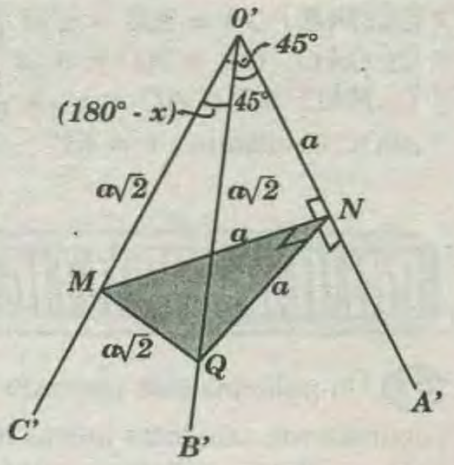
En un triedro $O - ABC$, los ángulos diedros $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ miden $135°$ y la cara opuesta a la arista $\overrightarrow{OA}$ mide $90°$. Calcule la medida del diedro $\overrightarrow{OA}$.

A) $90°$ B) $100°$ C) $115°$ D) $120°$ E) $135°$

RESOLUCIÓN :



* Usando el triedro polar :



$\triangle O'NQ$ isósceles :
$O'N = NQ = a$
$\Rightarrow O'Q = a\sqrt{2}$

$\triangle O'NM$ isósceles:
$O'N = NM = a$
$\Rightarrow O'M = a\sqrt{2}$

$\triangle MNQ$ isósceles:
$MN = NQ$
$\Rightarrow MQ = a\sqrt{2}$

D$MO'Q$ equilátero :
$180° - x = 60°$
$\Rightarrow x = 120°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 30 :

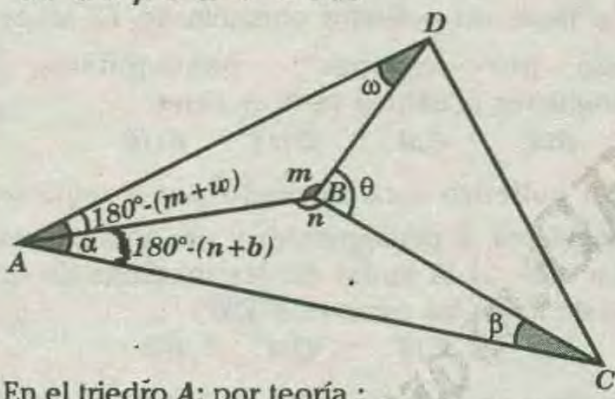
Dados los triángulos ABC y ABD, no situados en un mismo plano, demostrar que :

$$m\sphericalangle CAD + m\sphericalangle CBD + m\sphericalangle ACB + m\sphericalangle ADB < 360°$$

RESOLUCIÓN :

* Se pide mostrar :

$$\alpha + \theta + \beta + \omega + < 360°$$



* En el triedro A; por teoría :

$$\alpha < 180° - (m + \omega) + 180° - (n + \beta)$$
$$\Rightarrow m + n + \alpha + \beta + \omega < 360° \ldots\ldots\ldots (I)$$

* En el triedro B , por teoría:

$$\theta < m + n \ldots\ldots\ldots (II)$$

* Sumando *(I)* y *(II)*; obtenemos:

$$\alpha + \theta + \beta + \omega < 360°$$

PROBLEMA 31 :

Se tiene un ángulo triedro isósceles $O - ABC$.

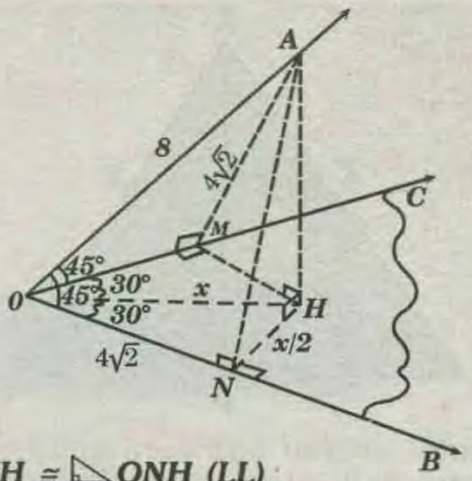
Las caras miden:

$$m\sphericalangle AOB = m\sphericalangle AOC = 45°$$
$$m\sphericalangle BOC = 60° \text{ y } OA = 8.$$

Halle la longitud de la proyección de OA sobre la cara BOC.

A) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ B) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ C) $3\sqrt{6}$ D) $2\sqrt{6}$ E) $\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle OMH \cong \triangle ONH$ (LL)
$\Rightarrow m\sphericalangle MOH = m\sphericalangle HON = 30°$

* $\triangle OHN$:

$$\frac{x}{2}\sqrt{3} = 4\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

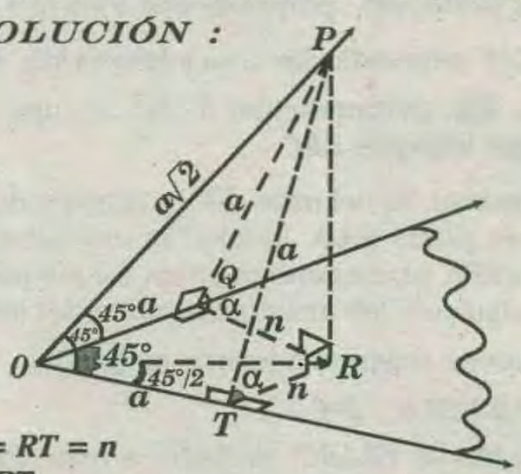
RPTA : "B"

PROBLEMA 32 :

Se tiene un ángulo triedro equilátero cuyas caras miden $45°$, entonces la medida de uno de sus ángulos diedros es :

A) $Arc\cos\sqrt{2}$ B) $Arc\cos(\sqrt{2}-1)$ C) $Arc\cos(\sqrt{2}+1)$

RESOLUCIÓN :



Si $RQ = RT = n$

* $\triangle ORT$:

$$n = (\sqrt{2} - 1) \ldots\ldots\ldots (I)$$

* $\triangle PRT$:

$$Cos\alpha = \frac{n}{a} \ldots\ldots\ldots (II)$$

* *(I)* en *(II)*:

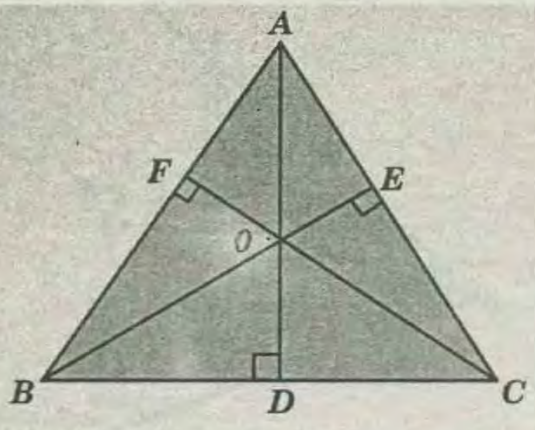
$$Cos\alpha = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{a} \Rightarrow Cos\alpha = \sqrt{2} - 1$$
$$\Rightarrow \alpha = Arc\,Cos(\sqrt{2} - 1)$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 33 :

En un triedro , por cada arista se traza un plano perpendicular a la cara opuesta. Demuestre que los tres planos tiene una recta común.

RESOLUCIÓN :



Estos planos no son otra cosa que los planos proyectados de las tres aristas sobre las caras opuestas.

Consideremos dos de estos planos, ***SBE*** y ***SCF*** (Es fácil suponer el vértice ***S*** delante del plano ***ABC***); sea $\overline{SO}$ la intersección de estos dos planos. Interceptamos el triedro ***S*** por un plano cualquiera ***ABC*** perpendicular ***SO*** ; este diedro $\overline{SO}$, perpendicular al plano ***ABC***, será también perpendicular a las intersecciones o trazos $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ situados en este plano.

Luego el plano ***SBE*** , perpendicular a los dos planos ***ABC*** y ***SAC*** perpendicular a su intersección $\overline{AC}$, así su trazo $\overline{BE}$, perpendicular a $\overline{AC}$, es una de las alturas del triángulo ***ABC***.

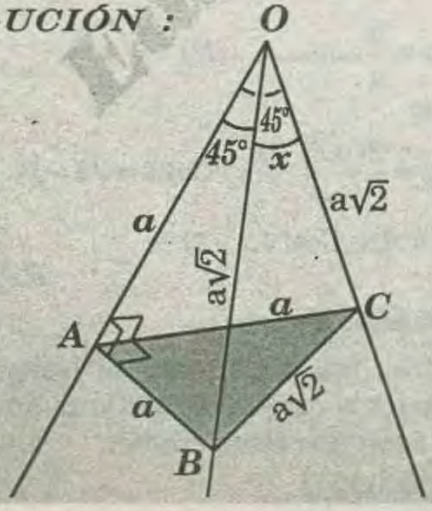
Análogamente, es del trazo $\overline{CF}$, y también del trazo del tercer plano ***SAD***. Luego las tres alturas del triángulo ***ABC*** se encuentran en un mismo punto ***O***; por consiguiente los tres planos altura del triedro ***S*** se encuentra según una misma recta $\overline{SO}$.

PROBLEMA 34 :

Si en un triedro ***O-ABC***, el diedro ***A*** mide ***90°*** y las caras ***b=c=45°***, entonces la cara a es :

A)15° ***B)30°*** ***C)45°*** ***D)60°*** ***E)75°***

RESOLUCIÓN :



* $\triangle OAB : OA = AB = a \Rightarrow OB = a\sqrt{2}$

* $\triangle OAC: OA = AC = a \Rightarrow OC = a\sqrt{2}$

* $\triangle BAC: AB = AC = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$

* ΔBOC Equilátero : $x = 60°$

RPTA : "D"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Un poliedro está formado por ***8*** triángulos y ***6*** cuadriláteros. ¿Cuántas aristas tiene?

A)12 ***B)16*** ***C)18*** ***D)24*** ***E)30***

02 Determinar el número de caras del poliedro cuyos vértices son los puntos medios de las aristas de un cubo.

A) 14 ***B) 16*** ***C)18*** ***D) 24*** ***E) 30***

03 Se tiene un poliedro formado por ***20*** regiones triangulares, ***8*** cuadrangulares y ***4*** pentagonales. ¿ Cuántas aristas tiene dicho poliedro?

A) 50 ***B) 47*** ***C) 54*** ***D) 51*** ***E) 56***

04 Se tiene un poliedro convexo de ***12*** aristas formado por regiones pentagonales y cuadrangulares ¿Cuántos vértices tiene?

A)7 ***B)8*** ***C)9*** ***D)11*** ***E)10***

05 Un poliedro está formado por ***3*** regiones cuadrangulares, ***5*** pentagonales y ***«x»*** triangulares. Calcular ***«x»***, si la suma de las medidas de los ángulos de todas las caras es ***4 320°***.

A)1 ***B)2*** ***C)3*** ***D)4*** ***E)5***

06 Se tiene un poliedro convexo de ***25*** aristas y ***15*** vértices, y está limitado por regiones triangulares, cuadrangulares y ***3*** regiones hexagonales. ¿Cuántas regiones triangulares tiene el sólido?

A)6 ***B)9*** ***C)10*** ***D)4*** ***E)8***

07 ¿Cuántas caras tiene un poliedro convexo de ***10*** vértices y ***15*** aristas?

A)7 ***B)8*** ***C)9*** ***D)10*** ***E)11***

08 ¿Cuántos vértices tiene un poliedro convexo formado por ***4*** regiones triangulares y ***3*** regiones cuadrangulares?

A)8 ***B)6*** ***C)5*** ***D)10*** ***E)7***

09 ¿Cuántos vértices tiene un poliedro convexo, si su número de aristas excede en ***4*** a su número de caras?

A)4 ***B)8*** ***C)9*** ***D)6*** ***E)10***

10 ¿Cuántos vértices tiene un poliedro convexo de *12* aristas formado por regiones pentagonales y cuadrangulares?

A)7 B)8 C)9 D) 11 E) 10

11 ¿Cuántas aristas tiene un octaedro convexo formado por regiones triangulares?

A)8 B)16 C)20 D)12 E)18

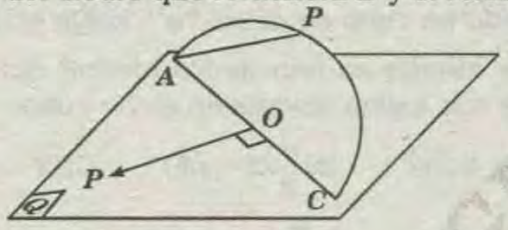
12 Calcular el número de aristas de un hexaedro convexo de *8* vértices.

A)16 B)12 C)20 D)18 E)25

13 Los triángulos equiláteros *ABC* y *ACD* están contenidos en planos perpendiculares. Calcular *DM*, si $AC = \sqrt{5}$ (*M* es punto medio de $\overline{BC}$)

A) 5 B)$\sqrt{5}$ C)$\sqrt{2}$ D)$\sqrt{3}$ E)$\sqrt{10}$

14 El semicírculo, de centro *O*, es perpendicular al plano *Q*, $\overline{AC}$ es la intersección de ambos. Si $\overline{OP} \perp \overline{AC}$ ($P \in Q$), $BC = 8$ y $OP = 4\sqrt{3}$, calcular la medida del diedro que forman *APB* y el semicírculo.



A)40° B) 60° C)75° D)45° E) 53°

15 Se tiene un triángulo rectángulo *ABC*, recto en *B*, tal que: *AB=15* y *BC=20*. Por *B* se levanta una perpendicular $\overline{BR}$ al plano del triángulo *ABC*. Si *BR=12*, calcular la medida del diedro formado por el $\triangle ABC$ y el plano determinado por los puntos *A*, *R* y *C*.

A) 30° B)45° C)60° D) 53° E) 37°

16 En un poliedro convexo la suma del número de caras y vértices es *20*. Calcular el número de aristas.

A) 16 B) 18 C) 20 D)22 E)10

17 Se tiene un cuadrado *ABCD* y un triángulo equilátero *ABE* no coplanares. Calcular la medida del diedro formado por dichas figuras para que las áreas de los triángulos *AEB* y *DCE* estén en la razón de $\sqrt{3} : 1$.

A) 45° B) 30° C) 53° D) 37° E) 60°

18 Un poliedro convexo está formado por *6* regiones triangulares, *4* pentagonales y *2* hexagonales. Calcular el número de vértices.

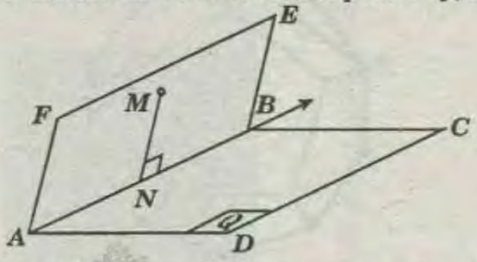
A)12 B)25 C)20 D)18 E)15

19 Se tiene un cuadrado en el cual por el vértice *C* se traza la perpendicular $\overline{CP}$ al plano del cuadrado. Calcular la medida del ángulo diedro determinado por las regiones *APB* y *ABCD*, Si: *AD=PC=3*.

A) 30° B) 45° C) 60° D) 37° E) 53°

20 En el gráfico, el diedro $\overline{AB}$ es *45°*.

Calcular la distancia de *M* hacia el plano *Q*, si *MN=12*



A)6 B)3$\sqrt{2}$ C)2$\sqrt{2}$ D)12 E)6$\sqrt{2}$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular el número de aristas de aquel poliedro convexo cuyo número de caras es igual al número de vértices, además la suma de las medidas de los ángulos de todas sus caras es *1 440°*.

A)12 B)8 C)9 D)10 E)14

02 Cuántas diagonales tiene aquel poliedro formado por *6* cuadriláteros y *8* triángulos?

A)36 B)26 C) 24 D)48 E)30

03 Un poliedro convexo está formado por pentágonos. Si las caras fueran triángulos se necesitarían *40* caras más para que el número de aristas no varíe. ¿Cuántas caras tiene el poliedro?

A) 45 B) 50 C) 60 D)65 E)80

04 Calcular el número de aristas que tendrá un poliedro convexo que está limitado por *30* regiones triangulares, *8* regiones pentagonales y *10* regiones limitadas por dodecágonos.

A) 224 B)274 C)125 D)137 E)182

05 Calcular el menor valor que toma la suma de las medidas de los diedros de un tetraedro irregular.

A) 181° B) 271° C) 361° D) 547° E) 180°

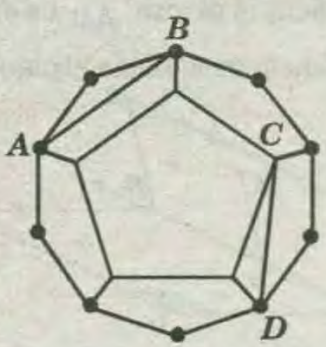
06 Calcular el número de diagonales de un icosaedro regular.

A)72 B)48 C)36 D) 26 E) 66

07 Calcular el área total de un cubo, sabiendo que la menor distancia entre una arista y una diagonal del cubo, siendo ambas alabeadas, es $4\sqrt{2}$.

A) 524 B) 400 C) 256 D) 384 E) 512

08 La figura muestra un dodecaedro regular. Calcular la medida del ángulo que forman $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

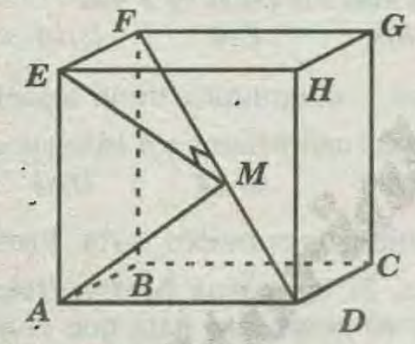


A) 36° B)45° C)60° D)72° E)30°

09 En un octaedro regular, de arista igual a **4 m**, calcular la distancia de un vértice al centro de gravedad de una de las caras opuestas.

A) 1 m B) 2 m C) 3 m D) 4 m E) 6 m

10 La figura se tiene un hexaedro regular de arista $\sqrt{3}$. Calcular el área de *AMB*.



A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{5}/2$ D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

11 En un tetraedro regular *OABC*, *G* es baricentro de la cara *ABC*, se prolonga $\overline{GB}$ hasta *T*, tal que: *GB = BT*. Calcular la medida del ángulo que forma $\overline{OT}$ y $\overline{BC}$.

A) 30° B) 37° C) 45° D)60° E) ArcCos(5/8)

12 Hallar la medida del radio de la esfera tangente a las aristas de un octaedro regular cuya arista mide "a".

A) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ C) $\frac{a}{2}$ D) $\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1)$ E) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

13 Calcular el volumen de una esfera que es tangente a una de las caras de un hexaedro regular y que contiene a los cuatro vértices de la cara opuesta, si la arista del hexaedro mide **4**.

A)18π B) $\pi\sqrt{3}$ C) 36π D) $27\pi\sqrt{2}$ E) $9\pi\sqrt{5}$

14 Calcular el volumen de un tetraedro regular, sabiendo que el radio de la esfera exinscrita mide $\sqrt{6}$.

A) $9\sqrt{2}$ B) $18\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) $12\sqrt{2}$

15 Se tiene dos poliedros en donde la diferencia entre la suma de las medidas de los ángulos de todas las caras es **3 960°** y la diferencia entre el número de aristas es **20**. Calcular la diferencia entre el número de caras.

A)6 B)9 C)12 D)15 E)11

16 Calcular el número de vértices que puede tener un poliedro convexo que se encuentra limitado por **4** triángulos, **6** pentágonos y **7** hexágonos, pero le falta un octágono para cerrar el poliedro.

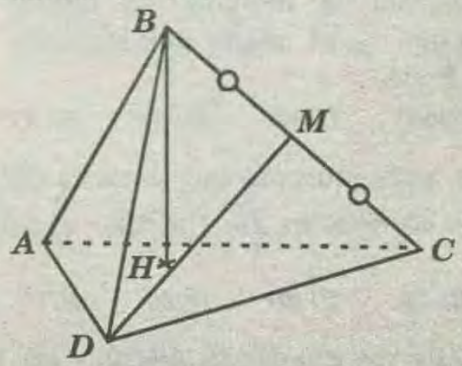
A)27 B)37 C)33 D) 43 E) 30

17 Dado un cubo de arista **"a"**, hallar el radio de la esfera inscrita en uno de los triedros del cubo y tangente a la esfera inscrita en dicho cubo.

A) $\frac{a}{2}(2+3\sqrt{3})$ B) $\frac{a}{2}(2-\sqrt{3})$ C) $(2-3\sqrt{3})a$

D) $\frac{a}{2}(4-\sqrt{3})$ E) $\frac{a}{2}(4-2\sqrt{3})$

18 En la figura: *ABCD* es un tetraedro regular de arista $\sqrt{7}$. Calcular la distancia entre $\overline{BH}$ y $\overline{DM}$. (*H* es ortocentro del $\triangle ACD$)



A) 1 B)2 C) 0,5 D) 1,5 E) 0,8

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)D	2)A	3)E	4)C	5)C	6)D	7)A	8)E	9)D	10)C
11)D	12)B	13)B	14)B	15)B	16)B	17)B	18)E	19)B	20)E

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)D	2)E	3)C	4)C	5)C	6)C	7)D	8)C	9)D	10)C
11)C	12)C	13)C	14)B	15)B	16)E	17)B	18)A		

OBJETIVOS :

Al finalizar la unidad el alumno será capaz de:

* *Explicar qué es un poliedro regular*

* *Reconocer los tipos de poliedros regulares.*

* *Número de caras, vértices, aristas, figuras que forman las caras, número de aristas concurrentes en un vértice, ... (puedes hacer una tabla)*

* *Área lateral , área total y Volumen.. Desarrollos de planos.*

* *Instrumentos, objetos, ... de la vida cotidiana.*

* *Teoremas: Teorema de Cavalieri en el espacio y Teorema de Euler.*

* *Aplicar correctamente los teoremas en la resolución de problemas.*

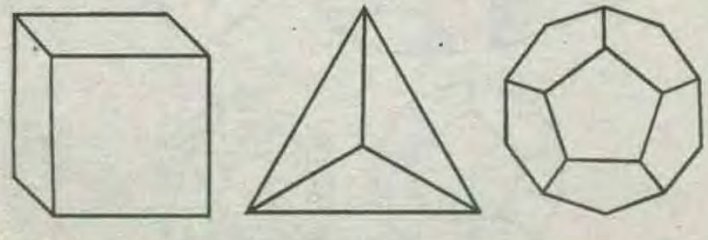
INTRODUCCION :

Existen *5 poliedros regulares convexos* y *por ahora* no se *conoce la época* en que se *descubrieron.*

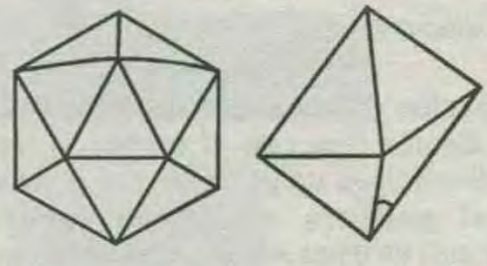
Hay una tradición que asigna el conocimiento de los poliedros a los pitagóricos y otros investigadores asignan el icosaedro y el odaedro a tetraedm En la época anterior a los pitagóricos ya se conocían de una forma aislada, como objetos físicos.

Se dice que fue Teeteto el primero en formular una teoría general. Reciben otro nombre: «Sólidos platónicos», que se atribuyen a Platón; para él los elementos últimos de la materia son los poliedros regulares. Consideraba que a cada elemento se le asigna uno de los 4 poliedros regulares .

.. Pero existe un quinto elemento (dodecaedro) al que Platón le atribuye esta frase: «Dios la ha utilizado para el todo, cuando dibujó el orden final».



Cubo (Tierra) *Tetraedro (Fuego)* *Dodecaedro (Universo)*



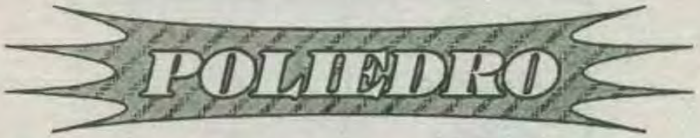
Icosaedro (Agua) *Octaedro (Aire)*

SÓLIDO GEOMÉTRICO

Es aquella porción del espacio separado del espacio inmediato por un conjunto de puntos que conforman la superficie del sólido.

Un sólido de acuerdo a su superficie puede ser, poliedro (pirámide , prisma , etc) o cuerpo redondo (esfera , cilindro etc).

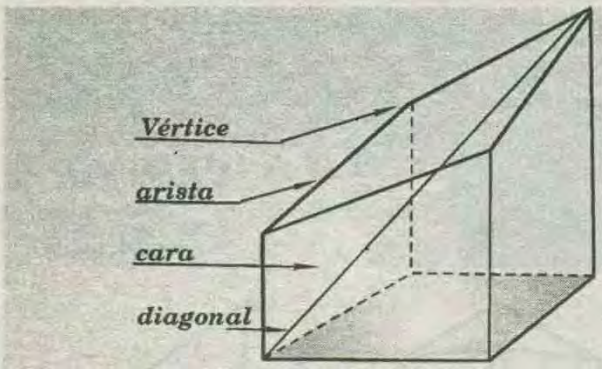
La medida de la superficie de un sólido es el área de la superficie del sólido, y la medida de la porción de espacio correspondientes a un sólido es el volumen del sólido.



Es aquel sólido geométrico cuya superficie está formada por cuatro o más regiones poligonales planas a las cuales se les denomina caras del poliedro.

Al lado común a dos caras se le denomina arista y al punto de concurrencia de las aristas , vértice del poliedro.

Es decir son aquellos sólidos limitados por o más planos secantes . Los poliedros más conocidos son las pirámides y los prismas .



La intersección de cada uno de estos planos con todo los demás que con el cierran o limitan al poliedro determinan un polígono. Los polígonos que limitan el políedro se llaman ***caras*** . Las intersecciones de estas se llaman ***aristas*** , los puntos en que se cortan las aristas reciben el nombre de ***vértices*** .

DIAGONAL DEL POLIEDRO :

Es el segmento cuyos extremos son dos vértices ubicados en caras distintas.

SECCIÓN PLANA :

Es la intersección del sólido con un plano secante a él. Los poliedros se nombran de acuerdo a su número de caras y pueden ser: tetraedro, pentaedro, hexaedro,..... si tienen cuatro, cinco, seis,....., caras respectivamente.

CLASIFICACIÓN DE LOS POLIEDROS

Los poliedros se clasifican de acuerdo al número de caras, y de acuerdo a la forma de los poliedros.

I) DE ACUERDO AL NÚMERO DE CARAS :

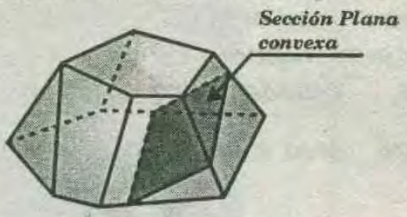
POLIEDRO	N° CARAS
Tetraedro	4
Pentaedro	5
Exaedro	6
Heptaedro	7
Octaedro	8
Nonaedro	9
Decaedro	10
Dodecaedro	12
Pentadecaedro	15
Icosaedro	20

II) SEGÚN LA FORMA DE LOS POLIEDROS :

Un poliedro es convexo cuando todas sus secciones plana son convexas, en caso contrario será no convexo.

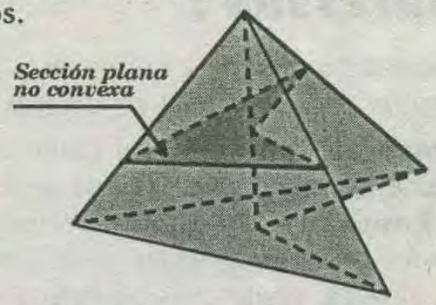
I) POLIEDRO CONVEXO :

Un poliedro se llama covexo , cuando todas sus caras están limitadas por polígonos covexos . También se dice poliedro covexo , cuando se traza una recta secante y en el poliedro se determina como máximo dos puntos de intersección , o cuando se prolonga una de las caras , el poliedro queda , ubicado en un solo semiplano .



II)POLIEDRO NO CONVEXO Ó CÓNCAVO :

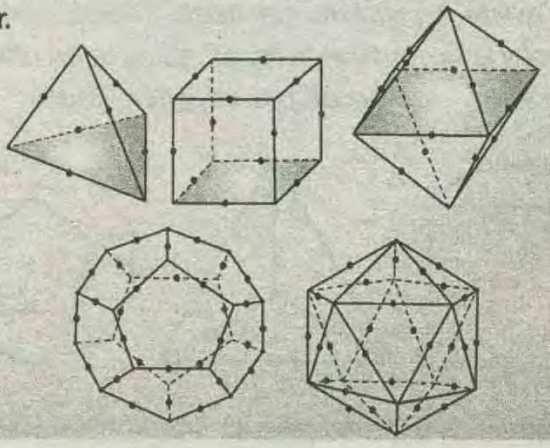
Un poliedro se llama no covexo , cuando las caras estan limitadas por polígonos no covexos , o al trazar una recta secante , el poliedro determina más de dos puntos de intersección , o al prolongar una de las caras , el poliedro queda ubicado en los dos semiplanos.



III) POLIEDRO REGULAR :

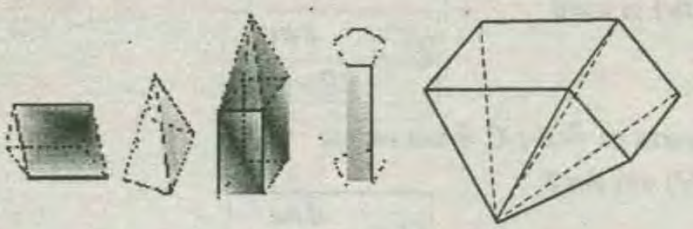
Un poliedro regular , es aquel que tiene por caras regiones poligonales regulares congruentes entre sí y en cada vértice concurren igual número de aristas.

* Solamente existen cinco poliedros regulares, los cuales son: tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular y el icosaedro regular.



IV) POLIEDRO IRREGULAR :

Un poliedro irregular , es aquel que no es regular .



TEOREMA DE EULER

I) En todo poliedro se cumple que el número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más dos unidades .

$$\boxed{C+V=A+2}$$

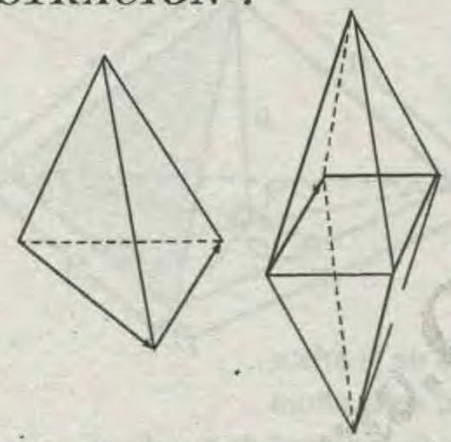
* Donde :

V = Número de vértices

C = Número de caras

A = Número de aristas

DEMOSTRACIÓN :



$$\left.\begin{array}{l}\text{Aristas recorridas} = V-1\\ \text{Aristas no recorridas} = C-1\end{array}\right\}+$$

Sumando miembro a miembro :

$$A=V+C-2$$

$$\Rightarrow \boxed{C+V=A+2}$$

II) En todo poliedro la suma de las medidas de los ángulos internos de todas sus caras es igual a $360°$ multiplicado por el número de vértices menos 2

$$\boxed{\sum_{caras}\sphericalangle = 360°(V-2)}$$

donde V=número de vértices.

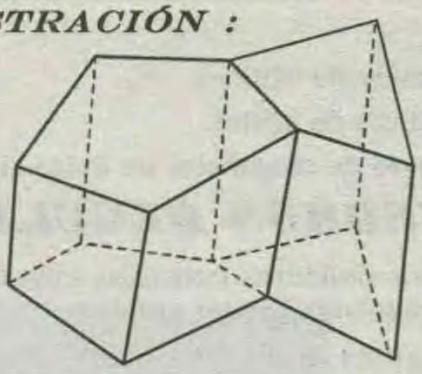
* Además :

$$\boxed{\sum_{caras}\sphericalangle = 360°(A-C)}$$

Donde : A = número de aristas

C = número de Caras

DEMOSTRACIÓN :



* Suma de los ángulos de la primera Cara:

$$180°(n_1-2)$$

* Suma de los ángulos de la segunda Cara :

$$180°(n_2-2)$$

* Suma de los ángulos de la tercera cara :

$$180°(n_3-2)$$

* Suma de los ángulos de la enésima cara $180°(n-2)$: tenemos que sumar para calcular la suma de los ángulos de todas las caras.

$$\sum_{caras}\sphericalangle = 180°(n_1-2)+180°(n_2-2)+180°(n_3-2)+...180°(n-2)$$

$$\sum_{caras}\sphericalangle = 180°[(n_1+n_2+n_3+.....n)-180°\times(2+2+2+2+.....)]$$

$(n_1+n_2+n_3+.....n)$ = Aristas repetidas = $2A$

$(2+2+2+2+.....)]$ = número de caras = C

$$\Rightarrow \sum_{caras}\sphericalangle = 180°(2A-2C)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{caras}\sphericalangle = 360°(A-C)}$$

* Por el teorema de Euler : $C+V=A+2 \Rightarrow V-2=A-C$

* Reemplazando :

$$\sum_{caras}\sphericalangle = 360°(V-2)$$

III) En todo poliedro cuyas caras tienen igual número de lados, el número de aristas es igual al semiproducto del número de caras y el número de lados de una cara .

$$\boxed{A=\frac{C\times N}{2}}$$

* A : Número de aristas

* C : Número de caras.

* N : Número de lados en común de todas las caras.

IV) En todo poliedro el número de diagonales es igual al valor de la combinación del número de vértices del poliedro tomados de dos en dos , menos el número de aristas y menos la suma de los números de diagonales de todas las caras de dicho poliedro .

$$\text{Número } D=\frac{V(V-1)}{2}-A-\text{ Número } DC$$

* Donde :

V = Número de vértices.

A = Número de aristas.

DC = Número de diagonales de todas las caras.

POLIEDROS REGULARES

Son aquellos poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares iguales entre sí .

* Los ángulos poliedros y los diedros son respectivamente iguales

* Todo poliedro regular se puede inscribir o circunscribirr en una esfera donde el centro de las esferas viene a hacer el centro del poliedro regular

TEOREMA :

Solamente existen **5** poliedros regulares tetraedro regular, exaedro regular , octaedro regular, dodecaedro regular , icosaedro regular

DEMOSTRACIÓN :

sea «n» el número de lados de las caras del poliedro, «m» el número de caras del ángulo sólido del poliedro , «A» el número de aristas del poliedro

Cumpliéndose : $2A = nC = mV$.....(I)

* pero por el teorema de Euler

$$C + V = A + 2 \text{.....(II)}$$

* Reemplazando (I) en (II) :

$$C+nCIm=nC+2+2$$

$$\Rightarrow 2mC+2nC- mnC=4m$$

$$\boxed{C=\frac{4m}{2(m+n)-mn}}$$

ECUACIÓN DIOFANTICA

I) si $n=3$

$$\boxed{C=\frac{4m}{6-m}}$$

Para $m=3$; $C=4$ (tetraedro regular)

Para $m=4$; $C=8$ (octaedro regular)

Para $m=5$; $C=20$ (Isocaedro regular)

Para $m=6$; C=no existe

II) si $n=4$

$$\boxed{C=\frac{4m}{8-2m}}$$

para $m=3$; $C = 6$ (Exaedro regular o cubo)

Para $m = 4$; $C =$ No existe

III) si $n=5$

$$\boxed{C=\frac{4m}{10-3m}}$$

para $m =3$; $C = 12$ (Dodecaedro Regular)

para $m = 4$; $C =$ no existe

IV) si $n=6$

$$\boxed{C=\frac{4m}{12-4m}}$$

para $m = 3$; $C =$ no existe

V) sin $n=7$

$$\boxed{C=\frac{4m}{14-5m}}$$

para $m =3$; $C=$ no existe

TETRAEDRO REGULAR

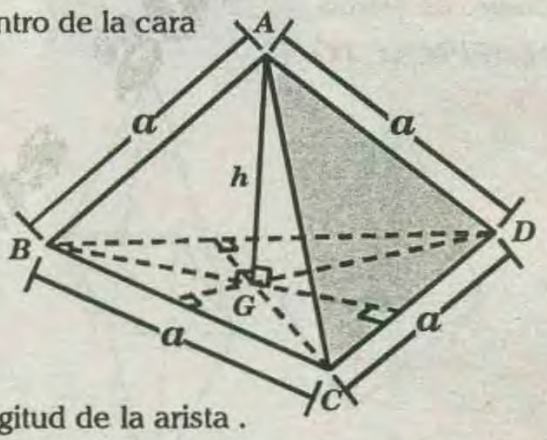
Es aquel poliedro regular, que se caracteriza por tener **4** caras que son regiones triangulares equiláteras.

NOTACIÓN :

Tetraedro regular $A - BCD$.

$\overline{AG}$: altura

G : Centro de la cara BCD .



a : longitud de la arista .

h : longitud de la altura .

Cálculo de la longitud de su altura :

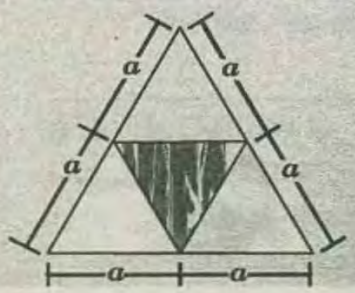
$$\boxed{H=\frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

* G : baricentro de la región triangular BCD

Área de la superficie (A) : $\boxed{A=a^2\sqrt{3}}$

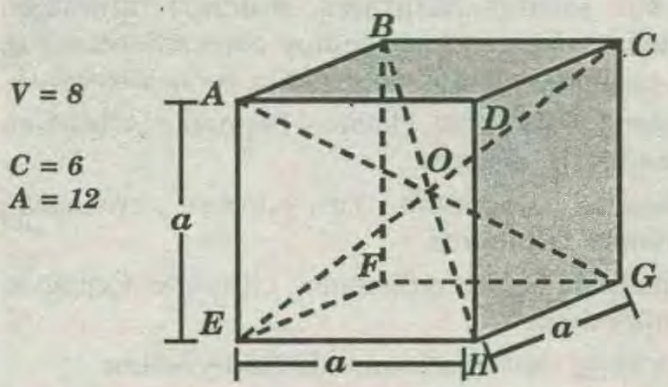
* *Volumen(V)* : $\boxed{V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE DEL TETRAEDRO REGULAR



HEXAEDRO REGULAR O CUBO

Es aquel poliedro regular que tiene por caras regiones cuadradas congruentes entre sí .



NOTACIÓN :

Hexaedro regular ***ABCD – EFGH***

Diagonal del hexaedro : $\overline{AG}$, $\overline{BH}$, $\overline{CE}$ y $\overline{DF}$

a : longitud de la arista .

O : centro del hexaedro regular.

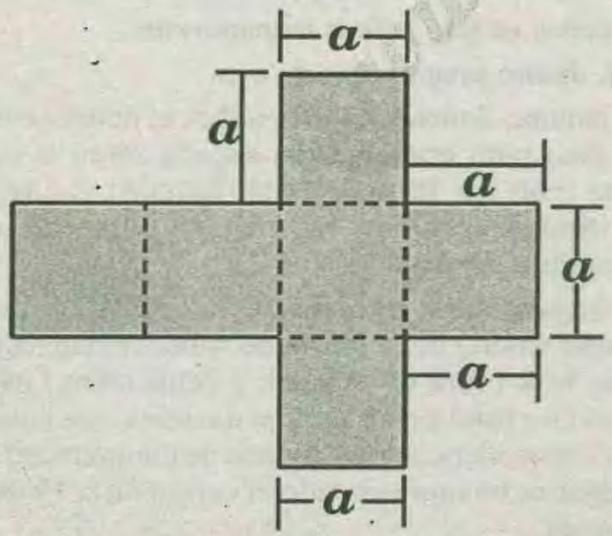
* Luego : $AG=BH=CE=DF=a\sqrt{3}$

Diagonal : $\boxed{AG=a\sqrt{3}}$

Área de la superficie (A) : $\boxed{A=6a^2}$

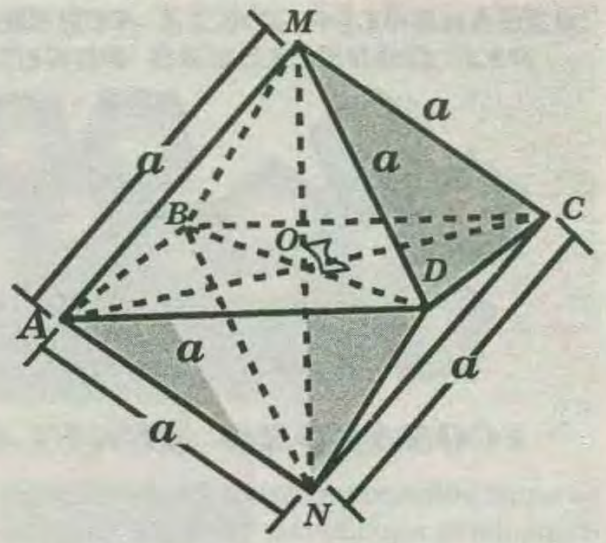
Volumen (V) : $V=a^3$

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE DEL HEXAEDRO REGULAR



OCTAEDRO REGULAR

Es aquel poliedro regular limitado por ocho regiones triangulares equiláteras. Tiene *3* diagonales, las cuales son de igual longitud y son perpendiculares en sus puntos medios .



Notación : Octoedro regular ***M – ABCD – N***

Diagonal : $\boxed{MN=a\sqrt{2}}$

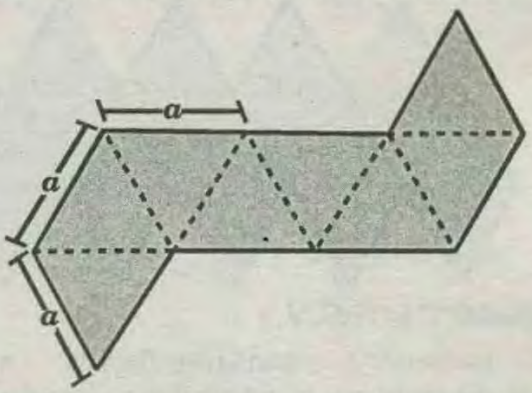
Área de superficie (A): $\boxed{A=2a^2\sqrt{3}}$

Volumen : $\boxed{V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}}$

O : centro del octaedro regular.

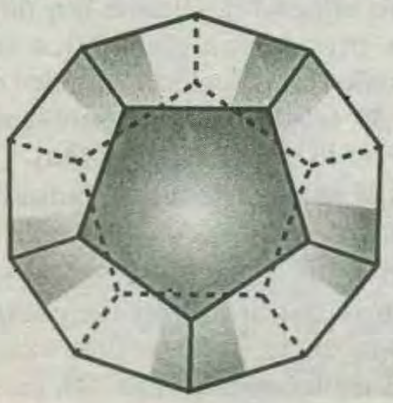
ABCD ; AMCN ; BMDN: son cuadrados.

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE DEL OCTAEDRO REGULAR



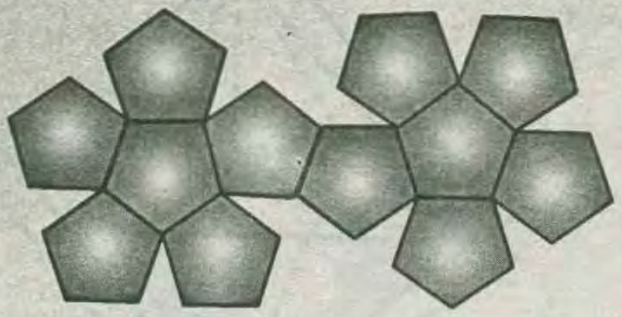
DODECAEDRO REGULAR

Es aquel poliedro regular limitado por doce regiones pentagonales regulares. Tiene cien diagonales.



V = 20
C = 12
A = 30

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE DEL DODECAEDRO REGULAR

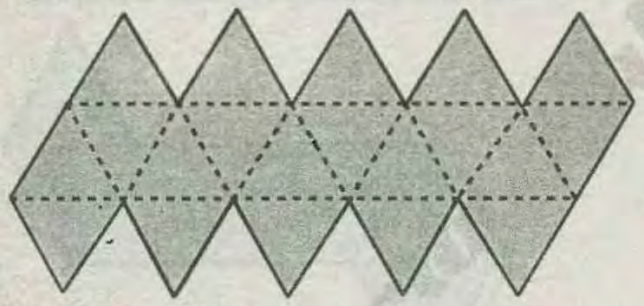


ICOSAEDRO REGULAR

Es aquel poliedro regular limitado por veinte regiones triangulares equiláteras. Tiene ***36*** diagonales.

V = 12
C = 20
A = 30

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE DEL ICOSAEDRO REGULAR



OBSERVACIÓN :

Los poliedros arquimedianos aparecen continuamente en la naturaleza y también el ser humano los ha utilizado para ornamentaciones, en farolas, lámparas, etc. Los mismos balones de fútbol han estado hechos siempre con ***12*** pentágonos y ***20*** hexágonos (icosaedro truncado), aunque hoy día se han cambiado por otra forma poliédrica más redondeada (el pequeño rombicosidodecaedro) que tiene ***20*** triángulos , ***30*** cuadrados y ***12*** pentágonos (ocupa más del ***94%*** de la esfera circunscrita).

En 1996 se concedió el premio Nobel de Química a tres investigadores por el descubrimiento del ***fullereno*** cuya forma es un icosaedro truncado.

Los panales de abejas tienen forma de prismas hexagonales; El virus de la poliomelitis y de la verruga tienen forma de Icosaedro; Las células del tejido epitelial tienen forma de Cubos y Prismas; Los ***Radiolarios*** presentan formas de Octaedros con apéndices, Icosaedros regulares y dodecaedros; etc.

En sus formas naturales, muchos minerales cristalizan formando poliedros característicos. Así, por ejemplo, algunos de los más conocidos son:

* Galena , Sal Gema , Platino y Diamante , cristalizan formando Hexaedros.

* Fluorita , Magnetita , Oro y Cobre , cristalizan formando Octaedros.

* Cinabrio , Calcita o Bismuto , cristalizan formando Romboedros.

* La Pirita cristaliza formando Dodecaedros.

* El Azufre forma Prismas Rómbicos.

* El Lapislázuli cristaliza en forma de Rombododecaedros.

* El Azufre adquiere forma de Bipirámide Rómbica y la Discrasita y el Cuarzo de Bipirámide Hexagonal.

En Literatura también hay algunas muestras de utilización de poliedros, como en el soneto de Rafael Alberti:

A ti , maravillosa disciplina, media, extrema razón de la hermosura, que claramente acata la clausura viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina, áurea sección, celeste cuadratura, misteriosa fontana de mesura que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños, angulares, flor de las cinco formas regulares, dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente

Tu canto es una esfera transparente.

A ti, divina proporción de oro.

En pintura, ***Salvador Dalí*** , utiliza el dodecaedro en un óleo para enmarcar su escena sobre la última cena (con sus ***12*** Apóstoles). También lo utiliza en su obra Crucifixión (la cruz se compone de ***8*** hexaedros adosados)

En arquitectura, el mausoleo de Gol Gumbaz de Bijapur (India) tiene forma de cubo, el Planetario de New York (obra de Polshek y Schliemann) es otro cubo de cristal de ***29*** metros de arista que contiene una esfera blanca de ***27*** metros de diámetro, en cuyo interior se ha representado el centro de la Tierra y el Espacio.

Escher también utilizó poliedros regulares (tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro) en sus famosos dibujos, así como Leonardo da Vinci (ucocedrón abscisus vacuus)

En Escocia se han encontrado piedras de formas poliédricas que tiene más de ***4000*** años.

POLIEDROS CONJUGADOS (DUALIDAD)

Dos poliedros son conjugados o duales cuando el número de caras de uno de ellos es igual al número de vértices del otro .

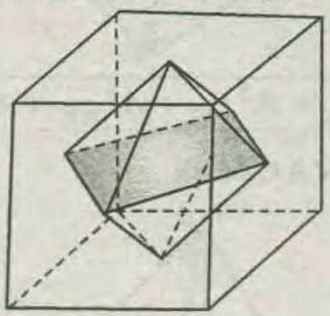
♠ Todo poliedro puede ser inscrito en su conjugado.

♠ El Tetraedro regular es conjugado consigo misma, es decir en un tetraedro regular solamente se puede inscribir una esfera y un tetraedro regular

♠ El exaedro regular y el octaedro regular son conjugados , es decir en el exaedro regular solamente se puede inscribir una esfera y el octaedro regular y viceversa .

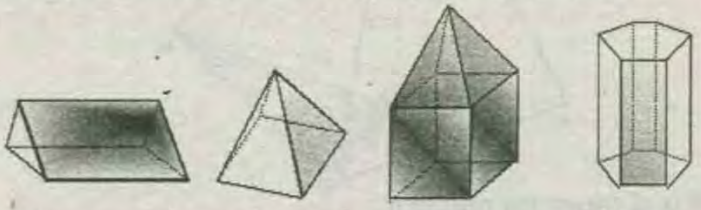
♠ El dodecaedro regular y el icosaedro regular son conjugados

Los centros de las caras de un poliedro regular, son, los vértices de su poliedro conjugado inscrito en él.

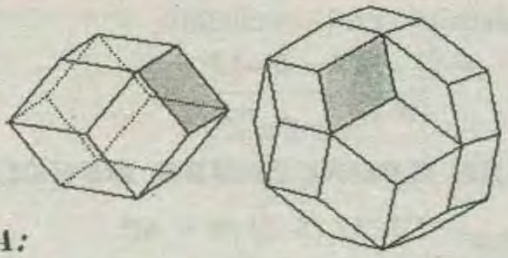


EJERCICIO :

Dibuja los duales de los siguientes poliedros:



Habrás comprobado que ***los duales de los poliedros regulares son poliedros regulares***. No ocurre así con los arquimedianos , ya que , al tener éstos caras con distinto número de lados, sus duales tendrán vértices de distinto orden y , por tanto , no pueden ser arquimedianos. Además , al tener un arquimediano todos los vértices del mismo orden, las caras de su dual serán iguales. Estos poliedros con todas sus caras iguales pero no regulares y que tienen vértices de distinto orden, se llaman ***poliedros de Catalán*** en honor al matemático francés que los descubrió ***(1865)*** y se presentan habitualmente en cristales. Entre ellos merecen especial mención el rombododecaedro (dual del cuboctaedro) y el triacontraedro rómbico (dual del Icosidodecaedro).



NOTA:

Si en un cubo le añadimos, a cada una de sus caras, la pirámide que tiene por base dicha cara y por vértice el centro del cubo, se obtiene también el rombododecaedro. Si hacemos lo mismo con el dodecaedro, obtenemos el triacontraedro rómbico. Puedes intentar construirlos con el polydron.

NÚMERO DE DIAGONALES DE UN POLIEDRO

$$\boxed{\#D_{POLIEDRO} = C_2^V - \#d_{caras} - A}$$

donde :

$\#D$ poliedro = Número de diagonales del poliedro

C_2^V = Combinación del número de vértices de dos en dos .

$\#d_{caras}$ = Número de diagonales de todas las caras del poliedro

A = # de aristas del poliedro

PARA EL TETRAEDRO REGULAR :

$\#D_{CARAS} = 0$

$A = 6$

$C_2^4 = 6$

* Reemplazando en la ecuación :

$\#D = 6 - 0 - 6 = 0$

$$\boxed{\#D_{tetraedro} = 0}$$

PARA EL EXAEDRO REGULAR :

$\#D_{CARAS} = 2\,(6) = 12$

$A = 12$

$$C_2^8 = \frac{8!}{6!\,2!} = 28$$

* remplazando en la ecuación :

$\#D = 28 - 12 - 12 = 4$

$$\boxed{\#D_{cubo} = 4}$$

PARA EL OCTAEDRO REGULAR :

$\#D_{CARAS} = 0$

$A = 12$

$$C_2^6 = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$$

* Reemplazando en la ecuación

$$\#D = 15 - 0 - 12 = 3$$

$$\boxed{\#D_{octaedro} = 3}$$

PARA EL DODECAEDRO REGULAR :

$$\#D_{CARAS} = 12\ (5)\ (5-3)\ /2 = 60$$

$$A = 30$$

$$C_2^{20} = \frac{20!}{18!\,2!} = 190$$

* Reemplazando en la ecuación :

$$\#D = 190 - 60 - 30 = 100$$

$$\boxed{\#D_{dodecaedro} = 100}$$

PARA EL ICOSAEDRO REGULAR :

$$\#D_{CARAS} = 0$$

$$A = 30$$

$$C_2^{12} = \frac{12!}{10!\,2!} = 66$$

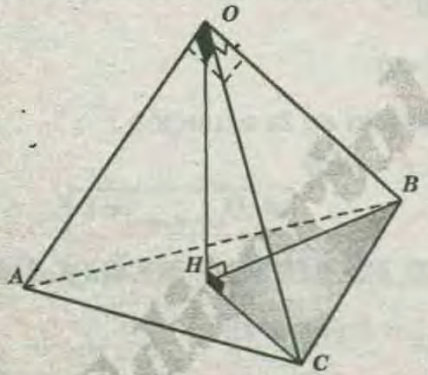
* Reemplazando en la ecuación :

$$\#D = = 66 - 60 - 30 = 36$$

$$\boxed{\#D_{Icosaedro} = 36}$$

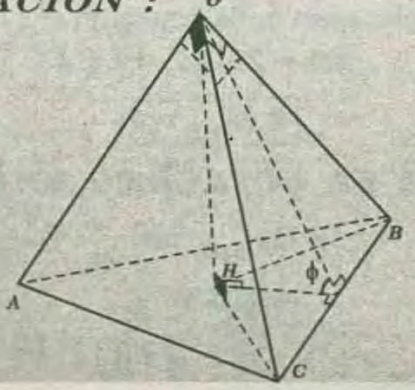
TEOREMA :

En todo tetraedro trirectángulo se cumple que el cuadrado del área de una cara cateto es igual al área de la cara hipotenusa multiplicado por el área de la proyección de la cara cateto sobre la cara hipotenusa.



$$\boxed{A^2_{BOC} = A_{ABC}(A_{BHC})}$$

DEMOSTRACIÓN :



* aplicamos el área de la proyección de un triángulo

$$A_{BHC} = A_{OBC}(\cos\phi)$$

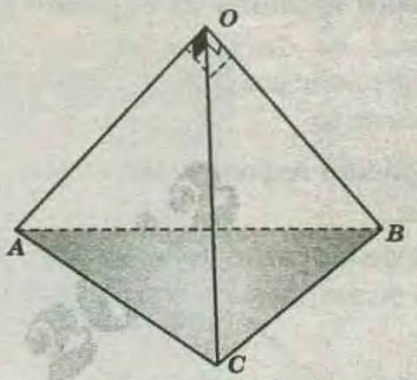
$$A_{BOC} = A_{ABC}(\cos\phi)$$

* Dividiendo : :

$$\frac{A_{BHC}}{A_{BOC}} = \frac{A_{BOC}}{A_{ABC}} \Rightarrow \boxed{A^2_{BOC} = A_{ABC}(A_{BHC})}$$

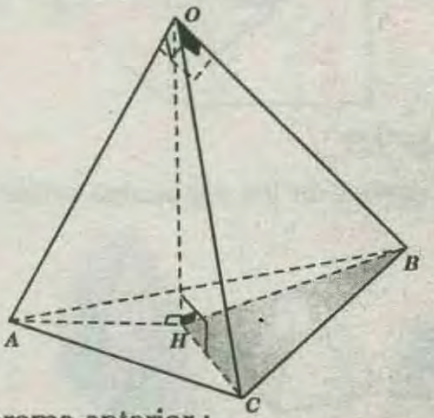
TEOREMA :

En todo tetraedro trirectángulo se cumple que el cuadrado de la cara hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las áreas de las caras catetos.



$$\boxed{A^2_{ABC} = A^2_{AOC} + A^2_{BOC} + A^2_{AOB}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* Por el teorema anterior :

$$A^2_{AOC} = A_{ABC}\,(A_{AHC})$$

$$\Rightarrow A^2_{BOC} = A_{ABC}\,(A_{BHC})$$

$$\Rightarrow A^2_{AOB} = A_{ABC}\,(A_{AHB})$$

$$\Rightarrow A^2_{AOC} + A^2_{BOC} + A^2_{AOB} = A_{ABC}$$

$$(A_{AHC} + A_{BHC} + A_{AHB})$$

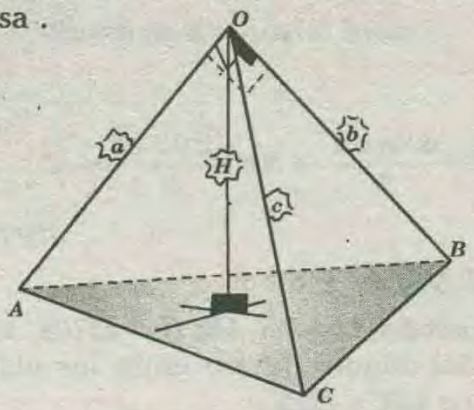
* pero : $A_{ABC} = A_{AHC} + A_{BHC} + A_{AHB}$)

$$\Rightarrow A^2_{AOC} + A^2_{BOC} + A^2_{AOB} = A^2_{ABC}$$

TEOREMA :

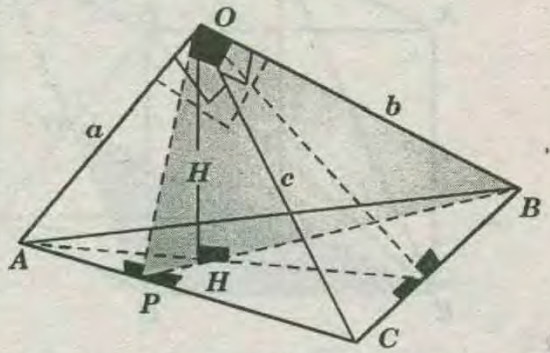
En todo tetraedro trirectángulo se cumple que la suma de las inversas de los cuadrados de las aristas que concurrren en el triedro trirectángulo es igual a

la inversa del cuadrado de la altura relativa a la cara hipotenusa .



$$\boxed{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{H^2}}$$

DEMOSTRACIÓN :



* $\triangle$ ***AOC*** : Por relaciones métricas :

$$\frac{1}{OP^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

como ***OB*** $\perp$ plano ***AOC*** luego ***OB*** $\perp$ ***OP***

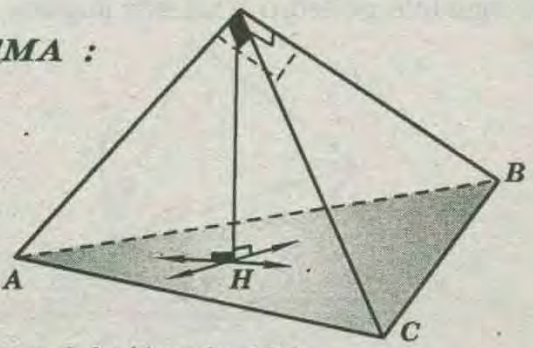
$\triangle$ ***POB*** : por relaciones métricas

$$\frac{1}{H^2}=\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{b^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

* Reemplazando ***(I)*** en ***(II)*** :

$$\frac{1}{H^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

TEOREMA :



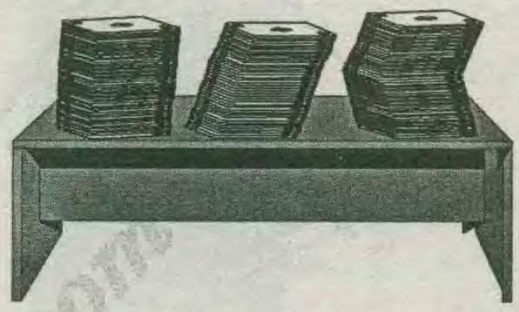
H : ortocentro del triángulo ***ABC***

TEOREMA :

El área lateral de un prisma triangular oblicuo es igual al producto del perímetro de su base por la altura .

POSTULADO DE CAVALIERI

Si imaginamos un sólido cortado en rebanadas del mismo espesor ***«h»*** el volumen de cada rebanada sera aproximadamente igual (en algunos casos exactamente igual) al producto de la área de su base por el espesor ***«h»*** , el error de la aproximación puede hacerse tan pequeño como se quiera tomando ***«h»*** suficientemente pequeño es decir que el volumen de dos rebanadas delgadas cortadas a igual distancia del plano fijo tengan aproximadamente el mismo volumen y que los volumenes totales de dichos sólidos sean iguales. Podemos dar un ejemplo con un paquete de cartas colocadas sobre una mesa

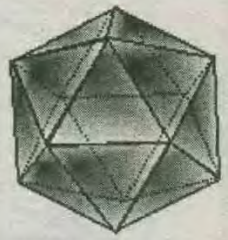


con las cartas parejas ó con las caras desplazadas de diversas manera en todos los casos el volumen del paquete es siempre el mismo e igual a la suma de los volumenes de las cartas individuales.

DELTAEDROS

Los deltaedros nacen de la idea de estudiar poliedros donde lo que falle para una regularidad total sea el que los vértices no tengan que ser iguales, pero las caras deban seguir siendo polígonos regulares. La primera consecuencia es que estos poliedros no tienen que ser convexos. Si les ponemos la condición de convexidad entonces las caras deben ser por cuestiones de redondez triángulos equiláteros. Un deltaedro es un poliedro cuyas caras son todas triángulos equiláteros. Mientras que existen infinitos deltaedros , el número de deltaedros convexos se ve limitado porque en los vértices sólo pueden coincidir tres, cuatro o cinco triángulos, y así nos encontramos desde el de cuatro caras con todos los vértices de tres (el tetraedro), hasta el de ***20*** caras con todos los vértices de cinco (icosaedro). En la lista el número de caras aumenta de dos en dos debido a su construcción por recurrencia, ya que para hacer el siguiente hay que abrir el anterior por dos aristas consecutivas, lo cual crea realmente un agujero en forma de rombo (no plano), que exige dos triángulos para coserlo. La lista va pues saltando de dos caras en dos caras con la sorpresa de que no existe el de ***18***. Una posible justificación de esta ausencia es la observación de que en el de ***16*** caras los dos vértices de orden ***5*** están separados por más de dos aristas. (También se puede pensar qué es lo que pasa al intentar quitar dos caras al icosaedro)

Deltaedro-16



Icosaedro
Deltaedro-20

PROBLEMAS RESUELTOS

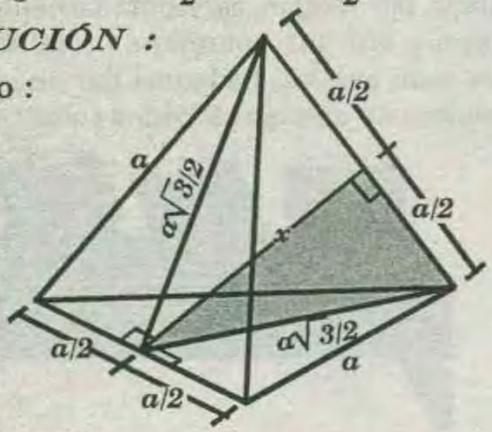
PROBLEMA 1 :

En un tetraedro regular de arista a; hallar la distancia entre dos aristas opuestas.

A) $\frac{a}{2}$ B) $\frac{2}{3}a$ C) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Por el teorema de Pitágoras en el triángulo sombreado:

$$x^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

* Efectuando:

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

En un poliedro de seis caras y doce aristas. Hallar la suma de los ángulos que las aristas forman en los vértices.

A)2880° B)1800° . C)2160° D)2400°

RESOLUCIÓN :

* Por dato : $C = 6 \quad A = 12$

* Por Euler : $C + V = A + 2$

* Reemplazando : $6+V=12+2 \Rightarrow V=8$

* Entonces la suma de los ángulos que forma las aristas y los vértices es :

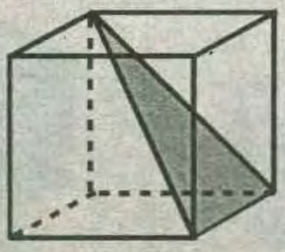
$$360°(V-2) = 360°(8-2) = 2160°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

En cubo mostrado de diagonal igual a **6** , calcular el área sombreada .

A) 1
B) 2
C) $\sqrt{2}$
D) 3
E) 5

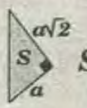


RESOLUCIÓN:

* Por dato, tenemos la media de la diagonal:

$$d=6 \Rightarrow a\sqrt{3}=6 \Rightarrow a=\sqrt{2}$$

* Se pide :



$$S=\frac{a\times a\sqrt{2}}{2} \rightarrow S=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

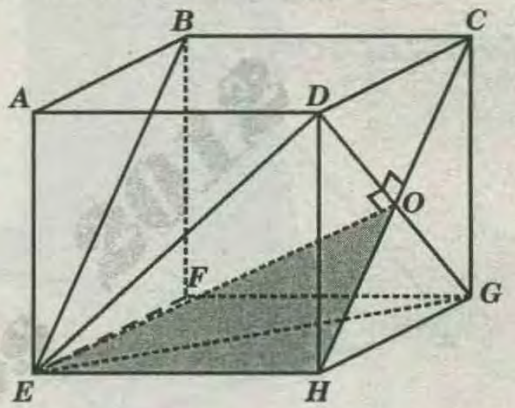
RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

En un hexaedro regular **ABCD – EFGH**, calcule la medida del ángulo diedro entre los planos que contienen a **EBC** y **EDG** .

A) 60° B) 75° C) 90° D) 45° E) 53°

RESOLUCIÓN :



$\overline{DG} \perp$ a $\overline{CH}$ y $\overline{OE}$ contenidos en el plano **EBCH** (condición necesaria y suficiente para que $\overline{DG}$ sea $\perp$ al plano **EBCH**.

Por teorema que dice :

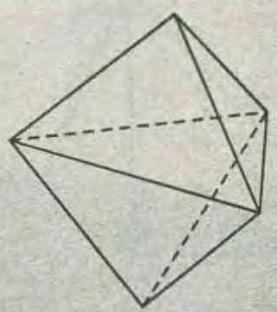
Si una recta es perpendicular a un plano , todo plano que contiene a dicha recta es perpendicular al plano dado. ⇒ Plano **EDG** $\perp$ Plano **EBCH**

* Luego la medida del ángulo diedro entre los planos que contienen a **EBC** y **EDG** es **90°**.

RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

En el siguiente poliedro ¿Cuántos ángulos poliedros tiene?.



A)1 B)3 C)4 D)5 E)6

RESOLUCIÓN :

Según la figura , tiene **5** ángulo poliedros.

RPTA: «D»

PROBLEMA 6 :

En un poliedro se cumple que el número de caras es igual al número de vértices.

Si la razón entre el número de aristas y el número de caras es *12/7*, calcule la suma de los números de caras, aristas y vértices .

A) 26 *B) 52* *C) 24* *D) 36* *E) 30*

RESOLUCIÓN :

* Por condición del problema :

$$C = V\ ;\ \frac{A}{C} = \frac{12}{7} \Rightarrow A = 12n \ \text{ y } \ C = 7n$$

* Se pide hallar : «$C + A + V$»

* Por Euler: $C + V = A + 2$

$$\Rightarrow 7n + 7n = 12n + 2 \Rightarrow 2n = 2 \rightarrow n = 1$$

* Luego : $C = 7\ ;\ V = 7\ ;\ A = 13$

* Se pide: $7 + 12 + 7 = 26$

RPTA : "A"

PROBLEMA 7 :

En un poliedro,la región entre el número de aristas y el número de caras es *5/3*.

Calcule el número de caras, si el número de vértices es mayor que *6* y menor que *10*.

A) 3 *B) 9* *C) 5* *D) 6* *E) 8*

RESOLUCIÓN :

* Por condición del problema :

$$\frac{A}{C} = \frac{5}{3} \Rightarrow A = 5n\ ;\ C = 3n$$

Se pide hallar «C» , si $6 < V < 10$.

* Por Euler : $C + V = A + 2$

$$3n + V = 5n + 2 \Rightarrow V = 2n + 2$$

$$\Rightarrow 6 < 2n + 2 < 10$$

$$\Rightarrow 4 < 2n < 8 \Rightarrow 2 < n < 4$$

«n» es entero: $n = 3$

* Luego : $C = 3(3) \Rightarrow C = 9$

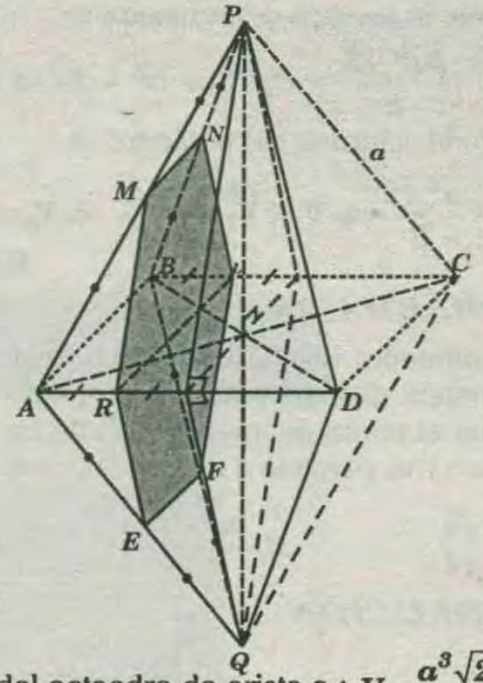
RPTA : "B"

PROBLEMA 8 :

El volumen de un octaedro regular $P - ABCD - Q$ es $72\sqrt{2}\,u^3$.

Calcule el área de la sección que determina por un plano paralelo a $\overline{PQ}$ y $\overline{AB}$, si contiene al punto medio de $\overline{AP}$.

RESOLUCIÓN :

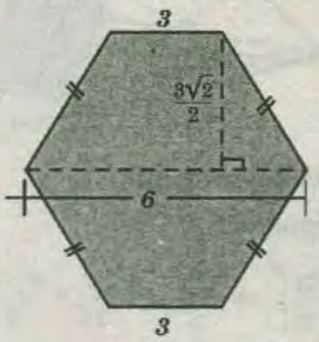


* Volumen del octaedro de arista a : $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

* Por condición :

$$\frac{a^3\sqrt{2}}{3} = 72\sqrt{2} \Rightarrow a^3 = 2^3 \times 3^3 \Rightarrow a = 6$$

* Sección :



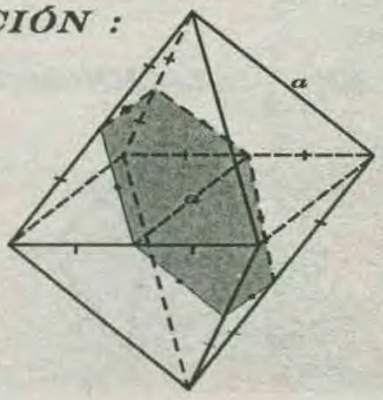
* Área pedido: $S = 2\times\left[\frac{3+6}{2}\right]\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}\right] \Rightarrow S = \frac{27\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA 9 :

En un octaedro regular $M - ABCD - N$. el área de la región determinada por un plano que contiene el punto medio de $\overline{MB}$ y paralelo a la cara MCD es $9\sqrt{3}\,u^2$. Calcule el volumen del octaedro .

A) $32\sqrt{3}\,u^3$ *E)* $32\sqrt{6}\,u^3$ *C)* $30\sqrt{3}\,u^3$

RESOLUCIÓN :



* Área de la sección determinada es :

$$\frac{3a^2\sqrt{3}}{8} = 9\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 24 \Rightarrow a = 2\sqrt{6}$$

* Luego el volumen del octaedro es :

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V = \frac{(2\sqrt{6})^3\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V = 32\sqrt{3}\mu^3$$

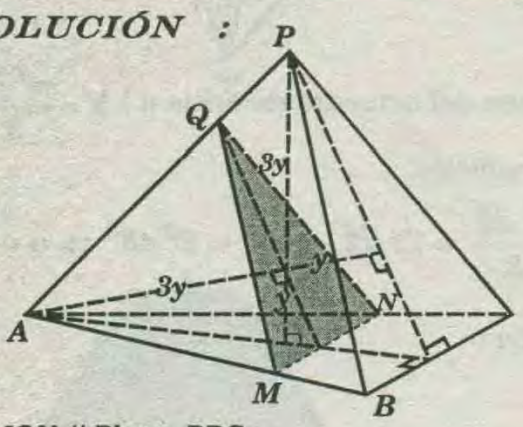
RPTA : "A"

PROBLEMA 10 :

En un tetraedro regular de arista a , calcule el área de la región determinada por un punto plano que contiene al punto de intersección de las alturas del tetraedro y es paralelo a una de las caras.

A) $5a^2\frac{\sqrt{3}}{16}$ B) $\frac{9a^2\sqrt{3}}{64}$ C) $4a^2\frac{\sqrt{3}}{25}$

RESOLUCIÓN :



Plano *MQN* // Plano *BPC*

Por semejanza :

$$\frac{S_{MQN}}{S_{BPC}} = \left[\frac{3y}{4y}\right]^2 \Rightarrow S_{MQN} = \frac{9}{16}\times\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{MQN} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{64}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 11 :

El segmento que une los puntos medios de dos arista concurrentes de un tetraedro regular mide 3m. hallar el área total de tetraedro y su volumen respectivaménte.

A) $\sqrt{3}$ y $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{5}$ y 5 C) 6 y 8

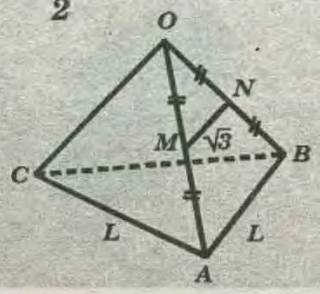
D) $2\sqrt{3}$ y 9 E) $12\sqrt{3}$ y $2\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN :

* En el $\triangle OAB$:

$$MN = \frac{L}{2} \Rightarrow L = 2MN = 2(\sqrt{3})$$

* Se pide :



$$A = L^2\sqrt{3} = (2\sqrt{3})^2.3 = 12\sqrt{3}m^2$$

$$V = \frac{L^3\sqrt{2}}{12} = \frac{(2\sqrt{3})^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = 2\sqrt{6}m^3$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 12 :

Calcular el número de vértices de un poliedro convexo, si la suma de medidas de los ángulos internos de todas las caras es 1140°

A) 5 B) 6 C) 8 D) 7 E) 9

RESOLUCIÓN :

* Por dato : $S_{\sphericalangle caras} = 1440^\circ$

$$\rightarrow 360^\circ(V-2) = 1440^\circ$$

$$\rightarrow V - 2 = 6 \rightarrow V = 8$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 13 :

Si un poliedro convexo . La suma del número de caras más del número de vértices y el número de aristas es K entonces su número de arista es :

A) $\frac{K-2}{2}$ B) $\frac{K+2}{2}$ C) $\frac{K-1}{2}$ D) $K-1$ E) $\frac{K+1}{4}$

RESOLUCIÓN :

* Por dato : $C + V + A = K$ .....(I)

* Pero por el teorema de Euler:

$$C + V = A + 2 \text{ .....(II)}$$

* De (II) en (I) :

$$A + 2 + A = K \rightarrow A = \frac{K-2}{2}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 14 :

Un poliedro esta formado por **6** regiones triangulares, **8** regiones cuadrangulares y **10** regiones rectangulares. Entonces, el número de vértices del poliedro es:

A) 23 B) 26 C) 28 D) 30 E) 32

RESOLUCIÓN :

* Por dato :

$$\text{Número de caras} = 6\triangle + 8\square + 10\square \rightarrow C = 24$$

* Entonces : $\rightarrow A = \frac{3(6)+4(8)+4(10)}{2} = 45$

* Luego por el teorema de Euler:

$$C + V = A + 2 \Rightarrow 24 + V = 45 + 2 \Rightarrow V = 23$$

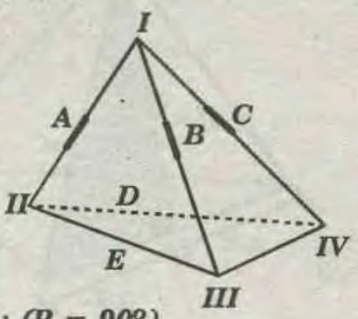
RPTA : "A"

PROBLEMA 15 :

La suma de todos los ángulos diedros de un tetraedro cualquiera, está comprendido entre:

A) 4 rectos y 12 rectos B) 4 rectos y 24 rectos
C) 6 rectos y 16 rectos D) 8 rectos y 24 rectos
E) 2 rectos y 6 rectos

RESOLUCIÓN :



* En los triedros : $(R = 90°)$
* Luego :

$$I)\ 2R < A + B + C < 6R$$
$$II)\ 2R < A + E + D < 6R$$
$$III)\ 2R < E + B + F < 6R$$
$$IV)\ 2R < C + D + F < 6R$$

* Sumando: $8R<2(A+B+C+D+E+F)<24R$

$\rightarrow 4R <$ suma de $\measuredangle_s$ diedros $< 12R$

RPTA : "A"

PROBLEMA 16 :

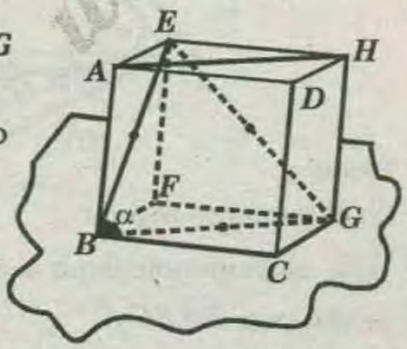
En un cubo las caras opuestas son $ABCD$ y $EFGH$, siendo las aristas que las conectan $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, y $\overline{DH}$. El ángulo que forman $\overline{BE}$ con $\overline{AH}$ mide.

A)30° B)45° C)60° D)75° E)90°

RESOLUCIÓN :

* El ángulo de cruce entre las aristas alabeadas BE y AH, es el mismo que forman $\overline{BE}$ y $\overline{BG}$, (α), ya que $\overline{BG} \parallel \overline{AH}$.
* Trazamos además EG
* Luego : $BE = BG = EG$, siendo equilátero el

$\Delta BEG \rightarrow \alpha = 60°$



RPTA : "C"

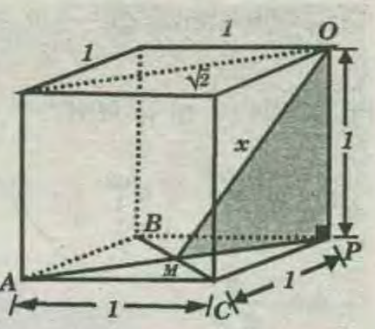
PROBLEMA 17 :

En un cubo de un metro de arista, la distancia del centro de una cara a cualquiera de los vértices de la cara opuesta mide:

A) 5m B) 1m C) $\sqrt{6}/2m$ D)5/2m E)6m

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Como $AP=\sqrt{2}$

$$\Rightarrow MP=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

* Luego por el teorema de Pitágoras en $\measuredangle MPO$:

$$x^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

RPTA : "C"

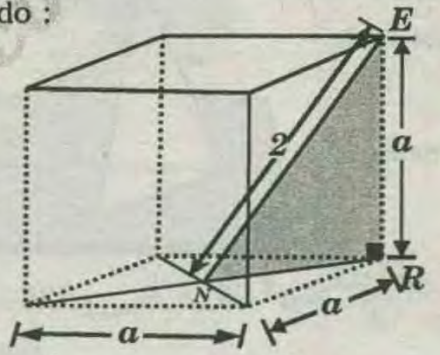
PROBLEMA 18 :

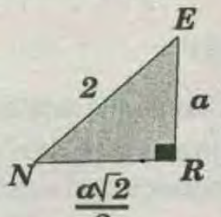
Calcular el área total de un hexaedro regular, sabiendo que la distancia de uno de sus vértices al centro de una cara opuesta es de $2m$.

A)48m² B)45m² C)25m² D)16m²

RESOLUCIÓN :

* Graficando :
* Del :





* Por el teorema de Pitágoras $a^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=2^2$
* Efectuado, se obtiene : $a^2=\frac{8}{3}$
* Se pide el área total, es decir : $A=6a^2=6\left(\frac{8}{3}\right)=16$

RPTA : "D"

PROBLEMA 19 :

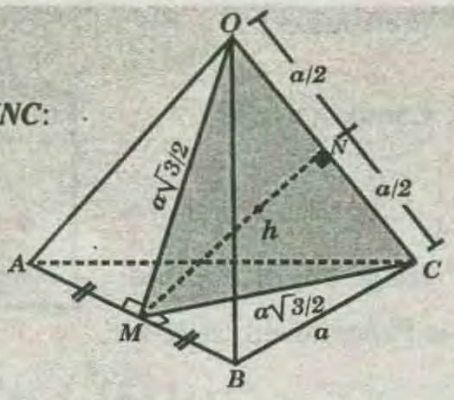
En un tetraedro de arista a; el área de la sección que produce un plano de simetría es:

A) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ E) $2a^2$

RESOLUCIÓN :

* Graficando :

* Por el teorema de Pitágoras en el $\triangle MNC$:



$$h^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow h=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

* Se pide el área: $A_{MOC}=\frac{1}{2}(a)\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

RPTA : "B"

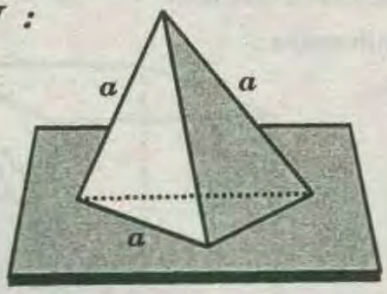
PROBLEMA 20 :

Hallar el área total de un tetraedro regular, siendo la suma de las longitudes de sus aristas **36cm** .

A) $36cm^2$ **B)** $6\sqrt{3}cm^2$ **C)** $36\sqrt{3}cm^2$

RESOLUCIÓN :

* Cada arista mide :



$$a=\frac{36m}{6}=6cm$$

* Luego :

$$S_{total}=\frac{4a^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}\Rightarrow S_{total}=36\sqrt{3}cm^2$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 21 :

Un tetraedro **ABCS** tiene sus aristas $\overline{SA}$, $\overline{SB}$ y $\overline{SC}$ perpendiculares entre si y miden **4 ; 5** y **6** metros, respectivamente . Entonces , el volumen de tetraedro, en m^3; será :

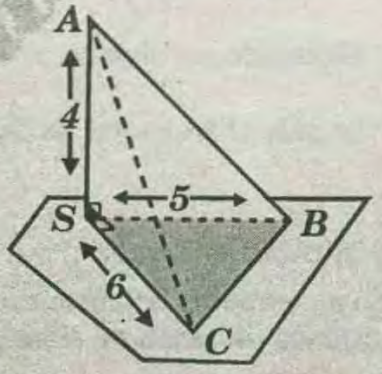
A) 24 **B)** 30 **C)** 20 **D)** 40 **E)** 48

RESOLUCIÓN :

* Se tiene :

$$V=\frac{1}{3}(\text{área SBC})\,(AS)$$

$$\rightarrow V=\frac{1}{3}\left(\frac{5\times6}{2}\right)(4)=20$$



RPTA : "C"

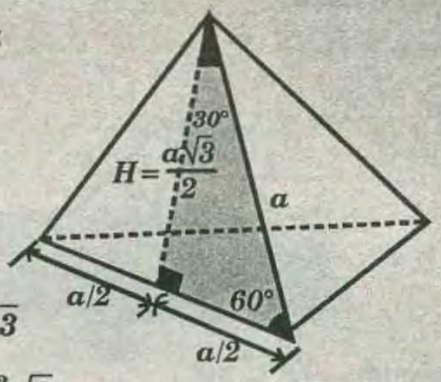
PROBLEMA 22 :

El área total de un tetraedro es $36\sqrt{3}$. Hallar la altura de una de su caras. (el tetraedro es regular)

A) $2\sqrt{3}/3$ **B)** $3\sqrt{2}$ **C)** $3\sqrt{3}$ **D)** $6\sqrt{3}$ **E)** $6\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

* Por teoría :



$$\underbrace{A_{total}}=a^2\sqrt{3}$$

$$\rightarrow 36\sqrt{3}=a^2\sqrt{3}$$

$$\rightarrow a=6$$

* Luego: $H=\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{6}{2}\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 23 :

En el gráfico **A – BCD** es un tetraedro regular donde la distancia del baricentro **G** de la cara **ACD** a la cara **BCD** es **4** . si G_1 es baricentro de la cara **BCD** calcule GG_1.

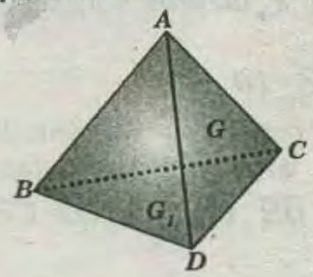
A) 6

B) $2\sqrt{6}$

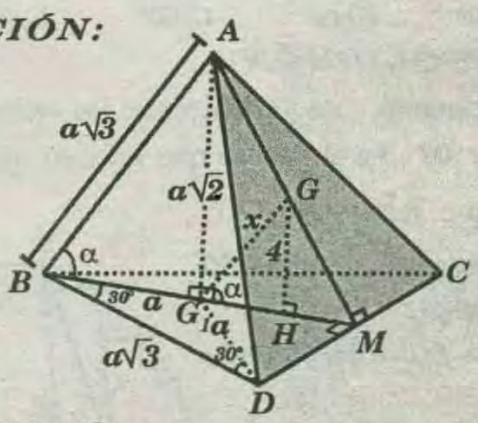
C) $3\sqrt{6}$

D) $4\sqrt{6}$

E) $5\sqrt{6}$



RESOLUCIÓN:



* Piden: x

* En el tetraedro regular

* $\overline{AG_1}$ es perpendicular a la cara **BCD**

* Se observa $\overline{BA}\,//\,\overline{G_1G}$

* Además como $\triangle BG_1A\sim G_1HG$:

$$\Rightarrow \frac{x}{4}=\frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}}\Rightarrow x=2\sqrt{6}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 24 :

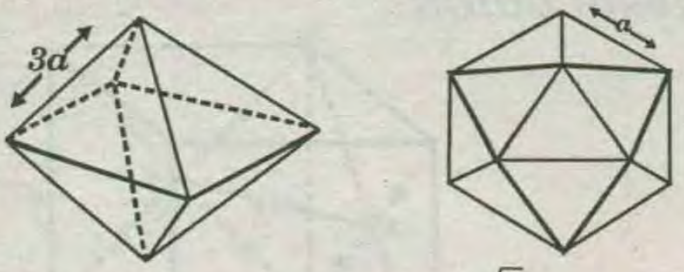
Hallar en que relación se encuentran las áreas de un octaedro y un icosaedro, regulares, sabiendo que la

arista del primero es el triple de la del segundo.

A) $\frac{15}{7}$ B) $\frac{20}{3}$ C) $\frac{18}{5}$ D) $\frac{10}{7}$ E) $\frac{12}{5}$

RESOLUCIÓN :

"Octaedro regular" "Icosaedro regular"



* Se pide : $$\frac{A_{OCTAEDRO}}{A_{ICOSAEDRO}} = \frac{8(3a)^2\frac{\sqrt{3}}{4}}{20a^2\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{18}{5}$$

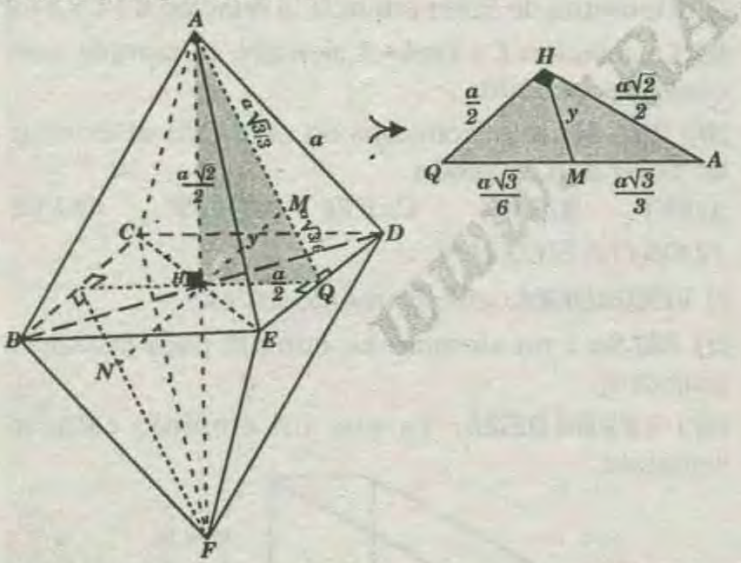
RPTA : "C"

PROBLEMA 25 :

ABCDEF es un octaedro regular cuya arista mide **a**, entonces el segmento **MN** que une los centros de dos caras opuestas mide :

A) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ B) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ C) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{a\sqrt{6}}{5}$

RESOLUCIÓN :



* Por el teorema de Stewart, en el triángulo sombreado:

$$y^2\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{4}\times\frac{a\sqrt{3}}{3} + \frac{a^2}{2}\times\frac{a\sqrt{3}}{6} - \frac{a\sqrt{3}}{3}\times\frac{a\sqrt{3}}{6}\times\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

* Efectuando : $y = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

* Luego :

$$MN = 2y = 2\frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

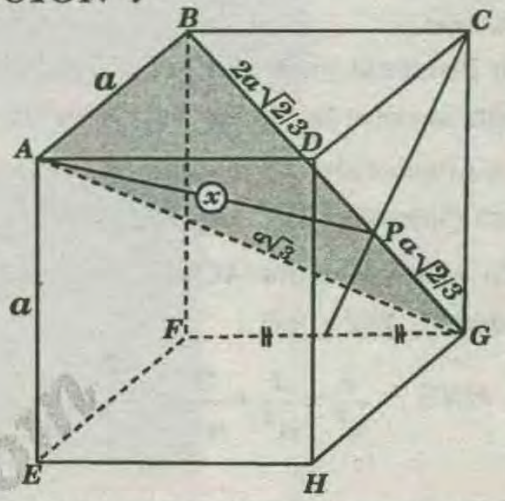
RPTA : "B"

PROBLEMA 26 :

En el cubo **ABCD – EFGH** de arista **"a"** unidades, **M** es punto medio $\overline{FG}$ y $\overline{CM} \cap \overline{BG} = \{P\}$. Calcular **AP** (en u).

A) $\frac{a\sqrt{15}}{3}$ B) $\frac{a\sqrt{17}}{3}$ C) $\frac{a\sqrt{13}}{3}$ D) $a\sqrt{7}$ E) $a\sqrt{5}$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle ABG$: por el teorema de Stewart :

$$x^2(a\sqrt{2}) = a^2\left(\frac{a}{3}\sqrt{2}\right) + 3a^2\left(\frac{2}{3}a\sqrt{2}\right) - \frac{2a}{3}\sqrt{2}\cdot\frac{a}{3}\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{3} + 2a^2 - \frac{4}{9}a^2 \Rightarrow x^2 = \frac{7}{3}a^2 - \frac{4}{9}a^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{(21-4)}{9}a^2 \Rightarrow x^2 = \frac{17}{9}a^2 \rightarrow x = \frac{a}{3}\sqrt{17}$$

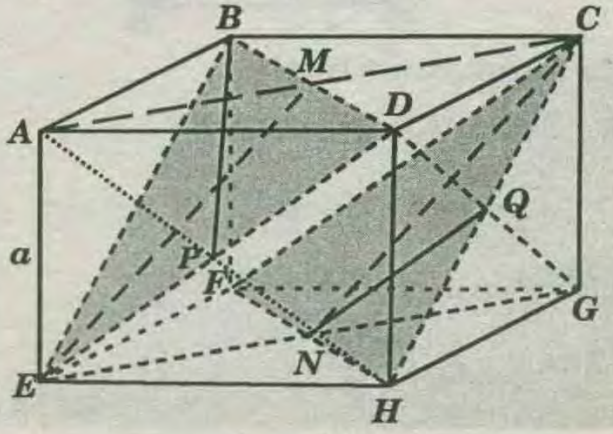
RPTA : "B"

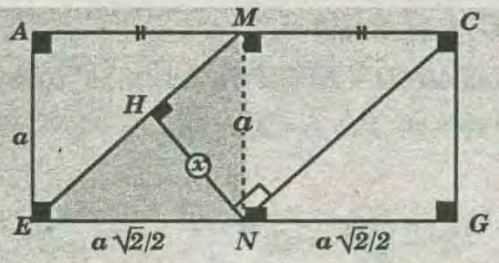
PROBLEMA 27 :

En un hexaedro regular **ABCD – EFGH** la arista mide **"a"** unidades. Se consideran las rectas L_1 y L_2 tal que: L_1 pasa por el vértice **B** y el centro de la cara **ADHE**, L_2 pasa por los centros de las caras **EFGH** y **DCGH**, entonces la distancia entre las rectas L_1 y L_2 es :

A) a/3 B) a/4 C) $a/\sqrt{3}$ D) $a\sqrt{2}/3$ E) $\frac{a}{\sqrt{2}}$

RESOLUCIÓN :





* $\overline{BP}$ y $\overline{NQ}$ se encuentran ubicados en planos paralelos.

* La distancia entre dichos planos paralelos es la distancia entre las rectas alabeadas $\overline{BP}$ y $\overline{NQ}$.

* La proyección de los planos paralelos sobre el plano diagonal *ACGE* es : $\overline{EM} \parallel \overline{NC}$.

* En el rectángulo *ACGE*, tenemos $\overline{NH} \perp \overline{EM}$, también : $\overline{HN} \perp \overline{NC}$.

* $\triangle MNE$: $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2}=\frac{3}{a^2} \Rightarrow x=\frac{a}{\sqrt{3}}$

RPTA : "C"

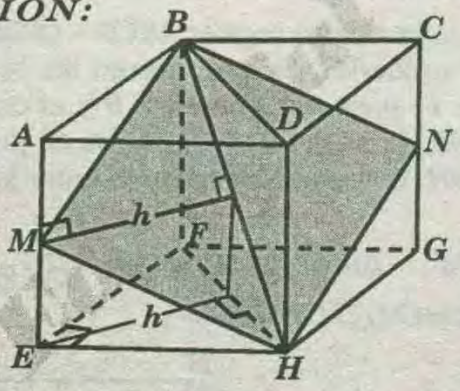
PROBLEMA 28 :

En un hexaedro regular *ABCD – EFGH*; por la diagonal *BH* pasa un plano que al interceptar al sólido limitado por el hexaedro determina una región poligonal de área mínima.

Si la arista del hexaedro mide *"a"* unidades, entonces el área mínima es :

A) $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$ B) $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$ C) $\frac{a^2\sqrt{6}}{3}$ D) $\frac{a^2\sqrt{6}}{5}$ E) $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$

RESOLUCIÓN:



* La mínima distancia entre

$\overline{AE}$ y $\overline{BH}$ es *"h"* , luego en *EFGH* :

$$h=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow ÁREA_{MÍNIMA}=BH(h)=a\sqrt{3}\times\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow ÁREA_{MÍNIMA}=\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$$

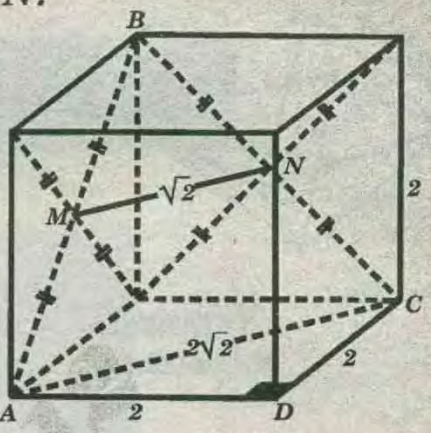
RPTA : "C"

PROBLEMA 29 :

En un hexaedro regular, la distancia entre los centros de dos caras adyacentes es $\sqrt{2}m$. determine el volumen de dicho hexaedro .

A) $4m^3$ B) $2\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$ D) 6 E) 8

RESOLUCIÓN:



* Por base media : $AC=2\sqrt{2} \Rightarrow AD=DC=2$

* Luego: $V = 2^3 = 8$

RPTA : "E"

PROBLEMA 30 :

Indique el valor de las siguientes proposiciones respecto del teorema de Euler : Si *A=#* de aristas ; *V = #* de vértices: *C = #* de caras.

I) El teorema de Euler enuncia la relación *C+V=A+2*

II) La relación *C+V=A+2* siempre se cumple para cualquier poliedro .

III) Para algunos poliedros no convexos el teorema de Euler aún es válido.

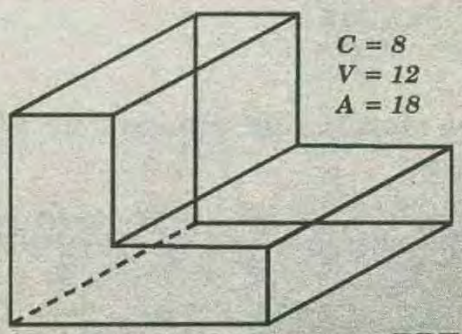
A) VVV B) VFV C) FVF D) FFF E) FVF

RESOLUCIÓN :

I) VERDADERA: efectivamente así es.

II) FALSA : no siempre se cumple para cualquier poliedro.

III) VERDADERA: ya que un ejemplo será, lo siguiente:



RPTA : "B"

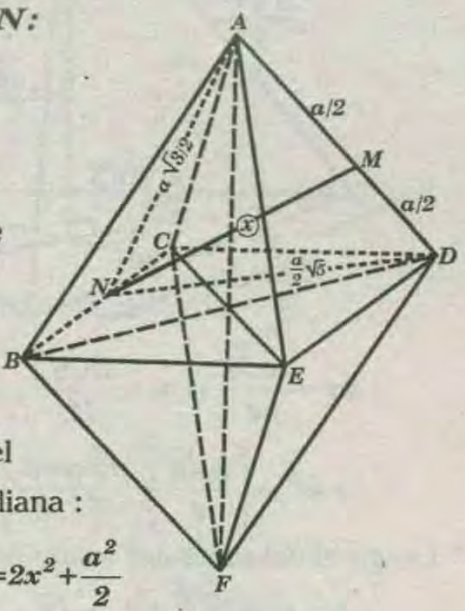
PROBLEMA 31 :

En el octaedro regular *A–BCDE–F* cuyas aristas miden a unidades, calcular la distancia entre los puntos

medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

A) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{a\sqrt{5}}{3}$ D) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

RESOLUCIÓN:



* $\triangle NCD$:

$$ND^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2$$

* En $\triangle NAD$; por el teorema de la mediana :

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2x^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 32 :

Indique verdadero o falso sobre las desigualdades.

I) Dos poliedros simétricos respecto de un punto congruentes .

II) Todos los hexaedros tienen cuatro diagonales.

III) El poliedro conjugado de un icosaedro es un dodecaedro .

IV) Existe un poliedro que tiene 7 aristas .

A) VFVF B) VFVV C) VFFF D) FVFV E) FFVL

RESOLUCIÓN :

I) Según la propiedad fundamental :

Dos figuras simétricas son congruentes.

PROPOSICIÓN VERDADERA

II) El hexaedro de caras triangulares tiene una diagonal.

PROPOSICIÓN FALSA

III) Se llaman poliedros conjugados a aquellos en que el número de caras de uno es igual al número de vértices del otro y viceversa. Según el teorema de Euler deben tener el mismo número de aristas.

PROPOSICIÓN VERDADERA

IV) La proposición es FALSA

RPTA : "A"

PROBLEMA 33 :

Si en un poliedro de n caras la suma de las medidas de los ángulos de sus caras es α, calcule la suma de las medidas de los ángulos determinados por dos caras consecutivas del poliedro polar y el primer poliedro.

A) $180° - an$ B) $180°n - \alpha$ C) $90° - an$
D) $90°n - \alpha$ E) $180°n - \alpha$

RESOLUCIÓN :

* Si la suma de las medidas de los ángulos de sus caras es α , como tiene n caras el total será αn.

* Luego en el poliedro polar a su suplementario se cumple: $180° - an$

RPTA : "A"

PROBLEMA 34 :

En un poliedro regular de 30 aristas , cuya longitud mide ℓ, calcule el área de la superficie poliédrica, si tiene el menor número de vértices .

A) $4\ell^2\sqrt{3}$ B) $5\ell^2\sqrt{3}$ c) $6\ell^2\sqrt{5}$

RESOLUCIÓN :

* Existen dos poliedros regulares de 30 aristas cada una, el dodecaedro y el icosaedro regular.

* De los cuales aquel que tiene el menor número de vértices es el icosaedro $V = 12$.

* Se pide hallar el área total :

$$S = 5a^2\sqrt{3}$$

* Por dato : $a = \ell$

$$\Rightarrow S = 5\ell^2\sqrt{3}$$

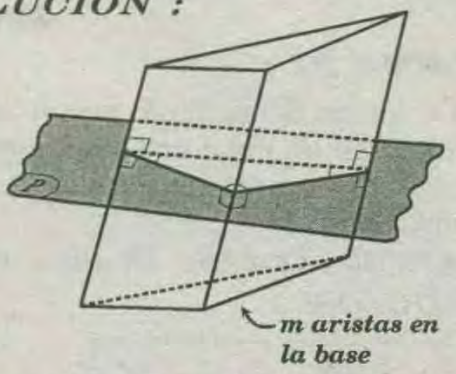
RPTA : "B"

PROBLEMA 35 :

En un prisma cuyo número de aristas básicas es m, calcule la suma de medidas de los ángulos diedros determinados por las caras laterales contiguas .

A) $90°(m - 4)$ B) $180°(m - 2)$ C) $90°(m - 1)$
D) $180°m$ E) $90°(m - 3)$

RESOLUCIÓN :

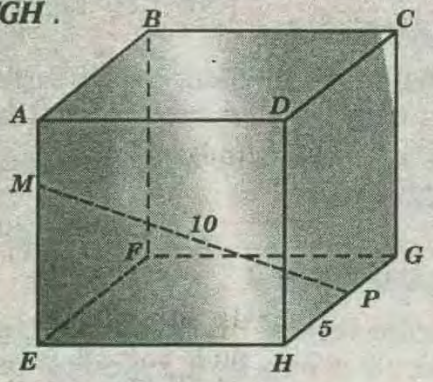


Trazamos un plano P que determina la sección recta del prisma en la cual su número de lados «n» es igual al número de lados de la base del sólido por dato «m» y la suma de las medidas de sus ángulos es igual a la suma de las medidas de todos sus diedros laterales , es decir: $180°(m-2)$

RPTA : "B"

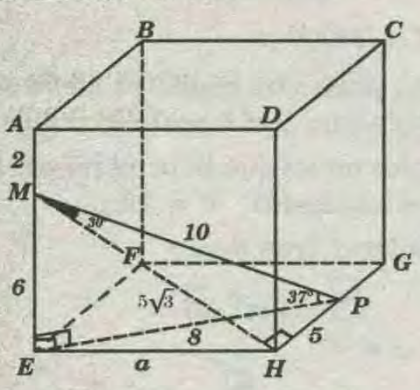
PROBLEMA 36 :

En la figura, $EM=3(AM)=6$ y la medida del ángulo entre MP y el plano que contiene la base es $37°$. Si $m\sphericalangle MPH=60°$, calcule el volumen del prisma regular $ABCD-EFGH$.



A) 289 B) 287 C) 256 D) 360 E) 312

RESOLUCIÓN :



* $\triangle MEP$; notable :

Si $ME = 6 \Rightarrow EP = 8$ y $MP = 10$

* $\triangle MHP$ notable :

Si $MP = 10 \Rightarrow HP = 5$ y $MH = 5\sqrt{3}$

* $\triangle MEH$: $a^2 = (5\sqrt{3})^2 - 6^2 \rightarrow a^2 = 39$

* El volumen del prisma es :

$V = (39) \Rightarrow (8)\ V = 312\mu^2$

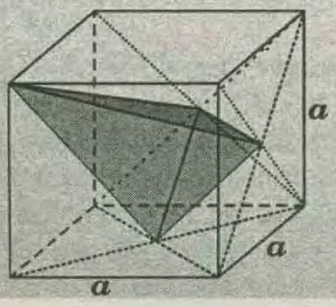
RPTA : "E"

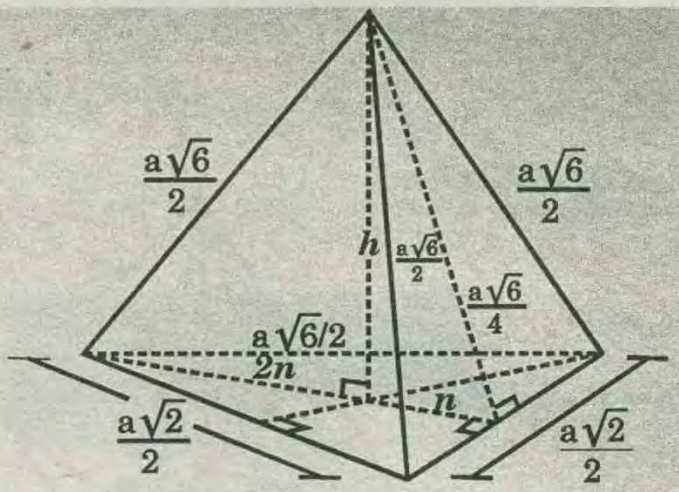
PROBLEMA 37 :

Calcule el volumen del poliedro que se obtiene al unir un vértice de un cubo con los centros de las caras que concurren en el vértice opuesto , si la arista del cubo mide a .

A) $a^3/72$ B) $a^3/12$ C) $a^3/24$ D) $a^3/8$ E) $a^3/27$

RESOLUCIÓN :





$$3n = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow n = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

$$\Rightarrow h^2 = \left[\frac{a\sqrt{6}}{4}\right]^2 - \left[\frac{a\sqrt{6}}{12}\right]^2 \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

* Luego el volumen del sólido es :

$$V = \frac{1}{3}\left[\frac{a\sqrt{2}}{2}\right]^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

* Simplificando : $V = \frac{a^3}{24}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 38 :

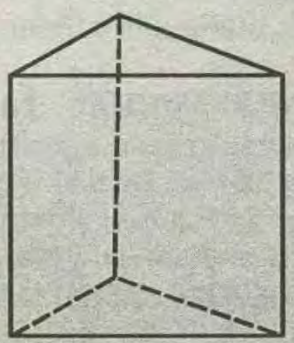
Si A es el número de aristas , V es el número de vértices y C es el número de caras . ¿qué relación se cumple para un prisma?

A) $\frac{A}{3}+\frac{V}{4}+4=C$ B) $\frac{A}{4}+\frac{V}{3}+2=C$ C) $\frac{A}{6}+\frac{V}{4}+2=C$

RESOLUCIÓN :

TEOREMA :

En todo prisma su número total de caras es igual a la tercera parte de su número total de aristas más dos unidas.



C: # de caras.

A: # de aristas.

Se cumple :

$$\boxed{C = \frac{A}{3} + 2}$$

DEMOSTRACIÓN :

Si la base es un polígono de «n» lados entonces habrá «n» vértices; por lo tanto el número total de aristas

laterales es: $A_R = n$

* Luego, el número total de aristas del sólido es :

$$A = A_b = A$$
$$A = 2n + n$$
$$A = 3n$$
$$\frac{A}{3} = n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Pero: $C_R = n \; ; \; C_b = 2$

* Luego : $C = C_R + C_b$

$$C = n + 2$$

$$\boxed{C = \frac{A}{3} + 2} \quad \text{ó} \quad \boxed{C = \frac{A}{6} + \frac{V}{4} + 2}$$

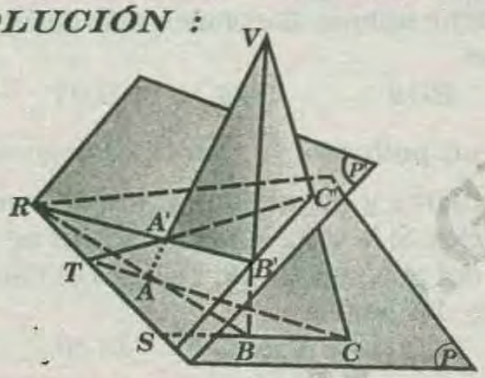
RPTA : "C"

PROBLEMA 39 :

La base del tetraedro *V–ABC* está contenida en el plano *P*. Sea *P'* un plano no paralelo a *P* que intersecta al tetraedro en los puntos *A'B'* y *C'*. Si *R*, *S* y *T* son los puntos de intersección de $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ de $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$ y de $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$ respectivamente, entonces *R*, *S* y *T*.

A) No están en P ni en P' *B) Están en P y en P'*
C) Determinan un plano *D) Están en P' no en P'*

RESOLUCIÓN :



* Debido a que los puntos deben estar en los dos planos , se deben encontrar en la intersección de dichos planos , es decir son colineales .

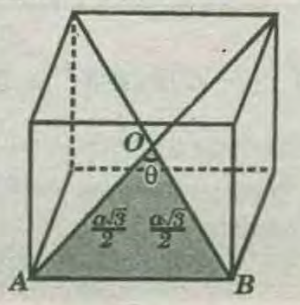
RPTA :"B"

PROBLEMA 40 :

Sean *A* y *B* los extremos de una de las aristas de un cubo y sea *O* el centro de dicho cubo. Entonces el coseno del ángulo *AOB* es :

A)2/3 *B)1/6* *C)3/4* *D)3/5* *E)1/3*

RESOLUCIÓN :



* Sea *a* la longitud de la arista del cubo , entonces :

$$OA = OB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

* Δ *AOB* Por ley de cosenos :

$$a^3 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\cos\theta$$

* Reduciendo la igualdad se obtiene : $\cos\theta = \frac{1}{3}$

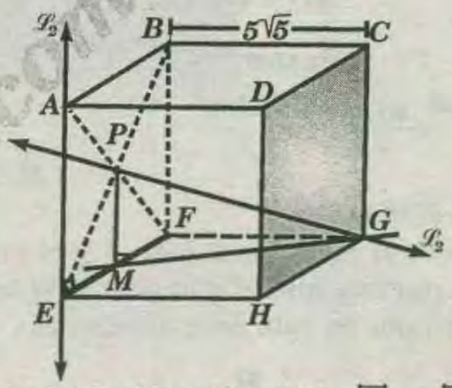
RPTA :"E"

PROBLEMA 41 :

En el cubo *ABCD – EFGH* de arista $5\sqrt{5}$ se tiene el punto *P* que es el centro de la cara *ABFE*. Halle la distancia entre las rectas que contienen a $\overline{PG}$ y $\overline{AE}$

A)5 *B)* $3\sqrt{5}$ *C)* $\sqrt{5}$ *D)8* *E) 10*

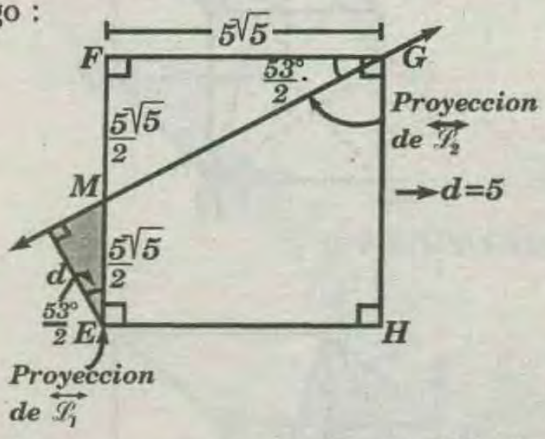
RESOLUCIÓN :



* Piden calcular la distancia entre $\vec{\mathscr{L}}_1$ y $\vec{\mathscr{L}}_2$ *(d)*

* Proyectamos $\vec{\mathscr{L}}_1$ y $\vec{\mathscr{L}}_2$ en la cara *EFGH*

* Luego :



* En el ◺ (notable *53°/2*) $\rightarrow d = 5$

RPTA :"A"

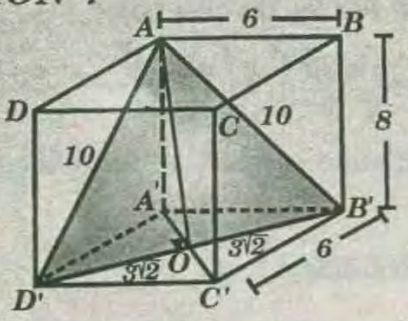
PROBLEMA 42 :

Partiendo de un vértice de un paralelepípedo de dimensiones *6 ; 6* y *8m*, se trazan las diagonales de dos caras vecinas y se unen los extremos de las diagonales trazadas. Entonces la mitad del área de la región formada por estas diagonales es :

WWW.GRATIS2.COM

A) $2\sqrt{41}m^2$ B) $6\sqrt{2}m^2$ C) $3\sqrt{41}m^2$
D) $6\sqrt{3}m^2$ E) $4\sqrt{6}m^2$

RESOLUCIÓN :



* Nos piden : $\dfrac{S_{\triangle AD'B'}}{2} = ?$ .....(I)

* Pero : $AD' = AB' = 10m$ y $D'B' = 6\sqrt{2}m$

* $\triangle D'OA$ (Teorema de Pitágoras)

$$AO = \sqrt{82}m$$

$$S_{\triangle AD'B'} = 6\sqrt{41}m^2$$

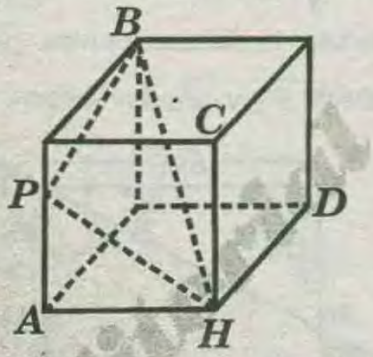
* En (I) : $S_{\frac{\triangle AD'B'}{2}} = 3\sqrt{41}m^2$

RPTA :"C"

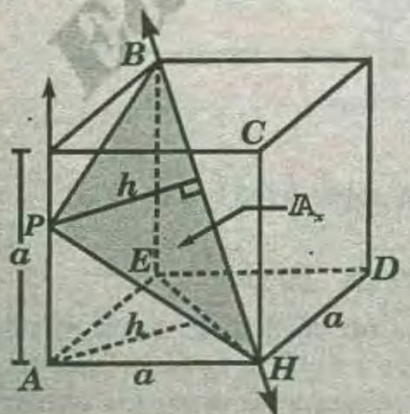
PROBLEMA 43 :

En la figura , el cubo tiene lado *1* y el punto *P* se escoge de manera que el triángulo *BPH* tenga área mínima. El valor de esta área mínima es :

A) $\sqrt{\frac{3}{8}}$
B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
C) $\sqrt{2}-1$
D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$



RESOLUCIÓN :



* Piden: $\mathbb{A}_{(x)}$

* Dato : $a=1$

* Sabemos :

$$\mathbb{A}_{(x)} = \frac{(BH)}{2} \text{.....(I)}$$

* Como $BH = \sqrt{3}$ (constante), $\mathbb{A}_{(x)}$ será mínimo cuando *h* sea la distancia entre $\overline{PA}$ y $\overline{BH}$. Entonces proyectamos en la cara *AEDH*

h : distancia entre $\overline{PA}$ y $\overline{EH}$.

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

* Reemplazando en (I) : $\mathbb{A}_{(x)} = \sqrt{\frac{3}{8}}$

RPTA : "A"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Las caras de un poliedro convexo están limitadas por *6* triángulos, *4* pentágonos y *7* cuadriláteros. Calcular su número de vértices.

A) 15 B)16 C)18 D) 22 E) 33

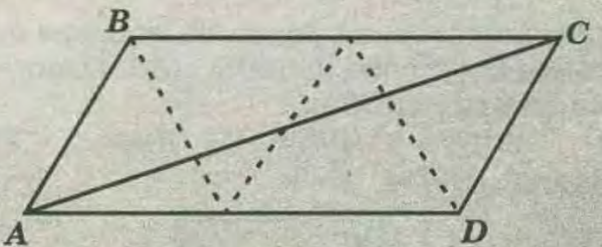
02 Un poliedro tiene cinco caras pentagonales, tres triangulares y algunas cuadrangulares. Si dicho poliedro tiene setenta diagonales, calcular el número de vértices.

A)10 B)12 C)15 D)17 E)27

03 En un poliedro de catorce caras, seis son cuadrangulares y las restantes son triangulares y pentagonales. Si la suma de los números de vértices y artistas del poliedro es *46*, calcular el número de diagonales del poliedro.

A)45 B)55 C)65 D) 70 E) 75

04 La figura muestra el paralelogramo *ABCD*, el cual es el resultado de desarrollar la superficie de un tetraedro regular. Si $AC = 2\sqrt{7}$, calcular la medida de la altura de dicho tetraedro



A)$\sqrt{3}$ B)$\sqrt{7}$ C)$2\sqrt{6}/3$ D)2 E)$\sqrt{6}$

05 Hallar el área de la superficie del poliedro cuyos vértices son los puntos medios de todas las aristas de un cubo cuya arista mide *"a"*.

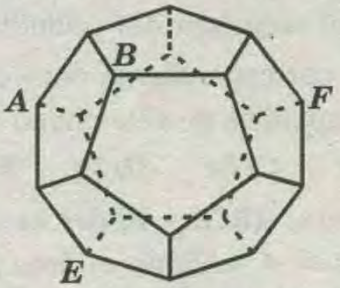
A) $a^2(3+\sqrt{3})$ B) $12a^2$ C) $4a^2\sqrt{3}$

D) $6a^2(2+\sqrt{3})$ E) $4a^2(\sqrt{3}+3)$

06 Se tiene un octaedro regular, el área de la superficie del octaedro es $288\sqrt{3}$. Calcule el volumen de su correspondiente poliedro conjugado inscrito.

A) 80 B) 81 C) 67 D) 64 E) 66

07 En el gráfico se muestra un dodecaedro regular. Calcular la medida del ángulo entre las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{EF}$.



A) 36° B) 54° C) 60° D) 30° E) 72°

08 En un hexaedro regular *ABCD – EFGH*, la distancia entre $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{DG}$ es $2\sqrt{3}u$.

Calcular el volumen del poliedro conjugado inscrito en dicho hexaedro.

A) $24\,u^3$ B) $36\,u^2$ C) $48\,u^3$ D) $27\,u^3$ E) $54\,u^3$

09 Se tiene un tetraedro regular *O – ABC* en el cual se traza la altura $\overline{OH}$. Si *M* es punto medio de $\overline{OH}$, calcular $m\sphericalangle MAC$.

A) $\text{ArcSen}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ B) 30° C) 60°

D) $\text{ArcCos}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ E) 45°

10 En un tetraedro regular *A – BCD* de volumen $2\sqrt{6}$, *G* es el centro de gravedad de la cara *ACD* y *M* es punto medio de $\overline{GC}$. Calcular la distancia entre $\overline{AD}$ y $\overline{BM}$.

A) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ B) $\frac{4}{5}\sqrt{6}$ C) $\frac{4}{5}\sqrt{3}$ D) $\frac{2}{5}\sqrt{10}$ E) $\frac{6}{7}\sqrt{3}$

11 Se tiene un hexaedro regular *ABCD – EFGH*, en la cara *ABCD* se ubica un punto *P*, tal que $m\sphericalangle DPC = 90°$. Si $(PC)(PH) = 12$ y $BC = 3\sqrt{2}$, calcular la distancia de *P* hacia $\overline{HC}$.

A) 6 B) 4 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 2

12 Dos de las caras de un dodecaedro regular son los pentágonos *ABCDE* y *DEFGH*. Si $AB = \sqrt{5} - 1$, calcular el área de la región triangular *CFH*.

A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{5}+1$ C) $3-\sqrt{5}$ D) 2 E) 4

13 Un poliedro está limitado por pentágonos. Si las caras fueran triángulos, se necesitarían *20* caras más para que el número de aristas no varíe. Calcular el número inicial de caras.

A) 15 B) 30 C) 36 D) 12 E) 32

14 ¿Cuántas diagonales tiene un icosaedro regular y un dodecaedro regular? . Dar como respuesta la suma de dichos números.

A) 130 B) 140 C) 136 D) 120 E) 116

15 Se tiene un tetraedro regular *ABCD*, *M* y *N* son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. La intersección de los planos que contienen a los triángulos *ABN* y *DMC* se interseca con la altura $\overline{AH}$ en *P*. Calcular la medida del ángulo entre $\overline{BP}$ y el plano que contiene a *BCD*.

A) $\text{ArcCos}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$ B) $\text{ArcTg}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ C) $\text{ArcSen}\,\sqrt{2}$

D) $\text{ArcCos}\left(\frac{1}{5}\right)$ E) $\text{ArcSen}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

16 Se tiene un icosaedro regular. Halle la medida del ángulo diedro determinado por dos caras adyacentes.

A) $\text{ArcSen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ B) $\text{ArcCos}\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

C) $\text{ArcCos}\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ D) $\text{ArcSen}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

E) $\text{ArcCos}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

17 Se tiene un tetraedro regular *V–ABC*, con diámetro $\overline{AC}$ se traza una semicircunferencia perpendicular al plano que contiene al triángulo *ABC* y se ubica un punto *P* (*P* ∈ a la semicircunferencia) de tal manera que al trazar una perpendicular $\overline{PH}$ sobre $\overline{AC}$ se cumple que $AH = 2(HC) = 6$. Calcular la distancia del punto *P* al plano *AVC*.

A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{5}$

18 Con una plancha metálica cuya forma es la de un triángulo equilátero, se desea formar un tetraedro regular. ¿Qué altura debe tener este tetraedro regular, si el área de la superficie metálica es $6\sqrt{3}$?

A) 1 B) 2 C) $2\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{6}$ E) $\sqrt{6}$

19 Dado un cubo *ABCD – EFGH*, *Q* y *P* son los centros de las caras *DHGC* y *ABCD*, respectivamente,

en $\overline{HG}$ y $\overline{EL}$ se ubican los puntos L y M, respectivamente. Si: $GL = 2(LH) = 4$ y $EM = 3(ML)$, calcular el área de la región triangular ETM, si $\overline{PM} \cap \overline{EQ} = \{T\}$.

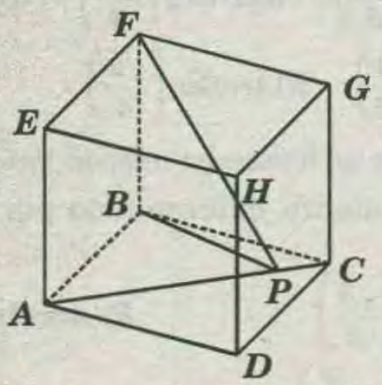
A) $2\sqrt{6}$ B) 5 C) 6,5 D) 4,5 E) $3\sqrt{2}$

20 En un icosaedro regular P y Q son vértices opuestos, además EPD y DCI son dos de sus caras. Calcular la medida del ángulo entre las rectas QI y la que contiene a los centros de las caras APE y PCD.

A) $ArcSec(\sqrt{13})$ B) $ArcCtg(\sqrt{7})$ C) 54°
D) 36° E) 72°

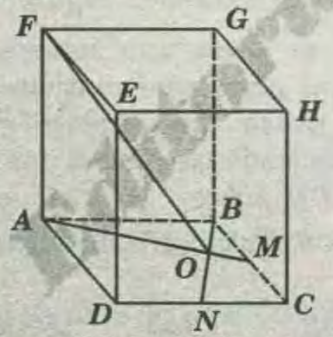
SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 La figura muestra a un hexaedro regular $ABCD - EFGH$. Si: $AP = 7$ y $PC = 1$, calcular PF.



A) $4\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $\sqrt{55}$ D) $\sqrt{47}$ E) $\sqrt{57}$

02 La figura muestra a un hexaedro regular $ABCD - EFGH$. Si M y N bisecan a $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$, y $OM = 1$, calcule OF.

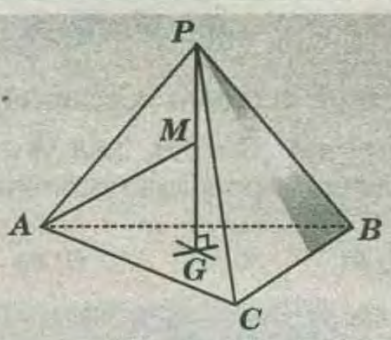


A) 4 B) 6 C) 5 D) 8 E) 10

03 El área total de un tetraedro regular es igual al área total de un octaedro regular de arista igual a 5. Calcule la medida de la arista del tetraedro regular.

A) 5 B) 6 C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{2}$

04 La figura muestra a un tetraedro regular P-ABC. Calcule AM, si $\overline{PG}$ es altura, $PM = MG$ y $PB = 2$.



A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) $\sqrt{6}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3/2}$

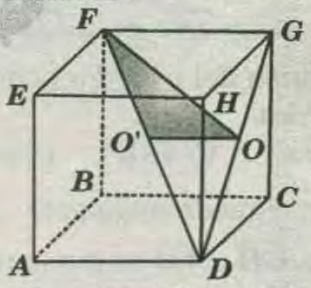
05 Calcule el volumen del poliedro conjugado inscrito en su correspondiente octaedro regular, si el área de la superficie de éste último es $144\sqrt{3}$.

A) 32 B) 62 C) 64 D) 58 E) 28

06 En la figura: $ABCD - EFGH$ es un hexaedro regular. Si $AB = 4$, calcule el área de la región sombreada siendo:

O : Centro $\square DHGC$

O' : Centro del hexaedro

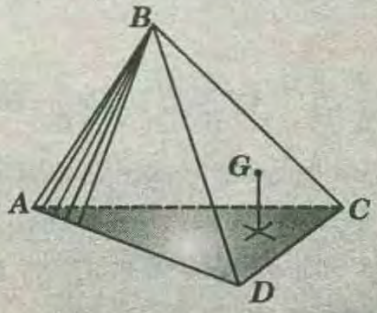


A) $3\sqrt{2}/2$ B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

07 Se tiene un cubo $ABCD - EFGH$, en $\overline{AE}$ se ubica el punto P, tal que: $AP = \sqrt{3}$ y $m\sphericalangle APB = m\sphericalangle EPG$ Calcule BH.

A) $(\sqrt{3}+2)$ B) $\sqrt{6}$ C) $3(\sqrt{2}+1)$ D) $2(\sqrt{6}+1)$ E) 6

08 La figura muestra a un tetraedro regular B-ACD, G es baricentro de la cara BCD. Calcule la distancia de G a la base ADC, si $BC = 9$.

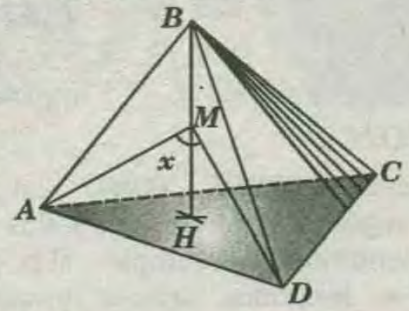


A) 3 B) 2 C) $\sqrt{6}$ D) 2 E) 1

09 Dado un hexaedro regular $ABCD$-$EFGH$, si el segmento que une los puntos medios de $\overline{EF}$ y $\overline{DH}$ mide $2\sqrt{6}$, calcule el volumen del hexaedro.

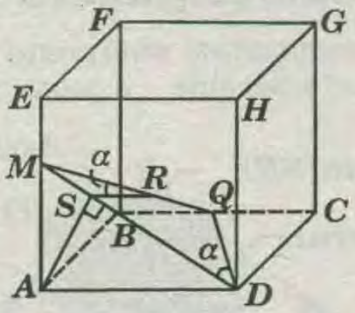
A) 36 B)82 C)72 D) 64 E) 46

10 En la figura: $B - ADC$ es un tetraedro regular. Calcule «x», si $\overline{BH}$ es altura.



A) 60° B)75° C)90° D) 120° E) 76°

11 La figura muestra un hexaedro regular $ABCD\text{-}EFGH$. Si: $(MR)(MQ)=4$ y $EM=1$, calcule el área de la superficie lateral del hexaedro.

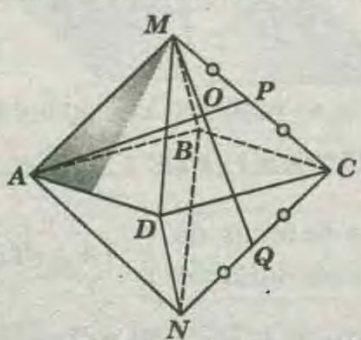


A)25 B)36 C)100 D)$6(\sqrt{5}-1)$ E)$6(\sqrt{5}+1)$

12 En un tetraedro regular $O - ABC$ se traza la altura OH, la cual interseca al segmento que tiene por extremos los puntos medios de $\overline{AO}$ y $\overline{BC}$ en el punto Q. Si $QH = 2$, calcule el área de la superficie total del tetraedro.

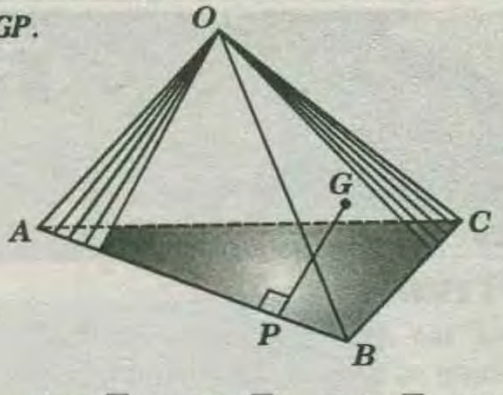
A)$86\sqrt{3}$ B)$88\sqrt{3}$ C)$90\sqrt{3}$ D)$96\sqrt{3}$ E)$94\sqrt{3}$

13 La figura muestra a un octaedro regular $M\text{–}ABCD\text{–}N$; el área total es $600\sqrt{3}$, P y Q son puntos medios. Calcule la distancia de O a la región $ABCD$.



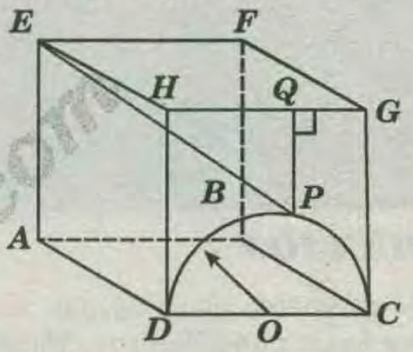
A)2 B)3 C)4 D)6 E)5

14 La figura muestra a un tetraedro regular $O\text{-}ABC$, siendo G baricentro del $\triangle OBC$. Si $OA=18\sqrt{3}$, calcule GP.



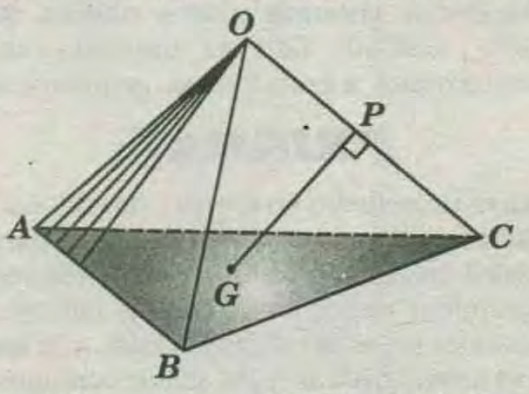
A)$3\sqrt{6}$ B)$6\sqrt{3}$ C)$6\sqrt{6}$ D)$5\sqrt{6}$ E)$12\sqrt{6}$

15 La figura muestra a un hexaedro regular $ABCD\text{–}EFGH$ cuya área total es 600. $\overline{CD}$ es diámetro de la semicircunferencia que está contenida en la cara $DHGC$. Si: $GQ = 2$, calcule EP.



A)12 B)13 C)17 D)$10\sqrt{2}$ E)$12\sqrt{2}$

16 La figura muestra a un tetraedro regular $O\text{–}ABC$, siendo G baricentro del $\triangle ABC$ y $GP = 2$. Calcule el volumen del tetraedro $O\text{–}ABC$.



A)$9\sqrt{2}$ B)18 C)9 D)$9\sqrt{3}$ E)$18\sqrt{3}$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)D	3)D	4)C	5)A	6)D	7)C	8)B	9)E	10)A
11)E	12)D	13)B	14)C	15)B	16)C	17)B	18)B	19)D	20)D

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)E	2)B	3)E	4)D	5)C	6)C	7)C	8)C	9)D	10)C
11)B	12)D	13)C	14)C	15)D	16)C				

www.PRATIS2.com

PRISMA

CAPITULO 36

OBJETIVO :

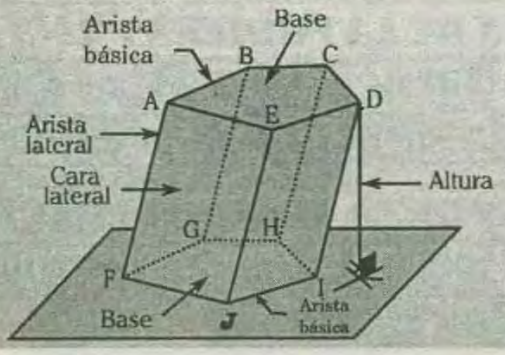
Reconocer las características principales de un prisma, como su área y volumen .

INTRODUCCION :

Así como en la geometría plana es muy frecuente el uso de triángulos y cuadriláteros. También en la geometría del espacio hay sólidos cuyo estudio y aplicación a la realidad son muy frecuentes. Por ejemplo en las construcciones de las casas , edificios , etc. , es muy común ver las columnas de forma prismática o cilíndrica. También las paredes, los tanques de ciertas cisternas u otros objetos que son de nuestra utilidad. Con el presente capítulo conoceremos mejor a estas formas geométricas .

PRISMA

Un prisma es un poliedro en el cual , dos de sus caras son regiones poligonales congruentes y paralelos denominados bases y el resto de caras son regiones paralelogramicas denominadas caras laterales. Las aristas comunes entre las caras laterales y la bases se denominan aristas básicas y las aristas comunes entre las caras laterales se denominan aristas laterales, estas son paralelas y de igual longitud.



NOTACIÓN :

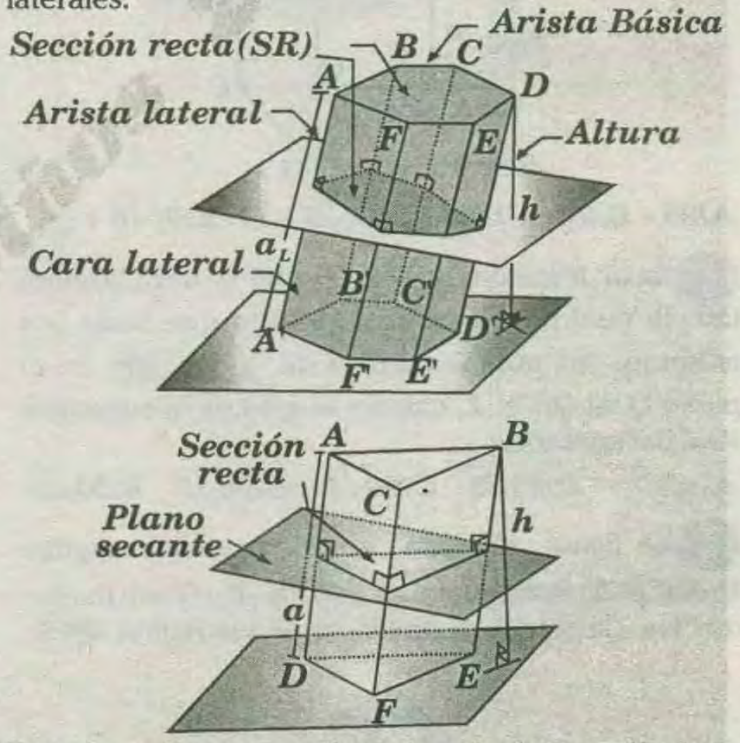
Prisma pentagonal ***ABCDE - FGHIJ*** ; un prisma es nombrado según él número de lados que tenga su base, así tenemos por ejemplo , si la base tiene seis lados , se denomina prisma hexagonal.

SECCIÓN TRANSVERSAL

Es la sección plana determinada en el prisma por un plano paralelo a su base.

SECCIÓN RECTA

Es la sección determinada en el prisma por un plano perpendicular y secante a todas sus aristas laterales.



En todo prisma se realizan los siguientes cálculos.

ÁREA DE SUPERFICIE LATERAL (A_{SL}) :

$$A_{SL} = \begin{pmatrix}\text{suma de áreas de}\\ \text{las caras laterales}\end{pmatrix} \qquad A_{SL} = (2P_{SR})\,a_L$$

$2P_{SR}$: Perímetro de la sección recta.

a_L : Longitud de la arista lateral.

AREA DE LA SUPERFICIE TOTAL (A_{ST}) :

$$A_{ST} = A_{SL} + 2(A_{base}) \;;\; A_{base} = \begin{pmatrix}\text{área de}\\ \text{la base}\end{pmatrix}$$

VOLUMEN (V) :

$$V=(A_{base})h$$

h : longitud de la altura

$$V=(A_{SR})h$$

A_{SR} : área de la sección recta .

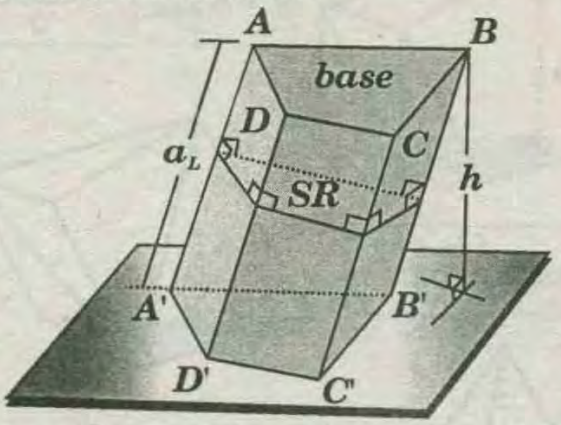
a_L : longitud de la arista lateral .

CLASIFICACIÓN

Los prismas se clasifican según la inclinación de su base, en:

PRISMA OBLICUO :

Es aquel prisma cuyas aristas laterales no son perpendiculares a las bases .

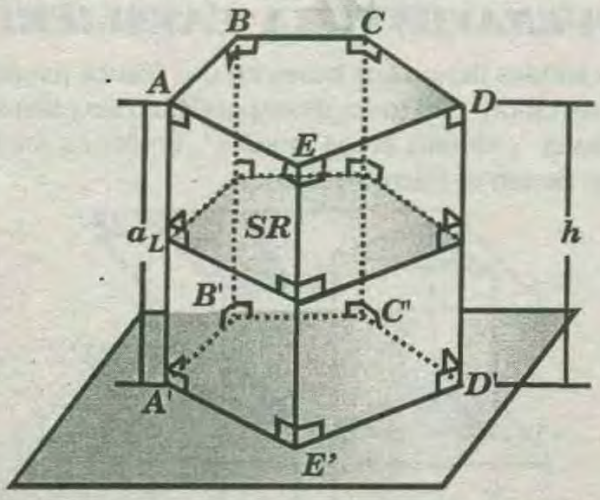


* En el gráfico , se tiene el prisma cuadrangular oblicuo *ABCD - A'B'C'D'*

Se cumple : $h<a_L$ ∧ $A_{SR}<A_{base}$

PRISMA RECTO :

Es aquel prisma cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases .



* En el gráfico , se tiene el prisma pentagonal recto *ABCDE - A'B'C'D'E'*

Se cumple : $a_L=h$ ∧ $A_{SR}=A_{base}$

ÁREA DE LA SUPERFICIE LATERAL (A_{SL}) :

$$A_{SL}=(2P_{base})\,a$$

$2P_{base}$: perímetro de la base .

ÁREA DE LA SUPERFICIE TOTAL (A_{ST}) :

$$A_{ST}=A_{SL}+2(A_{base})$$

A_{base} : Área de la base .

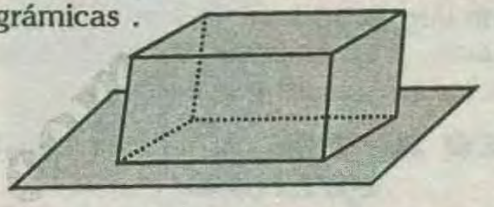
VOLUMEN (V):

$$V=(A_{base})h$$

h : longitud de la altura

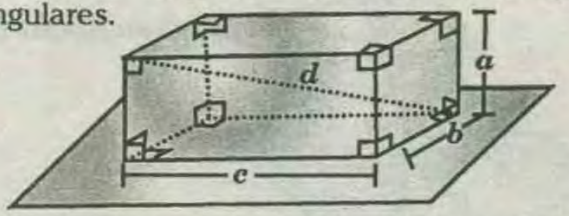
PARALELEPÍPEDO :

Es aquel prisma cuya bases son regiones paralelográmicas .



PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR RECTOEDRO U ORTOEDRO

Es aquel Paralelepípedo cuyas caras son regiones rectangulares.



a,b,c dimensiones del paralelepípedo rectangular. Tiene cuatro diagonales , las cuales son concurrentes y de igual longitud .

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

ÁREA DE LA SUPERFICIE TOTAL (A_{ST}) :

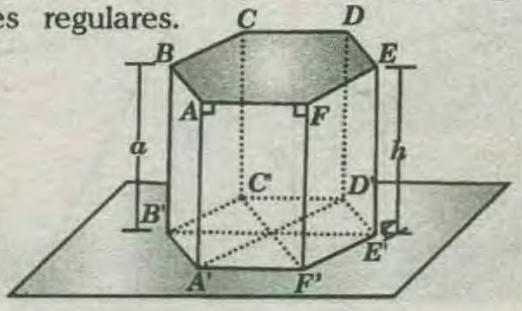
$$A_{ST}=2(ab+bc+ac)$$

VOLUMEN (V) :

$$V=abc$$

PRISMA REGULAR

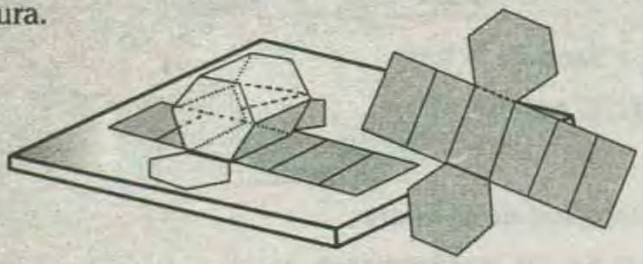
Es aquel prisma recto cuyas bases son regiones poligonales regulares.



* En la figura, se muestra un prisma hexagonal regular *ABCDEF – A'B'C'D'E'F'*

$$a = h$$

Para construir cajas cúbicas , hexagonales , para empaquetado de artefactos, es necesario realizar el diseño sobre una plancha de cartón y luego realizar el corte correspondiente , tal como se muestra en la figura.

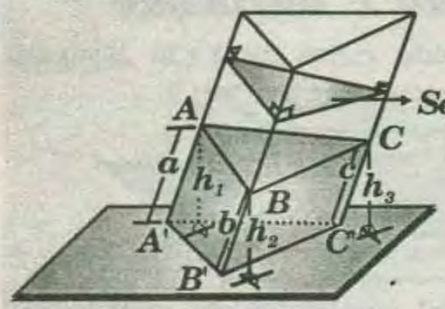


TRONCO DE PRISMA

Es una porción de prisma comprendida entre una de sus bases y un plano no paralelo a las bases secante a todas sus aristas laterales.

TRONCO DE PRISMA TRIANGULAR OBLICUO

Es aquel determinado en un prisma triangular.



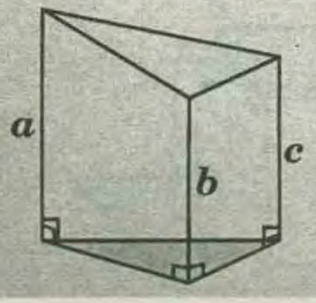
En el gráfico, se tiene el tronco de prisma *ABC- A'B'C'*

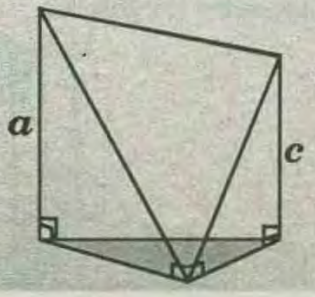
VOLUMEN (V) :

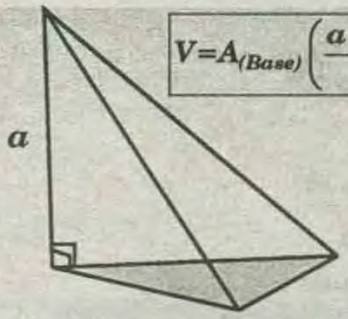
$$V=(A_{A'B'C'})\left(\frac{h_1+h_2+h_3}{3}\right) \qquad V=(A_{SR})\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

VOLUMEN DE UN TRONCO DE PRISMA RECTO TRIANGULAR

El volumen de un tronco de prisma recto de base triangular se calcula multiplicando el área de la base por el promedio de las longitudes de sus aristas.



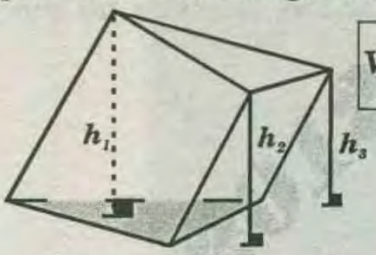




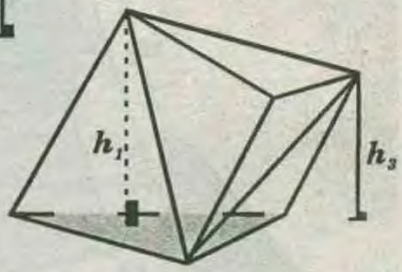
$$V=A_{(Base)}\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \qquad V=A_{(Base)}\left(\frac{a+c}{3}\right) \qquad V=A_{(Base)}\left(\frac{a}{3}\right)$$

VOLUMEN DE UN TRONCO DE PRISMA OBLICUO TRIANGULAR

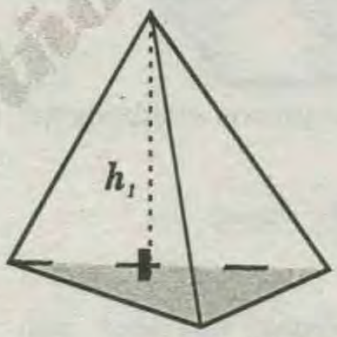
El volumen de un tronco oblicuo de base triangular se obtiene al multiplicar el área de su base por el promedio de las longitudes de sus alturas .



$$V=A_{(Base)}\left(\frac{h_1+h_2+h_3}{3}\right)$$



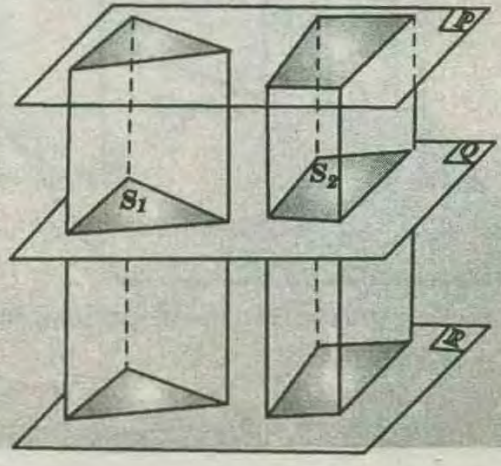
$$V=A_{(Base)}\left(\frac{h_1+h_3}{3}\right)$$



$$V=A_{(Base)}\left(\frac{h_1}{3}\right)$$

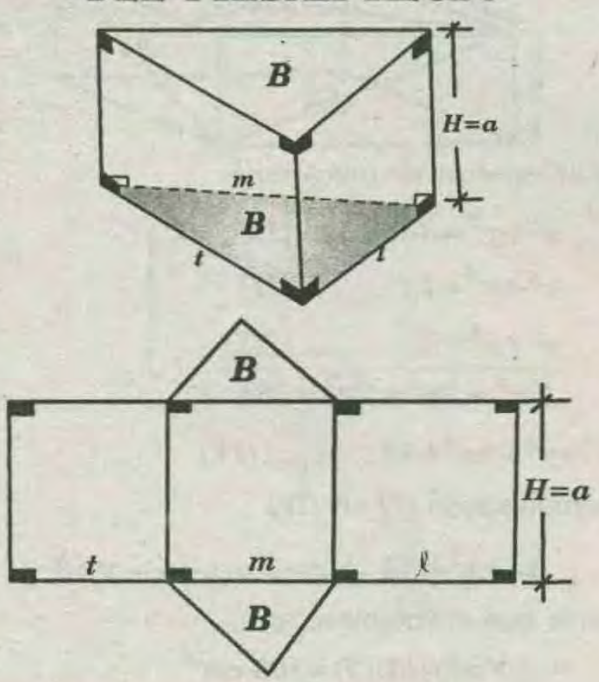
POSTULADO DE BUENAVENTURA CAVALIERI

Si dos sólidos tienen sus bases en dos planos paralelos y sus secciones con todo plano paralelo a los planos de sus bases , tienen áreas iguales , entonces los dos sólidos tienen el mismo volumen.



P y R son planos paralelos y son tales que las secciones producidas en ellos por cualquier plano Q paralelo a P y R y tienen areas S_1 y S_2 iguales

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE DEL PRISMA RECTO



ÁREA LATERAL :

El área lateral de un prisma recto es igual al producto del perímetro de su base por la altura del prisma.

$$\boxed{AREA\ LATERAL = 2P_{base} \times H}$$

donde :

$2P_{base}$ = perímetro de la base

H = altura

DEMOSTRACION :

* El área lateral del prisma es igual al área del rectángulo obtenido en el desarrollo :

$$\cdot\ AL = (m+\ell+t) \times H$$

donde $m+\ell+t$ = perímetro de la base siendo la altura igual a la arista lateral .

$$AL = 2P \text{ base} \times H$$

PROPIEDADES GENERALES DE LOS PARALELEPIPEDOS

I) Como las caras opuestas de un paralelepípedo son paralelogramos que tienen sus lados iguales y paralelos dos a dos , dichas caras son iguales y paralelas .

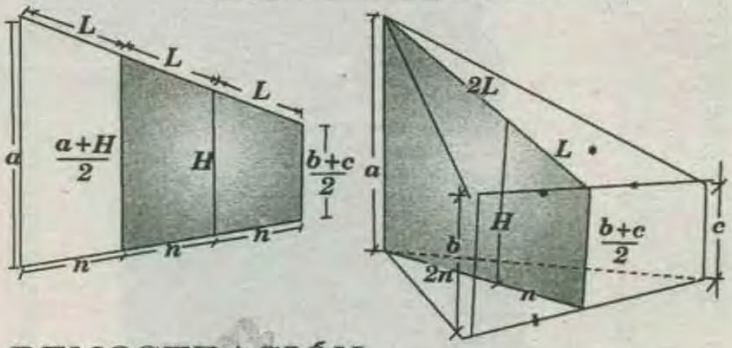
II) Las diagonales de un paralelepípedo se cortan en su punto medio .

III) cualquier plano diagonal que se tome es un paralelogramo y como sus diagonales son las mismas que la del paralelepípedo dichas diagonales del paralelepípedo se cortan en su punto medio.

TEOREMA :

El volumen de un tronco de prisma recto es igual al área de la base multiplicado por el promedio de las aristas del tronco

$$\boxed{Volumen = B\frac{(a+b+c)}{3}}$$



DEMOSTRACIÓN :

* Sabemos que $V = B \times EJE$

$$\Rightarrow V = B \times H \ldots\ldots (I)$$

* Calculo de H en el trapecio sombreado H es mediana

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{a+H}{2} + \frac{b+c}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 4H = a+H+b+c$$

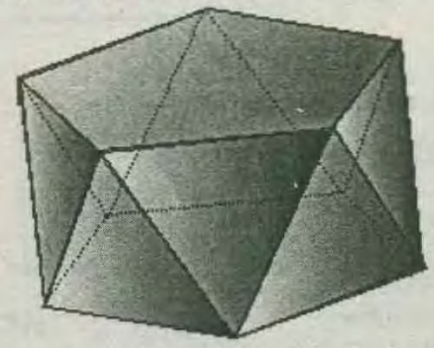
$$\Rightarrow H = (a+b+c)/3$$

* En *I* :

$$\boxed{V = B\frac{(a+b+c)}{3}}$$

ANTIPRISMAS

Cuando las bases las unimos con triángulos y no con paralelogramos, las figuras que obtenemos se llaman **antiprismas**. En la figura adjunta tienes un antiprisma pentagonal.



En estos cuerpos, los polígonos de las bases son también paralelos e iguales, pero uno está girado respecto al otro (cuando los polígonos son regulares el vértice de uno se corresponde con el punto medio del lado del otro). Para dibujarlos tienes que unir

cada vértice del polígono de arriba con dos vértices consecutivos del polígono de abajo, de manera que las aristas no se entrecruçen.

NOTA :

Muchas cajas de cartón tienen a menudo forma de cuboides. En la figura tienes la caja de un carrete de fotos. Se fabrican planas y después se pliegan. Con una malla de puntos cuadrada, corta y construye una caja como ésta.

PROBLEMAS RESUELTOS

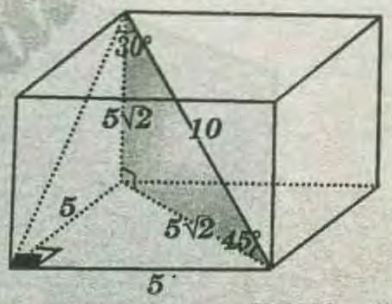
PROBLEMA 1 :

En un paralelepípedo rectangular su diagonal mide 10μ y forma un ángulo que mide $45°$ con la base y un ángulo que mide $30°$ con una cara lateral , entonces el volumen (en μ^3) del sólido limitado por el paralelepípedo .

A) $50\sqrt{2}$ ***B)*** $75\sqrt{2}$ ***C)*** $100\sqrt{2}$ ***D)*** $12\sqrt{2}$ ***E)*** $125\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

* Después de graficar se deduce que el volumen, será:



$V=(5)(5)(5\sqrt{2})$

$\rightarrow V=125\sqrt{2}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 2 :

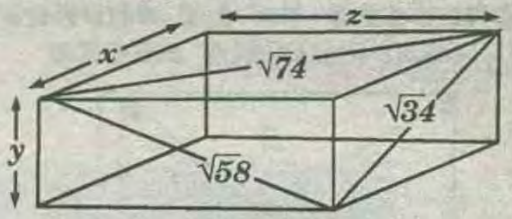
En un paralelepípedo rectangular las diagonales de las caras miden $\sqrt{34}$, $\sqrt{58}$, y $\sqrt{74}$ *cm.*

El volumen del paralelepípedo, en m^3, será:

A) $10{,}5\times10^{-8}$ ***B)*** $1{,}05\times10^{-6}$ ***C)*** $1{,}05\times10^{-4}$ ***D)*** $1{,}05\times10^{-2}$

RESOLUCIÓN :

* Llamando x, y, z las longitudes del paralelepípedo



* Por el teorema de pitágoras :

$$x^2+y^2=34 \quad .....(I)$$
$$x^2+z^2=74 \quad .....(II)$$
$$y^2+z^2=58 \quad .....(III)$$
$$2x^2+2y^2+2z^2=166$$

$\rightarrow x^2+y^2++z^2=83$ .....*(IV)*

* Reemplazando *(I)* en *(IV)* :

$$34+z^2=83 \Rightarrow z=7 \vee x=5 \vee y=3$$

* Con la que el volumen, será:

$$V=(5)(3)(7)=105\ cm^3$$
$$\rightarrow V=105\times(10^{-2}m)^3=1{,}05\times10^{-4}m$$

RPTA : "C"

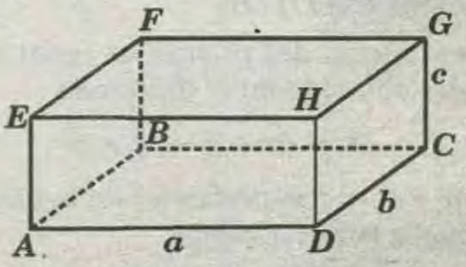
PROBLEMA 3 :

Con relación a una caja rectangular, el área del fondo, del frente y del lado; es $32cm^2$, $24cm^2$ y $12cm^2$ respectivamente . Calcular el volumen de la caja .

A) $84\ cm^3$ ***B)*** 96 ***C)*** 105 ***D)*** 120 ***E)*** 140

RESOLUCIÓN :

* Datos :



- área $(ABCD)=32\ cm^2$
- área $(AEHD)=24\ cm^2$
- área $(DHGC)=12\ cm^2$

* Indicando las dimensiones de la caja por a, b y c, tenemos: volumen pedido : $V=abc$

* Con los datos :

$$\text{área } (ABCD)=ab=32$$
$$\text{área } (AEHD)=ac=24$$
$$\text{área } (DHGC)=bc=12$$

* Al multiplicar , obtenemos : $a^2b^2c^2=32(24)(12)$

$\rightarrow \underbrace{abc} = 16\times 2\times 24\times 12$

$\rightarrow V=\sqrt{16\times 24^2}=4\times 24=96$

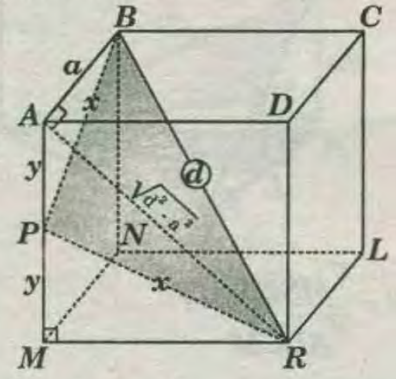
RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

En un prisma regular $ABCD - MNLR$, la diagonal mide d y la arista básica mide a . Calcule el área mínima de la región $PBR(P \in \overline{MA})$

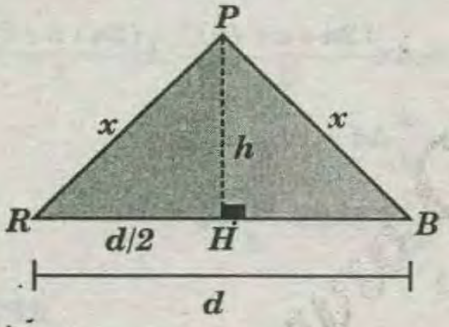
A) $ad\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $ad\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $ad\frac{\sqrt{2}}{3}$ D) $ad\frac{\sqrt{2}}{6}$

RESOLUCIÓN :



$\triangle APR$:

$$(2y)^2 = d^2 - a^2 - a^2 \Rightarrow y^2 = \frac{d^2-2a^2}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{d^2+2a^2}{4}$$



* $\triangle PHR$:

$$x^2 = (d/2)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{d^2+2a^2}{4} - \frac{d^2}{4}$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{\cancel{d^2}}{\cancel{4}} + \frac{a^2}{2} - \frac{\cancel{d^2}}{\cancel{4}} \rightarrow h = \frac{a^2}{2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

* El área mímima de la región triangular PBR es:

$$S = \frac{1}{2}d\left[\frac{a\sqrt{2}}{2}\right] \Rightarrow S = ad\frac{\sqrt{2}}{4}$$

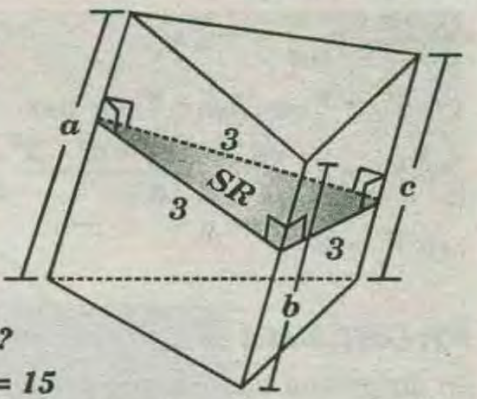
RPTA : "A"

PROBLEMA 5 :

Calcule el área de la superficie lateral de un tronco de prisma triangular oblicuo, si la sección recta es regular, cuyo lado mide $3\,u$, y la suma de longitudes de las aristas laterales es $15\,u$.

B) $45\,u^2$ B) $45\,u^2$ C) $15\,u^2$ D) $60\,u^2$ E) $75\,u^2$

RESOLUCIÓN :



* Piden: $ASL_{TP} = ?$

* Dato: $a + b + c = 15$

$$ASL_{TP} = \frac{(a+b)}{2}\times 3 + \left(\frac{b+c}{2}\right)\times 3 + \left(\frac{a+c}{2}\right)\times 3$$

$$\Rightarrow ASL_{TP} = 3(a+b+c) \Rightarrow ASL_{TP} = = 45\mu^2$$

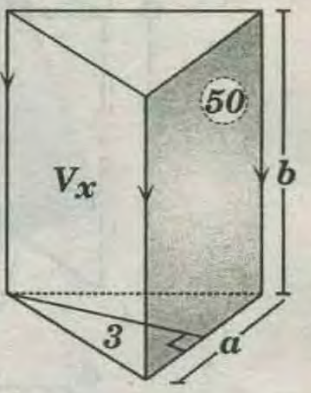
RPTA : "B"

PROBLEMA 6 :

Calcule el volumen del prisma triangular, si el área de una de sus caras laterales es 50 y la distancia de la arista opuesta a dicha cara lateral es 3.

A) 60 B) 66 C) 68 D) 75 E) 72

RESOLUCIÓN :



* Piden : $V_x = ?$

$$V_x = BH = \frac{3a}{2}\times b = \frac{3}{2}ab$$

* Dato : $ab = 50 \rightarrow V_x = 75$

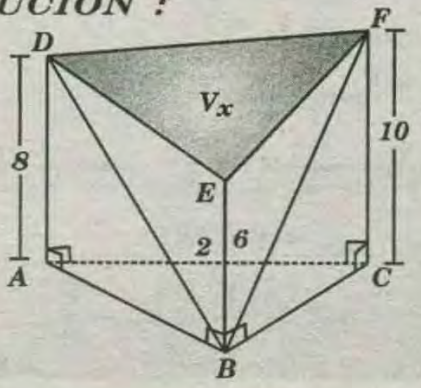
RPTA : "D"

PROBLEMA 7 :

Por los vértices de un triángulo equilátero ABC se trazan $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$, perpendicular al plano que contiene a dicho triángulo. Si $\frac{CF}{5}=\frac{AD}{4}=\frac{BE}{3}=AB=2$ calcule el volumen del tetraedro $DEFB$.

A) $3\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



* Piden: $V_{DEFB} = ? = V_x$

$\Rightarrow V_x = V_{ABC-BEF} - V_{ABC-DBF}$

$\Rightarrow V_x = 2^2\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{(8+10+6)}{3} - \frac{2^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{8+10+0}{3}\right)$

$\Rightarrow V_x = 2\sqrt{3}$

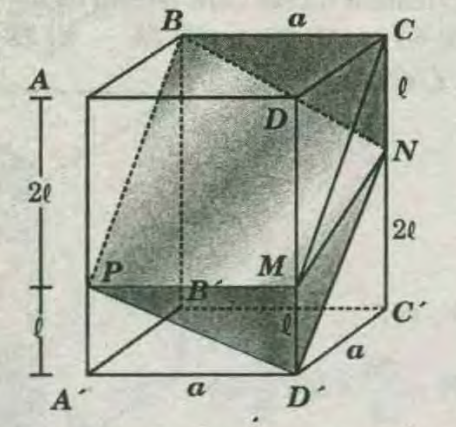
RPTA : "E"

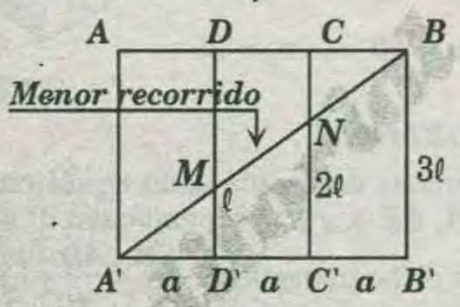
PROBLEMA 8 :

En un prisma cuadrangular regular **ABCD-A'B'C'D'**, de volumen **V** , la línea descrita por el menor recorrido de **A'** a **B** sobre la superficie lateral interseca a $\overline{DD'}$ y $\overline{CC'}$ en **M** y **N** respectivamente. En $\overline{AA'}$ se ubica **P**, tal que **AP=2(PA')**. Calcule el volumen del sólido **BCNPMD'**.

A) $\frac{V}{4}$ V/4 B) $\frac{V}{6}$ C) $\frac{V}{3}$ D) $\frac{2}{3}V$ E) $\frac{3}{4}V$

RESOLUCIÓN :





* Por ΔSN : $MD' = \ell$ y $NC = 2\ell$

$\Rightarrow \overline{PM} // \overline{A'D'}$

* Piden : $V_{BCN-PMD'} = V_x = ?$

$V_x = V_{prisma\ -\ oblicuo} = B \times H$

$\Rightarrow V_x = \frac{a\ell}{2}a = \frac{a^2\ell}{2}$ .....(I)

* Dato : $V_{ABCD\ -\ A'B'C'D'} = Va^2(3R)$

$\Rightarrow a^2\ell = \frac{V}{3} \Rightarrow V_x = \frac{V}{6}$

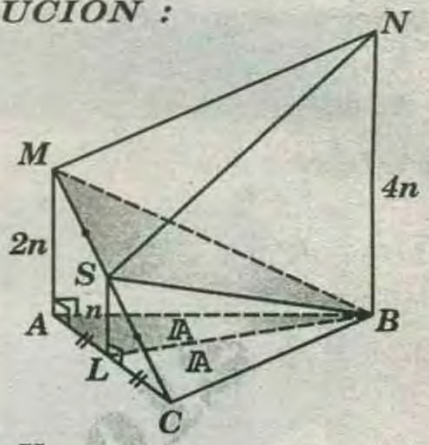
RPTA : "B"

PROBLEMA 9 :

En un triángulo **ABC** se traza **AM** y **BN**, perpendiculares al plano que contiene a dicho triángulo y en el mismo semiespacio. Si **BN=2(MA)** y **S** es punto medio de **MC**, calcule la razón de volúmenes de los sólidos **MSBN** y **ABCM**.

A) 1 B) 2/3 C) 1/4 D) 1/2 E) 1/3

RESOLUCIÓN :



Piden: $\mathbb{R} = \frac{V_{MSBN}}{V_{ABCM}} = ?$

$A_{DABL} = A_{DBLC} = A$

$V_{MSBN} = V_{ALB-MSN} - V_{ALB-MSB}$

$V_{MSBN} = A\times\frac{(2n+n+4n)}{3} - A\frac{(2n+n+0)}{3}$

$V_{MSBN} = \frac{4}{3}An$

$V_{ABCM} = \frac{1}{3}2A\times 2n = \frac{4}{3}An$

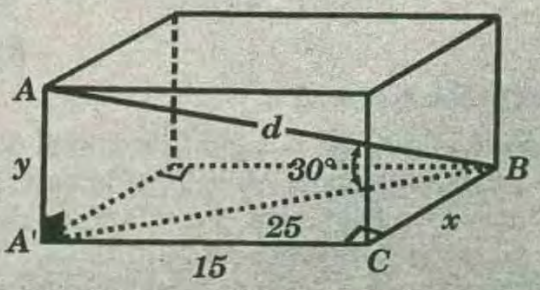
$\rightarrow \mathbb{R} = 1$

RPTA : "A"

PROBLEMA 10 :

La proyección de la diagonal de un paralelepípedo rectangular sobre el plano de la base mide **25 cm**; si una de las aristas de la base es de **15 cm** y el ángulo que la diagonal forma con el plano de la base , tal como se muestra en la figura , es de **30°**, ¿ cuanto mide la otra arista y la altura del paralelepípedo ?.

A) 25 3
B) 20 3
C) $\frac{25}{3}\sqrt{3}$
D) $\frac{25}{2}\sqrt{2}$
E) $25\sqrt{2}$



RESOLUCIÓN :

* En el $\triangle A'BC$:

$$x^2+15^2+=25^2 \Rightarrow x=20$$

* Luego en el $\triangle AA'B$ (de $30°$ y $60°$) se tendrá que:

$$y\sqrt{3}=25 \Rightarrow y=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{3}} \Rightarrow y=\frac{25\sqrt{3}}{3}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

La base de un prisma regular es un triángulo equilátero cuya área es de $16\sqrt{3}cm^2$. Siendo el área lateral del prisma de $240\ cm^2$, hallar el volumen del prisma.

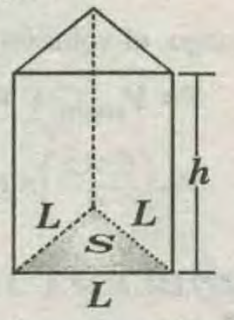
A) $120\ cm^3$ B)200 C) 140 D) $160\sqrt{3}$ E) 180

RESOLUCIÓN :

* Por dato del problema se sabe :

$$S=16\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \frac{L_2\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3} \rightarrow L=8$$



* Además :

$$A_L = 240\ cm^2$$

$$\rightarrow 3L\times h=240 \Rightarrow h=\frac{240}{3(8)}=10cm$$

* Se pide :

$$V=S\times h = 16\sqrt{3}\times 10=160\sqrt{3}cm^3$$

RPTA : "D"

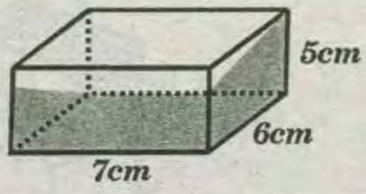
PROBLEMA 12 :

Las dimensiones de un rectoedro son $7cm$, $6cm$ y $5\ cm$. Hallar el volumen del rectoedro.

A) $220\ cm^3$ B) $215\ cm^3$ C) $210\ cm^3$
D) $212\ cm^3$ E) $200\ cm^3$

RESOLUCIÓN :

* Por fórmula:



$$V=(largo)\ (ancho)\ (altura)$$

$$\rightarrow V=7\ cm \times 6cm \times 5cm$$

$$\rightarrow V=210\ cm^3$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 13 :

Las dimensiones de un paralelepípedo rectangular son $2x$, x y x, el área de su superficie total es igual a $160\ cm^2$. hallar el valor de "x".

A)1 cm B) 2 cm C) 3 cm D) 4 cm E) 5 cm

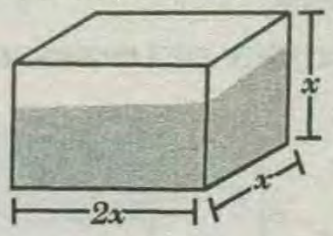
RESOLUCIÓN :

* La superficie total esta dada por :

$$A_{ST}=2(2x\times x+2x\times x+x\times x)$$

$$\rightarrow A_{ST}=10x^2$$

* Pero por dato :



$$A_{ST}=160$$

$$\rightarrow 10x^2=160 \rightarrow x=4$$

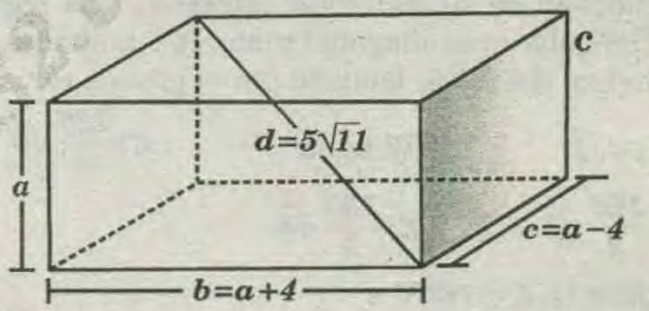
RPTA : "D"

PROBLEMA 14 :

Calcular el área de la superficie total paralelepípedo rectangular. Sabiendo que sus dimensiones están en progresión aritmética de razón 4 y su diagonal mide $5\sqrt{11}$.

A) 420 B) 454 C)480 D) 492 E) 512

RESOLUCIÓN :



* Piden : $A_{S.T.} = 2(ab + bc + ac)$

* Por dato las dimensiones están en progresión aritmética de razón 4.

$$b=a+4 \ ; \ c=a-4$$

* Además:

$$d=(5\sqrt{11})^2=a^2+(a+4)^2+(a-4)^2$$

* Operando $a=9$

$$\rightarrow b=13 \text{ y } c=5$$

* Reemplazando:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} A_{S.T.} \\ Paralelepípedo \end{pmatrix} = 454$$

RPTA : " B"

PROBLEMA 15 :

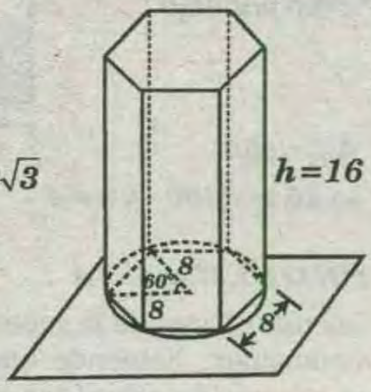
Dado un prisma recto, cuya base es un hexágono regular inscrito en un círculo de $8m$ de radio y cuya altura es igual al diámetro del círculo. Calcular V/A en metros, donde A es el área lateral y V es el volumen del prisma.

A) $2\sqrt{3}$ B) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 1

RESOLUCIÓN :

* Se pide:

VOLUMEN DEL PRISMA ÁREA LATERAL



$$\rightarrow \frac{V}{A}=\frac{6\left(\frac{8^2\sqrt{3}}{4}\right)\times 16}{6(16\times 8)}=2\sqrt{3}$$

RPTA : "A"

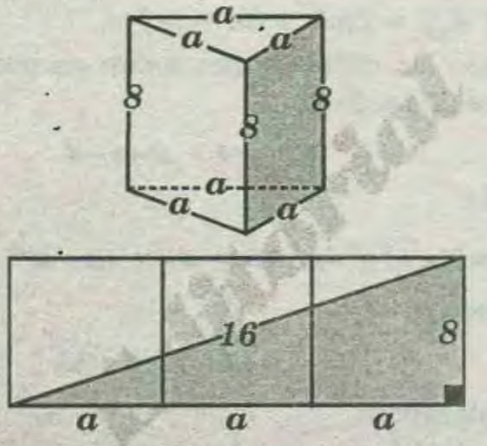
PROBLEMA 16 :

En u prisma triangular regular cuya altura mide **8** y el desarrollo de su superficie lateral es una región rectangular cuya diagonal mide **16** . Entonces, el volumen del sólido limitado por el prisma, es:

A) $24\sqrt{3}$ B) $25\sqrt{3}$ C) $\frac{125}{3}\sqrt{3}$

D) $\frac{128}{3}\sqrt{3}$ E) $\frac{130}{3}\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



* Por el teorema de pítagoras, en el triángulo sombreado: $16^2=8^2+(3a)^2$

* Operando :

$$a=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

* Se desea:

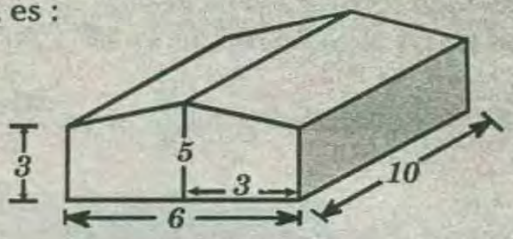
$$V=\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)\frac{2\sqrt{3}}{4}\times 8=\frac{128\sqrt{3}}{3}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 17 :

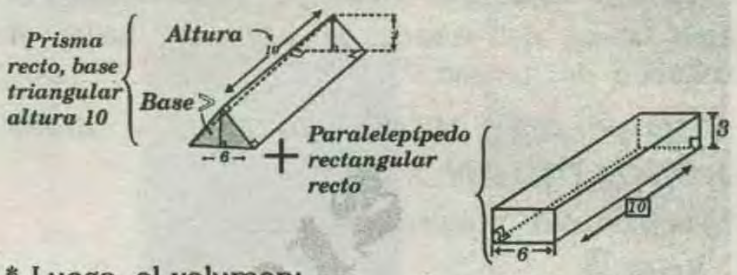
El volumen de agua contenido en el sólido mostrado en la figura , es :

A) 300
B) 240
C) 225
D) 210
E) 180



RESOLUCIÓN :

* El sólido dado, equivale a:



* Luego, el volumen:

$$V=V_{prisma}+V_{paralelepípedo}$$

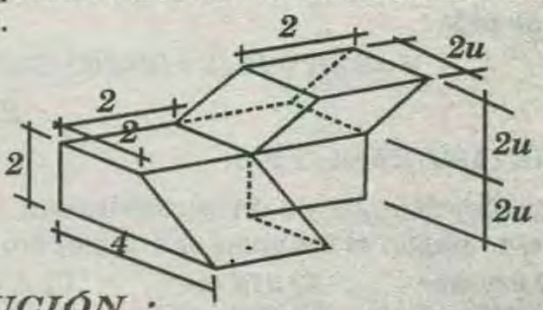
$$V=\left(\frac{6\times 2}{2}\right)\times 10+6\times 10\times 3=240$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 18 :

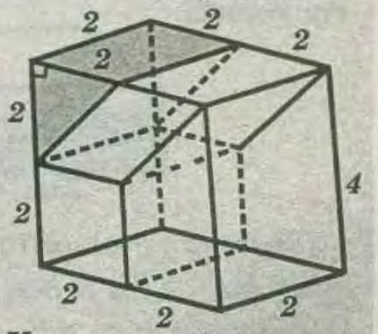
El gráfico representa la isometría de un sólido. Halle su volumen.

A) $28\mu^3$
B) 24
C) 34
D) 18
E) 22



RESOLUCIÓN :

* Luego de juntar adecuadamente las piezas , el sólido equivalente será:



$$V_{pedido}=V_{paralelepípedo}-V_{sombreado}$$

$$\rightarrow V_{pedido}=4\times 2\times 4-\frac{1}{2}(2)(2)(2)$$

$$\rightarrow V_{pedido}=28$$

RPTA : "A"

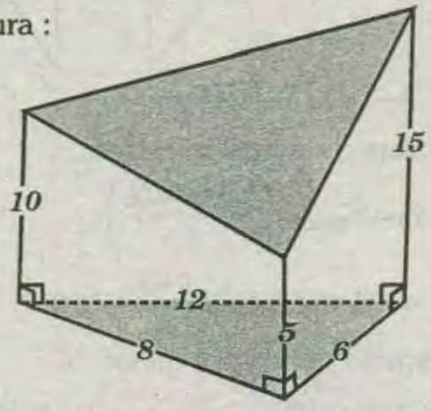
PROBLEMA 19 :

Un tronco de prisma triangular recto tiene por aristas básicas a segmentos cuyas longitudes son **8 ; 12** y **6μ**. Las aristas laterales opuestas a estos lados miden **15 ; 5** y **10μ** respectivamente, halle el área lateral del tronco.

A) 220μ² B) 250 C) 270 D) 3000 E) 320

RESOLUCIÓN :

* De la figura :



$$A_L=\frac{12}{2}(10+15)+\frac{8}{2}(10+5)+\frac{6}{2}(5+15)$$

$$\Rightarrow A_L = 6\times25 + 4\times15 + 3\times20 = 270$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 20 :

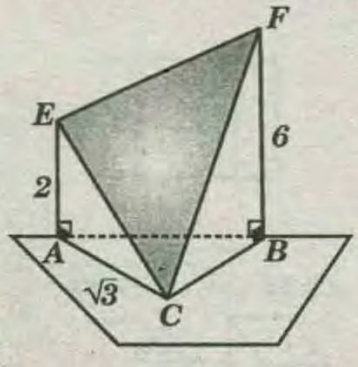
En un triángulo equilátero **ABC** de lado $\sqrt[4]{3}m$ se levanta en **A** y en **B**, segmentos **AE=2m** y **BF=6m**, ambos perpendiculares al plano **ABC** .

Hallar el volumen del sólido **ABCEF**

A) $2\sqrt{3}m^3$ B) $3m^3$ C) $2m^3$. D) $4\,m^3$ E) $8m^3$

RESOLUCIÓN :

* El sólido **ABCEF** es un tronco de prisma recto.
* El volumen pedido, será :



$$V=\left(\frac{2+6+0}{3}\right)\left(\sqrt[4]{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\rightarrow V=2$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 21 :

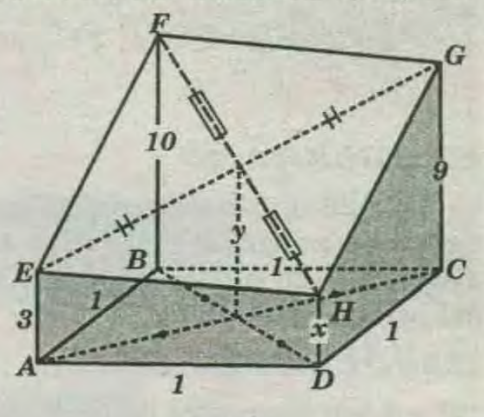
Un tronco de prisma recto cuya base es cuadrado **ABCD** de lado **1m** , se levantan perpendicularmente al plano de su base las cuales miden:

AE= 3m; BF= 10m CG= 9m y **DH= xm** . Calcular el volumen del tronco de prisma. (en m^3).

A) 36 B) 27 C) 18 D) 6 E) 12

RESOLUCIÓN :

* Por la propiedad de la base media en el trapecio **AEGC** :



$$y=\frac{3+9}{2}=6$$

* y en ▱ **BFHD**:

$$y=\frac{10+x}{2}$$

$$\rightarrow 6=\frac{10+x}{2}\rightarrow x=2$$

* Luego, el volumen del tronco de prisma es:

$$V=\frac{1}{2}\times\frac{(3+10+2)}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{(10+9+2)}{2}=6$$

RPTA : "D"

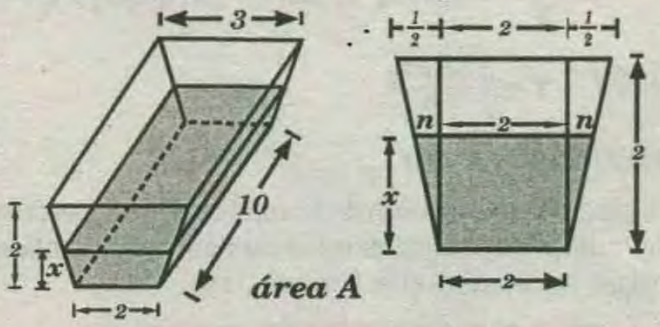
PROBLEMA 22 :

Una batea de **10** pies de largo y sección trapecial isósceles de altura **2** pies, base inferior **2** pies y base superior **3** pies. Se vierte agua en la batea a una razón constante . Cuando el volumen del agua es de **45/2** pies³. ¿A que altura de la base se encuentra el agua?

A) 2/3 B) 1/4 C) 3/2 D) 1/2 E) 1

RESOLUCIÓN :

* Incógnita : **x**



* El volumen de agua (Prisma recto de base trapecial y altura **10** pies)

$$A(10)=\frac{45}{2}\rightarrow A=\frac{9}{4}$$

* Con el gráfico de la base
* Por semejanza :

$$\frac{n}{\frac{1}{2}}=\frac{x}{2}\rightarrow n=\frac{x}{4}$$

* Luego :

$$A=(2+2n+2)\frac{x}{2}=\frac{9}{4}$$

$$\rightarrow 4(2+n)x=9 \rightarrow 4\left(2+\frac{x}{4}\right)x=9 \rightarrow x=1$$

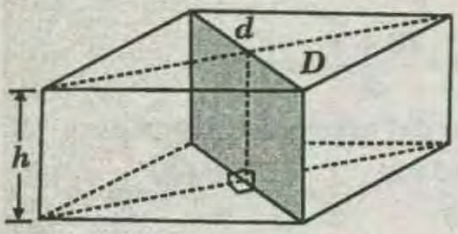
RPTA : "E"

PROBLEMA 23 :

La base de un paralelepípedo recto es un rombo, cuya área es igual a S . Las áreas de las secciones diagonales son iguales a S_1 y S_2. Hallase el volumen del paralelepípedo.

RESOLUCIÓN :

* D y d son diagonales de las bases; h es altura:
* El volumen :



$$V=\frac{Dd}{2}\times h \quad .....(I)$$

* Con los datos: área de la base:

$$\frac{Dd}{2}=S \quad .....(II)$$

* Áreas de las secciones diagonales:

$$dh = S_1 .....(III)$$

$$Dh = S_2 .....(IV)$$

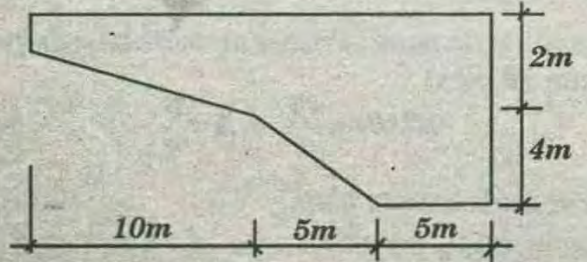
* Multiplicando *(II)* y *(III)* y. *(IV)* :

$$\frac{(Ddh)^2}{2}=SS_1S_2 \Rightarrow Ddh=\sqrt{2(SS_1S_2)}$$

* En *(I)* : $V=\sqrt{\frac{SS_1S_2}{2}}$

PROBLEMA 24 :

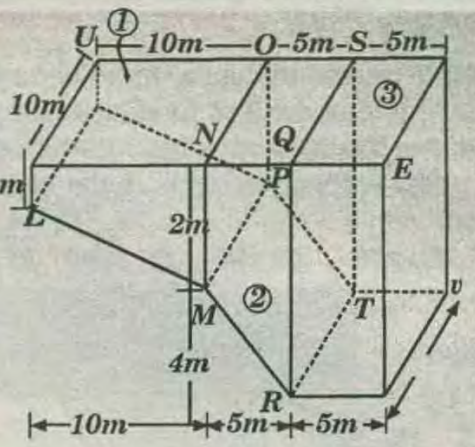
Una piscina de *10* metros de ancho tiene la sección longitudinal que se muestra en la figura . La cantidad de agua necesaria para llenarla , es :



A) $650m^3$ B) $600m^3$ C) $700m^3$ D) $800m^3$

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico :



* *Fig.(1)* : tronco de prisma recto:

$$V_1=S_{TNOU}\left(\frac{TL+MN}{2}\right)$$

$$\rightarrow V_1=(10)(10)\frac{1+2}{2}=150m^3$$

* *Fig.(2)* : tronco de prisma recto:

$$V_2=S_{NQSO}\left(\frac{MN+QR}{2}\right) \Rightarrow V_2=(5)(10)\left(\frac{6+2}{2}\right)=200m^3$$

* *Fig.(3)* : paralelepípedo rectangular:

$$V^3=(RT)(TV)(ET) \Rightarrow V^3=(5)(10)(6)=300m^3$$

* Se pide :

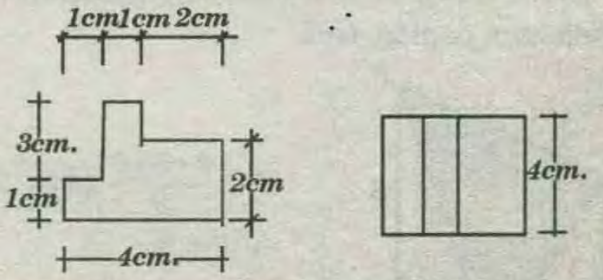
$$V_{total}=V_1+V_2+V_3$$

$$\rightarrow V_{total}=150m^3+300m^3+200mm^3=650m^3$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 25 :

En la figura se representa una pieza metálica que forma parte de una máquina. ¿Cuál es el volumen de dicha pieza?.

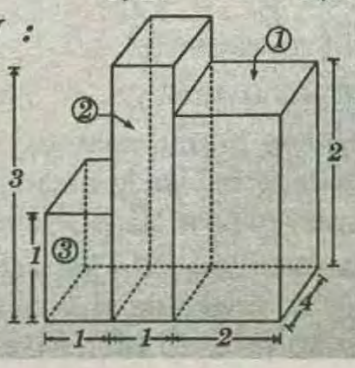


Vista frontal y de arriba

A) $32cm^3$ B) 16 C) 24 D) 64

RESOLUCIÓN :

* Construyendo :



* Luego dividimos la pieza en 3 paralelepípedos rectangulares :

$$V_1 = (2)\ (2)\ (4) = 16cm^3$$
$$V_2 = (1)\ (4)\ (3) = 12cm^3$$
$$V_3 = (1)\ (4)\ (1) = 4cm^3$$

* Se pide : $V_1+V_2+V_3 = 16+4+12 = 32cm^3$

RPTA : "A"

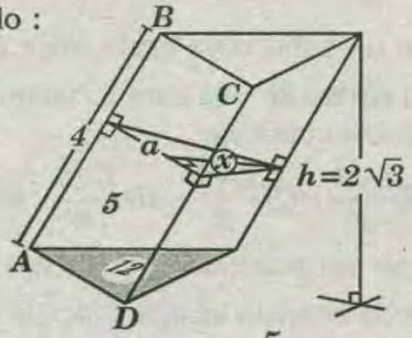
PROBLEMA 26 :

En un prisma oblicuo triangular el área de una cara lateral **ABCD** es $5\mu^2$, el área de la base es $12\mu^2$. Sabiendo que las aristas laterales están inclinados $60°$ respecto a la base y tiene longitud 4μ . Halle la distancia de la arista opuesta a la cara **ABCD** (en μ).

A) $\frac{40\sqrt{3}}{5}$ B) $\frac{41\sqrt{3}}{5}$ C) $\frac{43\sqrt{3}}{5}$ D) $\frac{44\sqrt{3}}{5}$ E) $\frac{48\sqrt{3}}{5}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Por dato : $(a)\ (4)=5 \rightarrow a=\frac{5}{4}$

*Luego del volumen :

$$12(2\sqrt{3}) = S_R(4) \Rightarrow 24\sqrt{3} = \frac{ax}{2}(4)$$

$$\Rightarrow 24\sqrt{3} = \frac{5}{4}\times\frac{x}{2}(4) \Rightarrow x = \frac{48\sqrt{3}}{5}$$

RPTA : "E"

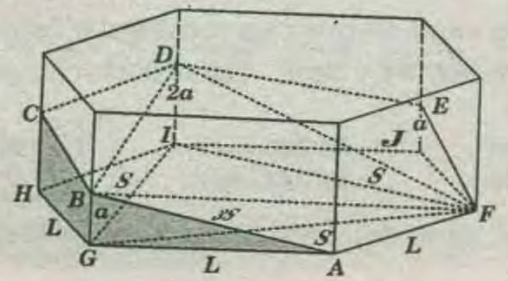
PROBLEMA 27 :

En el tronco de prisma regular **ABCDEF - AGHIJF** , **AF=L, EJ = a** , la base regular es **AGHIJ** . Halle el volumen del sólido limitado por el tronco de prisma.

A) $aL^2\sqrt{3}$ B) $\frac{3}{2}aL^2\sqrt{3}$ C) $3aL^2\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :

* Luego de sumar los volúmenes de los troncos de bases triangulares, resultará :



$$V = S\left(\frac{a}{3}\right) + S\left(\frac{a+2a+2a}{3}\right) + S\left(\frac{a+2a}{3}\right) + 3S\left(\frac{a+2a}{3}\right)$$

$$\rightarrow V = 6aS \ldots\ldots\ldots (I)$$

* Pero :

$$S = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \ldots\ldots\ldots (II)$$

* Luego (II) en (I) : $V = 6a\frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}aL^2\sqrt{3}$

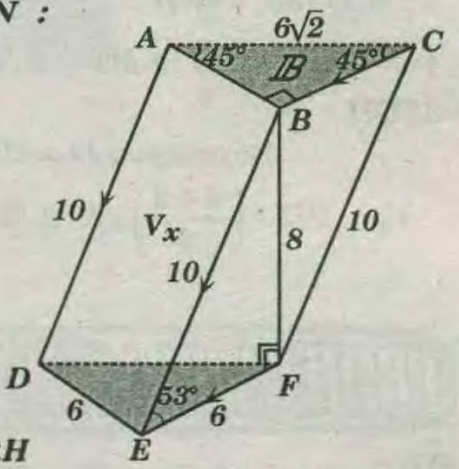
RPTA : "B"

PROBLEMA 28 :

Se tiene un prisma oblicuo **ABC–DEF**, tal que la proyección de **B** sobre la base opuesta es **F**; el ángulo determinado por $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ mide $53°$, **AB=EF**, $m\sphericalangle BCA = 45°$. y **FC=10** . Calcule el volumen de dicho prisma .

A) 144 B) 169 C) 100 D) 200 E) 156

RESOLUCIÓN :



Piden: $V_x = ? = B\times H$

* Como : $\overline{BE} \parallel \overline{AD}$ y $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$

$\Rightarrow m\sphericalangle BEF : m\sphericalangle \div \overline{AD}$ y $\overline{BC} = 53°$

* $\triangle$ $(37°$ y $53°)$: $BF = 8$ y $EF = 6 = AB$

$$V_x = \frac{6\times 6}{2}\times 8$$

$\Rightarrow V_x = 144$

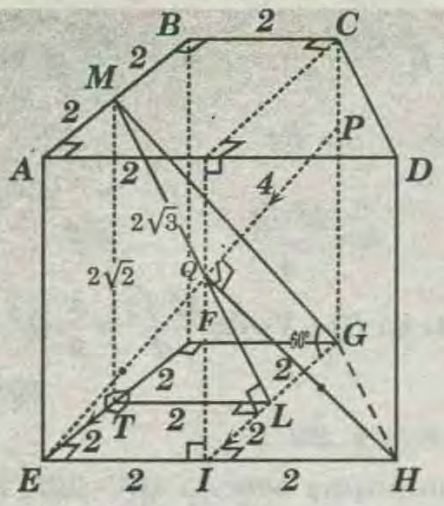
RPTA : "A"

PROBLEMA 29 :

En un prisma recto **ABCD-EFGH**, $m\sphericalangle CBA = m\sphericalangle BAD = 90°$, **M** es punto medio de $\overline{AB}$ y el ángulo determinado por $\overline{GM}$ y $\overline{FE}$ mide $60°$. Se ubica **P** en $\overline{CG}$ y se traza $\overline{PQ}$ perpendicular a la cara **HDAE, PQ=4, HQ=QE** y **BC=2** . Calcule el volumen del prisma.

A) $13\sqrt{2}$ B) $24\sqrt{2}$ C) $12\sqrt{2}$ D) $28\sqrt{2}$ E) $24\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



Piden :

$$V_{prisma} = V_x = ?$$

$$PQ = GT = 4 \Rightarrow TL = LG = 2$$

$$m\sphericalangle MLI = 90°\ (T{:}3 \perp s).$$

* $\triangle MLG$ (30° y 60°):

$$ML = 2\sqrt{3} \Rightarrow MT = 2\sqrt{2}$$

* ΔEQH :

Isósceles $\Rightarrow EI = IH = 2$

$$V_x = BH = \left(\frac{4+2}{2}\right) \times 4 \times 2\sqrt{2} \Rightarrow V_x = 24\sqrt{2}$$

RPTA : "B"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si un prisma tiene **39** aristas, ¿cuántas caras tiene?

A) 13 B) 10 C) 14 D) 15 E)26

02 De las siguientes proposiciones:

I) El número de aristas de un prisma *n*-gonal es $3n$.

II) El número de caras de un prisma de **60** vértices es **32**.

III) El desarrollo de la superficie lateral de un prisma cuadrangular regular es una región cuadrada. Es (son) verdadera(s):

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) I y II E) Todas

03 Se tiene un prisma recto de base rectangular, en donde: C = Número de caras, A = Número de aristas, V = Número de vértices

Calcular: $E = \dfrac{6C}{9(A-V)}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

04 Calcular el área lateral de un prisma cuadrangular regular, si su arista básica mide **2** y su arista lateral **8**.

A) 64 B)32 C) 16 D) 128 E) 81

05 Un recipiente de forma cúbica contiene $14m^3$ de agua; al introducir un cubo macizo de hierro, cuya arista es la mitad de la de aquel, el agua se eleva hasta enrasar al recipiente. Calcular el volumen del cubo macizo de hierro.

A) $1\ m^3$ B) $2\ m^3$ C) $\sqrt[3]{14}\ m^3$ B) $4\ m^3$ E) $6\ m^3$

06 Desarrollo del área lateral de un cubo es un rectángulo de diagonal igual a $\sqrt{17}$. Calcular el volumen del cubo.

A)1 B)$\frac{1}{3}$ C)2 D)$\sqrt{3}$ E)$\sqrt{2}$

07 Se tiene un cubo cuya arista mide *L*. Hallar la distancia del centro de una cara a cualquiera de los vértices de la cara opuesta.

A)$\frac{L\sqrt{6}}{2}$ B)$\frac{L\sqrt{3}}{2}$ C)$\frac{L\sqrt{2}}{2}$ D)$\frac{L\sqrt{5}}{2}$ E)$\frac{5L}{2}$

08 Se tiene un prisma regular cuya altura es congruente con la arista básica. Calcular el número de lados de la base del prisma, si su área total y lateral están en relación de **3** a **2**.

A)3 B)4 C)5 D)6 E)8

09 En un prisma, cuya base tiene «*n*» lados, hallar la suma de medidas de sus diedros.

A)360°n B)360°(n –2) C)180°n D)360°(n–1)E)180°(n–1)

10 Calcular el volumen de un prisma triangular regular, si todas sus aristas son congruentes y suman **18**.

A)$\sqrt{3}$ B)3 C)$2\sqrt{3}$ D)$3\sqrt{3}$ E)$4\sqrt{3}$

11 Calcular el área de la superficie total de un prisma cuadrangular regular tal que el desarrollo de su superficie lateral es un cuadrado cuya diagonal mide $4\sqrt{2}$.

A)16 B)17 C)18 D)19 B)20

12 Tres caras de una caja rectangular tienen áreas iguales de **49; 64** y $9cm^2$. Calcular el volumen de la caja.

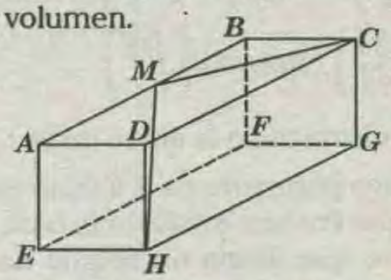
A) $168\ cm^3$ B) $126\ cm^3$ C) $120\ cm^3$
D) $324\ cm^3$ E) $343\ cm^3$

13 Las dimensiones de un paralelepípedo

rectangular son enteros y consecutivos. Calcular su volumen, si su área es *214*.

A) 60 B)180 C)120 D)210 E) 336

14 En la figura se muestra a un rectoedro, en donde: $BM=5, EH=10, AE=12$ y $m\sphericalangle CMB = m\sphericalangle MHE$ Calcular su volumen.



A)1620 B)1920 C)3 240 D)2520 E)1960

15 Se tiene el prisma recto *ABC - DEF*, en donde *M* es punto medio de $\overline{AC}$ y $AB=2(FM)$. Calcular la medida del ángulo que determinan $\overline{FM}$ y $\overline{DE}$.

A) 30° B) 37° C) 45° D) 53° E) 60°

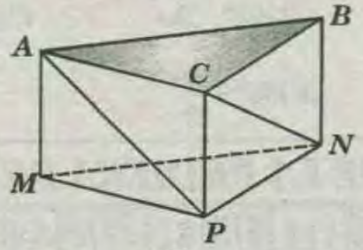
16 Se tiene el prisma recto *ABC – DEF*, en donde $AB = AD = AC$. En $\overline{BC}$ se ubica el punto *M*, de modo que: $AM = 3\sqrt{2}$, $BM = 1$ y $CM = 7$. Calcular el volumen del prisma.

A)15 B) 30 C)45 D) 60 E) 90

17 Un prisma recto de *10cm* de altura tiene por base a una región limitada por un cuadrilátero inscriptible en el cual al trazar una diagonal se forma un triángulo equilátero de lado *12cm* y otro isósceles. Calcular el volumen del prisma.

A) $480\sqrt{2}cm^3$ *B)* $480\sqrt{6}cm^3$ *C)* $480\sqrt{3}cm^3$
D) $160\sqrt{5}cm^3$ *E)* $320\sqrt{3}cm^3$

18 Se desea calcular el volumen del prisma regular mostrado, si: $\overline{AP} \perp \overline{CN}$ y $AB=2$.



A) $2\sqrt{6}$ *B)* $3\sqrt{5}$ *C)* $4\sqrt{7}$ *D)* $3\sqrt{3}$ *E)* $\sqrt{6}$

19 En el prisma recto *ABC–MNP* : $AC=PC$ y $m\sphericalangle ACB=90°$. Hallar su volumen, si su área lateral es *S* y su área básica es *A*.

A) $\frac{S\sqrt{A}}{3}$ *B)* $\frac{S\sqrt{3A}}{2}$ *C)* $\frac{A\sqrt{2S}}{S}$ *D)* $\frac{S\sqrt{2A}}{6}$ *E)* $\frac{S\sqrt{A}}{6}$

20 Se tiene un prisma regular triangular cuya arista lateral mide *8* y la diagonal del desarrollo de la superficie lateral es *10*. Calcular el área de la superficie total y su volumen (en ese orden).

A) 48; $8\sqrt{3}$ *B) 48;* $6\sqrt{2}$ *C) 36;* $8\sqrt{3}$
D)45;$6\sqrt{2}$ *E)48;* $16\sqrt{3}$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcule el volumen de un prisma oblicuo, si la sección recta es un triángulo circunscrito a un círculo de *3 m* de radio y el área lateral del sólido es $28\ m^2$.

A) $42\ m^3$ *B)* $44\ m^3$ *C)* $32\ m^3$ *D)* $21\ m^3$ *E)* $84\ m^3$

02 En un prisma oblicuo *ABCD – EFGH*, *G* es la proyección del centro del cuadrado *ABCD* cuyo lado mide *"a"*. Si *FBDH* es un cuadrado, halle el volumen de dicho prisma.

A) $\frac{\sqrt{6}}{3}a^3$ *B)* $\frac{\sqrt{6}}{2}a^3$ *C)* $\frac{\sqrt{6}}{5}a^3$ *D)* $\frac{\sqrt{6}}{4}a^3$ *E)* $2\sqrt{6}a^3$

03 En un prisma *ABC – A'B'C'* de base regular, la arista básica mide *"a"* y la arista lateral mide *"b"*. La arista lateral forma con las aristas básicas *45°*. Halle el volumen de dicho prisma.

A) $\frac{a^2b}{2}$ *B)* $\frac{ab^2}{3}$ *C)* $\frac{a^2b}{3}$ *D)* $\frac{ab^2}{4}$ *E)* $\frac{a^2b}{4}$

04 Determinar el volumen de un prisma regular triangular, tal que las diagonales de dos caras laterales se cruzan ortogonalmente y cuya longitud de éstas es $\sqrt{6}u$.

A) $2\sqrt{6}\,u^3$ *B)* $6\,u^3$ *C)* $\frac{\sqrt{6}}{2}u^3$ *D)* $2\sqrt{6}\,u^3$ *E)* $\sqrt{7}\,u^3$

05 En un paralelepipedo rectangular, calcular la suma de las medidas de las caras de un ángulo triedro, cuyo vértice es uno de los vértices del paralelepípedo y sus aristas son las diagonales de las caras que concurren en dicho vértice.

A) 360° B) 90° C) 180° D) 270° E) 120°

06 Se tiene un prisma regular *ABCDEF – A'B'C'D'E'F'*; del cual se desea calcular su volumen, si el área de la región *A'CE'* es $20\sqrt{3}$ y el diedro determinado por dicha región y la base del prisma mide *53°*.

A) $96\sqrt{3}$ *B)192* *C)* $192\sqrt{3}$ *D)* $380\sqrt{3}$ *E)* $300\sqrt{3}$

07 Calcule el volumen de un prisma triangular oblicuo, sabiendo que su altura es de *10 m*. El área de la sección recta es de $120\ m^2$ y el diedro que forma la base del prisma con la sección recta es *60°*.

A) $2700\ m^3$ B) $2400\ m^3$ C) $4800\ m^3$
D) $1200\sqrt{3}\ m^3$ E) $2400\sqrt{3}\ m^3$

08 En un prisma regular $ABC - A'B'C'$ se ubican los puntos medios M y N de $\overline{A'C'}$ y $\overline{C'B'}$, respectivamente, tal que $\overline{MB}$ y $\overline{NA}$ se intersecan en R y la $m\sphericalangle ARB = 53°$. Calcule el volumen de dicho prisma, si su arista mide $\sqrt[3]{16}$.

A) 9 B) $9\sqrt{11}$ C) $\sqrt{11}$ D) $3\sqrt{11}$ E) $6\sqrt{11}$

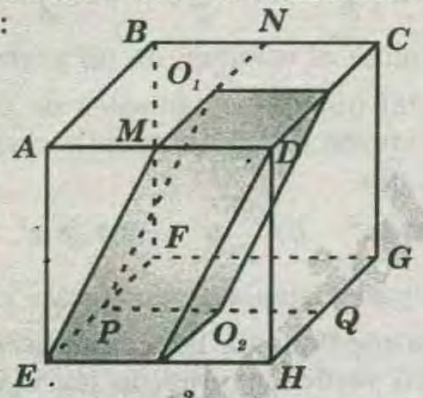
09 Un prisma oblicuo tiene por sección recta un trapecio rectángulo cuyas bases miden 2 y 6 m, la altura mide 3 m, la arista lateral mide 6 m y la altura del prisma mide 4 m. Calcule el área total del prisma.

A) $140\ m^2$ B) $162\ m^2$ C) $132\ m^2$
D) $66\ m^2$ E) $264\ m^2$

10 Calcule el volumen de un paralelepípedo rectangular, si su diagonal mide 10 y forma un ángulo que mide 45° con la base y un ángulo que mide 30° con una cara lateral.

A) $250\sqrt{2}$ B) $75\sqrt{2}$ C) $100\sqrt{2}$ D) $125\sqrt{2}$ E) 125

11 En el hexaedro $ABCD - EFGH$ de arista "a"; M, N, P y Q son puntos medios de las aristas. O_1 y O_2 son centros de las caras. El área lateral del prisma oblicuo es:



A) $\frac{a^2}{2}(1+2\sqrt{5})$ B) $\frac{a^2}{2}(1+\sqrt{5})$ C) $\frac{a^2}{2}(2+\sqrt{5})$
D) $\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{5}\right)$ E) $\frac{a^2}{4}(1+2\sqrt{5})$

12 En un prisma regular $ABCDEF - GHIJKL$, la región CKG tiene $20\sqrt{3}\ m^2$ de área, $\overline{GK}$ y $\overline{IL}$: se intersecan en T. Si: $3(CI) = 4(IT)$. Calcule el volumen del prisma (en m^3).

A) $192\sqrt{3}$ B) $191\sqrt{3}$ C) $193\sqrt{3}$
D) $182\sqrt{3}$ E) $172\sqrt{3}$

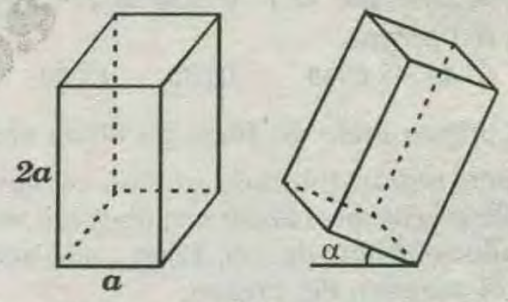
13 En un prisma triangular regular $ABC - A'B'C'$ en el cual todas sus aristas son congruentes, se ubica un punto D en la prolongación de $\overline{AB}$, de modo que: $AD = 2(BD)$. Halle la medida del ángulo diedro determinado por la base ABC y el plano que pasa por D, B' y el punto medio de $\overline{AC}$.

A) $ArcTg\left(\sqrt{\frac{13}{3}}\right)$ B) $ArcTg\left(2\sqrt{\frac{13}{3}}\right)$ C) $ArcTg\left(\sqrt{\frac{14}{3}}\right)$
D) $ArcTg\left(3\sqrt{\frac{14}{3}}\right)$ E) $ArcTg\left(\sqrt{\frac{15}{7}}\right)$

14 En un prisma recto la altura mide 1 y la base es un rombo cuyo perímetro es 8 y tiene un ángulo de 30° de medida. Por una arista de la base se traza un plano secante que forma un ángulo de 60° con la base determinando así una sección cuya área es (en u^2):

A) $2\sqrt{3}$ B) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ C) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ D) $\frac{6}{5}\sqrt{3}$ E) $\frac{5}{3}\sqrt{3}$

15 La figura muestra a un prisma recto cuadrangular regular, lleno de agua. Dicho prisma se inclina "α" apoyándose en una arista básica. Sabiendo que el volumen del líquido derramado es $\sqrt{3}/4$ del recipiente, calcule α.



A) 74° B) 75° C) 30° D) 60° E) 45°

16 En un prisma la medida del diedro determinado por su base y la sección recta mide "α". Halle la medida del ángulo entre la arista lateral y la base del prisma.

A) $90° + \alpha$ B) $90° - 2\alpha$ C) $90° - \frac{3}{2}\alpha$
D) $90° - \alpha$ E) $90° + \frac{\alpha}{2}$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

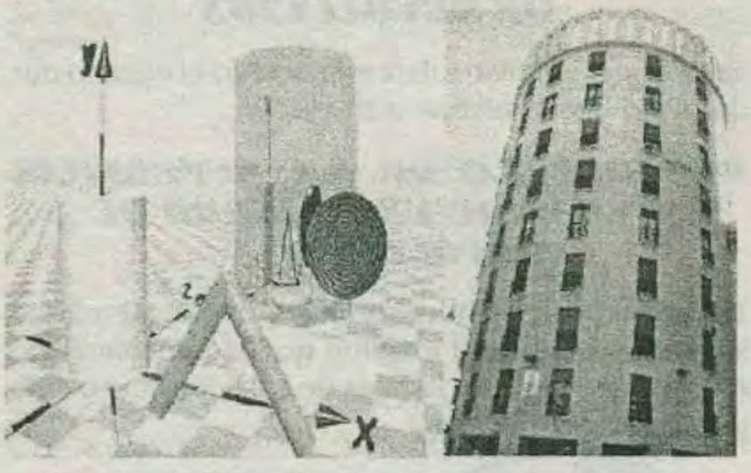
1)D	2)D	3)A	4)A	5)B	6)A	7)A	8)B	9)D	10)C
11)C	12)A	13)D	14)D	15)E	16)D	17)C	18)E	19)D	20)A

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)A	2)B	3)E	4)D	5)C	6)C	7)B	8)D	9)C	10)D
11)C	12)A	13)B	14)B	15)D	16)D				

OBJETIVO :

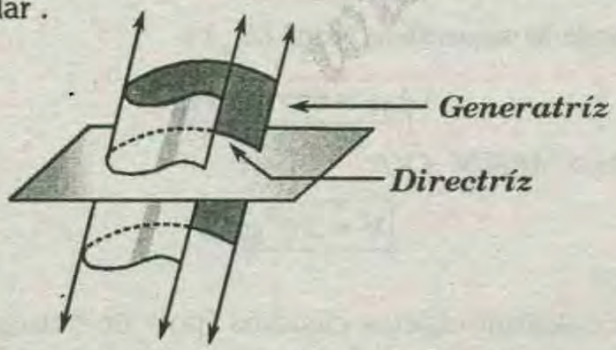
Conocer como se genera , un cílindro , así como el calculo de su área y volumen.



SUPERFICIE CILINDRICA

Se llama superficie cilíndrica a aquella superficie generada por una recta que , apoyándose sobre una curva , se mueve paralelamente a una dirección dada.

Las rectas que forman la superficie cilíndrica se llaman generatrices y la curva por cuyos puntos pasan se llama directríz . Si la directríz es una circunferencia, resulta una superficie cilíndrica circular .

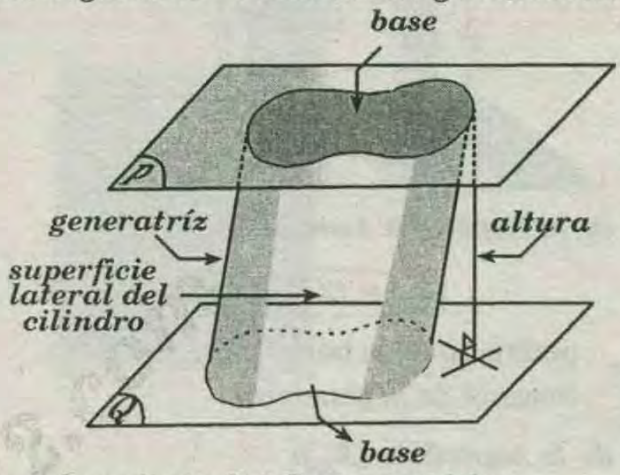


Superficie Cilíndrica Abierta

CILINDRO

Es aquel sólido geométrico comprendido entre dos planos paralelos entre si y secante a una superficie curva cerrada denominada superficie lateral del cilindro y en los planos paralelos se determinan secciones planas congruentes las cuales se denominan base del cilindro.

En la superficie lateral del cilindro se ubican segmentos paralelos entre si y congruentes, cuyos extremos son los puntos del contorno de las bases, dichos segmentos se denominan generatrices.



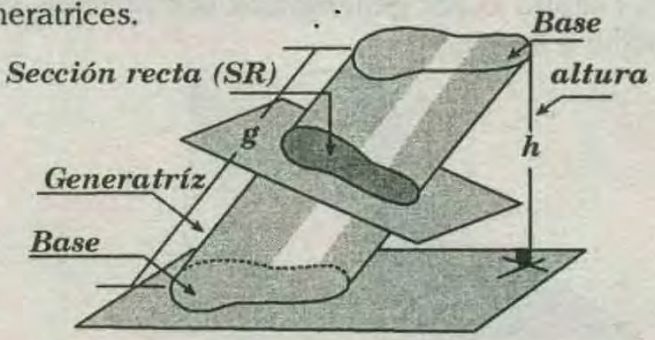
Los planos P y Q son paralelos.

SECCIÓN TRANSVERSAL DE UN CILINDRO :

Es la sección plana determinada en el cilindro por un plano paralelo a sus bases.

SECCIÓN RECTA DE UN CILÍNDRO

Es la sección plana determinada en el cilindro por un plano perpendicular y secante a todas sus generatrices.



Área de la superficie lateral (A_{SL}) :

$$A_{SL}=(2P_{SR})g$$

Área de la superficie total (A_{ST}) :

$$A_{ST}=A_{SL}+2(A_{base})$$

VOLUMEN (V) :

$$V=(A_{base})h \qquad V=(A_{SR})g$$

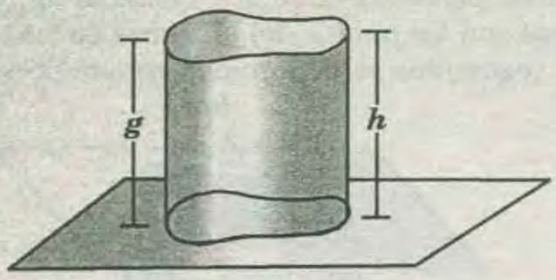
$2P_{SR}$: perímetro de la sección recta

A_{SR} : área de la sección recta

CLASIFICACIÓN

I) CILÍNDRO RECTO :

Es aquel cilindro cuyas generatrices son perpendiculares a sus bases.



Área de la Superficie Lateral (A_{SL}) :

$$\boxed{A_{SL} = (2P_{base})g}$$

$2P_{base}$: perímetro de la base

g : longitud de la generatríz

Área de la superficie (A_{ST}):

$$\boxed{A_{ST} = A_{SL} + 2(A_{base})}$$

A_{base} : Área de la base

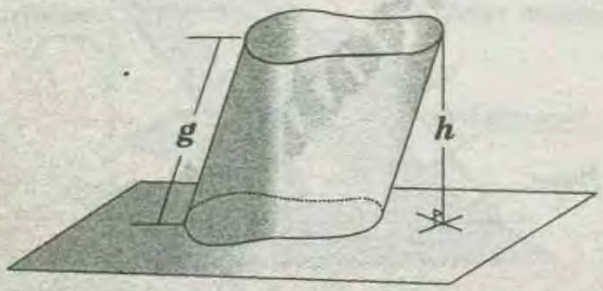
VOLUMEN (V) :

$$V = (A_{base}) \times h$$

h : longitud de la altura del cilindro

II) CILINDRO OBLÍCUO :

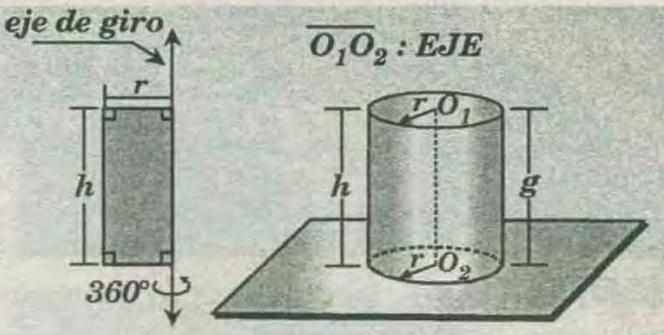
Es el cilindro cuyas generatrices son oblicuas con respecto a las bases.



* En el gráfico se muestra un cilindro oblicuo; se cumple: $h < g$; $A_{SR} < A_{base}$

III) CILÍNDRO CIRCULAR RECTO :

Es aquel cilindro recto cuyas bases son círculos, también es denominado ***cilindro de revolución*** porque es generado por una región rectangular al girar una vuelta en torno a uno de sus lados.

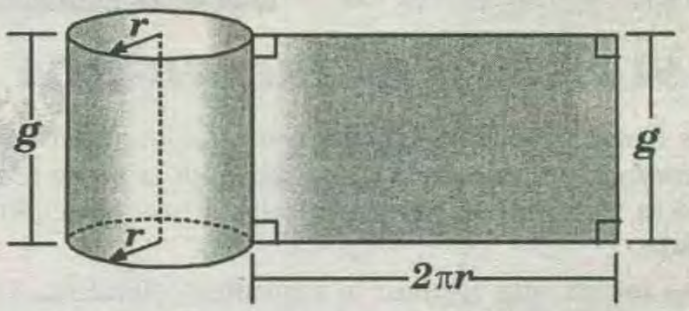


SECCIÓN AXIAL DE UN CILÍNDRO DE REVOLUCIÓN

Es una sección plana determinada en el cilindro por un plano que contiene a su eje.

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL DE UN CILÍNDRO DE REVOLUCIÓN

Resulta a una región rectangular en el cual uno de sus lados tiene igual longitud que la circunferencia de una base y el otro lado es de igual longitud que la generatríz del cilindro.



Área de la superficie lateral (S_{SL}) :

$$\boxed{A_{SL} = 2\pi rg}$$

Área de la superficie total (A_{ST}) :

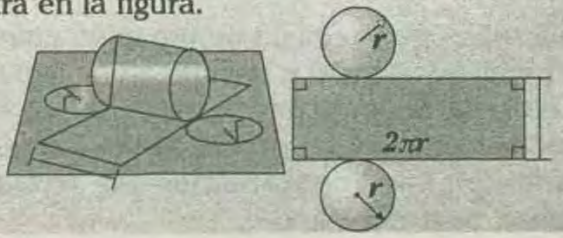
$$\boxed{A_{ST} = 2\pi r(g+r)}$$

VOLUMEN (V):

$$\boxed{V = \pi r^2 g}$$

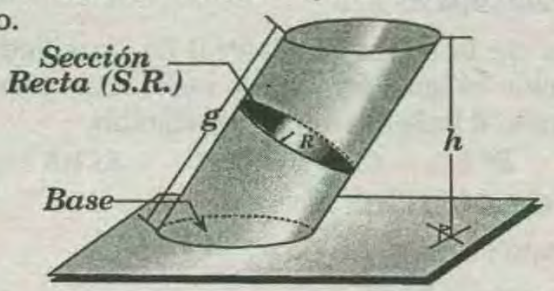
NOTA :

Para construir objetos cilindros (pote de conservas, tarros de leche, recipientes para pinturas), es necesario hacer el diseño en una plancha de latón y luego realizar el corte correspondiente. Tal como se muestra en la figura.



CILÍNDRO OBLICUO DE SECCIÓN RECTA CIRCULAR

Es aquel cilindro oblicuo cuya sección recta es un círculo.



Área de superficie lateral (A_{SL}) :

$$\boxed{A_{SL} = 2\pi Rg}$$

R : Radio de la sección recta

Área de la superficie total (A_{ST}):

$$\boxed{A_{ST} = A_{SL} + 2(A_{base})}$$

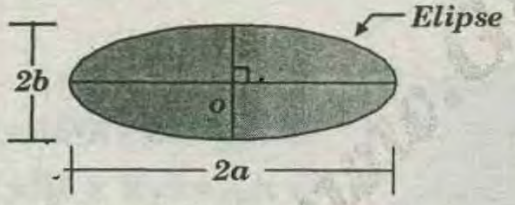
VOLUMEN (V):

$$\boxed{V = (A_{base})h} \quad \wedge \quad \boxed{V = \pi R^2 g}$$

NOTA:

Las bases del cilindro oblicuo de sección recta circular son regiones elípticas cuyas áreas se calculan en función de sus semiejes.

O: Centro de la elipse.



Área de la región elíptica

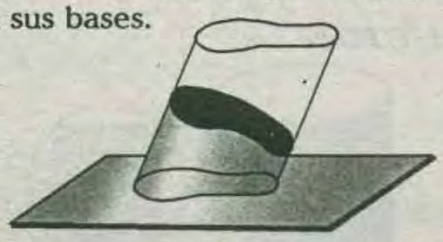
$$(A_e = \pi ab)$$

$2a$: Longitud del eje mayor

$2b$: Longitud del eje menor

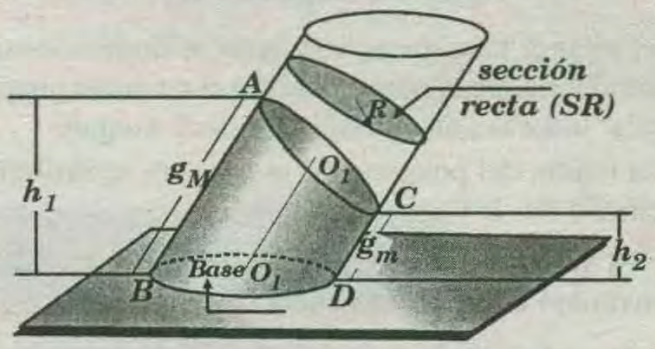
TRONCO DE CILÍNDRO

Es la porción del cilindro comprendida entre una base y un plano secante a todas sus generatrices no paralelo a sus bases.



* En el gráfico se muestra un tronco de cilindro oblicuo.

TRONCO DE CILÍNDRO OBLICUO DE SECCIÓN RECTA CIRCULAR



* $\overline{AB}$: generatríz mayor

* $\overline{CD}$: generatríz menor

* O_1 y O_2 : centro de las bases

$$\boxed{O_1O_2 = \frac{G_M + g_m}{2}}$$

Área de la superficie lateral (A_{SL}) :

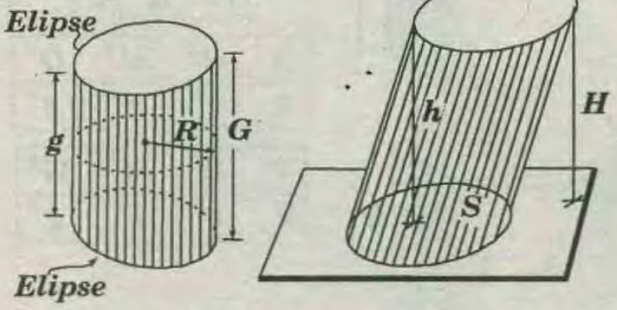
$$\boxed{A_{SL} = (2p_{SR})\left(\frac{g_M + g_m}{2}\right)}$$

* Pero: $2p_{SR} = 2\pi R$

VOLUMEN (V) :

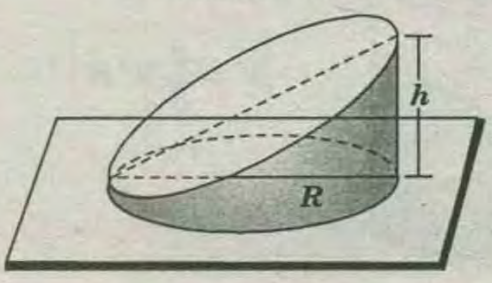
$$\boxed{V = A_{base}\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)} \quad \wedge \quad \boxed{V = A_{SR}\left(\frac{g_M + g_m}{2}\right)}$$

NOTA :



$$\boxed{V = \pi R^2\left(\frac{g + G}{2}\right)} \qquad \boxed{V = S\left(\frac{h + H}{2}\right)}$$

CUÑA CILINDRICA



$$\boxed{V = \left(\frac{\pi R^2 \times h}{2}\right)}$$

EL CILINDRO DE REVOLUCION COMO LÍMITE

Si el prisma inscrito es regular y si duplicasemos indefinidamente el número de caras de dicho prisma regular inscrito , en el límite , es decir cuando :

I) La región del polígono de la base se aproximará al círculo de la base del cilindro .

II) El perímetro del polígono de la base se aproximará a la circunferencia de la base .

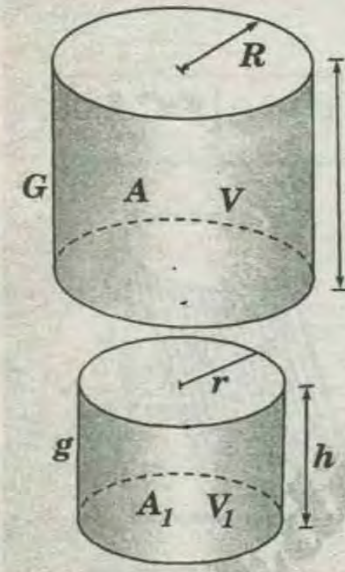
III) El apotema de la del polígono de la base se aproximará al radio del círculo .

IV) El área lateral del prisma se aproximará al área lateral del cilindro .

V) El volumen del prisma se aproximará al volumen del cilindro .

* Las fórmulas del cílindro de revolución se obtienen a partir del prisma recto regular al considerar al cilindro como el límite de la duplicación de los lados de la base.

CILINDROS SEMEJANTES

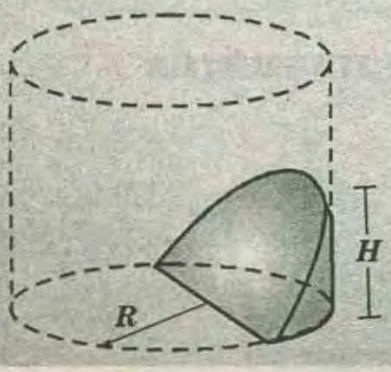


$$\frac{R}{r}=\frac{H}{h}=\frac{G}{g}$$

$$\frac{A}{A_1}=\frac{R^2}{r^2}=\frac{H^2}{h^2}=\frac{G^2}{g^2}$$

$$\frac{V}{V_1}=\frac{R^3}{r^3}=\frac{H^3}{h^3}=\frac{G^3}{g^3}$$

CUÑA CILINDRICA :



$$V=\frac{2}{3}R^2H$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

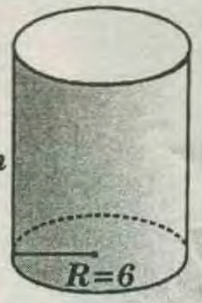
El área de la superficie lateral de un cilindro de revolución es igual área de su base, si el radio de la base mide **6** hallar la altura del cilindro.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0,5

RESOLUCIÓN :

* Del dato :

A_{SL} = área de la base



$$\rightarrow 2\pi h=\pi r^2$$

$$\rightarrow h=\frac{\pi r^2}{2\pi r}=\frac{r}{2}=\frac{6}{2}=3$$

RPTA : "C"

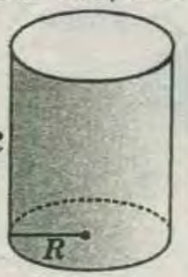
PROBLEMA 2 :

El radio de la base de un cilindro de revolución es R y su altura mide $4R$. Hallar el área de la superficie total del cilindro.

A) $10\pi R^2$ *B)* $8\pi R^2$ *C)* $12\pi R^2$

RESOLUCIÓN :

* El área total, será :



$$A_{ST}=2\pi r(h+r)$$

$$\rightarrow A_{ST}=2\pi\times R(4R+R)$$

$$\rightarrow A_{ST}=2\pi R\times 5R=10\pi R^2$$

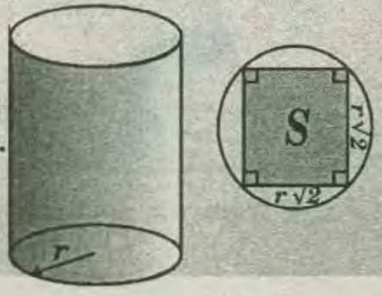
RPTA : "A"

PROBLEMA 3 :

En la base de un cilindro recto de revolución se inscribe una región rectangular de área S. Halle el volumen del mayor cilindro recto en donde la generatríz es igual al doble del diámetro de la base.

A) $\pi S\sqrt{2S}$ *B)* $\frac{3\pi S}{2}\sqrt{S}$ *C)* $4\pi S\sqrt{5}$

RESOLUCIÓN :



Se demuestra que, el área de una región rectangular inscrita en una circunferencia será máximo , cuando es un cuadrado.

$$\Rightarrow S=(r\sqrt{2})^2 \rightarrow r=\frac{\sqrt{2S}}{2} \text{.....(I)}$$

* El volumen del cilindro será máximo :

$$V=\pi r^2(4r)=4\pi r^3 \text{ ..... (II)}$$

* *(I)* en *(II)*: $V=\pi S\sqrt{2S}$

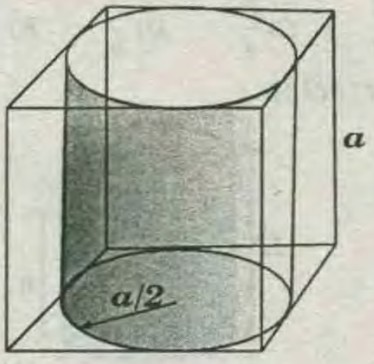
RPTA : "A"

PROBLEMA 4 :

Halle la relación entre los volúmenes de un hexaedro regular y un cilindro de revolución inscritas de tal manera que ambas bases están en caras opuestas del hexaedro.

A) $\frac{4}{\pi}$ B) $\frac{2}{\pi}$ C) $\frac{3}{\pi}$ D) $\frac{5}{\pi}$ E) $\frac{1}{\pi}$

RESOLUCIÓN :



* Se pide hallar :

$$\frac{V_{cubo}}{V_{cilindro}}=\frac{4a^3}{\pi a^3}=\frac{4}{\pi}$$

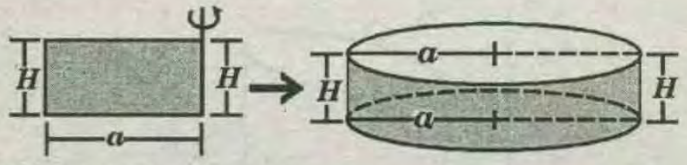
RPTA : "A"

PROBLEMA 5 :

Una región rectangular de perímetro *24cm* se hace girar sobre uno de sus lados que mide *Hcm* , obteniéndose un sólido cilíndrico. La expresión para determinar el volumen del sólido obtenido, en términos de *H*, es:

A) $V=\pi H^2(24-H)$ B) $V=\pi H^2(12-H)$ C) $V=\pi H(12-H)^2$
D) $V=\pi H(24-H)^2$ E) $V=\pi H(6-H)^2$

RESOLUCIÓN :



* Del enunciado :

$$2a+2H=24$$

* Luego : $a=12-H$

* El volumen del cilindro es:

V = (Área de la base)H

$\rightarrow V=\pi(12-H)^2\ H=\pi H(12-H)^2$

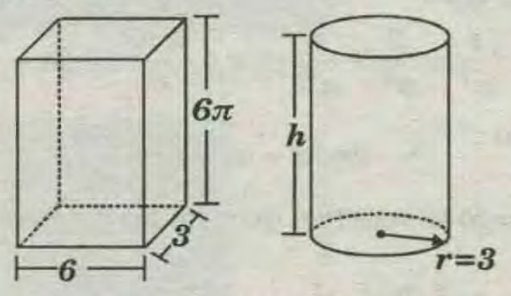
RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

Se tiene un paralelepípedo recto cuyas aristas miden *6; 3* y *6p* , el cual es equivalente a un cilindro de revolución de radio igual a *3*. Hallar la altura del cilindro.

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 9

RESOLUCIÓN :



* Sean :

V_p : Volumen del paralelepípedo

V_c : volumen del cilindro

* Como son equivalentes

$$V_c=V_p$$

$$\rightarrow \pi\times 3^2\times h=6\times 3\times 6\pi \rightarrow h=12$$

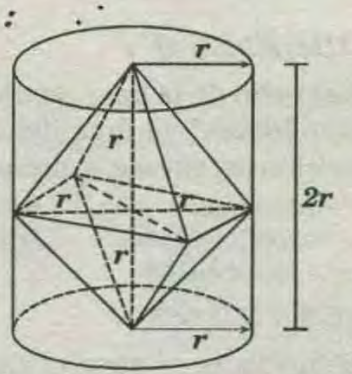
RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

Un octoedro regular de volúmenes *V* esta inscrito en un cilindro de revolución de modo que *2* vértices opuestos se encuentran en los centros de las bases. Halle el volumen del cilindro.

A) $\frac{\pi V}{3}$ B) $\frac{2\pi V}{3}$ C) $\frac{3\pi V}{2}$ D) πV E) $2\pi V$

RESOLUCIÓN :



Volumen del octaedro regular :

$$V=\frac{2}{3}(r\sqrt{2})^2 r \rightarrow r^3=\frac{3}{4}V \text{.....(I)}$$

Volumen del cilindro : $V_c=2\pi r^3$.....*(II)*

* *(I)* en *(II)* :

$$V_C=2\pi\left(\frac{3V}{4}\right)\Rightarrow V_C=\frac{3\pi V}{2}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

Halle el volumen del cilindro de revolución inscrito en un octaedro regular de arista a, de modo que las bases del cilindro se encuentran contenidas en dos caras opuestas del octaedro.

A) $\frac{a^3\pi}{2}$ B) $\frac{a^3\pi}{3}$ C) $\frac{a^3\sqrt{3}\pi}{2}$ D) $\frac{a^3\sqrt{6}\pi}{36}$ E) $a^3\pi\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

* $\triangle POM$:

$$\frac{1}{x^2}=\frac{2}{a^2}+\frac{4}{a^2}\Rightarrow x=\frac{a\sqrt{6}}{6}\Rightarrow 2x=\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

* Pero :

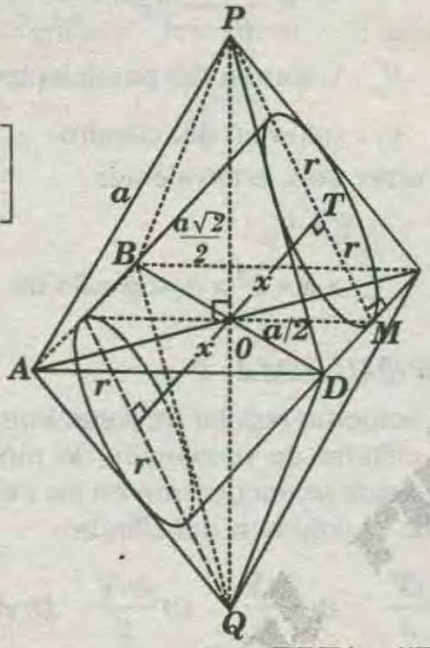
$$2r\sqrt{3}=a\rightarrow r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$$

* Luego el volumen del cilindro de revolución es :

$$V=\pi r^2(2x)$$

$$\Rightarrow V=\pi r^2\left[\frac{a\sqrt{6}}{3}\right]$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{36}$$



RPTA : "D"

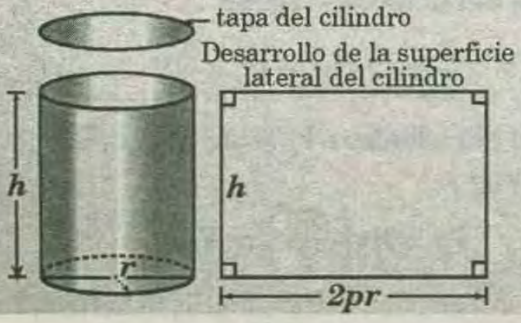
PROBLEMA 9 :

Si r es el radio de la base de un cilindro con tapa, de volumen $100cm^3$, el área del material usado en la construcción del envase, expresado en función de r, es:

A) $(\pi r^2+200/r)cm^2$ B) $(2\pi r^2+100/r)cm^2$
C) $(2\pi r^2+100/\pi r)cm^2$ D) $2(\pi r^2+100/r)cm^2$
E) $2(\pi r^2+100/\pi r)cm^2$

RESOLUCIÓN :

* Del enunciado, se tiene el siguiente gráfico:



* Piden:

$$\begin{pmatrix}\text{Área de la superficie}\\ \text{Total del cilindro}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Área de la tapa}\\ \text{del cilindro}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Área de la base}\\ \text{del cilindro}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Área de la superficie}\\ \text{lateral del cilindro}\end{pmatrix}$$

$$\text{Área de la superficie total del cilindro}=\pi r^2+\pi r^2+gh(2\pi r)$$

* Del dato:

$$\rightarrow \text{Volumen del cilindro}=100=(\pi r^2)h\rightarrow h=\frac{100}{\pi r^2}$$

$$\rightarrow \text{Área de la superficie total del cilindro}=2\left(\pi r^2+\frac{100}{r}\right)cm^2$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 10 :

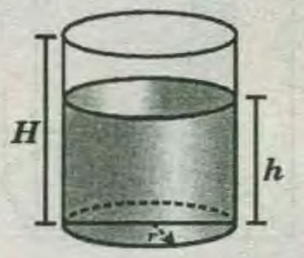
Un cilindro recto de volumen V cuya generatríz es el doble del diámetro de la base, contiene agua hasta los ¾ de volumen. Hallar en que relación se encuentran las alturas de los dos volúmenes respectivamente.

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

RESOLUCIÓN :

* piden: $\frac{H}{h}$

* Se sabe :



$$V=(\pi r^2)H \quad .....(I)$$

* Del dato:

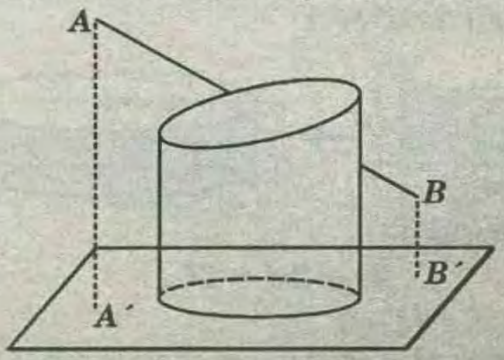
$$\frac{3}{4}V=(\pi r^2)h \quad .....(II)$$

* Luego (I) entre (II): $\rightarrow \frac{H}{h}=\frac{4}{3}$

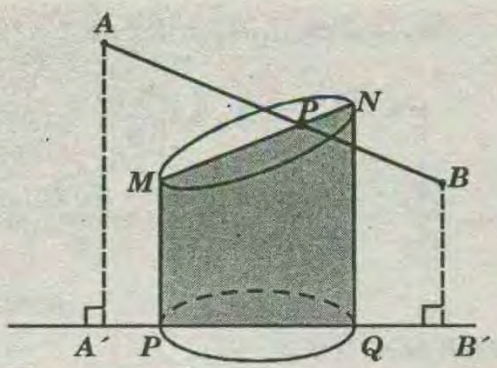
RPTA : "A"

PROBLEMA 11 :

Si $\overline{AA'}\ //\ \overline{BB'}$ y paralelos , a las generatrices. Halle la intersección entre la recta AB y el tronco de cilindro.



RESOLUCIÓN :



El plano pasa por las aristas $\overline{MP}$ y $\overline{NQ}$ diametralmente opuestas como $\overline{AA'}//\overline{MP}$; $\overline{BB'}//\overline{NQ}$ y $\overline{MP}//\overline{NQ}$ $\Rightarrow$ *A'ABB'* está en el plano axial , en consecuencia.

$$\overline{AB}\cap\overline{MN}=\{P\}$$

PROBLEMA 12 :

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) En un tronco de cilindro de revolución cualquier sección plana es una región elíptica o un círculo.

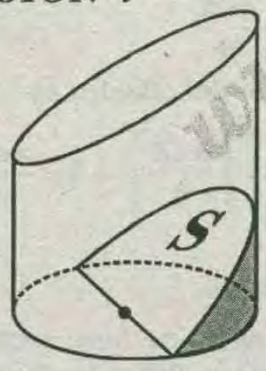
II) El eje de cualquier tronco de cilindro de revolución es igual a la semisuma de dos generatrices diametralmente opuestas.

III) Dado un cilindro de revolución de eje $\overline{AB}$ entonces cualquier plano secante que pase por el punto medio de $\overline{AB}$ e intercepta a todas las generatrices determinado dos troncos de cilindros equivalentes.

A) FVV B) VVV C) VVF D) FFF E) FFV

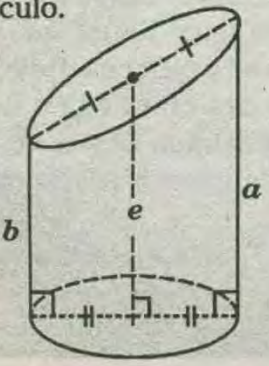
RESOLUCIÓN :

I)



La sección «*S*» no es una región elíptica ni un círculo.

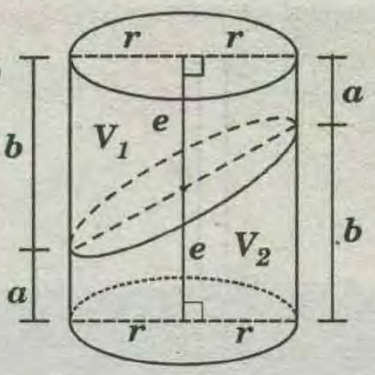
II)



En el trapecio rectángulo, por teorema:

$$e=\frac{a+b}{2}$$

III)



Por teorema:

$V_1 = pr^2 \times e$ ....*(I)*

$V_2 = pr^2 \times e$ ....*(II)*

* De *(I)* y *(II)*:

$V_1 = V_2$

RPTA : "A"

PROBLEMA 13 :

Dado un tronco de cilindro de revolución cuyo radio de base mide *R* , con generatríz mayor y menor de *3R* y *R* respectivamente ; se inscribe un cono de revolución donde su vértice es el centro de la base *R* del tronco de cilindro. Halle el volumen del cono.

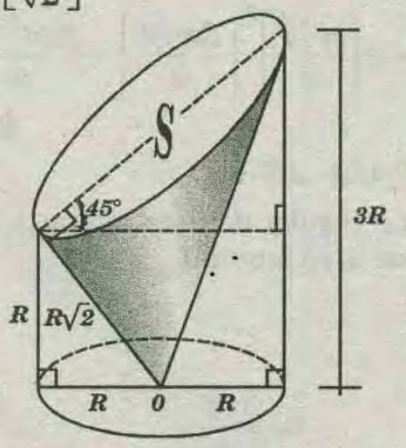
A) $\frac{\pi R^3}{3}$ *B)* $\frac{2\pi R^3}{5}$ *C)* $\frac{2\pi R^3}{3}$

RESOLUCIÓN :

* Por teorema :

$$\pi R^2 = S\cos 45°$$

$$\rightarrow \pi R^2 = S\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \rightarrow S = \pi\sqrt{2}R^2$$



* Luego el volumen del cono es :

$$V=\frac{1}{3}(\pi\sqrt{2})R^2(R\sqrt{2}) \Rightarrow V=\frac{2\pi R^2}{3}$$

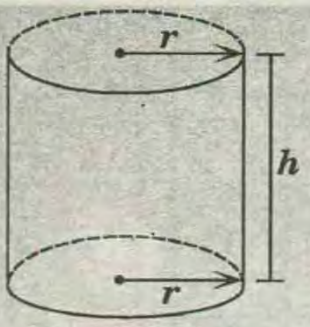
RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

De todos los cilindros circulares rectos de área total igual a $2\pi a^2$, halle el volumen del cilindro de máximo volumen.

A) $\frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}$ *B)* $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$ *C)* $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{6}$

RESOLUCIÓN :



* Por condicion del problema :

$$2\pi a^2 = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

* Depejando h :

$$h = \frac{a^2 - r^2}{r} \quad .....(I)$$

* Volumen del cilindro: $V = \pi r^2 h$ .....*(II)*

* *(I)* en *(II)*:

$$V = \pi r^2 \left[\frac{a^2 - r^2}{r}\right]$$

$$\Rightarrow V = \pi a^2 r - \pi r^3$$

* El volumen del cilindro será máximo , cuando la derivada de V es igual a cero.

$$V' = \pi a^2 - 3\pi r^2 = 0$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{3} \; ; \; h = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

* En *(II)*:

$$V = \pi\left[\frac{a\sqrt{3}}{3}\right]^2\left[\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right] = \frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}$$

RPTA : "A"

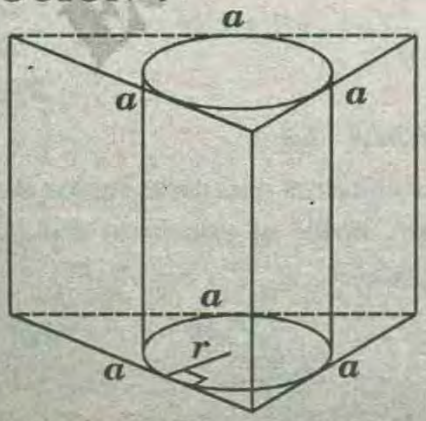
PROBLEMA 15 :

En un prisma regular de área lateral A_1 se inscribe un cilindro de área lateral A_2.

Halle : $\frac{A_1}{A_2}$.

A) $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ C) $\frac{4\sqrt{3}}{\pi}$

RESOLUCIÓN :



* Por condición del problema :

$$A_1 = 3ah \; ; \; A_2 = 2\pi rh$$

* Pero:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow A_2 = \frac{\pi a\sqrt{3}}{3}h$$

* Luego :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{3ah}{\frac{\pi a\sqrt{3}h}{3}} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$$

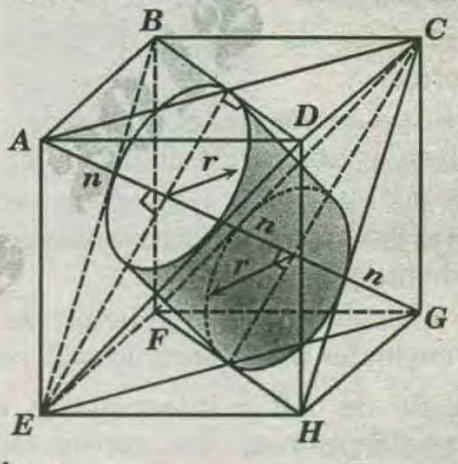
RPTA : "B"

PROBLEMA 16 :

En un hexaedro regular *ABCD – EFGH , AB = a* , halle el volumen del cilindro cuyas bases están inscritas en la secciones *EBD* y *FHC*.

A) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$ B) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$ C) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{18}$

RESOLUCIÓN :



* En el cubo :

$$3n = a\sqrt{3} \rightarrow n = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

* Además :

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

* Luego , el volumen del cilindro es :

$$V = \pi\left[\frac{a\sqrt{6}}{6}\right]^2\left[\frac{a\sqrt{3}}{3}\right] \Rightarrow V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{18}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 17 :

Se tiene un prisma recto de base rectangular *ABC*, siendo el ángulo *ABC = 90°* y la altura del prisma 6m. considerando como diámetro el segmento *BC* se dibuja un cilindro recto de igual altura que el prisma. La cara lateral mayor del prisma es dividida por una de las generatrices del cilindro en dos regiones rectangulares cuyas áreas son $18m^2$ y $6m^2$; la región rectangular menor es interior al cilindro. Hallar el volumen del cilindro.

A) $3\pi m^3$ B) $4\pi m^3$ C) $2\pi m^3$ D) $5\pi m^3$ E) $6\pi m^3$

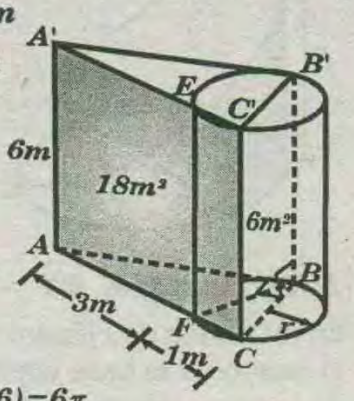
RESOLUCIÓN :

* Sea $\overline{EF}$ la generatríz que determina las regiones

rectangulares. Luego, con las áreas:

$AF \times 6m = 18m^2 \rightarrow AF = 3m$

$FC \times 6m = 6m^2 \rightarrow FC = 1m$



* Además: $\overline{BF} \perp \overline{AC}$

* En el $\triangle ABC$

$BC^2 = AC \times FC = (4)(1)$

$\rightarrow BC = 2 \rightarrow r = 1$

* Luego :

$V_{cilindro} = \pi r^2 \times EF = \pi(1)^2(6) = 6\pi$

RPTA : "E"

PROBLEMA 19 :

Un cilindro de revolución (radio **5cm**) es cortado por dos planos paralelos de manera que los ejes mayores de las elipses que se forman miden **16cm** . y la generatríz del cilindro oblicuo que aparece es de **30cm**. Calcular el volumen del cilindro oblicuo.

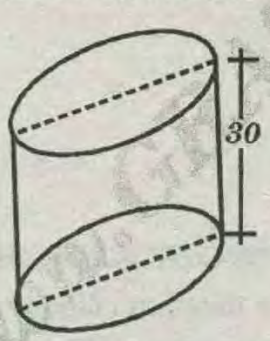
A)2355 cm³ B)2145 cm³ C)1935 cm³ D)1835 cm³

RESOLUCIÓN :

Graficamos el cilindro oblicuo, donde la sección recta es igual a la base del cilindro de revolución:

* Por fórmula:

$$V_{\substack{cilindro \\ área\ de}} = \begin{pmatrix} área\ de \\ la\ sección \\ Recta \end{pmatrix} \times g$$



$\rightarrow V_{cilindro\ oblicuo} = (\pi)(5)^2(30)$

$\rightarrow V_{cilindro\ oblicuo} = 2355$

RPTA : "A"

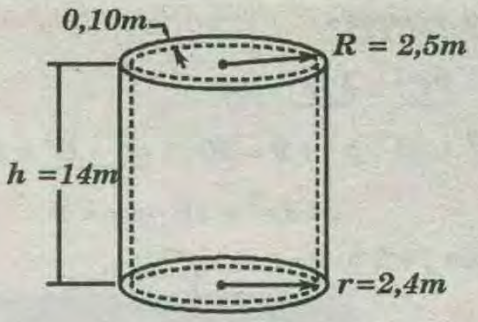
PROBLEMA 20 :

Se ha cabado un pozo de forma cilíndrica de **14m** de profundidad y **5** de diámetro, se le requiere revestir en primer lugar el área lateral con una capa de concreto de **10cm** de espesor y luego cubrirla con una capa impermeabilizadora. Si por el m^3 de concreto se cobra **S/.120** y por m^2 de impermeabilización **S/.18**, ¿a cuánto asciende el costo total?. (considerando: $\pi = 22/7$)

A)S/.7238,5 B)6367,6 C)6388,8 D)7024,6

RESOLUCIÓN :

* La capa de concreto es una corona cilíndrica de **2,5m** de radio mayor y **2,4m** de radio menor, cuyo volumen es:



$$V_c = \pi(R^2 - r^2)h = \frac{22}{7}(2{,}5^2 - 2{,}4^2)14$$

$\rightarrow V_c = 21{,}56m^3$

* La capa impermeabilizadora tendrá un área de:

$$A_L = 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 2{,}4 \times 14 = 211{,}2m^2$$

* El costo total será:

$$C = 21{,}56(120) + 211{,}2(18) = S/.\ 6388{,}8$$

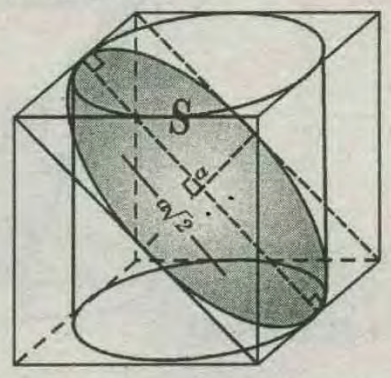
RPTA : "C"

PROBLEMA 21 :

Un cilindro tiene a sus bases inscritas en dos caras opuestas de un cubo de arista a. Un plano diagonal del cubo intercepta al cilindro determinado una sección transversal cuya área se pide calcular.

A) $\frac{\pi a^2\sqrt{6}}{2}$ B) $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$

RESOLUCIÓN :



La sección es una elipse , cuya área de su región es

$$S = \pi\left[\frac{a}{2}\right]\left[\frac{a\sqrt{2}}{2}\right] \Rightarrow S = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 22 :

En un tronco de cilindro recto de base circular , $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son las generatrices mínima y máxima respectivamente , (**A** y **B** en la base tronco). Si **P** es un punto de la circunferencia de la base , además $AD = 3u$, $BC = 5u$ y $PC^2 + PD^2 = 50u^2$, entonces el volumen de dicho tronco es (en u^3):

A)12π B) 15π C) 16π D) 18π E) 21π

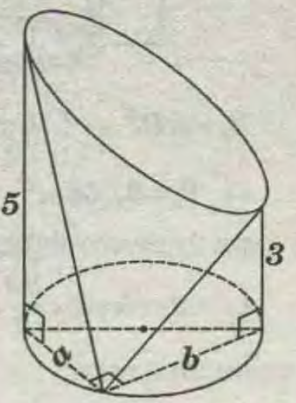
RESOLUCIÓN :

Dato: $\underbrace{PC^2} + \underbrace{PD^2} = 50$

$$a^2 + 25 + b^2 + 9 = 50 \Rightarrow \underbrace{a^2 + b^2} = 16$$

$$\Rightarrow 4r^2 = 16 \rightarrow r = 2$$

El volumen pedido es :



$$V = \pi(2)^2\left[\frac{3+5}{2}\right]$$

$$\Rightarrow V = 4\pi(4)$$

$$\Rightarrow V = 16\pi$$

RPTA : "C"

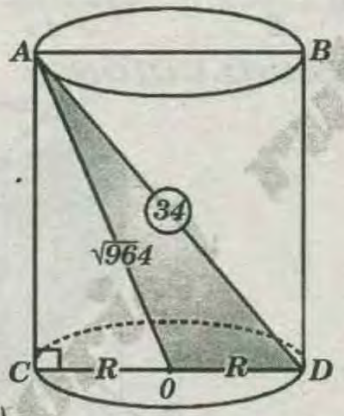
PROBLEMA 23 :

$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son diámetros paralelos de modo $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$. Si $AD = 34\mu$ y la distancia de A al centro de $\overline{CD}$ es $\sqrt{964}\,\mu$ entonces el área de una base del cilindro es (en μ^2).

A) 64π B) 48π C) 128π D) 96π E) 256π

RESOLUCIÓN :

* Por el teorema de :



Euclides, en el ΔOAD:

$$34^2 = \sqrt{964}^2 + R^2 + 2R(R)$$

$$\rightarrow R = 8$$

* Se pide :

$$A_{base} = \pi R^2 = \pi 8^2 = 64\pi$$

RPTA : "A"

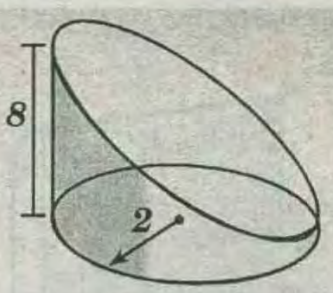
PROBLEMA 24 :

Un tronco de cilindro recto de base circular, cuyo radio mide 2μ . Sus generatrices máximas y mínimas miden 8μ y cero respectivamente. Halle el área lateral.

A) $12\pi\mu$ B) $16\pi\mu^2$ C) $18\pi\mu^2$ D) $20\pi\mu^2$ E) $22\pi\mu^2$

RESOLUCIÓN :

* El área lateral del tronco de cilindro, es:



$$A_L = 2\pi(2)\left(\frac{8+0}{2}\right) = 16\pi$$

RPTA : "B"

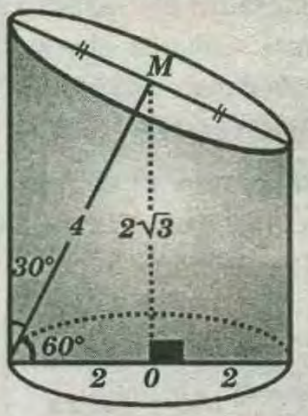
PROBLEMA 25 :

En un tronco de cilindro recto, el segmento que une el centro de la base elíptica, con un punto del límite de la base circular mide $4m$ y el ángulo que forma con una generatríz mide 30°. Halle el volumen de dicho tronco (en m^3).

A) $6\sqrt{3}\pi$ B) $8\sqrt{3}\pi$ C) $9\sqrt{3}\pi$ D) $12\sqrt{3}\pi$ E) $16\sqrt{3}\pi$

RESOLUCIÓN :

* El volumen del tronco de cilindro recto, será:



$$V = \pi(2)^2(2\sqrt{3})$$

$$\rightarrow V = 8\sqrt{3}\pi$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 26 :

Se tiene un cilindro de revolución de altura L y dos genratrices $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ diametralmente opuestas. Se traza un plano secante por el punto A el cual intersecta a $\overline{CD}$ en el punto P. Halle PD si la razón de volúmenes de los troncos de cilindros determinados están en la relación de 1 a 2:

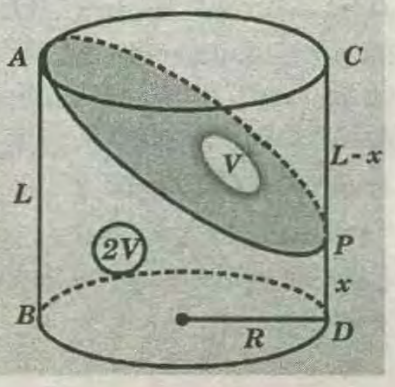
A) $\frac{L}{3}$ B) $\frac{2L}{3}$ C) $\frac{L}{4}$ D) $\frac{2L}{5}$ E) $\frac{L}{6}$

RESOLUCIÓN :

* De la figura:

$$V = \pi R^2\left(\frac{L-x}{2}\right) \ldots (I)$$

$$V = \pi R^2\left(\frac{L+x}{2}\right) \ldots (II)$$



* Dividiendo miembro a miembro : $\frac{1}{2}=\frac{L-x}{L+x}$

* Efectuando, resulta: $x=\frac{L}{3}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 27 :

En un prisma triangular regular se escribe un cilindro. ¿Qué relación existe entre las áreas laterales de estos dos cuerpos?.

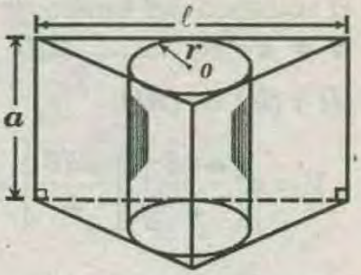
A) $\frac{\sqrt{3}}{3\pi}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$ C) $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ D) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

RESOLUCIÓN:

A_p = área lateral del prisma

A_c = área lateral del cilindro

$A_p = 3\ell a;\ A_c=2\pi ra$

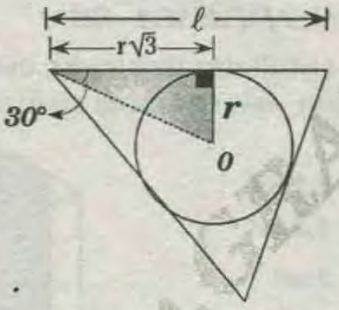


$$\rightarrow \frac{A_p}{A_c}=\frac{3\ell a}{2\pi ra}=\frac{3\ell}{2\pi r}$$

* Pero:

$$\ell=2r\sqrt{3}$$

* Luego:



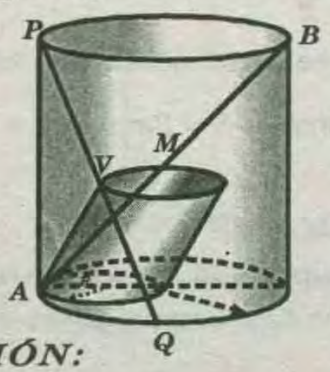
$$\frac{A_p}{A_c}=\frac{3(2r\sqrt{3})}{2\pi r}=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 28 :

Calcule la razón de volúmenes del cilindro de revolución y el cilindro circular oblicuo. Si V es la proyección ortogonal de M sobre $\overline{PQ}$ y $AM = MB$ (A es punto de tangencia).

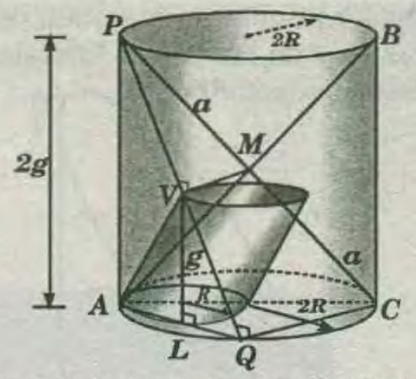
A) 5
B) 6
C) 8
D) 10
E) 12



RESOLUCIÓN:

$V_1 \rightarrow$ Volumen de cilindro mayor

$V_2 \rightarrow$ Volumen de cilindro menor



* Por teorema de las tres perpendiculares

$$m\sphericalangle PQC=90°$$

* Se traza $\overline{VL}$ perpendicular a la base inferior

$\triangle PAQ$; $\overline{VL}$ es la base media.

$$\left.\begin{aligned} V_1&=\pi(2R)^2\times 2g \\ V_2&=\pi R^2\times g \end{aligned}\right\}\oplus\rightarrow \frac{V_1}{V_2}=8$$

RPTA : "C"

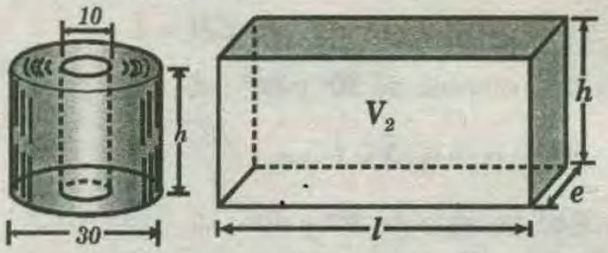
PROBLEMA 29 :

Un rollo de papel, cuyo diámetro es de **30cm** consiste en **500** vueltas de papel fuertemente enrollado en un cilindro de **10cm** de diámetro. ¿Qué longitud tiene el papel?.

A)$200\pi m$ B)300π C)100π D)400π E)500π

RESOLUCIÓN :

* Extendiendo el papel :



* El volumen del papel en el cilindro, es el mismo cuando está extendido, entonces : $V_1 = V_2$

$$V_1=\pi(15^2-5^2)h$$

$$V_2=\ell(e)h \Rightarrow V_2=\ell\left(\frac{10}{500}\right)h$$

* Luego de $V_2 = V_1$

$$\ell\frac{10}{500}h=\pi(15^2-5^2)h \rightarrow \ell=10000\pi cm$$

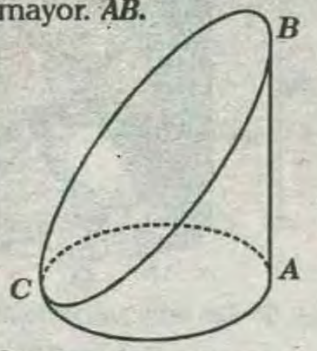
$$\rightarrow \ell=100\pi m$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 30 :

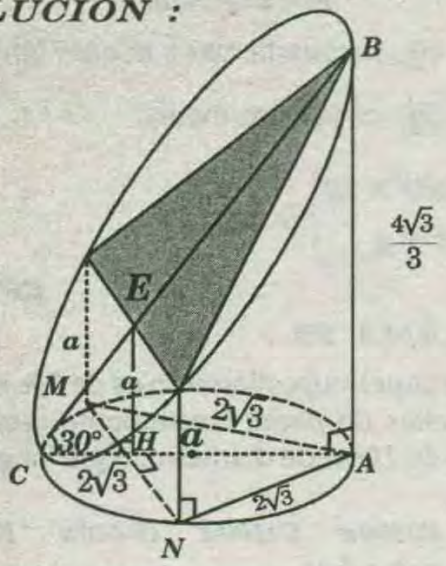
Se muestra un tronco de cilindro de revolución , en el cual la base superior y la base inferior forman un ángulo diedro de medida **30°**. Si el radio de la base mide **2**. Calcule el volumen del tronco de prisma

triangular regular inscrito en el tronco del cilindro , sabiendo que una de las aristas laterales coincide con la generatríz mayor. *AB*.



A) 4
B) 5
C) 6
D) $5\sqrt{2}$
E) $6\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



Δ *NMA* equilátero :

$$MN = MA = NA = 2\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow CH = 1$$

$\triangle$ *EHC* notable de *30°* y *60°* ; si:

$$EH = a \Rightarrow a\sqrt{3} = 1 \rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\triangle$ *BAC* notable de *30°* y *60°* ; si:

$$. \ AC = 4 \Rightarrow AB = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

* El volumen del tronco de prisma triangular regular es:

$$V = (2\sqrt{3})^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{3}\left[\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$$

* Simplificando: $V = 6$

RPTA : "C"

PROBLEMA 31 :

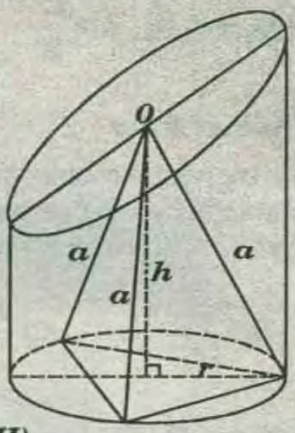
En un tetraedro regular de arista *«a»* se inscribe en un tronco de cilindro recto de base circular tal que su vértice coincide con el centro de la cara superior. Calcular el volumen del tronco de cilindro.

A) $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{6}$ B) $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{6}$ c) $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{9}$

RESOLUCIÓN :

* En un tetrasedro regular de arista cuya longitud es *«a»*, se cumple :

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{.....(I)}$$



* En la figura :

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ .....(II)}$$

* El volumen del tronco de cilindro es :

$$V = \pi r^2 h \text{ .....(III)}$$

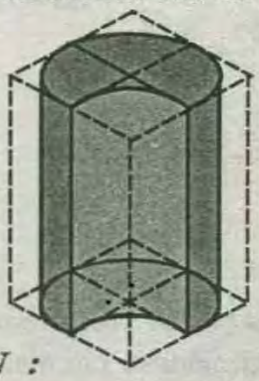
* *(I)* y *(II)* en *(III)*:

$$V = \pi\left[\frac{a\sqrt{3}}{3}\right]^2\left[\frac{a\sqrt{6}}{3}\right] \rightarrow V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{9}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 32 :

Si el cilindro mostrado, está inscrito en un cubo de arista *«a»*, entonces su área lateral es:



A) $2{,}5\pi a^2$
B) $1{,}5\pi a^2$
C) $2\pi a^2$
D) πa^2
E) $\frac{\pi a^2}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Si la arista del cubo es *«a»* , entonces :

$$r = \frac{a}{2} \quad (r : \text{radio del cilindro})$$

* Luego el área lateral del cilindro es :

$$S = 2\pi ra \rightarrow S = 2\pi\left(\frac{a}{2}a\right) \Rightarrow S = \pi a^2$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 33 :

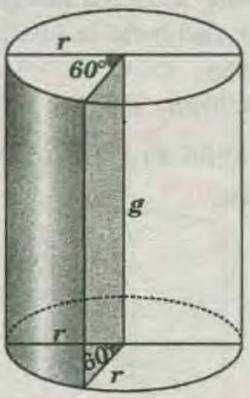
Una cuña cilíndrica está definida por un ángulo diedro de *60°*, el radio de su base *r* y generatríz *g*. Halle el área lateral.

A) $\frac{rg}{3}[\pi+6]$ B) $\frac{rg}{3}[\pi+5]$ C) $\frac{rg}{3}[\pi+7]$ D) $\frac{rg}{3}[\pi+4]$

RESOLUCIÓN :

* El área lateral de la cuña cilindrica es :

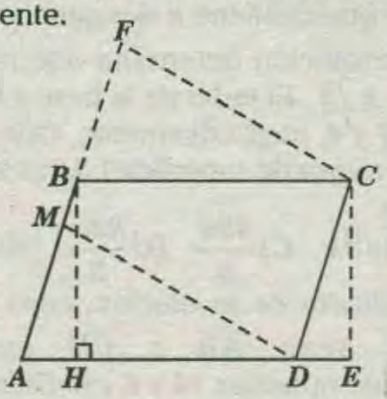
$$S = 2rg + \frac{\pi rg}{3} \Rightarrow S = \frac{6rg + \pi rg}{3} \Rightarrow S = \frac{rg}{3}(\pi + 6)$$



RPTA : "A"

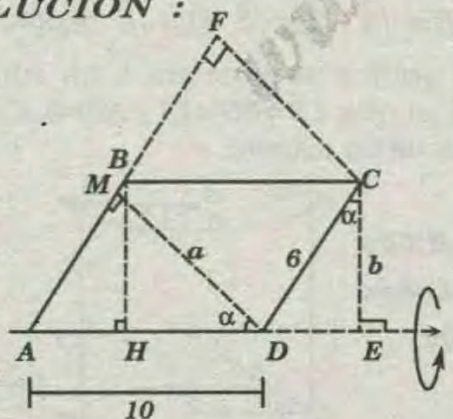
PROBLEMA 34 :

En la figura **ABCD** es un paralelogramo **AB = 6u** , **AD = 10u**. Calcule la relación entre los volúmenes de los cilindros que se obtienen al girar los rectángulos **DMFC** y **HBCE** alrededor de $\overline{FM}$ y $\overline{HE}$ respectivamente.



A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{9}{4}$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle AMD \sim \triangle DEC$:

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{10}{6} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{3} \quad \text{.....(I)}$$

* La relación de volumen de los cilindros de radios **a** y **b** es :

$$x = \frac{\pi a^2(6)}{\pi b^2(10)} \rightarrow x = \frac{3}{5}\left[\frac{a}{b}\right]^2 \quad \text{.....(II)}$$

* **(I)** en **(II)**:

$$x = \frac{3}{5}\left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

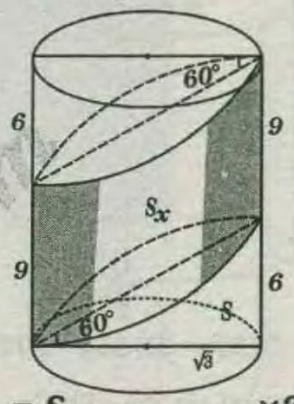
RPTA : "B"

PROBLEMA 35 :

Un cilindro circular recto de altura **15cm** y radio igual $\sqrt{3}$ **cm** es cortado por **2** planos paralelos que forman un ángulo de **30°** con el eje del cilindro ; cada uno de los planos intercepta a sólo una de las bases en un único punto. El área lateral de la parte del cilindro comprendida entre estos dos planos es (en cm^2).

A) $\pi\sqrt{3}$ B) $18\pi\sqrt{3}$ C) $6\pi\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



$$S_x = S_{\text{lateral del cilindro}} \times 2S$$

* Veamos :

$$S_x = 2\pi(\sqrt{3})(15) - 2 \times \frac{2\pi(\sqrt{3})(6)}{2}$$

$$\Rightarrow S_x = 30\pi\sqrt{3} - 12\pi\sqrt{3} = 18\pi\sqrt{3}$$

RPTA : "B"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si el número que expresa el área de la superficie lateral de un cilindro de revolución y el número que expresa su volumen son iguales, ¿cuánto mide el radio de su base?

A)1 B)1,5 C)2 D)2,5 E)π

02 Calcular el volumen de un cilindro recto cuya generatríz mide **4** y el diámetro de su base mide **6**.

A) 30π B) 32π C) 36π D) 38π E) 40π

03 Se tiene un cilindro de revolución, tal que el área de su superficie lateral es numéricamente igual a su volumen. Calcular la distancia del centro de la base a una generatríz.

A) 1 B) 2 C) 3 D)4 E)8

04 Calcular el volumen de un cilindro circular

WWW.GRATIS2.COM

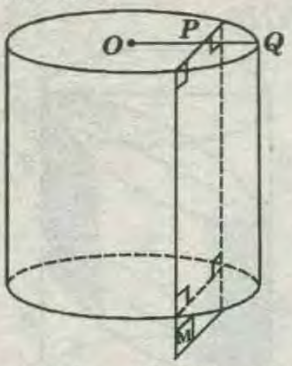
recto, si en su sección axial se encuentra inscrito un círculo de área 16π.

A)16π B)32π C)64π D)96π E)128π

05 Un cilindro de revolución, cuya altura es congruente al diámetro de la base, tiene un área total de 12π. Calcular su volumen.

A)32π B)16π C)$8\sqrt{2}\pi$ D)$4\sqrt{2}\pi$ E)4π

06 Según el gráfico el plano M es perpendicular a las bases del cilindro de revolución, $OP=PQ=3$, O es centro de la base y la generatríz mide 8. Calcule el área de la menor porción de superficie cilíndrica que determina el plano M.



A)12π B)24π C)32π D)36π E)72π

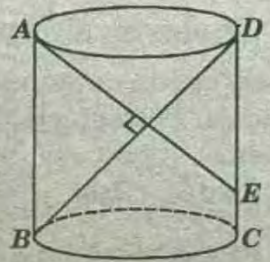
07 La sección axial de un cilindro de revolución es un rectángulo en el cual el largo es el doble del ancho y de perímetro 60. Calcular su volumen.

A)75π B)125π C)250π D)500π E)1000π

08 En el gráfico se muestra a un cilindro de revolución, tal que el área de su superficie lateral es igual a la suma de las áreas de sus bases y $BD=\sqrt{5}$. Calcular el volumen del cilindro.

A)2π B)$\sqrt{5}\pi$ C)$\frac{2\pi}{3}$ D)5π E)π

09 Calcular el volumen del cilindro de revolución mostrado, si: $DE=4$ y $EC=2$.

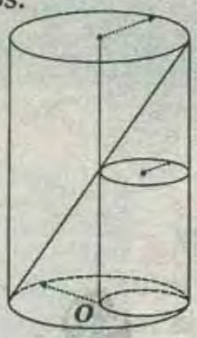


A)18π B)27π C)30π D)36π E)48π

10 Un cilindro contiene agua hasta la mitad de su capacidad. Se suelta un trozo metálico y el nivel de agua sube $3,5$. Si el radio de la base mide 4, calcular el volumen del trozo.

A)56π B)63π C)64π D)72π E)126π

11 Calcular la razón entre los volúmenes de los cilindros mostrados.



A)$\frac{1}{4}$ B)$\frac{1}{6}$ C)$\frac{1}{8}$ D)$\frac{1}{12}$ E)$\frac{1}{16}$

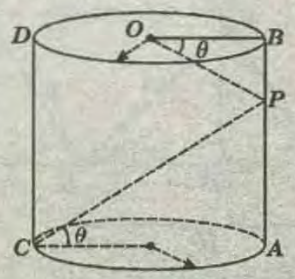
12 El plano que contiene a dos generatrices en un cilindro de revolución determina una región plana cuya área es $8\sqrt{3}$. El radio de la base y la altura del cilindro son 2 y 4, respectivamente. Calcular el área de la porción mayor de superficie lateral determinada en el cilindro.

A)16π B)$8\sqrt{3}\pi$ C)$\frac{42\pi}{5}$ D)$\frac{32\pi}{3}$ E)$\frac{24\pi}{5}$

13 En un cilindro de revolución, cuyo radio de la base es 2, sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ generatrices diametralmente opuestas (A y C en distintas bases), además el desarrollo de la superficie lateral es una región cuadrada. Calcular la longitud del menor recorrido para ir de A hasta C por la superficie lateral.

A)$2\pi\sqrt{3}$ B)$\pi\sqrt{3}$ C)$\pi\sqrt{5}$ D)$\pi\sqrt{6}$ E)$2\pi\sqrt{5}$

14 En el gráfico se muestra a un cilindro de revolución, tal que: $CP=PO=12$ y $AB=6$. Calcular el volumen de dicho cilindro.



A)56π B)64π
C)72π D)84π
E)100π

15 Hallar el volumen de un cilindro de revolución, si el área de su sección axial es S y el perímetro de su base es L.

A)SL B)$\frac{SL}{3}$ C)$\frac{SL}{2}$ D)$\frac{SL}{6}$ E)$\frac{SL}{4}$

16 En un prisma triángular regular se inscribe la

razón un cilindro de revolución. Calcular la razón entre sus áreas laterales.

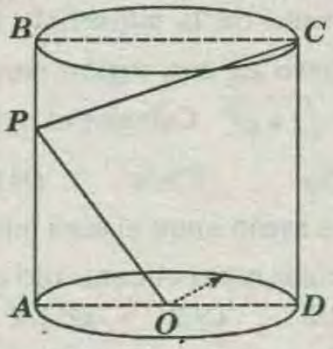
A) $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ C) $\frac{4\sqrt{3}}{\pi}$ D) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

17 En la figura se muestra a un cilindro de revolución y una pirámide regular inscrita en el cilindro. Calcular la razón entre sus volúmenes.

A) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ C) $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$ D) $\frac{2\sqrt{6}}{3\pi}$ E) $\sqrt{3}\pi$

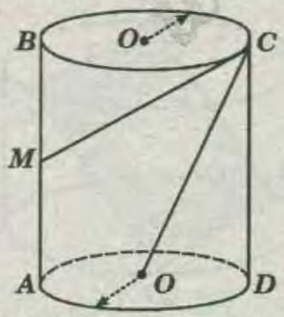
18 Según el diagrama: $AP = 2(PB) = 8$.

Calcular el volumen del cilindro recto mostrado.



A) 16π B) 32π C) 64π D) 128π E) 192π

19 Calcular el volumen y el área total del cilindro de revolución mostrado, si: $CM = \sqrt{37}$, $OC = \sqrt{34}$ y $AM = 4(BM)$.



A) $45\pi; 48\pi$ B) $45\pi; 36\pi$ C) $30\pi; 36\pi$
D) $30\pi; 48\pi$ E) $42\pi; 48\pi$

20 El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro de revolución es una región rectangular cuya diagonal mide **13**. Si la generatríz mide **5**, calcular el área total del cilindro.

A) $12\left(5+\frac{6}{\pi}\right)$ B) $6\left(12+\frac{4}{\pi}\right)$ C) $5\left(12+\frac{4}{\pi}\right)$ D) $8\left(9+\frac{\pi}{4}\right)$ E) 18π

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Al desarrollar la superficie lateral de un cilindro de revolución, se obtiene una región cuadrada, de área **A**. Hallar el volumen del cilindro.

A) $\frac{3A\sqrt{A}}{8\pi}$ B) $\frac{A\sqrt{A}}{8\pi}$ C) $\frac{A\sqrt{A}}{6\pi}$ D) $\frac{A\sqrt{A}}{4\pi}$ E) $\pi A\sqrt{A}$

02 Un tetraedro regular de volumen **V** está inscrito en un cilindro circular recto de modo que una arista es diámetro de una base del cilindro. Hallar el volumen del cilindro.

A) $\frac{\pi V}{3}$ B) $\frac{2\pi V}{3}$ C) $\frac{3\pi V}{2}$ D) $\frac{3\pi V}{4}$ E) $\frac{2\pi V}{5}$

03 Se tiene un prisma recto de base triangular **ABC** (recto en **B**), sobre $\overline{AB}$ (cateto menor) como diámetro se traza la base de un cilindro con igual altura que la del prisma. Si la generatríz de intersección divide a la cara lateral del prisma en dos regiones de áreas **6** y **18** y la altura mide **6**, calcular el volumen del cilindro.

A) 6π B) 8π C) 9π D) 12π E) 15π

04 El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro de revolución cuya sección axial tiene un área de **60 m²** es congruente con el desarrollo de la superficie lateral de un prisma recto de bases circunscriptibles a circunferencias de radio igual a **3 m**. Calcular el volumen del prisma.

A) $75\pi\ m^3$ B) $90\pi\ m^3$ C) $120\pi\ m^3$
D) $150\pi\ m^3$ E) $180\pi\ m^3$

05 Una cinta de papel de **40 cm** de largo, **5 cm** de ancho y **0,1 cm** de espesor, se enrolla como un cilindro circular recto. Calcular el radio de la base del cilindro (en **cm**)

A) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ B) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ C) $\frac{3}{\sqrt{\pi}}$ D) $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ E) $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$

06 Un recipiente de forma de un cilindro circular contiene agua, tendido horizontalmente tiene una longitud de **8 m** y un diámetro de base de **10m**. El agua determina una superficie rectangular de **64 m²** de área. Calcular la profundidad máxima del agua.

A) 4 m B) 5 m C) 6 m D) 7 m E) 8 m

07 Un cilindro de revolución, cuyo radio mide **"a"**, está intersectado por un plano que determina en las bases dos cuerdas de longitud **"a"**. Si el plano forma ángulos diedros de **60°** con los planos de las bases, hallar el área de la sección que resulta de la

intersección del plano con el cilindro.

A) $4a^2$ B) $5a^2$ C) $6a^2$ D) $6\sqrt{3}a^2$ E) $2\sqrt{3}a^2$

08 En un hexaedro regular *ABCD - EFGH* de arista *"a"*, hallar el volumen del cilindro de bases circulares inscritas en *EBD* y *FHC*.

A) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$ B) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$ C) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{18}$ D) $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$ E) $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{9}$

09 Un octaedro regular de volumen *V* está inscrito en un cilindro de revolución, de modo que sus vértices opuestos coinciden con los centros de las bases. Hallar el volumen del cilindro.

A) $\frac{\pi\sqrt{2}V}{3}$ B) $\frac{\pi V}{6}$ C) $\frac{\pi V}{4}$ D) $\frac{\pi V}{3}$ E) $\frac{3\pi V}{2}$

10 Un tetraedro regular de arista *"a"* esta inscrito en un cilindro, de modo que una de sus aristas es generatríz del cilindro. Hallar el volumen del cilindro.

A) $\frac{3\pi a^3}{25}$ B) $\frac{5\pi a^3}{36}$ C) $\frac{7\pi a^3}{30}$ D) $\frac{8\pi a^3}{35}$ E) $\frac{9\pi a^3}{32}$

11 De todos los cilindros circulares rectos de área total igual a $2\pi a^2$, hallar el volumen del cilindro de máxima capacidad.

A) $\frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}$ C) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$ E) $\pi a^3\sqrt{3}$

12 Los desarrollos de las superficies laterales de un cilindro recto y de un prisma triangular regular son cuadrados de lados *KL* y *L*, respectivamente. Si los sólidos son equivalentes, calcular el valor de *K*.

A) $\pi\sqrt[3]{\frac{6}{5}}$ B) $\sqrt[3]{\frac{\pi\sqrt{3}}{9}}$ C) $\sqrt[3]{\frac{\pi\sqrt{2}}{4}}$ D) $\sqrt[3]{\frac{4\pi}{5}}$ E) $\sqrt[3]{\frac{2\pi}{3}}$

13 En la base de un cilindro recto de revolución se inscribe una región rectangular de área *S*. Hallar el volumen del mayor cilindro recto en donde la generatríz es igual al doble del diámetro de la base.

A) $\pi S\sqrt{2S}$ B) $\frac{3\pi S\sqrt{S}}{2}$ C) $4\pi S\sqrt{S}$ D) $\pi S\sqrt{3S}$ E) $\frac{\pi S\sqrt{S}}{2}$

14 En un vaso que tiene la forma de un cilindro recto de revolución, la altura es el doble del diámetro de la base. Si el vaso contiene un líquido que ocupa las $\frac{3}{4}$ partes de su capacidad, determinar el ángulo que debe inclinarse desde su posición normal hasta el instante en que el líquido esté por derramarse.

A) 30° B) 37° C) 45° D) 53° E) 60°

15 Una población tiene *5 000* habitantes que consumen en promedio por persona *12* litros de H_2O diariamente. Determinar el radio de la base de un pozo cilíndrico que abastezca a la población y que tenga además capacidad para una reserva de *25%* del consumo diario y además la altura sea *4* veces su diámetro.

A) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{73}{\pi}}$ B) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{75}{\pi}}$ C) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{77}{\pi}}$ D) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{79}{\pi}}$ E) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{83}{\pi}}$

16 En un cilindro recto, de radio $2\sqrt{3}$, se traza un plano perpendicular a su base, el cual dista del centro de ella *3*. Calcular el volumen de la menor parte en que queda dividido el cilindro, si su altura mide *1*.

A) π B) 2π C) 3π D) $3\pi/2$ E) $\frac{\pi}{2}$

17 Las áreas de las proyecciones de un cilindro circular recto sobre un plano perpendicular a sus generatrices y sobre un plano paralelo a éstas son de 16π y *80*, respectivamente. Calcular el volumen del cilindro.

A) 160π B) 120π C) 100π D) 80π E) 60π

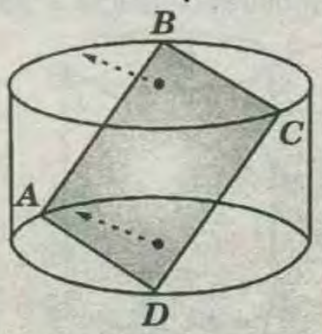
18 El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro equilátero es una región rectangular cuya diagonal mide $\sqrt{1+\pi^2}$. Calcular el radio de la base.

A) $1/\pi$ B) π C) $\sqrt{\pi}$ D) 1 E) 1/2

19 Calcular la razón entre el área total y el área de un cilindro circular recto circunscrito a una esfera.

A) 2/3 B) 1/2 C) 2 D) 3/2 E) 4/3

20 Si el área de la región cuadrada *ABCD* es *48* y $m\widehat{BC} = 120°$, calcular el volumen del cilindro circular recto.



A) $32\sqrt{3}\pi$ B) $22\sqrt{2}\pi$ C) $50\sqrt{2}\pi$ D) $64\sqrt{2}\pi$ E) $80\sqrt{2}\pi$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)C	3)B	4)E	5)D	6)B	7)E	8)E	9)D	10)A
11)C	12)D	13)E	14)C	15)E	16)B	17)B	18)E	19)A	20)A

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

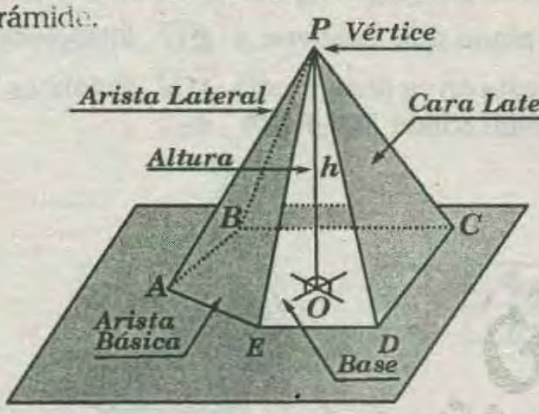
1)D	2)C	3)A	4)B	5)B	6)E	7)E	8)C	9)E	10)E
11)B	12)B	13)A	14)C	15)B	16)B	17)A	18)E	19)D	20)D

OBJETIVO :

Conocer las relaciones entre los elementos de una pirámide , así como su área y volumen.

PIRÁMIDE

Es aquel poliedro en el cual una de sus caras es una región poligonal cualquiera denominada base y sus otras caras son regiones triangulares denominadas caras laterales , todas ellas tienen un vértice en común el cual se le denomina vértice o cúspide de la pirámide.



* En la figura se muestra una pirámide pentagonal ***P- ABCDE.***

ÁREA DE LA SUPERFICIE LATERAL (A_{SL})

$$A_{SL} = \left(\begin{matrix}\text{Suma de las áreas} \\ \text{de las caras laterales}\end{matrix}\right)$$

ÁREA DE LA SUPERFICIE TOTAL (A_{ST})

$$A_{ST} = A_{SL} + A_{base}$$

A_{base} : Área de la base

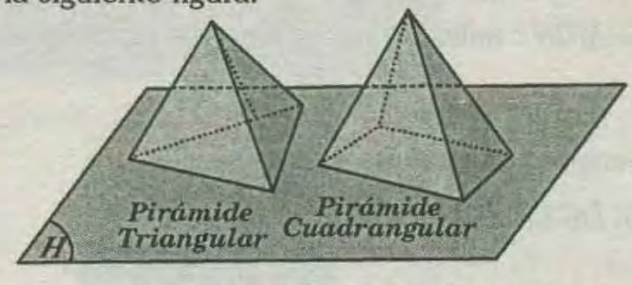
VOLUMEN (V) :

$$V = \frac{(A_{base})h}{3}$$

h: longitud de la altura de la pirámide.

NOTA :

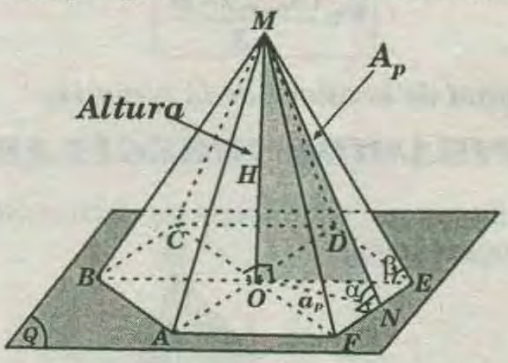
De acuerdo al número de lados de su base ; las pirámides pueden ser triangulares , cuadrangulares pentagonales ,.....si su base tiene tres , cuatro , cinco..... lados respectivamente ; tal como se muestra en la siguiente figura.



PIRÁMIDE REGULAR

Es aquella pirámide cuya base está limitada por un polígono regular (triángulo equilátero , cuadrado , pentágono regular, etc.) y, Además, tiene todas sus aristas laterales de igual longitud.

En toda pirámide regular las caras laterales son congruentes y el pie de altura es el centro de la base



En la figura se muestra una pirámide exagonal regular ***M - ABCDEF.***

* A_p : apotema de la pirámide ($MN = A_p$)

* a_p : apotema del polígono regular ***ABCDEF*** .

* ***O*** : centro de la base.

* $\overline{MO}$: altura de la pirámide , ***O*** es el pie de dicha altura .

* α : medida del diedro formado por una cara lateral con la base.

* β : medida del ángulo formado por una arista lateral con la base.

APOTEMA DE LA PIRÁMIDE REGULAR (A_p)

Es la perpendicular trazada del vértice de la pirámide hacia una arista básica .

En toda pirámide regular se cumple:

♠ Las caras laterales están limitados por triángulos isósceles congruentes entre sí.

♠ Las caras laterales y la base forman ángulos diedros de medidas iguales.

♠ Las aristas laterales forman con la base ángulos de medidas iguales.

♠ $\triangle MON$: aplicado por el teorema de Pitágoras.

$$(A_p)^2 = (a_p)^2 + H^2$$

H : longitud de la altura de la pirámide.

ÁREA DE LA SUPERFICIE LATERAL :

$$A_{SL} = P(A_p)$$

p: semiperímetro de la base

ÁREA DE LA SUPERFICIE TOTAL :

$$A_{ST} = A_{SL} + A_{base}$$

A_{base} : área de la base

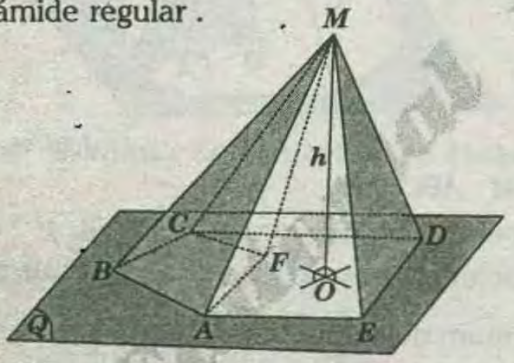
VOLUMEN (V) :

$$V = \frac{(A_{base}) \times H}{3}$$

h : longitud de la altura de la pirámide.

PIRÁMIDE IRREGULAR

Es aquella que no tiene todas las características de una pirámide regular .



En el gráfico se muestra las siguientes pirámides irregulares:

* Pirámide pentagonal ***M - ABCDE***
* Pirámide cuadrangular ***M - ABCF***
* Pirámide pentagonal ***M - AFCDE***

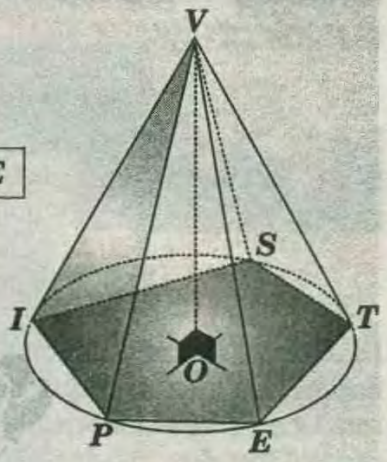
En cada una de las pirámides se aplica las siguientes fórmulas:

ÁREA DE LA SUPERFICIE LATERAL (A_{SL})

$$A_{SL} = \left(\begin{array}{l}\text{Suma de las áreas} \\ \text{de las caras laterales}\end{array}\right)$$

PROPIEDAD :

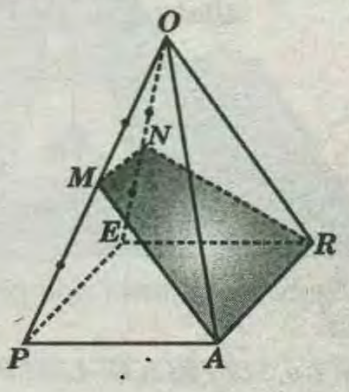
Si en una pirámide, su base es un polígono inscrito en una circunferencia y la altura cae en el centro de la base , entonces sus aristas laterales serán congruentes. Sea la pirámide ***V–PISTE*** siendo $\overline{VO}$ altura y O centro de la circunferencia .



$$VP = VI = VS = VT = VE$$

PROPIEDAD :

Se tiene una pirámide regular ***O–PERA***, de volumen ***"V"***. Un plano que contiene a $\overline{RU}$, intercepta a la cara opuesta en su línea media $\overline{MN}$. Entonces ***"V_x"*** volumen del sólido ***MN–PERA*** , es :

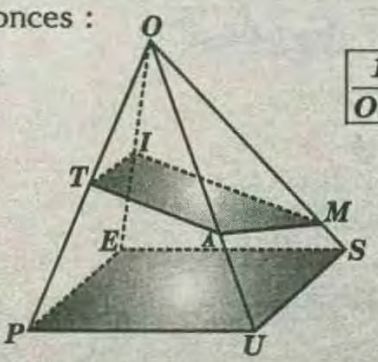


$$V_x = \frac{5}{8}V$$

PROPIEDAD :

O–PESU, es una pirámide regular de base cuadrangular. ***TIMA*** es un plano no secante a la superficie lateral .

Entonces :



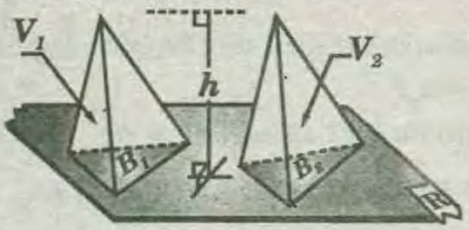
$$\frac{1}{OL} + \frac{1}{OM} = \frac{1}{OI} + \frac{1}{OA}$$

PROPIEDAD :

La relación de los volúmenes de dos pirámides que tienen la misma altura es igual a la relación de las

áreas de las bases.

Si :

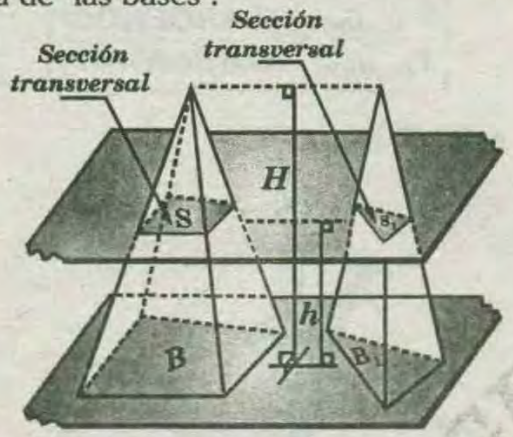


$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{B_1}{B_2}$$

POSTULADO DE BUENAVENTURA CAVALIERI

Si dos sólidos de igual altura tienen bases iguales equivalentes y las secciones planas determinadas por planos paralelos a las bases , a igual distancia de éstas son polígonos de igual área, entonces dichos sólidos tienen el mismo volumen.

Sean las pirámides de bases B y B_1 $(B=B_1)$ de secciones S y S_1 situados en planos paralelos a igual distancia de las bases .



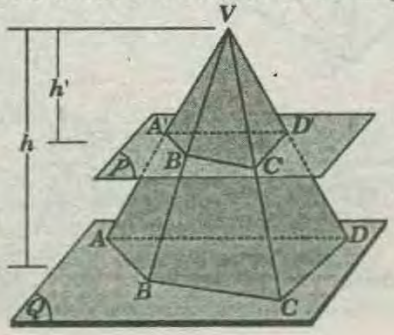
Entonces dichas pirámides son equivalentes .

PIRÁMIDES SEMEJANTES

Todo plano secante a una pirámide y paralelo a su base, determina una pirámide parcial semejante al total.

En dos pirámides semejante se cumple:

- Sus líneas homólogas son proporcionales.
- Las áreas, de sus bases , de sus superficies totales; son proporcionales a los cuadrados de las longitudes de sus líneas homólogas .
- Sus volúmenes son proporcionales a los cubos de las longitudes de sus líneas homólogas.



* En el gráfico, Si $\square P \,//\, \square Q$

→ Pirámide V - $ABCD$ ~ pirámide V- $A'B'C'D'$

LÍNEAS HOMÓLOGAS PROPORCIONALES

$$\frac{VA'}{VA}=\frac{VB'}{VB}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{h'}{h}=k$$

k : *razón de semejanza.*

RAZÓN DE ÁREAS :

$$\frac{A_{ST(V-A'B'C'D')}}{A_{ST(V-ABCD)}}=\frac{(VA')^2}{(VA)^2}=\frac{h'^2}{h^2}=k^2$$

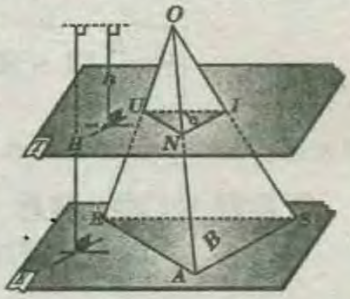
RAZÓN DE VOLUMEN :

$$\boxed{\frac{A_{ST(V-A'B'C'D')}}{A_{ST(V-ABCD)}}=\frac{(VA')^3}{(VA)^3}=\frac{h'^3}{h^3}=k^3}$$

TEOREMA :

Si se intersecta una pirámide cualquiera por un plano paralelo a la base se forman dos pirámides semejantes cumpliéndose:

- Las aristas laterales y la altura son divididas en segmentos proporcionales .
- Las áreas de las bases o caras laterales de las pirámides formadas son entre sí como las longitudes de sus elementos homólogos al cuadrado .
- Los volúmenes de las dos pirámides son proporcionales a las longitudes de sus elementos homólogos al cubo .



Si: Plano T// Plano E

$$* \frac{H}{h}=\frac{OR}{OU}=\frac{OA}{ON}=\frac{OS}{OI}=k$$

$$\Rightarrow * \frac{B}{b}=\frac{OR^2}{OU^2}=\frac{OA^2}{ON^2}=\frac{OS^2}{OI^2}=k^2$$

$$* \frac{V_1}{V_2}=\frac{OR^3}{OU^3}=\frac{OA^3}{ON^3}=\frac{OS^3}{OI^3}=k^3$$

Donde:

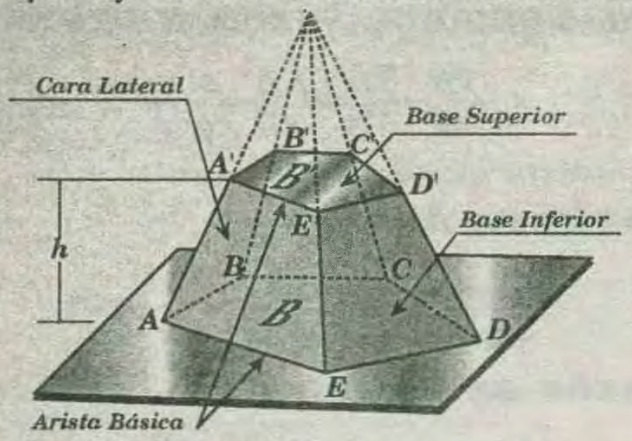
k ⇒ Valor de la razón geométrica de semejanza

TRONCO DE PIRÁMIDE

Es la porción de pirámide comprendida entre la base y la sección plana determinada por un plano secante a la pirámide y paralelo a su base.

A la base y a dicha sección se le denomina base del

tronco de pirámide; su caras laterales son regiones trapeciales, sus bases son regiones poligonales semejantes y su altura es la distancia entre sus bases.



En el gráfico, se muestra un tronco de pirámide pentagonal.

NOTACIÓN :

ABCDE ; A'B'C'D'E'

ÁREA DE LA SUPERFICIE LATERAL (A_{SL})

$$A_{SL}=\sum(\text{áreas de las caras laterales})$$

ÁREA DE LA SUPERFICIE TOTAL (A_{ST}) :

$$A_{ST}=A_{SL}+B+B'$$

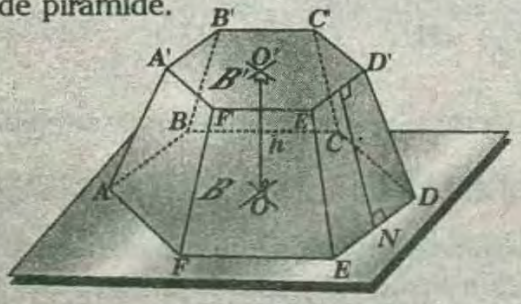
VOLUMEN (V) :

$$V=\frac{h}{3}(B+B'+\sqrt{BB'})$$

* *B y B' : Área de las bases.*

TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

Es aquel tronco de pirámide cuyas bases son regionales poligonales regulares de modo que sus centros están sobre una misma recta perpendicular a dichas bases. Sus caras laterales son regionales trapeciales isósceles congruentes entre sí, la altura de cada una de ellas se denomina apotema del tronco de pirámide.



En el gráfico, se muestra un tronco de pirámide exagonal regular.

NOTACIÓN: *ABCDEF - A'B'C'D'E'F*

* $\overline{MN}$: Apotema del tronco de pirámide regular $(MN = a_p)$

* *O* y *O'* : Centro de las bases *(OO' = h)*

ÁREA DE LA SUPERFICIE LATERAL (A_{SL}) :

$$A_{SL}=(p+p')a_p$$

p : semiperímetro de la base *ABCDEF*

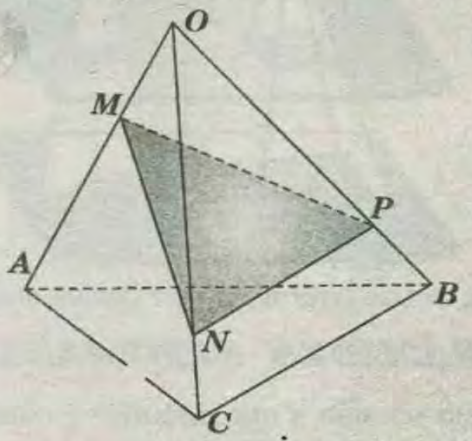
p': semiperímetro de la base *A'B'C'D'E'F*

TEOREMA :

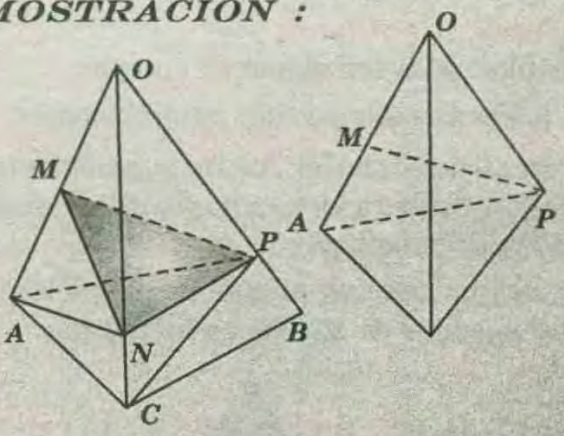
Si en una piramide triangular se traza un plano no paralelo a las bases se forman dos piramides cumpliendose que la relación de volúmenes es igual a la relación de los productos de las aristas que concurren en el vértice común .

$$\frac{V_{O-ABC}}{V_{O-MNP}}=\frac{(OA)(OB)(OC)}{(OM)(ON)(OP)}$$

donde $\Delta MNP \backslash\!\backslash \Delta ABC$



DEMOSTRACIÓN :



$$\frac{V_{N-MOP}}{V_{N-OAP}}=\frac{\text{área}(MOP)\times H/3}{\text{área}(AOP)\times H/3}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

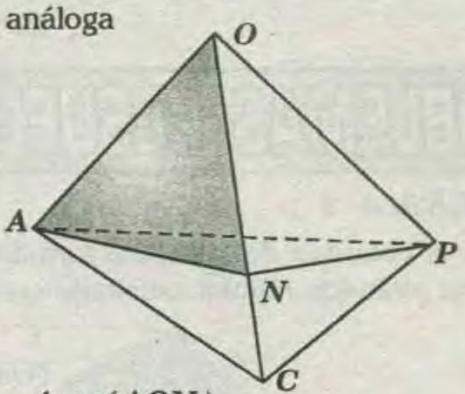
H altura trazada desde *N* al plano *AOP* . pero ΔOAP

$$\frac{área(MOP)}{área(AOP)}=\frac{OM}{OA}$$

relación de área reemplazando en *(I)*

$$\frac{V_{N-MOP}}{V_{N-OAP}}=\frac{OM}{OA}\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

en forma análoga



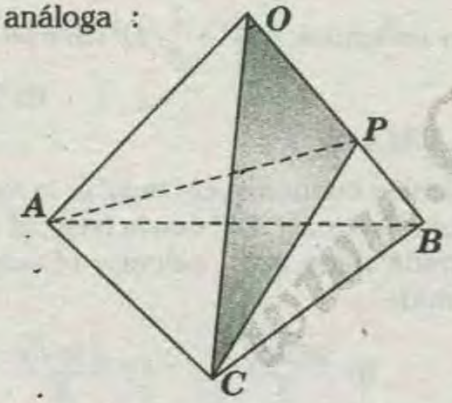
$$\frac{V_{P-OAN}}{V_{P-AOC}}=\frac{área(AON)}{área(AOC)}\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

pero ΔOAC : $\dfrac{área(AON)}{área(AOC)}=\dfrac{ON}{OC}$

* (relación de áreas) remplazando en *(II)* :

$$\frac{V_{P-OAN}}{V_{P-AOC}}=\frac{ON}{OC}\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

en forma análoga :



$$\frac{V_{A-POC}}{V_{A-OBC}}=\frac{área(OPC)}{área(OBC)}\ldots\ldots\ldots\ldots(III)$$

Pero $\dfrac{área(OPC)}{área(OBC)}=\dfrac{OP}{OB}$

* Relaciones de áreas remplazando en *(III)*

$$\frac{V_{A-POC}}{V_{A-OBC}}=\frac{OP}{OB}\ldots\ldots\ldots\ldots(\phi)$$

* Luego $(\alpha)\times(\beta)\times(\phi)$:

$$\frac{V_{O-MOP}}{V_{O-OAP}}\times\frac{V_{P-OAN}}{V_{P-AOC}}\times\frac{V_{A-POC}}{V_{A-OBC}}=\frac{(OM)(ON)(OP)}{(OA)(OB)(OC)}$$

* Pero :

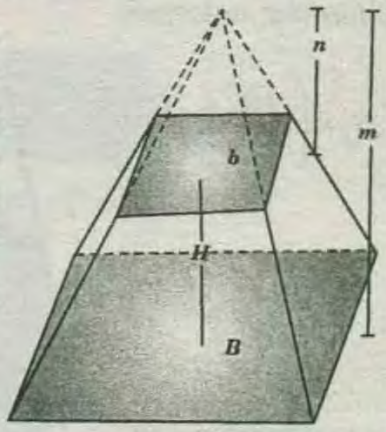
$$V_{N-MOP}=V_{O-MNP}$$

$$\Rightarrow\frac{V_{O-MNP}}{V_{O-ABC}}=\frac{(OM)(ON)(OP)}{(OA)(OB)(OC)}$$

VOLUMEN

si llamamos b y B a las bases de un tronco de pirámide regular H a su altura y $\sqrt{Bb}$ a la media proporcionál entre sus bases. Se tiene la siguiente fórmula para hallar su volumen

$$\boxed{V=\frac{H}{3}(B+b+\sqrt{Bb})}$$



* *DEMOSTRACIÓN :*

$$V_{P_{tronco}}=V_{P_{total}}-V_{P_{pequeña}}\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$V_{tronco}=\frac{m}{3}-b\frac{n}{3}$$

* por semejanza de pirámides :

$$\frac{B}{b}=\frac{m^2}{n^2}\Rightarrow\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}}=\frac{m}{n}$$

* aplicando proporciones : $\dfrac{\sqrt{B}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\dfrac{m-n}{n}$

* pero $m-n=H$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{B}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\frac{H}{n}\Rightarrow n=\frac{\sqrt{b}\,H}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}$$

* en forma análoga : $m=\dfrac{\sqrt{B}\,H}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}$

* Reemplazando en *(I)*

$$V_{tronco}=\frac{1}{3}\frac{B\sqrt{B}\,H}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}-\frac{1}{3}\frac{b\sqrt{b}\,H}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}$$

$$V_{tronco}=\frac{1}{3}\frac{H(\sqrt{B}^3-\sqrt{b}^3)}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

$$\Rightarrow\sqrt{B}^3-\sqrt{b}^3=(\sqrt{B}-\sqrt{b})(\sqrt{B}^2+\sqrt{b}^2+\sqrt{Bb})$$

$$\Rightarrow\sqrt{B}^3-\sqrt{b}^3=(\sqrt{B}-\sqrt{b})(B+b+\sqrt{Bb})$$

* luego en *(II)* :

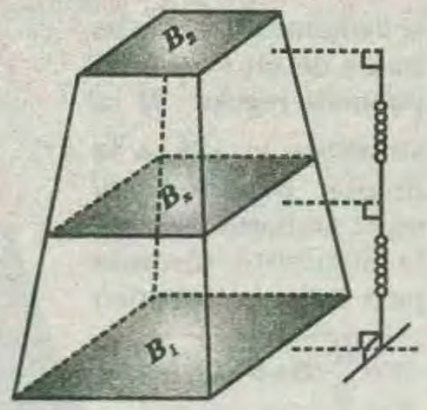
$$V=\frac{1}{3}H\frac{\cancel{(\sqrt{B}-\sqrt{b})}}{\cancel{\sqrt{B}-\sqrt{b}}}(B+b+\sqrt{Bb})$$

$$\Rightarrow V_{tronco}=\frac{H}{3}(B+b+\sqrt{Bb})$$

PROPIEDAD :

Si B_x es el área de la sección determinada por un plano equidistante de las bases B_1 y B_2 del tronco de pirámide, entonces:

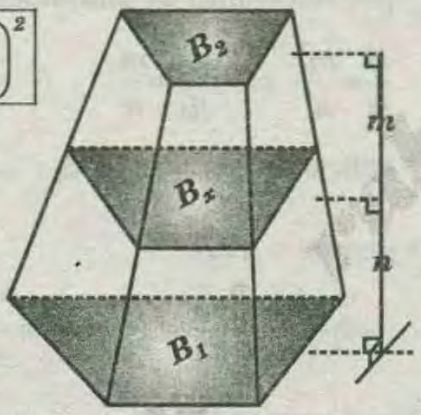
$$B_x=\left(\frac{\sqrt{B_1}+\sqrt{B_2}}{2}\right)^2$$



PROPIEDAD :

Si en un tronco de pirámide con áreas de bases B_1 y B_2, se traza un plano paralelo a las bases de modo que en la altura del tronco se tiene segmentos parciales de longitudes m y n respectivamente, entonces B_x el área de la sección, obtenida , es :

$$B_x=\left(\frac{m\sqrt{B_1}+n\sqrt{B_2}}{m+n}\right)^2$$

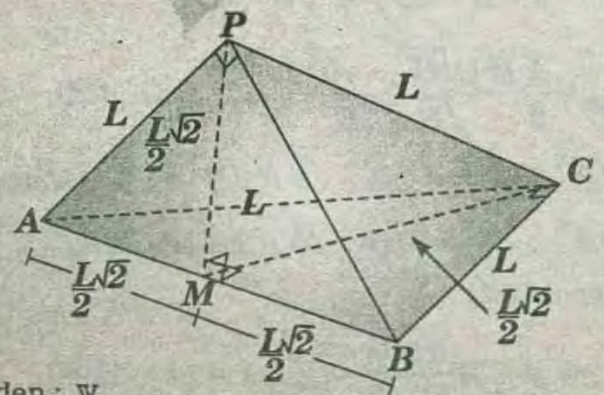


EJERCICIO:

Calcule el volumen de los ángulos rectángulos isósceles.

A) $\frac{L^3}{12}\sqrt{2}$ B) $\frac{L^3}{10}\sqrt{2}$ C) $\frac{L^3}{8}\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :



* Piden : $\mathbb{V}_{P-ABC}$

* Analizando el triángulo PMC, este es triángulo rectángulo , recto en M.

* Entonces $\overline{PM}$ es altura de la pirámide.

* Luego :

$$\mathbb{V}_{P-ABC}=\frac{1}{3}\left(\frac{L\times L}{2}\right)\left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)\rightarrow \mathbb{V}_{P-ABC}=\frac{L^3\sqrt{2}}{12}$$

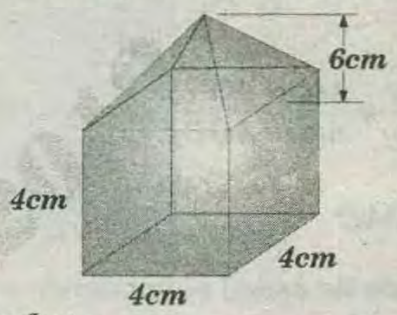
RPTA : "A"

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Encontrar el volumen del poliedro formado por un cubo y una pirámide regular mostrado en la figura.

A) $90cm^3$
B) $94cm^3$
C) $96cm^3$
D) $84cm^3$
E) $82cm3$



RESOLUCIÓN :

Volumen = volumen del cubo + volumen de la pirámide

$$\rightarrow volumen = 4^3+\frac{1}{3}(4)^2(6)=96$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

En una pirámide cuadrangular regular, la cara lateral forma ángulo diedro de 60° con la base, el apotema de la pirámide mide $8cm$, calcular el volumen de dicha pirámide.

A) $\frac{256\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{252\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{256\sqrt{3}}{3}$

RESOLUCIÓN :

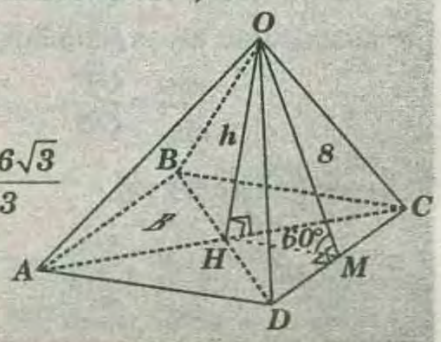
* El volumen de la pirámide es: $V=\frac{Bh}{3}$

* Para calcular el área de la base y la altura, trabajamos con el $\triangle OHM$ de 30° y 60°

* $HM=4 \rightarrow AD=8$

* $B=8^2 \rightarrow B=64$

$$\rightarrow V=\frac{64(4\sqrt{3})}{3}=\frac{256\sqrt{3}}{3}$$



RPTA : "C"

PROBLEMA 3:

En el gráfico O es el centro del cubo, $EM=MH$, $BC=\sqrt{3}$. calcule el volumen de la pirámide $A-MLH$.

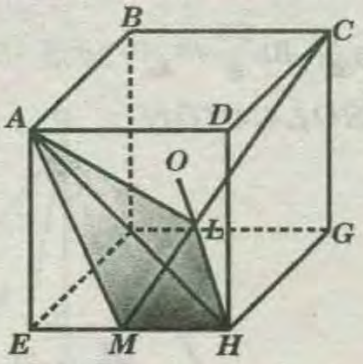
A) $2\sqrt{3}$

B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C) $\frac{2\sqrt{3}}{4}$

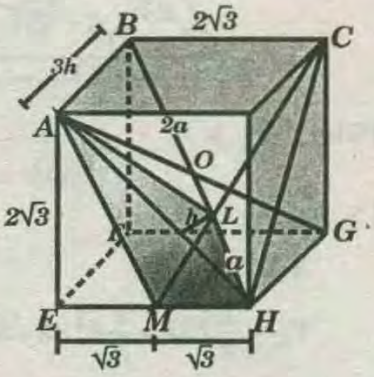
D) $6\sqrt{3}$

E) $5\sqrt{2}$



RESOLUCIÓN:

* De la figura:



* $A_{AMH}=\frac{3(2\sqrt{3})}{2}=3$

* $3h=2\sqrt{3} \rightarrow h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

* Entonces:

$$Vol_{(A-MLH)}=\frac{A_{AMH}\,h}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

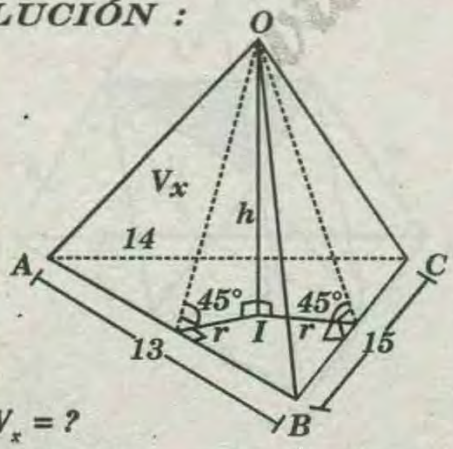
RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

Calcule el volumen de una pirámide O-ABC, cuyas caras laterales determinan diedros de medida $45°$ con la base, si $AB=13$, $BC=15$ y $AC=14$.

A) 100 B) 106 C) 108 D) 112 E) 115

RESOLUCIÓN :



* Piden: $V_x = ?$

$$A_{\Delta ABC}=\sqrt{21(21-13)(21-15)(21-14)}=21.r$$

$\rightarrow r=4 \rightarrow h=4$

$$V_x=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}84\times 4$$

$\rightarrow V_x = 112$

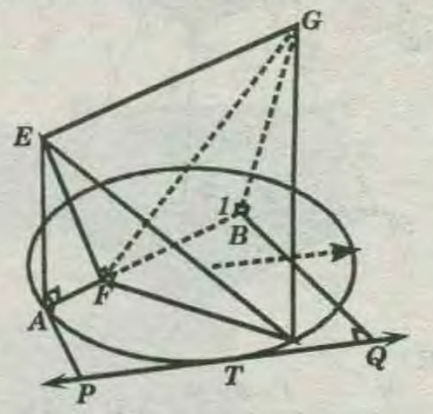
RPTA : "D"

PROBLEMA 5 :

Según el gráfico, T es punto de tangencia, $AE=AP=1$, $BG=BQ$ y $EF=FG$.

Calcule el volumen del sólido T-EPG.

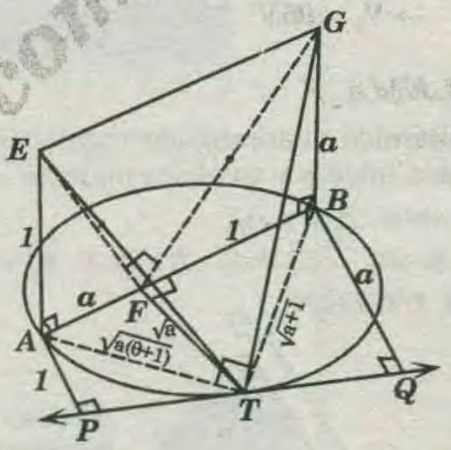
A) 18
B) 24
C) 34
D) 0
E) 37/4



RESOLUCIÓN :

* Propiedad : $(FT)^2=\sqrt{1\times a}=\sqrt{a}$

$\rightarrow \overline{AB}$: diámetro



* RM $\triangle$: $AT=\sqrt{a(aH)}$ y $TB=\sqrt{a+1}$

* $\triangle APTN \sim \triangle TQB$: $a=1$

$\rightarrow \overline{EG}//\overline{AB}//\overline{PQ}$

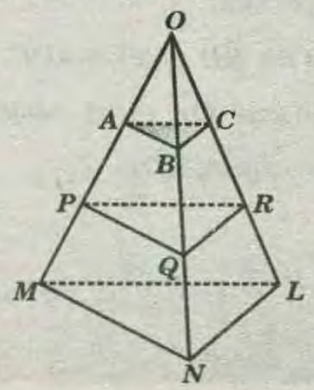
$\rightarrow$ EGT y P son coplanares no habría sólido.

RPTA : "D"

PROBLEMA 6 :

En el gráfico, el volumen de $O-ABC$ es V, $OA=CR=1$, $AP=OC=2$, $OB=BQ=4$ y $PM=QN=RL=5$. Calcule el volumen del sólido $PQRMNL$.

A) 24V
B) 194V
C) 95V
D) 1100/12V
E) 1100/29V

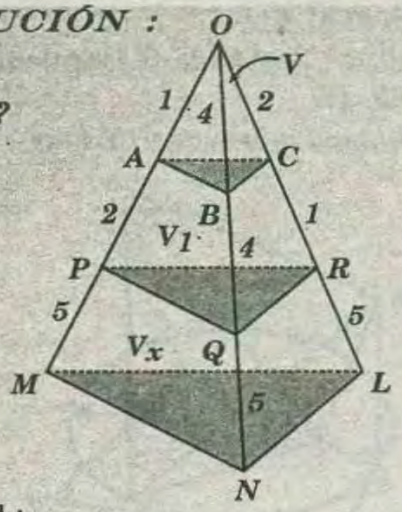


SOLOCRATIS2.com

RESOLUCIÓN :

Piden :

$V_x = ?$



* Propiedad :

$$\frac{V}{V+V_1} = \frac{1\times4\times2}{3\times8\times3} \rightarrow V_1 = 8V$$

$$\rightarrow \frac{V}{V+V_1+V_x} = \frac{1\times2\times4}{8\times13\times8}$$

$$\rightarrow V_1 = 95V$$

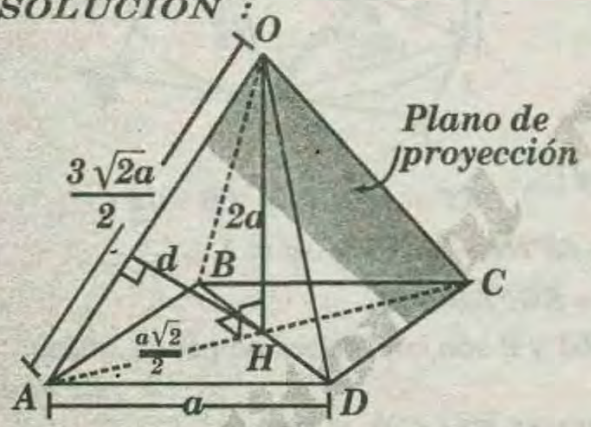
RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

En una pirámide cuadrangular regular **O-ABCD**, su arista básica mide a y su altura mide $2a$. Calcule la distancia entre $\overline{BD}$ y $\overline{OA}$.

A) a B) $a/3$ C) $2a/5$ D) $2a/3$ E) $a/5$

RESOLUCIÓN :



Piden:

$$d(\overline{OA}, \overline{BD}) = ?$$

$\triangle AOC$:

Plano de proyección.

H: Proyección de $\overline{BD}$ en el $\sim AOC$.

$\overline{OA}$: Proyección de $\overline{OA}$ en el $\sim AOC$.

$$d(\overline{OA}, \overline{BD}) = d$$

RM $\triangle$:

$$(2a)\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}a\times d \Rightarrow d = \frac{2a}{3}$$

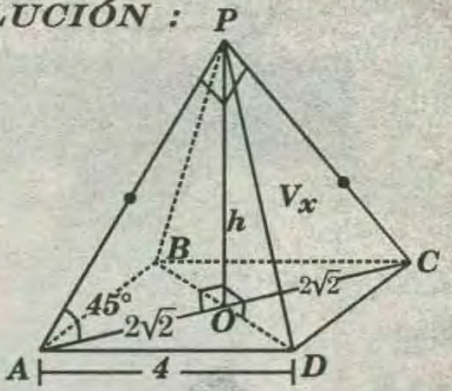
RPTA : "D"

PROBLEMA 8 :

En una pirámide regular **P-ABCD**, la $m\sphericalangle APC = 90°$ y $AD = 4$. Calcule el volumen de dicha pirámide.

A) $10\sqrt{3}$ B) $\frac{20}{3}\sqrt{3}$ C) $20\sqrt{3}$ D) $\frac{32}{3}\sqrt{2}$ E) $30\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



* Piden : $V_x = ?$

$$AO = OC = 2\sqrt{2}$$

* $\triangle AOP$:

$$h = 2\sqrt{2}$$

$$V_x = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}4^2\times2\sqrt{2} \Rightarrow V_x = \frac{32}{3}\sqrt{3}$$

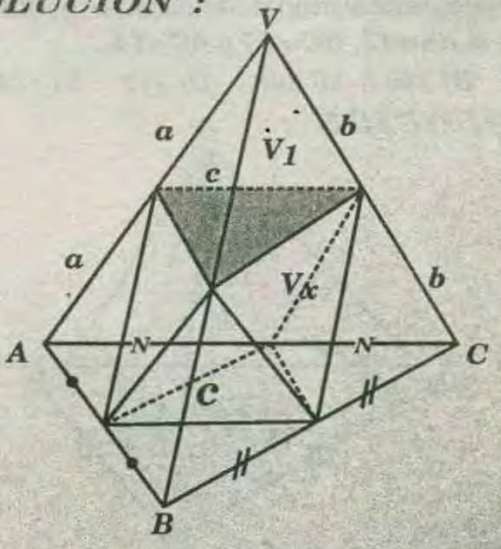
RPTA : "D"

PROBLEMA 9 :

Una pirámide triangular tiene volumen **120**. Calcule el volumen del sólido que tiene como vértices los puntos medios de las aristas .

A) 40 B) 50 C) 60 D) 80 E) 100

RESOLUCIÓN :



* Piden : $V_x = ?$

* Dato : $V_{V\text{-}ABC} = 120$

$$V_x = V_{V\text{-}ABC} - 4V_1$$

* Propiedad :

$$\frac{V_1}{120} = \frac{a^3}{(2a)^3} \rightarrow V_1 = 15$$

$\rightarrow V_x = 120 - 4(15) \Rightarrow V_x = 60$

RPTA : "C"

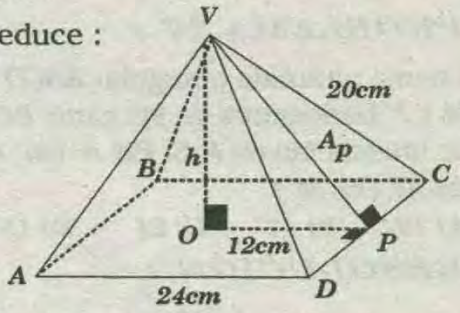
PROBLEMA 10 :

¿Cuánto mide el apotema y la altura de una pirámide cuadrangular regular si su arista lateral mide **20cm** y la arista de la base **24cm**?.

A) $A_p=12$ B) $A_p=8$ C) $A_p=16$ D) $A_p=12$
$h=4\sqrt{3}$ $h=8\sqrt{2}$ $h=4\sqrt{7}$ $h=3\sqrt{7}$

RESOLUCIÓN :

* De la figura, se deduce :



* $\triangle VPC : A_p=\sqrt{20^2-12^2}=16cm$

* $\triangle CVP: h=\sqrt{16^2-12^2}=4\sqrt{7}cm$

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

El área lateral de una pirámide cuadrangular regular es de $36m^2$. si la apotema de la pirámide mide **2** veces el radio del círculo que circunscribe a la base, hallar el lado de la base.

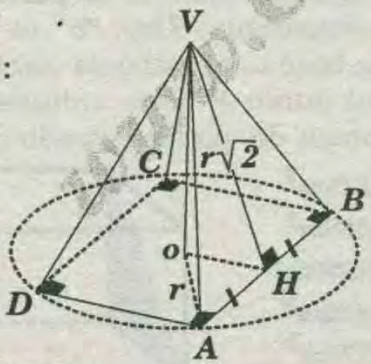
A) $3\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

* En el triángulo **OHA** :

$OH = AH = \frac{r}{2} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$

$\rightarrow AB = r\sqrt{2}$



* Se sabe que:

$A_L = 36\,m^2 \rightarrow P_B \times A_p = 36$

$2r\sqrt{2} \times r\sqrt{2} = 36 \rightarrow 4r^2 = 36 \Rightarrow r = 3m$

* Entonces: $AB = 3\sqrt{2}$

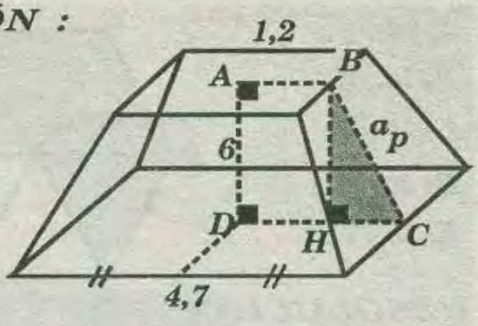
RPTA : "A"

PROBLEMA 12 :

La altura de un tronco de pirámide cuadrangular regular es **6m** y los lados de la bases miden **1,2m** y **4,7m** respectivamente. ¿Cuál es la longitud de su apotema?.

A) 17m B) 6 C) 6,25 D) 8 E) 9

RESOLUCIÓN :



* En $\triangle ABCD$:

$AB = \frac{1,2}{2} = 0,6 \rightarrow DH = AB = 0,6$

* Además : $DC = = 2,35$

$\rightarrow HC = 2,35 - 0,6 = 1,75m$

* En $\triangle BHC$ (por el teorema de Pitágoras):

$a_p = \sqrt{6^2 + 1,75^2} = 6,25m$

RPTA : "C"

PROBLEMA 13 :

El área de la superficie lateral de una pirámide cuadrangular regular es $600m^2$, el apotema de la pirámide mide **25m** . calcular la longitud de sus aristas básicas.

A) 6cm B) 12cm C) 3cm D) 18cm E) 18cm

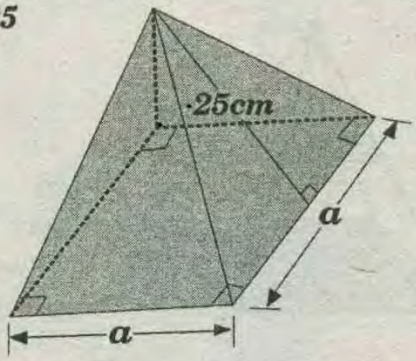
RESOLUCIÓN :

* Sabemos que :

$A_{SL} = \frac{1}{2}$ (Perímetro de la base).(Apotema).....*(I)*

* Perímetro de la base = $4a$

* Apotema = **25**



* Reemplazando en *(I)*:

$A_{SL} = \frac{1}{2} \times 4a \times 25$

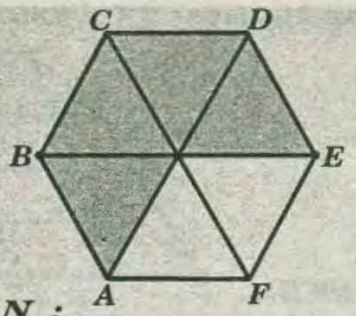
$\rightarrow 600 = 2a\,(25) \quad \rightarrow \quad a = 12$

RPTA: "B"

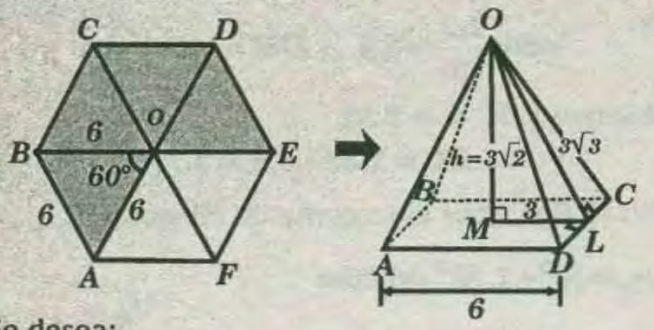
PROBLEMA 14 :

En el gráfico **ABCDEF** es un hexágono regular y la región sombreada en el desarrollo de la superficie lateral de una pirámide. Calcule el volumen de dicha pirámide, si $AB = 6$

A) $24\sqrt{2}$
B) $12\sqrt{2}$
C) $15\sqrt{2}$
D) $36\sqrt{2}$
E) $18\sqrt{2}$



RESOLUCIÓN :



* Se desea:

$$V=\frac{(A_{base})h}{3}=\frac{6^2(3\sqrt{2})}{3}=36\sqrt{2}$$

RPTA : "D"

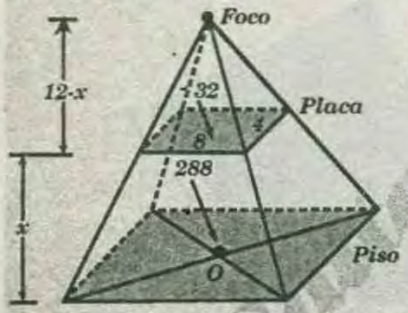
PROBLEMA 15 :

Se tiene un foco iluminado estando a **12m** . del piso. ¿A cuántos metros del nivel del piso se debe colocar una placa rectangular de **8m** . de largo y **4m**. de ancho para que proyecte una sombra de $288m^2$., si la vertical del foco pasa por el centro del rectángulo.

A) 9m B) 8m C) 10m D) 11m E) 12m

RESOLUCIÓN:

* Por semejanza de pirámides:



$$\frac{32}{288}=\frac{(12-x)^2}{144}$$

$$\rightarrow 16=(12-x)^2$$

$$\rightarrow 4=12-x \rightarrow x=8$$

RPTA : "B"

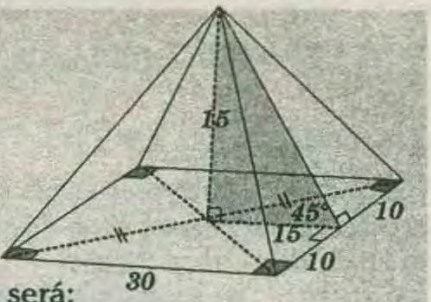
PROBLEMA 16 :

Un sólido está limitado por una región rectangular cuyas dimensiones son **30dm** y **20d**m. **Y** por cuatro planos inclinados a **45°** sobre el plano del rectángulo, calcule el volumen de dicho sólido en dm^3.

A) $3000dm^3$ B) $\frac{4000\,dm^3}{3}$ C) $8000dm^3$ D) $\frac{7000dm^3}{3}$

RESOLUCIÓN:

* El sólido es una pirámide de base rectangular, de área:



$SB = (20)(30) = 600$

* Altura $h = 15$

* Luego, su volumen será:

$$V=\frac{(600)\times 15}{3}=3000$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 17 :

En una pirámide triangular **ABCD** de base **BCD** sean **M** y **N** baricentros de las caras **BCD** y **ABC, AM** y **ND** se intersectan en **F.** Si **FM = 7m**; calcular la longitud de **AF** (en **M**).

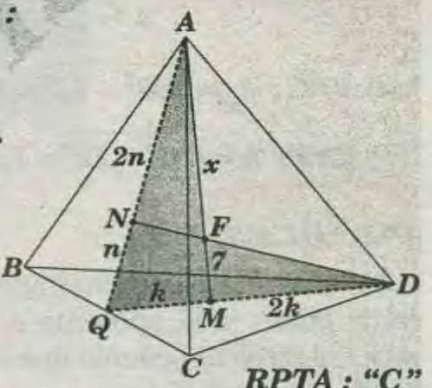
A) 19 B) 17 C) 21 D) 18 E) 15

RESOLUCIÓN :

* Por el teorema de Menéalo en el ΔQAM:

$n \times x \times 2k = 2n \times 7 \times 3k$

$\rightarrow x = 21$

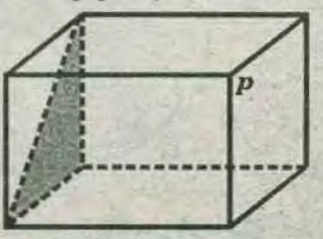


RPTA : "C"

PROBLEMA 18 :

La siguiente figura es un paralelepípedo rectangular de dimensiones **12m**, **"b"** m y **"c"**m. si la pirámide cuya base es el triángulo sombreada y cuyos vértice es el punto **P** tiene volumen $72m^3$; ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo dado?.

A) $216m^3$
B) $288m^3$
C) $3260m^3$
D) $432m^3$
E) $576m^3$

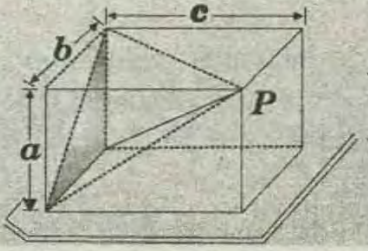


RESOLUCIÓN :

* $V_{paralelepípedo} = abc = ?$

* Del dato .n $V_{pirámide} = 72m^3$

* Entonces de la pirámide :



$$\frac{1}{3}\left(\frac{ab}{2}\right)c=72$$

$$\rightarrow abc = 432$$

$$V_{paralelepípedo} = 432$$

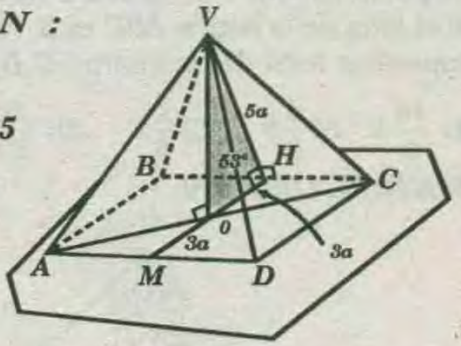
RPTA : "D"

PROBLEMA 19 :

Se tiene una pirámide vértice V y de base un paralelogramo $ABCD$. Se tiene que $\overline{VO}$ es altura de la pirámide, siendo O punto de intersección de las diagonales $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$. Las caras AVD y BVC hacen ambas un ángulo de 53° con la base $ABCD$. Si la suma del área de dichas caras es de $50cm^2$, hallar el área de la base $ABCD$.

A) $40cm^2$ B) $50cm^2$ C) $60cm^2$ D) $45cm^2$ E) $55cm^2$

RESOLUCIÓN :



* $S_{ABCD} = ?$

* El dato : $S_{BVC} = 25$

$$\rightarrow \frac{(5a)BC}{2} = 25$$

$$\rightarrow a(BC) = 10$$

* Piden :

$$S_{ABCD} = (MH)(BC) = 6aBC \Rightarrow S_{ABCD} = 6(10) = 60$$

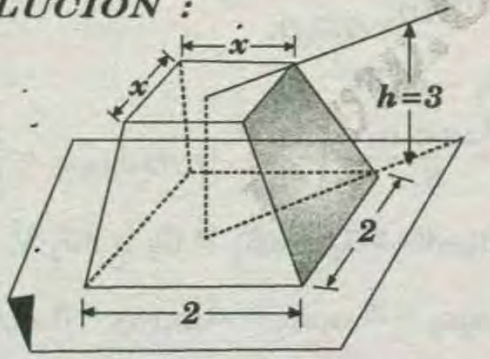
RPTA : "C"

PROBLEMA 20 :

Un tronco de pirámide de bases paralelas tiene por base mayor un cuadrado de lado 2 unidades. Si la altura del tronco es de 3 unidades y su volumen es 7 unidades cúbicas. ¿Cuánto mide el lado de la base menor?.

A) 1/2 B) 3 C) 4 D) 3/2 E) 1

RESOLUCIÓN :



* El volumen V de un tronco de pirámide de bases paralelas cuyas áreas son A y B, de altura h , se calcula por :

$$V = \frac{h}{3}(A + B + \sqrt{AB})$$

* Luego : $7 = \frac{3}{3}(x^2 + 2^2 + \sqrt{2^2 x^2})$

* Resolviendo: $x = 1$

RPTA : "E"

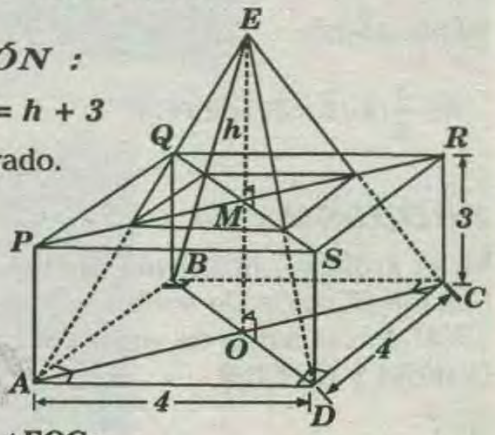
PROBLEMA 21 :

Se tiene un paralelepípedo recto de altura $3cm$. cuya base es un cuadrado de lado $4cm$, se desea construir una pirámide recta que tiene la misma base del paralelepípedo . Calcular la altura que debe tener dicha pirámide para que el volumen común a los dos sea las $2/3$ partes del volumen del paralelepípedo.

A) $[3+\sqrt{2}]cm$ B) $\left(\frac{9+\sqrt{5}}{2}\right)cm$

C) $\left(\frac{9+\sqrt{45}}{2}\right)cm$ D) $(4+\sqrt{35})cm$

RESOLUCIÓN :



* Incógnita : $EO = h + 3$

* $PQRS \rightarrow$ cuadrado.

* Como $\Delta EMR \sim \Delta EOC$:

$$\rightarrow \frac{EM}{EO} = \frac{MR}{OC} \rightarrow \frac{h}{h+3} = \frac{a\sqrt{2}/2}{2\sqrt{2}} \rightarrow h = \frac{3a}{4-a}$$

* Luego :

$$EO = h + 3 = \frac{12}{4-a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Para hallar "a", usamos el dato:

$$V_{tronco} = \frac{2}{3} V_{paralelepípedo}$$

$$\rightarrow \frac{3}{3}[a^2 + 4^2 + 4a] = \frac{2}{3} \times 4 \times 4 \times 3$$

$$\rightarrow a^2 + 4a - 16 = 0 \rightarrow a = 2\sqrt{5} - 2$$

* En (I) : $EO = \frac{(9+\sqrt{45})}{2}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 22 :

En una pirámide triangular regular . La longitud del radio de la circunferencia inscrita al triángulo de la base es $2cm$ y la longitud del radio de la circunferencia inscrita a una cara lateral es $3cm$. Calcular el área de la superficie lateral de la pirámide.

A) $72\sqrt{3}cm^2$ B) $144\sqrt{3}cm^2$

C) $48\sqrt{3}cm^2$ D) $96\sqrt{3}cm^2$

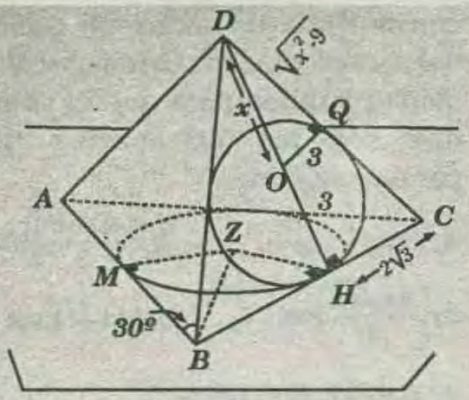
RESOLUCIÓN :

* ΔABC, equilátero $MB = 2\sqrt{3} \rightarrow AB = 4\sqrt{3}$

* $\Delta OQD \sim \Delta DHC$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{x^2-9}}{x+3}=\frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow x=21$$



* Área lateral :

$$S=\frac{3}{2}(4\sqrt{3}\times 24)=144\sqrt{3}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 24 :

En el gráfico , el prisma ***MNPQ-ABCD*** es recto. Calcule la razón de volúmenes de la pirámide ***O-ABCD*** con la suma de volúmenes de las pirámides ***O-MNBA*** y ***O-PCDQ*** .

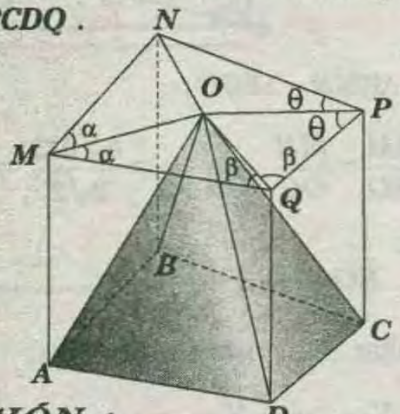
A) 1

C) 1/2

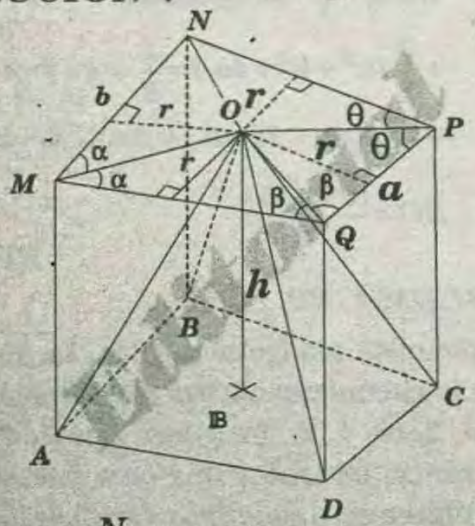
B) 1/3

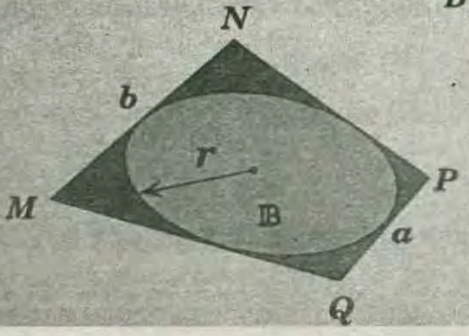
D) 2/3

E) 3/4



RESOLUCIÓN :





$$\mathbb{B}=\phi \cdot r$$

$$\mathbb{B}=(a+b)r$$

* Piden :

$$\mathbb{R}=\frac{V_{0-ABCD}}{V_{0-MNBA}+V_{0-PCDQ}} \Rightarrow \mathbb{R}=\frac{\frac{1}{3}(a+b)rh}{\frac{1}{3}bhr+\frac{1}{3}ahr}$$

$$\rightarrow \mathbb{R}=1$$

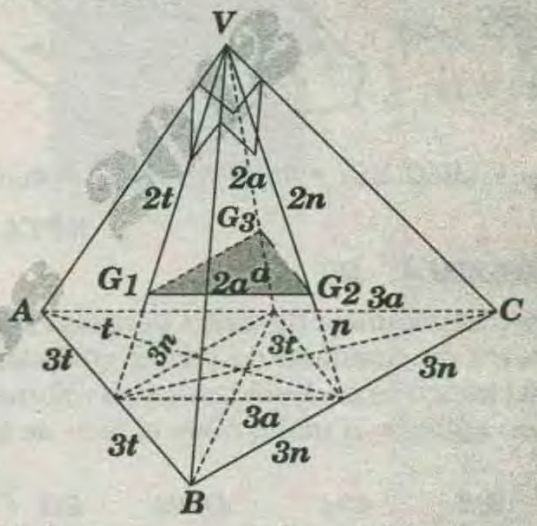
RPTA : "A"

PROBLEMA 25 :

En una pirámide ***V – ABC***, G_1, G_2 y G_3 son los baricentros de las caras laterales ***VAB***, ***VBC*** y ***VAC*** respectivamente . El triedro ***V-ABC*** es trirectángulo . Si el área de la región ***ABC*** es **S**, calcule el área de la superficie total del poliedro $VG_1G_2G_3$.

A) $\frac{16}{9}S$ *B)* $\frac{4}{9}S$ *C)* $\frac{1}{9}S$ *D)* $\frac{16}{27}S$ *E)* $\frac{25}{16}S$

RESOLUCIÓN :



* Piden : $A_{TOT_{V-G_1G_2G_3}}=?$

$\Delta G_1G_2G_3 \sim \Delta ABC$:

$$\frac{A_{\Delta G_1G_2G_3}}{S}=\left(\frac{2n}{6n}\right)^2 \rightarrow A_{\Delta G_1G_2G_3}=\frac{S}{9}$$

$$\Delta\, G_1G_2G_3 \cong \Delta G_1VG_2 \cong \Delta G_1\, V\, G_3 \cong \Delta G_3\, V\, G_2$$

$$\rightarrow A_{\Delta G_1G_2G_3}=A_{\Delta G_1VG_2}=A_{\Delta G_1VG_3}=A_{\Delta G_3VG_2}=\frac{S}{9}$$

$$\rightarrow A_{TOT_{V-G_1G_2G_3}}=\frac{4S}{9}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 28 :

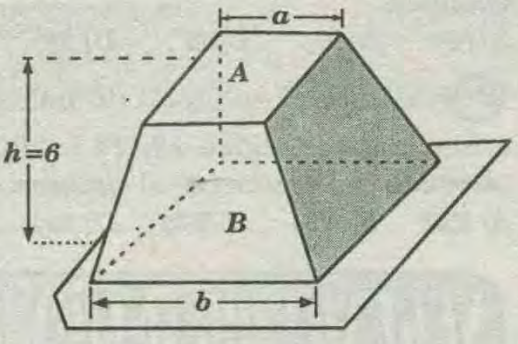
El volumen de un tronco de pirámide cuadrangular es $74m^3$. si su altura mide $6m$. y el área de una de las bases es $16m^2$. ¿Cuál es el área de la otra base?.

A)$49m^2$ *B)*$25m^2$ *C)*$9m^2$ *D)*$16m^2$ *E)*$12m^2$

RESOLUCIÓN :

* El volumen ***V*** de un tronco de pirámide , de bases paralelas con áreas ***A*** y ***B***, y altura ***h*** , es:

Datos $\begin{cases} V=74 \\ h=6 \\ B=16 \end{cases}$



* Además :

$$V=\frac{h}{3}[A+B+\sqrt{AB}]$$

$$\rightarrow 74=\frac{6}{3}[a^2+16+\sqrt{16a^2}]$$

$$\rightarrow a^2+4a-21=0 \begin{cases} a=-7 \ldots\ldots NO \\ a=3 \ldots\ldots SI \end{cases}$$

$$\rightarrow A=a^2=9$$

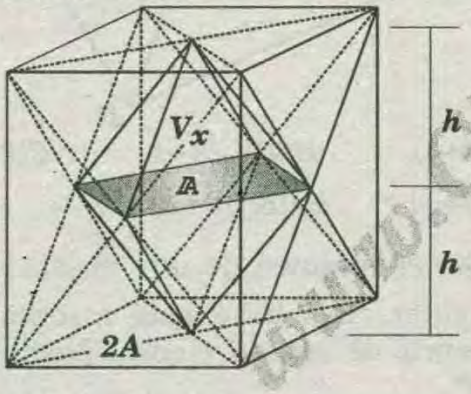
RPTA : "C"

PROBLEMA 30 :

Se tiene un prisma recto de base cuadrangular de volumen V. Calcule el volumen del sólido, cuyos vértices son los puntos de intersección de las diagonales en todas las caras .

A) V/6 B) V/3 C) V/4 D) V/12 E) V/8

RESOLUCIÓN :



* Piden: $V_x = ?$

* Dato: $V_{prisma} = V = 2A \times 2h$

$$\rightarrow Ah=\frac{V}{4} \Rightarrow V_x = 2V_p = 2\times\frac{1}{3}Ah \Rightarrow V_x=\frac{V}{6}$$

RPTA : "A"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Se tiene una pirámide cuadrangular regular de área básica *36* y área total *6*. Calcular su volumen.

A) 32 B) 48 C) 96 D)160 E) 320

02 En una pirámide triangular regular la altura mide *15* y la arista básica mide *6*. Calcular el área de la sección paralela a la base, sabiendo que esta sección dista *10* de la base.

A)$\sqrt{2}$ B)1 C)$2\sqrt{3}$ D)$\sqrt{3}$ E)$2\sqrt{2}$

03 La base de una pirámide de *6* de altura es un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio *2*. Calcular el volumen de dicha pirámide.

A)$6\sqrt{3}$ B)$4\sqrt{3}$ C)$3\sqrt{3}$ D)$2\sqrt{3}$ E)$4\sqrt{2}$

04 Una pirámide regular tiene en total *6* aristas y cada una de ellas mide $4\sqrt{3}$. Calcular el volumen de dicha pirámide.

A)$8\sqrt{3}$ B)$16\sqrt{6}$ C)$16\sqrt{3}$ D)$8\sqrt{6}$ E)$4\sqrt{2}$

05 Se tiene una pirámide hexagonal regular, donde una arista lateral forma con la base un ángulo de *45°*. Si la arista lateral mide *2*, calculár el volumen de la pirámide.

A)$8\sqrt{3}$ B)12 C)$4\sqrt{3}$ D)$6\sqrt{3}$ E)$10\sqrt{3}$

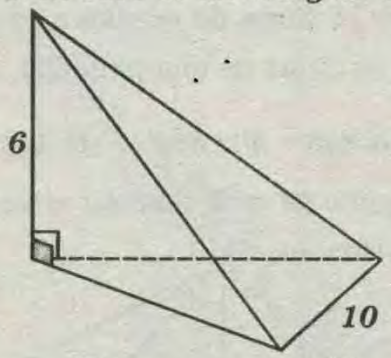
06 Se tiene una pirámide de *27 m^3* de volumen, en ella se trazan dos planos secantes y paralelos a la base que dividen a la altura en *3* partes iguales. Calcular el volumen en la porción central.

A)6 B)7 C) 9 D) 10 E) 13,5

07 Calcular el volumen de una pirámide triangular regular, si su apotema mide *15* y la arista de la base mide $18\sqrt{3}$.

A)$314\sqrt{3}$ B)$628\sqrt{3}$ C)$972\sqrt{3}$ D)$916\sqrt{3}$ E)$428\sqrt{3}$

08 Calcular el volumen de la pirámide mostrada en la figura, si su base es un triángulo equilátero.



A)$25\sqrt{3}$ B)$45\sqrt{3}$ C)75 D)$75\sqrt{3}$ E)$50\sqrt{3}$

09 En una pirámide cuadrangular regular *O-ABCD*: *OD=DA* y su altura mide *3*. Calcular su volumen.

A)9 B)16 C)18 D) 24 E) 36

10 En una pirámide hexagonal regular cuyas aristas laterales forman con la base un ángulo de medida *60°* y tienen por longitud *2*, calcular el volumen de la pirámide.

A)$12\sqrt{3}$ B)12 C)16 D)$16\sqrt{3}$ E)15

GRATIS

11 La base de una pirámide triangular regular es un triángulo equilátero de lado «*L*». La altura de la pirámide es igual al radio de la circunferencia circunscrita a la base. Calcular su volumen.

A) $\frac{L}{12}$ *B)* $\frac{L^3}{8}$ *C)* $\frac{L^3}{4}$ *D)* $\frac{7L^3}{12}$ *E)* $\frac{8L^3}{9}$

12 Calcular el volumen de una pirámide cuadrangular regular donde el área de la superficie lateral es igual al doble del área de la base y a su vez igual a *72*.

A) $18\sqrt{2}$ *B)* $24\sqrt{6}$ *C)30* *D)* $16\sqrt{6}$ *E)* $36\sqrt{3}$

13 En una pirámide regular *P-ABCD* la $m\sphericalangle DPC = 53°$. Calcular la razón entre el área de la superficie total y el área de la base.

A) $\sqrt{5}$ *B) 3* *C) 2* *D) 6* *E) 5*

14 Calcular el volumen de una pirámide regular *O-ABCD*, tal que: $m\sphericalangle DOC = 60°$ y $AB = 6$

A) $2\sqrt{6}$ *B)* $24\sqrt{3}$ *C)* $36\sqrt{2}$ *D)* $42\sqrt{2}$ *E)* $18\sqrt{6}$

15 ¿Cuántas caras laterales tiene una pirámide en la que la suma de todos los ángulos de sus caras es igual a *24* ángulos rectos?

A)13caras *B)16caras* *C)7caras* *D)8caras* *E)9 caras*

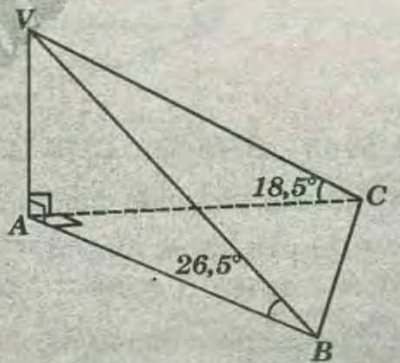
16 En una pirámide cuadrangular regular cuyo volumen es *24*, calcular el volumen del sólido que resulta al unir el centro de la base con los puntos medios de las aristas laterales.

A) 2 *B) 3* *C)4* *D)6* *E)8*

17 Calcular la suma de medidas de los ángulos internos de las caras de una pirámide, si ésta tiene *18* aristas.

A)2 880° *B)3 600°* *C)1 620°* *D) 900°* *E)3 240°*

18 En la figura: $VA = 3$. Calcular el volumen de la pirámide mostrada.



A) 9 *B)18* *C)27* *D)36* *E)72*

19 Se tiene una pirámide *P-ABC* en donde $PA=\sqrt{7}$, $PB=PC=6$, $AB=AC=5$ y $BC=8$. Calcular su volumen.

A)16 *B)30* *C)32* *D) 20* *E) 24*

20 Calcular el volumen de una pirámide cuyas aristas básicas miden *13; 14* y *15*. La altura de la pirámide es congruente al circunradio de la base.

A) 222 *B) 225* *C) 272* *D) 282* *E) 227,5*

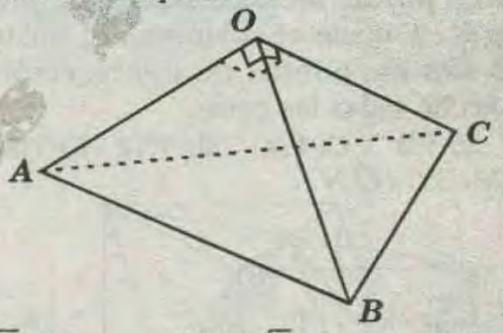
SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 En una pirámide *O – ABC* su altura tiene como pie el incentro de la base.

Si: $AS=14$, $SC = 13$, $AC = 15$ y $OA=\sqrt{105}$, calcular el volumen de la pirámide.

A)145 *B)150* *C)140* *D)160* *E)165*

02 En la figura las caras *AOB, BOC* y *AOC* son equivalentes y la cara *ABC* tiene área *27*. Calcule el área total de dicha pirámide.



A) $30(\sqrt{3}+1)$ *B)* $27(\sqrt{3}+1)$ *C)* $24(\sqrt{3}+1)$
D) $12(\sqrt{3}+1)$ *E)* $16(\sqrt{3}+1)$

03 Halle el volumen de una pirámide regular cuadrangular cuya base está inscrita en una circunferencia de radio *R* y cuyos diedros básicos miden *45°*.

A) $R^3\sqrt{2}/4$ *B)* $R^3\sqrt{2}/5$ *C)* $R^3\sqrt{2}/3$
D) $R^3\sqrt{2}/6$ *E)* $R^3\sqrt{2}/7$

04 En una pirámide regular cuadrangular *S – ABCD*, $AB = 6$, la altura mide *4*. Calcule la distancia de *A* al plano *SCD*.

A) 4,8 *B) 5,8* *C) 5,0* *D) 6,0* *E) 5,2*

05 En una pirámide de base triangular *A – BCD* las aristas opuestas $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ son perpendiculares. Si: $AB = 4$, $BC = 3$ y $AD = 5$, calcule *CD*.

A) $\sqrt{3}$ *B)* $3\sqrt{2}$ *C)* $4\sqrt{5}$ *D)1* *E)3*

06 Calcule el recorrido mínimo que debe hacer una hormiga en ir y regresar al punto *A* pasando por

el punto C, y no por la base de una pirámide regular $V-ABCD$ cuyas aristas miden $\sqrt{3}$.

A)4 B)6 C)5 D)7 E)9

07 En una pirámide de base triangular $S-ABC$ está inscrita una esfera cuyo radio mide r. Si la suma de las inversas de las medidas de las alturas de la pirámide es $1/8$, calcular "r".

A)4 B)8 C)2 D)1 E)6

08 En una pirámide $A-BCD$, de volumen V, en las aristas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ se ubican los puntos P, R y Q, respectivamente, tal que: $PB=2(AP)$, $AR=RC$ y $AQ=2(QD)$. Si las prolongaciones de $\overline{PR}$ y $\overline{PQ}$ intersectan a $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$ en E y F, calcule el volumen del sólido $RCE-QDF$.

A) $\frac{7}{9}V$ B) $\frac{8}{9}V$ C) $\frac{3}{4}V$ D) $\frac{6}{5}V$ E) $\frac{V}{3}$

09 Un triángulo equilátero BCE y un cuadrado $ABCD$ están contenidos en planos perpendiculares. Si el segmento que une los puntos medios de $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ mide 6, calcule el volumen de la pirámide $E-ABCD$.

A) $24\sqrt{3}$ B) $18\sqrt{3}$ C) $42\sqrt{3}$ D) 36 E) $36\sqrt{3}$

10 Se tiene una pirámide triangular de volumen V. Halle el volumen del sólido poliédrico que se forma al unir los puntos medios de los lados de cada cara.

A) $V/6$ B) $V/4$ C) $V/3$ D) $V/2$ E) $V\sqrt{3}/2$

11 Se tiene una pirámide $O-ABCD$ cuya base $ABCD$ es un trapecio, $\overline{BC}\ //\ \overline{AD}$, F y H son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Si el área de la región triangular FOH es 60 y la distancia de B al plano FOH es 7, calcule el volumen de la pirámide $O-ABCD$.

A)400 B)450 C)520 D) 560 E) 600

12 Se tiene una pirámide regular cuadrangular, cuya arista básica mide $4\sqrt{2}$. Si el radio de la esfera inscrita mide 5, calcular el volumen de la pirámide.

A) 256/3 B) 216/3 C) 252/5 D) 225/7 E) 216/5

13 El área total de una pirámide regular pentagonal es 45 y el área de su superficie lateral es 25. Calcular la medida del ángulo diedro que forma una cara lateral con la base de la pirámide.

A) 30° B) 60° C) 53° D)37° E)45°

14 Se tiene una pirámide regular hexagonal $O-ABCDEF$ de volumen $24\ m^3$, se traza un plano que pasa por el centro de la base y por los puntos medios de $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$. Calcule el volumen del menor sólido determinado.

A)6 B)7 C)8 D)9 E)5

15 En una pirámide $O-ABC$, sus caras laterales forman con la base un ángulo diedro que mide $60°$, $AB=13$, $BC=15$ y $AC=14$. Calcule el volumen de la pirámide.

A) $84\sqrt{3}$ B)$120\sqrt{3}$ C) $60\sqrt{3}$ D) $112\sqrt{3}$ E) $140\sqrt{3}$

16 Se tiene una pirámide $O-ABCD$, $\overline{AB}\ //\ \overline{CD}$, $AB=12$ y $CD=6$. Si el sólido se proyecta sobre un plano perpendicular a AB, el área de la proyección es 20. Calcule el volumen de dicha pirámide.

A) 100 B) 110 C) 120 D)130 E)140

17 En una pirámide regular triangular los inradios de la base y de una cara lateral miden $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, respectivamente. Calcule el área de la superficie lateral.

A)$18\sqrt{2}$ B)$36\sqrt{3}$ C)$24\sqrt{2}$ D)$12\sqrt{2}$ E) $36\sqrt{2}$

18 En una pirámide $S-ABCD$, de base rectangular $ABCD$, la arista $\overline{SB}$ es perpendicular a la base y se cumple: $\frac{AB}{2}=\frac{AD}{3}=\frac{SB}{5}$. Calcule la medida del ángulo diedro que forma el plano de la base y el plano que pasa por la diagonal $\overline{BD}$ y es paralelo a la arista $\overline{SC}$.

A)ArcTg(1/2) B)ArcTg(1/3) C)ArcTg($\sqrt{13}$)

D)ArcTg(2/3) E)ArcTg$\left(\frac{5\sqrt{13}}{6}\right)$

19 En una pirámide regular, la proyección de una cara lateral sobre la base mide la sexta parte de la base. En una de sus caras laterales se traza la mediana relativa a la arista lateral, tal que la mediana forma con la altura un ángulo que mide $30°$. Si la arista básica mide 2, calcule el volumen de la pirámide.

A)$14\sqrt{3}$ B) $12\sqrt{3}$ C)$10\sqrt{3}$ D)$9\sqrt{3}$ E)$15\sqrt{3}$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)B	2)D	3)A	4)B	5)C	6)B	7)C	8)E	9)C	10)B
11)A	12)E	13)B	14)C	15)C	16)B	17)A	18)C	19)A	20)E

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)C	2)B	3)C	4)A	5)B	6)B	7)B	8)B	9)E	10)D
11)D	12)A	13)D	14)B	15)D	16)C	17)E	18)E	19)B	20)B

OBJETIVOS :

* Definición y propiedades (¿qué es?, ¿qué le caracteriza?) de un Cono .

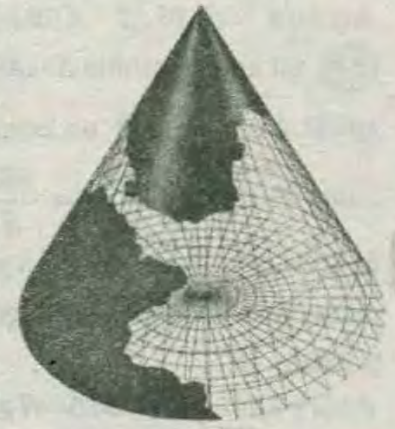
* Elementos notables que lo constituyen y la definición de cada uno de ellos (por ejemplo, en el un segmento notable es la generatriz).

* Reconocer un cono equilátero.

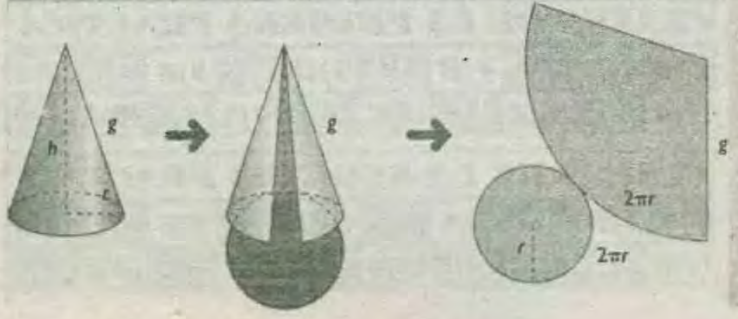
* Área lateral , área total y Volumen . Desarrollos planos.

INTRODUCCION :

Un **cono**, en geometría elemental, es un sólido de revolución generado por el giro de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Al círculo conformado por el otro cateto se denomina **base** y al punto donde confluyen las generatrices se llama **vértice**.

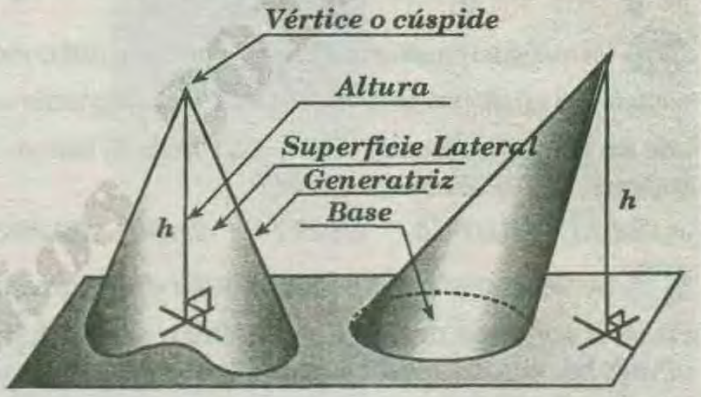


Superficie cónica se denomina a toda superficie reglada conformada por el conjunto de rectas que teniendo un punto común (el vértice), intersectan a una circunferencia no coplanaria.



CONO

El estudio sistemático de las pirámides el conocimiento de la circunferencia y algunas otras líneas curvas , han conllevado a la obtención y subsiguiente estudio de otras figuras , entre las cuales destaca el cono , el cual es muy parecido a una pirámide , con la diferencia de que sus bases es una región curva en lugar de una poligonal.



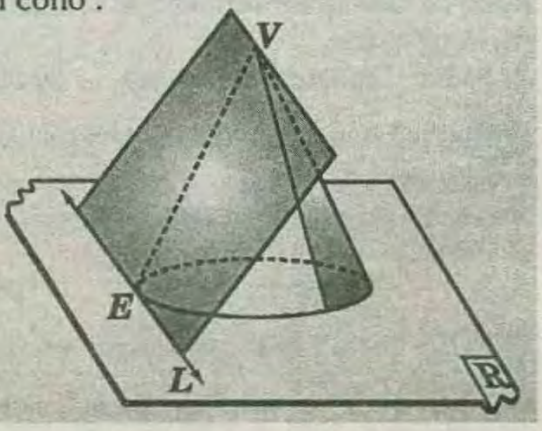
Si el pie de la altura es el centroíde de la base, entonces el cono se denomina cono recto , caso contrario se denomina cono oblicuo.

PLANO TANGENTE A UN CONO

Llámese plano tangente a un cono , a todo plano que contiene una generatriz pero que no corta a la superficie del cono.

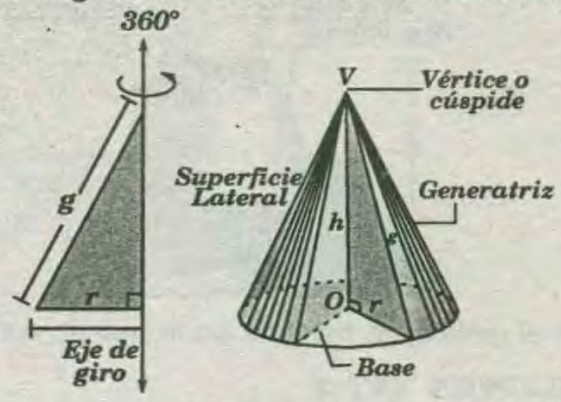
Es obvio que en un cono circular recto cualquiera.

Todo plano que contiene un tangente $\overline{VE}$ a la base y a la generatriz que pasa por el punto de contacto es tangente al cono .



CONO DE REVOLUCIÓN O CONO CIRCULAR RECTO

Es aquel sólido geométrico generado por una región triangular al girar **360°** en torno a uno de sus catetos.



ÁREA DE LA SUPERFICIE TOTAL (A_{ST}):

$$A_{ST}=A_{SL}+A_{base}$$

A_{base} : área de la base

VOLUMEN (V) :

$$V=\frac{(A_{base})h}{3}$$

h : longitud de la altura de la pirámides irregulares .

O : centro de la base del cono .

r : radio de la base.

$$V=\left(\frac{\pi r^2}{3}\right)h$$

h : longitud de la altura de la pirámide

ÁREA DE LA SUPERFICIE LATERAL (A_{SL}) :

$$A_{SL}=\pi rg$$

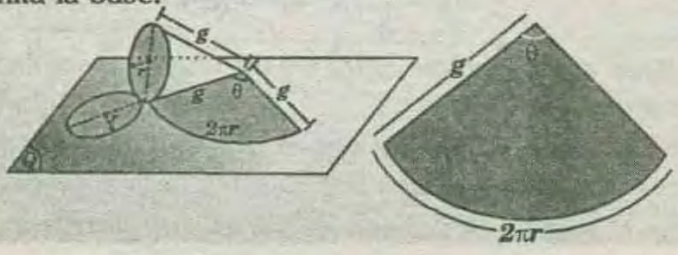
G : longitud de la generatriz.

SECCIÓN AXIAL DE UN CONO

Es la sección plana determinada por un plano secante al cono que contiene a su eje.

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL DE UN CONO DE REVOLUCIÓN

El desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución es un sector circular cuyo radio es igual a la longitud de la generatriz de dicho cono y cuyo arco tiene igual longitud que la circunferencia que limita la base.



* En el gráfico, se muestra un cono de revolución y el desarrollo de su superficie lateral .

θ : Medida del ángulo de desarrollo .

$$\theta=\frac{r}{g}(360°)$$

ÁREA DE LA SUPERFICIE LATERAL (A_{SL}) :

La superficie lateral es equivalente con su respectivo desarrollo, este un sector circular cuyo centro es el vértice del cono y tiene por radio a la generatriz.

A_{SL} <> Asector

$$A_{SL}=\pi rg$$

ÁREA DE LA SUPERFICIE TOTAL (A_{ST}):

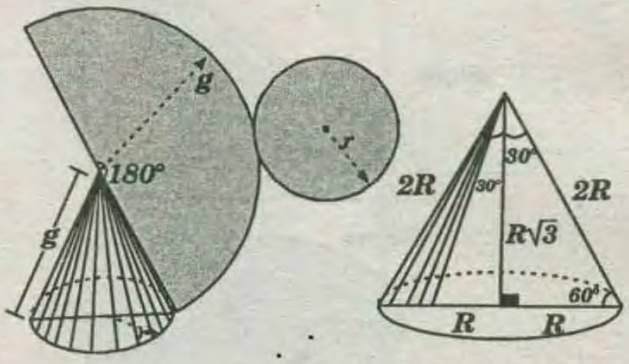
$$A_{ST}=\pi r(g+r)$$

CONO EQUILÁTERO :

Es aquel cono de revolución cuyas generatrices tiene longitudes iguales a la del diámetro de la base **(g=2r)**.

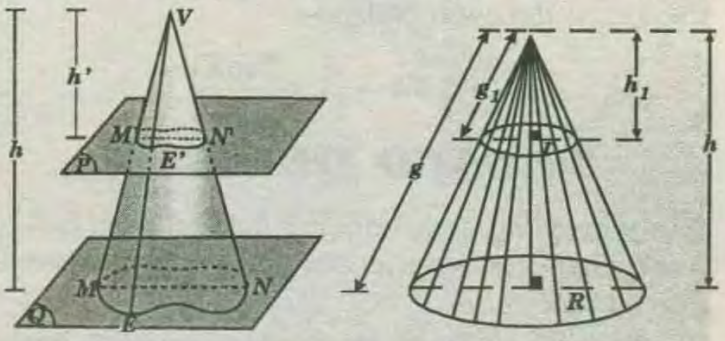
En la figura se muestran un cono equilátero y su respectivo desarrollo.

EJEMPLO :



SEMEJANZA DE CONOS

Todo plano secante a un cono paralelo; determina un cono parcial semejante al total .



* En el gráfico, si $\square P // \square Q$

→ Cono **V- MN' ~ Cono V- MN**

Si dos conos son generados por triángulos

semejantes que giran alrededor de los lados homólogos, dichos conos son semejantes.

También si se intersecta a un cono por un plano paralelo a la base se obtiene un cono pequeño semejante al total, debiéndose cumplir:

♠ Las áreas de sus bases son entre sí como el cuadrado de las longitudes de sus elementos homólogos .

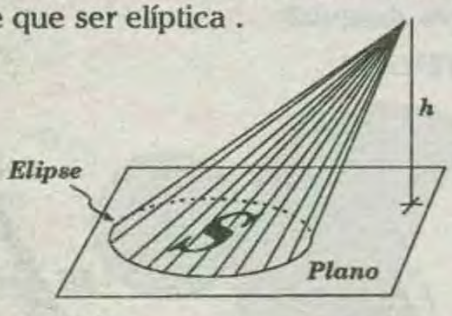
$$\frac{S_1}{S}=\frac{h_1^2}{h^2}=\frac{r_1^2}{r^2}=\frac{g_1^2}{g^2}$$

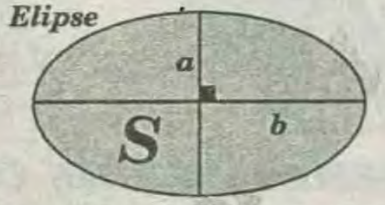
♠ los volúmenes son entre sí como el cubo de sus elementos homólogos .

$$\frac{V_1}{V}=\frac{h_1^3}{h^3}=\frac{r_1^3}{r^3}=\frac{g_1^3}{g^3}$$

CONO OBLICUO

Si se intersecta a un cono recto por un plano no paralelo a la base se obtiene el cono oblicuo, cuyas bases tiene que ser elíptica .





a = Radio mínimo. ; b = Radio máximo.

$S = \pi ab$

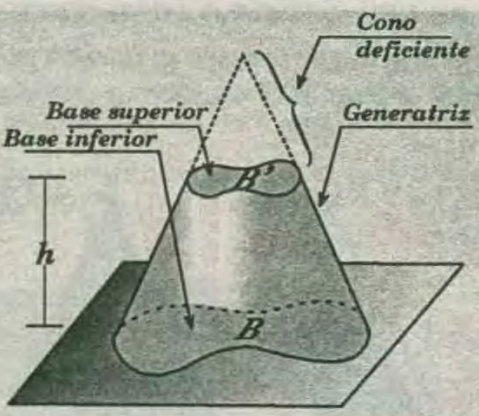
* Volumen del cono oblicuo :

$$V=\frac{1}{3}Sh \rightarrow \boxed{V=\frac{\pi abh}{3}}$$

TRONCO DE CONO

Es la porción de cono comprendido entre su base y la sección plana determinada por un plano paralelo a dicha base.

A su base y a dicha sección se les denomina bases del tronco, la superficie cónica que la limita se denomina superficie lateral del tronco y a la distancia entre sus bases se le denomina altura del tronco de cono .



* En el gráfico, se muestra un tronco de cono

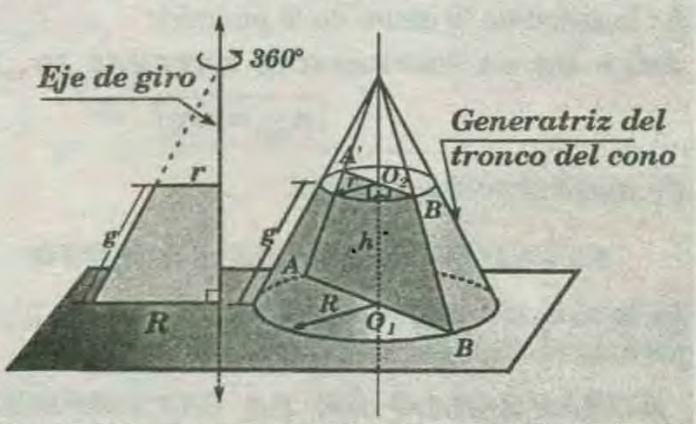
VOLUMEN (V) :

$$\boxed{V=\frac{h}{3}(B+B'+\sqrt{BB'})}$$

* B y B' : área de las bases

TRONCO DE CONO CIRCULAR RECTO O DE REVOLUCIÓN

Es un tronco de cono cuyas bases son círculos de modo que sus centros están sobre una misma recta perpendicular a dichas bases , también se denomina tronco de cono de revolución porque se genera con una región trapecial rectangular al girar una vuelta en torno a su lado perpendicular a sus bases .



* En el gráfico, se muestra un tronco de cono de revolución.

$\overline{O_1O_2}$: altura ; $\overline{O_1O_2}$: eje del tronco de cono.

VOLUMEN (V) :

$$\boxed{V=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)}$$

¿Qué es la sección axial de un tronco de cono de revolución?

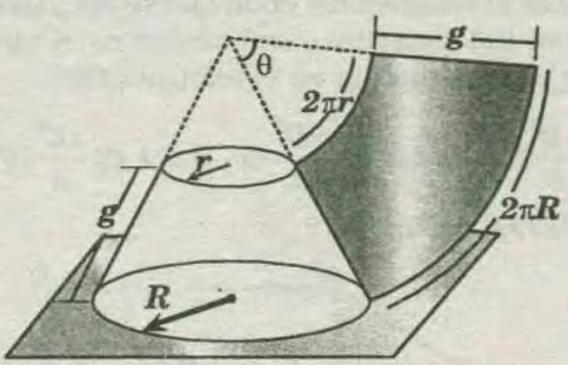
Es la sección plana determinada por un plano secante al tronco de cono que contiene a su eje.

En el gráfico, la sección $AA'B'B$ es una sección axial

del tronco de cono de revolución.

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL DE UN TRONCO DE CONO DE REVOLUCIÓN

El desarrollo de la superficie lateral de un tronco de cono de revolución es un trapecio circular cuyos arcos correspondientes son de igual longitud que las circunferencias que limitan las bases del cono y cuyos lados laterales son de igual longitud que las generatrices de dicho tronco .



* En el gráfico, se muestra un tronco de cono de revolución y el desarrollo de su superficie lateral.

θ: medida del ángulo de desarrollo.

$$\boxed{\theta=\left(\frac{R-r}{g}\right)360^\circ}$$

ÁREA LATERAL :

El área lateral de un tronco de cono de revoluciones igual a la suma de los semiperímetros de las bases multiplicado por la generátriz .

AL = (semiperímetro de la base mayor + semiperímetro de la base menor)generatriz

$$AL=(\pi R+\pi r)\times g$$

$$\boxed{AL=\pi g(R+r)}$$

ÁREA TOTAL :

El área total de un tronco de cono revolución es igual a la suma del área lateral con las áreas de las bases

$$AT=AL+\pi R^2+\pi r^2$$

$$\boxed{AT=\pi g(r+R)+\pi R^2+\pi r^2}$$

VOLUMEN :

El volumen de un tronco de cono de revolucion de altura *H* y cuyos radios de las bases son *R* y resta dado por la suma de sus bases y la media proporcional entre dichas bases

$$\boxed{V=\pi\frac{H}{3}(R^2+r^2+Rr)}$$

DEMOSTRACIÓN :

$$Volumen=\frac{H}{3}(B+b+\sqrt{Bb})$$

siendo : $B=\pi R^2$; $b=\pi r^2$

* Reemplazando :

$$V_{cono}=H\frac{(\pi R^2+\pi r^2+\sqrt{\pi R^2\times\pi r^2})}{3}$$

$$\Rightarrow\boxed{V_{cono}=\pi\frac{H}{3}(R^2+r^2+Rr)}$$

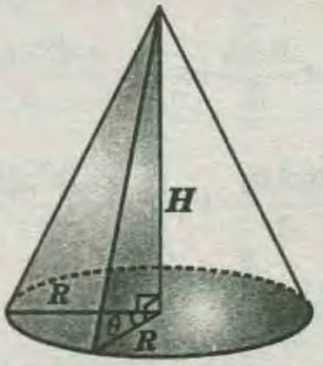
Área de la Superficie Lateral (A_{SL})

$$A_{SL}=\pi(R+r)g$$

Área de la Superficie Total (A_{ST})

$$A_{ST}=A_{SL}+\pi r^2+\pi R^2$$

CUÑA CÓNICA

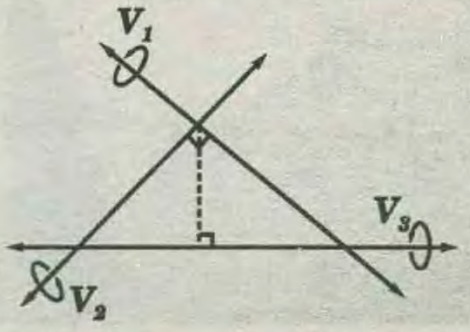


$$\boxed{V_{cuña}=\frac{\pi R^2\times H}{3}\times\frac{\theta}{360^\circ}}$$

PROPIEDAD :

Los volúmenes de los sólidos generados por la rotación de un triángulo rectángulo, alrededor de los catetos e hipotenusa , son V_1; V_2 y V_3 . Entonces se cumple que :

$$\left(\frac{1}{V_1}\right)^2+\left(\frac{1}{V_2}\right)^2=\left(\frac{1}{V_3}\right)^2$$



GRATIS2.COM

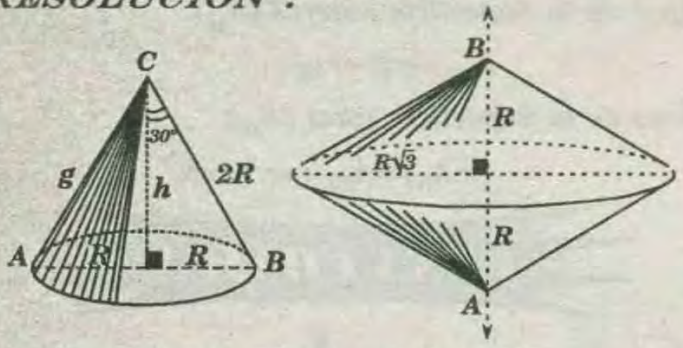
PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Dado un triángulo equilátero **ABC**, se le hace girar una vuelta alrededor de una de sus alturas, generándose un sólido de volumen V_1. Si el triángulo equilátero **ABC** gira una vuelta alrededor de uno de sus lados, se genera un sólido de volumen V_2. Calcular la relación V_1 / V_2.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ E) $\frac{5}{2}$

RESOLUCIÓN :



* Luego : $V_1 = \frac{B \times h}{3} \Rightarrow V_1 = \frac{\pi R^2 \times R\sqrt{3}}{3}$

* Además:

$$V_2 = \frac{B(AB)}{3} \Rightarrow V_2 = \frac{\pi 3R^2 (2R)}{3} \Rightarrow V_2 = 2\pi R^3$$

* Finalmente : $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

En un cono revolución se corta una cuña cónica de ángulo central **30°**. El área de la base del cono es $B\ u^2$ y el área de la sección que determina un plano axial es Au^2. Calcule el volumen del sólido que queda.

A) $\frac{11}{36}\pi^2 A\sqrt{B}$ B) $\frac{11}{36}A\sqrt{\pi B}$ C) $\frac{11}{36}\pi A\sqrt{B}$

RESOLUCIÓN :

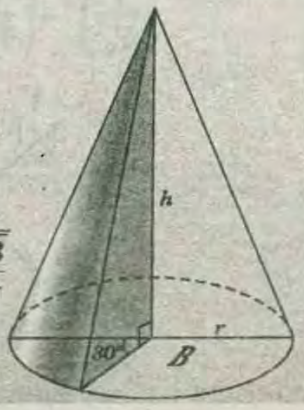
Dato:

$rh = A$ .....(I)

$\pi r^2 = B$ .....(II)

$$V_{cuña} = \frac{\pi}{36} r^2 h = \frac{\pi}{36} \times \frac{B}{\pi} \times \frac{A}{\sqrt{\frac{B}{\pi}}}$$

$$\Rightarrow V_{cuña} = \frac{A}{36}\sqrt{\pi B}$$



El volumen del sólido que queda será :

$$V_x = \frac{\pi}{3} r^2 h - V_{cuña} \Rightarrow V_x = \frac{\pi}{3}\frac{B}{\pi} \times \frac{A}{\sqrt{\frac{B}{\pi}}} - V_{cuña}$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{A}{3}\sqrt{\pi B} - \frac{A}{36}\sqrt{\pi B} \Rightarrow V_x = \frac{11}{36} A\sqrt{\pi B}$$

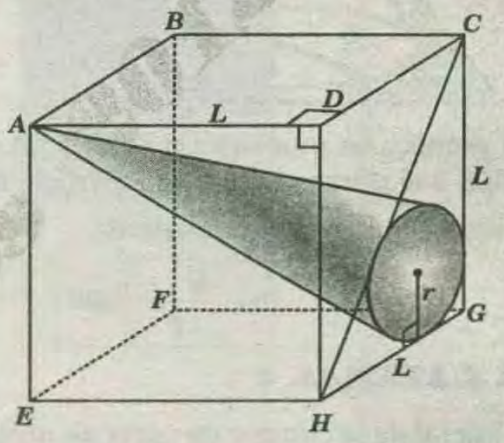
RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

Se tiene un hexaedro regular **ABCD – EFGH** de arista **L**. Halle el volumen del cono que se encuentra en el interior del hexaedro , con vértice en el punto **A** y base circular inscrita en el triángulo **GHC**.

A) $\frac{\pi L^3}{6}(3-2\sqrt{2})$ B) $\frac{\pi L^3}{3}(3-2\sqrt{2})$ C) $\frac{\pi L^3}{6}(3-6\sqrt{2})$

RESOLUCIÓN :



* $\overline{AD} \perp$ plano **HDCG** que contiene a la base circular del cono.

* Pero por Poncelet en el $\triangle CGH$:

$$2L = 2r + L\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{L}{2}(2-\sqrt{2})$$

* El volumen del cono es:

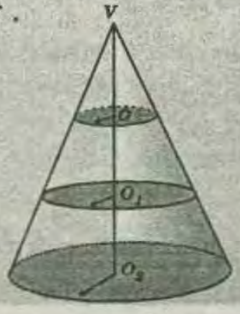
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times AD \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}\frac{L^2}{4}(2-\sqrt{2})^2 L \Rightarrow V = \frac{\pi L^3}{6}(3-2\sqrt{2})$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 4 :

En el gráfico de los círculos de centro **O**, O_1 y O_2 son paralelos, $VO = OO_1 = O_1O_2$. El volumen del tronco de cono circular recto que tiene como base a los círculos del centro **O** y O_1 es igual a **7**. Calcule el volumen del cono mayor .

A) 9
B) 12
C) 17
D) 25
E) 27



RESOLUCIÓN :

$V_1 \rightarrow$ volumen del cono de altura VO

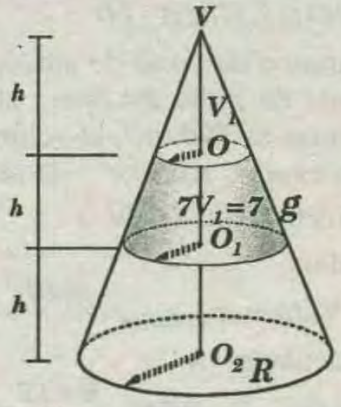
$V_2 \rightarrow$ volumen del cono de altura VO_1

$V_3 \rightarrow$ volumen del cono de altura VO_2

* Piden : V_3

* Dato :

$V_{TRONCO\ CONO} = 7$



* Por semejanza :

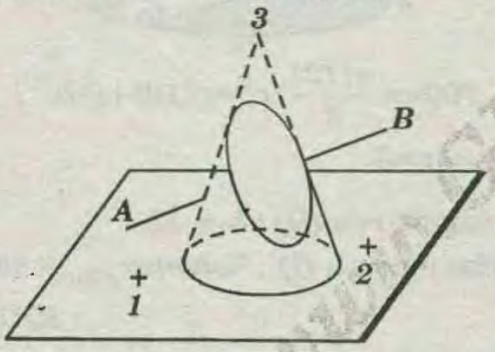
$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{(2h)^3}{h^3} \Rightarrow V_2=8V_1 \Rightarrow V_1=1$$

* Además : $\frac{V_3}{V_1}=\frac{(3h)^3}{h^3} \Rightarrow V_3=27$

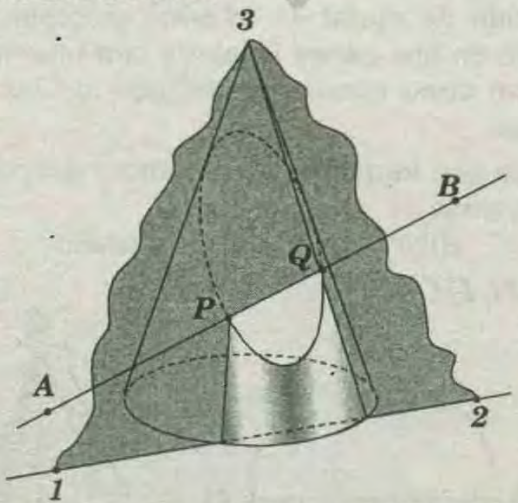
RPTA : "E"

PROBLEMA 5 :

Si *1* y *2* pertenecen al plano de la base y la recta *AB* está incluida en el plano *(123)*. Halle la intersección de la recta *AB* con el cono truncado.



RESOLUCIÓN :



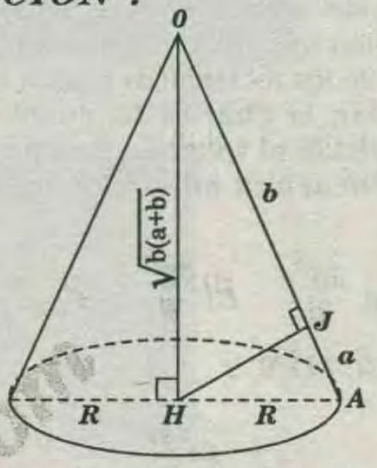
P y *Q* están en la elipse plano *(123)* contiene a la recta $\overline{AB}$.

PROBLEMA 6 :

En un cono revolución de vértice *O* , se traza la altura $\overline{OH}$ y $\overline{HJ}$ y luego perpendicular a una generatriz *OA*, siendo $AJ = a$ y $JO = b$. Halle el volumen del cono.

A) $\frac{\pi}{3}(a+b)^3$ B) $\frac{\pi}{3}ab^{\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{3}{2}}$ C) $\frac{\pi}{3}(a+b)^2(a-b)$

RESOLUCIÓN :



* Por relaciones métricas en el $\triangle$:

$$R^2 = (a+b)\ ;\ OH^2 = b(a+b)$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{b(a+b)}$$

* El volumen del cono es :

$$V=\frac{\pi}{3}R^2(OH) \Rightarrow V=\frac{\pi}{3}a(a+b)\sqrt{b(a+b)}$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi}{3}a\sqrt{b}(a+b)^{\frac{1}{2}+1} \Rightarrow V=\frac{\pi}{3}ab^{\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{3}{2}}$$

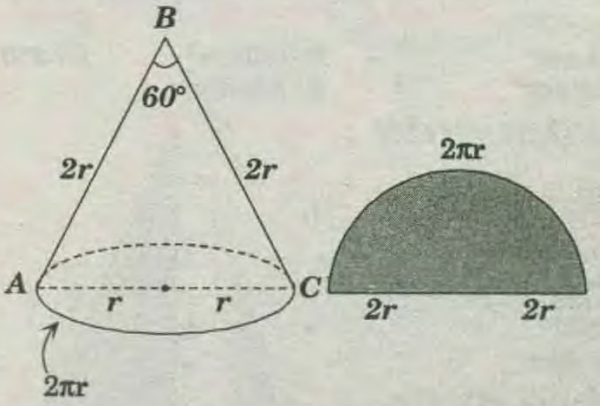
RPTA : "B"

PROBLEMA 7 :

Al desarrollar la superficie lateral de un cono de revolución , se obtiene un semicírculo. Halle la medida del ángulo que forman dos generatrices diametralmente opuestas.

A) 30° B) 45° C) 60° D) 90° E) 120°

RESOLUCIÓN :



* El radio del semicírculo es $2r$, en el cono la generatriz es $2r$.

WWW.GRATIS2.COM

* La longitud de la semicircunferencia en el desarrollo es $2\pi r$.

* En la base del cono, la longitud de la circunferencia debe ser $2\pi r$, entonces su diámetro es $2r$.

Esto demuestra que el ΔABC es equilátero.

$$\Rightarrow m\sphericalangle B = 60^\circ$$

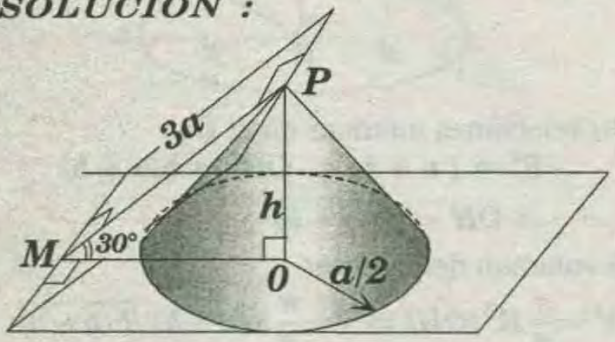
RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

Dos rectángulos congruentes de lados a y $3a$ tiene un lado común que mide a y forman un diedro de 30°. En uno de los rectángulos reposa la base de un cono circular, la cual es tangente a los lados mayores. Calcule el volumen de este cono , si su vértice se encuentra en el lado menor del otro rectángulo.

A) $\frac{2\pi a^3}{15}$ B) $\frac{\pi a^3}{9}$ C) $\frac{\pi a^3}{8}$ D) $\frac{\pi a^3}{4}$ E) $\frac{\pi a^3}{2}$

RESOLUCIÓN :



* ΔPOM notable de 30° y 60°.

$$\Rightarrow h=\frac{3a}{2}.$$

* El volumen del cono es :

$$V=\frac{\pi}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2\left[\frac{3a}{2}\right]\Rightarrow V=\frac{\pi a^3}{4}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 9 :

El área de la superficie total de un cono es $200\pi m^2$ el producto de las longitudes de su generatriz y el radio de su base es $136m^2$. Calcular el volumen de dicho cono.

A) $154\pi m^3$ B) $180\pi m^3$ C) $230\pi m^3$
D) $285\pi m^3$ E) $320\pi m^3$

RESOLUCIÓN :

* Piden : $V=\frac{\pi R^2 h}{3}$ .....(I)

* Datos :

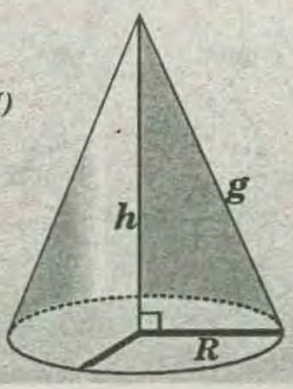
$g\times R=136$

$A_{ST}=200\pi$

$A_{ST}=\pi Rg+\pi R^2=200\pi$

$\rightarrow \pi 136+\pi R^2=200\pi$

$\rightarrow R=8$



* Luego : $g=17$ y $h=15$

* En (I) : $V=\frac{\pi(8)^2(15)}{3}=320\pi$

RPTA : "E"

PROBLEMA 10 :

Un tronco de cono de altura $12m$ tiene por base un círculo de radio $R=10m$. si el volumen del tronco de cono es $700\pi m^3$, el volumen del cono es :

A) $812\pi m^3$ B) 800π C) 750π D) 815π E) 900π

RESOLUCIÓN :

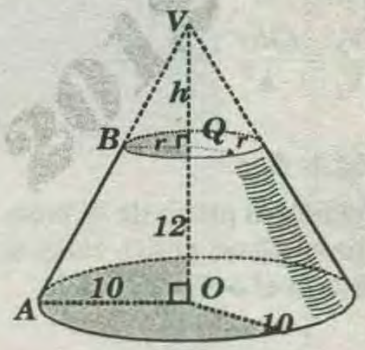
* Piden.

$$Volumen_{(CONO)}=\frac{\pi(10)^2\times(h+12)}{3}\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

* Calculado : h

$$\triangle AOV\sim\triangle BQV:\ \frac{h+12}{10}=\frac{h}{r}\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

* Del dato :



$$700\pi=\frac{\pi(12)}{3}[r^2+r(10)+(10)^2]$$

$$\Rightarrow r=5$$

* Reemplazando en (II) : $h = 12$

* Reemplazando en (I) . $Volumen_{(CONO)}=800\pi$

RPTA : "B"

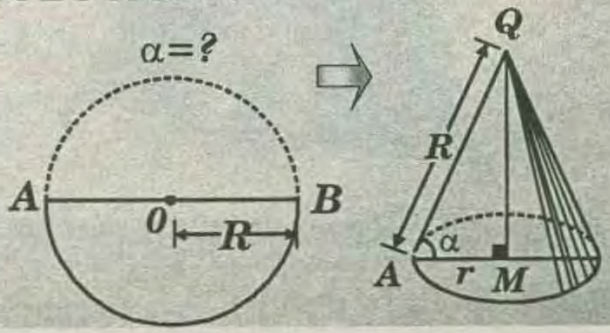
PROBLEMA 11 :

Un círculo de metal de $64\pi cm^2$ se corta por un diámetro en dos partes iguales y con una mitad se forma un cono circular recto uniendo los radios extremos.

El ángulo que forman las generatrices del cono con su base, mide :

A) 15° B) 30° C) 60° D) 45° E) 75°

RESOLUCIÓN :



$\ell_{\overset{\frown}{AB}}$ = circunferencia de la base del cono

$\rightarrow \pi R = 2\pi r \rightarrow R = 2r$

* Luego, en el $\triangle AMO$: $\alpha = 60°$

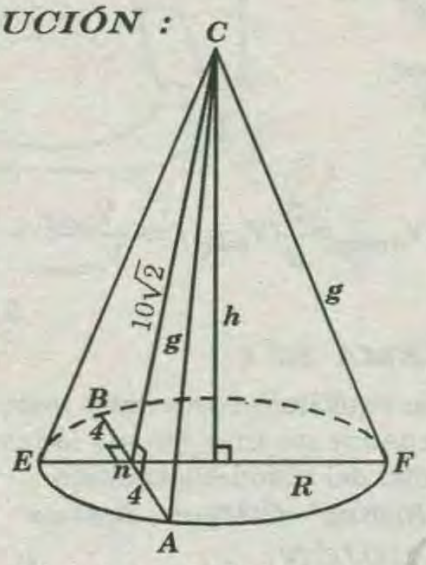
RPTA : "C"

PROBLEMA 12 :

En un cono de revolución, la cuerda $\overline{AB}$ de la base y la distancia del vértice del cono a $\overline{AB}$ mide $10\sqrt{2}$. Si $AB = 8u$ y el área lateral es $48\sqrt{6}\pi$. Entonces el volumen del sólido limitado por el cono es :

A) $\frac{128\pi\sqrt{38}}{3}$ B) $\frac{125\pi\sqrt{38}}{3}$ C) $\frac{116\pi\sqrt{34}}{9}$

RESOLUCIÓN :



* Por dato el área lateral del cono es:

$$48\sqrt{6}\pi = \frac{2\pi Rg}{2} \Rightarrow Rg = 48\sqrt{6} \quad \text{.....(I)}$$

* $\triangle OMA$: $g^2 = (10\sqrt{2})^2 + 4^2 \Rightarrow g = 6\sqrt{6}$ .....(II)

* (II) en (I): $R6\sqrt{6} = 48\sqrt{6} \Rightarrow R = 48$

* $\triangle OHF$: $h^2 = (6\sqrt{6})^2 - 8^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{38}$

* El volumen del cono es:

$$V = \frac{\pi}{3}(64)(2\sqrt{38}) = \frac{128\pi\sqrt{38}}{3}$$

RPTA : "A"

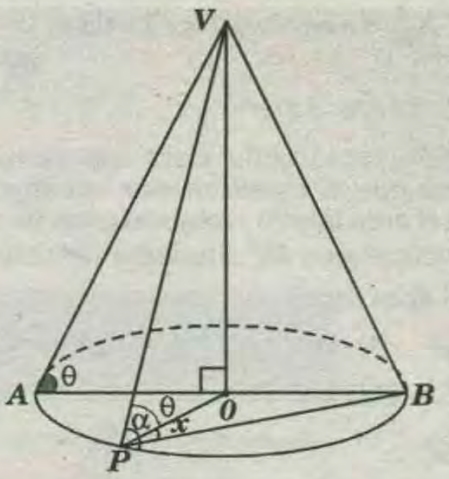
PROBLEMA 13 :

En un cono revolución de vértice V, por el centro O es su base se traza el diámetro AB y se ubica un punto $P \neq B$ en la circunferencia de la base , halle los valores enteros del ángulo OPB para que la $m\sphericalangle VPB$ sea mínima.

A) 79° y 36° B) 26° y 45° C) 25° y 89°

D) 59° y 61° E) 1° y 89°

RESOLUCIÓN :



* Por propiedad de triedros : $\theta - \alpha < x < \theta + \alpha$ valores enteros de x, cuando $\theta = 60°$ y $\alpha = 2$ (mínimo).

$60 - 2 < x < 60 + 2 \Rightarrow 58 < x < 62$

$\Rightarrow 59°$ y $61°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 14 :

Una cuerda trazada en la base de un cono circular recto de $4m$ de altura, mide $8m$. si la distancia de la cuerda al centro del círculo base es de $2m$. ¿Cuánto mide la generatriz?.

A) 4 B)6 C)8 D) $\sqrt{20}$ E) $4\sqrt{3}$

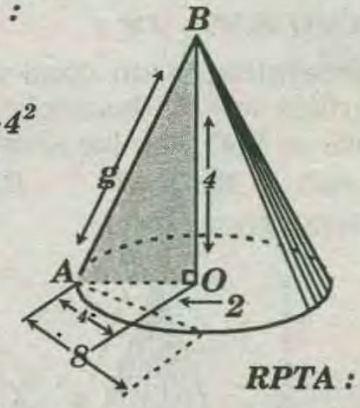
RESOLUCIÓN :

* Se tiene :

$\triangle AOB \Rightarrow g^2 = AO^2 + 4^2$

$\Rightarrow g^2 = (2^2 + 4^2) + 4^2$

$\Rightarrow g^2 = 36 \Rightarrow g = 6$



RPTA : "B"

PROBLEMA 15 :

La altura de un cono de revolución mide 12 , el diámetro de su base mide 10 . Encontrar el área de su superficie lateral.

A) 60π B) 62π C) 64π D) 65π E) 70π

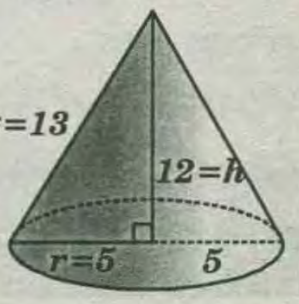
RESOLUCIÓN :

* Usando el teorema de Pitágoras :

$g^2 = r^2 + h^2$

$\Rightarrow g^2 = 5^2 + 12^2$

$\Rightarrow g^2 = 169 \Rightarrow g = 13$



* Luego : $A_{SL}=\pi rg=\pi\times5\times13=65\pi$

RPTA : "D"

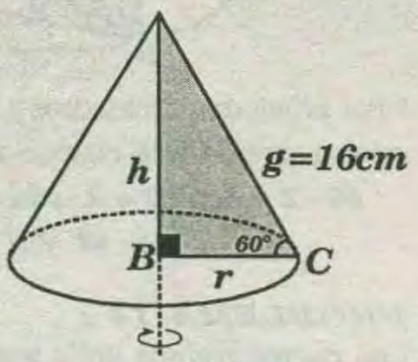
PROBLEMA 17 :

Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa miden 16cm forma con el cateto menor un ángulo de $60°$. ¿Cuál será el área lateral y total del cono de revolución que se genera al girar $30°$ alrededor del cateto mayor?. (indicar el área total)

A) $180\pi cm^2$ B) 20π C) 184π D) 192π E) 184π

RESOLUCIÓN :

*En $\triangle ABC$:



$$h=\frac{16}{2}\sqrt{3}\Rightarrow h=8\sqrt{3}$$

* Entonces :

$$r=\frac{16}{2}=8$$

* Además :

$$A_L=\pi rg\Rightarrow A_L=\pi\times8\times16=128\pi$$

* Luego:

$$A_T=\pi r(g+r)\Rightarrow A_T=\pi\times8(16+8)\Rightarrow A_T=192\pi$$

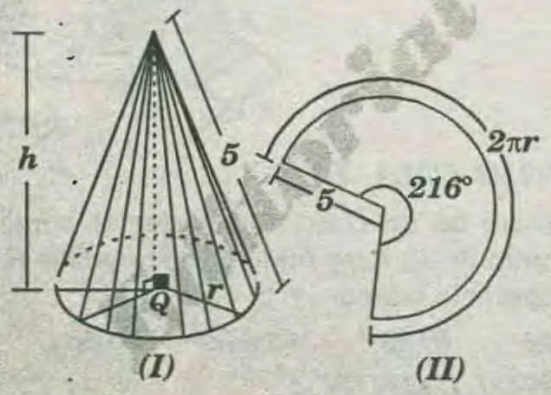
RPTA : "D"

PROBLEMA 18 :

La generatriz de un cono recto mide $5m$ y la superficie lateral desarrollada forma un sector circular de $216°$. Calcular el volumen de dicho cono.

A) $12\pi m^3$ B) $16\pi m^3$ C) $18\pi m^3$ D) $20\pi m^3$

RESOLUCIÓN :



* De la figura *(I)* :

$$2\pi r=5(216)°\frac{\pi}{180°}\Rightarrow r=3$$

* De la figura *(II)* :

* ΔPQN : $5^2=h^2+r^2\Rightarrow25-9=h^2\Rightarrow h^2=4$

* Luego : $V_{cono}=\frac{1}{3}(\pi r^2)h$

* Reemplazando : $V_{cono}=\frac{1}{3}(\pi)(3)^2(4)\Rightarrow V_{cono}=12\pi$

RPTA : "A"

PROBLEMA 19 :

Se traza un plano paralelo a la base de un cono por el punto medio de su altura. Hallar la relación entre el cono total y el tronco de cono que resulta(relación de volúmenes).

A) 7/6 B) 8/5 C) 2 D) 3/2 E) 8/7

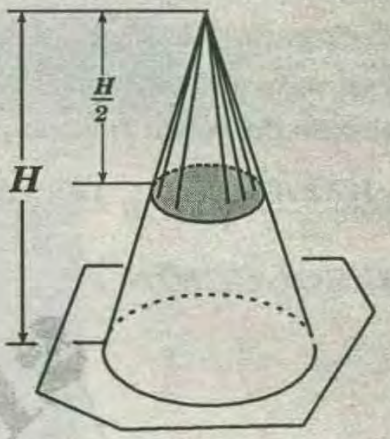
RESOLUCIÓN :

$$\frac{V_{total}}{V_{tronco}}=?$$

* Como :

$$\frac{V_1}{V_{total}}=\frac{\left(\frac{H}{2}\right)^3}{H^3}$$

$$\Rightarrow V_1=\frac{V_{total}}{8}$$



* Entonces :

$$V_{tronco}=\frac{7}{8}(V_{total})\Rightarrow\frac{V_{total}}{V_{tronco}}=\frac{8}{7}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 20 :

Un triángulo equilátero cuyos lados mide $6a$ metros y gira alrededor de uno de sus lados. Hallar el volumen total del sólido engendrado .

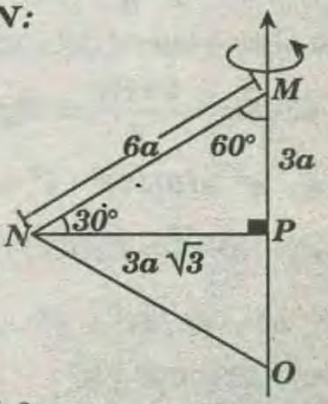
A) $52\pi a^3$ B) $28\pi a^3$ C) $34\pi a^3$ D) $54\pi a^3$ E) $64\pi a^3$

RESOLUCIÓN:

* Graficando :

* De la figura :

Se observa que genera 2 conos con radio igual a $3a\sqrt{3}$.



* luego :

$$V_{total}=\frac{2\pi(3a\sqrt{3})^2(3a)}{3}=54\pi a^3$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 21 :

Se dan dos esferas tangentes exteriormente y cuyos radios miden $1dm$. y $3dm$. El volumen del cono recto circunscrito a ambas esferas, es:

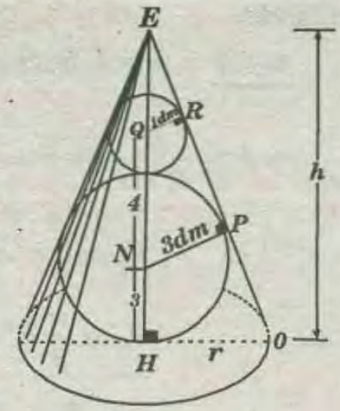
A) $81dm^3$ B) $18\pi dm^3$ C) $18dm^3$ D) $81\pi dm^3$

RESOLUCIÓN:

* De la figura :

* $\Delta ERQ\sim\Delta EPN$: $\frac{EQ}{EN}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{h-7}{h-3}=\frac{1}{3} \Rightarrow h=9$



* ΔERQ: $EQ=2$

$ER=\sqrt{3}$

* $\Delta ERQ \sim \Delta EHO$:

$\frac{r}{1}=\frac{9}{3} \Rightarrow r=3\sqrt{3}$

* Se pide : $V=\frac{1}{2}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi(3\sqrt{3})^2(9)=81\pi$

RPTA : "D"

PROBLEMA 22 :

La fórmula del volumen del cono circular recto, en función de la generatriz g y de la altura h, es:

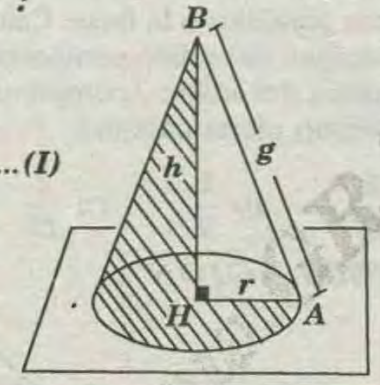
A) $\frac{\pi}{3}(g^2-h^2)h^3$ B) $\frac{\pi}{3}g^2-h^2-h^2$

C) $\frac{\pi}{3}(g^2-h^2)h^2$ D) $\frac{\pi}{3}(g^2-h^2)h$

RESOLUCIÓN :

* Por fórmula :

$V_{cono}=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ .....(I)



* De la figura :

* ΔBHA:

$h^2+r^2=g^2$

$\rightarrow r^2=g^2-h^2$.....(II)

* (II) en (I) : $V_{cono}=\frac{1}{3}\pi(g^2-h^2)h$

RPTA : "D"

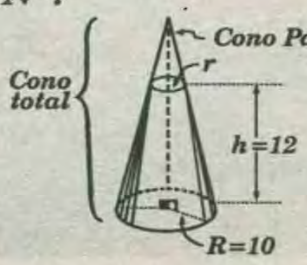
PROBLEMA 23 :

Un tronco de cono de altura $12m$ tiene por base mayor un círculo de radio $R=10m$.

Si el volumen del tronco de cono es $7000\pi m^3$. ¿Cuál es el volumen del cono?

A) $750\pi m^3$ B) $812\pi m^3$ C) $780\pi m^3$
D) $800\pi m^3$ E) $815\pi m^3$

RESOLUCIÓN :



* Para el tronco de cono :

$V_{tronco}=\frac{\pi}{3}h(R^2+r^2+Rr)$

$\Rightarrow 700\pi=\frac{\pi}{3}\times 12(10^2+r^2+10r)$

* De donde: $r=5$

* Luego, para el cono total y cono pacial:

$\frac{V_{total}}{V_{parcial}}=\left(\frac{R}{r}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_{total}}{V_{total}-700\pi}=\left(\frac{10}{5}\right)^3$

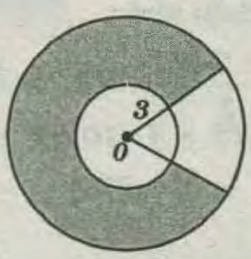
$\Rightarrow \frac{V_{total}}{V_{total}-700\pi}=8 \Rightarrow V_{total}=800\pi$

RPTA : "D"

PROBLEMA 24 :

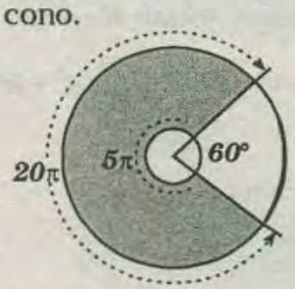
De un círculo de área $144\pi m^2$ se extraen, primero un sector circular con área $24\pi m^2$ y luego la porción de círculo de $3m$ de radio que queda , obteniéndose una porción de anillo circular como se muestra la figura, con lo que se forma un tronco de cono.Calcular su volumen.

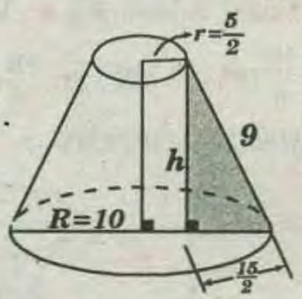
A) $256\sqrt{11}\pi m^3$
B) $156\sqrt{11}\pi m^3$
C) $\frac{525}{8}\sqrt{11}pm^3$
D) $\frac{525}{4}\sqrt{11}pm^3$



RESOLUCIÓN:

* De la figura 5π y $20\pi m$., son las longitudes de los arcos de circunferencias que serán bases del tronco de cono.





* Del tronco: $2\pi r=5\pi \Rightarrow r=5/2$

$2\pi R=20\pi \Rightarrow R=10$

* Luego : $h^2+\left(\frac{15}{2}\right)^2=9^2 \Rightarrow h=\frac{3\sqrt{11}}{2}$

* Entonces :

$V=\frac{\pi\times 3\sqrt{11}}{3}\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)10+10^2\right) \Rightarrow V=\frac{525}{8}\sqrt{11}\,\pi$

RPTA : "C"

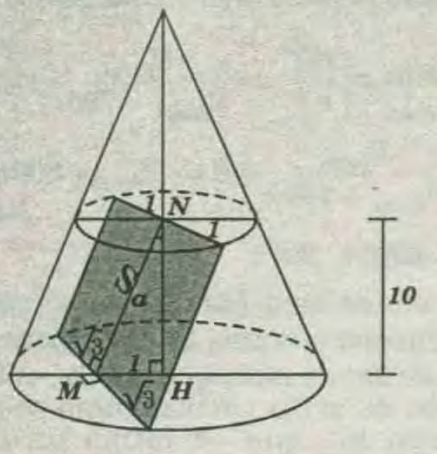
PROBLEMA 25 :

En un tronco de cono de revolución se traza un plano por el centro de la base menor y paralelo a una

generatriz determinando una sección trapezoidal cuyas bases miden **2** y $2\sqrt{3}$. Si la altura del tronco de cono mide **10** y el radio de la base mayor mide **2**. Halle el área de la sección aproximada.

A) 25,6 **B) 26,3** **C) 27,4** **D) 28,5**

RESOLUCIÓN :



$\triangle NHM$:

$$a^2 = 10^2 + 1 = 101 \Rightarrow a = \sqrt{101}$$

* El área pedido será :

$$S = \frac{(a + 2\sqrt{3})}{2} \times \sqrt{101} \Rightarrow S = (\sqrt{3} + 1)\sqrt{101}$$

$$S = (1{,}73 + 1)(10{,}04) \Rightarrow S = (2{,}73)(10{;}04)$$

$$\Rightarrow S = 27{,}4$$

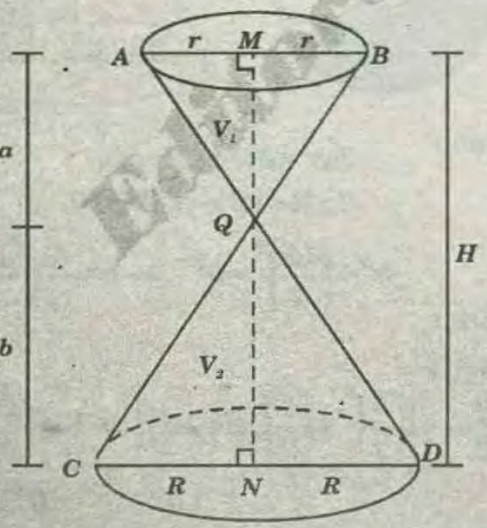
RPTA : "C"

PROBLEMA 26 :

Halle el volumen del sólido limitado por un cono recto de revolución de dos hojas cuyos radios de las bases miden R y r, las bases distan H.

A) $\frac{\pi H}{6}(R^2 + r^2 - 2Rr)$ **B)** $\frac{rH}{3}(R^2 + r^2 - Rr)$ **C)** $\frac{\pi H}{3}(R^2 + 2r^2)$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle QMB \sim \triangle QND$:

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{r}{R} \Rightarrow a = rk \ ; \ b = Rk$$

* Sumando :

$$\underbrace{a + b} = k(r + R)H = (r + R)$$

* Pero: $\Rightarrow k = \frac{H}{R + r} \Rightarrow a = \frac{rH}{R + r} \ ; \ b = \frac{RH}{R + r}$

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \frac{\pi}{3} r^2 a \\ V_2 = \frac{\pi}{3} R^2 b \end{array}\right\} (+)$$

$$V = \frac{\pi}{3}(ar^2 + bR^2)$$

* Reemplazando :

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{rH}{R + r} \times r^2 + \frac{RH}{R + r} \times R^2\right) \Rightarrow V = \frac{H\pi}{3(R + r)}\underbrace{(R^3 + r^3)}$$

$$\Rightarrow V = \frac{H\pi}{3\cancel{(R + r)}}\cancel{(R + r)}(R^2 - Rr + r^2)$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 - Rr)$$

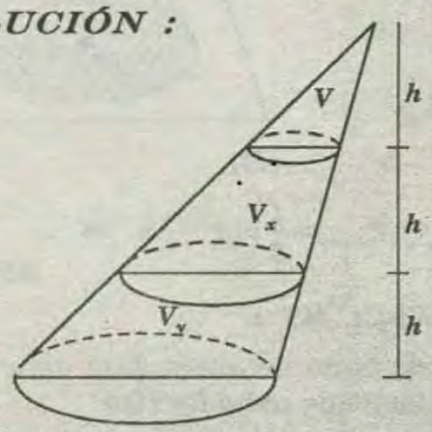
RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

En un cono oblicuo su altura es trisecada por dos planos paralelos a la base. Calcule la relación entre el volumen del sólido comprendido entre los planos paralelos del sólido , comprende entre la base y el inmediato plano paralelo.

A) $\frac{5}{19}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{7}{19}$ **D)** $\frac{9}{19}$ **E)** $\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :



* Por semejanza :

$$\frac{V}{V + V_x} = \left[\frac{h}{2h}\right]^3 \Rightarrow 8V = V + V_x \Rightarrow V_x = 7V \Rightarrow V = \frac{V_x}{7}$$

* También:

$$\frac{V + V_x}{V + V_x + V_y} = \left[\frac{2}{3}\right]^3 \Rightarrow \frac{\frac{V_x}{7} + V_x}{\frac{V_x}{7} + V_x + V_y} = \frac{8}{27}$$

* Simplificando : $\frac{V_x}{V_y} = \frac{7}{19}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 28 :

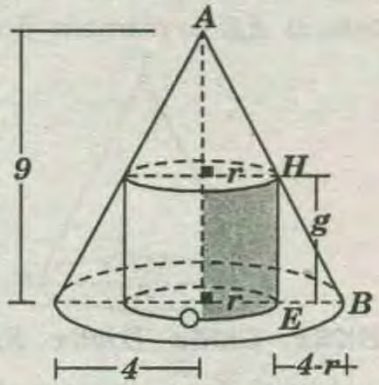
En un cono de **9 cm** de altura y cuya base tiene **8cm** de diámetro se inscribe un cilindro cuyo radio es mayor que **1** y cuya área lateral es 10π . Hallar dicho radio .

A)12/5 B) 5/3 C)10/3 D) 9/5 E) 8/3

RESOLUCIÓN :

* r=Radio de la base del cilindro.

* $EB = 4 - r$



$$S_{Lat}=10\pi \Rightarrow 2\pi rg=10\pi$$

* Luego : $g=\frac{5}{r}$ .....(I)

* $\Delta AOB \sim \Delta HEB$: $\frac{9}{g}=\frac{4}{4-r} \Rightarrow 36-9r=4g$

* De (I) : $36-9r=4\left(\frac{5}{r}\right) \Rightarrow 36r-9r^2=20$

* Ordenando : $9r^2 - 36r + 20=0$

$(3r - 10)(3r - 2)=0$

$r_1=\frac{2}{3}$

$r_2=\frac{10}{3}$

* Del enunciado : $r > 1$

* Luego : $r=\frac{10}{3}$

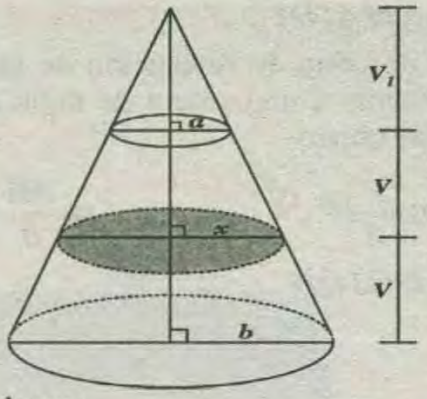
RPTA : "C"

PROBLEMA 29 :

Los radio de la bases de un tronco de cono miden a y b $(a > b)$. ¿Cuánto mide el radio de la sección paralela a las bases que determina dos sólidos equivalentes?.

A) $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{3}}$ **B)** $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{6}}$ **C)** $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$

RESOLUCIÓN :



* Por semejanza:

$$\frac{V_1}{V_1+V}=\frac{a^3}{x^3} \rightarrow \frac{V_1+V-V_1}{V_1+V}=\frac{x^3-a^3}{x^3} \Rightarrow \frac{V}{V_1+V}=\frac{x^3-a^3}{x^3} \quad .....(I)$$

$$\frac{V_1+V}{V_1+2V}=\frac{x^3}{b^3} \rightarrow \frac{V_1+2V-V_1}{V_1+V}=\frac{b^3-x^3}{x^3} \Rightarrow \frac{V}{V_1+V}=\frac{b^3-x^3}{x^3} \quad .....(II)$$

* Igualando (I) y (II):

$$\frac{x^3-a^3}{x^3}=\frac{b^3-x^3}{x^3} \Rightarrow V=\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 30 :

El radio de la base de un cono de revolución es R y su altura es H , se inscribe un cilindro recto de área lateral máxima. Calcule la altura y el radio del cilindro.

A) $\frac{H}{2},\frac{R}{3}$ **B)** $\frac{H}{3},\frac{R}{2}$ **C)** $\frac{H}{4},\frac{R}{4}$ **D)** $\frac{2H}{3},\frac{2R}{3}$ **E)** $\frac{H}{2},\frac{R}{2}$

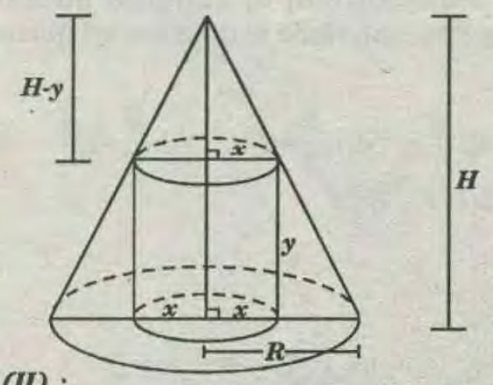
RESOLUCIÓN :

* Por semenjanza:

$$\frac{H-y}{H}=\frac{x}{R} \Rightarrow y=\frac{H}{R}(R-x) \quad .....(I)$$

* Superficie lateral del cilindro es máximo, es decir :

$$S_{L.CIL} = 2\pi xy \quad .....(II)$$



* (I) en (II) :

$$S_{L.CIL} = 2\pi x \times \frac{H}{R}(R-x) \Rightarrow S_{L.CIL} = 2\pi Hx - \frac{2\pi Hx^2}{R}$$

* Derivando; e igualando a cero.

$$2\pi H - \frac{4\pi Hx}{R} = 0 \Rightarrow x=\frac{R}{2} \wedge y=\frac{H}{2}$$

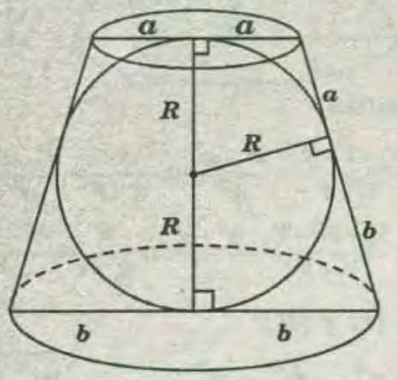
RPTA : "E"

PROBLEMA 31 :

Un tronco de cono de revolución de área total A, está circunscrita a una esfera de radio R. Halle el volumen del tronco.

A) $\frac{\pi AR}{3}$ B) $\frac{\pi}{3}R^2\sqrt{A}$ C) RA D) $\frac{AR}{3}$ E) $\frac{AR}{6}$

RESOLUCIÓN :



* El volumen del tronco de cono es :

$$V=\frac{2\pi R}{3}(a^2+b^2+ab) \quad .....(I)$$

* Por dato; área total es :

$$A=\pi(a^2+b^2)+\pi(a^2+b^2)+2\pi ab$$

$$\Rightarrow A=2\pi(a^2+b^2)+2\pi ab$$

$$\Rightarrow A=2\pi(a^2+b^2+ab)\Rightarrow a^2+b^2+ab=\frac{A}{2\pi}$$

* En (I) :

$$V=\frac{2\pi R}{3}\left(\frac{A}{2\pi}\right)\Rightarrow V=\frac{AR}{3}$$

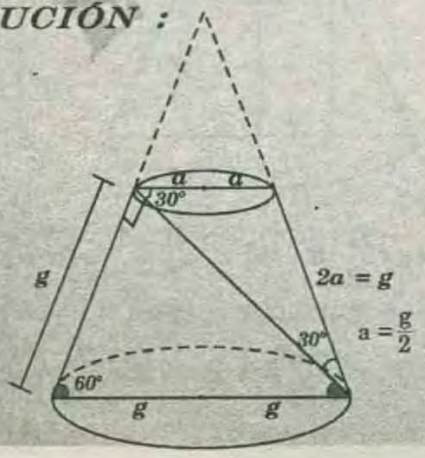
RPTA : "D"

PROBLEMA 32 :

La generatriz (g) de un tronco de cono recto de revolución forma un ángulo de $60°$ con la base inferior, y es perpendicular a la recta que une su extremo superior con el extremo inferior de la generatriz opuesta. Halle el área lateral del tronco de cono.

A) rg^2 B) $\frac{2}{3}rg^2$ C) $\frac{3}{2}\pi g^2$ D) $\frac{5}{2}\pi g^2$ E) $\frac{1}{2}rg^2$

RESOLUCIÓN :



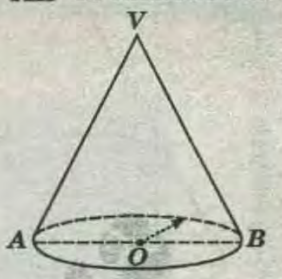
* El área lateral del tronco de cono es :

$$S=\frac{(2\pi.3/2+2\pi g)}{2}g\Rightarrow S=\frac{3}{2}\pi g^2$$

RPTA : "C"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 De la figura calcular el área de la base del cono circular recto, si $\overline{AB}$ es diámetro de la base, $VA=17$ y $VO=15$.



A)64π B)72π C)56π D)96π E)120π

02 Si el volumen de un cono es el doble del área de su base, calcular su altura.

A) 3 B) 4 C) 5 D)6 E)9

03 Calcular el volumen de un cono recto, si su área lateral es igual al doble del área de la base y el radio de la base mide 2.

A)$\pi\sqrt{3}$ B)$(8\pi\sqrt{3})/3$ C)$\frac{16\pi}{3}$

D)$(4\pi\sqrt{6})/3$ E)$(3\pi\sqrt{3})/2$

04 Calcular el radio de la esfera inscrita en un cono equilátero de generatriz igual a $6\sqrt{3}$

A) 3 B) 2 C) 2,5 D) 3,5 E) 1

05 El área de la superficie esférica inscrita en un cono equilátero, es igual a 64π. Calcular la altura del cono.

A) $6\sqrt{3}$ B) $8\sqrt{3}$ C)$10\sqrt{3}$ D)12 E)$14\sqrt{3}$

06 El desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución es un semicírculo de radio $R=2$. Calcular el volumen del sólido.

A)$\frac{\pi}{3}\sqrt{3}$ B)$\frac{\pi}{4}\sqrt{3}$ C)$\frac{\pi}{3}\sqrt{2}$ D)$\frac{\pi}{2}\sqrt{6}$ E)$\frac{\pi}{2}\sqrt{5}$

07 Calcular el volumen de un cono de revolución, sabiendo que el desarrollo de la superficie lateral es un semicírculo de área igual a 18π.

A)$15\pi\sqrt{3}$ B)$12\pi\sqrt{3}$ C)$9\pi\sqrt{3}$ D)$12\pi\sqrt{3}$ E)$3\pi\sqrt{3}$

08 Calcular el radio básico de un cono recto, sabiendo que el perímetro de su triángulo generador es $40m$, y su altura es $2m$ menor que su generatriz.

A)8 B)6 C)7 D)$4\sqrt{2}$ E)$6\sqrt{2}$

09 Hallar el volumen de un cono equilátero en función del radio «r» de la esfera inscrita.

A)πr^2 B)$2\pi r^3$ C)$3\pi r^3$ D)$4\pi r^3$ E)$5\pi r^3$

10 La superficie total de un cono es 200π, el producto de la generatriz y el radio es 136. Calcular su volumen

A)320π B)325 C)350π D)370 E)375π

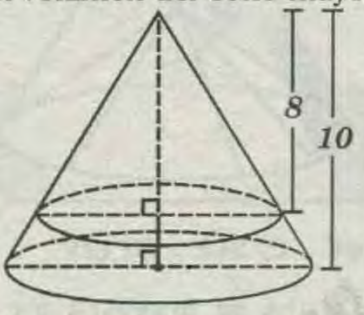
11 Calcular el volumen de un cono recto, si el ángulo del sector circular que se obtiene al desarrollar el área lateral del cono es 288° y la generatriz es 10

A)128 B)89π C)89 D)110π E)128π

12 Una cuerda trazada en la base de un cono circular recto mide 8. Si la distancia de la cuerda al centro del círculo base es 2 y la altura del cono mide 4, calcular la medida de la generatriz.

A) 4 B) 5 C) 6 D)7 E)8

13 Sabiendo que el volumen del cono menor es 48, calcular el volumen del cono mayor



A)375/8 B) 375/4 C)375/2 D)375/7 E)375

14 Calcular la altura de un cono circular recto, sabiendo que el perímetro del triángulo generador es 30 y este volumen es igual a los 2/9 del producto entre las medidas del radio de la base y el área total.

A)8 B)9 C) 10 D) 11 E)12

15 La altura de un cono recto es trisecada por dos planos paralelos a la base. Calcular el volumen de la parte intermedia, si el volumen del cono es 27.

A) 6 B) 7 C) 8 D)9 E)10

16 Calcular el área total de un cono de revolución, si la generatriz y la altura se diferencian en 1, además el radio de la base mide 5.

A)30π B)45π C)60π D)90π E)120π

17 Se tiene un cono de revolución cuya altura mide 5, tal que al aumentar el radio de la base en 3 entonces su volumen aumenta en 55π. Calcular el volumen del cono.

A)$\frac{50\pi}{3}$ B)20π C)$\frac{80\pi}{3}$ D)27π E)$\frac{65\pi}{3}$

18 El desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución es un sector circular de 288° y un metro de radio. Calcular el volumen del cono en decímetros cúbicos.

A)100π B)120π C)128π D)164π E)200π

19 Se tiene un cono recto tal que visto de frente se ve como un triángulo rectángulo. Si el diámetro de la base del cono mide 12, calcular su volumen.

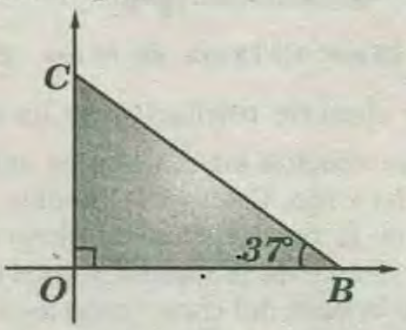
A)16π B)54π C)48π D)72π E)81π

20 Calcular el volumen del cono recto de radio 9, si la suma de la generatriz y la altura es 27.

A)324π B)162π C)81π D)224π E)124π

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si la diferencia de volúmenes de los sólidos generados por la región sombreada al girar una vuelta alrededor de $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$ es 108π, calcular el perímetro de la región.



A) 18 B) 36 C) 24 D) 27 E) 54

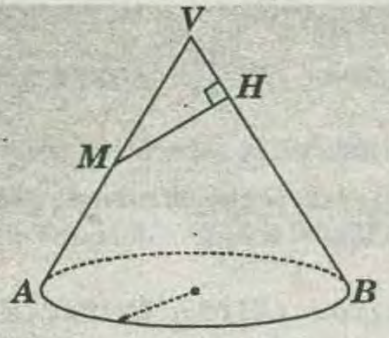
02 El desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución es un semicírculo de área 18π. Calcular el área de la superficie del cono mencionado.

A) 25π B) 27π C) 18π D) 20π E) 24π

03 En un cono de revolución se inscribe un cilindro de revolución que resulta ser equivalente al cono parcial determinado. Calcular la razón entre las áreas de las superficies laterales del cono parcial y el cono mayor.

A) 3/4 B) 1/3 C) 4/25 D) 9/16 E) 3/8

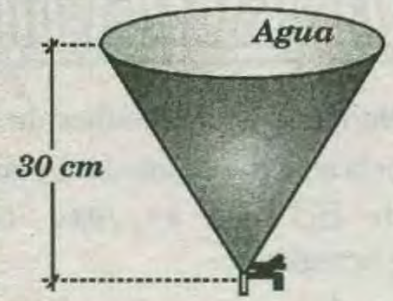
04 Calcular el volumen del cono de revolución, si: VM=MA, VH=2 y HB=6.



A) $48\sqrt{2}\pi$ B) $\frac{64}{3}\sqrt{3}\pi$ C) $27\sqrt{3}\pi$

D) $19\sqrt{6}\pi$ E) $14\sqrt{6}\pi$

05 Se tiene un recipiente cónico como se muestra en el gráfico, el cual está lleno con *1 250 cm³* de agua. Si se abre el caño mostrado y se vierte sólo *1 170 cm³* del contenido, calcular a qué distancia del vértice del recipiente queda la superficie del agua al cerrar el caño.

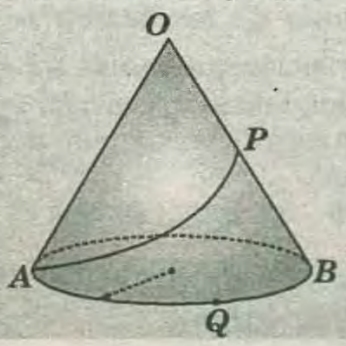


A) 10 cm B) 15 cm C) 12 cm D) 18 cm E) 16 cm

06 En un cono de revolución se ha inscrito un cilindro de revolución cuya altura es igual al radio de la base del cono. Calcular la medida de uno de los ángulos de la sección axial de dicho cono, si se cumple que el área de la superficie total del cilindro es al área de la base del cono como *3* es a *2*.

A) ArcTg(1/2) B) 45° C) 90° D) 37° E) 53°

07 En la figura se muestra a un cono equilátero cuya generatriz mide *2*, *OP=PB* y la línea curva *AP* representa el menor recorrido para ir de *A* hacia *P* a través de la superficie lateral del cono. Calcular el área de la porción de la superficie lateral de cono limitada por las líneas *AP*, *PB* y *AQB*.



A) $\pi-1$ B) $2\pi/3$ C) $\pi/2$

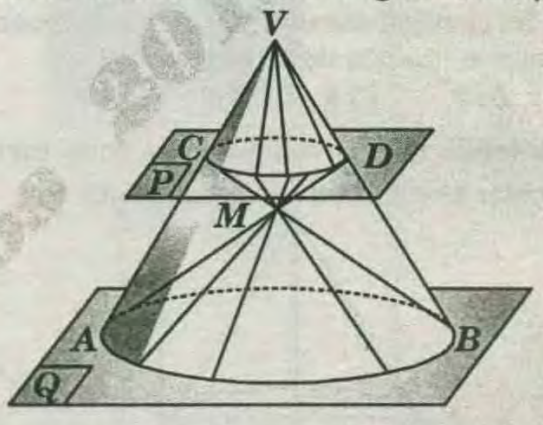
D) $\frac{\pi-2}{2}$ E) $\frac{2\pi-3}{3}$

08 Se sabe que el plano que contiene a dos generatrices perpendiculares de un cono circular recto divide a la superficie lateral de dicho cono en dos partes cuyas áreas están en la razón de *1* a *2*. Calcular el volumen del cono si su altura mide *"h"*.

A) $\frac{2}{3}\pi h^3$ B) $\frac{2}{3}\pi h^3\sqrt{2}$ C) $\frac{3}{2}\pi h^3$

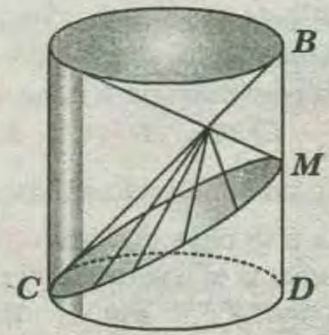
D) πh^3 E) $\frac{4}{3}\pi h^3$

09 En el gráfico adjunto los planos *P* y *Q* son paralelos y los volúmenes de los conos de generatrices $\overline{MC}$ y $\overline{MA}$ son *V* y *8V* respectivamente. Calcular el volumen del cono de generatriz $\overline{VA}$.



A) 18V B) 16V C) 24V D) 12V E) 36V

10 En la figura se muestra un cilindro de revolución de volumen *V* y *BM=MD*. Calcular el volumen del cono que tiene como base la región elíptica.



A) V/5 B) V/6 C) V/9 D) V/12 E) V/4

11 $\overline{VA}$ y $\overline{VB}$ son dos generatrices de un cono de revolución que forman un ángulo que mide *30°*. Si *VA=4* y en la base $m\widehat{AB}=90°$, calcular la longitud de la proyección ortogonal de la altura del cono sobre una de sus generatrices.

A) 2 B) 3 C) 4 D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

12 En un cono de revolución una sección axial determina dos sólidos parciales y en uno de ellos se inscribe una pirámide cuadrangular regular cuya base está inscrita en la sección axial, además una arista básica está en la base del cono. Si dos generatrices diametralmente opuestas determinan un ángulo que mide $53°$, calcular la razón de volúmenes de la pirámide y el cono.

A) $2/4\pi$ B) $3/8\pi$ C) $1/2\pi$ D) $3/16\pi$ E) $3/6\pi$

13 Se tiene un cono circular recto de vértice O, en la base se traza los diámetros perpendiculares $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, luego se ubica el punto medio M de $\overline{OB}$, tal que $MD=CD$. Calcular el volumen del cono cuya base está inscrita en el triángulo CMD y su vértice pertenece a $\overline{OA}$, si se sabe además que el volumen del cono inicial es $6\sqrt{3}$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

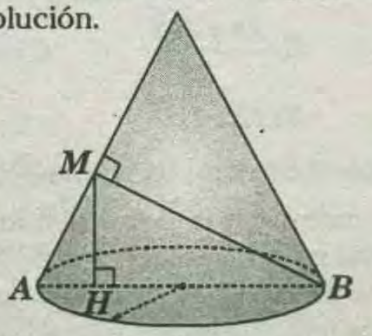
14 El área de la sección axial de un cono de revolución es 24. Calcular el área de la superficie lateral de un cilindro de revolución inscrito en el cono, de tal manera que una generatriz del cilindro está contenida en una generatriz del cono y la generatriz opuesta tiene por extremo el centro de la base del cono.

A) 8π B) 9π C) 12π D) 15π E) 18π

15 Se tiene un cono circular recto de volumen V, en cuyo interior se traza una pirámide cuadrangular regular cuyo vértice es el centro de la base del cono y los vértices de su base pertenecen a la superficie lateral del cono. Si el plano que contiene a la base de la pirámide determina en el cono una sección cuya área es la cuarta parte del área de la base del cono, calcular el volumen de la pirámide.

A) $\frac{3V}{4\pi}$ B) $\frac{3V}{8\pi}$ C) $\frac{V}{6\pi}$ D) $\frac{9V}{16\pi}$ E) $\frac{V}{4\pi}$

16 En el gráfico: $BM=3(MH)$. Calcular la medida del ángulo de desarrollo de la superficie lateral del cono de revolución.



A) 60° B) 75° C) 90° D) 120° E) 150°

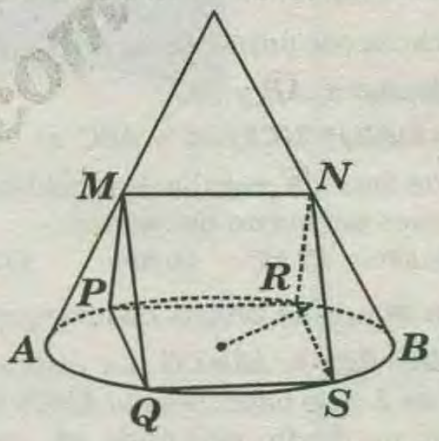
17 En un cono de revolución se ha inscrito una esfera tal que la circunferencia tangencial biseca a las generatrices del cono. ¿Qué fracción del volumen del cono es el volumen de la esfera?

A) 4/9 B) 2/5 C) $\sqrt{3}/6$ D) 2/7 E) 5/8

18 Se tiene un cilindro de revolución inscrito en un cono de revolución de vértice V y generatriz $\overline{VA}$, cuya altura $\overline{VO}$ interseca a la base superior del cilindro en N. Calcular el área de la superficie lateral del cilindro, si: $m\measuredangle VAN=m\measuredangle NAO$, $VO=12$ y $OA=5$.

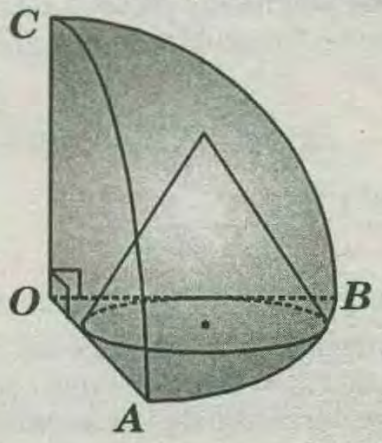
A) $\frac{350\pi}{81}$ B) $\frac{650\pi}{27}$ C) $\frac{65\pi}{3}$ D) $\frac{600\pi}{13}$ E) $\frac{200\pi}{7}$

19 Según el gráfico el volumen del cono circular recto AVB es $8\pi/3$. Calcular el volumen del prisma recto $PMQ\text{-}RNS$, si $\overline{MN}$ es base media del triángulo AVB.



A) $3\sqrt{6}$ B) $\sqrt{3}$ C) 4 D) $2\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{3}$

20 Calcular el volumen del cono de revolución inscrito en la porción de esfera mostrada, si el volumen de ésta es $8\pi/9$ y $m\measuredangle BOA=60°$.



A) $\frac{4\pi\sqrt{5}}{27}$ B) $\frac{\pi\sqrt{5}}{12}$ C) $\frac{3\pi\sqrt{6}}{16}$

D) $\frac{8\pi\sqrt{5}}{81}$ E) $\frac{16\pi\sqrt{5}}{27}$

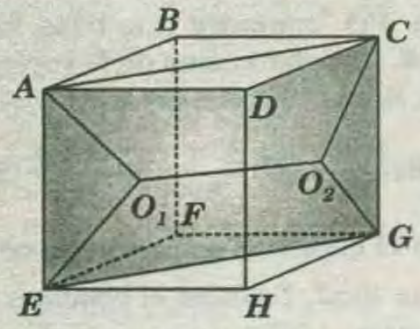
TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

SOLIDOS TRUNCADOS

01 Calcular el volumen del sólido AO_1E–CO_2G, si la arista del hexaedro regular mide *"a"*.

O_1: Centro de la cara *DAEH*

O_2: Centro de la cara *DCGH*



A) $a^3/6$ B) $5a^3/24$ C) $5a^3/21$ D) $5a^3/22$ E) $a^3/6$

02 En un troncode prisma recto *ABC-DEF*: $\overline{AD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

Si: $6(EB)=3(AD)=2(CF)=6$ y *ABC* es una región equilátera de área $\sqrt{3}$, calcular la medida del diedro entre las bases del tronco del prisma.

A) 45° B) 37° C) 53° D) 60° E) 30°

03 En un tronco de prisma cuadrangular regular *ABCD–EFGH*: $BF=3$, $AE=CG$. La distancia entre $\overline{BF}$ y $\overline{DH}$ es 2. Si la base superior *EFGH* forma con la otra base un diedro que mide 45°, calcular el volumen del tronco de prisma.

A) 4 B) 6 C) 9 D)12 E)16

04 Un tronco de pirámide regular está circunscrito a una esfera. Calcule el volumen del tronco de pirámide, si los perímetros de las bases suman **S** y el producto de las longitudes de dos aristas básicas diferentes es P^2.

A) $\frac{P(S^2+4P^2)}{48}$ B) $\frac{P(S^2-16P^2)}{48}$ C) $\frac{S^3(S^2-4P^2)}{16}$

D) $\frac{P(2S^2-9P^2)}{36}$ E) $\frac{P(S^2-16P^2)}{48}$

05 Calcular el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular, si las áreas de las bases están en la relación de 1 a 4. El área de una cara lateral es *A* y la distancia del centro de la base mayor a dicha cara lateral es *"d"*.

A) $3Ad$ B) $\frac{14}{3}Ad$ C) Ad D) $\frac{7}{8}Ad$ E) $\frac{14}{9}Ad$

06 El lado de la base mayor de un tronco de pirámide regular cuadrangular mide $6\sqrt{2}$, su altura $3\ m$ y las aristas laterales forman ángulos de 45° con el plano de la base mayor. Calcule su volumen.

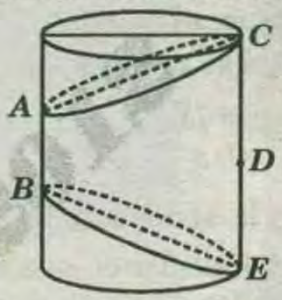
A) 216 B) 621 C) 162 D) 136 E) 126

07 Calcule el radio de la base de un tronco de cilindro circular recto cuyas bases forman un ángulo diedro cuya medida es 60°. Además, la suma de las áreas de las bases es *S*.

A) S/π B) $\sqrt{S}/\sqrt{\pi}$ C) $\sqrt{S}/\sqrt{3\pi}$

D) $\sqrt{S}/\sqrt{5}$ E) $\sqrt{S/2\pi}$

08 En el gráfico el volumen del tronco de cilindro oblicuo es 144π. Si $AC=AD$, $BD=BE$ y $AB=6$, calcule el volumen del cilindro de revolución.

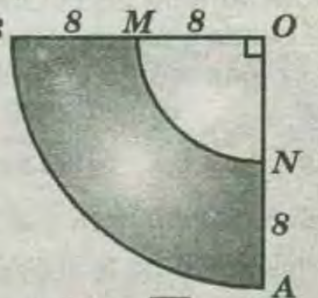


A) 96π B) 192π C) 180π D) 128π E) 256π

09 Calcular el volumen del tronco de cilindro oblicuo cuya generatriz máxima mide $2\sqrt[3]{4}$, la generatriz menor es nula y las bases del tronco son congruentes y perpendiculares.

A) π B) $\pi/2$ C) $\pi/3$ D) $2\pi/3$ E) $\pi/4$

10 Calcular el volumen del tronco de cono que se puede formar con la región sombreada (*O* es centro de los arcos $\widehat{BA}$ y $\widehat{MN}$).



A) $\frac{56\pi\sqrt{15}}{3}$ B) $\frac{28\pi\sqrt{15}}{3}$ C) $14\pi\sqrt{15}$

D) $13\pi\sqrt{13}$ E) $12\pi\sqrt{15}$

11 En un tronco de cono de revolución, los radios de las bases miden *a* y *b* $(a>b)$. Si el área de la superficie lateral es la mitad del área de la superficie total, calcule la distancia entre dichas bases.

A) $\frac{ab}{a+b}$ B) $\frac{2ab}{a+b}$ C) $\frac{4ab}{a+b}$ D) $2a\sqrt{ab}$ E) $\sqrt{ab}$

12 En un tronco de cono recto circunscrito los radios de sus bases miden **2** y **8**, por el centro de la esfera inscrita se traza un plano paralelo a las bases. Calcular el volumen del tronco de cono formado por dicho plano y su base menor.

A) 40π B) 42π C) 48π D) 52π E) 64π

13 En el gráfico se muestra un vaso de forma de prisma regular que contiene agua hasta la mitad de su altura. Si dicho vaso se inclina alrededor de $\overline{HG}$, de modo que el agua está a punto de caer, en ese instante las aristas laterales forman con el plano horizontal un ángulo de **30°** y la superficie del agua tiene un área de **24 u²** Calcule el volumen del agua contenida en el prisma.

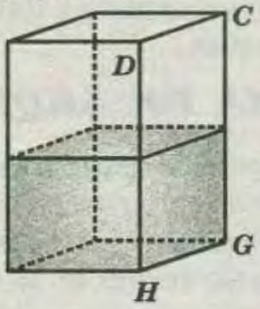
A) 60

B) 36

C) 45

D) 37

E) 72



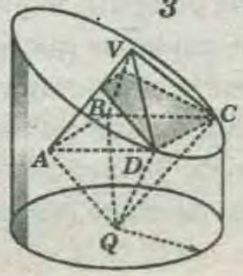
14 La arista básica mayor de un tronco de pirámide regular de **6** caras tiene por longitud **3** y sus bases distan **5**. Además una sección paralela a las bases determina en dicho tronco una sección que tiene un perímetro de **10,4** y dista **3** de la base menor. Calcule el volumen de dicho tronco.

A) 92/3 B) 22 C) 97/3 . D) 95/3 E) 11

15 Se tiene un tronco de cono recto de bases paralelas circunscrito a una esfera de radio **R**. Calcular el volumen del sólido que se encuentra limitado por la superficie esférica y la superficie del tronco de cono, si se sabe que el área de la superficie total del tronco es el triple del área de la superficie esférica.

A) $\frac{8}{3}\pi R^3$ *B)* $\frac{4}{7}\pi R^3$ *C)* $\frac{9}{4}\pi R^3$ *D)* $\frac{2}{9}\pi R^3$ *E)* $\frac{4}{3}\pi R^3$

16 La base elíptica del tronco de cilindro de revolución es perpendicular a la cara **VAB** del octaedro regular de volumen $\frac{64\sqrt{2}}{3}$. Calcule el volumen del tronco.



A) $24\sqrt{2}\pi$ *B)* $12\sqrt{2}\pi$ *C)* $24\sqrt{3}\pi$ *D)* $12\sqrt{3}\pi$ *E)* $36\sqrt{2}\pi$

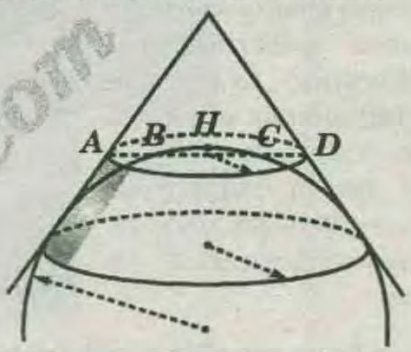
17 En un prisma oblicuo **ABC–A'B'C'**, cuya arista lateral mide **18**, un plano interseca a las aristas **AA'**, **BB'** y **CC'** en los puntos **M**, **N** y **F**, respectivamente. Si: **AM=9**, **BN=6** y los volúmenes de los sólidos **ABC – MNF** y **MNF – A'B'C'** están en la relación de **2** a **3**, calcular **CF**.

A) 6,6 B) 7,2 C) 7,6 D) 8,4 E) 9

18 Se tiene un tronco de pirámide regular **ABCD–EFGH** circunscrito a una esfera. Si las áreas de sus bases son **4** y **36 m²**, calcular la longitud de la diagonal de dicho sólido.

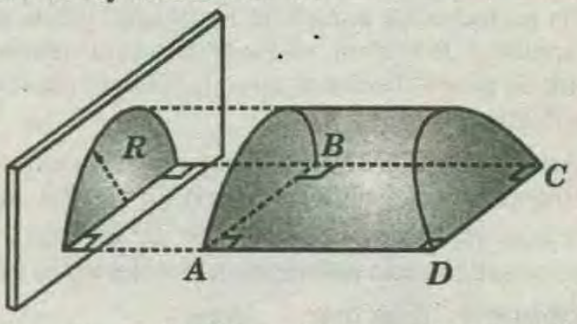
A) $\sqrt{17}$ *m B)* $\sqrt{19}$ *m C)* $\sqrt{21}$ *m D)* $2\sqrt{7}$ *m E)* $2\sqrt{11}$ *m*

19 En el gráfico: **H** es el ortocentro de la sección axial del cono equilátero mayor. Si **AB=2** y **BC=6**, calcule el volumen del tronco de cono.



A) 218π *B)* $\frac{218}{3}\sqrt{3}\pi$ *C)* 128π *D)* $72\sqrt{3}\pi$ *E)* $\frac{128}{3}\sqrt{3}\pi$

20 Calcule el volumen de la porción del cilindro de revolución mostrado, si **AD=6**, la generatriz mínima es **4** y además **R=3**.



A) 3(9π – 4) *B) 3(3π – 2)* *C) 3(3π – 1)*

D) 9(π – 1) *E) 9π – 8*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)A	2)D	3)B	4)A	5)D	6)A	7)C	8)A	9)C	10)A
11)E	12)C	13)B	14)E	15)B	16)D	17)C	18)C	19)D	20)A

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)A	2)B	3)D	4)B	5)C	6)E	7)A	8)C	9)C	10)C
11)D	12)B	13)A	14)C	15)E	16)D	17)A	18)B	19)E	20)D

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1)B	2)A	3)A	4)B	5)E	6)E	7)C	8)B	9)A	10)A
11)B	12)D	13)B	14)D	15)A	16)A	17)A	18)E	19)B	20)A

ediciones2.com

ESFERA

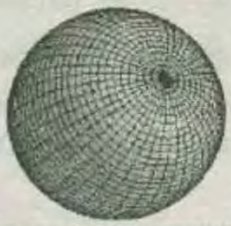
CAPITULO 40

OBJETIVOS :

* *Reconocer una superficie esférica de una esfera.*

* *Aplicar correctamente los teoremas en la resolución de problemas.*

INTRODUCCIÓN :



Una **esfera** (del griego «sfaira») es la superficie formada por todo s los puntos del espacio tales que la distancia (llamada *radio*) a un punto determinado, denominado centro , es siempre la misma. También se refiere al sólido cuyo volumen se halla contenido en la superficie anterior ; con este significado se emplea específicamente la palabra *bola*.

La esfera es la figura geométrica que para igual volumen presenta la superficie externa menor. Esta propiedad es la causa de su omnipresencia en el mundo físico: en la superficie de una gota de un líquido inmerso en un ambiente gaseoso o también líquido (pero con líquidos que no se pueden mezclar), existen fuerzas superficiales que deformarán la gota hasta encontrar el valor mínimo de tensión en todos los puntos de la misma , y este mínimo corresponde a una esfera , en ausencia de toda perturbación exterior. Se genera haciendo girar un semicírculo alrededor de un diámetro.

Es a Arquímedes ***(287 - 212 a.c.)*** celebre matemático de Siracusa, en Sicilla, a quien se deben algunos teoremas más importantes de la geometría del espacio, sobre todo referente a la esfera y el cilindro.

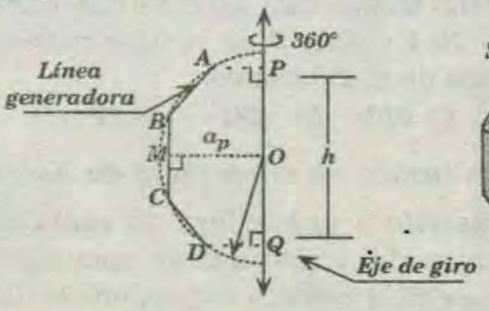
La tradición dice que sobre su tumba esculpieron una esfera y un cilindro circunscrito en conmemoración de sus descubrimientos relativosa estos dos sólidos. La naturaleza presenta :

ejemplos de frutos que se aproximan a una esfera, como por ejemplo la naranja. Las gotitas de agua se aproxima a una esfera. En la ornamentación se utiliza la esfera. Las pelotas, bombillas, etc. Son otros ejemplos de objetos que se relacionan con la esfera.

La tierra es aproximadamente esférica y gira alrededor de un eje que pasa por los polos llamado eje del mundo. Los meridianos y paralelos de esta superficie de revolución se llaman paralelos y meridianos terrestres .

TEOREMA DE ARQUIMEDES

El área de la superficie generada por una poligonal regular al girar ***360°*** entorno a un eje que contiene al centro de la poligonal regular , la cual está en un mismo semiplano respecto al eje , es igual al producto de la longitud de la circunferencia cuyo radio es igual a la longitud del apotema de la poligonal regular con la longitud de la proyección ortogonal de la poligonal sobre el eje.



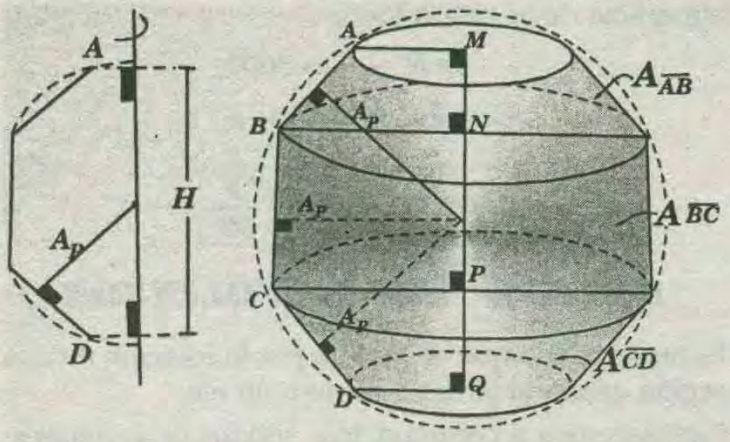
$$A_{SG} = (2\pi a_p)h$$

* ***ABCD*** : Poligonal regular de centro ***O*** y Apotema ***OM.***

* $\overline{PQ}$: Proyección ortogonal de ***ABCD*** sobre el eje.

* A_{SG} : Área de la Superficie Generada.

Es decir el teorema anterior señala que el área que genera una poligonal regular cuando gira alrededor de un eje coplanar que pasa por el centro de la circunferencia circunscrita a dicha poligonal es igual a la longitud de una circunferencia cuyo radio es el apotema de la poligonal multiplicado por la proyección de dicha poligonal sobre el eje de giro .



$$A_{generada} = 2\pi(Apotema) \times H$$

H: proyección de la poligonal sobre el eje de giro

DEMOSTRACIÓN :

Área generada = suma de las áreas generada por

$$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}.....$$

Área generada $= 2\pi Ap\,MN + 2\pi Ap\,NP + 2\pi Ap\,PQ + ...$

Área generada $= 2\pi\,Ap\,(MN + NP + PQ + ...)$

Área generada $= 2\pi\,(Ap) \times H$

SUPERFICIE ESFÉRICA

Es aquella superficie generada por una semicircunferencia al girar *360°* en torno a su diámetro.

♠ ÁREA DEL CÍRCULO MÁXIMO (A_{CM}):

$$A_{CM} = \pi R^2$$

♠ ÁREA DE LA SUPERFICIE ESFÉRICA (A_{SE}):

$$A_{S.E.} = 4\pi R^2$$

♠ VOLUMEN DE LA ESFERA (V_E) :

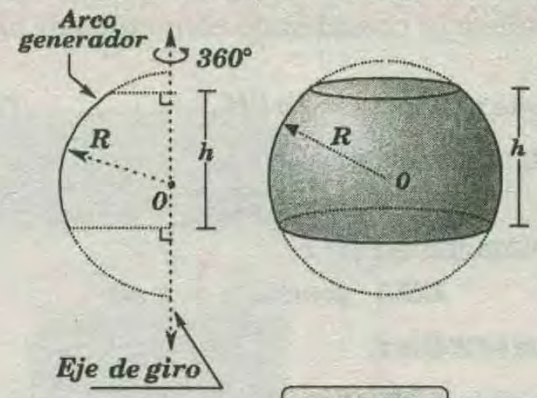
$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3$$

NOTA:

El área de la superficie esférica es igual a cuatro veces el área de un círculo máximo.

ZONA ESFÉRICA

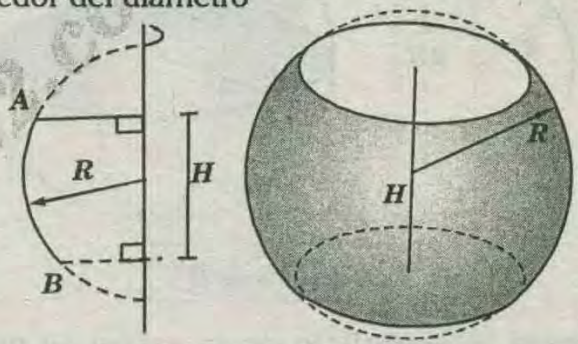
Es la porción de superficie esférica comprendida entre dos circunferencias determinadas por dos planos paralelos y secantes a la superficie esférica.



$$A_{ZE} = 2\pi Rh$$

A_{ZE} : Área de la Zona Esférica.

Es decir la zona esférica es la porcion de superficie esférica generada por la rotación completa de un arco alrededor del diámetro



$$área_{generada} = 2\pi RH$$

H: altura de la zona

DEMOSTRACIÓN :

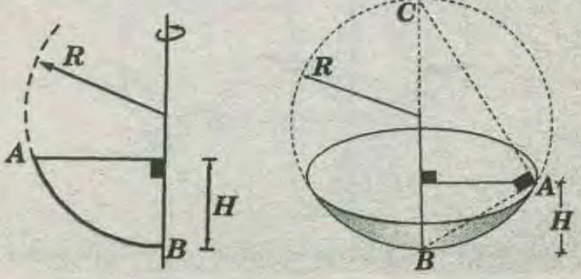
Si en el arco *AB* se inscribe una poligonal regular cuyo número de lados aumenta indefinidamente entonces el apotema tiende al radio de acuerdo al teorema de arquímedes :

Área generada $= 2\pi Ap \times H$; $AP = R$

$\Rightarrow$ Área generada $= 2\pi R\,H$

CASQUETE ESFÉRICO

Es la porción de superficie esférica generada por la rotación completa de un arco alrededor del diámetro que pasa por uno de los extremos del arco .



GRATIS.es

área generada = $2\pi RH$

$\Rightarrow$ área generada = πAB^2

DEMOSTRACIÓN :

* El casquete es considerado como zona de una sola base .

área generada = $2\pi RH$.....*(I)*

* $\triangle ABC$: relaciones métricas

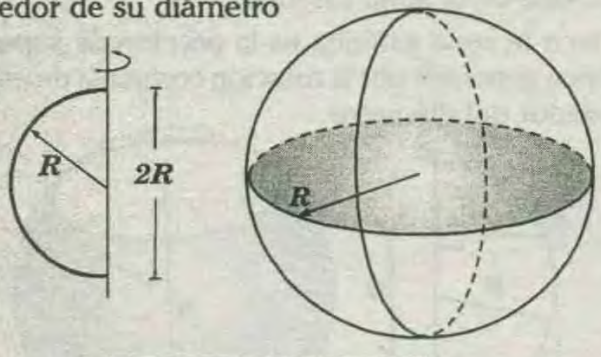
$AB^2 = 2RH$

* Remplazando en *(I) :*

AREA generada = πAB^2

DEFINICIÓN:

La superficie esférica es la superficie generada por la rotación completa de una semicircunferencia alrededor de su diámetro



área esférica = $4\pi R^2$

En efecto la superficie de la esfera se puede considerar generada por la rotación de una semicircunferencia que gira alrededor de su diámetro una vuelta completa.

como $H=2R$

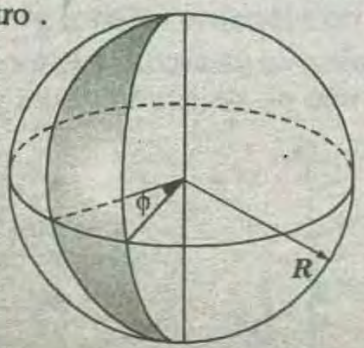
ÁREA generada = $2\pi R\,H$

ÁREA generada = $2\pi R\,(2R)$

ÁREA generada = $4\pi R^2$

HUSO ESFÉRICO

Es la porción de superficie esferica generada por una semicircunferencia cuando gira un ángulo alrededor de su diámetro .



Si la semicircunferencia gira *360°* genera a la superficie de la esfera luego

$4\pi R^2 \longrightarrow 360°$

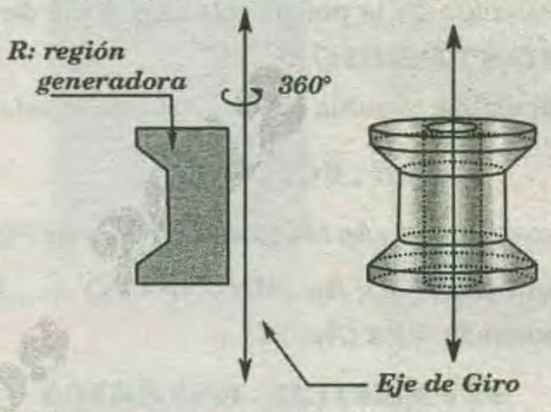
$\text{área}_{(huso)} \longrightarrow \phi$

$$\text{área}_{(huso)} = \pi R^2 \frac{\phi}{90°}$$

SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

Es aquel sólido que se genera por la rotación de una región plana al girar en torno a un eje.

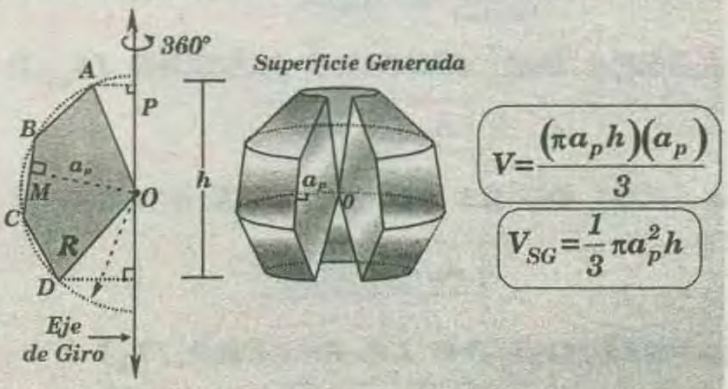
Estudiaremos a continuación sólidos de revolución generados por regiones planas contenidas en un mismo semiplano respecto al eje de giro.



En el gráfico se muestra el sólido de revolución generado por la región plana *R* al girar en torno al eje.

TEOREMA DE ARQUÍMEDES

El volumen del sólido generado por un sector poligonal regular al girar *360°* en torno a un eje que pasa por el centro del sector poligonal , el cual está en un mismo semiplano respecto del eje, es igual a la tercera parte del producto del área de la superficie generada por la correspondiente poligonal regular con la longitud de su apotema.



$$V = \frac{(\pi a_p h)(a_p)}{3}$$

$$V_{SG} = \frac{1}{3}\pi a_p^2 h$$

Región

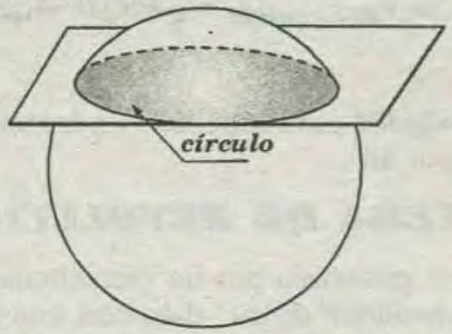
**OABCD* : Sector poligonal regular de centro *O* y apotema *OM*.

* *ABCD* : Poligonal regular.

* V_{SG} : Volumen del sólido generado por el sector poligonal regular al girar 360° en torno al eje.

TEOREMA :

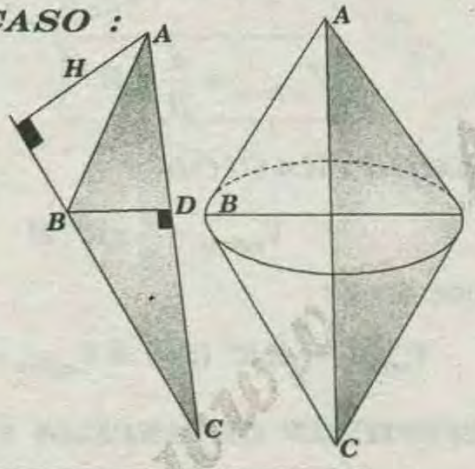
Todo plano secante a una esfera determina una sección que es un círculo



DETERMINACION DEL VOLUMEN DE UNA ESFERA

El volumen que genera un triángulo que gira alrededor de un eje que pasa por uno de sus vértices sin cortar al triángulo y situados en el mismo plano . es igual a la tercera parte del producto del área generada por el lado opuesto al vértice situado sobre el eje , por la altura relativa a este lado .

PRIMER CASO :



$$\boxed{Vgenerado_{ABC} = área_{BC} \times \frac{H}{3}}$$

$área_{BC}$: área generada por BC

V_{ABC} : volumen generado por el ABC

DEMOSTRACIÓN :

El volumen generado por el triángulo ABC es la suma de los volumenes de los conos de revolución generados por los triángulos rectángulos ABD y BDC

$$V_{ABC}=\frac{\pi BD^2 \times AD}{3}+\frac{\pi BD^2 \times DC}{3}$$

* factorizamos BD^2 :

$$V_{ABC}=\frac{\pi}{3}BD^2\ (AC+DC)$$

$$\Rightarrow V_{ABC}=\frac{\pi}{3}BD^2AC.....(I)$$

* pero área $ABC = (AC)\ (BD)/2$

$$ABC = (BC)(H)/2$$

$$\Rightarrow (AC)(BD)=(BC)(H)$$

* Remplazando en (I) :

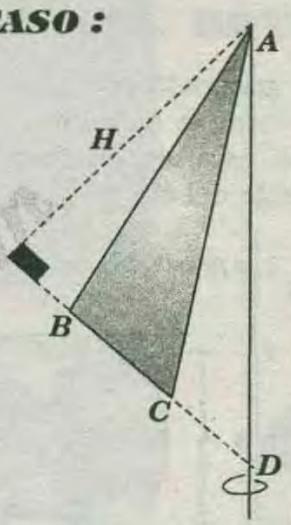
$$V_{ABC}=\frac{\pi}{3}\ (BD)(BC)\times H.....(II)$$

* pero $(BD)\ (BC)=$ área lateral del cono generado por $\overline{BC}$

* Reemplazando en (II) :

$$V_{ABC}=\frac{área_{(BC)}}{3}H$$

SEGUNDO CASO :



$$\boxed{Vgenerado_{ABC}=\frac{área_{(BC)} \times H}{3}}$$

El triángulo solo tiene un vértice común con el eje prolongamos BC hasta D sobre XY

$$VABC = V(ABD) - V(ACD)$$

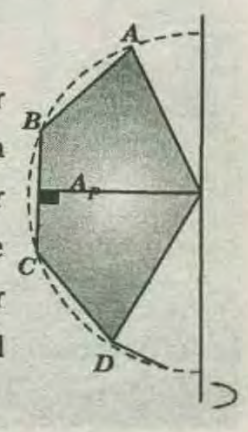
$$\Rightarrow V_{ABC}=\frac{área_{(\overline{BD})}H}{3}-\frac{área_{(\overline{CD})}H}{3}$$

$$\Rightarrow V_{ABC}=\frac{H}{3}(área_{\overline{BD}}-área_{\overline{CD}})$$

$$\Rightarrow V_{ABC}=\frac{área_{(BC)}H}{3}$$

TEOREMA :

El volumen generado por un sector poligonal regular cuando gira alrededor de un eje que pasa por su vértice es igual a la tercera parte del producto del área generada por la diagonal regular y el apotema del sector poligonal regular .



$$V_{generado}=\frac{\text{área}_{(ABCD..)}}{3}\times AP$$

VOLUMEN GENERADO = volumen generado por el sector poligonal regular *ABCD..*

$$V_{generado}=V_{(AOB)}+V_{(AOC)}+.....+.....$$

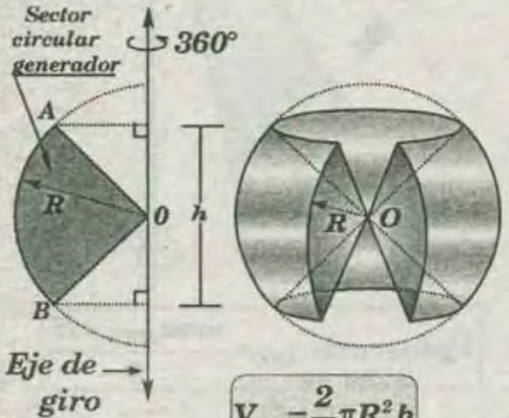
$$\Rightarrow V=\text{área}_{(AB)}Ap+\text{área}_{(BC)}Ap+\text{área}_{(CD)}Ap+..../3$$

$$\Rightarrow V=Ap(\text{área}_{(AB)}+\text{área}_{(BC)}+\text{área}_{(CD)}+...../3$$

$$\Rightarrow V_{generado}=\frac{\text{área}_{(ABCD..)}}{3}AP$$

SECTOR ESFÉRICO

Es aquel sólido generado por un sector circular al girar *360°* en torno a un diámetro del círculo correspondiente, estando el sector en un mismo semiplano respecto del eje de giro.

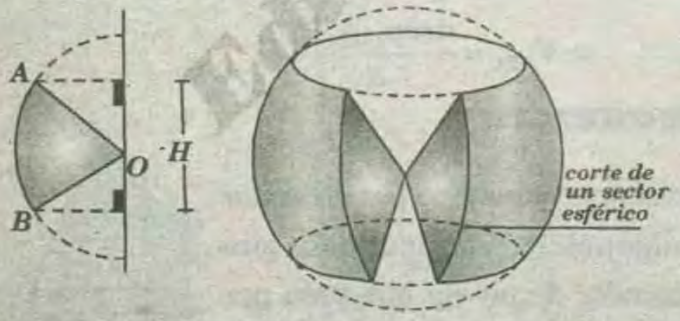


$$V_{SE}=\frac{2}{3}\pi R^2 h$$

* *h* : Longitud de la proyección ortogonal del arco *AB* sobre el eje de giro.

* *VSE:* Volumen del sector esférico.

Es decir el sector esférico es el solido generado por un sector circular cuando gira alrededor de un eje coplanar que pasa por su vértice .



$$V_{sector\ esférico}=\frac{2}{3}\pi R^2 H$$

si a la poligonal inscrita en el arco *AB* se aumenta indefinidamente su número de lados $Ap \to R$

$$V_{sector\ esférico}=\frac{\text{área}_{(\overline{AB})}R}{3}$$

$$\Rightarrow V_{sector\ esférico}=(\frac{2}{3}\pi R^2 H)R$$

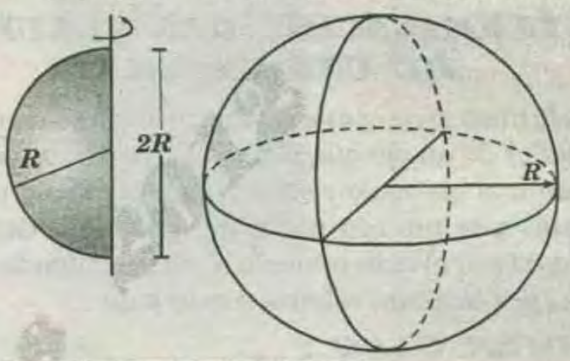
$$\Rightarrow V_{sector\ esférico}=\frac{2}{3}\pi R^2 H$$

NOTA :

área *(AB)=2pRH* es la superficie de la zona esférica generada por *AB* .

ESFERA DE REVOLUCIÓN

Es el sólido generado por un semicírculo cuando gira *360°* alrededor de su diámetro tomado como eje .



$$V_{esfera}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

DEMOSTRACIÓN :

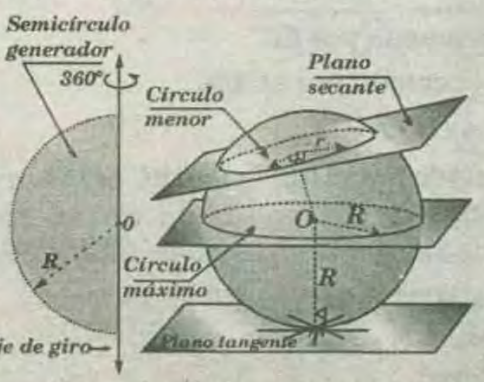
$$V_{esfera}=\frac{2}{3}\pi R^3 H$$

donde $H=2R$

$$V_{esfera}=\frac{2}{3}\pi R^3 (2R) \Rightarrow V_{esfera}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

DEFINICIÓN DE ESFERA :

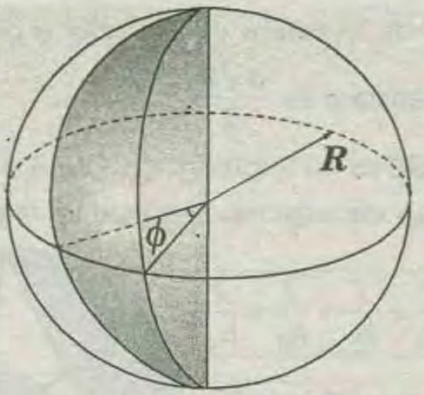
Es aquel sólido generado por un semicírculo al girar *360°*, en torno a su diámetro.



$$V_E=\frac{4}{3}\pi R^3$$

CUÑA ESFERICA

Es la porción de la esfera generada por un semicírculo cuando gira un ángulo alrededor de su diámetro .



Si el semicírculo gira *360* alrededor de su diámetro se genera el volumen de la esfera .

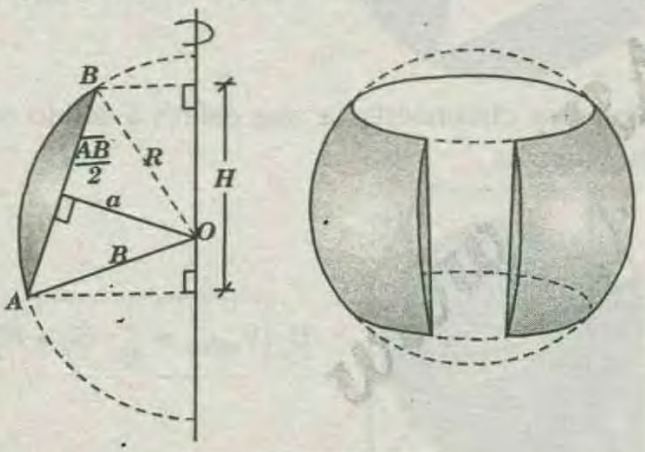
$360° \longrightarrow 4\pi R^3/3$

$\phi \longrightarrow V_{cuña}$

$$V_{cuña\ esférica} = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{\phi}{360°}$$

ANILLO ESFÉRICO

Es el sólido generado por la rotación de un segmento circular cuando gira alrededor de un eje coplanar que pasa por el centro de la circunferencia , a que pertenece el segmento circular .



$$V_{anillo} = \pi \frac{AB^2}{6} H$$

DEMOSTRACIÓN :

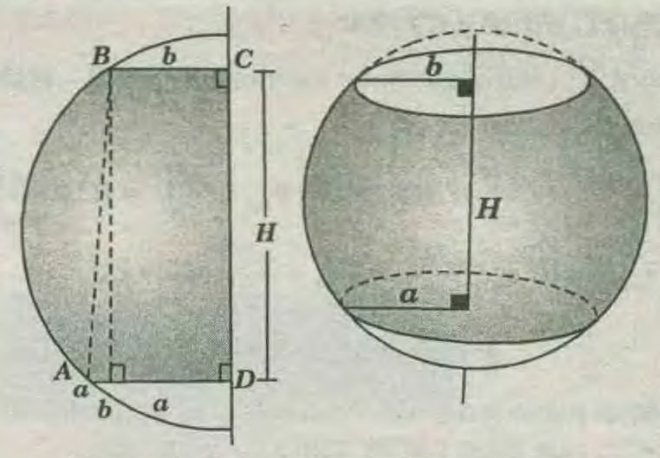
$V_{anillo} = V\ sector - V\ AOB \Rightarrow V_{anillo} = \frac{2}{3}\pi R^2 H - \frac{2}{3}\pi a^2 H$

$\Rightarrow V_{anillo} = \frac{2}{3}\pi H(R^2 - a^2) \Rightarrow V_{anillo} = \frac{2}{3}\pi H(AB/2)^2$

$\Rightarrow V_{anillo} = \pi \frac{AB^2}{6} H$

SEGMENTO ESFÉRICO

Es la porción una esfera sólida comprendida entre dos planos paralelos .



$$V_{\substack{segmento \\ esférico}} = \frac{\pi H^3}{6} + \frac{\pi H^3}{2}(a^2 + b^2)$$

DEMOSTRACIÓN :

* El volumen de un segmento esférico es igual al volumen del anillo *AB* , más el volumen del tronco de cono generado por el trapecio *ABCD* .

$$V_{seg} = \pi AB^2 \frac{H}{6} + \pi \frac{H}{3}(a^2 + b^2 + ab)$$

pero $AB^2 = H^2 + (a - b)^2$

$V_{seg} = \pi[H^2 (a^2 + b^2)]H/6 + \pi H(a^2 + b^2 + ab)/3$

$V_{seg} = \pi H^3/6 + \pi H(a - b)^2/6 + \pi\ H(a^2 + b^2 + ab)/3$

$\Rightarrow V_{seg} = \pi H^3/6 + \pi H(a^2 + b^2 - 2ab)\pi H(a^2 + b^2 + ab)/3$

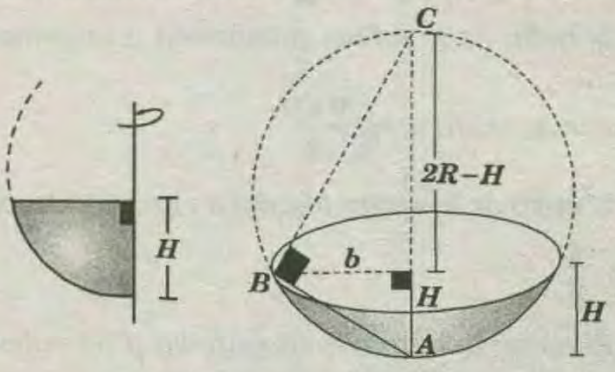
* Simplificando :

$$V_{seg} = \pi H^3/6 + \pi h(3a^2 + 3b^2 + ab)/6$$

$$\Rightarrow V_{seg} = \pi \frac{H^3}{6} + \pi \frac{H}{2}(a^2 + b^2)$$

NOTA :

Si el segmento esférico tiene una base , entonces :



$$V_{seg\ circular} = \pi \frac{H^3}{6} + \pi \frac{b^3}{2} H$$

además:

$$V_{seg\ esférico} = \pi \frac{H^2}{3}(3R - H)$$

DEMOSTRACIÓN :

$\triangle ABC$: por relaciones métricas $b^2=(2R-H)H$

* Remplazando en *(I)* :

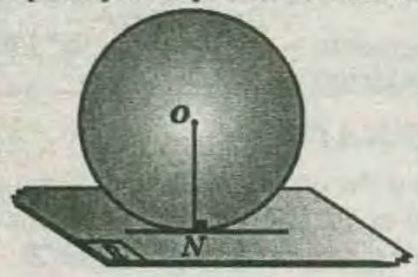
$$V_{seg}=\frac{\pi H^3}{6}+\frac{\pi H^2}{2}(2R-H)\Rightarrow V_{seg}=\frac{\pi H^3}{6}+H^2R-\frac{\pi H}{2}$$

$$\Rightarrow V_{seg}=\pi H^3R-\frac{\pi H^3}{3}\Rightarrow V_{seg}=\frac{\pi H^2}{3}(3R-H)$$

PROPIEDADES

◆ Todo plano tangente a una esfera es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto .

Si :



$$\Rightarrow \overline{ON}\perp R$$

◆ Dícese que un plano o una recta y una esfera son tangentes entre sí , cuando tienen un punto común y sólo uno. Ese punto se llama punto de tangencia.

◆ Dos esferas son tangentes entre sí cuando sus superficies esféricas tienen un punto en común y sólo uno.

◆ La intersección de dos esferas cualesquiera es un sólido formado por dos segmentos esféricos de base común , siendo esta base perpendicular a la línea que une los centros de ambas esferas .

◆ *El radio de la esfera inscrita en un tetraedro regular de arista* a *es* $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

◆ *El radio de la esfera circunscrita a un tetraedro regular de arista* a *es* $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

◆ *El radio de la esfera inscrita en un cubo de arista* a es $\frac{a}{2}$

◆ *El radio de la esfera circunscrita a un cubo de arista* a *es* $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

◆ *El radio de la esfera inscrita en un octaedro regular de arista* a es $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

◆ El radio de la esfera circunscrita a un octaedro regular de arista a es $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

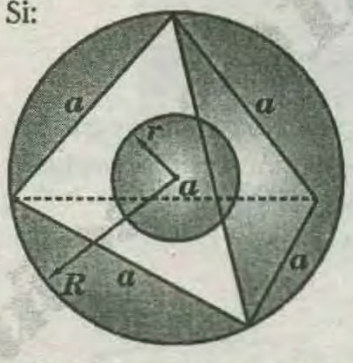
◆ Si $O-ABC$ es un tetraedro de alturas h_1 ; h_2 ; h_3; h_4 . Inscrito y circunscrito respecto de la esfera .

$$\Rightarrow \quad * \boxed{\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}}$$

$$* \boxed{d^2=(R-r)^2-4r^2}$$

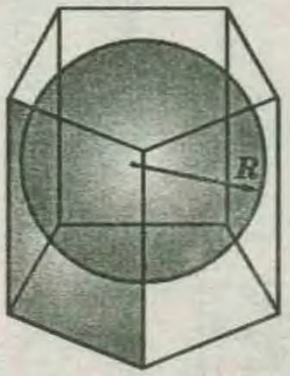
◆ Tetraedro regular inscrito y circunscrito respecto de la esfera .

Si:



$$\boxed{a=2\sqrt{6}r} \wedge \boxed{R=r}$$

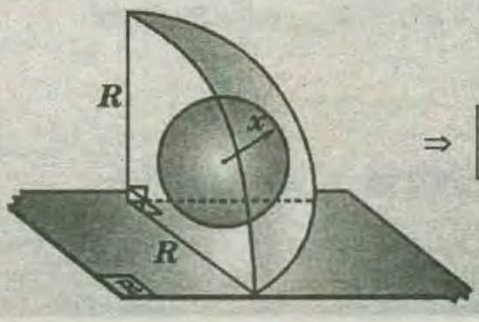
◆ Poliedro circunscrito a una esfera ó solido con esfera inscrita .



$$\Rightarrow \boxed{V_{sólido}=\frac{1}{3}\times S_T\times R}$$

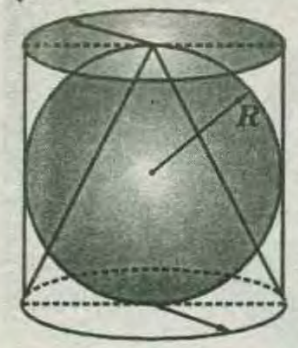
Donde : $S_T \Rightarrow$ Área total del poliedro

◆ En la figura se tiene una esfera inscrita en un octavo de esfera octante de radio R .



$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)}$$

◆ Si :

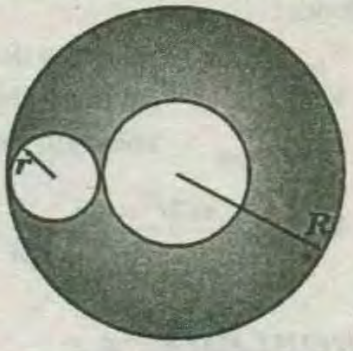


$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_{cono}}{1}=\frac{V_{esfera}}{2}=\frac{V_{cilindro}}{3}}$$

TONEL

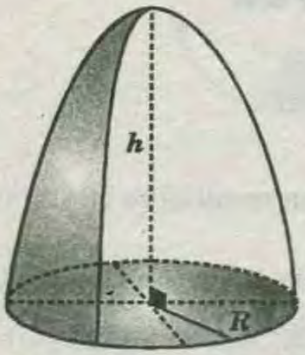
$$V=\frac{\pi h(r^2+2R^2)}{3}$$

TORO O ANILLO CIRCULAR



$$V=2\pi^2 r^2 R$$

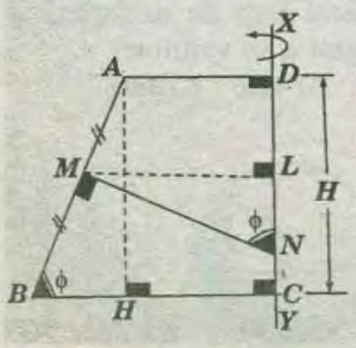
PARABOLOIDE

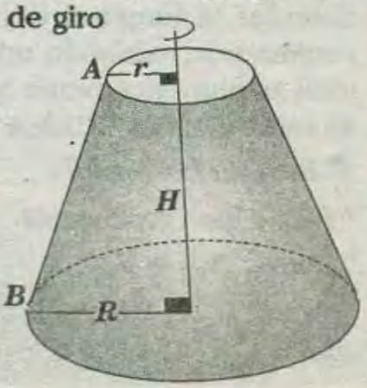


$$V=\frac{\pi R^2 \times h}{2}$$

SUPERFICIES GENERADAS

TEOREMA : el área que genera un segmento de recta cuando gira alrededor de una recta exterior a el (eje) , es igual a la longitud de la circunferencia cuyo radio es el segmento de mediatriz del segmento interceptado por el eje multiplicado por la proyeccion del segmento sobre el eje de giro





$\overline{AB}$ y $\overline{XY}$ estan situados en un mismo plano

$\overline{CD}$ = proyección de $\overline{AB}$ sobre XY (altura)

$\overline{MN}$ = mediatriz de $\overline{AB}$

$$\boxed{A_{generada} = 2\pi(MN)\times H}$$

DEMOSTRACIÓN :

el área generada = superficie del tronco de cono

$\Rightarrow$ área generada = $p\ AB(R + r)$.....(I)

* pero $(R + r)/2 = ML$ mediana

* $\triangle ABH \sim \triangle MNL$: $\frac{ML}{H}=\frac{MN}{AB}$

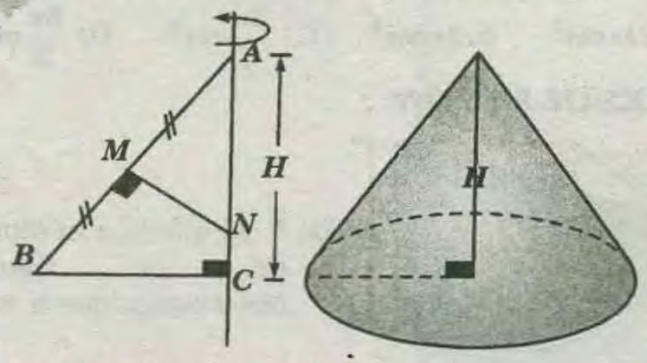
$\Rightarrow (ML)(AB)=(MN)\ (H)$

$\Rightarrow \frac{(R+r)}{2}AB=(MN)(H)$.....(II)

* Reemplazando *(II)* en *(I)* :

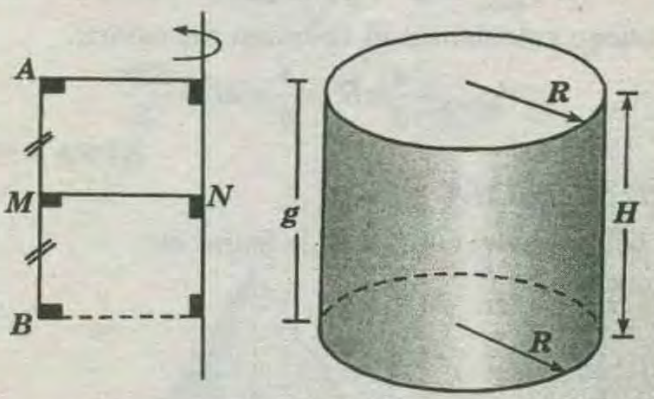
$\Rightarrow$ área generada = $2\ \pi\ (MN)(H)$

CASOS PARTICULARES :



área generada = área del cono

$$\boxed{Area_{\ generada} = 2\pi MN\ H}$$



área generada = área del cilindro

$$\boxed{AREA_{\ generada} = 2\pi MN \times H}$$

WWW.GRATIS2.COM

PROBLEMAS RESUELTOS

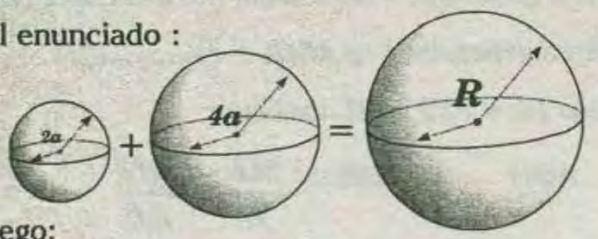
PROBLEMA 1:

Dos esferas de metal de radio $2a$ y $4a$ se funden juntas para hacer una esfera mayor. ¿Cuál es el radio de la nueva esfera?.

A) $2\sqrt[3]{3}a$ B) $2\sqrt[3]{9}a$ C) $2\sqrt[3]{2}a$ D) a E) $2a$

RESOLUCIÓN:

* Del enunciado :



* Luego:

$$\frac{4}{3}\pi(2a)^3 + \frac{4}{3}\pi(4a)^3 = \frac{4}{3}\pi(R)^3$$

* Efectuando: $R = 2\sqrt[3]{9}a$

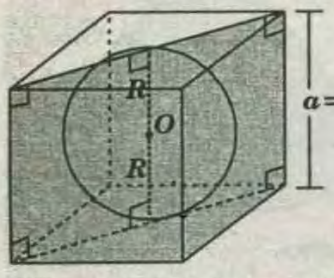
RPTA : "B"

PROBLEMA 2 :

El volumen de un cubo es $64\,cm^3$. hallar el volumen de la esfera inscrita en el cubo.

A) $4\pi cm^3$ B) $3\pi cm^3$ C) $\frac{3\pi}{4}cm^3$ D) $\frac{8\pi}{3}cm^3$

RESOLUCIÓN :



* Al efectuar el dibujo de la figura, observamos que: $a = 2R$

* Usando el volumen del cubo:

$$V_{cubo} = a^3 \rightarrow 64 = (2R)^3 \rightarrow R = 2$$

* Luego calculamos el volumen del esfera:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \frac{32\pi}{3}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3 :

El volumen del cuerpo de la figura es:

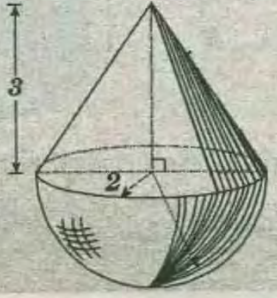
A) $\frac{28\pi}{3}$

B) $\frac{44\pi}{3}$

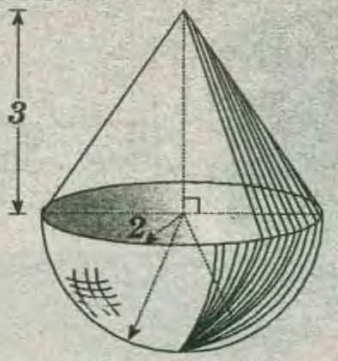
C) $6+2\pi^3$

D) $6+4\pi$

E) π



RESOLUCIÓN:



* Piden:

$$V(sólido) = V(cono) + V(semiesfera)$$

* Donde:

$V_{(sólido)}$: Volumen de sólido.
$V_{(cono)}$: Volumen del cono.
$V_{(semiesfera)}$: Volumen de la semiesfera.

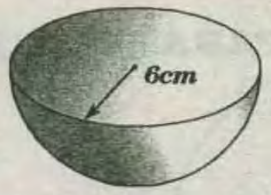
$$\rightarrow V_{(sólido)} = \frac{\pi(2)^2 \times (3)}{3} + \frac{2}{3}\pi(2)^3 = \frac{28\pi}{3}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 4 :

Encontrar el área de la superficie total del sólido mostrado en la figura.

A) $100\pi cm^2$
B) $104\pi cm^2$
C) $108\pi cm^2$
D) $110\pi cm^2$
E) $96\pi cm^2$



RESOLUCIÓN:

* El sólido mostrado es una semiesfera con su base circular.

* Área total=Área semiesfera + Área del Círculo .....*(I)*

* Área semiesfera $= \frac{1}{2}\cdot 4\pi(6)^2 = 72\pi$ ....*(II)*

* Área del círculo $= \pi(6)^2 = 36\pi$ .....*(III)*

* Reemplazando *(II)* ,*(III)*en *(I)*:

área total $= 72\pi + 36\pi = 108\pi$

RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

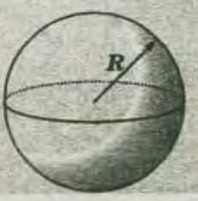
Calcular la longitud del radio de una esfera, en centímetros, sabiendo que el área de su superficie total es numéricamente igual a su volumen.

A) 1cm B) 2cm C) 3cm D) 4mc E) 6cm

RESOLUCIÓN:

* Piden: R en centímetros

* Datos : $A_{SE} = V_E$



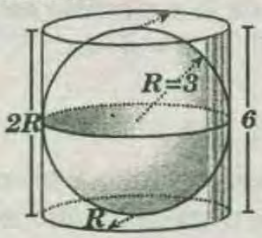
$$4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rightarrow R = 3$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

¿Cuál es la diferencia de volúmenes, la esfera está inscrita en el cilindro?.

A) 16π
B) 18π
C) 20π
D) 22π
E) 24π



RESOLUCIÓN :

* De la figura:

$$V_{cilindro} = \pi 3^2 \times 6 = 54\pi$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi$$

* Luego se desea:

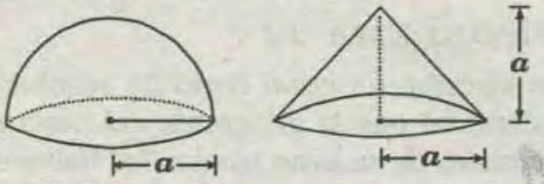
$$V_{cilindro} - V_{esfera} = 54\pi - 36\pi = 18\pi$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 7 :

Si las figuras son una semiesfera y un cono recto. Hallar la relación de sus volúmenes.

A) 2A1
B) 3 A 2
C) π A 2
D) 4 A 3
E) 5 A 2



RESOLUCIÓN:

* Se pide:

$$\frac{V_{semiesfera}}{V_{cono}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)}{\frac{\pi a^2 \cdot a}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{1}$$

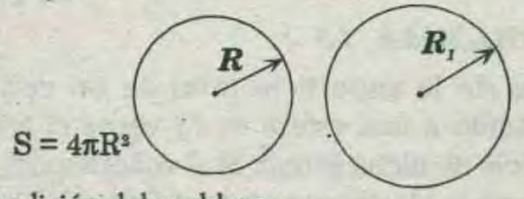
RPTA : "A"

PROBLEMA 9 :

¿En que porcentaje aumenta el volumen de una esfera, si el área de su superficie esférica aumenta en $\frac{1}{4}\%$?.

A)0,275% B) 0,375% C) 0,45% D) 0,457% E) 0,50%

RESOLUCIÓN :



* Por condición del problema:

$$\underbrace{S_1} = 4\pi R^2 + \frac{4\pi R^2}{400} \Rightarrow 4\pi R_1^2 = \pi R^2\left[\frac{400+1}{100}\right]$$

* De donde:

$$R_1 = \frac{R}{20}\sqrt{401} \Rightarrow R_1^3 = \frac{401R^3\sqrt{401}}{8000} \quad .....(I)$$

* Por regla de tres simple :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \longrightarrow 100\%$$

$$\frac{4}{3}\pi R_1^3 \longrightarrow x$$

$$\Rightarrow x = \frac{R_1^3}{R^3} \times 100\% \quad .....(II)$$

* *(I)* en *(II)*:

$$x = \frac{401\sqrt{401}}{8000} \times 100\% \Rightarrow x = \frac{401\sqrt{401}}{80}\%$$

$$\Rightarrow x = 100{,}375\%$$

* El volumen aumenta en : **0,375%**

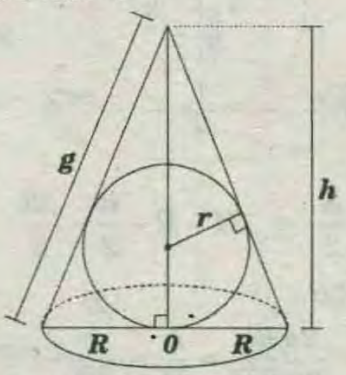
RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

El área de la superficie total de un cono es igual a **25** veces el área de la superficie esférica inscrita en cono. Si el volumen del cono es $175u^3$. Calcule el volumen de la esfera (en u^3).

A) 4 B) 5 C) 7 D) 9 E) 15

RESOLUCIÓN :



* Por condición del problema:

$$\pi R^2 + \frac{2\pi Rg}{2} = 25 \times 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow R^2 + Rg = 100r^2 \quad .....(I)$$

* Por dato:

$$\frac{\pi}{3}R^2h = 175 \Rightarrow \pi R^2 h = 21 \times 25 \quad .....(\alpha)$$

* Por semejanza:

$$\frac{g}{h-r} = \frac{R}{r} \rightarrow R + g = \frac{Rh}{r} \quad .....(II)$$

* *(II)* en *(I)* :

$$R\frac{(Rh)}{r} = 100r^2 \Rightarrow 100r^3 = R^2h \quad .....(\theta)$$

* θ en α : $\pi(100\ r^3) = 21 \times 25$

$$\underbrace{\frac{4\pi r^3}{3}}_{V_e} = \frac{21}{3} \rightarrow V_e = 7$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

En un cono equilátero se encuentra inscrita una esfera. El plano que contiene a los puntos de tangencia de la superficie lateral y la esfera determinada dos casquetes esféricos. Halle :

$$E = \frac{\text{área del menor casquete esférico}}{\text{área del mayor casquete esférico}}$$

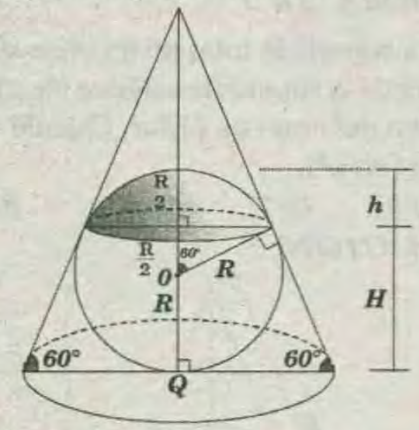
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

RESOLUCIÓN :

Por teoría :

Área del menor casquete esférico $= 2\pi Rh$

Área del mayor casquete esférico $= 2\pi RH$



* Pero : $h = \frac{R}{2}$ y $H = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$

* Se pide hallar :

$$E = \frac{2\pi Rh}{2\pi RH} = \frac{h}{H} = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{3R}{2}} \rightarrow E = \frac{1}{3}$$

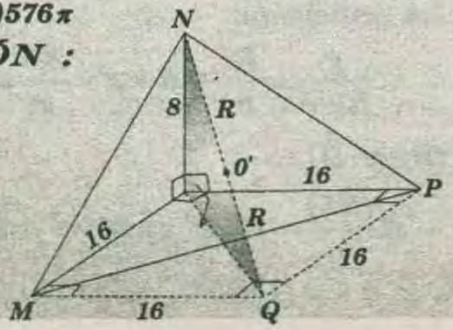
RPTA : "B"

PROBLEMA 12 :

En un tetraedro $O - MNP$, trirrectángulo en O, si las aristas $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ y $\overline{OP}$ miden $16,8$ y 16 respectivamente, entonces el área de la superficie esférica circunscrita es.

A) 597π B) 507π C) 547π
D) 567π E) 576π

RESOLUCIÓN :



* $\triangle NOQ$:

$(2R)^2 = 8^2 + (16\sqrt{2})^2 \Rightarrow R^2 = 16 + 128 \Rightarrow R^2 = 144 \Rightarrow R = 12$

* Luego el área de la superficie esférica circunscrita es: $S = 4\pi(12)^2 \rightarrow S = 576\pi$

RPTA : "E"

PROBLEMA 13 :

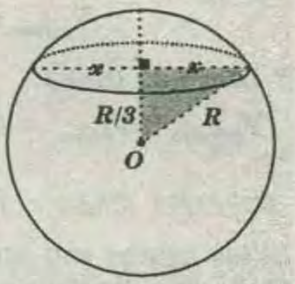
Se tiene una esfera de radio R la cual es intersecada por un plano que dista del centro de la esfera en $R/3$. hallar el área de la figura formada.

A) $8/3\pi R^2$ B) $18/9\pi R^2$ C) $8/9\pi R^2$

RESOLUCIÓN :

* Del triángulo sombreado:

$$x^2 = R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2 \rightarrow x^2 = \frac{8R^2}{9}$$



* Se pide:

$$\text{Área}_{\bigcirc} = \pi x^2 = \pi\left(\frac{8R^2}{9}\right) = \frac{8\pi R^2}{9}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

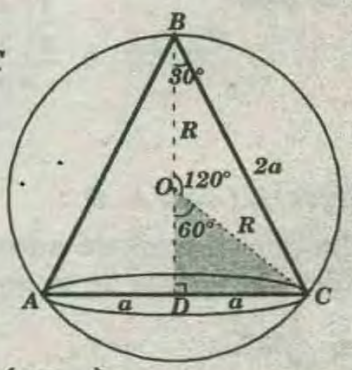
Se inscribe un cono recto de revolución en una esfera, tal que la generatriz del cono sea igual al diámetro de su base igual a $2a$. Hallar el área total de la esfera.

A) $16/3\pi a^2$ B) $16/9\pi a^2$ C) $4/3\pi a^2$

RESOLUCIÓN:

* De la figura en el ΔBOC

$$2a = R\sqrt{3} \rightarrow R = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$



* se pide:

$$A_{esfera} = 4\pi R^2$$

$$\rightarrow A_{esfera} = 4\pi\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{16\pi}{3}\right)a^2$$

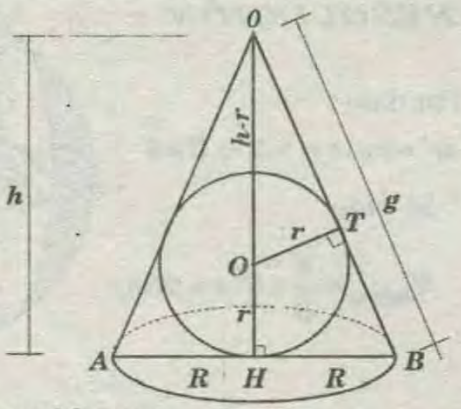
RPTA : "A"

PROBLEMA 15 :

El área de la superficie total de un cono recto circunscrito a una esfera es 25 veces el área de la superficie de dicha esfera. Si el volumen del cono es V, entonces el volumen de la esfera es :

A) $\frac{V}{24}$ B) $\frac{V}{27}$ C) $\frac{V}{28}$ D) $\frac{V}{25}$ E) $\frac{V}{26}$

RESOLUCIÓN :



* Por condición del problema :

$$\pi R^2 + \frac{2\pi Rg}{2} = 25(4\pi r^2)$$

$$V_{cono} = V \ ; \ V_e = ?$$

* De la condición : $R(R+g) = 100r^2$ .....(I)

$$V_{cono} = \frac{\pi}{3}R^2 h \quad .....(\alpha)$$

* $\triangle OTO, \sim \triangle OHB$:

$$\frac{h-r}{g} = \frac{r}{R} \rightarrow h = \frac{r}{R}(R+g).....(\theta)$$

* (θ) en (α):

$$V_{cono} = \frac{\pi}{3}R^2 \times \frac{r}{R}(R+g) \Rightarrow \underbrace{V_{cono}}_{V} = \frac{\pi}{3}Rr(R+g)...(II)$$

* De *(I)* y *(II)*:

RPTA : "D"

PROBLEMA 16 :

Con centro en los vértices de un tetraedro regular de aristas «*a*», se trazan esferas de radio $\frac{a}{2}$, sea una esfera de radio *R* que contiene a las *4* esferas y es tangente con cada una , halle : $\frac{a}{R}$.

A) $2\sqrt{6}-4$ *B)* $2-\sqrt{2}$ *C)* $3-\sqrt{3}$

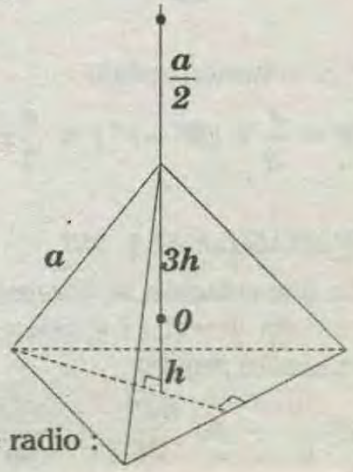
D) $\sqrt{3}-1$ *E)* $\sqrt{2}-1$

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que:

$$4h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$3h = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$



O es centro de la esfera de radio :

$$R = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a}{2}(2+\sqrt{6})$$

$$\Rightarrow \frac{a}{R} = \frac{4}{2+\sqrt{6}} \rightarrow \frac{a}{R} = \frac{4(\sqrt{6}-2)}{6-4} \Rightarrow \frac{a}{R} = 2\sqrt{6}-4$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 17 :

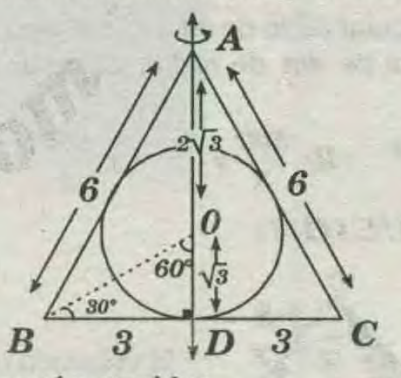
En un triángulo equilátero *ABC*, de *6cm* de lado se inscribe un círculo. Si el círculo y el triángulo giran alrededor de $\overline{AD}$ (altura del ΔABC) calcular la diferencia entre los dos volúmenes generados.

A) $4\pi\sqrt{3}$ *B)* $5\pi\sqrt{3}$ *C)* $6\pi\sqrt{3}$ *D)* $7\pi\sqrt{3}$ *E)* $8\pi\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

* V_{ABC}: volumen del cono que genera el *ABC*

* V_0 : volumen de la esfera que genera el círculo.



* Se tendrá, según se pide:

$$V_{ABC} - V_{\bigcirc} = \frac{1}{3}\times\pi\times 3^2 \times 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}.\pi(\sqrt{3})^3$$

$$\rightarrow V_{ABC} - V_{\bigcirc} = 9\pi\sqrt{3} - 4\pi\sqrt{3} = 5\pi\sqrt{3}$$

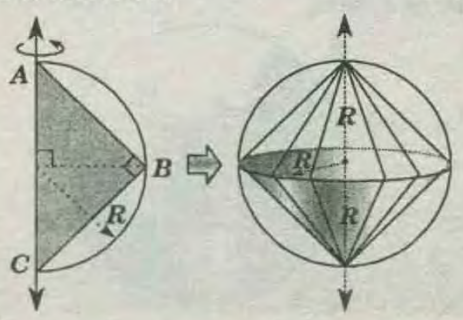
RPTA : "B"

PROBLEMA 19 :

En una circunferencia de radio *6m* se inscribe un triángulo rectángulo isósceles tal que su hipotenusa es el diámetro de la circunferencia dada. Hallar el volumen comprendido entre la superficie generada por la semicircunferencia dada. Hallar el volumen comprendido entre la superficie y por el triángulo. Luego de una rotación de *360°* alrededor del diámetro citado.

A) $120\pi m^3$ *B)* $150\pi m^3$ *C)* $240\pi m^3$ *D)* $288\pi m^3$ *E)* $144\pi m^3$

RESOLUCIÓN:



* Piden:

$$V = Volumen_{\left(\substack{esfera\\generada}\right)} - Volumen_{\left(\substack{sólo\ generado\\ \Delta\ por\ ABC}\right)}$$

* De la figura:

$$V = Volumen_{\left(\substack{esfera\\generada}\right)} = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{4}{3}\pi(6)^3 = 288\pi$$

* Luego:

$$Volumen_{\left(\substack{sólo\ generado\\ \Delta\ porABC}\right)} = 2\ volumen_{\left(\substack{cono\ de\\revolución}\right)} = 2\left(\pi R^2 \times \frac{R}{3}\right)$$

$$\rightarrow Volumen_{\left(\substack{sólo\ generado\\ \Delta\ porABC}\right)} = \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{2\pi 6^3}{3} = 144\pi$$

* Luego: $V = 288\pi - 144\pi = 144\pi$

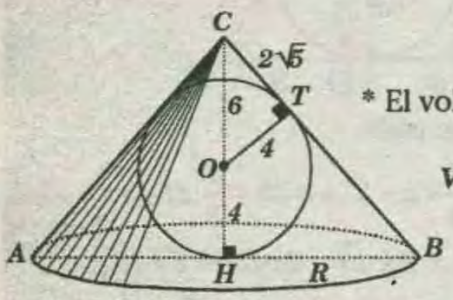
RPTA : "E"

PROBLEMA 20 :

Un cono circular recto de altura $10m$ está circunscrito a una esfera de $4m$ de radio. Calcular el volumen del cono.

A) $\frac{600}{3}\pi m^3$ B) $\frac{500}{3}\pi$ C) $\frac{800}{3}\pi$ D) $\frac{700}{3}\pi$

RESOLUCIÓN:



* El volumen del cono es:

$$V = \frac{\pi R^2 (CH)}{3}$$

* Para el valor de R, usamos la semejanza:

$\triangle CHB \sim \triangle OTC$:

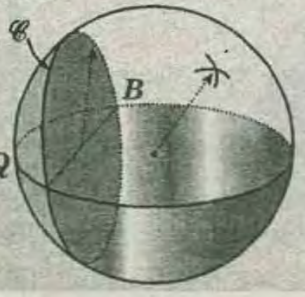
$$\frac{R}{4} = \frac{10}{2\sqrt{5}} \rightarrow R = 4\sqrt{5} \Rightarrow V = \frac{\pi(80)(10)}{3} = \frac{800\pi}{3}$$

RPTA : "C"

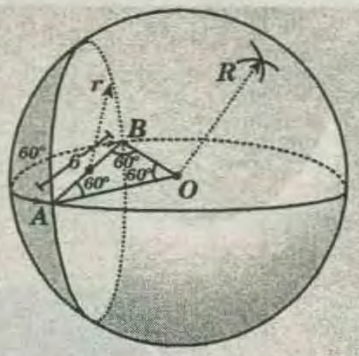
PROBLEMA 21 :

Según el gráfico el plano que contiene a la circunferencia C es perpendicular al plano que contiene al círculo máximo mostrado. Si el área del círculo limitado por C es 9π y $m\ \widehat{AB} = 60°$ calcule el volumen de la esfera.

A) 6π
B) 9π
C) 288π
D) 24π
E) 36π



RESOLUCIÓN :



Por dato :

$\pi r^2 = 9\pi \rightarrow r = 3 \rightarrow R = 6$

* Se pide:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \times 6^3\pi = 288\pi$$

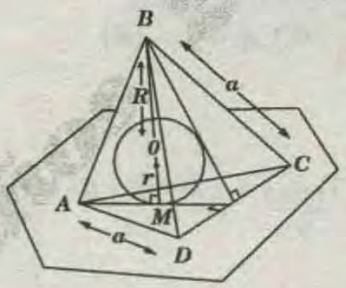
RPTA : "C"

PROBLEMA 22 :

En un tetraedro regular cuya área total es de $384\sqrt{3}m^2$, se inscribe una esfera de radio r y se circunscribe otra esfera de radio R. Entonces, el volumen comprendido entre las dos esferas, es:

A) $4436\frac{\pi}{3}m^3$ B) $2218\frac{\pi}{3}m^3$ C) $6656\frac{\pi}{3}m^3$ D) $19968\frac{\pi}{3}m^3$

RESOLUCIÓN :



* Área del tetraedro :

$$4\left(a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 384\sqrt{3}$$

$$\rightarrow a^2 = 384 \rightarrow a = 8\sqrt{6}$$

* $OB = R \rightarrow$ radio de la esfera circunscrita
* $OM = r \Rightarrow$ radio de la esfera inscrita
* $BM = \frac{a\sqrt{6}}{3}$; altura del tetraedro.
* Sabemos que: $R = 3r$
* Luego: $BM = R + r = 4r$

$$\rightarrow 4r = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\rightarrow r = \frac{a\sqrt{6}}{12} = 8\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6}}{12} \rightarrow r = 4\ y\ R = 12$$

* El volumen pedido :

$$V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) = \frac{4}{3}\pi(12^3 - 4^3) = \frac{6656\pi}{3}$$

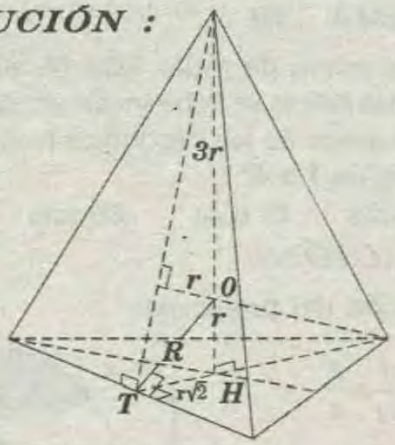
RPTA : "C"

PROBLEMA 23 :

En que relación se encuentran los volúmenes de las esferas inscritas y tangentes a las aristas en un tetraedro regular.

A) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{74}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{25}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{72}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{75}$

RESOLUCIÓN :



r : Radio de la esfera inscrita.

3r : Radio de la esfera circunscrita.

R : Radio de la esfera tangente a las aristas.

* $\triangle OHT$: $R^2 = r^2 + (r\sqrt{2})^2 = 3r^2$

$R = r\sqrt{3} \Rightarrow R^3 = 3\sqrt{3}r^3$

* Se pide hallar :

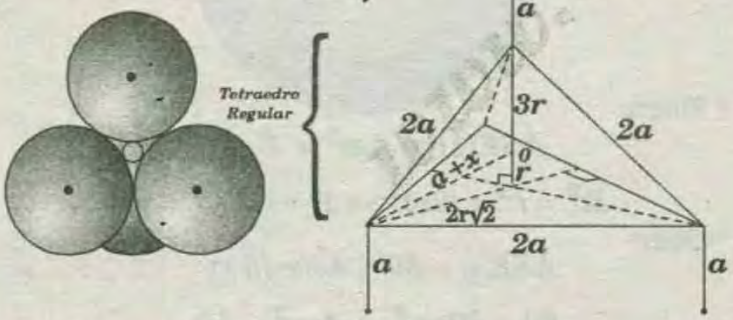
$$\frac{V_{ei}}{V_{et}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 24 :

Halle el radio de la menor esfera que en su interior puede contener cuatro esferas congruentes de radio «a».

RESOLUCIÓN :



O : Centro de la esferita de readio **x**.

* Luego : $a + x = 3r$ .....(I)

* Pero : $4r = \frac{2a\sqrt{6}}{3} \rightarrow 3r = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ .....(II)

* (II) en (I):

$$a + x = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2}(\sqrt{6} - 2)$$

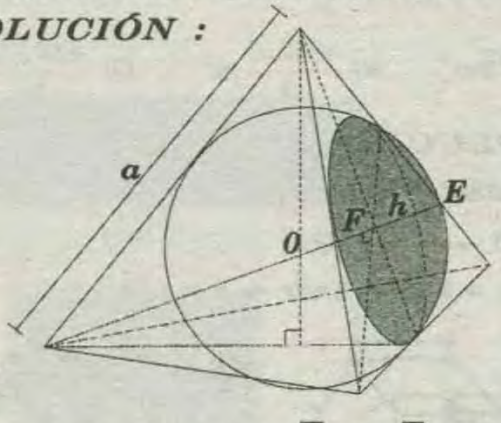
* El radio de la esfera circunscrita a las cuatro esferas, es:

$$R = a + 3r \Rightarrow R = a + \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow R = \frac{a}{2}(\sqrt{6} + 2)$$

PROBLEMA 25 :

El centro de una esfera pertenece al de la base de un tetraedro regular y es tangente a las aristas de la base de longitud **6**. Determine la altura del segmento esférico exterior a las caras laterales del tetraedro.

RESOLUCIÓN :



$$h = OE - OF \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

$$\Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{12}(3 - \sqrt{3}) \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}(3 - \sqrt{3})$$

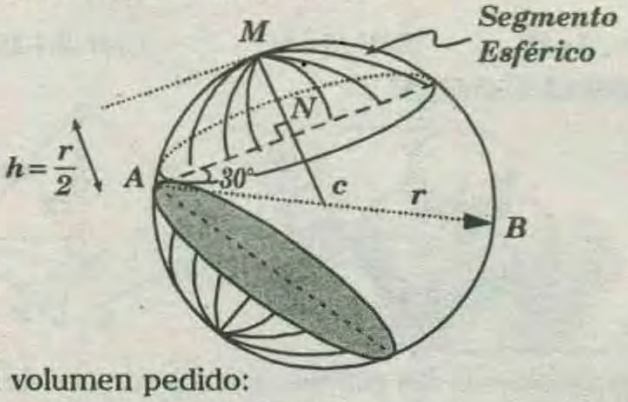
PROBLEMA 26 :

Una esfera de área $144\pi m^2$ es cortada por dos planos que forman entre si un ángulo diedro de 60°, de modo que la recta de intersección de los planos es tangente a la esfera y el plano bisectriz contiene un diámetro de la esfera. ,Hallar el volumen de la parte de la esfera comprendida en el ángulo diedro.

A) $2888\pi m^3$ B) $198\pi m^3$ C) $243\pi m^3$
D) $126\pi m^3$ E) $264\pi m^3$

RESOLUCIÓN :

Por dato: $4\pi r^2 = 144\pi \rightarrow r = 6$



* El volumen pedido:

$$V_x = V_{esfera} - 2(V_{segmento\ esférico})$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{4}{3}\pi r^3 - 2\left(\frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)\right)$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi\left(\frac{r}{3}\right)^2\left(3r - \frac{r}{3}\right)$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{11}{12}\pi r^3 = \frac{11}{12}\pi(6^3) = 198\pi$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

Las bases de un tronco de pirámide de bases paralelas son cuadrados cuyos lados miden *4* y *8* metros respectivamente. Si el sólido es circunscriptible a una esfera, hallar el volumen del sólido.

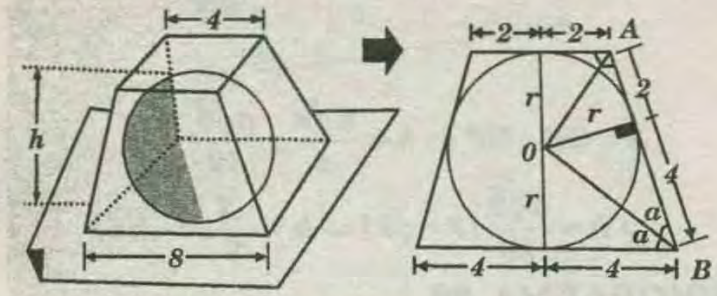
A) $448\sqrt{2}m^3$ *B)* $\frac{448\sqrt{2}}{3}m^3$ *C)* $\frac{448\sqrt{3}}{2}m^3$

RESOLUCIÓN :

* Para hallar *"r"*:

$\triangle AOB \rightarrow r^2 = 2(4)$

$\rightarrow r = 2\sqrt{2} \rightarrow h = 2r \rightarrow h = 4\sqrt{2}$



* Luego, el volumen del tronco de pirámide:

$$V = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left[4^2 + 8^2 + \sqrt{(4^2)(8^2)}\right] = \frac{448}{3}\sqrt{2}$$

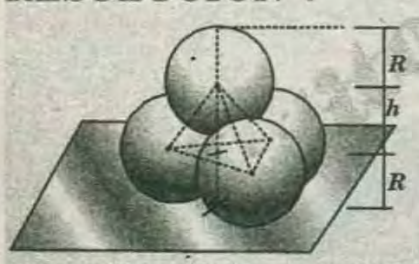
RPTA : "B"

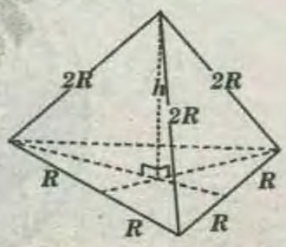
PROBLEMA 28 :

Sobre un plano horizontal hay tres esferas de radio *12dm* tangentes entre si, luego se coloca sobre estas esferas otra esfera congruente y tangente a ellas, entonces la altura de la pila formada expresada en *dm* es:

A) $8(\sqrt{6}+3)$ *B)* $3(\sqrt{6}+3)$ *C)* $4(\sqrt{6}+3)$

RESOLUCIÓN :





* Los centros de las esferas, son los vértices de un tetraedro regular de arista *2R*, entonces la altura pedida es:

$$h = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$$

* Luego la altura de la pila , será:

$$H = 2R + h = 2R + \frac{2R\sqrt{6}}{3} = \frac{2R}{3}(3+\sqrt{6})$$

$$\rightarrow H = \frac{2}{3}(12)\left(3+\sqrt{6}\right) = 8\left(\sqrt{6}+3\right)$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 29 :

Se tiene una esfera de radio *12m* (A que distancia del centro de la esfera se debe trazar un plano secante para que las áreas de los casquetes formados esten en la relación de *1* a *4*?.

A) 8μ *B)* $7{,}2\mu$ *C)* $6{,}4\mu$ *D)* $8{,}2\mu$ *E)* $5{,}4\mu$

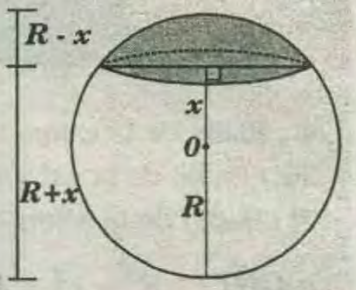
RESOLUCIÓN:

* Por condición del problema

$$\frac{2\pi R(R-x)}{2\pi R(R+x)} = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow 4(R-x) = R + x$$

$$\rightarrow x = \frac{3}{5}R = \frac{3}{5}(12) = 7{,}2$$



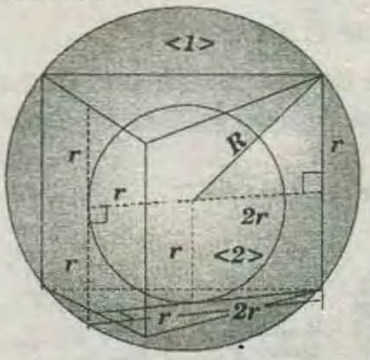
RPTA : "B"

PROBLEMA 30 :

Calcule el área de la superficie esférica inscrita en un prisma triangular regular, que a su vez está inscrita en una superficie esférica, cuya área es *50*.

A) 6 *B) 10* *C) 9* *D) 8* *E) 12*

RESOLUCIÓN :



* Piden:

$$ASE(1) = 4\pi r^2 = ?$$

$$R^2 = r^2 + (2r)^2 \rightarrow R = r\sqrt{5}$$

* Dato:

$$ASE_{(2)} = 50 = 4\pi(r\sqrt{5})^2$$

$$50 = 20\pi r^2 \rightarrow 4\pi r^2 = 10$$

$$\rightarrow ASE_{(1)} = 10$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 31 :

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) El lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo es un conjunto no convexo .

II) El lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de una recta es un conjunto convexo .

III) El lugar geométrico de todos los puntos que

equidistan de los extremos de un segmento es un conjunto convexo .

A) VFV B) VVV C) VFF D) FFF E) FVF

RESOLUCIÓN :

I) El lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo es la superficie esférica la cual es un conjunto no convexo.

(VERDADERO)

II) El lugar geométrico se todos los puntos que equidistan de una recta es la superficie cilíndrica, la cual es un conjunto no convexo.

(FALSO)

III) El lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los extremos de un segmento es el plano mediatriz y todo plano es un conjunto convexo.

(VERDADERO)

RPTA : "A"

PROBLEMA 33 :

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) El desarrollo de la superficie lateral de un cono equilátero es un semicírculo .

II) Si una pirámide y un cono tienen igual altura y son equivalentes entonces el área de la base de la pirámide es mayor que la del cono .

III) Si una esfera se proyecta sobre un plano , el área de la proyección es la cuarta parte del área de la superficie esférica .

A) VVF B) VFV C) VVV· D) VFF E) VFV

RESOLUCIÓN :

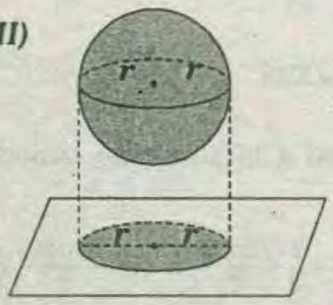
I) El desarrollo de la superficie lateral de un cono equilátero es un semicírculo.

(VERDADERO)

II) Si un cono y una pirámide tienen la misma altura y son equivalentes entonces las áreas de sus respectivas bases son iguales.

(FALSO)

III)



$ASE = 4\pi r^2$

$A_O = \pi r^2$

$\Rightarrow$ El área de la proyección es la cuarta del área de la superficie esférica.

(VERDADERO)

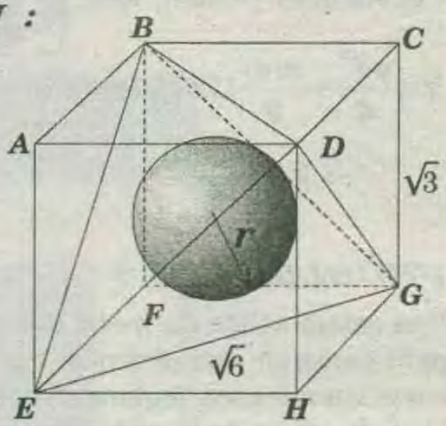
RPTA : "E"

PROBLEMA 34 :

En un hexaedro regular *ABCD-EFGH* , su arista mide $\sqrt{3}$. Calcule el área de la superficie esférica inscrita en *EBGD*.

A) π B) 3π C) 2π D) 4π E) $4\pi/3$

RESOLUCIÓN :



Piden :

$ASE = ? = 4\pi r^2$

E-BDG :

Tetraedro regular

$$hTR = \frac{\sqrt{6}\sqrt{6}}{3} = R$$

$$\rightarrow r = \frac{hTR}{4} \rightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow ASE = \pi$$

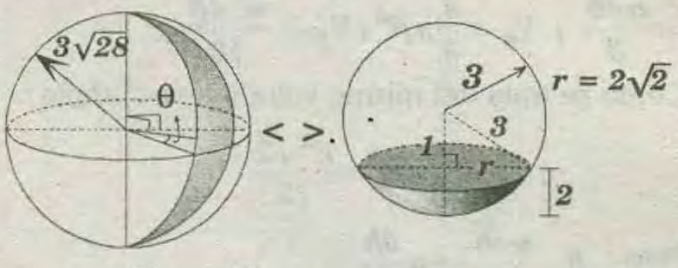
RPTA : "A"

PROBLEMA 35 :

Calcule la medida del ángulo que debe girar un semicírculo de radio $\sqrt[3]{28}$ respecto del diámetro como eje de giro, para que el volumen de la cuña esférica sea equivalente a un segmento esférico de una sola base, de altura *2* y se encuentre en una esfera de radio *3*.

A) 60° B) 90° C) 45° D) 67°30' E) 75°

RESOLUCIÓN :



$$V_{CE} = V_{SE}$$

$$\frac{\pi(\sqrt[3]{28})^3\theta}{270} = \frac{\pi 2^3}{6} + \frac{\pi 2^2 2}{2}$$

$$\rightarrow \theta = 90°$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 36 :

Se traza dos planos paralelos uno de los cuales dista *4dm* del centro de una esfera de radio *12 dm* y el otro pasa por el centro, entonces el volumen de segmento esférico determinado expresado en dm^3 es:

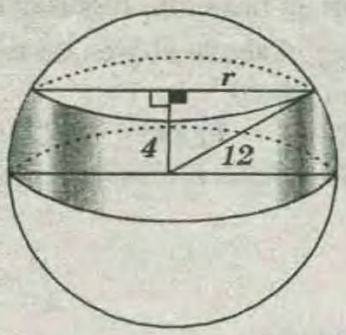
A) $\frac{1640}{3}\pi$ B) $\frac{1664}{3}\pi$ C) 550π

RESOLUCIÓN:

* De la figura:

$$r^2 = 12^2 - 4^2$$

$$\rightarrow r^2 = 128$$



* El volumen pedido, será:

$$V=\frac{\pi 4^3}{6}+\frac{\pi(4)}{2}(128+144)$$

$$\rightarrow V=\frac{1664\pi}{3}$$

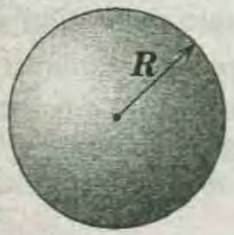
RPTA : "B"

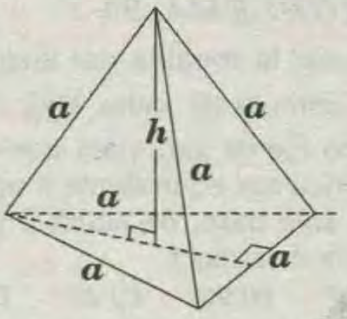
PROBLEMA 38 :

Una esfera sólida de metal de radio R , es utilizada para construir una pirámide triangular sólida cuyas caras laterales son regiones triangulares equiláteras. Halle la altura de la pirámide.

A) $\frac{2R\sqrt{3}}{3}\sqrt[3]{4\pi}$ B) $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\pi R$ C) $\frac{4R}{3}\sqrt[3]{3\pi}$

RESOLUCIÓN :





$$h=\frac{a\sqrt{6}}{3}\ ;\ V_e=\frac{4}{3}\pi R^3 ; V_p=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

* Como se trata del mismo volumen se cumple :

$$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

* Pero : $h=\frac{a\sqrt{6}}{3}\rightarrow a\frac{3h}{\sqrt{6}}$

* Reemplazando :

$$\frac{16\pi R^3}{\sqrt{2}}=\left[\frac{3h}{\sqrt{6}}\right]^3 \Rightarrow h=\frac{2R\sqrt{3}}{3}\sqrt[3]{4\pi}$$

RPTA : "A"

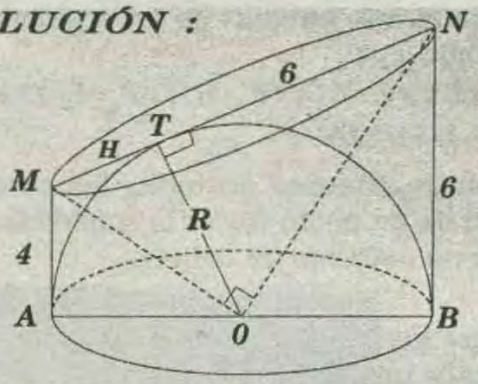
PROBLEMA 39 :

Halle el volumen de una semiesfera inscrita en un tronco de cilindro si la generatriz máxima y mínima tiene por longitud 6 y 4 respectivamente.

A) $24\pi\sqrt{6}$ B) $32\pi\sqrt{6}$ C) $24\pi\sqrt{3}$

D) $36\pi\sqrt{6}$ E) $24\pi\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN :



* Por tangentes : $AM = MT = 4$; $TN = NB = 6$

* $\triangle MON$: $R^2 = (4)(6) \rightarrow R = 2\sqrt{6}$

* El volumen de la semiesfera será :

$$V=\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{6})^2=(2\sqrt{6})\Rightarrow V=32\pi\sqrt{6}$$

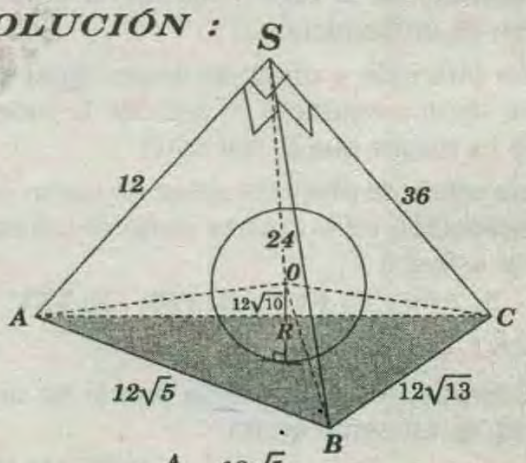
RPTA : "B"

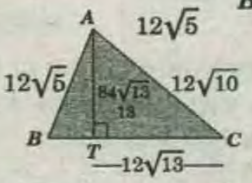
PROBLEMA 41 :

Halle el radio de la esfera inscrita en el tetraedro trirrectángulo $S-ABC$ de arista : $SA=12$; $SB=24$ y $SC=36$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :





$S_{ABC} = 504$

$$V_{S-ABC}=\frac{(12)(24)(36)}{2\times 3}=1728$$

* El volumen total es igual a la suma de cuatro pirámides:

$$1728=\frac{1}{3}(504)R+\frac{1}{3}+\frac{(12)(24)}{2}R+\frac{1}{3}\frac{(12)(36)}{2}R+\frac{1}{3}\frac{(24)(36)}{2}R$$

$$\Rightarrow 1728=\frac{R}{3}(504+114+216+432)$$

$$\Rightarrow 432R=1728\Rightarrow R=4$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 42 :

Calcule el radio de la esfera inscrita en un tetraedro regular cuya arista mide $12m$.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$ D) $\sqrt{\frac{6}{2}}$ E) $\sqrt{\frac{6}{3}}$

RESOLUCIÓN :

* De la figura:

$PG = 2(GM)$ ..... "por baricentro"

* Además :

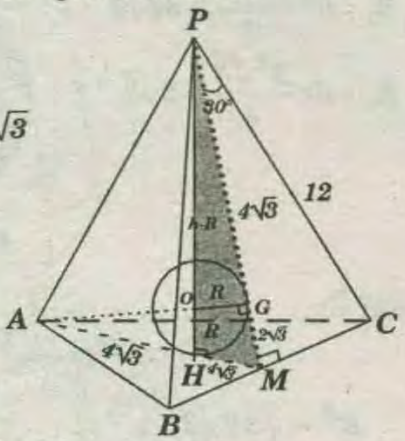
$PG + GM = 6\sqrt{3}$

$\rightarrow PG = 4\sqrt{3}$ y $GM = 2\sqrt{3}$

* Ahora :

$h^2 = (6\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})$

$\rightarrow h = 4\sqrt{6}$



* Finalmente por Menélao en $\triangle PHM$:

$$2\sqrt{3}(h-R)(4\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} \times R \times 6\sqrt{3}$$

* Efectuando:

$$R = \frac{h}{4} = \frac{4\sqrt{6}}{4} = \sqrt{6}$$

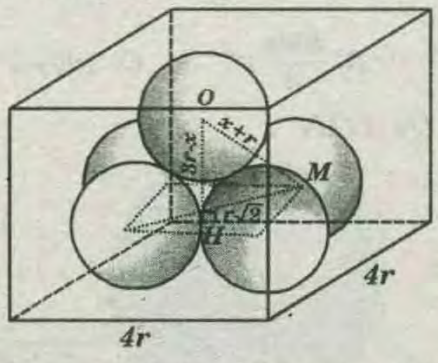
RPTA : "C"

PROBLEMA 43 :

Cuatro esferas congruente de radio r, están inscrito en un cubo de tal manera que son tangentes a la base y a las caras laterales consecutivas 2 a 2. Entonces el radio de una quinta esfera que es tangente a las cuatro esferas dadas y a la cara opuesta es:

A) $\frac{r}{2}$ B) $\frac{r}{4}$ C) $\frac{3r}{4}$ D) $\frac{5r}{4}$ E) $\frac{3r}{2}$

RESOLUCIÓN :



* Por el teorema de Pitágoras en el OHM:

$$(3r-x)^2 + (r\sqrt{2})^2 = (x+r)^2$$

* Efectuando, resulta: $\rightarrow x = \frac{5r}{4}$

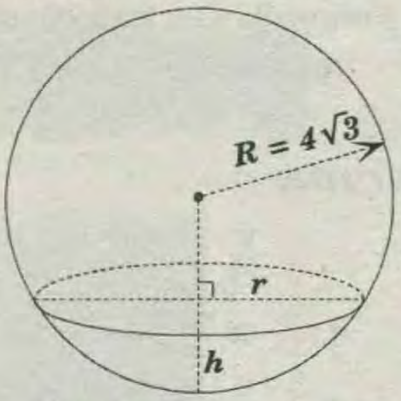
RPTA : "D"

PROBLEMA 44 :

Calcule el volumen del segmento esférico de una base si el área de su casquete esférico es cuatro veces el área de su base y el radio de la esfera es $4\sqrt{3}$.

A) 35π B) 88π C) 220π D) 180π E) $216\pi\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



Dato : $A_{CE} = 4$ Área base

$$\rightarrow 2\pi(4\sqrt{2})h = 4\pi r^2 \Rightarrow r^2 = 2\sqrt{3}h$$

$RM : r^2 = h(8\sqrt{3} - h) \Rightarrow 2\sqrt{3}h = h(8\sqrt{3} - h)$

$\Rightarrow h = 6\sqrt{3} \ \wedge \ r = 6$

$$\Rightarrow V_{SE} = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi r_1^2 h}{2} \Rightarrow V_{SE} = \pi\frac{(6\sqrt{3})^3}{6} + \pi\frac{6^2 6\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{SE} = 216\pi\sqrt{3}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 45 :

En el gráfico se tiene una esfera inscrita en un cono equilátero. Si $m\widehat{MN} = 120°$, calcule la longitud del menor recorrido para ir de A hacia N por la superficie del cono.

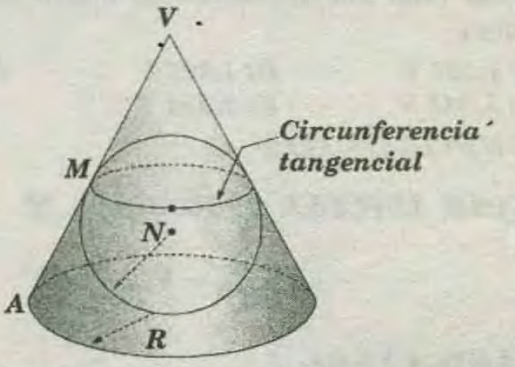
A) $R\sqrt{2}$

B) $R\sqrt{3}$

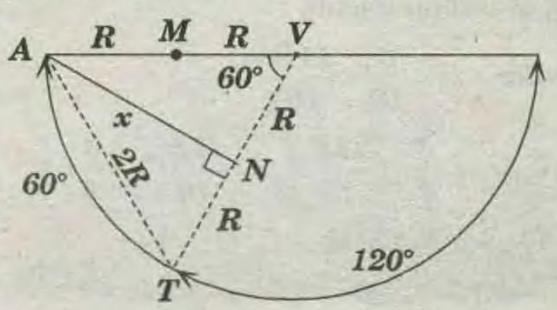
C) $R\sqrt{6}$

D) $2R$

E) $3R$



RESOLUCIÓN :



Como es un cono equilátero el desarrollo de la superficie lateral es un semicírculo.

ΔAVT : Equilátero. $\rightarrow x = R\sqrt{3}$

RPTA : "B"

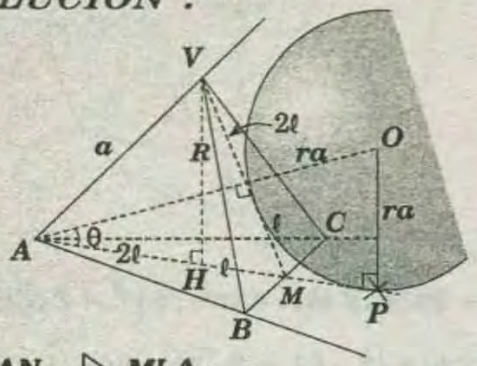
PROBLEMA 46 :

Calcule la razón de radios de las esferas inscrita, circunscrita y exinscrita a un tetraedro regular.

A) 1; 3 y 2 B) $1;\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$ C) 1; 3 y $\sqrt{2}$

D) $1; 2\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$ E) 1; 2 y $\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle OPAN \sim \triangle MLA$:

$$\Rightarrow \frac{AL + r_a}{3\ell} = \frac{r_a}{\ell} \rightarrow r_a = \frac{AL}{2} \Rightarrow r_a = \frac{1}{2}(AL) = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$\rightarrow r_a = \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow R + r = \frac{a\sqrt{6}}{3} \wedge R = 3r \; ; \; r = R = \frac{a\sqrt{6}}{12} \wedge R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$\Rightarrow r : R : r_a = 1 : 3 : 2$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 47 :

Un cuerpo en forma de esfera de volumen V es calentada hasta que su radio aumenta en un décimo de su valor inicial. Calcule el nuevo volumen de la esfera.

A) 1,331 V B) 1,227 V C) 1,666 V

D) 1,343 V E) 1,434 V

RESOLUCIÓN :

CASO INICIAL : Radio = R

$$\rightarrow V_{ESF} = V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

CASO FINAL :

Debido al calentamiento :

$$Radio = R + \frac{R}{10} = \frac{11R}{10}$$

$$\rightarrow V_{ESF} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{11R}{10}\right)^3 = \left(\frac{11R}{10}\right)^3 \times \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\rightarrow V_{ESF} = 1{,}331V$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 48 :

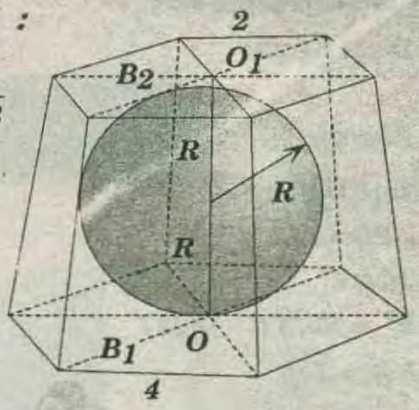
Calcule el volumen de un tronco de pirámide regular de base hexagonal circunscrito a una esfera, sabiendo que las aristas básicas miden 2 y 45.

A) 92,77 B) $84\sqrt{2}$ C) $280\sqrt{3}$

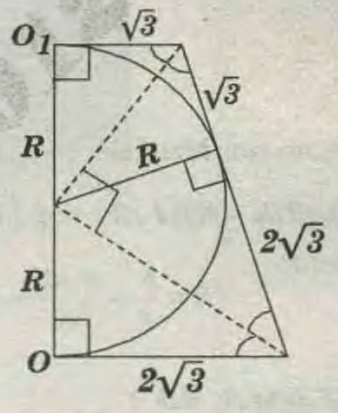
RESOLUCIÓN :

$$B_1 = 6 \times \frac{4^2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

$$B_2 = 6 \times \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$$



RM $\triangle$:



$$R^2 = \sqrt{3}\,2\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{6} \\ h = 2\sqrt{6} \end{cases}$$

$$V_{TP} = \frac{2\sqrt{6}}{3}\left(24\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + \sqrt{24\sqrt{3} \times 6\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow V_{TP} = 84\sqrt{2}$$

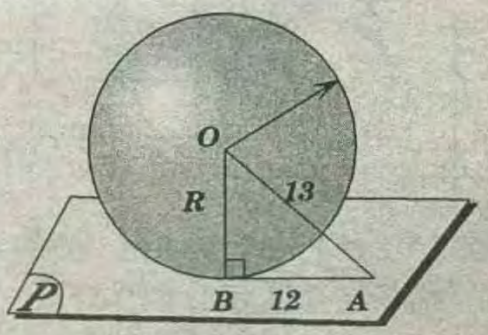
RPTA : "B"

PROBLEMA 49 :

Una esfera es tangente a un plano . Un punto de dicho plano dista 13 u y 12 u del centro y del punto de tangencia respectivamente. Calcule el volumen de la esfera.

A) $\frac{500\pi}{3}u^3$ B) $\frac{400\pi}{3}u^3$ C) $100\pi u^3$

RESOLUCIÓN :



* Por teorema de pitagoras :

$$R = 5$$

$$V_{ESF} = \frac{4}{3}\pi 5^2 \Rightarrow V_{ESF} = \frac{500\pi}{3}$$

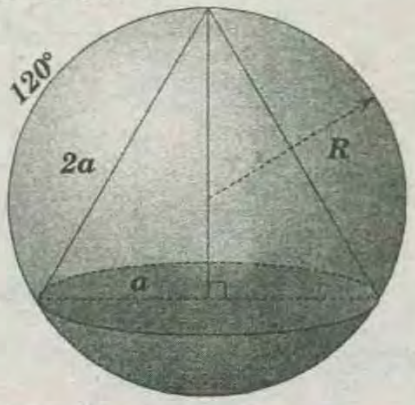
RPTA : "A"

PROBLEMA 50 :

Calcule el área de la superficie esférica circunscrita a un cono equilátero, en el que el área de su superficie es A.

A) $2A$ B) $3A$ C) $\frac{25}{3}A$ D) $\frac{16}{9}A$ E) $\frac{16}{5}A$

RESOLUCIÓN :



* Piden: $ASE = 4\pi R^2$

→ Dato :

$$A_{TOT_{CONO}} = \pi a(2a + a) = A$$

$$\rightarrow \pi a^2 = \frac{A}{3} \quad \wedge \quad R\sqrt{3} = 2a \Rightarrow R = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow ASE = 4\pi\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \pi a^2 - \frac{16}{3} = \frac{A}{3} \times \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow ASE = \frac{16}{9}A$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 51 :

Dos superficies esféricas , cuyas áreas son 576π y 36π, son tangentes exteriormente y se apoyan en un plano. Calcule la distancia entre los puntos de tangencia.

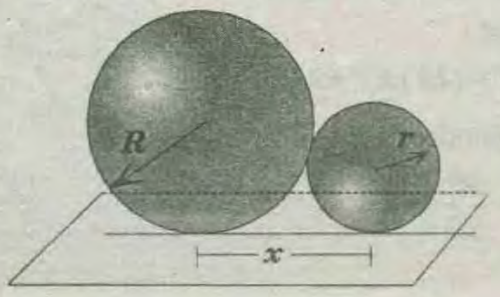
A) 6 B) 8 C) 12 D) $6\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :

* Dato:

$$4\pi R^2 = 576\pi \rightarrow R = 12$$

$$4\pi r^2 = 36\pi \rightarrow r = 3$$



* Por propiedad :

$$x = 2\sqrt{12r} \Rightarrow x = 12$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 52 :

Se tiene una esfera circunscrita a un tronco de cono recto de $6m$ y $8m$ de radio de sus bases y de altura igual a $14m$. Hallar el volumen limitado por casquete esférico correspondiente a la base del tronco de cono.

A) $\frac{416\pi}{3}$ B) $\frac{416\pi}{5}$ C) $\frac{416\pi}{7}$ D) $\frac{416\pi}{11}$ E) $\frac{416\pi}{13}$

RESOLUCIÓN:

* De la figura :

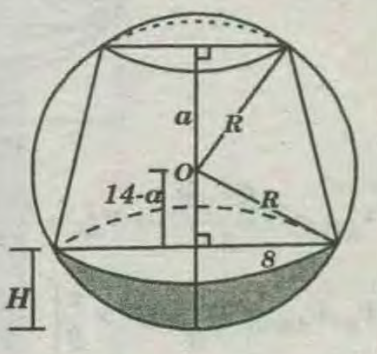
$$6^2 + a^2 = (14 - a)^2 + 8^2$$

* Simplificando:

$$a = 8 \rightarrow R = 10$$

* Luego:

$$H = 10 - 6 \rightarrow H = 4$$



* Volumen pedido:

$$V = \frac{\pi}{3}(4)^2(3 \times 10 - 4) = \frac{416\pi}{3}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 53 :

Una superficie esférica de área $144\pi m^2$ es intersecado por dos planos que forman entre sí un ángulo diedro que mide $60°$, de modo que la recta de intersección de los dos planos es tangente a la esfera y el plano bisectriz contiene un diámetro de la esfera. Halle el volumen de la parte de la esfera comprendido en el ángulo diedro.

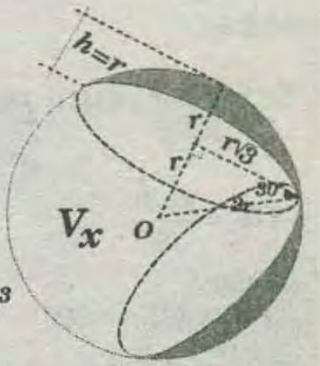
A) 180π B) 188π C) 190π D) 198π E) 200π

RESOLUCIÓN:

* Por dato:

$$4\pi(2r)^2 = 144\pi$$

$$\rightarrow r = 3$$



* De la figura

$$V_x + 2\,\frac{\pi r 2}{3}(3R - r) = \frac{4}{3}\pi(2r)^3$$

* Despejando:

$$V_x = \frac{22\pi}{3}r^3 \Rightarrow V_x = \frac{22\pi}{3}(3)^3 = 198\pi$$

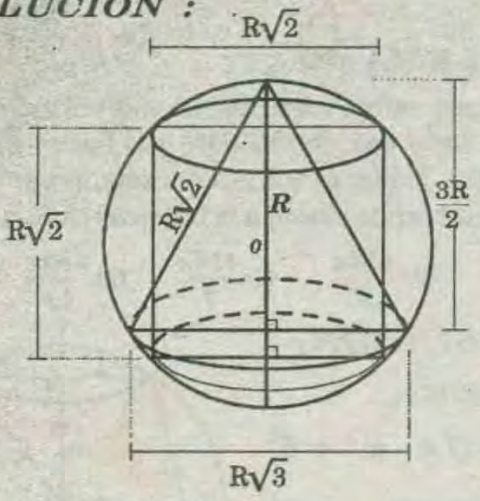
RPTA : "C"

PROBLEMA 54:

Si en una esfera se inscribe un cilindro equilátero y un cono equilátero. Demostrar que volumen del

cilindro es media proporcional entre los volúmenes de la esfera y el cono.

RESOLUCIÓN :



$$V_{cil}=\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}\rightarrow V_{cil}^2=\frac{\pi^2R^6}{2}\quad\text{.....(I)}$$

$$V_e\cdot V_{cono}=\frac{4}{3}\pi R^3\times\frac{\pi}{3}\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\frac{3R}{2}\right)=\frac{\pi^2R^6}{2}\text{...(II)}$$

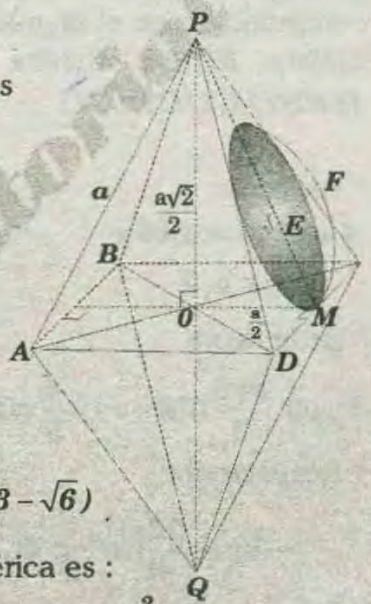
* De *(I)* y *(II)*: $V_{cil}^2=V_e\times V_{cono}$

PROBLEMA 55 :

Una esfera es tangente a las aristas de un octaedro regular. Halle el área de todas las zonas esféricas que se determinan en cada cara del octaedro , la arista mide *«a»*.

A) $\frac{\pi a^2}{6}(6-\sqrt{6})$ *B)* $\frac{4}{3}\pi a^2(3-\sqrt{6})$ *C)* $\frac{\pi a^2}{3}(6-\sqrt{6})$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle POM$; por relaciones métricas:

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)=OE\times\underbrace{PM}_{\frac{a}{2}\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow OE=\frac{a\sqrt{6}}{6}$$

* Luego :

$EF = OF = OE$

$$EF=\frac{a}{2}-\frac{a\sqrt{6}}{6}\Rightarrow EF=\frac{a}{6}(3-\sqrt{6})$$

* El área de una zona esférica es :

$$S=2\pi\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{6}\right)(3-\sqrt{6})\Rightarrow S=\frac{\pi a^2}{6}(3-\sqrt{6})$$

* El área de todas las zonas esféricas que se determinan en cada cara del octaedro es :

$$S_x=\frac{4\pi}{3}a^2(3-\sqrt{6})$$

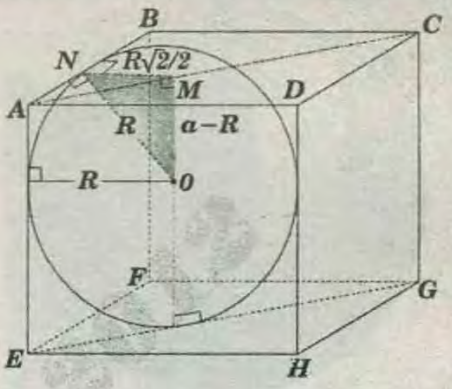
RPTA : "B"

PROBLEMA 56 :

Una superficie esférica es tangente a las aristas ***AB***, ***AD*** y ***AE*** y a la cara ***EFGH*** del hexaedro regular ***ABCD - EFGH*** de arista $(\sqrt{2}+1)$ de longitud. Halle la longitud del radio de la superficie esférica.

A)1 *B)* $\sqrt{2}$ *C)* $\sqrt{3}$ *D)2* *E)2,5*

RESOLUCIÓN :



* $\triangle NMO$:

$$R^2=(a-R)^2+\frac{R^2}{2}$$

* Resolviendo : $R=a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$

* Por dato : $a=\sqrt{2}+1$

* Reemplazando :

$$R=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\Rightarrow R=\sqrt{2}(2-1)\Rightarrow R=\sqrt{2}$$

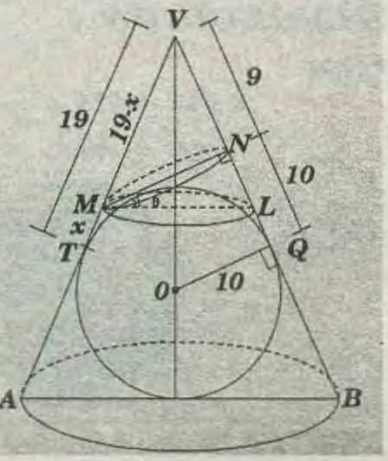
RPTA : "B"

PROBLEMA 57 :

Una superficie esférica de radio ***10u*** está inscrita en un cono de revolución. Un plano tangente a la superficie esférica es perpendicular a la generatriz del cono , cuyo vértice dista de dicho plano ***9u***. Halle el diámetro menor de la sección que determina el plano (en ***u***).

A) $\frac{5}{29}\sqrt{1127}$ *B)* $\frac{5}{29}\sqrt{1129}$ *C)* $\frac{20}{29}\sqrt{461}$

RESOLUCIÓN :



* De la figura :

$MN = 10 + x$

* $\triangle VNM$:

$(19-x)^2=(10+x)^2+9^2$

* Resolviendo :

$$x=\frac{90}{29}$$

* Ahora:

$$MN = 50 + \frac{90}{29} \rightarrow MN = \frac{380}{29}$$

* En la elipse :

$$2b = \frac{380}{29} \rightarrow b = \frac{190}{29}$$

* Por teorema :

$$\pi r^2 Cos\theta = \pi ab = \pi a\left(\frac{190}{29}\right)$$

$$r^2 Cos\theta = a\frac{190}{29} \ldots\ldots\ldots (I)$$

* Por semejanza :

$$\frac{2r}{19-x} = \frac{10-x}{r} \Rightarrow 2r^2 = \left(19-\frac{90}{29}\right)\left(10-\frac{90}{29}\right) \Rightarrow r = \frac{10}{29}\sqrt{461}$$

* En *(I)* :

$$a \times \frac{190}{29} = r^2\left[\frac{10+x}{2r}\right]; 2a \times \frac{190}{29} = \frac{10}{29}\sqrt{461}\left(10+\frac{90}{29}\right)$$

* Simplificando : $2a = \frac{20}{29}\sqrt{461}$

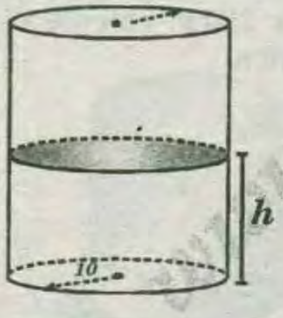
RPTA : "C"

PROBLEMA 58 :

Se tiene un recipiente de forma cilíndrica de **10 cm** de radio de la base, el cual contiene agua hasta una altura h luego se introduce una esfera de radio de **3 cm**, ¿cuánto asciende el nivel del agua?

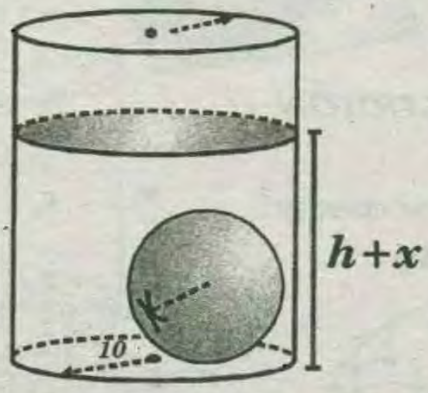
RESOLUCIÓN :

Antes de introducir la esfera.



$\mathbb{V}_{antes} = (10^2)h$

Después :



$$\mathbb{V}_{después} = (10^2)(h+x)$$

Piden el nivel de agua que se eleva .

Del dato :

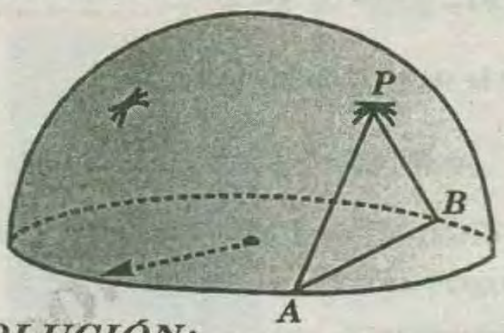
$$\mathbb{V}_{después} - \mathbb{V}_{antes} = \mathbb{V}_{esfera}$$

$$\Rightarrow (10^2)(h+x) - (10^2)h = \frac{4}{3}(3)^3$$

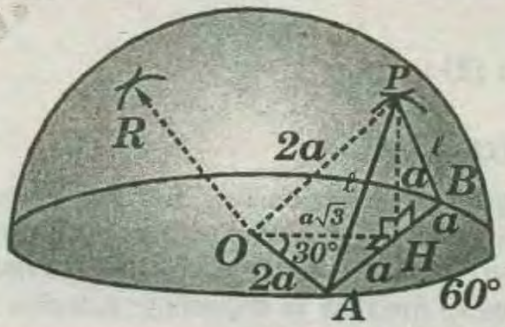
$$\Rightarrow x = 0,36cm$$

PROBLEMA 59 :

Según el gráfico, P pertenece a la superficie esférica, la región triangular APB $(AP=PB)$ se encuentra en un plano perpendicular al plano de la región circular ,$m\widehat{AB}=60°$ y el área de la región triangular APB es 4. Calcule el área de la superficie de la semiesfera.



RESOLUCIÓN:



Piden : $\mathbb{A}_{semiesfera} = 3\pi R^2$

Dato : $\mathbb{A}_{APB} = 4$

Se ubica H punto medio de AB.

$$\overline{PH} \perp \overline{AB} \wedge \overline{OH} \perp \overline{AB}$$

Luego, $m\sphericalangle PHO$: medida del diedro entre APB y el círculo máximo.

$\rightarrow m\sphericalangle PHO = 90°$

Del gráfico :

$$\mathbb{A}_{APB} = 4 = \frac{1}{2}(2a)(a) \rightarrow a = 2$$

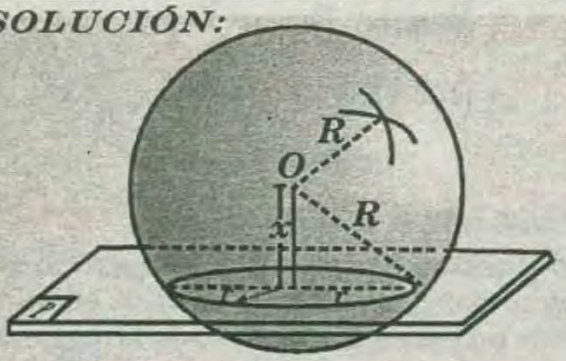
$$\mathbb{A}_{semiesfera} = 3\pi R^2 = 3\pi(2a)^2 = 3\pi(4)^2 = 48\pi$$

PROBLEMA 60 :

En una esfera de centro O, se traza un plano secante, si las áreas de la superficie esférica y de la sección determinada son $\mathbb{M}$ y $\mathbb{N}$ respectivamente, calcule la distancia de O al plano secante.

WWW.GRATIS2.COM

RESOLUCIÓN:



Área de la superficie esférica $\mathbb{M}$

$$\rightarrow \mathbb{M} = 4\pi R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{\mathbb{M}}{4\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Área de la sección en la esfera

$$\rightarrow N = \pi r^2 \rightarrow r^2 = \frac{N}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Piden $d(O;\square P)=x$ Distancia de O al plano P.

$\rightarrow d(O;\square P)=x$

Por el TEOREMA de pitágoras $x^2 = R^2 - r^2$

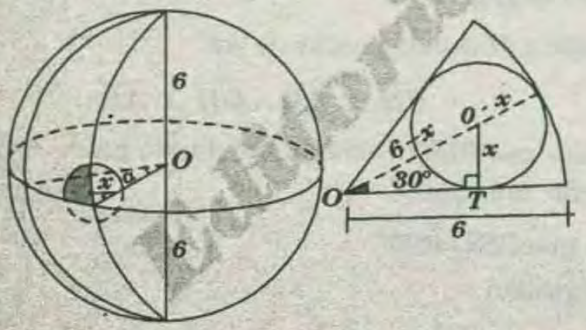
De *(1)* y *(2)* : $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathbb{M} - 4\mathbb{N}}{\pi}}$

PROBLEMA 61 :

Una superficie esférica esta inscrita en un huso esférico y dos semicírculos máximos de una esfera, si el área del huso esférico es $24\pi u^2$ y su radio es $6u$ entonces el área de la superficie esférica máxima inscrita es (en u^2):

A) 12π B) 14π C) 16π D) 18π E) 20π

RESOLUCIÓN :



* Por condición del problema :

$$24\pi = 4\pi R^2\left(\frac{\alpha}{360}\right)$$

* Simplificando : $\alpha = 60°$

* $\triangle O'TO : 2x = 6 - x \Rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$

* El área de la superficie de la esfera máxima de radio $x = 2$ es : $S = 4\pi(4) \Rightarrow S = 16\pi$

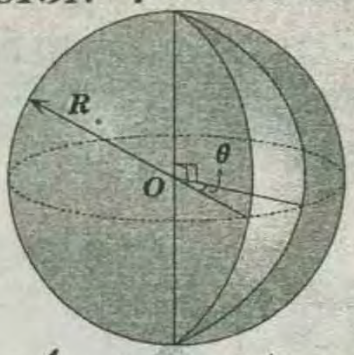
RPTA : "C"

PROBLEMA 62 :

El volumen de una esfera es numéricamente igual al área de su superficie y el área de un huso correspondiente es $2/9$ del área de la superficie esférica. Calcule el volumen de la cuña esférica.

A) 8π B) 6π C) 5π D) $6\sqrt{2}\pi$ E) $6\sqrt{3}\pi$

RESOLUCIÓN :



* Dato :

$$V_E = A_{SE} \rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2$$

$$\rightarrow R = 3$$

$$A_{HE} = \frac{2}{9}A_{SE} \rightarrow \frac{\pi R^2 \theta}{90°} = \frac{2}{9} \times 4\pi R^2 \Rightarrow \theta = 80°$$

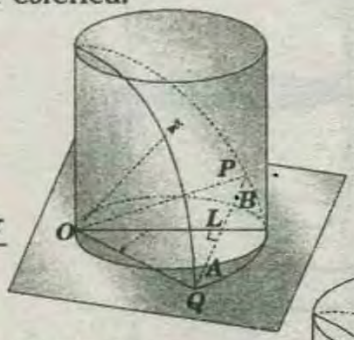
$$V_{CE} = \frac{\pi R^3 \theta}{270} = \frac{\pi 3^3 80}{270} \Rightarrow V_{CE} = 8\pi$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 63 :

En el gráfico se muestra un cilindro de revolución y una semicuña esférica. Si $AB = 4(AQ)$ y el volumen del cilindro es 250π, calcule el volumen de la semicuña esférica.

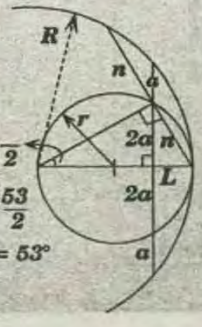
A) 100π
B) 105π
C) 115π
D) 120π
E) $\frac{2650\pi}{27}$

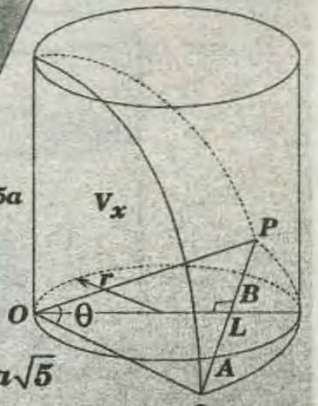


RESOLUCIÓN :

Teorema de cuerdas :

$n \times n = a(5a)$





$n = a\sqrt{5}$

$\rightarrow L = a$

$RM\triangle$:

$n^2 = 2r \times L$

$\rightarrow r = \frac{5}{2}a \Rightarrow R = 5a$

$V_{CIL} = BH = 250\pi$

$$\pi\left(\frac{5}{2}a\right)^2 \times 5a = 250\pi \rightarrow a = 2$$

* Piden :

$$V_x = \frac{1}{2}V_{CE} = \frac{1}{2}\frac{\pi R^3\theta}{270} \Rightarrow V_x = \frac{1}{2}\frac{\pi 10^3 53°}{270°}$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{2650\pi}{27}$$

RPTA : "E"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular la longitud del radio de una esfera, cuya área de su superficie es numéricamente igual a su volumen.

A)$\sqrt{3}$ B)4 C)$\sqrt{2}$ D)3 E)2

02 Calcular el volumen de una esfera, cuya área de su superficie es igual a 12π.

A)12π B)$4\sqrt{3}\pi$ C)18π D)$6\sqrt{3}\pi$ E)24π

03 Calcular la longitud del diámetro de una semiesfera, cuya área de su superficie total es igual a 27π.

A)2 B)$2\sqrt{3}$ C)4 D)$3\sqrt{2}$ E)6

04 Calcular el volumen de una esfera inscrita en un cubo cuya arista mide *6*.

A)27π B)36π C)48π. D)12π E)18π

05 Determinar la razón entre las longitudes de los radios de una esfera y una semiesfera equivalentes.

A)$\frac{1}{2}$ B)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ C)$\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ D)2 E)$\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

06 Calcular el área de la superficie engendrada por una semicircunferencia al girar alrededor de su diámetro, cuyo ángulo de giro es *120°* y el radio de dicha semicircunferencia mide $\sqrt{3}$

A)12π B)10π C)8π D)6π E)4π

07 Calcular la longitud de la arista de un cubo inscrito en una esfera cuyo radio mide *12* unidades.

A)6 B)$4\sqrt{3}$ C)9 D)$8\sqrt{3}$ E)12

08 Calcular el volumen del sólido engendrado por un semicírculo al girar en *60°*· alrededor de su diámetro, cuyo radio de dicho semicírculo mide *3* unidades.

A)18π B)15π C)12π D)9π E)6π

09 Calcular el volumen de una esfera inscrita en un cono circular recto cuya altura y su radio de base miden *8* y *6* unidades, respectivamente.

A)24π B)36π C)48π D)54π E)72π

10 Calcular el volumen de una esfera equivalente a una cuña esférica cuyo radio y su ángulo diedro miden *6 m* y *120°* respectivamente.

A)$16\pi\,m^3$ B)$36\pi\,m^3$ C)$48\pi\,m^3$
D)$72\pi\,m^3$ E)$96\pi\,m^3$

11 Calcular la medida del ángulo diedro correspondiente a un huso esférico equivalente a la superficie de una esfera cuyo diámetro es la mitad del diámetro de dicho huso.

A)$\frac{2\pi}{3}$ B)$\frac{\pi}{2}$ C)$\frac{\pi}{3}$ D)$\frac{3\pi}{5}$ E)$\frac{\pi}{4}$

12 A una esfera se divide en *4* partes equivalentes mediante *2* planos perpendiculares entre sí que pasan conteniendo al centro de dicha esfera cuyo radio mide *8* unidades. Calcular el área de la superficie total de uno de los sólidos obtenidos.

A)64π B)72π C)96π D)108π E)128π

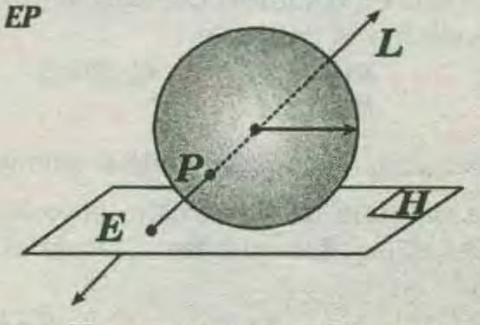
13 Calcular el área de la sección determinada por un plano secante a una esfera que pasa a *3m* del centro y cuyo radio de dicha esfera mide *5*.

A)$15\pi\,m^2$ B)$16\pi\,m^2$ C)$18\pi\,m^2$
D)$24\pi\,m^2$ E)$12\sqrt{3}\pi\,m^2$

14 Calcular el volumen de una esfera circunscrita a un cilindro circular recto cuya altura y su radio de base miden *6/3* y *3* unidades, respectivamente.

A)280π B)284π C)288π D)290π E)296π

15 En la figura: *E* se encuentra contenida en el plano *H* y *P* pertenece a la superficie esférica. La recta *L* con el plano *H* forma un ángulo que mide *37°* y el radio de la esfera mide *6* unidades.
Calcular *EP*

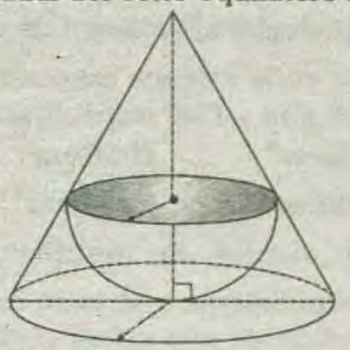


A)2 B)$2\sqrt{2}$ C)3 D)$2\sqrt{3}$ E)4

16 Se funde una esfera de plomo de radio *6* para obtener esferas cuyos radios sean de *2* unidades cada

una. ¿Cuántas esferas se obtendrán en el proceso?
A) 48 B) 50 C) 52 D) 54 E) 60

17 En la figura calcular el volumen de la semiesfera, si la generatriz del cono equilátero mide 12 unidades.



A) $108(9-5\sqrt{3})\pi$
B) $100(7-3\sqrt{6})\pi$
C) $96(5+3\sqrt{3})\pi$
D) $90(3+2\sqrt{6})\pi$
E) $84(5-\sqrt{3})\pi$

18 En una esfera se traza un plano secante que determina una sección cuya área es 36π, dicho plano se encuentra a una distancia de 8 unidades del centro. Calcular el volumen de dicha esfera.

A) $\frac{4000\pi}{3}$ B) $\frac{5000\pi}{3}$ C) 1500π D) 1800π E) 2400π

19 Una esfera se divide en 8 partes equivalentes mediante 3 planos perpendiculares entre sí dos a dos. Hallar el área de la superficie total de una de las 8 partes, si el diámetro de dicha esfera es «d»

A) $\frac{3\pi d^2}{5}$ B) $\frac{5\pi d^2}{16}$ C) $\frac{4\pi d^2}{3}$ D) $\frac{3\pi d^2}{10}$ E) $\frac{2\pi d^2}{5}$

20 Calcular el área de la superficie de una esfera inscrita en un cilindro equilátero, cuya área de superficie lateral es igual a 16π.

A) 8π B) 10π C) 12π D) 14π E) 16π

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 El área de un casquete esférico es la quinta parte del área de la superficie esférica correspondiente. Si la altura del casquete esférico es 2, calcula el volumen del segmento esférico correspondiente al casquete.

A) $85\pi/2$ B) $72\pi/7$ C) $52\pi/3$
D) 27π E) $67\pi/4$

02 Una esfera, cuyo radio mide R unidades, se ha inscrito a un cono de revolución, cuya área lateral es 4 veces el área de su base. Calcule el volumen del cono.

A) $\frac{25\pi R^3}{16}$ B) $\frac{2\pi R^3}{5}$ C) $\frac{7\pi R^3}{25}$
D) $\frac{75\pi R^3}{512}$ E) $\frac{25\pi R^3}{72}$

03 Sobre un círculo mayor de una esfera, como base se traza un cono recto equivalente a la mitad de la esfera. Calcule el radio del círculo de intersección, si "r" es el radio de la esfera.

A) $4r/5$ B) $3r/5$ C) $2r/5$ D) $4r/3$ E) $r/2$

04 Calcule el volumen de una esfera que es tangente a una de las caras de un hexaedro regular y que contiene a los 4 vértices de la cara opuesta, siendo la arista del hexaedro 3.

A) $27\pi/6$ B) $243\pi/16$ C) $3\pi/2$ D) 36π E) 27π

05 Calcular la longitud del radio de una esfera tangente a las aristas laterales y a la base de una pirámide cuadrangular regular cuya arista básica y su respectiva altura miden $2a$.

A) $a(\sqrt{3}+1)$ B) $a(\sqrt{3}-1)$ C) $a\sqrt{3}$
D) $a(\sqrt{2}-1)$ E) $a(\sqrt{2}+1)$

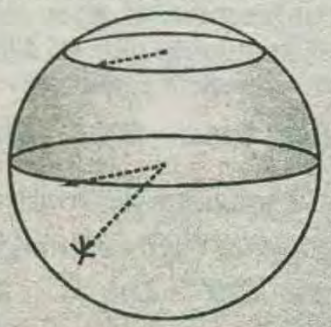
06 Se tiene un segmento cuyos radios de la base miden 2 y 4. Calcular su volumen, siendo dichas bases las bases de un tronco de cono circunscriptible a una esfera.

A) $183\sqrt{2}\pi$ B) $\frac{183\sqrt{2}}{5\pi}$ C) $\frac{183\sqrt{2}}{2\pi}$
D) $\frac{184\sqrt{3}}{3\pi}$ E) $\frac{184\sqrt{2}}{3\pi}$

07 Se considera el círculo mayor de una esfera como base y se construye un cono de revolución equivalente a la mitad de la esfera. Calcular el área de la zona esférica de dos bases que se determina si el radio de la esfera es $\sqrt{5}$.

A) 4π B) 6π C) 5π D) 7π E) 8π

08 En el gráfico, $AB=\sqrt{2}$, las áreas de los círculos menor y mayor son π y 4π, respectivamente. Calcule el área de la zona esférica mostrada.



A) 6π B) $3\sqrt{7}\pi$ C) $6\sqrt{7}\pi$ D) $2\sqrt{5}\pi$ E) $6\sqrt{3}\pi$

09 La arista de un cubo mide 4 m. Calcular la longitud del radio de dos esferas congruentes que pueden ser introducidas en el cubo de forma que

ellas no pueden desplazarse en el interior del cubo cuando éste se pone en movimiento.

A) $2\sqrt{3}-1$ B) $3-\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{5}-1$ E) $4-\sqrt{3}$

10 En una semiesfera se inscribe un cono cuyo vértice es el centro de dicha semiesfera. Si el radio de la base de dicho cono mide 3 y además dicha base divide a la superficie esférica en dos superficies equivalentes, calcular el volumen del sector esférico limitado por el cono y la semiesfera.

A) 8π B) 10π C) $8\sqrt{2}\pi$ D) $8\sqrt{3}\pi$ E) $6\sqrt{2}\pi$

11 Calcular el área de la superficie esférica, sabiendo que las áreas de los casquetes determinados por un plano secante a ella están en razón de 4 a 5 y la cuerda correspondiente al arco que genera el casquete menor mide "a" m.

A) $9/4\ a^2$ B) $4/9\ a\pi^2$ C) $4/9\ \pi a^2$
D) $9/4\ \pi a^2$ E) $9/4\ a\pi^2$

12 Calcular el volumen de una esfera tangente a las aristas $\overline{AD}$, $\overline{DS}$ y $\overline{DC}$ de un tetraedro regular ABCD, en los vértices A, B y C, respectivamente, siendo "a" la arista del tetraedro.

A) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}a^3$ B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}a^3$ C) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}a^3$
D) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}a^3$ E) $\frac{\pi\sqrt{3}}{5}a^3$

13 Una superficie semiesférica de radio R está inscrita en un cono equilátero, de manera que su circunferencia máxima está en la base del cono. Calcular la diferencia de volúmenes de los segmentos esféricos que determinan el plano de la linea tangencial en la semiesfera.

A) 0 B) πR^3 C) $\pi R^3/3$ D) $\pi R^3/4$ E) $3\pi R^3/4$

14 Se tiene un casquete esférico cuya altura mide 2 cm y el área de la base es $16\pi\ cm^2$. ¿Qué volumen tendrá el segmento esférico semejante al que determina el casquete esférico, sabiendo que la esfera correspondiente al segmento esférico tiene un radio igual a 15 cm?

A) $100\pi\ cm^3$ B) $404\ \pi\ cm^3$ C) $413\ \pi\ cm^3$
D) $448\pi\ cm^3$ E) $468\ \pi\ cm^3$

15 Una esfera, cuya superficie esférica tiene área 144π, es intersecada por dos planos que forman entre sí un ángulo diedro cuya medida es 60°, tal que la recta de intersección de los planos es tangente a la esfera y el plano bisector del ángulo diedro contiene un diámetro de la esfera. Calcular el volumen de la parte de la esfera interior al ángulo diedro.

A) 288π B) 198π C) 243π D) 126π E) 264π

16 En una esfera se trazan dos planos paralelos y secantes a la esfera y a un mismo lado del centro. Sabiendo que la distancia entre ambos es C y que las áreas de las secciones determinadas son $a^2\pi$ y $b^2\pi$, calcular el área de la superficie esférica si se conoce además que: $a+c=b$ y $a^2+b^2=4$.

A) 4π B) $16\pi/3$ C) $4\sqrt{2}\pi$ D) 16π E) 20π

17 Calcular la medida del ángulo de un sector circular sabiendo que cuando gira alrededor de un eje coplanar que pasa por el centro y es perpendicular al eje de simetría, genera un volumen igual a la mitad del volumen de la esfera de igual radio que el sector.

A) 30° B) 45° C) 37° D) 60° E) 75°

18 Se tiene 2 casquetes esféricos congruentes con base común; en su interior se tiene una esfera inscrita cuyo volumen es 36π, y determina en la base común de ambos casquetes una corona circular de área igual a 16π. Calcular el área de cada uno de los casquetes.

A) 24π B) 36π C) 48π D) 34π E) 56π

19 Se inscribe en un cono equilátero dos esferas tangentes exteriormente, el radio de la mayor es R. En la esfera menor, calcular el volumen del menor segmento esférico, cuya base está limitada por la línea tangencial determinada en el cono.

A) $\frac{5\pi R^3}{649}$ B) $\frac{7\pi R^3}{649}$ C) $\frac{9\pi R^3}{649}$
D) $\frac{5\pi R^3}{648}$ E) $\frac{7\pi R^3}{648}$

20 El área de un casquete esférico es la quinta parte del área de la superficie esférica correspondiente. Si la altura del casquete mide 2, calcular el volumen del segmento esférico correspondiente al casquete.

A) $85\pi/2$ B) $72\pi/7$ C) $52\pi/3$ D) 27π E) $67\pi/4$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)D	2)B	3)E	4)B	5)E	6)E	7)D	8)E	9)B	10)E
11)B	12)E	13)B	14)C	15)E	16)D	17)A	18)A	19)B	20)E

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)C	2)D	3)B	4)B	5)C	6)D	7)E	8)D	9)B	10)D
11)D	12)A	13)D	14)E	15)B	16)D	17)D	18)D	19)D	20)C

TEOREMA DE PAPPUS Y GULDING

CAPITULO 41

OBJETIVO :

** Conocer las superficies y sólidos de revolución y calcular sus áreas y volúmenes.*

** Conocer el teorema de Pappus-Gulding.*

** Reconocer cuándo se genera una superficie y cuándo un sólido.*

** Aplicar correctamente los teoremas en la resolución de problemas.*

INTRODUCCIÓN :

Cuando un punto se desplaza «forma» una línea. Cuando una línea se desplaza forma una superficie. Y, el desplazamiento de una superficie forma un sólido.

Consideraremos que un segmento de recta se desplaza horizontalmente y manteniéndose paralela a su posición original, ¿qué figura forma? Si el extremo del mismo segmento se hace girar horizontalmente, manteniendo fijo el otro extremo, ¿qué figura se forma? En el primer caso se forma un rectángulo y en el segundo, un círculo.

De lo anterior se deduce que ciertas superficies como sólidos, se generan como consecuencia del movimiento de ciertas figuras.

Por ejemplo aquí podemos observar una tolva que tiene mucha utilidad en la industria y elaboración de ciertas herramientas. Si nos damos cuenta podemos. observar el origen de este sólido geométrico, como mostramos a continuación. Si una región de un plano se gira alrededor de un eje *E* de ese mismo plano, se obtiene una región tridimensional llamada **sólido de revolución** generado por la región plana alrededor de lo que se conoce como **eje de revolución**. Este tipo de sólidos suele aparecer frecuentemente en ingeniería y en procesos de producción. Son ejemplos de sólidos de revolución: ejes , embudos , pilares , botellas y émbolos.

Región Triangular

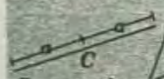
Región Cuadrada

Región Exágonal regular

Círculo

Triángulo Equilátero

Rectángulo

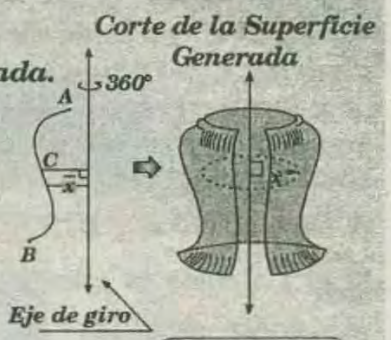

Segmento

Paralelogramo

En los capítulos anteriores hemos estudiado algunos estos , específicamente , los tres cuerpos redondos; en el cilindro , el cono y la esfera , y sus respectivas superficies , sin embargo , existe otros muchos sólidos y superficies de revolución que han sido estudiados , de los cuales es posibles obtener un área o volumen , estos gracias a los teoremas del griego Pappus y del suizo Gulding.

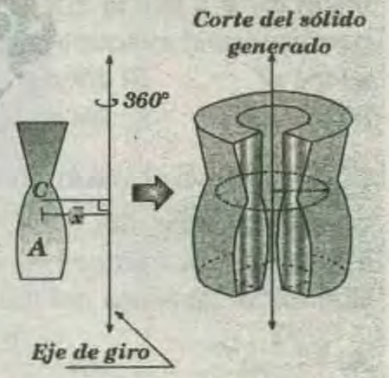
Para aplicar estos teoremas es necesario conocer la ubicación del centroide , centro geométrico , de la figura.

ASG : Área de la superficie generada.
L : Longitudes de la línea AB.
C : Centroide de la línea AB.
$\bar{x}$ *: Radio de la circunferencia descrita por el centroide.*



$$A_{SG} = L \times 2\pi x$$

VSG : Volumen del sólido generado.
A : Área de la región generadora.
C : Centroide de la región generadora.
$\bar{x}$ *: Radio de la circunferencia descrita por el centroide.*

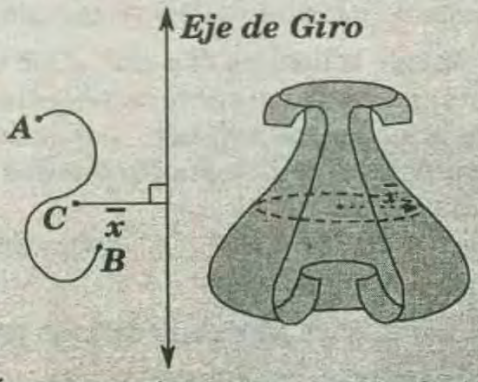


$$A_{SG} = A \times 2\pi \bar{x}$$

TEOREMA DE PAPPUS Y GULDING

PRIMER TEOREMA :

El área que genera una línea cuando gira alrededor de un eje es igual a la longitud de la circunferencia que recorre su centro de gravedad multiplicado por la longitud de la línea.



Área de la Superficie Generada (ASG)

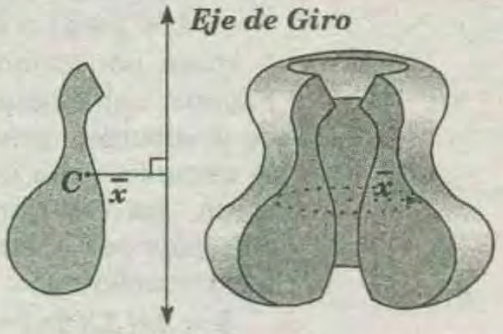
$$A_{SG} = L \cdot 2\pi \bar{x}$$

L : Longitud de la curva = L_{AB}

$\bar{x}$: Distancia del centroide *(C)* de la curva al eje de giro.

SEGUNDO TEOREMA :

El volumen que genera una superficie , cuando gira alrededor de un eje coplanar es igual a la longitud de la circunferencia que recorre su centro de gravedad multiplicado por el área de la figura.



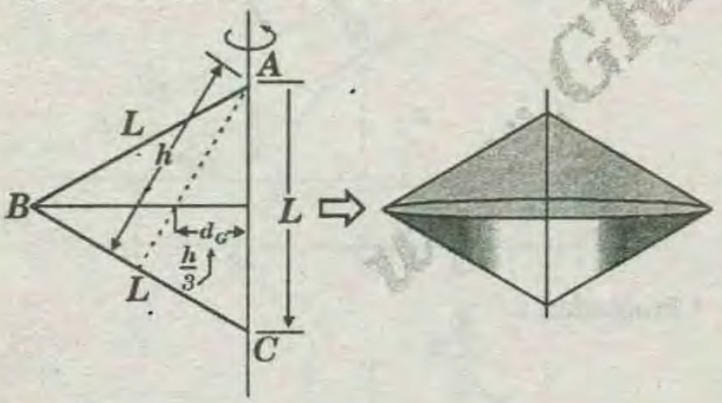
Volumen del Sólido Centrado (VSG)

$$VSG = A.\ 2\pi\bar{x}$$

A : Área de región.

$\bar{x}$: Distancia de centroide *(C)* de la región al eje de giro.

⟨1⟩ Volumen generado por rotación de triángulo equilátero alrededor de un lado.



$$V = \frac{1}{3} S_{BC} \times h \ .....(I)$$

$$S_{BC} = 2\pi h \times \frac{L}{2} .....(II)$$

* *(II)* en *(I)* :

$$V = \frac{1}{3}\left(2\pi h \frac{L}{2} h\right) = \frac{1}{3}\pi L h$$

* Pero $h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$, Luego :

$$V = \frac{1}{3} \times 2\pi h \times \frac{L}{2} \times \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi h}{3}\left(\frac{L^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\Rightarrow V = 2\pi\left(\frac{h}{3}\right)\left(\frac{L_2\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow V = 2\pi d_G S_{\Delta}$$

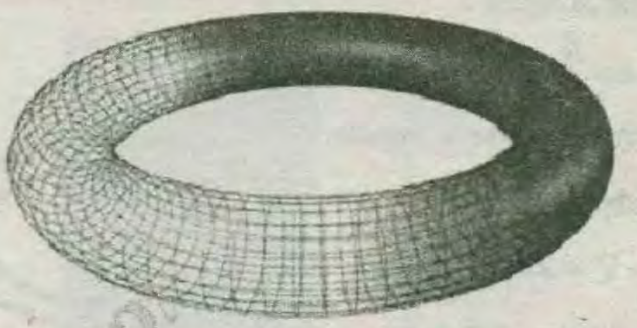
* Donde:

d_G : es la distancia al baricentro del triángulo.

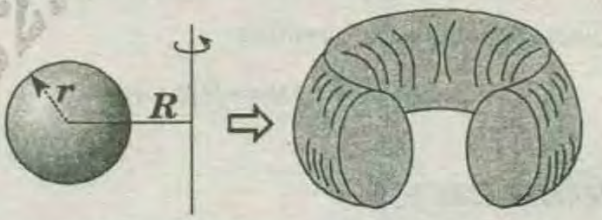
S_{Δ} : Es el área del triángulo equilátero.

TOROIDE

Superficie generada por una curva cerrada cualquiera al girar alrededor de un eje contenido en su plano y que no la corta. Sólido limitado por esta superficie.



VOLUMEN DE UN TOROIDE :



$$V = 2\pi r(2\pi r^2) \rightarrow \boxed{V = 4\pi^2 R r^3}$$

CENTRO DE GRAVEDAD

Punto de aplicación de la fuerza peso en un cuerpo, y que es siempre el mismo, sea cual sea la posición del cuerpo.

Para determinar el centro de gravedad hay que tener en cuenta que toda partícula de un cuerpo situada cerca de la superficie terrestre está sometida a la acción de una fuerza, dirigida verticalmente hacia el centro de la Tierra, llamada fuerza gravitatoria .

Cuando se trata de cuerpos de dimensiones muy pequeñas frente a la Tierra, se puede admitir que las fuerzas gravitatorias que actúan sobre las distintas partículas del cuerpo son paralelas y de módulo constante. Por tanto, se puede calcular la posición del centro de gravedad hallando la recta de acción de la resultante de esas fuerzas. Si el cuerpo es homogéneo, el centro de gravedad coincide con su centro geométrico.

Si un cuerpo es tan pequeño que la aceleración de la gravedad es la misma para todas las partículas, entonces el centro de masas y el de gravedad coinciden.

WWW.GRATIS2.COM

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

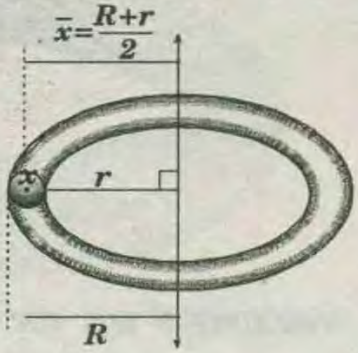
Se tiene una argolla cuyo diámetro menor mide $2r$ y su diámetro mayor $2R$, si la argolla es macisa. Halle el volumen de la argolla.

$A)\frac{\pi}{8}(R^2-r^2)(R+2r)$ $B)\frac{\pi^2}{4}(R+r)(R-r)^2$ $C)\frac{\pi}{6}(R-r)$

RESOLUCIÓN :

* De la figura :

$$k=\frac{R-r}{2}$$



* Volumen de la argolla:

$$V = 2\pi\bar{x}S$$

$$\rightarrow V = 2\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)(\pi k^2)$$

$$\rightarrow V = 2\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)(\pi k^2)$$

* Reemplazando "k", resulta

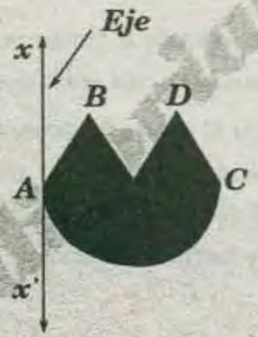
$$\rightarrow V = \frac{\pi^2}{4}(R+r)(R-r)^2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 2 :

En la figura mostrada AC es diámetro. $AO = OC = 4\mu$. Los triángulos ABO y ODC son equiláteros. Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la región sombreada alrededor de la recta xx'.

$A)\ 64\pi(\sqrt{3}+\pi)$
$B)\ 32\pi(\sqrt{3}+\pi)$
$C)\ 32\sqrt{3\pi}$
$D)\ 48\pi(\sqrt{3}+\pi)$
$E)\ 24\pi(\sqrt{3}+\pi)$

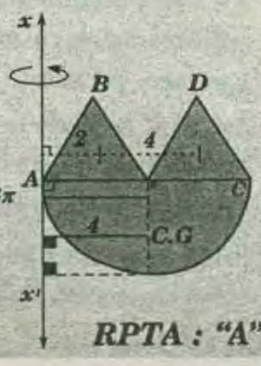


RESOLUCIÓN:

* Por el teorema de Pappus Gulding:

$$V = V_1 + V_1 + V_3$$

$$\Rightarrow V = 2\pi(2)\times\frac{4^2}{4}\sqrt{3} + 2\pi(6)\times\frac{4^2}{4}\sqrt{3} + 2\pi(4)\times 8\pi$$



* Efectuando:

$$V = 64\pi\left(\sqrt{3}+\pi\right)$$

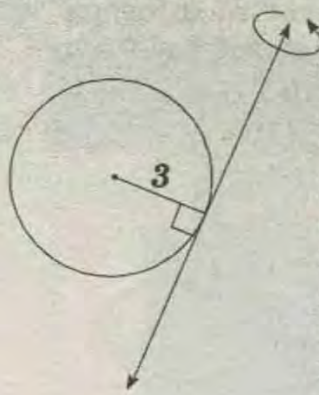
RPTA : "A"

PROBLEMA 3 :

Calcular el área de la superficie generada por la circunferencia cuyo radio mide $3m$, si gira 360° alrededor de una recta tangente a la circunferencia.

$A)36\pi^2$ $B)38\pi^2$ $C)40\pi^2$ $D)42\pi^2$ $E)50\pi^2$

RESOLUCIÓN :



* La longitud de la circunferencia , será:

$$L = 2\pi(3) = 6\pi$$

* Ahora por el teorema de Pappus; calculamos el área de la superficie generada por la circunferencia cuyo radio mide $3m$, al girar 360° alrededor de la recta tangente a la circunferencia:

$$S = 2\pi(3)(6\pi) = 36\pi^2$$

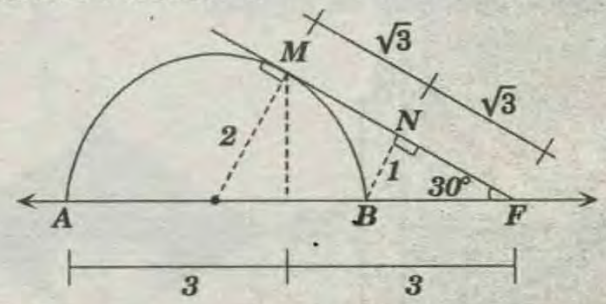
RPTA : "A"

PROBLEMA 4 :

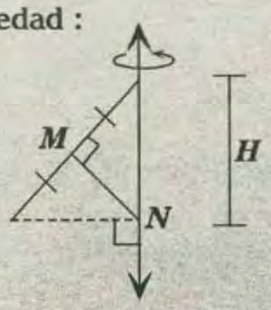
En una semicircunferencia cuyo radio mide $2m$. se prolonga el diámetro $\overline{AB}$ hasta F tal que $BF = 2m$. Por F se traza la tangente $\overline{FM}$. Calcule el área de la superficie engendrada por la línea mixta AMF al girar una vuelta completa alrededor de AF (en m^2).

$A)\ 2\pi$ $B)\ 4\pi$ $C)\ 8\pi$ $D)\ 12\pi$ $E)\ 18\pi$

RESOLUCIÓN :



* Propiedad :



$$S = 2\pi(MN)H$$

* La superficie generada es :

$$S = 2\pi(2)(3) + 2\pi(3)(1)$$

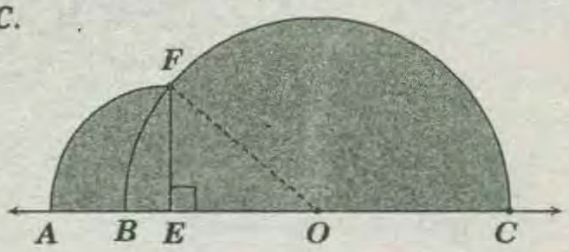
$$\Rightarrow S = 12\pi + 6\pi \rightarrow S = 18\pi$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 5 :

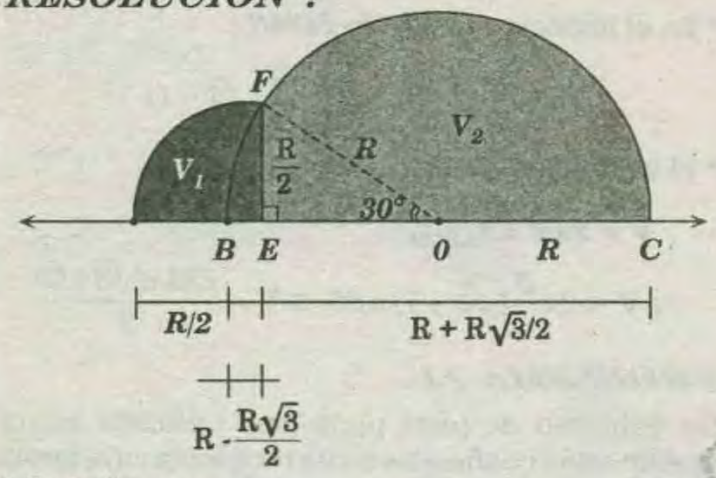
En la figura F pertenecen al semicírculo del diámetro $\overline{BC}\,(BC = 2R)$ y AEF es un cuadrante. Si

$m\widehat{FC} = 150°$, halle el volumen del sólido generando cuando la superficie sombreada rota alrededor del eje AC.



A) $\frac{3\pi R^3}{8}(2+\sqrt{3})$ B) $\frac{3\pi R^3}{2}$ C) $\frac{3\pi R^3}{8}(4+\sqrt{3})$

RESOLUCIÓN :



* De la figura:

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi\left[\frac{R}{2}\right] \rightarrow V_1 = \frac{\pi R^3}{12} \text{.....(I)}$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{\pi}{3}\left(R - \frac{R}{2}\sqrt{3}\right)^2\left(3R - R + \frac{R}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{4\pi R^3}{3} - \frac{\pi R^3}{24}(16 - 9\sqrt{3}) \text{.....(II)}$$

* *(I) + (II)* ; y simplificando :

$$V_1 + V_2 = \frac{3\pi R^3}{8}(2+\sqrt{3})$$

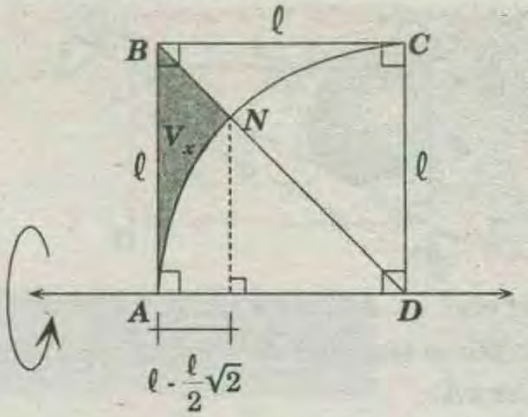
RPTA : "A"

PROBLEMA 6 :

En un cuadrante *ABCD* de lado ℓ se traza el cuadrante *ADC* y la diagonal $\overline{BD}, \overline{BD} \cap \overline{AC} = \{N\}$, halle el volumen del sólido de revolución que se resulta de hacer girar *1* vuelta la región mixtilínea limitada por $\overline{AB}, \widehat{AN}$ y $\overline{BN}$, alrededor de $\overline{AD}$.

A) $\frac{\pi}{2}\ell^3\sqrt{7}$ B) $\frac{\pi}{3}\ell^3(2-\sqrt{1})$ C) $\frac{\pi}{2}\ell^3(3-\sqrt{2})$

RESOLUCIÓN :



* El volumen pedido es :

$$V_x = \frac{\pi}{3}(\ell)^2\ell - \frac{2}{3}\ell^2\left(\ell - \frac{\ell}{3}\sqrt{2}\right)$$

* Simplificado: $V_x = \frac{\pi\ell^3}{3}(\sqrt{2}-1)$

RPTA : "B"

PROBLEMA 7 :

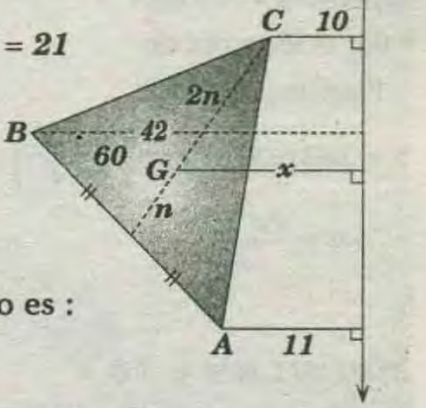
Una región triangular de área $60u^2$ gira alrededor de un eje coplanar siendo la distancia de sus vértices al eje giro *10u, 11u* y *42u.* Calcule el volumen generado (en u^3).

A) 1250π B) $2520\ \pi$ C) $2780\ \pi$
D) $3250\ \pi$ E) $4270\ \pi$

RESOLUCIÓN :

* Por propiedad :

$$x = \frac{10+11+42}{3} \rightarrow x = 21$$



* El volumen generado es :

$V = 2\pi(21)(60)$

$\rightarrow V = 2520\pi$

RPTA : "B"

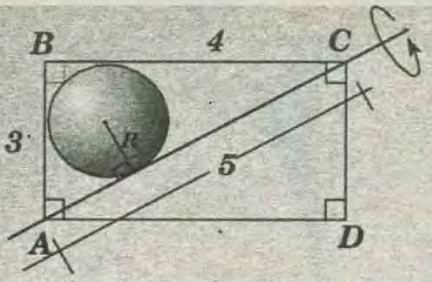
PROBLEMA 8 :

ABCD es un rectángulo, *AB = 3, BC = 4,* se inscribe en *ABC* una circunferencia. Halle el volumen que genera el círculo inscrito al rotar alrededor de la recta *AC.*

A) $\pi\mu^3$ B) $\frac{\pi}{2}\mu^3$ C) $\frac{\pi}{3}\mu^3$ D) $\frac{3\pi}{2}\mu^3$ E) $2\pi^2\mu^3$

RESOLUCIÓN:

* Por el teorema de PONCELET :



Poncelet enel $\triangle ABC$ $3+4 = 5 + 2R \rightarrow R = 1$

* Luego por el teorema de Pappus Gulding:

$V = 2\pi \bar{x} A$

$\rightarrow V = 2\pi(R)(\pi R^2)$

$\Rightarrow V = 2\pi(1)(\pi \times 1^2) = 2\pi^2$

RPTA : "E"

PROBLEMA 9 :

Halle el volumen del sólido generado por la región sombreada cuando gira alrededor del eje mostrado: sabiendo que el radio de la circunferencia mayor es R y que:

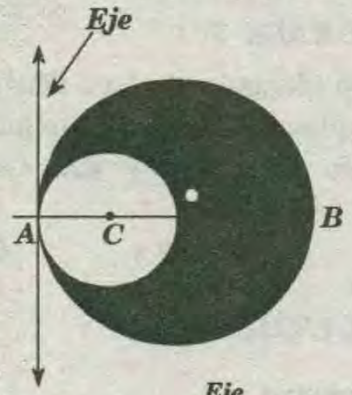
A) $\frac{7}{4}\pi^2 R^3$

B) $\frac{3}{2}\pi^2 R^3$

C) $\frac{5}{4}\pi^2 R^3$

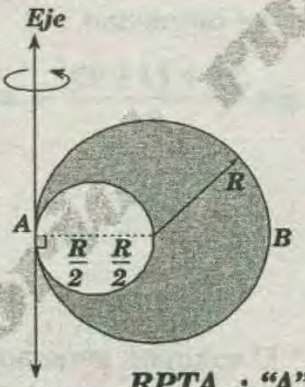
D) $2\pi^2 R^3$

E) $\pi^2 R^3$



RESOLUCIÓN :

* Por el teorema de Pappus y Gulding:



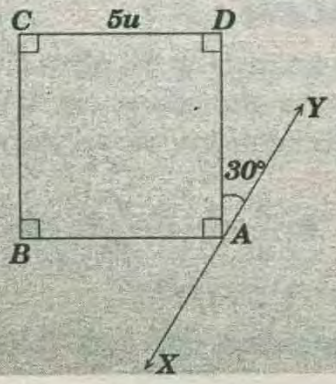
$$V = 2\pi R(\pi R^2) - 2\pi\left(\frac{R}{2}\right)\left(\frac{\pi R^2}{4}\right)$$

$$\rightarrow V = \frac{7\pi^2 R^3}{4}$$

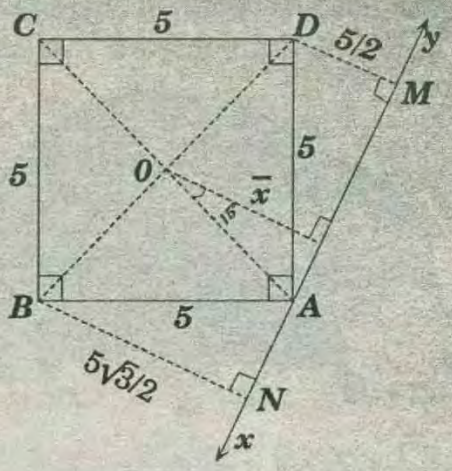
RPTA : "A"

PROBLEMA 10 :

Halle el volumen del sólido generado por la región cuadrada $ABCD$ al girar alrededor del eje XY. $(\pi = 3{,}1416)$.



RESOLUCIÓN :



* En el trapecio rectángulo $BDMN$:

$$\bar{x} = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \rightarrow \bar{x} = \frac{5}{4}(\sqrt{3}+1)$$

* El volumen del sólido generado es :

$$V = 2\pi \bar{x}\, S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow V = 2\pi \frac{5}{4}(\sqrt{3}+1) \times 25 \Rightarrow V = \frac{125\pi(\sqrt{3}+1)}{2}$$

PROBLEMA 11 :

Un conjunto de pilas plata zinc utilizado en un satélite están confinadas en un recipiente cuya forma es generada tal como se muestra la figura. Calcule el volumen del recipiente.

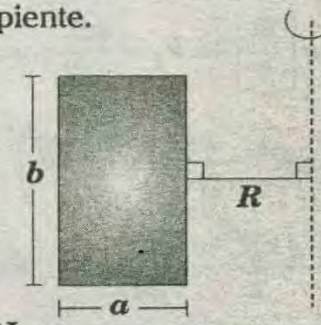
A) $2\pi bR + \pi a^2 b$

B) $\pi abR + 2\pi a^2 b$

C) $\pi abR + \pi a^2 b$

D) $\pi abR + \pi ab^2 a$

E) $\pi abR - \pi ab^2 a$



RESOLUCIÓN :

* De la figura:

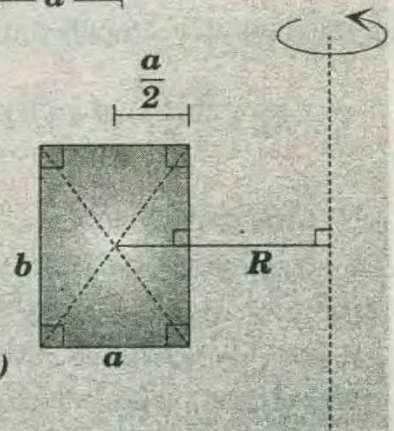
$$\bar{x} = \frac{a}{2} + R$$

* Luego el volumen es :

$$V = 2\pi \bar{x} S$$

$$\Rightarrow V = 2\pi\left(\frac{a}{2} + R\right)(ab)$$

$$\Rightarrow V = 2\pi abR + \pi a^2 b$$



RPTA : "A"

PROBLEMA 12 :

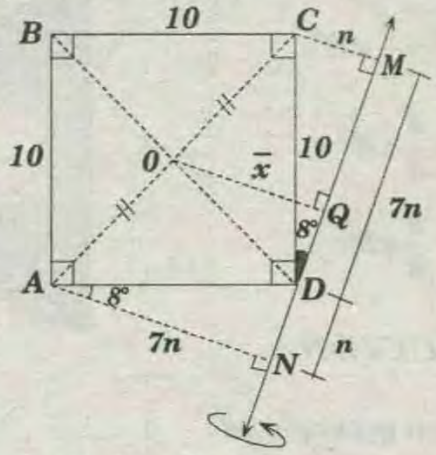
El lado de un cuadrado $ABCD$, mide $10cm$. Halle el volumen del sólido engendrado al girar el cuadrado, una vuelta , alrededor de un eje coplanar que pasa

por el punto D , haciendo un ángulo de $8°$ $\overline{CD}$ con exteriormente al cuadrilátero (en cm^3).

A) $800\sqrt{2}\pi$ B) $700\sqrt{2}\pi$ C) $800\sqrt{3}\pi$

D) $500\sqrt{3}\pi$ E) $600\sqrt{2}\pi$

RESOLUCIÓN :



* De la figura : $49n^2 + n^2 = 100$

$$\Rightarrow 50n^2 = 100 \Rightarrow n^2 = 2 \Rightarrow n = \sqrt{2}$$

* En el trapecio rectángular $ACMN$; por teorema :

$$\bar{x} = \frac{7n+n}{2} \rightarrow \bar{x} = 4n \Rightarrow \bar{x} = 4\sqrt{2}$$

* Luego el volumen es :

$$V = 2\pi(4\sqrt{2})(100) \Rightarrow V = 800\sqrt{2}\pi$$

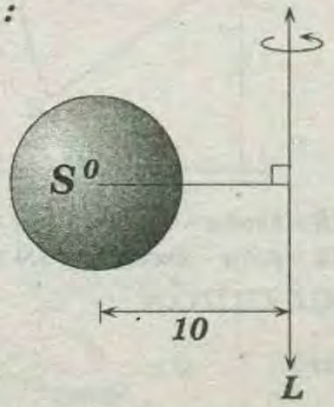
RPTA : "A"

PROBLEMA 13 :

Se tiene un círculo de centro O de $\frac{10}{\pi} cm^2$ de área y un eje «L». coplanar a una distancia de $10\ cm$ de su centro. Calcule el volumen del sólido generando por la región circular cuando gira $180°$ alrededor de L (en cm^3).

A) $100\pi^2$ B) $100\ \pi$ C) 100 D) 200 E) $200\ \pi^2$

RESOLUCIÓN :



* Dato:

$$S = \frac{10}{\pi}$$

* El volumen del sólido generado por la región circular cuando gira $360°$ alrededor de L es:

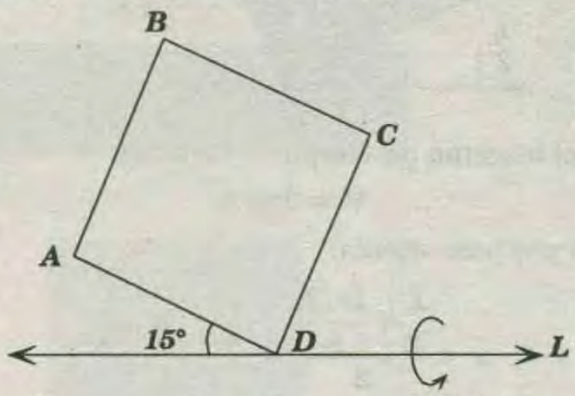
$$V = 2\pi(10)\left(\frac{10}{\pi}\right) = 200$$

* Cuando gira $180°$ es : $V_x = 100$

RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

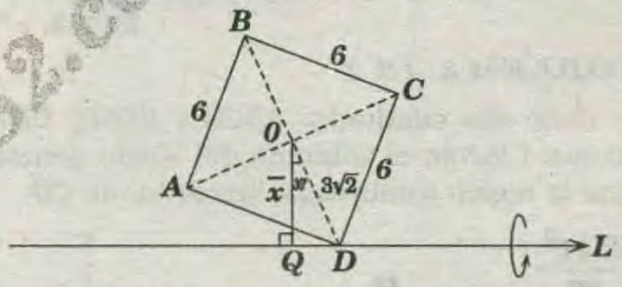
En el gráfico , halle el área de la superficie generada por el cuadrado $ABCD$ de $6cm$, de lado , cuando gira alrededor de la recta L (en cm^2).



A) $72\pi\sqrt{6}$ B) 216π C) 108π

D) 270π E) 162π

RESOLUCIÓN :



* $\triangle OQD$ notable de $30°$ y $60°$:

Si $OD = 3\sqrt{2} \Rightarrow \bar{x} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

* El área de la superficie generada por el cuadrado $ABCD$, cuando gira alrededor de la recta L es :

$$S = 2\pi\bar{x} \times 4(6) \Rightarrow S = 2\pi\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)(24) \Rightarrow S = 72\pi\sqrt{6}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 15 :

Cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado. Halle el volumen generado por la región cuando gira alrededor del eje x.

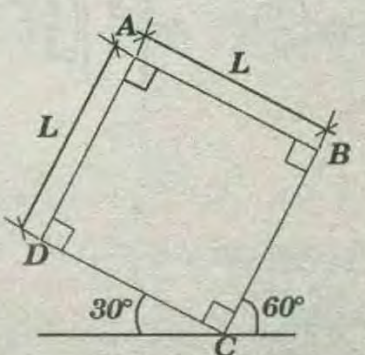
A) $V = \frac{\pi L^3}{8}(\sqrt{3}+1)$

B) $V = \frac{\pi L^3}{6}(\sqrt{3}+1)$

C) $V = \frac{\pi L^3}{5}(\sqrt{3}+1)$

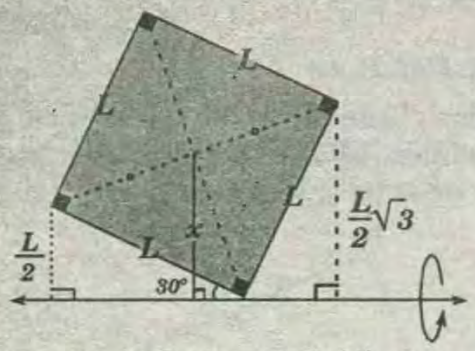
D) $V = \frac{\pi L^3}{4}(\sqrt{3}+1)$

E) $V = \frac{\pi L^3}{2}(\sqrt{3}+1)$



WWW.GRATIS2.COM

RESOLUCIÓN:



* Por el teorema de Pappus y Gulding:

$$V = 2\pi \bar{x} A$$

* Pero por base media:

$$\bar{x} = \frac{\frac{L}{2} + \frac{L\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{L(\sqrt{3}+1)}{4}$$

* Reemplazando:

$$V = 2\pi\left(\frac{L(\sqrt{3}+1)}{4}\right)L^2 = \frac{\pi L^3}{2}(\sqrt{3}+1)$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 16 :

Si se tiene dos cuadrados *ABCD* y *EFGH; CD= ℓ* unidades. Calcule el volumen del sólido generado al rotar la región sombreada, alrededor de *CD*.

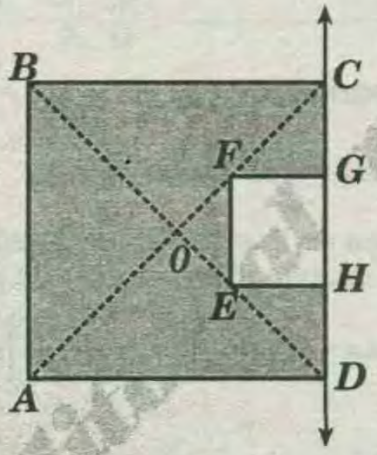
A) $\frac{25\pi\ell^3}{27}$

B) $\frac{26\pi\ell^3}{27}$

C) $\frac{25\pi\ell^3}{26}$

D) $\frac{24\pi\ell^3}{25}$

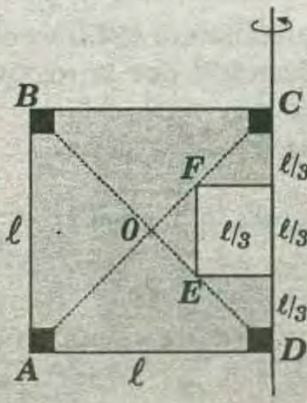
E) $\frac{24\pi\ell^3}{27}$



RESOLUCIÓN :

* Por Pappus:

$$V = 2\pi\left(\frac{\ell}{2}\right)\ell^2 - 2\pi\left(\frac{\frac{\ell}{3}}{2}\right)\left(\frac{\ell}{3}\right)^2$$



* Efectuando:

$$V = \frac{26\pi\ell^3}{27}$$

RPTA : "B"

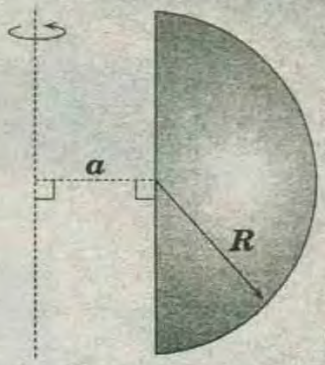
PROBLEMA 17 :

Al reactor de ensayo de fusión Tokamak es un gran toroide que produce un campo magnético par confirmar partícula cargadas. Se muestra la región que lo genera y el eje de giro , calcule el volumen.

A) $a(\pi R)^2 + \frac{4}{3}\pi R^3$

B) $a^2\pi R + \frac{4}{3}\pi R^3$

C) $a\pi R^2 + \frac{4}{3}\pi R^3$

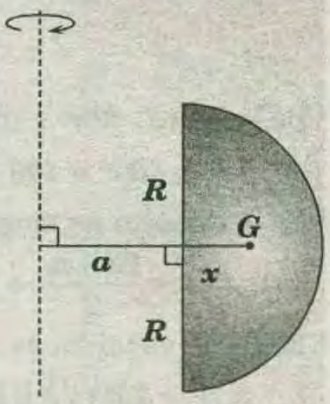


RESOLUCIÓN :

* El volumen generado es :

$$V = 2\pi(a + \bar{x})S$$

$$\Rightarrow V = 2\pi\left(a + \frac{4r}{3\pi}\right)\frac{\pi R^2}{2}$$



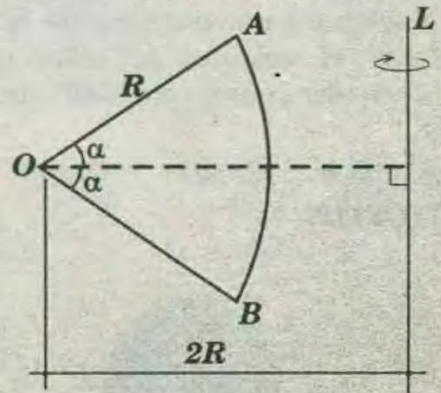
* De donde obtenemos:

$$V = a(\pi R)^2 + \frac{4}{3}\pi R^3$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 18 :

Calcule el área generada la línea *OAB* cuando se hace girar una vuelta alrededor de *L*.



A) $\pi R^2(8 - 2\cos\alpha - 4\operatorname{sen}\alpha)$ B) $\pi R^2(8 - 2\cos\alpha + 4\operatorname{sen}\alpha)$

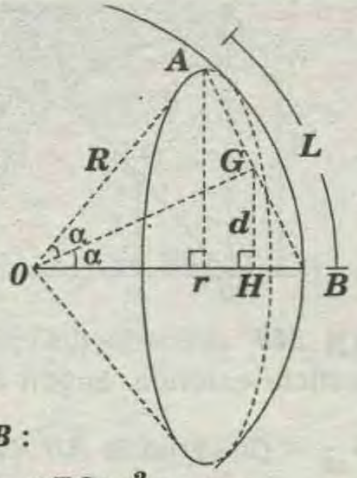
C) $\pi R^2(4 - \cos\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha)$ D) $\pi R^2(16 - \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$

RESOLUCIÓN :

* $\triangle OHG$: $x = \frac{d}{Sen\alpha}$ .....(I)

* Hacemos girar el arco $\overset{\frown}{AB}$ alrededor del radio $\overline{OB}$, obtenemos en casquete esférico de volumen:

$$V = 2\pi R\,(BT)$$



* En el $\triangle ATB$:

$$BT = 2RSen^2\alpha$$

$$\Rightarrow V = 2\pi R(2RSen^2\alpha) = 2\pi dL$$

* Pero:

$$L = \pi R\left(\frac{\alpha}{90}\right)$$

* Luego:

$$2R^2Sen^2\alpha = d\pi R\left(\frac{\alpha}{90}\right)$$

$$d = \frac{180RSen^2\alpha}{\pi\alpha} \text{ .....(II)}$$

* Reemplazando *(II)* en *(I)*:

$$x = \frac{\frac{180RSen^2\alpha}{\pi\alpha}}{Sen\alpha} \Rightarrow x = \frac{180RSen^2\alpha}{\pi\alpha}$$

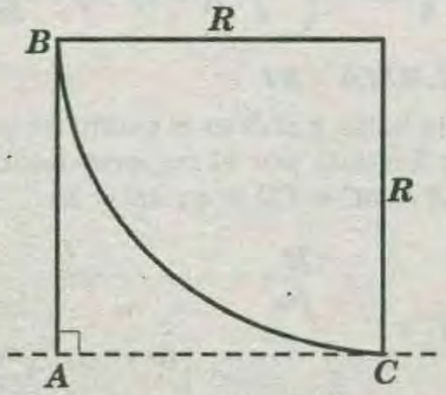
* Usando esta expresión en el problema obtenemos

$$S = \pi R^2(8 - 2Cos\alpha - 4Sen\alpha)$$

RPTA : "A"

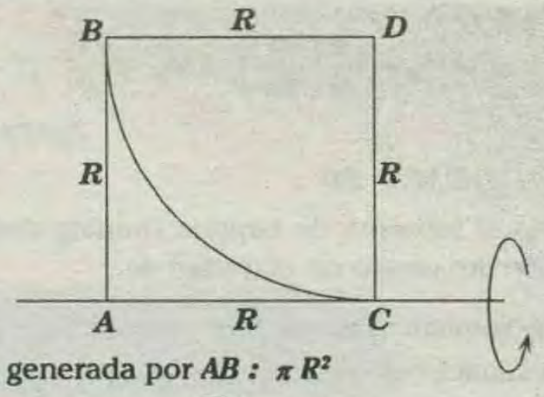
PROBLEMA 19 :

En la figura mostrada , calcule el área de la región que genera la línea *ABC* cuando se hace girar una vuelta alrededor de $\overline{AC}$.



A) $\pi R^2 + \pi^2R^2 - 2R^2$ B) πR^2 C) $\pi R^2 - R^2$
D) $\pi R^2 + R^2$ E) $R^2 + 2\pi R^2$

RESOLUCIÓN :



* Área generada por *AB* : πR^2

* Ahora por el arco $\widehat{BC}$: π^2R^2

$$S_{pedido} = \pi R^2 + \pi^2R^2 - 2R^2$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 20 :

En un triángulo *ABC* de área *S* se traza la mediana *AM* y la ceviana *BN* de manera que *NC = 2AN*, si $\overline{AM} \cap \overline{AB} = \{D\}$, calcule el volumen que genera la región *CABDM* al girar una vuelta completa alrededor de $\overline{CB}$, si el volumen que genera la región *ABC* al girar una vuelta completa alrededor de $\overline{BC}$ es *V*.

A) $\frac{7}{8}V$ B) $\frac{2}{5}V$ C) $\frac{3}{5}V$ D) $\frac{6}{7}V$ E) $\frac{7}{3}V$

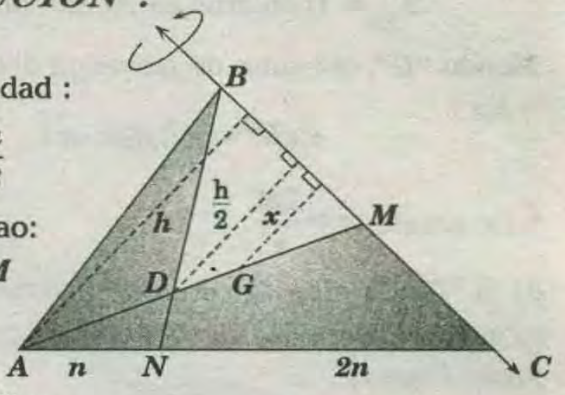
RESOLUCIÓN :

* Por propiedad :

$$x = \frac{h}{3}$$

* Por Menelao:

AD = DM



* Se pide hallar:

$$V_x = 2\pi xS - \theta 2\pi y\left(\frac{S}{4}\right)$$

* En el ΔDBN ; la distancia de *C.G.* al lado $\overline{BM}$ es $y = \frac{h}{6}$ y $S_{DBN} = \frac{S}{4}$.

* Luego:

$$V_x = \frac{2\pi}{3}hS - 2\pi\left(\frac{h}{6}\right)\left(\frac{S}{4}\right)$$

* Simplificado : $V_x = \frac{7\pi}{12}hS$ .....(I)

* Pero:

$$V = 2\pi\left(\frac{h}{3}\right)S \rightarrow hS = \frac{3V}{2\pi} \text{ .....(II)}$$

* *(II)* en *(I)* :

$$V_x = \frac{7\pi}{12}\left(\frac{3V}{2\pi}\right) \rightarrow V_x = \frac{7V}{8}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 20 :

Usando el teorema de Pappus Gulding deducir la posición del centro de gravedad de :

a) Una semicircunferencia de radio *R*.

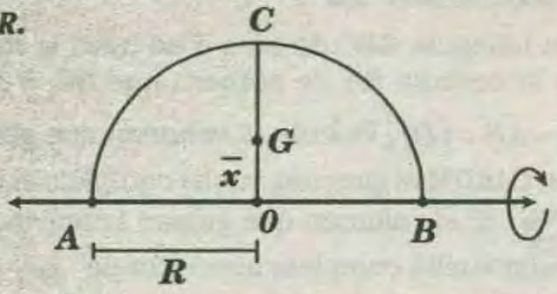
b) Un semicírculo de radio *R*.

c) Un cuarto de circunferencia de radio *R*.

d) Un cuarto de círculo de radio *R*.

RESOLUCIÓN :

A) Sea *ACB*, una semicircunferencia de centro *O* y radio *R*.



* Al girar $\overset{\frown}{ACB}$ 360° alrededor del eje $\overline{AB}$ se genera la superficie esférica, cuya área es:

$$S_{\overset{\frown}{AB}} = (\text{Longitud de } \overset{\frown}{ACB}) \cdot (2\pi.\bar{x})$$

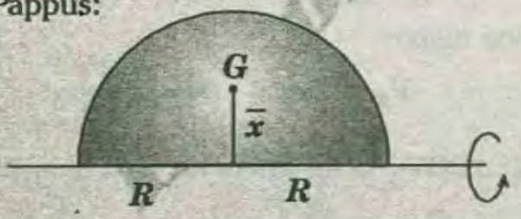
Siendo "*G*", el centro de gravedad del arco

* Así :

$$4\pi R^2 = (\pi R)(2\pi \cdot \bar{x})$$

* De donde: $\bar{x} = \frac{2R}{\pi}$

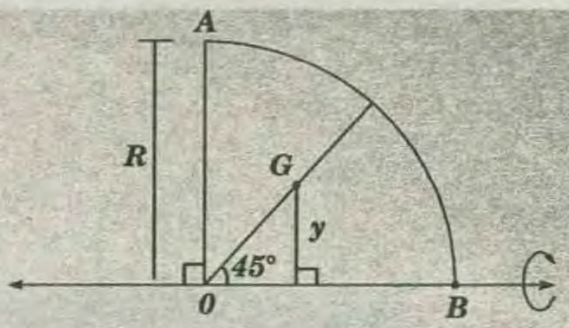
B) Si "*G*", es el centro de gravedad de semicírculo; su giro alrededor del eje $\overline{AB}$, determina una esfera según Pappus:



$$V_{generado} = \left(\begin{matrix}\text{Área del} \\ \text{semicírculo}\end{matrix}\right)(2\pi\bar{x})$$

$$\rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = \left(\frac{\pi R^2}{2}\right)(2\pi\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} = \frac{4R}{3\pi}$$

C) Sea $\overline{AB}$ un cuarto de circunferencia, de centro *O* y radio "*R*", "*G*", es el punto que indica la posición de su centro de gravedad.



* Al girar $\overline{AB}$, 360° alrededor del eje *OB*, se genera media superficie esférica. Según el teorema de Pappus:

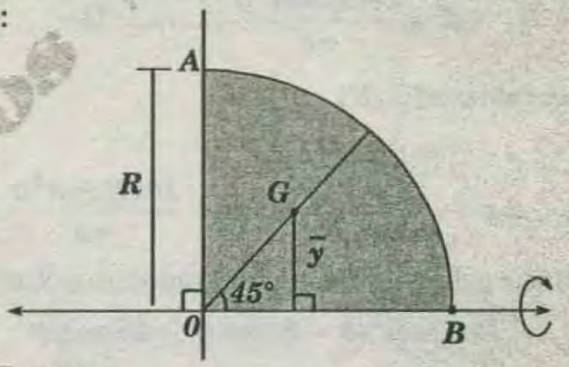
$$S_{\overset{\frown}{AB}} = (\text{longitud de } \overset{\frown}{AB})(2\pi\bar{y})$$

* Reemplazando sus equivalencias:

$$\frac{4\pi R^2}{2} = \left(\frac{2\pi R}{4}\right)\left(2\pi \cdot \bar{y}\right)$$

* De donde : $\bar{y} = \frac{2R}{\pi}$

D) Al girar el cuarto de círculo *AOB*, 360° alrededor de $\overline{OB}$, el volumen generado corresponde a media esfera:



* Por Pappus:

$$V_{generado} = \left(\begin{matrix}\textit{Área del cuarto} \\ \textit{de círculo}\end{matrix}\right)(2\pi\bar{y})$$

* Reemplazando sus equivalencias:

$$\frac{2}{3}\pi R^3 = \left(\frac{\pi R^2}{4}\right)\left(2\pi\bar{y}\right) \rightarrow \bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$$

PROBLEMA 21 :

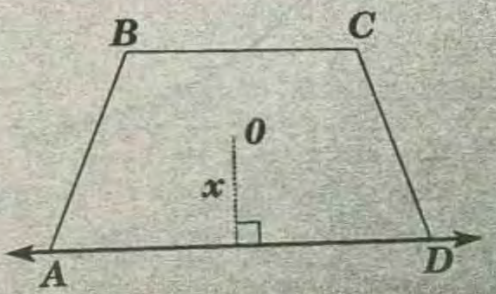
En la figura hallar *x* si *O* es el centro de gravedad de la región limitada por el trapecio isósceles de la figura. $AB = BC = CD = a$; $AD = 2a$

A) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

B) $\frac{2a\sqrt{3}}{9}$

C) $\frac{2a\sqrt{3}}{7}$

D) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$



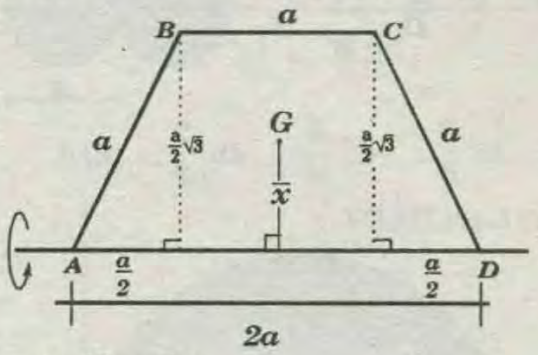
RESOLUCIÓN :

* Por Pappus :

$$V_{total} = 2\pi\bar{x}\left(\frac{2a+a}{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right).....(I)$$

* Ahora por suma de volúmenes:

$$V_{total} = 2\times\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2\left(\frac{a}{2}\right)+\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 a.....(I)$$



* Igualando *(I)* y *(II)*:

$$2\pi\bar{x}\left(\frac{3a}{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{a^3\pi}{4}+\frac{3a^3\pi}{4}$$

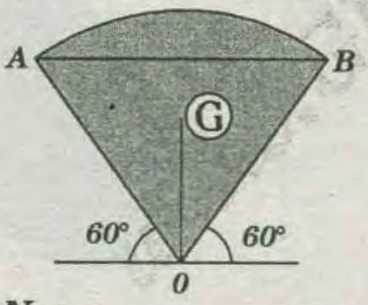
* Efectuando: $\bar{x}=\frac{2a\sqrt{3}}{9}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 22 :

Para el sector circular que se muestra. Si *G* es el centro de gravedad de dicho sector circular, entonces *OG* mide.

A) $\frac{R}{\pi}$ B) $\frac{2R}{\pi}$ C) $\frac{3R}{2\pi}$ D) $\frac{4R}{3\pi}$ E) $\frac{3R}{\pi}$

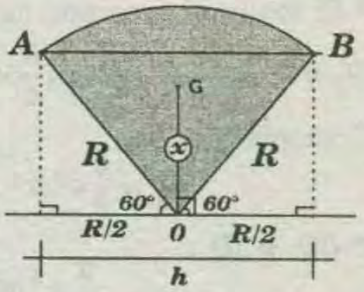


RESOLUCIÓN :

* Se planteará:

Volumen del sector esférico $=2\pi\bar{x}\left(\frac{\pi R^2}{6}\right)$

$\rightarrow \frac{2}{3}\pi R^2(R)=2\pi\bar{x}\left(\frac{\pi R^2}{6}\right)$



* Despejando : $\bar{x}=\frac{2R}{\pi}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 23 :

En la prolongación de $\overline{AO}$ en un cuadrante *AOB* se ubica el punto de *C* de manera que *AO=OC=4*, se traza el segmento $\overline{BC}$. ¿A qué distancia(en *m*)de $\overline{AC}$ se ubica el centro de gravedad de la región limitada por el arco *AB* y los segmentos *AC* y *BC*?.

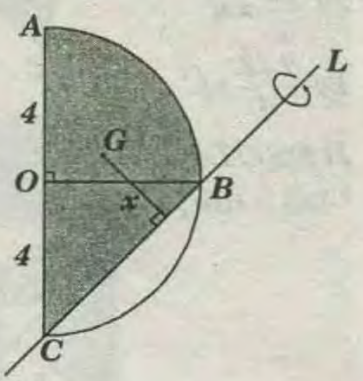
A) $\frac{2\pi}{\pi+1}$ B) $\frac{4}{\pi+1}$ C) $\frac{6}{\pi-1}$ D) $\frac{8}{\pi+2}$ E) $\frac{16}{\pi}$

RESOLUCIÓN :

* Por Pappus:

$V = 2\pi\bar{x}A$

$\rightarrow V = 2\pi\bar{x}(4\pi+8)$ ....(I)



* Pero por suma de volúmenes:

$$V=\frac{2}{3}\pi\times 4^3+\frac{1}{3}(16\pi)(4).....(II)$$

* igualando *(I)* y *(II)*

$$2\pi\bar{x}(4\pi+8)=\frac{2}{3}\pi\times 4^3+\frac{1}{3}(16\pi)(4)$$

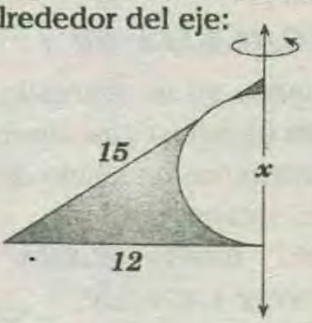
* Despejando: $\bar{x}=\frac{8}{\pi+2}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 24 :

Hallar el volumen del sólido generado por la rotación de la región sombreada alrededor del eje:

A) $\frac{1232\pi}{3}$ B) $\frac{1040\pi}{3}$ C) $\frac{1428\pi}{3}$ D) $\frac{1364\pi}{3}$

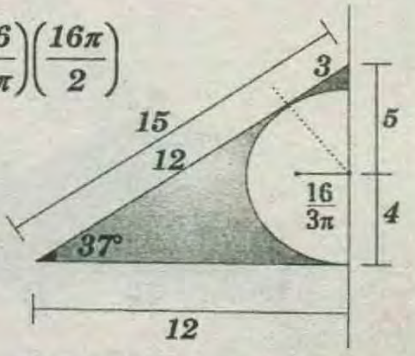


RESOLUCIÓN:

* Se desea:

$$V=\frac{\pi}{3}(12)^2(9)-2\pi\left(\frac{16}{3\pi}\right)\left(\frac{16\pi}{2}\right)$$

$\rightarrow V=\frac{1040\pi}{3}$



RPTA : "B"

PROBLEMA 25 :

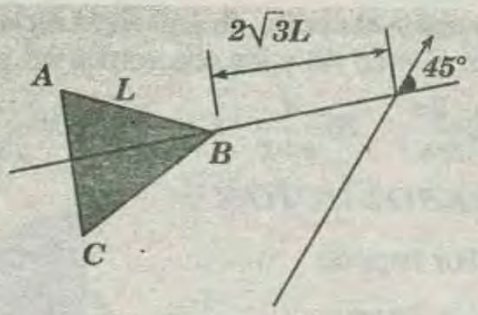
En la figura mostrada *ABC* es el equilátero de lado *L*, halle el volumen del sólido que se genera al rotar la región triangular alrededor de la región de la recta indicada.

A) $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi L^3$

B) $\frac{7\sqrt{2}}{4}\pi L^3$

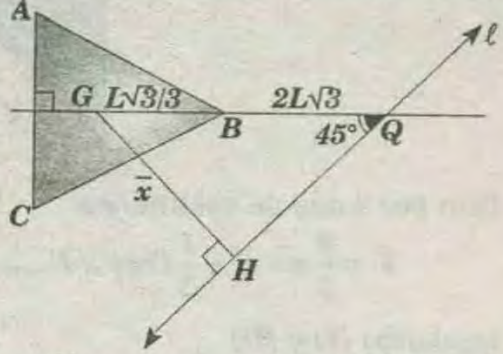
C) $\frac{\sqrt{2}}{7}\pi L^3$

D) $\frac{7\sqrt{2}}{3}\pi L^3$



RESOLUCIÓN :

* Del $\triangle GHQ$:



$$\bar{x}\sqrt{2} = \frac{L\sqrt{3}}{3} + 2L\sqrt{3} \rightarrow \bar{x} = \frac{7L\sqrt{6}}{6}$$

* Por Pappus:

$$V = 2\pi \bar{x} A = 2\pi\left(\frac{7L\sqrt{6}}{6}\right)\times\left(\frac{L^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\rightarrow V = \frac{7\sqrt{2}}{4}\pi L^3$$

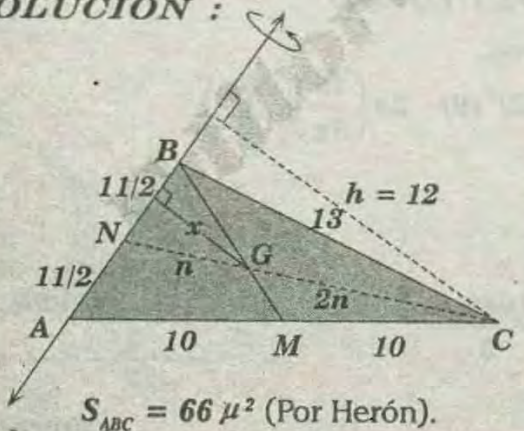
RPTA : "B"

PROBLEMA 26 :

Los lados de un triángulo miden ***11 ; 13*** y ***20.*** La región triangular gira alrededor de uno de sus lados obteniéndose un sólido de máximo volumen. Halle dicho volumen.

A)528π B)582π C)825π D)852π E)285π

RESOLUCIÓN :



$S_{ABC} = 66\,\mu^2$ (Por Herón).

* Por semejanza : $\frac{x}{2} = \frac{1}{3} \rightarrow x = 4$

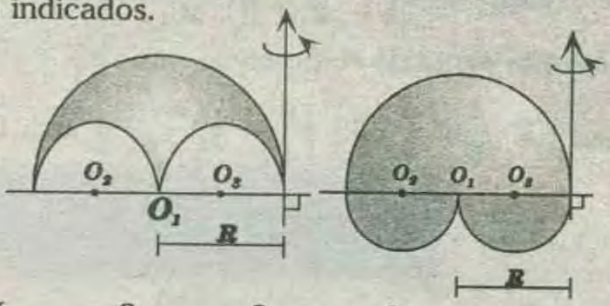
* El volumen pedido es :

$$V = 2\pi(4)(66) \rightarrow V = 528\pi$$

RPTA : "A"

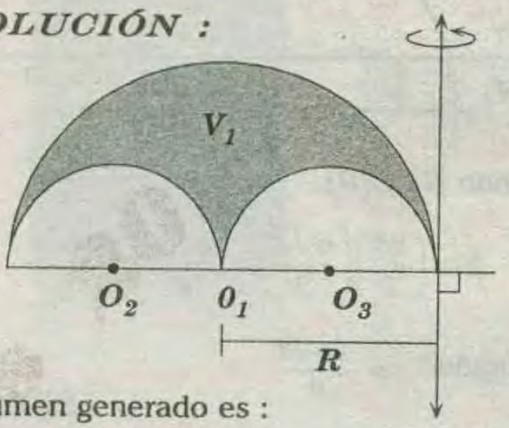
PROBLEMA 27 :

Halle la relación de los volúmenes generados al rotar las siguientes regiones sombreadas alrededor de los ejes indicados.



A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 3

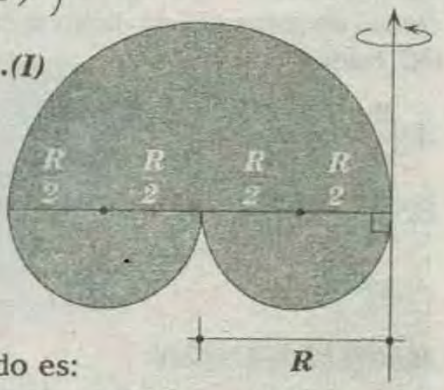
RESOLUCIÓN :



* El volumen generado es :

$$V_1 = 2\pi R\left(\frac{\pi R^2}{2} - \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\right)$$

$$\rightarrow V_1 = \frac{\pi^2 R^2}{2} \quad .....(I)$$



* El volumen generado es:

$$V_2 = 2\pi R \times \frac{\pi}{2} R^2 + 2\pi \times \frac{R}{2} \times \frac{\pi}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^2 + 2\pi \times \frac{3R}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{R^2}{4}$$

* Simplificando:

$$V_2 = \frac{3}{2}\pi^2 R^3 \quad .....(III)$$

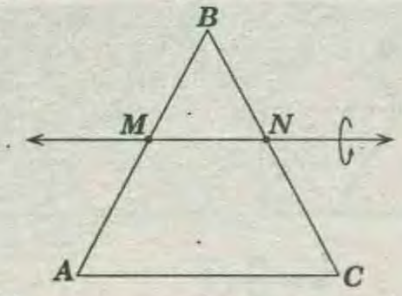
* ***(II) ÷ (I)*** :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{3}{2}\pi^2 R^3}{\frac{\pi^2}{2} R^3} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 3$$

RPTA : "E"

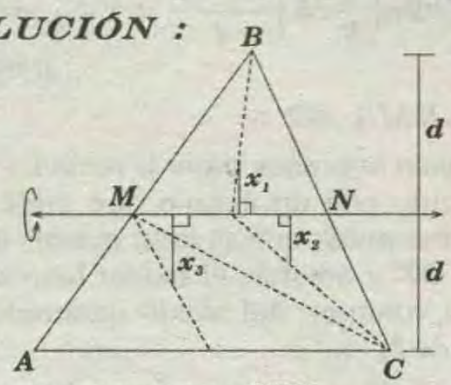
PROBLEMA 28 :

Halle la relación de volúmenes de los sólidos generados al girar las regiones ***MBN*** y ***AMNC***, alrededor del eje $\overline{MN}$, si ***AM = MB*** y ***BN = NC.***



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

RESOLUCIÓN :



Sean :

V_{MBN}, volumen que genera ***MBN***

V_{AMNC}, volumen que genera ***AMNC.***

$x_1; x_2; x_3$: distancias de los centros de gravedad de las regiones triangulares ***MBN, MNC*** y ***AMC***, al eje de giro. Por propiedad del baricentro para cada región, es fácil deducir , que :

$$x_1 = \frac{d}{3}; x_2 = \frac{d}{3}; x_3 = \frac{2}{3}d$$

Además la altura del triángulo ***ABC*** es el doble del triángulo ***AMC*** pero tiene la misma base , luego :

$$S_{AMC} = \frac{S_{ABC}}{2} \wedge S_{MBN} = S_{MNC} = \frac{S_{ABC}}{4}$$

* Aplicando el teroema de Pappus-Gulding :

$$V_{MBN} = S_{MBN} \times 2\pi x_1 \Rightarrow V_{MBN} = \frac{S_{ABC}}{4} \times 2\pi \times \frac{d}{3}$$

$$\Rightarrow V_{MBN} = \frac{\pi}{6} d S_{ABC} \quad \text{.....(I)}$$

$$V_{AMNC} = V_{AMC} + V_{MNC}$$

$$V_{AMNC} = \frac{S_{ABC}}{2} \times e\pi \times \frac{2}{3}d + \frac{S_{ABC}}{4} \times 2\pi \times \frac{d}{3}$$

$$\Rightarrow V_{AMNC} = \frac{5}{6}\pi d \times S_{ABC} \quad \text{.....(II)}$$

* Se Pide :

$$\frac{V_{MBN}}{V_{AMNC}}, \text{Relacionado } (I) \div (II) \Rightarrow \frac{V_{MBN}}{V_{AMNC}} = \frac{1}{5}$$

RPTA : "D"

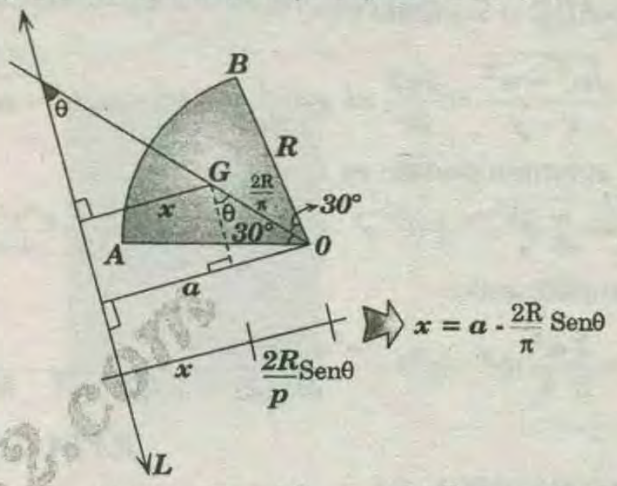
PROBLEMA 29 :

Un sector circular de radio ***R*** y ángulo central que mide ***60°***, se hace girar una vuelta alrededor de un eje coplanar distanciado de su vértice en un valor de ***«a»*** y cuyo ángulo formado por la prolongación del segmento que une el vértice y su centro de gravedad con el eje de giro mide θ , si $a > R$ calcule su volumen.

RESOLUCIÓN :

$$S_{ADB} = \frac{\pi}{6}R^2$$

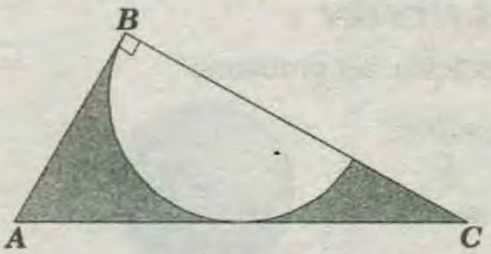
El volumen generado por el sector al girar una vuelta completa alrededor del eje coplanar ***L*** . es :



$$V = 2\pi\left(a - \frac{2R}{\pi}Sen\,\theta\right) \times \frac{\pi R^2}{6} \Rightarrow V = \frac{\pi R^2}{3}(a\pi - 2RSen\theta)$$

PROBLEMA 30 :

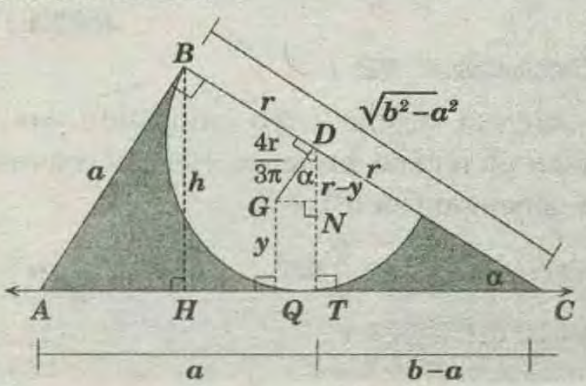
En la figura mostrada, calcule el volumen que genera la región sombreada al girar una vuelta alrededor de $\overline{AC}$. Datos : $AB = a$ $AC = b$



A) $\frac{4}{3}\frac{a^2}{b}(b^2 - a^2) - \frac{\pi^2 a^2 (b-a)^2}{(b+a)}\left[\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} - \frac{4}{3\pi b}\right]$

B) $\pi a^2 b$ C) $\pi b^2 a + \pi\sqrt{b^2 - a^2}\,a$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle ABC \sim \triangle DTC$:

$$\Rightarrow \frac{r}{a}=\frac{b-a}{\sqrt{b^2-a^2}} \rightarrow r=\frac{a\sqrt{b^2-a^2}}{a+b}$$

* Por otro lado :

$$h=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-a^2}$$

* Pero:

$$\bar{x}=\frac{h}{3} \rightarrow \bar{x}=\frac{a}{3b}\sqrt{b^2-a^2}$$

* $\triangle ABC \sim \triangle GND$:

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a^2-a^2}}{r-y}=\frac{3\pi b}{4r} \Rightarrow y=\frac{r}{3\pi b}(3\pi b-4\sqrt{b^2-a^2})$$

* El volumen pedido es :

$$V_x=2\pi\times\frac{a}{3b}\sqrt{b^2-a^2}\times\frac{a}{2}\sqrt{b^2-a^2}-2\pi\frac{r}{3\pi b}(3\pi b-4\sqrt{b^2-a^2})\frac{\pi}{2}\times\frac{a^2(b^2-a^2)}{(a+b)^2}$$

* Simplificando:

$$V_x=\frac{4}{3}\frac{a^2}{b}(b^2-a^2)-\frac{\pi^2a^2(b-a)^2}{(b+a)}\left[\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}-\frac{4}{3\pi b}\right]$$

RPTA : "A"

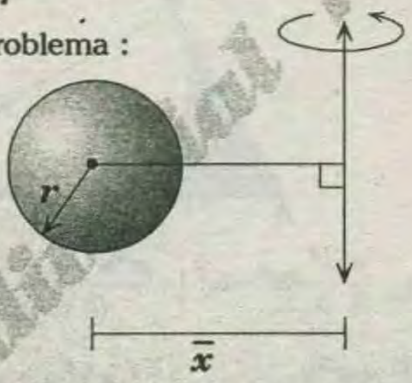
PROBLEMA 31 :

Si el volumen de un neumático de auto móvil mide Vu^3 y su área total Au^2 y el radio de la sección transversal es r, tal que $A\times r = 60u^3$. Calcule V (en u^3).

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

RESOLUCIÓN :

* Por condición del problema :



$$A = 2\pi\bar{x}(2\pi r)$$
$$\rightarrow \bar{x}=\frac{A}{4r\pi^2}$$

* El volumen es:

$$A = 2\pi\left(\frac{A}{4r\pi^2}\right)\pi r^2$$
$$\rightarrow V=\frac{Ar}{2} \rightarrow V=\frac{60}{2} \rightarrow V=30$$

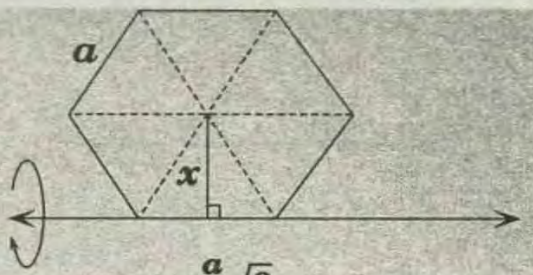
RPTA : "B"

PROBLEMA 32 :

Un hexágono regular cuyo lado mide «a», gira alrededor de uno de sus lados. Halle el volumen de sólido generado (en u^3).

A) $\frac{9}{2}\pi a^3$ B) $\frac{9}{4}\pi a^3$ C) $\frac{1}{2}\pi a^3$

RESOLUCIÓN :



$$x=\frac{a}{2}\sqrt{3}$$

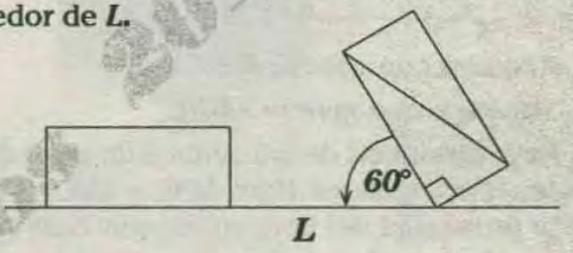
* El volumen es :

$$V=2\pi\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)\frac{6a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V=\frac{9}{2}\pi a^3$$

RPTA : "A"

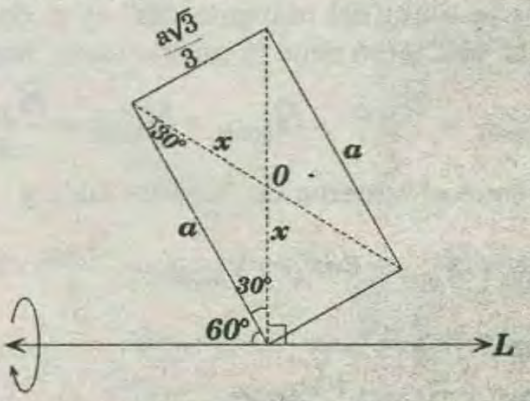
PROBLEMA 33 :

Un rectángulo descansa sobre la recta L, se inclina el rectángulo con un ángulo que mide 60. si la diagonal determina con el lado mayor un ángulo que mide $30°$ y además el mayor lado mide «a». Calcule el volumen del sólido generado al rotar alrededor de L.



A) $\frac{2\pi}{3}a^3$ B) $\frac{3\pi}{4}a^3$ C) $\frac{\pi}{3}a^3$

RESOLUCIÓN :



* De la figura:

$$x\sqrt{3}=a \rightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

* El volumen pedido es:

$$V=2\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)a \Rightarrow V=\frac{2\pi}{3}a^3$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 34 :

Usando el teorema de Pappus – Guldin, deducir a la posición del centro de gravedad, de:

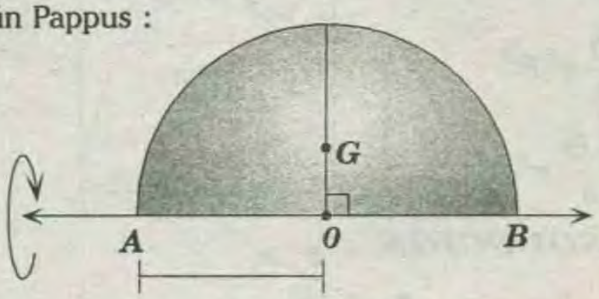
A) Un semicírculo de radio r.

B) Una semicircunferencia de radio r.
C) Un cuarto de circunferencia de radio r.
D) Un cuarto de círculo de radio r.

RESOLUCIÓN :

A) Si «*G*» , es centro de gravedad del semicírculo; su giro alrededor del eje $\overline{AB}$, determina una esfera

Según Pappus :

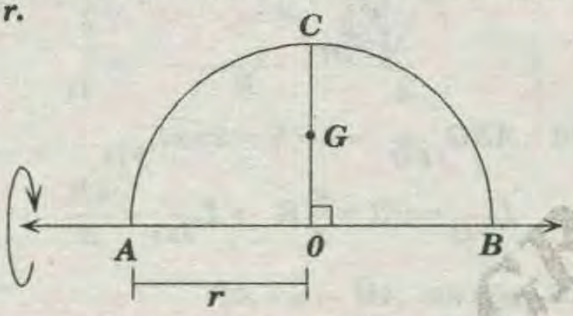


$V_{generado}$ = (área del semicírculo) $(2\pi \times OG)$

* Reemplazando sus equivalentes :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi r^2}{2}(2\pi \times OG) \rightarrow OG = \frac{4r}{3\pi}$$

B) Sea *ACB* , una semicircunferencia de centro *O* y radio *r*.



* Al girar $\overset{\frown}{ACB}$, *360º* alrededor del eje $\overleftrightarrow{AB}$, se genera la superficie esférica, cuya área es:

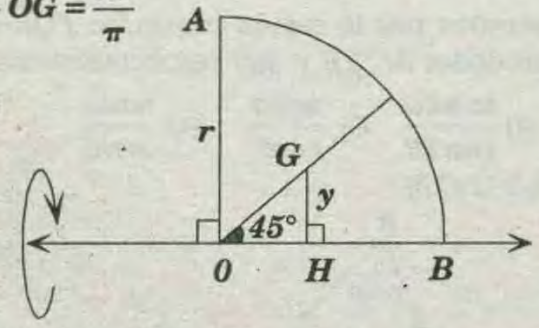
$$S_{\overset{\frown}{AB}} = (Long.\ de\ \overset{\frown}{ACB}) \times (2\pi \times OG)$$

Siendo *G* , el centro de gravedad del arco.

Así : $4\pi r^2 = (\pi r)(2\pi \times OG)$

$\rightarrow OG = \frac{2r}{\pi}$

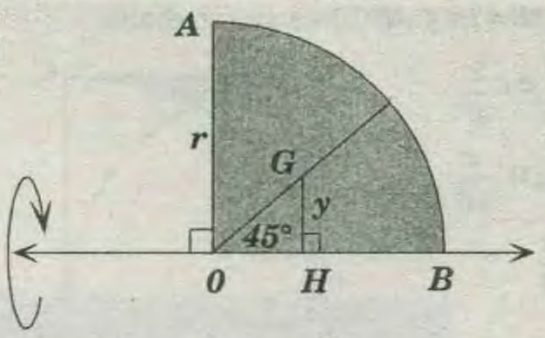
C)



$$\underbrace{S_{\overset{\frown}{AB}}}_{} = \underline{(Long.\ de\ \overset{\frown}{AB})(2\pi y)} \Rightarrow \frac{4\pi r^2}{2} = \left(\frac{2\pi r}{4}\right)\left(2\pi \times \frac{OG}{\sqrt{2}}\right)$$

* De donde : $OG = \left(\frac{2r}{\pi}\right)\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{2r}{\pi}$

D)



$$\underbrace{V_{generado}}_{} = \underline{(\text{área de } \frac{1}{4} \text{ círculo})(2\pi \times GH)}$$

$$\frac{3}{2}\pi r^2 = \left(\frac{\pi r^2}{4}\right)(2\pi \leq GH) \Rightarrow GH = \frac{4r}{3\pi}$$

PROBLEMA 35 :

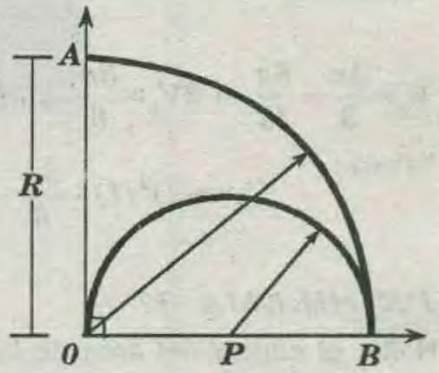
Halle las coordenadas del centro de gravedad del alambre mostrado.

A) $\left[\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{4}\right)R;\ \frac{3}{2}\times\frac{R}{\pi}\right]$

B) $\left(\frac{R}{\pi}, \frac{3}{2}\frac{R}{\pi}\right)$

C) $\left[\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{4}\right)R \times \frac{R}{\pi}\right]$

D) $\left[\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{4}\right)R\ \frac{2R}{\pi}\right]$



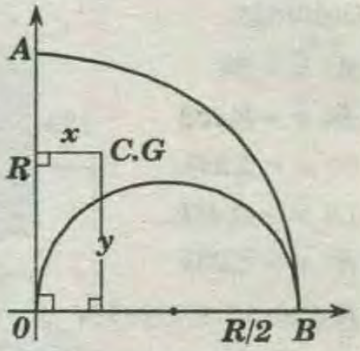
RESOLUCIÓN:

* Por Pappus:

$$2\pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi \bar{y}\left(\frac{\pi R}{2} + \frac{\pi R}{2}\right)$$

Despejando:

$$\bar{y} = \frac{3R}{2\pi}$$



* También:

$$2\pi R^2 + 2\pi\left(\frac{R}{2}\right)\left(\frac{\pi R}{2}\right) = 2\pi \bar{x}(\pi R)$$

* Despejando: $\bar{x} = R\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{4}\right)$

* Luego el centro de gravedad, será :

$$\left[R\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{4}\right); \frac{3R}{2\pi}\right]$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 36 :

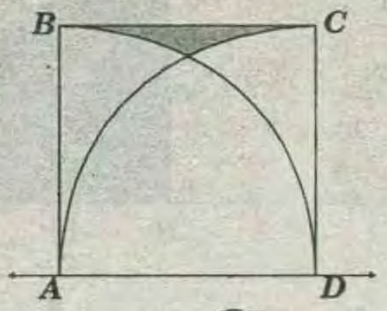
En la figura halle el volumen del sólido generado (en *u3*) por la región sombreada al girar alrededor

de AD. Si $AD=1u$ y $ABCD$ es un cuadrado.

A) $\frac{\pi}{10}$ B) $\frac{\pi}{8}$

C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{12}$

E) $\frac{\pi}{4}$

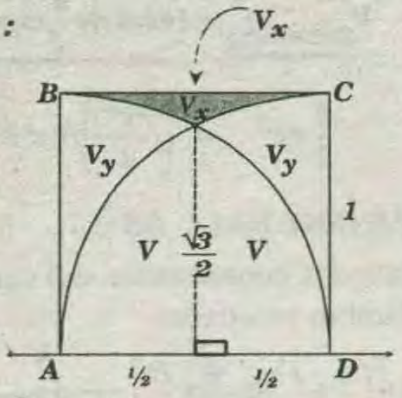


RESOLUCIÓN :

* De la figura

$$V=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(3x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow 2V=\frac{5\pi}{12}.....(I)$$



* Además:

$$V_y=\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}\rightarrow 2V_y=\frac{3\pi}{6}.....(II)$$

* Pero :

$$V_x=\pi(1)^2(1)-\frac{3\pi}{6}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 37 :

Hallar el centro del área de la sección transversal (perfil c) mostrada en la figura, aplicado Pappus Guldings.

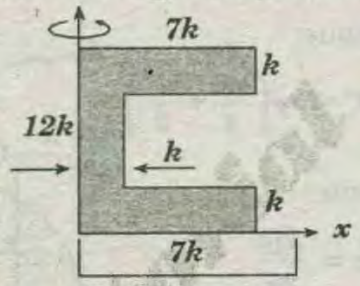
A) $\bar{x}=2k$

B) $\bar{x}=2,45k$

C) $\bar{x}=2,25k$-

D) $\bar{x}=3,45k$

E) $\bar{x}=3,25k$



RESOLUCIÓN :

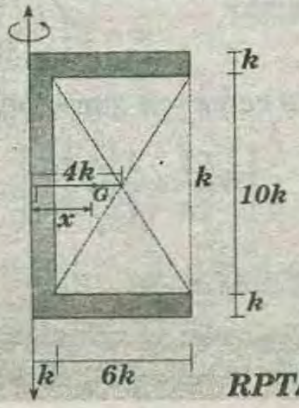
* De la figura, por equivalencia de volúmenes, se obtendrá:

$$\pi(7k)^2(12k)-2\pi(4k)(60k^2)=2\pi x(24k^2)$$

$$\rightarrow 4x=49k-40k$$

$$\rightarrow 4x=9k$$

$$\rightarrow x=2,25k$$



RPTA : "C"

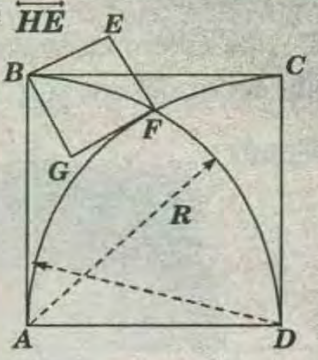
PROBLEMA 38 :

En el gráfico , $ABCD$ y $BEFG$ son cuadrados , $AB=R$. Calcule el área de la superficie generada por $\widehat{FD}$ al girar $360°$ respecto de $\overleftrightarrow{HE}$

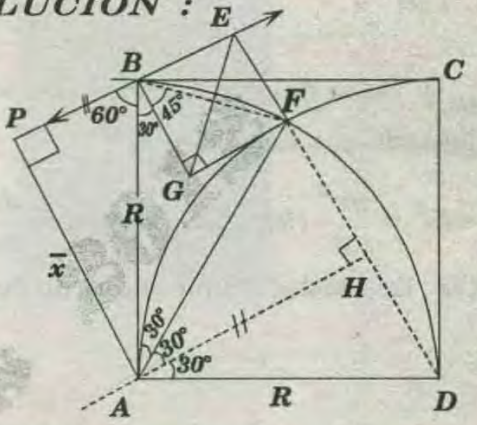
A) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi^2R^2$

B) $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi^2R^2$

C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi^2R^2$



RESOLUCIÓN :



* Piden : $ASG_{(\widehat{FD})}=?=S=2\pi\bar{x}L_{\widehat{FD}}$

$$L_{\widehat{FD}}=\theta R=\frac{\pi}{3}R\rightarrow L_{\widehat{FD}}=\frac{\pi R}{3}$$

* El $C.G.$ esta en $\overline{AH}\rightarrow\bar{x}=AP$

$$\rightarrow\bar{x}=\frac{R}{2}\sqrt{3}\Rightarrow S=2\pi\frac{R}{2}\sqrt{3}\frac{\pi R}{3}\Rightarrow S=\frac{\pi^2R^2\sqrt{3}}{3}$$

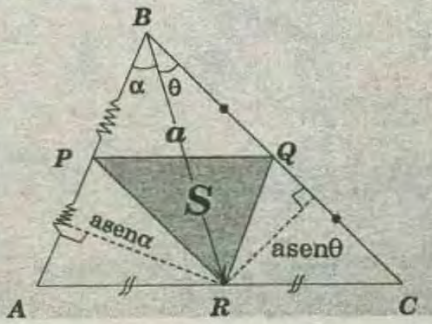
RPTA : "A"

PROBLEMA 39 :

En un triángulo ABC, se ubica su triángulo mediano PQR tal que $\overline{PR}\parallel\overline{BC}$ y $\overline{PQ}\parallel\overline{AC}$. Si $m\sphericalangle ABR=\alpha$ y $m\sphericalangle RBC=\theta$, calcule la razón de volúmenes de los sólidos generados por la región triangular PQR al girar $360°$ alrededor de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente .

A) $\frac{sen2\alpha}{sen2\theta}$ B) $\frac{tan2\alpha}{tan2\theta}$ C) $\frac{sen\alpha}{cos\theta}$ D) $\frac{sen\alpha}{sen\theta}$

RESOLUCIÓN:



* Piden :

$$\mathbb{R} = \frac{V_{SG_{(S)}}\ldots\ldots\overline{AB}}{VSG_{(S)}\ldots\ldots\overline{BC}} = ?$$

$$V_{SG_{(S)}\ldots\ldots\overline{AB}} = 2\pi\bar{x}S = 2\pi S\frac{(a\,Sen\alpha + a\,Sen\alpha)}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow V_{SG_{(S)}\ldots\ldots\overline{AB}} = \frac{4\pi}{3}a s Sen\alpha \\ \Rightarrow V_{SG_{(S)}\ldots\ldots\overline{BC}} = \frac{4\pi}{3}a s Sen\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{R} = \frac{Sen\alpha}{Sen\theta}$$

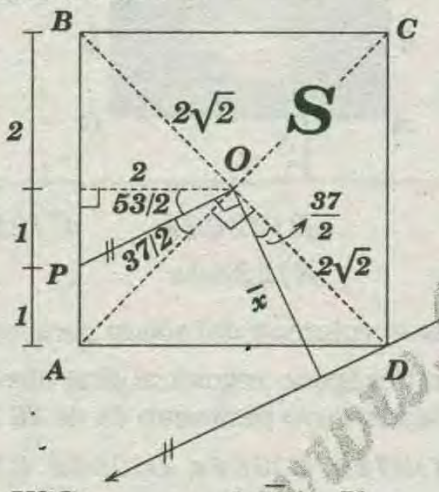
RPTA : "D"

PROBLEMA 40 :

Dado un cuadrado *ABCD* de centro *O*, en *AB* se ubica *P*, tal que *BP=3(AP)=3*. Por *D* se traza una recta paralela a $\overline{OP}$. Calcule el volumen del sólido generado por la región cuadrada *ABCD* al girar *360°* alrededor de dicha recta .

A) 8π *B)* 10π *C)* $\frac{192\sqrt{5}}{5}\pi$

RESOLUCIÓN :



* Piden : $VSG_{(S)}\ldots\ldots_{L} = 2\pi\bar{x}A = V_x$

$$A = S = 4^2 = 16$$

$$\bar{x} = 2\sqrt{2}Cos\frac{37}{2} \rightarrow \bar{x} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$V_x = 2\pi\frac{6\sqrt{5}}{5}16 \Rightarrow V_x = \frac{192\sqrt{5}\pi}{5}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 41 :

En el gráfico *T* es punto de tangencia, $CD=\sqrt{3}$ y $m\widehat{CD}=m\widehat{AR}=2m\widehat{AC}=2m\widehat{BD}$. Calcule el volumen de la región sombreada al girar *360°* alrededor de $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$.

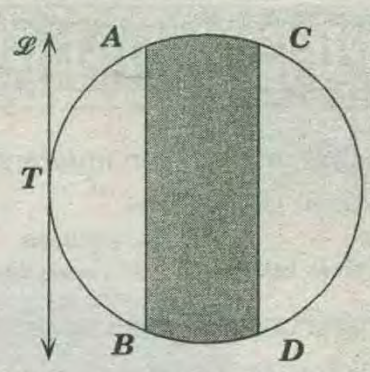
$(\overleftrightarrow{\mathcal{L}} \parallel \overline{AB})$

A) $2(\sqrt{3}-1)\pi$

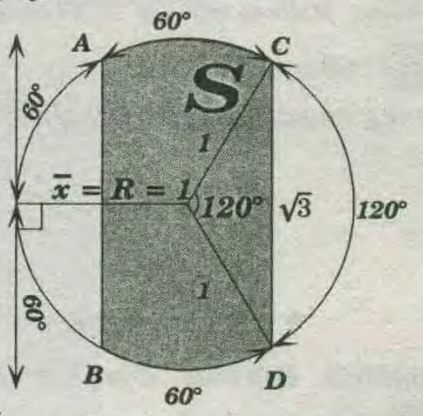
B) $6(\sqrt{3}-1)\pi$

C) $8(\sqrt{3}-1)\pi$

D) $\frac{\pi}{3}(3\sqrt{3}+2\pi)$



RESOLUCIÓN :



* Piden :

$$V_{SG_{(S)}} = 2\pi\bar{x}(S)$$

$$CD = L_3 = R\sqrt{3} = \sqrt{3} \rightarrow R = 1$$

$$S = \pi 1^2 - 2\left(\frac{\pi 1^2 120}{360} - \frac{1^2}{2}Sen120°\right) \Rightarrow S = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6}$$

$$V_{SG_{(S)}} = 2\pi 1\frac{(2\pi + 3\sqrt{3})}{6} \Rightarrow V_{SG_{(S)}} = \frac{\pi}{3}(3\sqrt{3} + 2\pi)$$

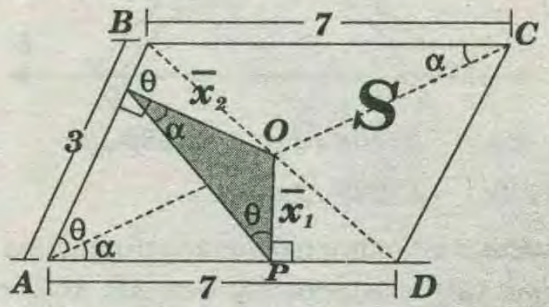
RPTA : "D"

PROBLEMA 42 :

En un romboide, cuyos lados están en la razón de 3 a 7, calcule la razón de volúmenes de los sólidos que se obtienen al girar la región romboidal en torno a sus lados.

A) 2/7 *B)* 3/7 *C)* 4/7 *D)* 6/7 *E)* 1

RESOLUCIÓN :



* Piden:

$$\mathbb{R} = \frac{V_{SG(\overline{AD})}}{V_{SG(\overline{AB})}} \Rightarrow \mathbb{R} = \frac{2\pi\bar{x}_1 S}{2\pi\bar{x}_2 S} = \frac{x_1}{x_2}$$

* Por ΔSN :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{7} \Rightarrow \mathbb{R} = \frac{3}{7}$$

RPTA : "B"

GRATIS.com

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

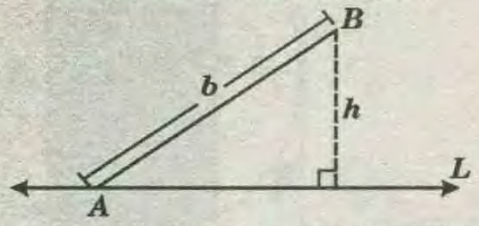
01 Al girar una semicircunferencia alrededor de su diámetro, se genera una:

A)Esfera B)Zona esférica C)Cuña esférica D)Superficie esférica E)Todas las anteriores

02 Al girar una región rectangular alrededor de uno de sus lados, se genera un:

A)Cono B)Huso esférico C)Prisma D)Cilindro E)Cubo

03 Hallar el área de la superficie generada al girar el segmento *AB* alrededor de la recta *L*.



A)πbh/3 B)2πbh C)πbh/2 D)πbh E)3πbh

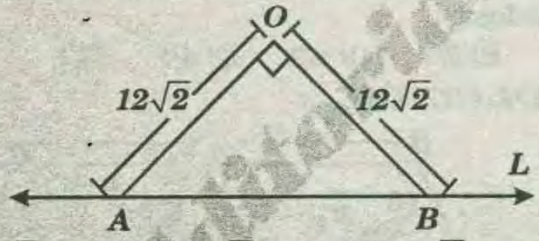
04 Calcular el volumen del sólido generado al girar una región triangular rectangular alrededor de su cateto mayor, cuyos catetos miden *6* y *8* unidades.

A)108π B)96π C)90π D)86π E)128π

05 Calcular el volumen del sólido generado al girar una región cuadrangular regular alrededor de uno de sus lados, cuyo perímetro es de *24* unidades.

A)108π B)136π C)144π D)180π E)216π

06 Calcular el área de la superficie generada al girar el ángulo recto *AOB* alrededor de la recta *L*.



A)144√2π B)168√2π C)180√2π
D)216√2π E)288√2π

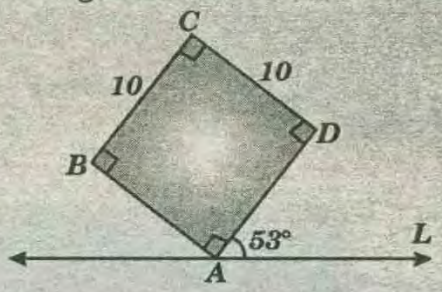
07 Calcular el volumen generado al girar una región triangular *ABC* alrededor del lado *AB*, si se conoce que la altura *CH* mide *18* unidades y *AB = 10*.

A)1260π B)1080π C)1020π D)960π E)900π

08 Calcular el volumen del sólido generado al girar una región rectangular *ABCD* alrededor de su lado *AD*, si se conoce que: *AB = 4* y *BC = 10*

A)120π B)132π C)114π D)160π E)172π

09 Calcular el volumen del sólido generado por la región *ABCD* al girar alrededor de la recta *L*.

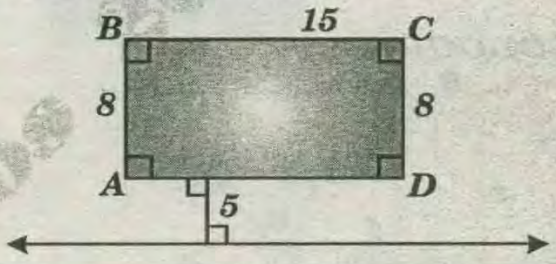


A)1600π B)1500π C)1400π D)1300π E)1200π

10 Calcular el área de la superficie generada por un triángulo equilátero al girar alrededor de uno de sus lados, cuyo perímetro es de *36* unidades.

A)288√3π B)300√3π C)144√3π
D)216√3π E)252√3π

11 Calcular el volumen del sólido generado por la región *ABCD* al girar alrededor de la recta *L*

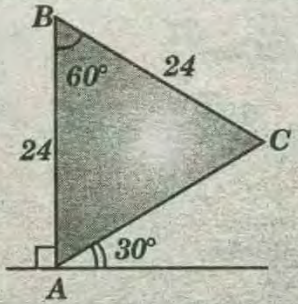


A)2160π B)2200π C)2240π
D)2360π E)2280π

12 Calcular el volumen del sólido generado por la región de un hexágono regular al girar alrededor de uno de sus lados, cuyo perímetro es de *36* unidades

A)960π B)972π C)984π D)996π E)1260π

13 Calcular el volumen del sólido generado por la región *ABC* al girar alrededor de la recta *L*.



A)864π B)600√3π C)960π D)720√3π E)672π

14 Los puntos *A(4; 18)* y *B(12; 3)* son los extremos del segmento *AB*. Calcular el área de la superficie generada por el segmento *AB* al girar alrededor del eje de abscisas.

A)272π B)296π C)333π D)357π E)362π

15 Calcular la distancia del centro de gravedad de un semicírculo a su diámetro, cuyo radio mide **6** unidades.

A) $\frac{\pi}{4}$ **B)** $\frac{8}{\pi}$ **C)** $\frac{\pi}{3}$ **D)** $\frac{6}{\pi}$ **E)** $\frac{\pi}{2}$

16 Calcular el volumen del sólido generado por la región de un rombo al girar alrededor de uno de sus lados, cuyo perímetro es de **48** unidades y uno de sus ángulos internos mide **60°**.

A) 1200π **B)** 1224π **C)** 1248π **D)** 1272π **E)** 1296π

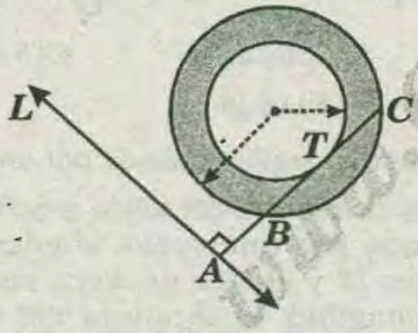
17 Calcular el área de la superficie generada por un círculo al girar alrededor de una recta exterior y coplanar, cuyo radio mide **6** unidades y la distancia de su centro a dicha recta mide **15** unidades.

A) $360\pi^2$ **B)** $330\pi^2$ **C)** 330π **D)** 320π **E)** 300π

18 Los puntos **A(3; 1); B(7; 9)** y **C(14; 8)** son los vértices del triángulo **ABC**. Calcular el volumen del sólido generado por la región triangular **ABC** al girar alrededor del eje de abscisas.

A) 260π **B)** 276π **C)** 292π **D)** 300π **E)** 324π

19 Calcular el volumen del sólido generado por la corona al girar alrededor de la recta **L**, si: **AC=5**, **BC=14** y **T** es punto de tangencia.



A) 1256π **B)** 1224π **C)** 1200π **D)** 1176π **E)** 1100π

20 Los lados de un triángulo miden **13; 14** y **15** unidades, las distancias de sus vértices hacia una recta exterior son **7; 17** y **9** unidades. Calcular el volumen del sólido generado por la región triangular al girar alrededor de dicha recta.

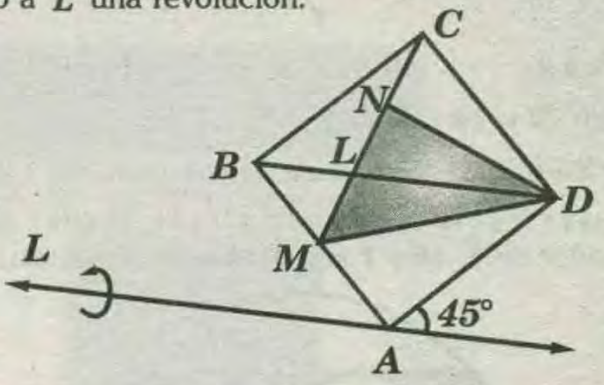
A) 1848π **B)** 1500π **C)** 1524π **D)** 1564π **E)** 1600π

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 En un triángulo **ABC, AB=AC**, la altura **AH** mide **6** y el triángulo gira una vuelta alrededor de $\overleftrightarrow{AC}$. Calcule el volumen del sólido generado, si el área de la superficie generada por $\overline{BC}$ es igual a **150**.

A) 200 B) 320 C) 250 D) 300 E) 350

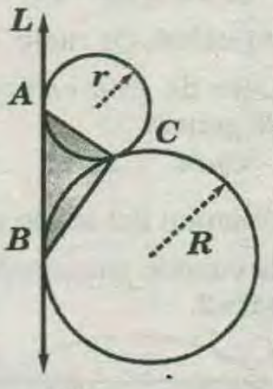
02 En la figura: **ABCD** es un cuadrado, **BM=MA**, **CN=LM** y **BC=6**. Calcule el volumen del sólido generado por la región sombreada al girar en torno a $\overleftrightarrow{L}$ una revolución.



A) $36\sqrt{3}\,\pi$ **B)** $48\sqrt{3}\,\pi$ **C)** $24\sqrt{3}\,\pi$

D) $72\sqrt{2}\,\pi$ **E)** $36\sqrt{2}\,\pi$

03 En la figura: **A, B** y **C** son puntos de tangencia. Calcule el volumen del sólido generado por la región triangular al girar en torno a $\overleftrightarrow{L}$ una revolución, si **r=1,5** y **R=3**.



A) $2\sqrt{2}\,\pi$ **B)** $\frac{16\pi}{3}$ **C)** $\frac{18\sqrt{2}\pi}{5}$

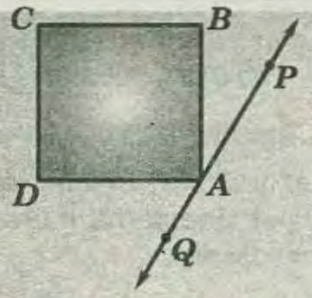
D) $8\sqrt{2}\pi$ **E)** $\frac{36\sqrt{2}\,\pi}{9}$

04 En un trapecio isósceles $(\overline{BC}//\overline{AD})$, en $\overline{CD}$ se ubica el punto medio **M**. Si la suma de las áreas de las regiones **BCM** y **AMD** es igual a **12 m²**, calcule el área de la superficie generada por $\overline{CD}$ al girar una vuelta en torno a $\overleftrightarrow{AB}$.

A) $12\pi\ m^2$ **B)** $48\pi\ m^2$ **C)** $48\pi\ m^2$
D) $24\pi\ m^2$ **E)** $24\ m^2$

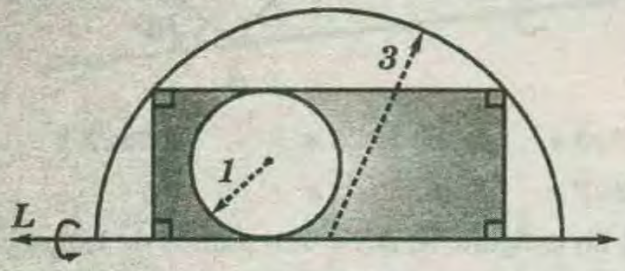
05 En el gráfico: **ABCD** es un cuadrado de lado **6**, $m\sphericalangle DAQ=60°$. Calcule el volumen del sólido generado por la región **ABCD** al girar **360°** alrededor de $\overleftrightarrow{AP}$.

WWW.GRATIS.COM



A) $72\sqrt{3}\pi$ B) 54π C) $36(\sqrt{3}+2)\pi$
D) $108(\sqrt{3}+1)\pi$ E) 72π

06 En el gráfico, calcule el volumen del sólido generado por la región sombreada al girar $360°$ alrededor de $\overleftrightarrow{L}$ (P y T son puntos de tangencia)

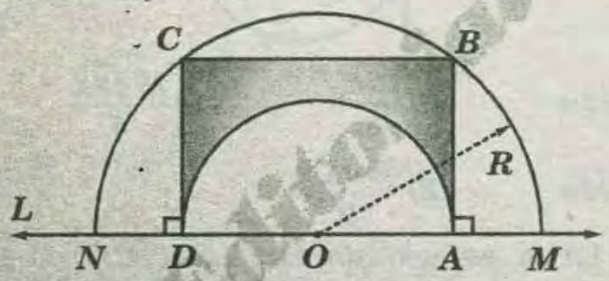


A) $2\pi(4\sqrt{5}-\pi)$ B) $3\pi(4\sqrt{5}-\pi)$ C) $4\pi(2\sqrt{5}-\pi)$
D) $4\pi(3\sqrt{5}-\pi)$ E) $2\pi(2\sqrt{5}-\pi)$

07 Se tiene una esfera de radio 12π. Calcule la distancia del centro de esta esfera al centro del semicírculo que la genera .

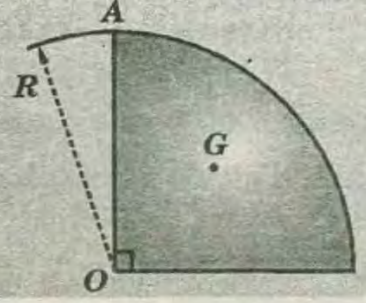
A) 12 B) 15 C) 16 D) 13 E) 14

08 Calcule el volumen del sólido generado por la región sombreada cuando gira alrededor de $\overleftrightarrow{L}$ una vuelta, si $R=5$ y $AM=2$.



A) 12π B) 8π C) 6π D) 9π E) 10π

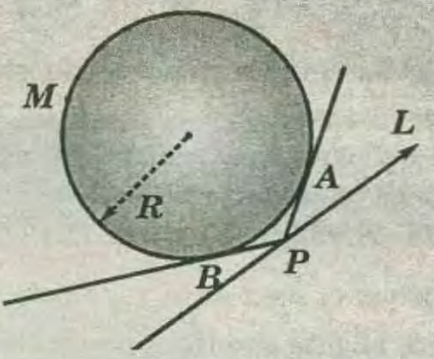
09 En el gráfico: G es el centro de gravedad de la región sombreada. Calcule: $(AG)^2-(OG)^2$; $(R=3\pi)$



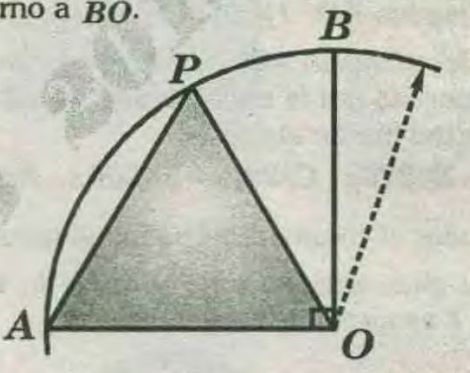
A) $3\pi(\pi-8)$
B) $3\pi(\pi+8)$
C) $3\pi(\pi-3)$
D) $3\pi(3\pi-8)$
E) $3\pi(\pi+7)$

10 En el gráfico, si $R=5$ y $m\widehat{AB}=2(m\sphericalangle APB)$, calcule el volumen generado por la región circular mostrada al girar $360°$ respecto de la recta L(A y B son puntos de tangencia)

A) $400\pi^2$
B) $200\pi^2$
C) $300\pi^2$
D) $800\pi^2$
E) $600\pi^2$



11 En el gráfico, $m\widehat{PB}=30°$, calcule el volumen del sólido generado por la región sombreada al girar $360°$ en torno a $\overleftrightarrow{BO}$.



A) $4\sqrt{3}\pi$ B) $6\sqrt{3}\pi$ C) $8\sqrt{3}\pi$
D) $12\sqrt{3}\pi$ E) $16\sqrt{3}\pi$

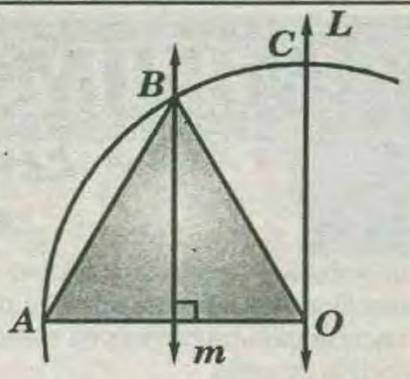
12 Se tiene una región limitada por un triángulo rectángulo. Si el volumen del sólido generado por la región cuando gira una vuelta alrededor de la hipotenusa es 12 y el área de dicha región es 6, calcula la longitud de la altura del triángulo correspondiente a la hipotenusa.

A) 3π B) $2/\pi$ C) π D) $3/\pi$ E) $5/\pi$

13 Tenemos un romboide $ABCD$ en donde los puntos medios M y N se ubican en BC y AD, respectivamente, $\overline{AM}\cap\overline{BN}=\{T\}$ y $\overline{CN}\cap\overline{MD}=\{R\}$. Calcule la razón de volúmenes de los sólidos generados por las regiones $TMRN$ y $ABCD$ al girar una vuelta alrededor de $\overline{MD}$.

A) 1/3 B) 1/5 C) 1/6 D) 1/2 E) 1/4

14 Calcule la razón de los volúmenes de los sólidos generados por la región cuadrantal y la región triangular ABO al girar una vuelta alrededor de $\overleftrightarrow{L}$, si $\overrightarrow{m}$ es mediatriz de $\overline{AD}$.

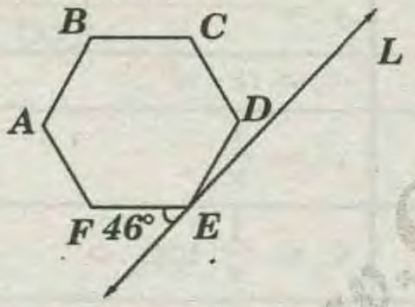


A) $\sqrt{3}/8$ B) $3\sqrt{3}/8$ C) $\sqrt{3}/3$
D) $\sqrt{3}/4$ E) $2\sqrt{3}/7$

15 En un triángulo ABC se encuentra inscrita una semicircunferencia cuyo diámetro está contenido en $\overline{AC}$. Calcule el volumen del sólido generado por el semicírculo al girar una vuelta en torno a $\overline{AC}$, siendo $AC=3(\sqrt{2}+2)$, $m\sphericalangle BAC=30°$ y $m\sphericalangle BCA=45°$.

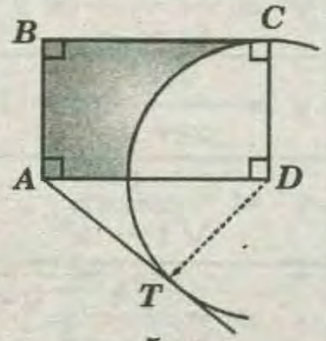
A) 36π B) 18π C) $27\pi/2$ D) $36\pi/5$ E) 72π

16 En el gráfico la longitud del lado del hexágono regular $ABCDEF$ es igual a 25. Calcule el volumen del sólido que genera la región hexagonal al girar $5°$ alrededor de la recta L.



A) $625\sqrt{3}\pi$ B) $125\sqrt{3}\pi$ C) $150\sqrt{3}\pi$
D) $225\sqrt{3}\pi$ E) $475\sqrt{3}\pi$

17 En el gráfico: T es punto de tangencia $CD=2$ y $AT=\sqrt{5}$ Determine la distancia del centro de gravedad de la región sombreada a $\overline{CD}$.

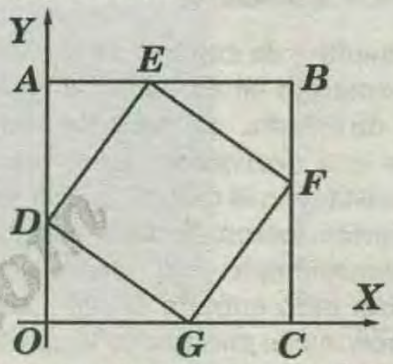


A) $\frac{13}{3(6-\pi)}$ B) $\frac{5}{3(6-\pi)}$ C) $\frac{19}{3(6-\pi)}$
D) $\frac{3}{6-\pi}$ E) $\frac{15}{6-\pi}$

18 El lado de una región triangular regular ABC mide 2. Calcule el volumen del sólido que genera dicha región al girar $360°$ alrededor de un eje coplanar que contiene al vértice A y forma un ángulo de $15°$ con $\overline{AC}$. El eje no interseca a la región triangular.

A) $2\sqrt{2}\pi$ B) 3π C) $3\sqrt{3}\pi$ D) $2\sqrt{3}\pi$ E) $3\sqrt{2}\pi$

19 En el gráfico: $OABC$ y $DEFG$ son cuadrados, $3(BF)=2(AD)$. Calcule la razón de los volúmenes generados por las regiones $OABC$ y $DEFG$ al girar $360°$ alrededor del eje de las abscisas y de las ordenadas, respectivamente.



A) 24/13 B) 25/13 C) 2
D) 27/13 E) 28/11

20 En una región triangular ABC se cumple que $BC=a$, $BA=c$ y $AC=b$. Si p es semiperímetro de la región triangular ABC, calcular el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del lado $\overline{BC}$.

A) $\frac{4\pi}{3a}p(p-a)(p-b)(p-c)$ B) $\frac{4\pi}{5}(p)(p+a)(p+b)(p+c)$
C) $\frac{3\pi}{5}p(p-a)(p-b)(p-c)$ D) $\frac{3\pi}{4}p(p+a)(p+b)(p+c)$
E) $\frac{3\pi}{4}abc.p$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)D	2)D	3)D	4)B	5)E	6)E	7)B	8)D	9)C	10)A
11)A	12)B	13)A	14)D	15)B	16)E	17)A	18)B	19)D	20)A

CLAVES DE LA PRIMERA SEGUNDA

1)D	2)B	3)A	4)C	5)D	6)A	7)B	8)B	9)D	10)A
11)E	12)D	13)E	14)B	15)D	16)A	17)C	18)A	19)B	20)A

www.GRATIS2.com

MAXIMOS Y MINIMOS

CAPITULO 42

OBJETIVO :

Determinar situaciones específicas como el máximo ó el mínimo , en problemas donde se desee optimizar.

INTRODUCCIÓN :

El deseo de medir y de cuantificar el cambio, la variación, condujo en el siglo ***XVII*** hasta la noción de derivada. El estudio de las operaciones con derivadas, junto con las integrales, constituyen el cálculo infinitesimal. Los introductores fueron Newton y Leibnitz, de forma independiente. Los conceptos son difíciles y hasta bien entrado el siglo ***XIX*** no se simplificaron. A ello contribuyó la aparición de una buena notación, que es la que usaremos.

Las aplicaciones prácticas de esta teoría no dejan de aparecer. Contextualizando los problemas de máximos y mínimos de tipo geométrico, como situaciones de cambio y circunscribiendo su análisis a la obtención de la función analítica a optimizar, se presenta un acercamiento covariacional para su consecución. Dicho acercamiento, configurado como una metodología, permite al estudiante, a través de dos etapas: ***percepción del cambio*** y ***variación***; en la primera, visualizar el cambio y mediante aproximaciones cualitativas, darle sentido y significado a un escenario de optimización ,y en el uso y paso entre distintos sistemas de representación, llegar a una relación funcional analítica entre dos de las variables de la situación.

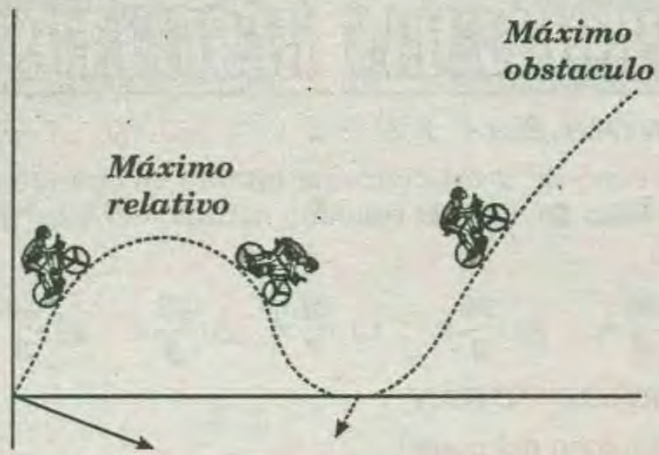
Es muy natural que los matemáticos se interesen en cuestiones de esta índole. En la vida cotidiana aparecen constantemente los problemas de máximos y mínimos, de "lo mejor" y lo "peor". Muchos problemas de importancia práctica se presentan de esta manera, por ejemplo: ¿Qué forma debe dársele a un bote para que ofrezca la menor resistencia posible al agua?

¿Qué recipiente cilíndrico hecho de una cantidad dada de material tiene un volumen máximo?

En este tema se trata de enfocar la teoría de máximos y mínimos a problemas básicos o sencillos de geometría analítica para después aplicarlos al entorno, encontrando problemas de realidades en los cuales se aplique el principio de estos.

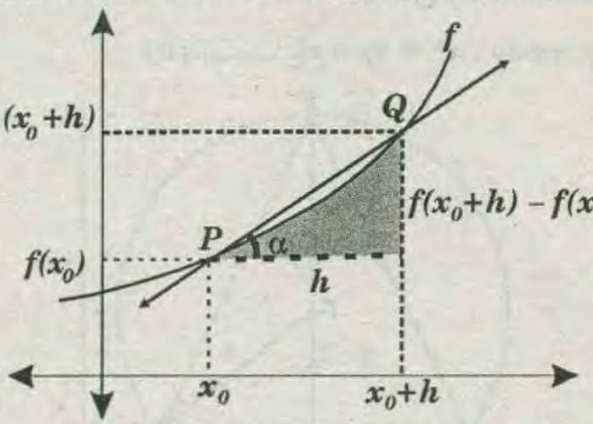
Se verán problemas como el área máxima de un triangulo dados sus lados y algunas aplicaciones, al igual que el teorema de Herón de la propiedad de extremos de los rayos del sol.

Funcion simple	Derivada
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = u(x) + v(x)$	$y' = u'(x) + v'(x)$
$y = k \cdot u(x)$	$y' = k \cdot u'(x)$
$y = u(x) \cdot v(x)$	$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \log_a e$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -[1 + \operatorname{cotg}^2 x]$
$y = \operatorname{arc\,sen} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \operatorname{arc\,cos} x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \operatorname{arc\,tg} x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$



DERIVADA DE f (f')

Consideremos la función $f(x)$ cuyos gráficos es:



* Del gráfico : $\tan\alpha = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

* Tomado límite cuando h tiene a cero :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f'(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$f'(x_0)$: Derivada de f(x) en "x_0".

* Entonces, $f'(x_0)$ representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función de $f(x)$ en el punto x_0.

OBSERVACIONES :

* Si: $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = anx^{n-1}$

* Si: $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$ (c: Constante)

EJEMPLOS :

* Si: $f(x) = x^2 \to f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$
* Si: $g(H) = 3H^6 \to g'(H) = 3(5)H^{6-1} = 15H^4$
* Si: $P(x) = 13 \to P'(x) = 0$
* Si: $f(x) = 3x^2 - 5x + 7 \to f'(x) = 6x - 5$
* Si: $h(y) = 1 - 2y + y^2 \to h'(y) = -2 + 2y$
* Si: $f(x) = 2x^3 \to f'(x) = 6x^2 \to f''(x) = 12x$ (Segunda derivada)

REGLA PARA HALLAR LOS MÁXIMOS y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

Como consecuencia de todo lo dicho se seguirá lo siguiente para determinar los máximos y mínimos de una función.

1°) Se halla la primera derivada de la función.

2°) Se iguala a cero esta derivada y se revuelve la ecuación que resulta.

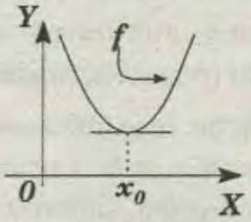
3°) Se halla la derivada segunda de la función.

4°) Se substituye en esta segunda derivada el valor de la variable x sucesivamente por cada una de las raíces o soluciones obtenidas al resolver la ecuación en la operación segunda. Si resulta para la derivada segunda un valor negativo , la función tiene un máximo ; y resulta un número positivo la función tiene un mínimo.

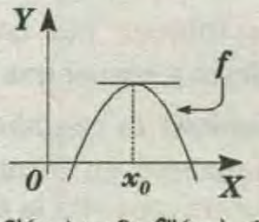
* Cuando resulta que la derivada se reduce a cero al llevar a cabo las substituciones indicadas, se tantea la variación de la segunda derivada en las proximidades del valor substituido y, entonces, si la derivada pasa de negativa a positiva habrá un mínimo, y si pasa de positiva a negativa, habrá un máximo.

MÁXIMOS y MÍNIMOS

Si tenemos $x_0 \in Df$, se cumple:



$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0$
Tenemos un mínimo en $x=x_0$



$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0$
Tenemos un máximo en $x=x_0$

$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) > 0$	*Existe un mínimo en x_0 que viene a ser: $f(x_0)$*
$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) < 0$	*Existe un máximo en x_0 que viene a ser: $f(x_0)$*

EJEMPLO:

Determinar los máximos y mínimos de la función:

$$y = 3x^3+4x^2 + 3$$

RESOLUCIÓN :

- *Primer paso :* $y' = 9x^2+8x$

- *Segundo paso :* $9x^2 + 8x = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2 = -8/9 \end{cases}$

• *Tercer Paso:* $y''=18x+8$

• *Cuarto paso: para* $x=0$ es $y''=8>0$

$\Rightarrow$ La función tiene un mínimo.

* Para $x=-8/9$; $y''=-8<0$ la función tiene un máximo.

* Así cuando $x=0$ la función tiene el valor mínimo $+3$ y el valor máximo lo adquiere cuando $x=-8/9$ en cuyo caso la función toma el valor $985/243$

NOTA :

En algunos problemas se puede observar el criterio de las derivadas, ya sea completando cuadrados ó haciendo razonamientos geométricos, para calcular máximos o mínimos.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS GEOMÉTRICOS

En la resolución de problemas en que se debe determinar el máximo o el mínimo de una cierta expresión, deben seguirse los siguientes pasos:

♠ Determinar la magnitud que debe hacerse máxima o mínima, y asignarle una letra.

♠ Hacer un dibujo cuando sea necesario.

♠ Asignar una letra a las cantidades mencionadas en el problema y escribir una ecuación en la que se establezca lo que se debe hacer máximo o mínimo.

♠ Establecer las condiciones auxiliares del problema y formar una ecuación (ecuación auxiliar)

♠ Expresar la cantidad que debe maximizarse o minimizarse en términos de una sola variable utilizando para ello la ecuación auxiliar. Determinar el dominio de esta función.

♠ Obtener la primera derivada de esta función para determinar los valores críticos.

♠ Comprobar, utilizando el criterio de la primera derivada o el de la segunda derivada, si los valores críticos son máximos o mínimos.

♠ Verificar que el valor obtenido cumple las condiciones dadas en el problema

♠ Responder a la pregunta establecida en el enunciado del problema.

♠ En algunos problemas hay que utilizar diversas figuras geométricas por lo que a continuación se especifican algunas de ellas junto con las respectivas fórmulas sobre áreas y volúmenes.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Un cono de revolución está inscrito en una esfera de radio $3u$. Halle el volumen máximo del cono (en u^3).

A) $\frac{25}{3}\pi$ B) $\frac{28}{3}\pi$ C) $\frac{31}{3}\pi$ D) $\frac{32}{3}\pi$ E) $\frac{34}{3}\pi$

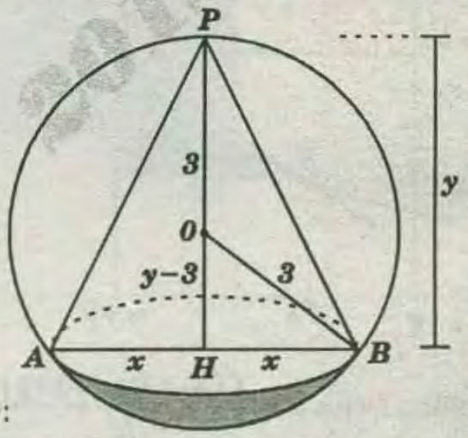
RESOLUCIÓN :

* Volumen del cono :

$$V=\frac{\pi}{3}x^2y \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* $\triangle OHB$: $3^2=(y-3)^2+x^2$

* Reduciendo : $x^2=6y-y^2$ ……(II)



* (II) en (I):

$$V=\frac{\pi}{3}y(6y-y^2)\Rightarrow V=2\pi y^2-\frac{\pi}{3}y^3$$

* El volumen del cilindro será máximo, cuando la derivada de V es cero , es decir :

$N'=4\pi y-\pi y^2=0\rightarrow y=4$

* En (II) : $x^2=24-16\rightarrow x^2=8$

* En (I) : $V=\frac{\pi}{3}(8)(4)\Rightarrow V=\frac{32}{3}\pi$

(Volumen máximo del cono)

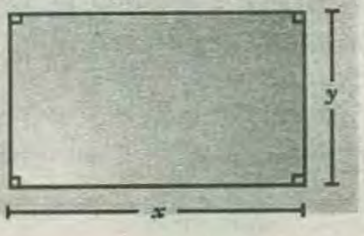
RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

Se tiene un rectángulo de $60cm^2$ de área. Si los lados son números enteros (en centímetros), el perímetro mínimo posible , en cm , es :

A)30 B)32 C)34 D)36 E)38

RESOLUCIÓN :



* Dato : $xy=60\ cm^2$

* El perímetro :

$(2P) = 2(x+y)$ .....(I)

* Pero :

$$y = \frac{60}{x} \Rightarrow (2P)(x) = 2\left(x + \frac{60}{x}\right)$$

como nos piden el mínimo , derivamos , así :

$(2P)'(x) = 2\left(1 - \frac{60}{x^2}\right)$; igualando a cero tenemos :

$$2\left(1 - \frac{60}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

* Pero del problema $x \in \mathbb{Z}^+ \wedge 6 \leq 7 \leq 2\sqrt{15} \leq 8$

* Elegimos **6** por ser divisor de **60**

$\Rightarrow$ Los lados miden **6** y **10 cm.**

$\rightarrow (2P)_{W\,min} = 2(6+10) = 32\ cm$

RPTA: "B"

PROBLEMA 3 :

El área del triángulo de área máxima que puede ser inscrito en una semicircunferencia de radio **"R"** es.

A) $\frac{1}{2}R^2$ **B)** R^2 **A)** $\frac{3}{2}R^2$ **D)** $2R^2$ **E)** R^2

RESOLUCIÓN :

* Las posibilidades , serán:

* Analizando, se deduce que el área del triángulo sombreado, será máxima cuando la altura coincida con el radio, es decir :

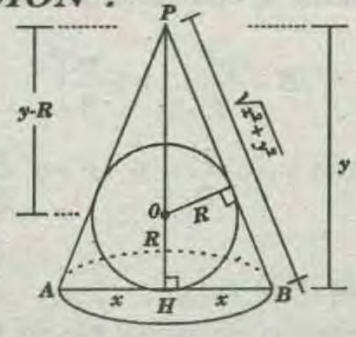
$$ÁREA_{máxima} = \frac{(2R)(R)}{2} = R^2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

En un cono de revolución , se inscribe una esfera de radio **«R»**. Halle el volumen mínimo del cono.

RESOLUCIÓN :



* Volumen del cono : $V = \frac{\pi}{3}x^2 y$ .....(I)

* Por semejanza: $\frac{R}{x} = \frac{y-R}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow x^2 = \frac{R^2 x}{y-2R}$ .....(II)

* (II) en (I) :

$$V = \frac{\pi}{3}y \times \frac{R^2 y}{y-2R} \Rightarrow V = \frac{\pi R^2}{3}\left(\frac{y^2}{y-2R}\right)$$

* Derivando : $V' = \frac{\pi^2}{3}\frac{(y^2 - 4Ry)}{(y-2R)^2}$

* Igualamos a cero : $y^2 - 4Ry = 0$

$\Rightarrow y = 4R$ .... *(un mínimo)*

* Reemplazamos en (II): $x = R\sqrt{2}$

* El volumen mínimo de cono es : $V_{mínimo} = \frac{8}{3}\pi R^3$

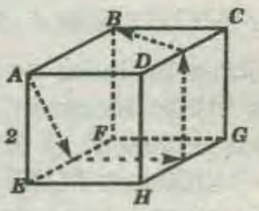
PROBLEMA 5 :

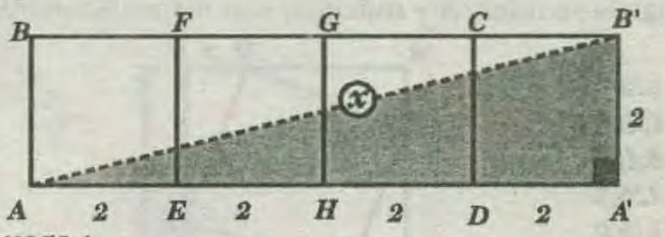
Se tiene el hexágono regular **ABCD-EFGH ; AB = 2m.** Halle la longitud del menor camino para ir de A hacia **B** pasando sólo por cuatro caras.

A) $2\sqrt{17}\mu$ **B)** $2\sqrt{13}\mu$ **C)** $2\sqrt{15}\mu$ **D)** $2\sqrt{14}\mu$ **E)** 10μ

RESOLUCIÓN :

* El menor recorrido, será cuando al desarrollar imaginariamente el cubo, la suma de los recorridos en cada cara, formen un segmento entre **"A"** y **"B"**.





* Luego :

$(x_{min})^2 = 2^2 + 8^2$

$\rightarrow x_{min} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

RPTA : "A"

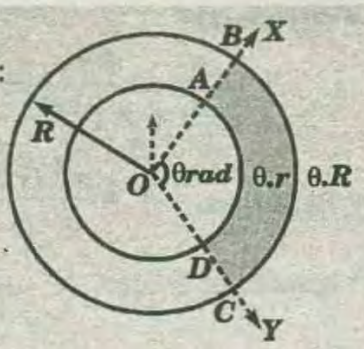
PROBLEMA 6 :

Dadas dos circunferencias concéntricas , de centro común **O** , se trazan los rayos $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ que cortan a las circunferencias menor y mayor , respectivamente , en **A , B** y **D , C** formándose un trapecio circular ; cuyo perímetro siempre se mantiene constante e igual a **2p**. Si la diferencia de los radios de ambas circunferencias coincide numéricamente con el valor del ángulo central formado por los rayos , determine dicho ángulo en radianes para que el área del trapecio sea máxima.

A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **B)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ **D)** $\frac{\sqrt{6}}{6}$ **E)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando el problema :



* Dato : $R - r = \theta \Rightarrow 2p = 2\theta + \theta R + \theta r$

* Sea $\mathbb{S}$ el área del trapecio circular *ABCD* :

$$\Rightarrow \mathbb{S} = \frac{(\theta r + \theta R)(R + r)}{2}$$

* Luego $\mathbb{S}$ en términos de θ y P es : $\mathbb{S} = (p - \theta)\theta$

* Completando cuadrados :

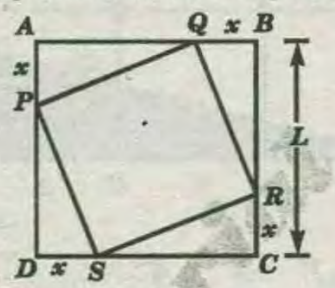
$$\mathbb{S} = \frac{p^2}{4} - \left(\theta - \frac{P}{2}\right)^2 \rightarrow \mathbb{S}_{máx} = \frac{P^2}{4} \Rightarrow \theta = \frac{P}{2}$$

RPTA : "E"

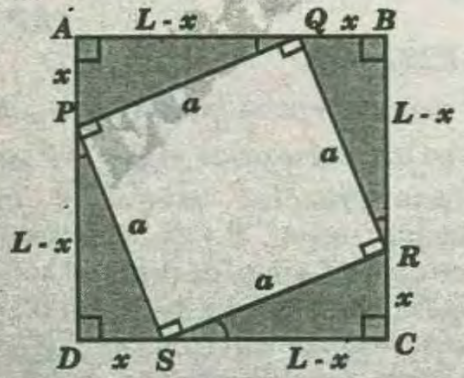
PROBLEMA 7 :

Sobre los lados de un cuadrado *ABCD*, de lado igual a *"L"* se localizan, a igual distancia de los vértices, los puntos *P, Q, R* y *S*, que al unirse determina el cuadrilátero *PQRS* tal como se muestra en la figura. Entonces, los valores de x que hacen que *PQRS* tenga área mínima y máxima, son respectivamente.

A) L/3, L/2
B) L/2,L4
C) 0,L/2
D) L/5,L
E) L/2,0



RESOLUCIÓN :



* Por congruencia de triángulos rectángulos:

$\Delta PAQ \cong \Delta QBR \cong \Delta RCS \cong \Delta SDP$

Por tener dos catetos congruentes.

Lo que implica que el cuadrilátero *PQRS* es un cuadrado. El área del cuadrado *PQRS* es: $S_{\square PQRS} = a^2$

* Pero:

$$a^2 = x^2 + (L - x)^2$$
$$S_{\square PQRS} = 2x^2 - 2xL + L^2$$

* Completando cuadrados :

$$S_{\square PQRS} = 2\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + \frac{L^2}{2}$$

* Además : $\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 \geq 0$

→ El área mínima será para:

$$x - \frac{L}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{L}{2}$$

y el área máxima será para: $x = 0$

RPTA : "E"

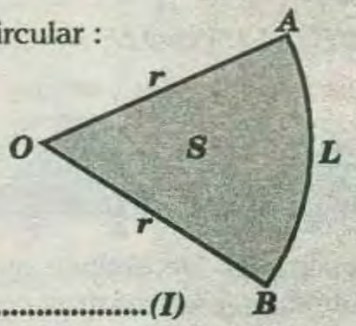
PROBLEMA 8 :

¿Para cuál valor del radio , se hace máximo el área de un sector circular de perímetro *2p* ?

A)P/5 B)P/4 C)P/3 D)P/2 E)P

RESOLUCIÓN :

* Graficando el sector circular :



* Se sabe que :

$$S = \frac{Lr}{2} \quad \text{.....(I)}$$

* Por condición :

$$2p = 2r + L$$
$$\Rightarrow L = 2p - 2r \text{.....(II)}$$

* Reemplazando *(II)* en *(I)*:

$$S = r(p - r)$$

* Para maximizar *S*, completamos cuadrados :

$$S = \frac{p^2}{4} - \left(r - \frac{p}{2}\right)^2$$

Si *S* es máximo : $r - \frac{p}{2} = 0 \rightarrow r = \frac{p}{2}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 9 :

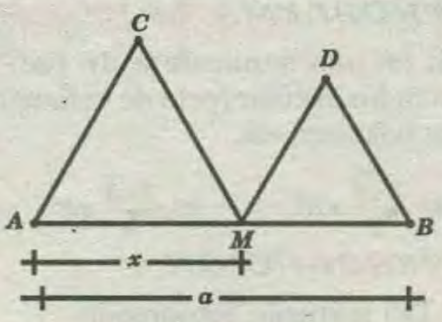
Dado el segmento de recta *AB* de longitud *"a"*, determinar sobre $\overline{AB}$ un punto *M* tal que la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre *MA* y *MB* sea mínima.

A) $x = \frac{a}{2}$

B) $x = \frac{\sqrt{a}}{2}$

C) $x = \sqrt{a}/3$

D) $x = a\sqrt{2}/2$



RESOLUCIÓN :

* De la figura, la suma de las áreas, será:

$$S=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\frac{(a-x)^2\sqrt{3}}{4}$$

* Efectuando:

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2+a^2-2ax+x^2)$$

$$\rightarrow S=\frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2-2ax+a^2)\ .....(I)$$

* Completando cuadrados:

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\ (2x^2-2ax\,a\,-a+a^2)$$

Trinomio cuadrado perfecto

$$\rightarrow S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left((2x-a)^2+a^2-a\right)$$

* Luego para que "S" sea mínima, se tendrá que $(2x-a)^2$ sea mínimo, es decir

$$2x-a=0 \rightarrow x=\frac{a}{2}$$

RPTA : "A"

Otro método : Derivando *(I)*, e igualando a cero:

$$S'=0 \rightarrow S=\frac{\sqrt{3}}{4}(4x-2a)=0 \rightarrow x=\frac{a}{2}$$

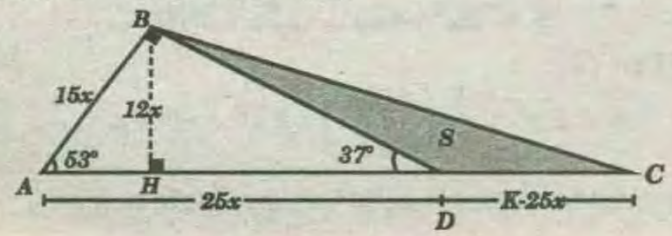
PROBLEMA 10 :

En un triángulo *ABC* se traza la ceviana *BD*, si $\overline{AB}\perp\overline{BD}$, $m\sphericalangle BAD = 53°$, $AC = k$ entonces el área máxima de la región triangular *DBC* es:

A) $\frac{k^2}{10}$ B) $\frac{k^2}{20}$ C) $\frac{k^2}{25}$ D) $\frac{3k^2}{50}$ E) $\frac{2k^2}{21}$

RESOLUCIÓN :

* Sea: $AD = 25x \rightarrow BH=12x$



Luego :

$$S_{DBC}=\frac{(k-25x)(12x)}{2}$$

$$\rightarrow S_{DBC}=6\,(xk\ -25x^2)\ .....(I)$$

* Derivando, e igualando a cero:

$$6(k-50x)=0 \rightarrow x=\frac{k}{50}$$

* Reemplazando en *(I)* :

$$S_{DBC}=6\left[\frac{k}{50}\times k-25\left(\frac{k}{50}\right)^2\right]$$

* Entonces:

$$S_{mínimo}=6\left(\frac{k^2}{100}\right)=\frac{3k^2}{50}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 11 :

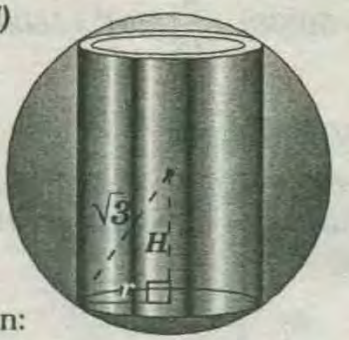
Halle el máximo valor del volumen del cilindro que se puede inscribir en una esfera de radio $\sqrt{3}m$.

A) $4\pi m^3$ B) 6π C) 8π D) 12π

RESOLUCIÓN :

* Por el teorema de Pitágoras :

$r^2 = 3 - H^2$ .....(I)



* Ahora del volumen:

$$V=\pi r^2(2H)$$

* Con *(I)*:

$$V=\pi(3-H^2)(2H)$$

$$\rightarrow V=2\pi(3H-H^3).....(II)$$

* Derivando respecto a "H", la expresión *(II)*:

$$V'=2\pi(3-3H^2)$$

* Igualando a cero: $2\pi(3-3H^2)=0 \rightarrow H=1$

* Reemplazando en *(II)*: $V_{max}=2\pi(3(1)-1^3)$

$$\rightarrow V_{max}=4\pi$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 12 :

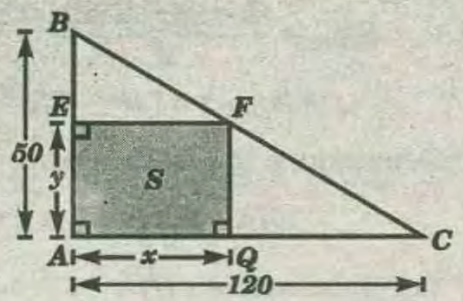
En un triángulo rectángulo, cuyos catetos tienen una longitud de *50 m* y *120 m*, se inscribe un rectángulo que tiene dos de sus lados contenidos por los catetos y uno de sus vértices está en la hipotenusa. Determine el área máxima de dicho rectángulo.

A) $1200m^2$ B) $1500m^2$ C) $1750m^2$ D) $2000m^2$ E) $2500m^2$

RESOLUCIÓN :

$S \rightarrow$ área AEFQ

$S = xy$ .....(I)



* BEF ~ BAC:

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} \rightarrow \frac{x}{120}=\frac{50-y}{50}$$

$$y=\frac{5}{12}(120-x).....(II)$$

* *(II)* en *(I)*:

$$S=x-\frac{5}{12}(120-x) \Rightarrow S=50x-\frac{5}{12}x^2.....(III)$$

* Derivando respecto a "x", e igualando a cero:

$$50-\frac{5}{12}-2x=0 \rightarrow x=60$$

* Reemplazando en *(III)*:

$$S_{max}=50(60)-\frac{5}{12}(60)^2=1500$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 13 :

En una esfera de radio R esta inscrito un cono recto de revolución; si el volumen del cono es máximo calcule su altura.

A) $\frac{2R}{5}$ *B)* $\frac{8R}{3}$ *C)* $\frac{4R}{3}$ *D)* $\frac{5R}{3}$ *E)* $\frac{7R}{3}$

RESOLUCIÓN :

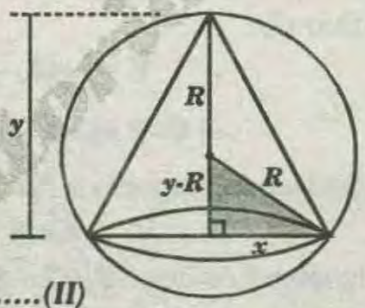
* Volumen del cono:

$$V=\frac{\pi}{3}x^2y.....(I)$$

* Pero:

$$x^2=R^2-(y-R)^2$$

$$\rightarrow x^2=2yR-y^2 .....(II)$$



* *(II)* en *(I)*:

$$V=\frac{\pi}{3}y(2yR-y^2) \Rightarrow V=\frac{2\pi}{3}Ry^2-\frac{\pi y^3}{3}$$

* Derivando respecto a "y", e igualando a cero:

$$\frac{2\pi}{3}R(2y)-\frac{\pi}{3}(3y^2)=0$$

$$\rightarrow 2y=\frac{4Ry}{3} \rightarrow y=\frac{4R}{3}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

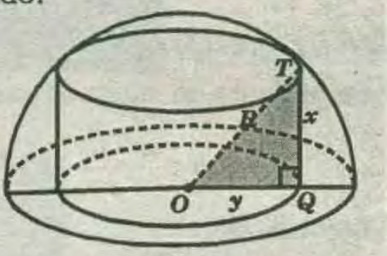
Si en una semiesfera de radio R se inscribe un cilindro circular recto de volumen máximo, entonces su volumen es:

A) $\frac{2\sqrt{3}}{5}\pi R^3$ *B)* $\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi R^3$ *C)* $\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi R^3$

RESOLUCIÓN :

* Del triángulo sombreado:

$$y^2=R^2-x^2.....(I)$$



* Volumen del cilindro:

$$V=\pi y^2x .....(II)$$

* *(II)* en *(I)*:

$$V=\pi(R^2-x^2)x \rightarrow V=(R^2x-x^3)$$

* Derivando respecto a "x", e igualando a cero:

$$\pi(R^2-3x^2)=0 \rightarrow x=\frac{R}{3}\sqrt{3}$$

* En *(I)*:

$$y^2=R^2-\frac{R^2}{3} \rightarrow y=\frac{R}{3}\sqrt{6}$$

* Luego el máximo del cilindro, será en *(II)*:

$$V_{max}=\left(\pi\frac{2}{3}R^2\right)\left(\frac{R}{3}\sqrt{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi R^3$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 15 :

Una caja cerrada con base cuadrada va a tener un volumen de $1000m^3$ si se quiere que el costo del material sea mínimo encontrar las dimensiones de la caja.

A) 20 y 10 *B) 15 y 5* *C) 10 y 10*

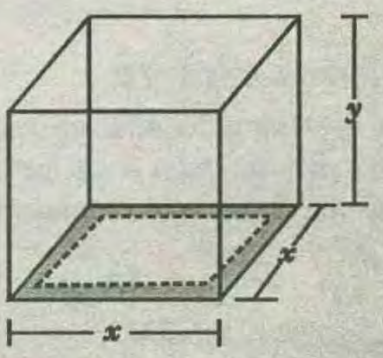
RESOLUCIÓN :

* Por dato:

Volumen = *1000*

$$\rightarrow x^2y=1000$$

$$\rightarrow y=\frac{1000}{x^2}.....(I)$$



* Luego el área total:

$$S=2x^2+4xy .....(II)$$

* *(I)* en *(II)*:

$$S=2x^2+4x\left(\frac{1000}{x^2}\right)=2x^2+4000x^{-1}$$

* Derivando respecto a "x", e igualando a cero:

$$4x + 4000(-1)x^{-1-1} = 0$$

$$\Rightarrow 4x - \frac{4000}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = 1000 \rightarrow x = 10 \wedge y = 10$$

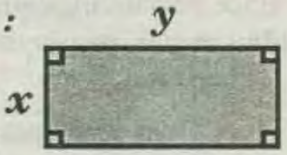
RPTA : "C"

PROBLEMA 16 :

Halle el menor perímetro posible para un rectángulo si se quiere que dicho rectángulo tenga área $100\ u^2$.

A)40 u B)25 u C)30 u D)35 u

RESOLUCIÓN :



Dato : $xy = 100\ u^2$

Piden el perímetro mínimo $= 2(x+y)_{mínimo}$

Se sabe que $MA \geq MG$

* Reemplazando :

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{100} \Rightarrow (x+y)_{min} = 20u$$

$\rightarrow$ perímetro mínimo $= 40u$

RPTA : "A"

PROBLEMA 17 :

Encontrar el volumen máximo del cilindro que puede ser inscrito en un cono de revolución con un radio "R" y una altura "H".

A) $\frac{4\pi R^2 H}{27}$ B) $\frac{R^2 H\pi}{5}$ C) $\frac{R^3\pi}{7}$ D) $\frac{R^2 H\pi}{24}$

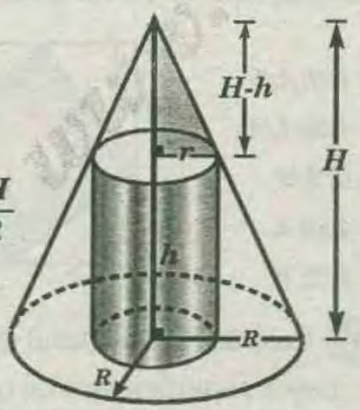
RESOLUCIÓN :

* Sabemos que:

$$V = \pi r^2 h \text{-.....(I)}$$

* Pero por semejanza:

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H} \rightarrow h = H - \frac{rH}{R}$$



* Reemplazando en (I):

$$V = \pi r^2 \left(H - \frac{rH}{R}\right)$$

$$\rightarrow V = \pi r^2 H - \frac{\pi r^3 H}{R}$$

* Derivando respecto a "r":

$$V' = \pi(2r)H - \pi\left(\frac{3r^2}{R}\right)H$$

* Igualando a cero:

$$2rH\pi - \frac{\pi 3r^2 H}{R} = 0 \Rightarrow r = \frac{2R}{3} \wedge h = \frac{H}{3}$$

* Reemplazando en (I):

$$V_{max} = \pi\left(\frac{2R}{3}\right)^2\left(\frac{H}{3}\right) = \frac{4\pi R^2 H}{27}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 18 :

En un cono de altura **16cm** y radio **9cm** se inscribe un cilindro de radio **r**. Determine el radio y la altura del cilindro de mayor volumen si sabemos que tiene radio entero.

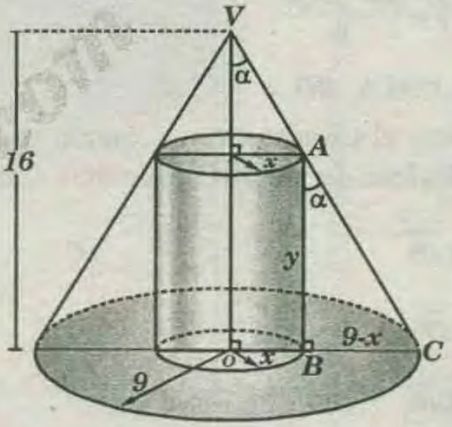
A) $4, \frac{64}{9}$ B) $5, \frac{80}{9}$ C) $6, \frac{16}{3}$ D) $7, \frac{32}{9}$ E) $8, \frac{16}{9}$

RESOLUCIÓN :

$$V = \pi x^2 y \text{ .....(I)}$$

* Por semejanza:

$$\frac{x}{9} = \frac{16-y}{16} \Rightarrow \frac{16x}{9} = 16 - y \Rightarrow y = 16 - \frac{16x}{9} \text{....(II)}$$



* Reemplazando en (I):

$$V = \pi x^2\left(16 - \frac{16x}{9}\right) \Rightarrow V = 16\pi x^2 - \frac{16}{9}\pi x^3$$

* Si el volumen es máximo la derivada se iguala a cero.

$$\frac{dv}{dx} = 32\pi x - \frac{16}{9}(3x^2)\pi \Rightarrow 0 = 32\pi x - \frac{16}{3}x^2\pi$$

$$\Rightarrow 32\pi x = \frac{16}{3}x^2\pi \Rightarrow x = 6$$

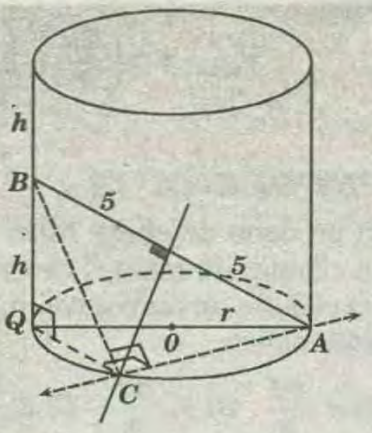
* Reemplazando en (II): $y = \frac{16}{3}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 19 :

En un cilindro de revolución se traza la recta **L** que intercepta al apunto medio **B** de una generatriz y a un punto **A** de la circunferencia de su base, de manera que **AB** sea máxima, la mediatriz de $\overline{AB}$ intercepta a la base en un punto **C** de manera que la $m \sphericalangle ACB = 90°$, si $AB = 10$. Halle el volumen máximo del cilindro.

RESOLUCIÓN :



$V = \pi h r^2$ .....(I)

* $\triangle BQA$:

$r^2 = \dfrac{100 - h^2}{4}$ .....(II)

* (II) en (I) :

$$V = 2\pi h\left[\frac{100-h^2}{4}\right] \Rightarrow V = 50\pi h - \frac{\pi}{2}h^3 \rightarrow V' = 0$$

$$\Rightarrow V' = 50\pi h - \frac{3\pi}{2}h^2 = 0 \rightarrow h = \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow r^2 = \frac{50}{3}$$

* Luego : $V = \dfrac{10^3\pi\sqrt{3}}{9}$

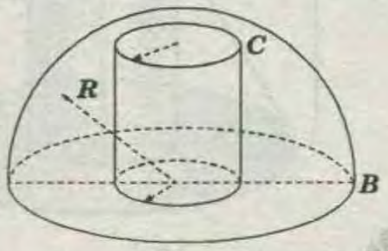
PROBLEMA 20 :

En el gráfico, el cilindro de revolución está inscrito en la semiesfera de volumen máximo. Calcule *BC*.

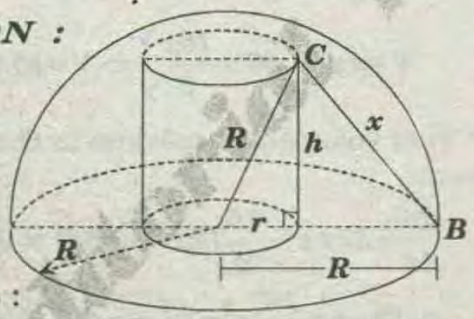
A) $R\sqrt{6-2\sqrt{6}}$

B) $R\sqrt{3-\sqrt{6}}$

C) $R\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{6}}{3}}$



RESOLUCIÓN :



Piden : $BC = ?$

Teoría de Euclides :

$$x^2 = R^2 + R^2 - 2R\times r \rightarrow x^2 = 2R^2 - 2Rr$$

$$V_{CIL} = \pi r^2 h.....(max) \;;\; r^2 = R^2 - h^2$$

$$V_{CIL} = \pi(R^2 - h^2)h = \pi\underbrace{(R^2h - h^3)}_{f(h)}$$

$$\frac{df(h)}{dh} = 0 = R^2 - 3h^2 \rightarrow h^2 = \frac{R^2}{3} \Rightarrow r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 = 2R^2 - 2R\frac{R\sqrt{6}}{3} \Rightarrow x = R\sqrt{\frac{6-2\sqrt{6}}{3}}$$

RPTA : "E"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Se tiene un rectángulo de área *S*.

Calcular su perímetro, sabiendo que es máximo.

A) $2\sqrt{S}$ B) $3\sqrt{S}$ C) $4\sqrt{S}$ D) $6\sqrt{S}$ E) $8\sqrt{S}$

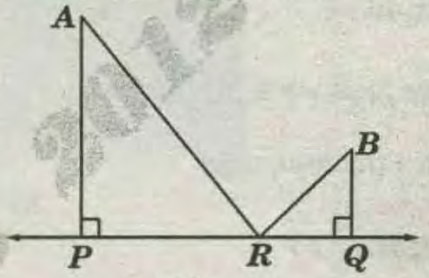
02 Calcular el área máxima del rectángulo que puede inscribirse en un triángulo isósceles cuya base y altura miden *m* y *n*, respectivamente.

A) $mn/2$ B) mn C) $mn/3$

D) $mn/4$ E) $(m+n)\sqrt{mn}$

03 En la figura: $AP+BQ=a$ y $PQ=b$.

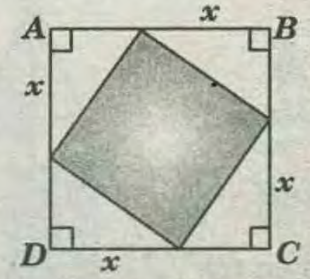
Calcular $AR+RB$, si es mínimo.



A) $a+b$ B) $\dfrac{a+b}{2}$ C) $\dfrac{a+b}{3}$

D) $\sqrt{ab}$ E) $\sqrt{a^2+b^2}$

04 *ABCD* es un cuadrado cuyo lado mide *L*, los valores de "*x*", tal que *PQRS* tenga área mínima y máxima son, respectivamente:



A) $L/3; L/2$

B) $L/2; L/4$

C) $0; L/2$

D) $L/5; L$

E) $L/2; 0$

05 Calcular el área total del cilindro de revolución de mayor superficie lateral que puede ser inscrito en una esfera de radio *4*.

A) 16π B) 12π C) 24π D) 48π E) 96π

06 De todos los cilindros circulares rectos de área total igual a $2\pi a^2$, calcule el volumen del cilindro de máximo volumen.

A) $\dfrac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}$ B) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$ C) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{6}$

D) $\dfrac{2\pi a^3\sqrt{2}}{3}$ E) $\dfrac{3\pi a^3\sqrt{3}}{8}$

07 Calcular el volumen máximo de un cono de revolución inscrito en una esfera cuyo radio mide *3*.

A) 16π/5 B) 32π/9 C) 24π/7
D) 32π/3 E) 16π/3

08 Calcular las dimensiones de un rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo de lados *8; 10; 12*, tal que un lado del rectángulo está contenido en el lado del triángulo que mide *12*.

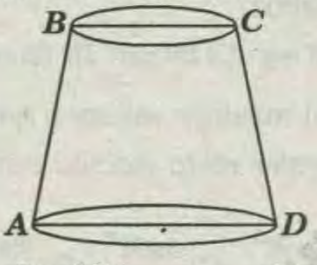
A) $\frac{5\sqrt{7}}{4}; 6$ *B)* $\frac{5\sqrt{5}}{3}; 4$ *C)* $\frac{6\sqrt{5}}{5}; 6$

D) $\frac{5\sqrt{3}}{4}; 8$ *E)* $\frac{5\sqrt{6}}{2}; 5$

09 En un paralelepípedo rectángulo el perímetro de una de las caras es *L* y la arista que es perpendicular a dicha cara mide el triple de la longitud de uno de los lados de la cara cuyo perímetro es conocido. Calcule el mayor volumen que limita el paralelepípedo.

A) $L^3/18$ B) $L^3/16$ C) $L^3/15$ D) $L^3/12$ E) $L^3/10$

10 Si: $AB+BC+CD+AD=k$, calcular el área lateral máxima del tronco de cono circular recto.



A) $\pi k^2/2$ B) $\pi k^2/4$ C) $\pi k^2/8$
D) $\pi k^2/16$ E) $\pi k^2/32$

11 En un triángulo *ABC*: $AB+BC=20$ y $AC=12$.

Calcular el área máxima de la región *ABC*.

A) 24 B) 30 C) 36 D) 45 E) 48

12 Dado un triángulo acutángulo, ¿cuál es el triángulo de menor perímetro inscrito en él?

A) Mediano B) Tangencial C) Ex-incentral
D) Órtico E) Podal

13 Calcular el volumen máximo de un prisma regular de base cuadrangular inscrito en un cono de revolución cuyo radio de la base es *12* y su altura mide *27*.

A) 648 B) $648\sqrt{2}$ C) $648\sqrt{5}$ D) 1 152 E) $648\sqrt{7}$

14 Se tiene una plancha metálica cuyo lado mide *12*. Se desea construir de ella una caja cortando cuadrados congruentes en cada esquina y doblando los bordes hacia arriba. Calcular las dimensiones de la caja de capacidad máxima que se puede construir de este modo.

A) 6; 3 B) 8; 2 C) 6; 4 D) 10; 2 E) 9; 2

15 Se desea cercar un lote rectangular que tiene $400\ m^2$ de superficie con uno de sus lados a lo largo de un río recto. Si no se necesita cercar al lado que da al río, ¿qué dimensiones requiere la menor cantidad de cerco?

A) $40\sqrt{5}$ m; $20\sqrt{5}$m B) $80\sqrt{5}$m; $10\sqrt{5}$m
C) $100\sqrt{5}$ m; $20\sqrt{5}$m D) 100 m, 40 m
E) 80 m; 50 m

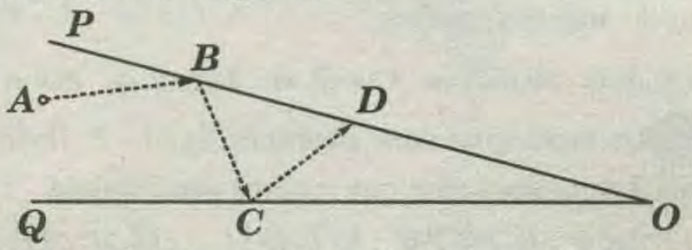
16 Dadas dos circunferencias concéntricas de centro *O*, se trazan los rayos $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ que intersecan a las circunferencias menor y mayor, respectivamente, en *A, B* y *D, C* formándose un trapecio circular, cuyo perímetro siempre se mantiene constante a $2p$. Si la diferencia de los radios de ambas circunferencias coincide numéricamente con el valor del ángulo central formado por los rayos, determine la medida de dicho ángulo, en radianes, para que el área de la región trapecial sea máxima.

A) p/4 B) p/3 C) 3p/2 D) p E) p/2

17 Uno de los lados de un rectángulo está contenido en la recta $x-9=0$ y sus otros dos vértices pertenecen a la parábola $x+4y=y^2+7$. Calcular el área máxima de la región rectangular.

A) 7,5 u^2 B) 15 u^2 C) 30 u^2
D) $8\sqrt{2}$ u^2 E) 50 u^2

18 En el diagrama se muestran las proyecciones horizontales $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ de dos espejos. Un rayo luminoso es disparado en *A*, cuya trayectoria es *A–B–C–D*. Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ determinan un ángulo que mide $30°$, calcular la medida del ángulo que determinan los espejos.



A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

19 ¿Cuál es el menor volumen que debe tener una pirámide cuadrangular regular para que se pueda circunscribir a un cubo de volumen *V*, de tal manera que una de las caras del cubo se encuentre

contenido en la base de la pirámide?

A) 3V B) 9V/4 C) 5V/3 D) 7V/2 E) 9V/2

20 Se tiene un recipiente cilíndrico de lámina (cerrado en ambos extremos) cuyo volumen es *V*. Calcular las dimensiones que requerirán la mínima cantidad de material.

A) $\frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{2\pi}};\frac{\sqrt[3]{4V}}{\sqrt[3]{\pi}}$ *B)* $\frac{V}{\sqrt[3]{3\pi}};\frac{3V}{\sqrt[3]{\pi}}$ *C)* $\frac{2V}{\sqrt[3]{3\pi}};\frac{3V}{\sqrt[3]{2\pi}}$

D) $\frac{2V}{\sqrt[3]{3\pi}};\frac{4V}{\sqrt[3]{\pi}}$ *E)* $\frac{2V}{\sqrt[3]{\pi}};\frac{3V}{\sqrt[3]{3\pi}}$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 ¿Para cuál valor del radio , se hace máximo el área de un sector circular de perímetro *2P* ?

A)P/5 B)P/4 C)P/3 D)P/2 E)P

02 Se tiene un rectángulo de $60cm^2$ de área. Si los lados son números enteros (en centímetros), el perímetro mínimo posible , en *cm* , es :

A)30 B)32 C)34 D)36 E)38

03 Se tiene el hexágono regular *ABCD - EFGH.* *AB = 2m.* Halle la longitud del menor camino para ir de A hacia *B* pasando sólo por cuatro caras.

A)$2\sqrt{17}\mu$ *B)*$2\sqrt{13}\mu$ *C)*$2\sqrt{15}\mu$ *D)*$2\sqrt{14}\mu$ *E)*10μ

04 Sobre un segmento *AB* de longitud *«a»* se ubica un punto *C* y tomando como base los segmentos *AC* y *CB* se construyen triángulos equiláteros calcular *AC* para que la suma de las áreas de los triángulos construidos sea mínima.

A) 2a/5 B) a/3 C) a/2 D) 2a/3 E)4a/9

05 Si tres lados de un trapecio isósceles miden cada uno **3m**, cuanto debe medir la base mayor para que su área sea máxima.

A) $2\sqrt{3}$ *m B)* $6\sqrt{3}$ *m C)*$6\sqrt{2}$ *m D)*$3\sqrt{2}$ *m E)6 m*

06 Un rectángulo tiene perímetro igual a *P*. Hallar sus dimensiones para que su área sea máxima.

A) P/2; P/2 B) P/3;P/6 C) P/4;P/4 D) 3P/10;P/5

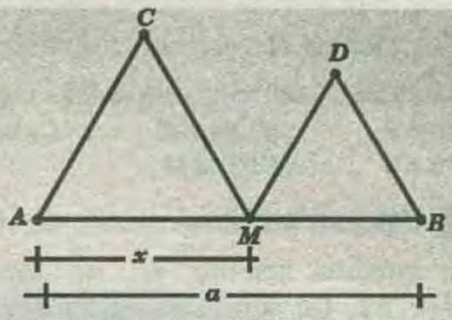
07 Dado el segmento de recta *AB* de longitud *"a"*, determinar sobre $\overline{AB}$ un punto *M* tal que la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre *MA* y *MB* sea mínima.

A) $x=\frac{a}{2}$

B) $x=\frac{\sqrt{a}}{2}$

C) $x=\sqrt{a}/3$

D) $x=a\sqrt{2}/2$



08 Se desea construir una caja sin tapa y de base cuadrada disponiendo de $300\ dm^2$ de material, calcule la altura de dicha caja para que su volumen sea máximo.

A) 4 dm B) 6 dm C) 8 dm D) 5 dm E)9 dm

09 Hallar las dimensiones de un rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo de lados *8; 10; 12* tal que un lado del rectángulo, está contenido en el lado del triángulo que mide *12*.

A) $\frac{5\sqrt{7}}{4};6$ *B)* $\frac{5\sqrt{5}}{3};4$ *C)* $\frac{6\sqrt{5}}{5};6$ *D)* $\frac{5\sqrt{3}}{4};8$ *E)* $\frac{5\sqrt{6}}{2};5$

10 Si tres lados de un trapecio, miden cada uno *10 cm*, ¿cuánto debe medir la base mayor para que el área sea máxima?

A) 15 cm B) 25 cm C) 20 cm D) 30 cm E) $20\sqrt{2}$ *cm*

11 Calcular el máximo volumen que puede tener un cilindro circular recto inscrito en una esfera de radio *«R»*

A) $\frac{3\pi R^3}{2\sqrt{6}}$ *B)* $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{2}}$ *C)* $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ *D)* $\frac{2\pi R^3}{\sqrt{6}}$ *E)* $\frac{3\pi R^3}{\sqrt{5}}$

12 Un alambre de longitud *L* es cortado en dos secciones, una para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. ¿Qué debe ser el lado del cuadrado para que la suma de las áreas sea máxima?

A) $\frac{\sqrt{2}L}{9+3\sqrt{3}}$ *B)* $\frac{\sqrt{3}L}{9+4\sqrt{3}}$ *C)* $\frac{\sqrt{6}L}{9-\sqrt{2}}$ *D)* $\frac{2\sqrt{3}L}{9+4\sqrt{3}}$ *E)* $\frac{\sqrt{5}L}{9-\sqrt{3}}$

13 Dadas dos circunferencias concéntricas , de centro común *O* , se trazan los rayos $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ que cortan a las circunferencias menor y mayor , respectivamente , en *A* , *B* y *D* , *C* formándose un trapecio circular ; cuyo perímetro siempre se mantiene constante e igual a *2p*. Si la diferencia de los radios de ambas circunferencias coincide numéricamente con el valor del ángulo central formado por los rayos , determine dicho ángulo en radianes para que el área del trapecio sea máxima.

A) $\pi/4$ B) $\pi/3$ C) $3\pi/2$ D) π E) $\pi/2$

14 Calcule la altura del cono circular recto de volumen mínimo que se pueda circunscribir a una esfera de $4\ cm$ de radio.

A) 16 cm B) 12 cm C) 20 cm D) 24 cm E) 10 cm

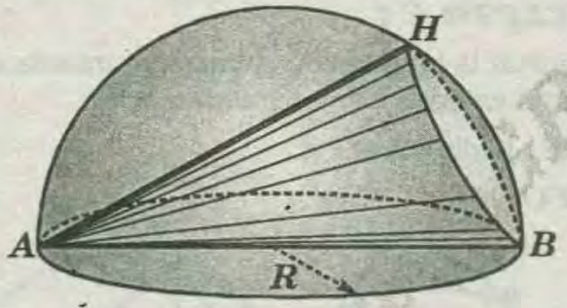
15 En una semicircunferencia de diámetro AD se inscribe el trapecio $ABCD$. Si $AD=4\ m$, calcule el área máxima de la región cuadrangular $ABCD$.

A) $3\sqrt{3}\ m^2$ B) $4\ m^2$ C) $8\ m^2$
D) $6\ m^2$ E) $4\sqrt{3}\ m^2$

16 Una esfera de radio a está inscrita en una pirámide regular cuadrangular de la cual se pide su volumen mínimo.

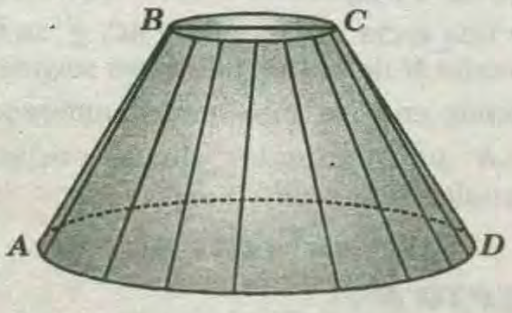
A) $24a^3$ B) $\frac{64}{3}a^3$ C) $\frac{32}{3}a^3$ D) $\frac{24}{5}a^3$ E) $16a^3$

17 En la figura se muestra una semiesfera de radio R y en ella se ha inscrito un cono oblicuo de vértice A y cuya base es un círculo menor cuyo único punto en común con el círculo máximo es B. Calcule el volumen máximo de dicho cono.



A) $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3$ B) $\frac{4}{9}\pi R^3$ C) $12\pi R^3$
D) $\frac{4}{3}\pi R^3$ E) $\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi R^3$

18 Calcule el área de la figura lateral máxima del tronco de cono circular recto, si $AB+BC+CD+AD=K$.



A) $\frac{\pi k^2}{2}$ B) $\frac{\pi k^2}{4}$ C) $\frac{\pi k^2}{8}$ D) $\frac{\pi k^2}{16}$ E) $\frac{\pi k^2}{32}$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)D	3)E	4)E	5)D	6)A	7)D	8)A	9)A	10)D
11)E	12)D	13)E	14)B	15)C	16)E	17)D	18)A	19)B	20)A

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)D	2)B	3)A	4)C	5)E	6)C	7)A	8)D	9)A	10)C
11)C	12)B	13)E	14)A	15)A	16)C	17)E	18)D		

¿EXISTE UNA CRISIS EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA?

Durante la segunda mitad del siglo pasado , la geometría pareció tener una pérdida progresiva de su posición formativa central en la enseñanza de las matemáticas de la mayoría de los países. Este decaimiento ha sido tanto cualitativo como cuantitativo. Síntomas de esta reducción se encuentran por ejemplo, en los recientes encuestas nacionales e internacionales sobre el conocimiento matemático de los estudiantes. Con frecuencia la geometría es totalmente ignorada en ellas, o solamente se incluyen muy pocos ítems de geometría. En último caso, las preguntas tienden a ser confinadas a algunos «hechos» elementales sobre figuras simples y sus propiedades, y se reporta un desempeño relativamente pobre.

¿CUÁLES SON LAS PRINCIPALES CAUSAS DE ESTA SITUACIÓN?

En el período desde aproximadamente 1960 hasta 1980, se dio una presión general en el currículo matemático contra tópicos tradicionales, debido a la introducción de otros nuevos (por ejemplo: probabilidad, estadística, ciencias computacionales, matemáticas discretas). Al mismo tiempo el número de horas escolares dedicadas a las matemáticas se fue abajo. El «movimiento de las matemáticas modernas» ha contribuido - al menos indirectamente - para disminuir el rol de la geometría euclideana favoreciendo otros aspectos de la matemática y otros puntos de vista para su enseñanza (por ejemplo: teoría de conjuntos, lógica, estructuras abstractas). La declinación ha involucrado en particular el rol de los aspectos visuales de la geometría tanto la tridimensional como la bidimensional, y todas aquellas partes que no encajaron dentro de la teoría de los espacios lineales como, por ejemplo, el estudio de las secciones cónicas y de otras curvas notables.

En años más recientes ha habido un retorno hacia contenidos más tradicionales en matemáticas, con un énfasis específico sobre actividades de planteamiento y solución de problemas. De cualquier manera, los intentos de restablecer la geometría euclideana clásica , la que al principio y en muchas partes del mundo fue la materia principal en la geometría escolar no han sido muy exitosos. El punto es que en los cursos tradicionales de geometría euclideana el material es usualmente presentado a los estudiantes como el producto final y ya hecho de la actividad matemática. Así, esta presentación, no encaja dentro del currículo actual donde se espera que los alumnos tomen una parte activa en el desarrollo de su conocimiento matemático.

En la mayoría de los países el porcentaje de gente joven que atiende al nivel medio superior se ha incrementado muy rápido durante las últimas décadas. Así, la forma tradicional de enseñar geometría abstracta a una selecta minoría ha resultado más difícil e inapropiada para las expectativas de la mayoría de estudiantes de las nuevas generaciones. Al mismo tiempo, la necesidad de más profesores ha causado, en promedio, una disminución en su preparación universitaria, especialmente en lo que respecta a las partes más demandantes de las matemáticas, en particular la geometría. Desde que profesores más jóvenes han aprendido matemáticas bajo currícula que han descuidado la geometría, les hacen falta buenos antecedentes en este campo, lo cual genera en ellos la tendencia a descuidar la enseñanza de la geometría a sus alumnos.

La brecha entre la concepción de la geometría como un área de investigación y como una materia a ser enseñada en las escuelas parece estar incrementándose; pero no parece encontrarse consenso en cómo superar esta brecha, ni aún si pudiera (o debiera) ser superada a través de la introducción de más tópicos avanzados en los grados inferiores.

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

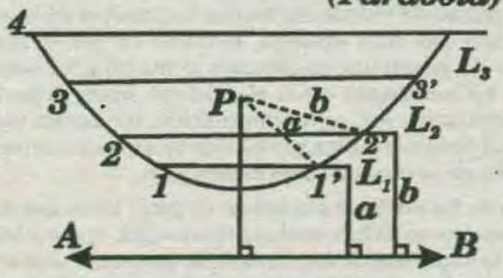
Las contrucciones geométricas requieren para la solución de muchos problemas, de que el lector se halle familiarizado con los diferentes métodos de ejecución de las construcciones geométricas.La tecnología a utilizarse requerirá del lector el dominio de instrumentos simples (escuadras,compás, regla, transportador y lápiz), por cuanto no siempre contará con las ventajas que proporciona una máquina de dibujar, escuadras graduables o ciertos instrumentos sofisticados.Este pequeño trabajo contiene una selección adecuada y organizada de todo lo referente a construcciones geométricas. Las construcciones que se disponen son sumamente sencillas y detalladas, las que se efectúan a partir de ciertos datos dispuestos para su ejecución. Estas construcciones geométricas tienen aplicaciones importantes tanto en la elaboración de dibujos como en la solución de problemas de geometría descriptiva, todo lo que por ser de suma importancia debe el lector dominarlo convenientemente.

CONCEPTO A :

Determinar el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto P y una recta AB.

Datos : P ; AB

MÉTODO: *Lugar Geométrico (Parábola)*



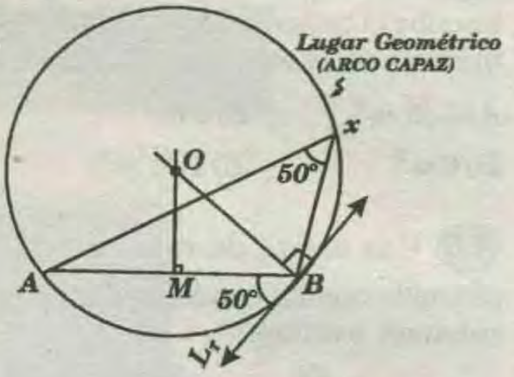
* Por P se traza perpendicular a AB.
* Se traza paralela L_1 a AB. (distancia a).
* Con radio a y centro en P se traza arco hasta que corte a L_1 en 1 y $1'$.
* El mismo procedimiento para todos los puntos.

CONCEPTO B :

Determinar el punto geométrico de todos los puntos que hacen un ángulo α con los extremos de un segmento .

Datos : AB ; $50°$

MÉTODO :



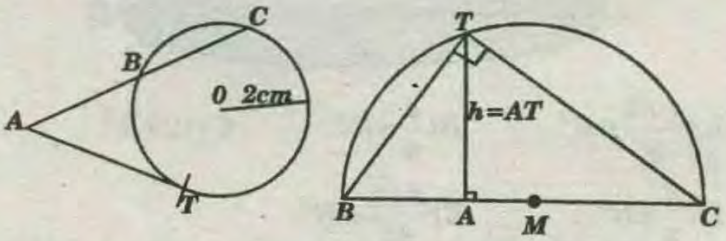
* Se mide $50°$ con respecto a BA y se dibuja L_t.
* Por B perpendicular a L_t.
* Por $M(AB/2)$ perpendicular a AB .
* O punto de corte de las dos perpendiculares trazadas
* O centro de la circunferencia.

CONCEPTO C :

Determinar la longitud de la tangente trazada desde un punto exterior a una circunferencia.

DATOS : Radio=$2cm$; A

MÉTODO :



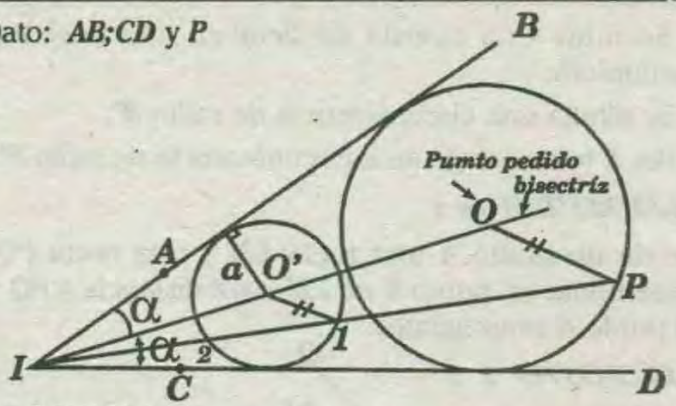
* Por A se traza una recta cualquiera cortando a la circunferencia en B y C.
* El valor de la tangente AT : $AT^2 = AB \times AC$
* Sobre una recta se lleva AB y AC, y se toma el punto medio M de la suma de estos segmentos.
* Con centro en M se traza semlcircunferencia.
* Por A perpendicular hasta cortar a la semicircunferencia en T .

$$AT^2 = h^2 = AB \times AC$$

CONCEPTO D :

Determinar el centro de un circunferencia que es tangente a dos rectas y que pasa por un punto.

Dato: *AB;CD* y *P*



MÉTODO :

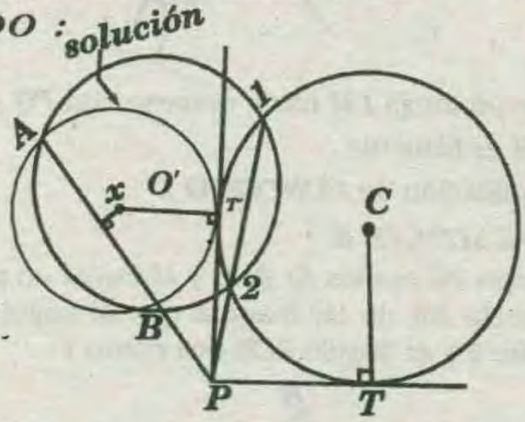
* Se prolonga *AB* y *CD* hasta que se corten *(I)*.
* Se traza bisecctríz y se dibuja una circunferencia de centro *O'* y radio cualquiera *a*.
* Se une *I* con *P* cortando a la circunferencia en *1* y *2*
* Por *P* paralela a *O'1* basta cortar a la bisectriz en *O*.
* El punto *O* equidista de *AB;CD* y del punto *p*(*2* soluciones).

CONCEPTO E :

Determinar el centro de una circunferencia que pasa por dos puntos y es tangente a otra circunferencia.

Datos : *A;B* y circunferencia de centro *O*.

MÉTODO :



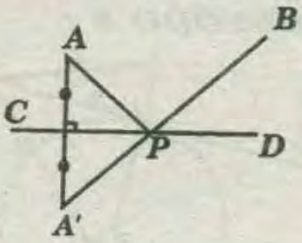
* Se construye una circunferencia cualquiera de centro *O"* y, que pasa por los. punto *A* y *B*.
* La circunrerencia de centro *O'* se corta con la circunferencia de centro *O* en *1* y *2*.
* Se prolonga *AB* y *12* hasta cortarse *(P)* .
* Por *P* se traza tangente a la circunferencia dada *(PT)*.
* *PT=PT'* .
* Por *T'* perpendicular a *T'P* y se halla *x* que será centro de la circunferencia pedida.

CONCEPTO F :

Determinar un punto *P* en una recta *CD* de tal manera que la suma *AP+PB* sea mínima .

Datos: *A;B* y *CD* .

MÉTODO :



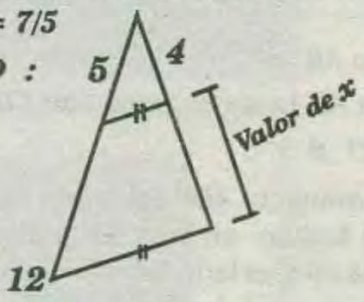
* Se traza simétrico de *A(A')* .
* Se une *A'* con *B* y corta a *CD* en *P* .

CONCEPTO G :

Resolver gráficamente una proporción *x/a=b/c*

Datos : *x/4 = 7/5*

MÉTODO :



* Se traza recta cualquiera de *12u (5+7)*
* Se traza otra recta y sobre ésta se mide *4u*.
* Se une *5* con *4*
* Por *12* se traza paralela a *5 – 4* .

APLICACIONES DE CONCEPTOS BÁSICOS

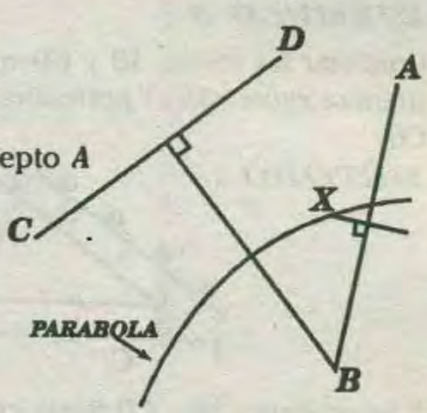
EJEMPLO 1:

Determinar un punto *X* que equidiste de los puntos *A;B* y *C;D*.

Datos: *A; B* y *CD*.

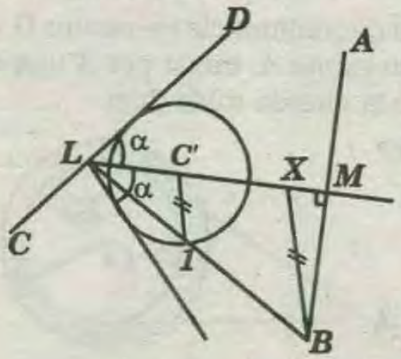
MÉTODO 1 :

* Mediatriz de *AB*
* Aplicación de concepto *A*

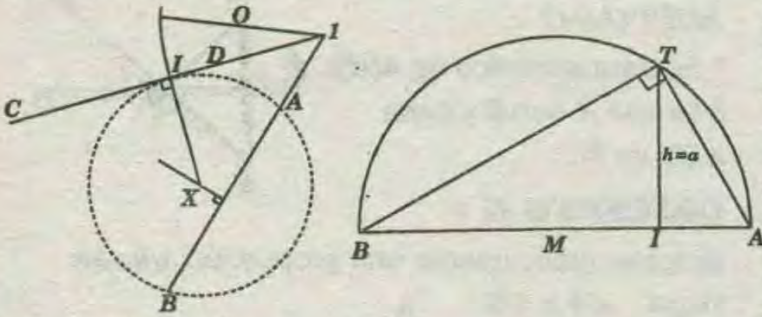


MÉTODO 2 :

* Se prolonga mediatriz de *AB* hasta cortar a *CD(L)*
* *ML* es mediatriz.
* Aplicacion de *CONCEPTO D* .



METODO 3 :

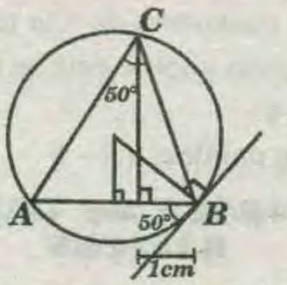


* Mediatriz de ***AB***
* Se prolonga ***AB*** hasta cortarse con ***CD*** en ***I***.

EJEMPLO 2 :

Construir un triángulo ***ABC*** sabiendo que el lado ***AB*** mide ***3cm***, el ángulo en ***c*** en ***50°*** y que el pie de la altura (trazada en ***C*** al lado ***AB***) al punto ***B*** mide ***1cm***.

MÉTODO :

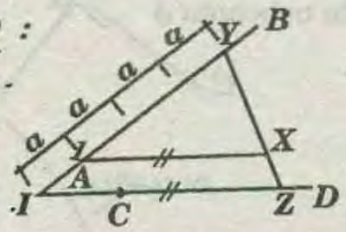


* Aplicaciones de concepto ***B***.
* De ***B*** se mide ***1 cm*** y se halla ***C***.

EJEMPLO 3 :

Conectar las rectas ***AB*** y ***CD*** que pase por ***X*** de tal manera ***xy/xz=3/1***. Y pertenece a ***AB*** y ***Z*** pertenece a ***CD***.

MÉTODO :

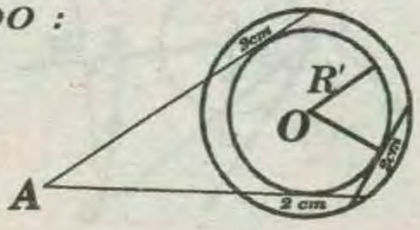


* Se prolonga ***AB*** y ***CD*** hasta cortarse en ***I***.
* Por ***X*** paralela a ***CD*** hasta cortar a ***AB*** en ***I***.
* Se lleva ***I 1= a;3*** veces sobre ***AB*** hallando ***Y***.

EJEMPLO 4 :

Se tiene una circunferencia de centro ***O*** y radio ***2cm*** y además un punto ***A***. trazar por ***A*** una recta de tal manera que la cuerda mide ***2cm***.

MÉTODO :

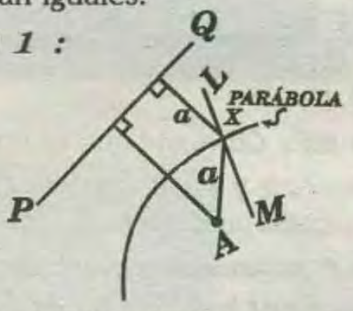


* Se mide una cuerda de ***2cm*** en una posición cualquiera.
* Se dibuja una circunferencia de radio ***R'***.
* Por ***A*** trazar tangente a circunferencia de radio ***R'***.

EJEMPLO 5 :

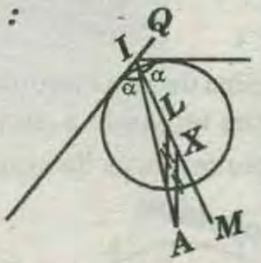
Se da un punto ***A*** una recta ***LM*** y una recta ***PQ***. Determinar un punto ***X*** en ***LM*** cuya distancia a ***PQ*** y el punto ***A*** sean iguales.

MÉTODO 1 :



* Aplicación de ***CONCEPTO A*** .
* La parábola se corta con ***LM*** en ***X***.

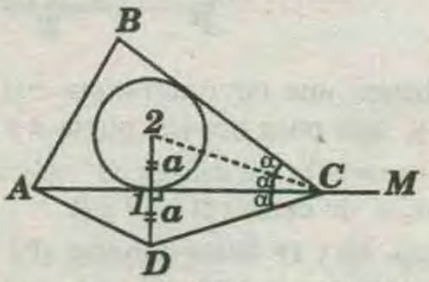
MÉTODO 2 :



* Se prolonga ***LM*** hasta cortarse con ***PQ*** en ***I***.
* ***MI*** es bisectriz .
* Aplicación de ***CONCEPTO D*** .

EJEMPLO 6 :

Se dan los puntos ***A; B; D*** y ***M*** Hallar un punto ***C*** en la recta ***AM*** de tal manera que el ángulo ***ACB*** sea como ***2*** y el ángulo ***ACD*** sea como ***1***.



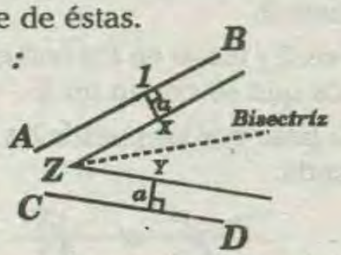
* Por ***D*** se traza perpendicular a ***AM(D1)***
* Se lleva ***a*** sobre la perpendicular anteriormente trazada, hallando ***2***.
* Se dibuja circunferencia de radio ***a*** y centro el punto ***2***.
* Por ***B*** se traza tangente a circunferencia hasta cortar a ***AM*** en ***C***.

EJEMPLO 7 :

Trazar la bisectriz de las rectas ***AB*** y ***CD*** sin hallar el

punto de corte de éstas.

MÉTODO :

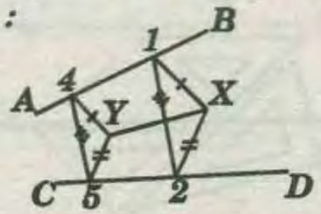


* Se traza perpendicular a *AB(1X=a)* y *CD (2Y=a)*.
* Por *X* paralela a *AB*, por *Y* paralela a *CD*.
* Las paralelas trazadas se cortan en *Z*.
* La bisectriz de *XZY* es la solución.

EJEMPLO 8 :

Trazar por *X* una recta que sea concurrente con *AB* y *CD*, sin hallar el punto de corte de éstas.

MÉTODO :

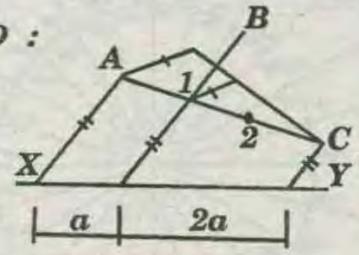


* Se une *X* con dos puntos cualesquiera de *AB* y *CD* *(1 ∈ AB , 2 ∈ CD)*.
* Se construye un triángulo semejante *45* y paralelo a *12X (45//12 , 4Y//1X , 5Y//X2)*.
* *XY* recta pedida.

EJEMPLO 9 :

Se dan tres puntos *A;B* y *C* y un segmento *XY*. trazar por *A;B* y *C* tres paralelas que determinan en el segmento *XY* dos segmentos que esten en la relación *1* a *2*.

MÉTODO :

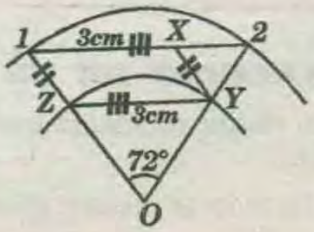


* Se divide *AC* en tres partes iguales.
* Se une *B* con *1* cortar a *XY*. (puede unirse *B* con *2* otra solución).
* Se traza por *A* y por *C* paralelas a la recta *B1*

EJEMPLO 10 :

Determinar el radio de un pentágono regular de lado igual a *3cm*.

MÉTODO :



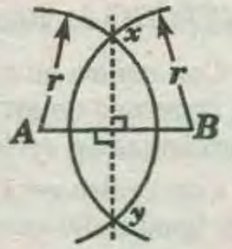
* Se trazan dos rectas haciendo un ángulo de *72°(360°/5)*.
* Con centro en *O* se traza una circunferencia de radio cualquiera.
* Sobre *1–2* se mide *3cm*, hallando un punto *X*.
* Por *X* paralela *O –1* hasta cortar a *O – 2* en *Y*.

YZ//1–2(YZ=3cm).

DADO UN SEGMENTO DE RECTA, TRAZAR UNA PERPENDICULAR A ELLA

**** QUE PASE POR PUNTO MEDIO :***

METODO 1: De la mediatriz

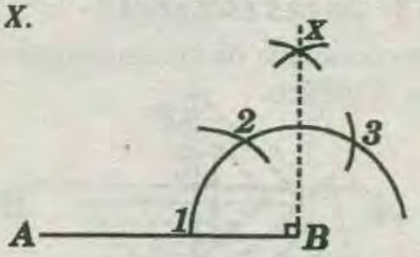


* Con centro en uno de los extremos del segmento dado y radio arbitrario *r*, trazamos un arco de circunferencia.
* Con centro en el otro extremo y radio *r*, trazamos un segundo arco de circunferencia que cortará al primero en dos puntos: *x* e *y*.
* La recta buscada (mediatríz), será la que pase por los puntos *x* e *y*; o simplemente, la perpendicular bajada desde *x*.

QUE PASE POR LOS EXTREMOS DEL SEGMENTO

MÉTODO1: *DE LOS ARCOS ARBITRARIOS*

* Con centro en el extremo elegido , tal como *B*, se traza un arco de circunferencia de radio arbitrario *r*, que corta al segmento dado en el punto *1*.
* Con centro en *1* y radio *r*, ubicamos el punto *2*, Igualmente, con centro en *2*, hallamos el punto *3*.
* Haciendo centro en *2* y luego en *3*,trazamos dos arcos de igual radio, que se cortarán en el punto *X*.
* La recta perpendicular buscada pasará por los puntos *B* y *X*.

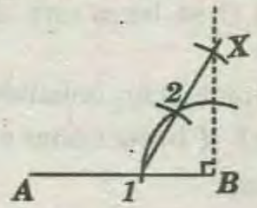


MÉTODO 2 : *MÉTODO DEL ARCO Y LA PROLONGACIÓN*

* Con centro en uno de los extremos *(B)*, trazamos un arco de radio arbitrario *r*, que corta al segmento dado en el punto *1*.
* Con el mismo radio *r* y centro en *1*, hallamos el punto *2*.
* Prolongamos el segmento *12*, y con centro en *2* y

radio *r*, hallamos el punto *X*.

* La recta que pase por *X* y *B* será la solución.



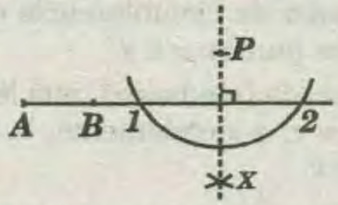
QUE PASE POR UN PUNTO EXTERIOR AL SEGMENTO

MÉTODO 1: DEL RADIO ARBITRARIO Y LOS ARCOS

* Con centro en el punto dado *(P)* y radio arbitrario *r*, trazamos un arco que cortará al segmento *AB* o su prolongación en los puntos *1* y *2*.

* Con centro en *1*, y luego en *2*, trazamos dos arcos de igual radio que se cortarán en punto *X*.

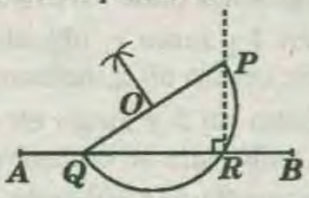
* La recta buscada pasará por *P* y *X*.



MÉTODO 2: MÉTODO DEL ARCO CAPAZ

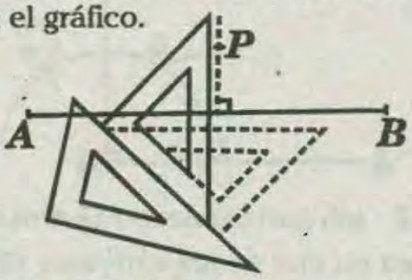
* A partir del punto *P* dado, trazamos un segmento cualquiera *PQ*. tal que *Q* pertenezca al segmento *AB*.

* Con centro en el punto medio *(O)* del segmento *PQ*, trazamos una semicircunferencia, que cortará al segmento *AB* en el punto *R*.



MÉTODO 3: DE LAS ESCUADRAS

* Se realiza con ayuda de las escuadras, tal como se muestra en el gráfico.



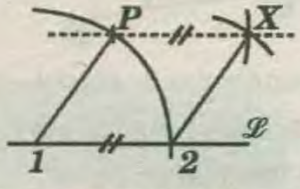
TRAZAR UNA PARALELA A UNA RECTA POR UN PUNTO EXTERIOR DADO

MÉTODO 1: DE LOS RADIOS Y ARCOS

* Con centro en un punto cualquiera de la recta dada y con radio *1P*, trazamos un arco que cortará a la recta en el punto *2*.

* Con centro en *2* y luego en *P* y con el mismo radio, trazamos arcos que se cortan en *X* .

* La recta que pase por los puntos *P* y *X* será la recta paralela buscada.

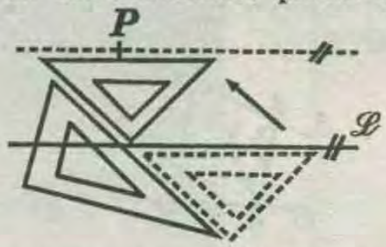


MÉTODO 2 : DE LAS ESCUADRAS

* Ver figura que se muestra.

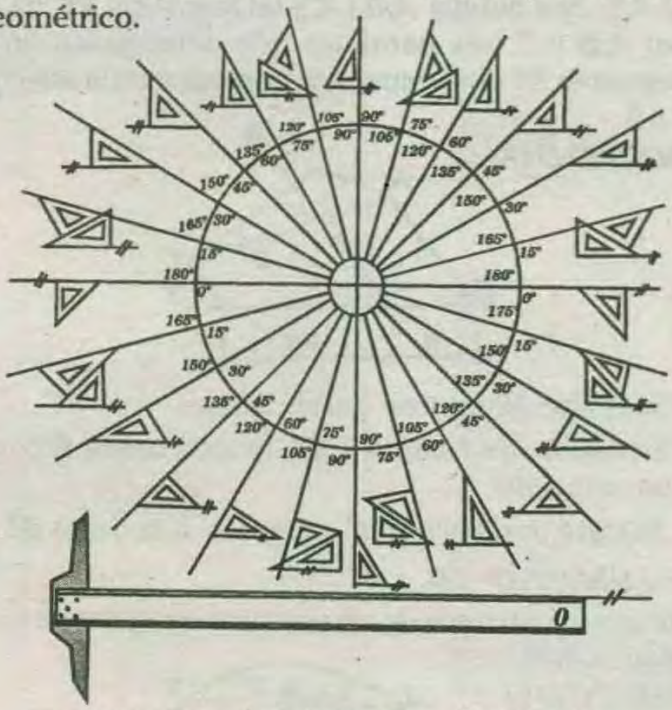
NOTA :

La posición de las escuadras queda a criterio del alumno.



EMPLEO DE LAS ESCUADRAS DE 30°,45° Y 60° EN LA OBTENCIÓN DE ANGULOS DIVERSOS

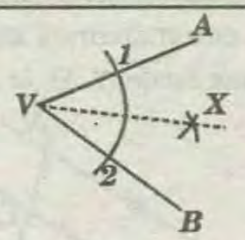
Disponiendo de escuadras de *45°* y de *30°–60°*, se podrá obtener en las múltiples posiciones (como se muestra en el presente gráfico) ángulos diversos, que nos posibilitará usarlos en el diseño y el trazado geométrico.



BISECCIÓN DE UN ÁNGULO

Consiste en dividir mediante una recta bisectriz un ángulo dado.

CASO 1 : Cuando se conoce el vértice del ángulo



* Dado el ángulo *AVB*, con centro en *V* y radio arbitrario *r*, trazamos un arco que cortará a los lados *VA* y *BV* según los puntos *1* y *2* respectivamente.

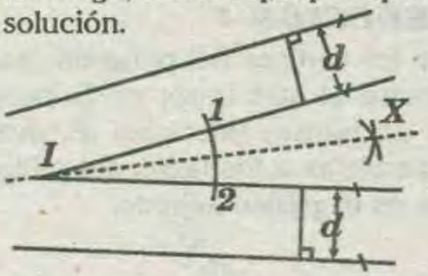
* Con centro en *1* y luego en *2*, trazamos dos arcos de igual radio, que se cortarán en el punto *X*

* La recta que pase por los puntos *V* y *X*, será la bisectríz buscada.

CASO 2 : CUANDO NO SE CONOCE EL VÉRTICE DEL ÁNGULO

* Dadas las rectas *n* y *m*, a igual distancia *d* de ambas rectas, trazamos otras dos, paralelas a las dadas. Dichas rectas se cortarán en el punto *I*.

* La bisectriz del ángulo que forman estas rectas, será también la bisectriz del ángulo formado por las rectas dadas. Luego, la recta que pasa por los puntos *X* e *I* es la solución.



POR UN PUNTO SITUADO ENTRE DOS RECTAS, TRAZAR UNA RECTA, TAL QUE CONCURRA EN EL MISMO PUNTO DE LAS OTRAS DOS

MÉTODO : DE LA REDUCCIÓN HOMOTÉTICA

(Se utiliza para los casos donde el punto de concurrencia de las rectas se halle fuera de los límites del papel)

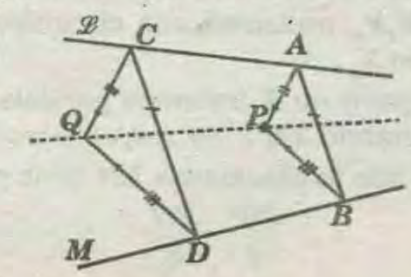
* Sean *L* y *M* las rectas, y *P* el punto entre ellas.

* Unimos *P* con un punto cualesquiera de cada recta, formándose de este modo un triángulo, tal como *PAB*

* Trazamos *CD* paralela a *AB*

* Desde los puntos *C* y *D* trazamos paralelas a *AP* y *BP* respecfivamente, obteniendo de este modo el punto *Q*.

* La recta que pase por los puntos *P* y *Q* será la solución.



DESDE UN PUNTO INACCESIBLE, DONDE CONVERGEN DOS RECTAS DADAS, TRAZAR UNA RECTA TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA DE CENTRO O

MÉTODO:

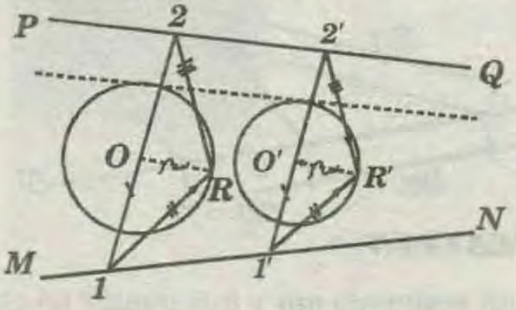
* Siendo *PQ* y *MN* las rectas que convergen en un punto *X* fuera del papel, y *O* el centro de la circunferencia dada:

* Trazamos *12* que pasa por *O* y *R* en cualquier punto de la circunferencia formándose el triángulo *12R*.

* Luego, trazamos *1'2'*, *1'R'* y *2'R'* paralelos a *12*, *1R* y *2R* respectivamente y finalmente *O'R'* paralelo a *OR*.

* Con centro en *O'* trazamos una circunferencia de radio *O'R'*

* La recta tangente a las circunferencias, es aquella que trazando desde el punto inaccesible *X*, es tangente a la circunferencia de centro *Q*.

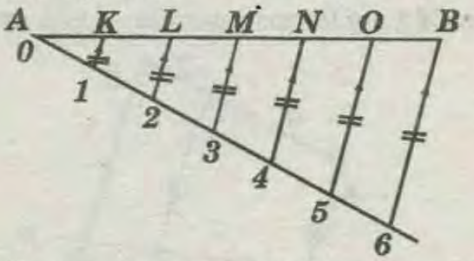


DIVISIÓN DE UN SEGMENTO

CASO 1 : En un número de partes iguales

* Dado el segmento *AB*, por uno de sus extremos, trazamos una recta *m* cualquiera, la cual la dividimos en el número de partes iguales que se requiera.

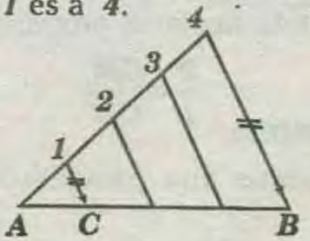
* Aplicando el teorema de Thales, lograremos la solución. (Ver gráfico)



CASO 2: En un número de partes proporcionales

* Con el mismo criterio anterior, sobre una recta cualquiera *m* dividimos en partes proporcionales como se pida.

* En el gráfico se ha dividido el segmento *AB* como *AC* es a *CB* con *1* es a *4*.



CASO 3 : DIVISIÓN DE SEGMENTO

PROPOSICIÓN :

Determinar sobre la recta L una porción $n(a)$ dado por la relación:

$\frac{n(a)}{m(a)}=\frac{pu}{qu}$ ó numéricamente por: $\frac{na}{3a}=\frac{4u}{6u}$ para todo valor cualesquiera de a y u unidades.

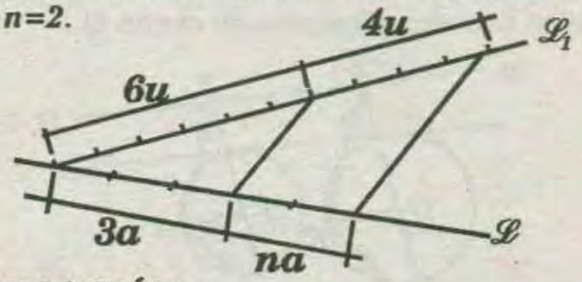
PROCEDIMIENTO :

* En este caso tomamos arbitrariamente $a=8mm$. Sobre L determinemos $3a$;

* Luego trazamos L_1 en posición cualesquiera, y sobre ella $(6u+4u=10u)$ la dividimos en 10 partes proporcionales (en este caso $u=1cm$.).

* Con una regla trazamos 36 y paralelamente $10-P$.

* $n(a)$ queda determinado. Observar que en este caso $n=2$.



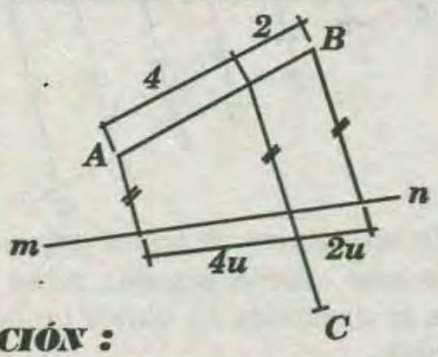
APLICACIÓN :

Dados un segmento mn y tres puntos no colineales fuera de ella, determinar en mn segmentos cuya relación sea 4 a 2, mediante paralelas que partan de los puntos dados.

RESOLUCIÓN :

Unimos cualesquiera dos puntos dados (como A y B) mediante una recta tal como AB, que lo dividimos en $4+2=6$ partes.

* Unimos $C4$ y trazamos paralelas a ella desde B y A



APLICACIÓN :

Unir dos rectas que se intersecan, por otra que intersecte éstas y pase por un punto C, de modo que se cumpla la siguiente proporcionalidad

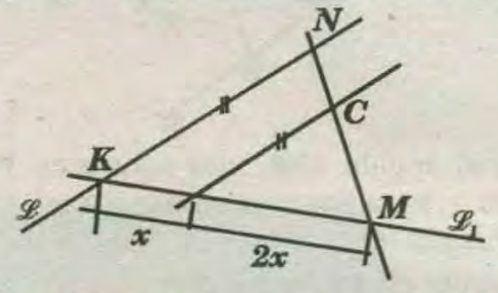
$$\frac{2}{1}=\frac{CM}{CN}$$

PROCEDIMIENTO :

* Por C trazamos una paralela a la recta más conveniente.

* Con el valor x determinamos $2x$, ubicando M.

* MC prolongamos hasta N. Es la recta buscada.

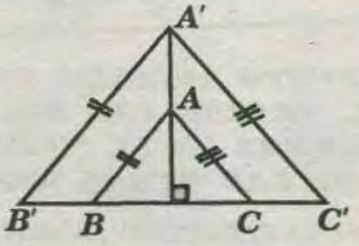


CONCEPTO DE REDUCCIÓN O AMPLICACIÓN HOMOTÉTICA DE SEGMENTOS

Trazar segmentos más grandes o más pequeños mediante ciertas líneas que mantengan paralelismo con los segmentos originales significa ampliar o reducir homotéticamente un segmento dado. En el gráfico se muestra el trazado original ABC y paralelamente $A'B'C'$ cuyos lados guardan una relación homotética con la primitiva.

CONSTRUCCIÓN :

Por uno de los vértices del polígono, trazamos una perpendicular al otro lado; en la perpendicular tomamos un punto, tal como A', desde donde trazamos paralelas a los lados del polígono, como se muestra en el gráfico adjunto.



REDUCCIÓN O AMPLIACIÓN HOMOTÉTICA, CON APLICACIÓN DE ARCO CAPAZ Y SEGMENTOS PROPORCIONALES.

MÉTODO :

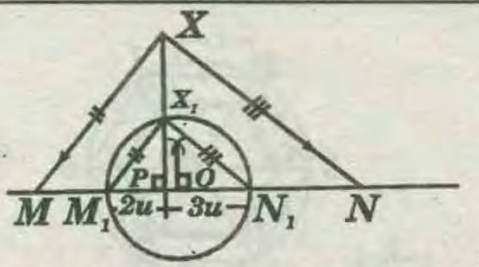
* Desde un punto X dividir la hipotenusa de un triángulo rectángulo en una relación de 2 a 3, tal que dicha hipotenusa MN se halle contenida en una recta L, y sólo se conoce la ubicación del punto M.

* Desde P, punto de perpendicularidad desde X a la recta L, tomamos $2u$ y $3u$ a la izquierda y derecha del punto O, respectivamente. Tomando O punto medio de M_1N_1, trazamos una circunferencia que corta a XP en X_1.

* Luego, a partir de X trazamos paralelas a X_1M_1 y X_1N_1, encontrando XM y XN respectivamente.

* Se ha dividido la hipotenusa MN en la relación:

$$\frac{MP}{2}=\frac{PN}{3}$$

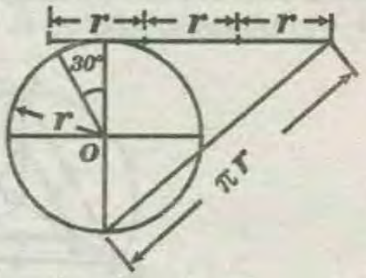


RECTIFICADO DE UNA CIRCUNFERENCIA

(Verdadera magnitud de una circunferencia distendida)

MÉTODO 1 :

Procedemos como se indica en el gráfico, con lo que obtenemos la longitud distendida πr de la circunferencia de radio r, con un error porcentual de 2×10^{-5}.

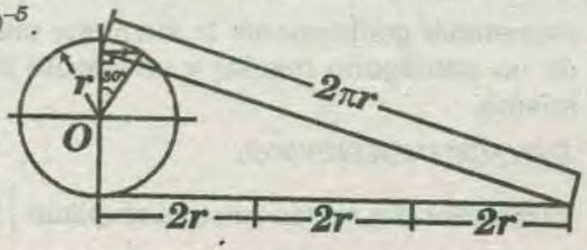


NOTA:

Longitud de una circunferencia = $2\pi r$

MÉTODO 2 :

Procedemos como se indica en el gráfico, con lo que obtenemos la longitud distendida $2\pi r$ de la circunferencia de radio r, con un error porcentual de 4×10^{-5}.

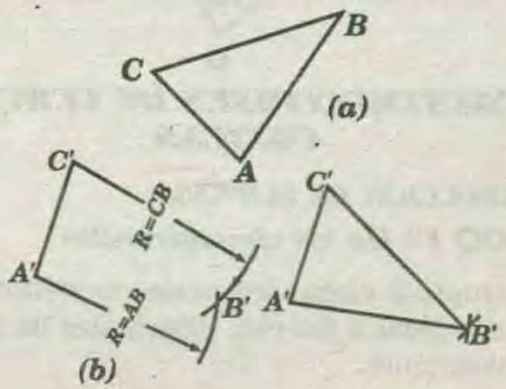


PROCESO DE TRANSFERIR UN TRIÁNGULO

* Dado un triángulo *ABC (fig.a)* llevamos la longitud de uno de los dos lados a una posición deseada *(fig.b)*.

* Luego, llevamos la longitud de las aristas como radios dispuestos desde su punto correspondiente, *AB* y *CD (fig.b)*, trazando arcos que se intersectan en un punto común *B*.

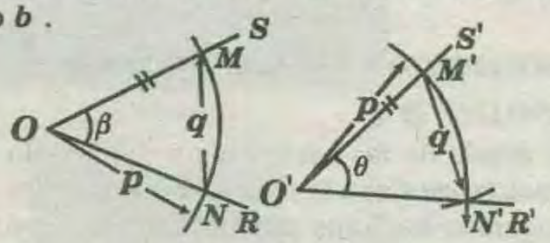
* En la *fig.c*, el triángulo transferido, *A'B'C'* conserva sus dimensiones originales tomadas del triángulo *ABC*.



REPRODUCIR UN ÁNGULO SEMEJANTE A UNO DADO

MÉTODO :

Tomamos de radio *P* que corta a *OS* y *OR* según *M* y *N* respectivamente, lo que llevamos a *O'S'* encontrando *M'* y trazando un arco. Luego tomamos una distancia *q* de *M* a *N* con lo que trazamos un arco desde *M'* hallando *N'*. El ángulo θ es igual al ángulo *b* .



CONSTRUCCIONES DE POLIGONOS REGULARES

PENTÁGONO :

MÉTODO 1: INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

* Trazamos una circunferencia y dos cualesquiera diámetros perpendiculares.

* Desde el punto medio *(M)* de un radio, trazamos un arco de radio *MA* que corte al diámetro (al que pertenece el punto *M*), en un punto tal como *P*. El segmento formado *AP*, será la longitud buscada del lado del pentágono, con lo que construimos el pentágono.

HEXÁGONO :

A) INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA :

MÉTODO 1 :

* Con radio igual al de la circunferencia y con centro en los extremos de un diámetro , trazamos dos arcos de circunferencia que contarán cada uno a la circunferencia primitiva de dos puntos

* Uniendo adecuadamente dichos puntos con los extremos del diámetro y entre sí , obtendremos el hexágono buscado .

MÉTODO 2 : De las escuadras y los extremos de un diámetro

* A partir de los extremos de un diámetro y con ayuda

de la escuadra de **60°** tal como se muestra en el gráfico.

B) CIRCUNSCRITO A UNA CIRCUNFERENCIA :

MÉTODO 3 :

* Con ayuda de las escuadras y del ángulo de **30°** trazamos tangentes a la circunferencia por los puntos de tangencia hallados previamente con ayuda del ángulo de **60°**, tal como se muestra en el gràfico.

HEPTÁGONO :

***MÉTODO 1**: INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA*

* Trazamos una circunferencia y un diámetro cualesquiera.

* Por uno de los extremos de este diámetro , tal como ***M***, trazamos un arco de circunferencia de radio igual a la circunferencia primitiva, que cortará a ésta última en dos puntos: ***P*** y ***Q***.

* La cuerda ***PQ*** corta al diámetro en el punto ***R*** (punto medio de ***PQ***). El segmento ***PR*** (ó ***RQ***) será el lado del heptágono buscado.

CONSTRUCCIÓN DE UN POLIGONO DADA LA LONGITUD DE UNO DE SUS LADOS

***MÉTODO**: De la reducción homotética*

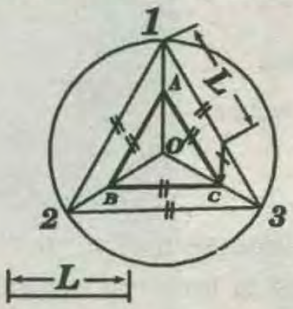
* Con centro en ***O***, trazamos una circunferencia de radio arbitrario.

* Con los métodos descritos anteriormente, construimos un polígono regular inscrito con igual número de lados que el polígono que se requiere, tal como el hexágono ***123456 (fig.a)*** ó el triángulo ***123 (fig.b)***.

(a)

* Unimos el centro ***O*** de la circunferencia con cada vértice del polígono.

* En uno cualquiera de los lados del polígono, determinamos la longitud ***L*** dada, y mediante el trazo de rectas paralelas hallamos los lados del polígono pedido ; tal como el hexágono ***ABCDEF*** en la ***fig. (a)***. y el triángulo ***ABC*** en la fig.***(b)***



PROPOSICIÓN :

Determinar gráficamente la recta que une el centro de un pentágono regular y un ángulo interior del mismo.

PROCEDIMIENTO:

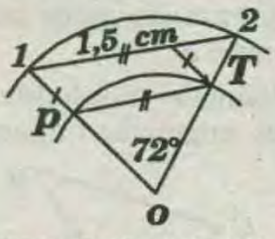
* Trazamos dos rectas con una amplitud $\left(\frac{360}{5}\right)^{\circ} = 72^{\circ}$

* Con centro en ***O***, trazamos un arco de circunferencia de radio arbitrario.

* Sobre dicho arco determinamos ***1,5cm.*** de cuerda.

* Por construcción se halla ***PT***. lado del pentágono de largo ***1,5cm***.

* El segmento ***PO*** o ***OT*** es la distancia buscada.



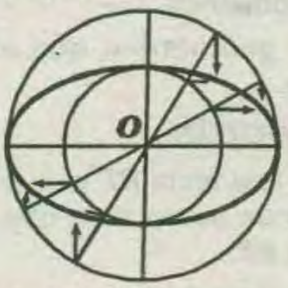
CONSTRUCCIONES DE CURVAS CONICAS

CONSTRUCCIÓN DE ELIPSES:

MÉTODO 1 : De las circunferencias

* Trazamos, ***2*** circunferencias concéntricas con diámetros igual a los ejes principales de la elipse, respectivamente.

* Luego, trazamos un número conveniente de líneas radiales, cada una de las cuales cortará a ambas circunferencias en dos puntos. Desde cada par de puntos, trazamos paralelas a los ejes de la elipse; la intersección de dichas paralelas nos determinarán puntos de la elipse.



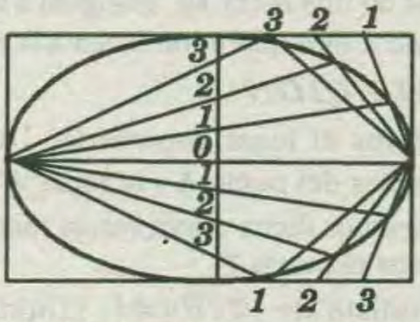
MÉTODO 2 : Del paralelogramo

* Construimos un rectángulo de lados iguales a los ejes de la elipse, y lo dividimos en cuatro partes iguales.

* Dividir el semieje menor y la paralela al semieje mayor en igual número de partes iguales. (En la fig. hemos dividido el semieje menor y la paralela al semieje mayor en tres partes iguales).

* Unimos los puntos extremos del eje mayor según la numeración establecida.

* La intersección de éstas rectas nos dan los puntos de la elipse.



MÉTODO 3 : Empíricamente (por cuerdas y clavos)

Como ilustración: reseñamos la construcción de un ovoide, que como se podrá observar, el método permite también la construcción de una elipse.

CONSTRUCCIÓN DE UN OVOIDE CONOCIENDO UN EJE NO SIMÉTRICO

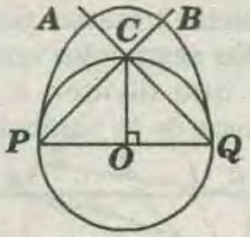
MÉTODO :

* Dado el eje no simétrico ***PQ*** , tomamos este eje como diámetro de una circunferencia de centro ***O***.

* De ***O*** trazamos una perpendicular que corta a la circunferencia en ***C***; tocando este punto trazamos dos rectas ***PB*** y ***QA***.

* Los puntos ***P;C;Q*** serán los centros de los arcos ***QB;BA*** y ***PA*** de radios ***PQ,CB*** y ***PQ*** respectivamente.

* Con lo que concluimos la construccción del ovoide deseado .



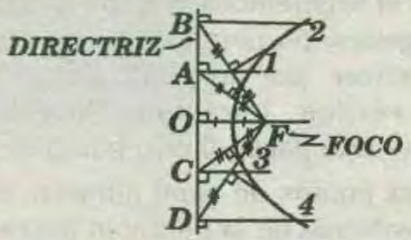
CONSTRUCCIÓN DE PARABOLAS

CASO 1 : dados el foco y la directríz de la parábola

METODO 1: *trazando segmentos del foco a la directriz*

* Desde el punto ***F*** (foco de la parábola), trazamos un número conveniente de segmentos hacia la directriz, tales como : ***FA, FB, FC*** y ***FD***.

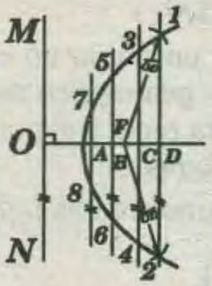
* Intersectando las rectas perpendiculares a la directriz por los puntos ***A ; B ; C*** y ***D***, con las mediatrices de los segmentos trazados, determinamos los puntos de la parábola.



MÉTODO 2 : *Trazando paralelas a la directríz*

* Trazamos un número adecuado de paralelas a la directriz, que cortan al eje de la parábola según los puntos ***A ; B ; C*** y ***D***.

* Con centro en ***F*** y radio igual a la distancia entre la directriz y una de las paralelas, trazamos un arco que corta a ésta misma paralela en dos puntos; serán los puntos de la parábola buscada.



CASO 2 : *Dados la luz (L) y la sagita (S)*

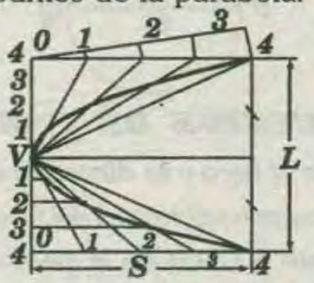
MÉTODO 1: *Método del rectángulo*

* Construimos un rectángulo de lados iguales a las dimensiones dadas.

* Por el centro de la luz trazamos una línea que dividirá al rectángulo en dos partes iguales y nos dará la ubicación del vértice ***V*** de la parábola sobre uno de sus lados.

* Dividir dos lados adyacentes del rectángulo nuevo en igual número de partes iguales. (***4*** para el ejemplo).

* Las rectas paralelas trazadas por los puntos que dividen la luz, y los segmentos que unen el vértice con los puntos que dividen a la sagista ,nos determinarán puntos de la parábola.



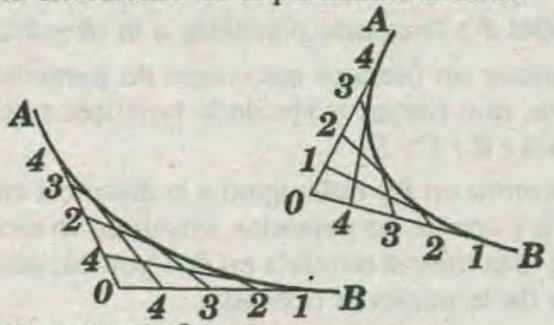
CASO 3: *dado de rectas tangentes y los puntos de tangencia*

MÉTODO 1: *De la division de rectas en segmentos*

* Sean las rectas ***OA*** y ***OB***, tangentes a la parábola en los puntos ***A*** y ***B*** respectivamente.

* Dividimos el segmentos ***OA*** y ***OB*** en igual número de partes iguales, numerando dichos puntos como sigue: comenzar por un punto de tangencia y al llegar al vértice iniciamos nuevamente la numeración hasta llegar al otro punto de tangencia.

* Unimos los puntos de igual número; éstas líneas serán la envolvente de la parábola buscada.

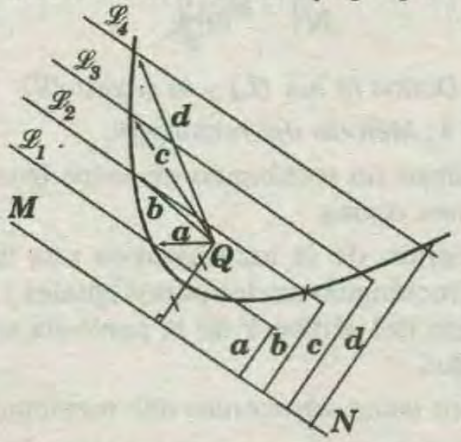


PROPOSICIÓN :

Dados una recta y un punto en cualquier posición determinar el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de la recta y el punto.

PROCEDIMIENTO :

Paralelo a ***MN*** trazamos rectas $L_1;L_2;L_3$ .... etc.



* Paralelo a la perpendicular trazada a ***MN*** desde ***Q***, trazamos las distancias ***a;b;c;d*****.....** etc. de ***MN*** a las rectas $L_1;L_2;L_3;L_4$ respectivamente.

* Con centro en ***Q*** y radios ***a;b;c;d*** etc. tomamos distancias en $L_1;L_2;L_3;L_4$. los que nos darán los puntos $P_1;P_2;P_3$ y P_1'; P_2' ; P_3'. etc. que pertenecen al lugar geométrico.

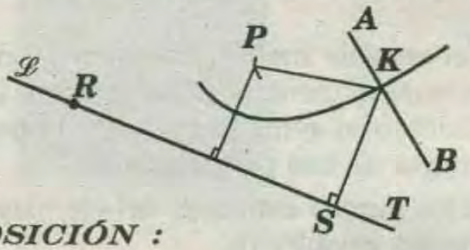
* El lugar geométrico que se logra es un arco parabólico.

PROPOSICIÓN :

Si se tiene una recta ***RT*** y un punto ***P*** fuera de ella, determinar un punto ***K*** en otra recta ***AB*** tal que ***PK*** equidiste a ***RT***.

RESOLUCIÓN :

Determinamos los puntos que equidistante del punto ***P***, y la recta $RT \subset \mathscr{L}$, que corta a ***AB*** en ***K*** .



PROPOSICIÓN :

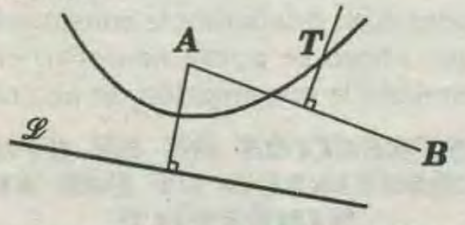
Determinar un punto ***T*** cuya distancia de los extremos de una recta ***AB***, sea igual a la distancia de este punto a otro que pertenezca a la recta $\mathscr{L}$.

RESOLUCIÓN :

construimos el lugar geométrico de los puntos equidistantes del punto ***A*** y la recta $\mathscr{L}$ (parábola).

* Intersecamos dicha curva con la mediatriz de ***AB*** y obtenemos el punto ***T***.

* ***T*** Equidista de $\mathscr{L}(R \in \mathscr{L})$, tambien de ***A*** y ***B*** respectivamente.



CONSTRUCCIÓN DE HIPERBOLAS, DADOS EL EJE TRANSVERSAL Y LOS FOCOS

MÉTODO: *Selección de puntos y trazado de arcos*

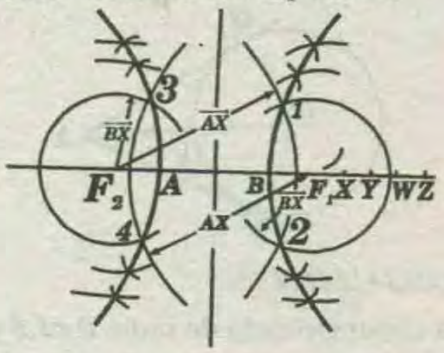
* Sean F_1 y F_2, los focos, y ***AB***, el eje transversal.

* Seleccionamos sobre el eje transversal un punto ***X*** cualesquiera.

* Con centro en F_1 y F_2 y radio ***BX***, trazamos dos arcos que se intersectarán con los arcos de radio ***AX*** trazados desde los mismos centros, según los puntos ***1;2;3*** y ***4***; estos serán los primeros puntos de la

hipérbola buscada.

* Para hallar otros puntos de la hipérbola, seleccionamos nuevos puntos sobre el eje transversal, tales como *W;Y;Z* y con igual procedimiento definimos la hipérbola.



CONSTRUCCION DE ESPIRALES E INVOLUTAS

CASO 1: *Construcción de* ESPIRALES

METODO :

De la circunferencia y el aumento de distancias continuas.

(Espiral de Arquímides: Es la curva plana originada por el movimiento uniforme de un punto alrededor de otro fijo, y que aumenta en forma continua su distancia a él).

* Dividir la circunferencia dada en un número adecuado de partes iguales.

* Dividir un radio en igual número de partes iguales a partir del Centro *O*.

* Los puntos de intersección entre los arcos de las circunferencias concéntricas, con las líneas divisorias determinan la espiral de Arquímides. Estos puntos se unen con la plantilla de curvas.

CASO 2 : *Construcción de* INVOLUTAS

INVOLUTAS, son curvas a manera de espirales que se logran en base a segmentos de recta, polígonos regulares o una circunferencia.

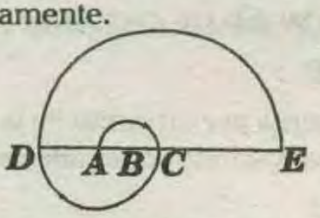
A) INVOLUTA DE UN SEGMENTO :

* Dado el segmento *AB* y con centro en *B* y radio *BA*, trazamos un arco *AC*.

* Con centro en *A* y radio *AC*, trazamos el arco *CD*.

* Con centro en *C* y radio *CD*, trazamos el arco *DE*.

* Y así sucesivamente.



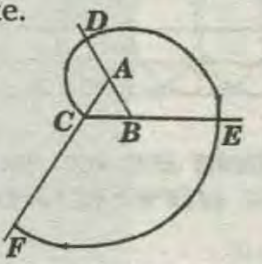
B) INVOLUTA DE UN TRIÁNGULO :

* Dado el triángulo *ABC*, prolongamos los lados del triángulo tal como se muestra en la figura.

* Con centro en *A* y radio *AC*, trazamos el arco *CD*.

* Con centro en *B* y radio *BD*, trazamos el arco *DE*.

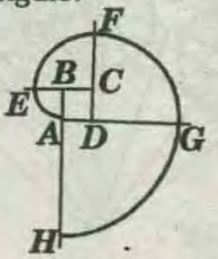
* Con centro en *C* y radio *CE*, trazamos el arco *EF*; y así sucesivamente.



C) INVOLUTA DE UN CUADRADO:

* Dado el cuadrado *ABCD*, prolongamos sus lados tal como se muestra en la figura.

* Con centro en *B* y radio *BA*, trazamos el arco *AE*; siguiendo luego el mismo proceso que para hallar la involuta del triángulo.



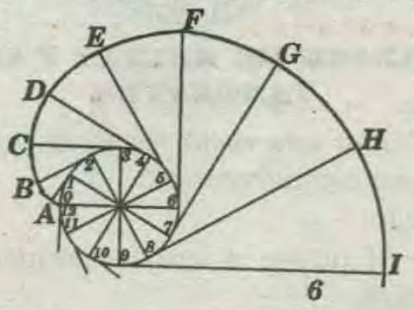
D) INVOLUTA DE UNA CIRCUNFERENCIA :

* Dividimos la circunferencia dada en un número conveniente de partes iguales y trazamos las tangentes de éstos puntos de división.

* Con centro en el punto *1* y radio *1A* , trazamos un arco que corte a la tangente siguiente en el punto *B*.

* Con centro en *2* y radio *2B*, trazamos un arco hasta cortar la siguiente tangente en *C*.

* Se sigue el mismo procedimiento hasta completar la involuta.



TRAZADO DE CURVAS CICLOIDALES

CONSTRUCCIÓN DE UN CICLOIDE :

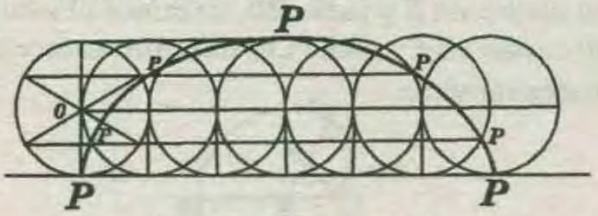
CICLOIDE :

Es la curva descrita por un punto de la circunferencia que se desplaza rodando sobre una recta como base.

MÉTODO:

* Dividir la circunferencia en un número adecuado de partes iguales.

* Determinar posiciones sucesivas de la circunferencia y de un punto sobre ésta.

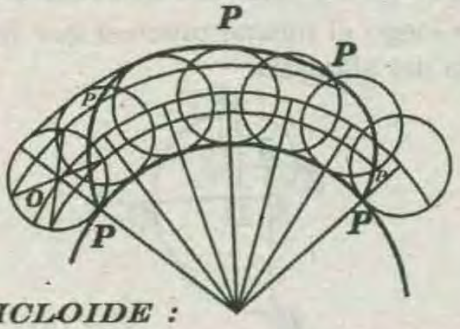


CONSTRUCCIÓN DE UN EPICICLOIDE Y UN HIPOCICLOIDE

EPICICLOIDE :

Es la curva descrita por un punto de una circunferencia que se desplaza rodando sobre la convexidad de una línea circular.

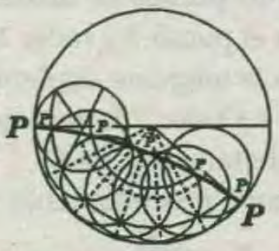
METODO: *(Se aplica el mismo criterio anterior)*



HIPOCICLOIDE :

Es la curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda sobre la concavidad de una línea circular.

MÉTODO: *(Se aplica el mismo criterio anterior).*



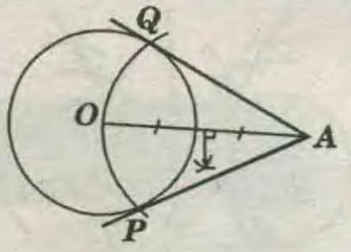
TRAZADO DE RECTAS Y CURVAS TANGENTES

CASO 1: *Trazar una recta tangente por un punto exterior a una circunferencia .*

MÉTODO :

* Unimos el punto **A** con el centro **O** de la circunferencia.

* Con diámetro **OA** y centro en la mitad de éste segmento, trazamos un arco que cortará a la circunferencia en los puntos **P** y **Q**; estos serán los puntos de contacto de las tangentes buscadas, finalmente, unimos los puntos hallados con **A**.



PROPOSICIÓN :

Dados una circunferencia de radio **R=1,5** y un punto **x** exterior a ella, trazar una recta que subtienda en ella un arco de **2cm**.

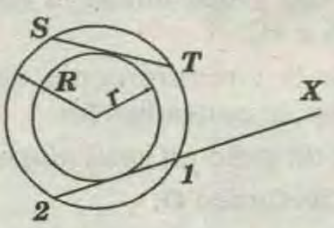
PROCEDIMIENTO :

* Disponemos una cuerda cualquiera tal como **ST=2cm**.

* Tangente a ella trazamos una circunferencia de radio **r**

* Y, tangente a esta última $\overline{X12}$ y se tiene la cuerda **12** pedida.

* 2 soluciones.



PREPOSICION :

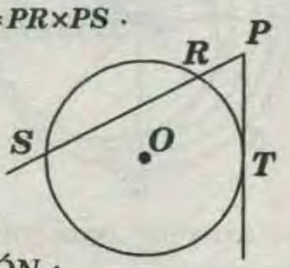
Hallar la longitud de la tangente a una circunferencia.

PROCEDIMIENTO :

Si **PT** es la longitud de la tangente, trazamos una secante cualquiera que corta a la circunferencia en **R** y **S**.

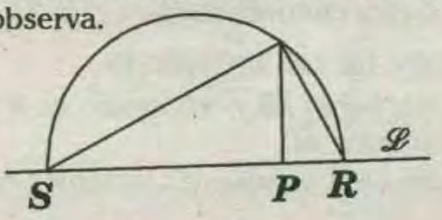
* El valor de la tangente está dado por la relación:

$$PT^2 = PR \times PS$$.



DEMOSTRACIÓN :

Tomamos una recta **L**, y sobre ella llevamos **PR** y **PS** como se observa.



* con centro en RS, trazamos una semicircunferencia

* Por P una perpendicular que corta a la circunferencia en el punto T.

* Observar que PT' tiene la misma longitud que PT

Luego sabemos que $LT'^2 = PS \times PR = LT^2$.

Observar que PT' es la altura del Triángulo $ST'R$.

CASO 2: *Trazar rectas tangentes a dos circunferencias*

Sean las circunferencias de centros O_1 y O_2, y dichos R_1 y R_2 respectivamente.

A) TRAZO DE RECTAS TANGENTES EXTERIORES

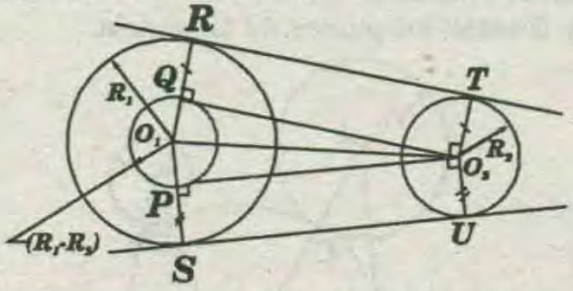
MÉTODO :

* Trazamos una circunferencia con centro en O_1, y radio igual a la diferencia de los radios.

* Desde O_2 trazamos las rectas tangentes a la nueva circunferencia, en los puntos P y Q Prolongar O_1Q, hasta R y O_2A hasta S.

* Trazar O_2T y O_2U paralelas a O_1R y O_1S respectivamente.

* Unir R con T y S con U, que serán buscadas.



B) TRAZO DE RECTAS TANGENTES INTERIORES :

MÉTODO :

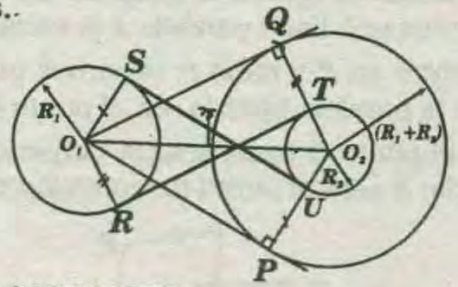
* Trazar una circunferencia con centro en O_2 y radio igual a la suma de los radios.

* Dese O_1 trazamos las rectas tangentes a la nueva circunferencia en los puntos P y Q.

* Los segmentos O_2Q y O_2P cortan en T y U a la circunferencia de centro O_2.

* Trazamos, luego, O_1R y O_1S paralelos a O_2T y O_2U respectivamente.

* Unimos S con U y R con T que serán las rectas buscadas..



PROPOSICIONES :

Hallar el centro de una circunferencia que pase por el punto P, con la condición que sea tangente a dos rectas L_1 y L_2.

PROCEDIMIENTO :

* Prolongamos L_1 ó L_2 hasta hallar un punto C de concurrencia entre ambas rectas.

* Tomamos la bisectriz respectiva, tal como CV.

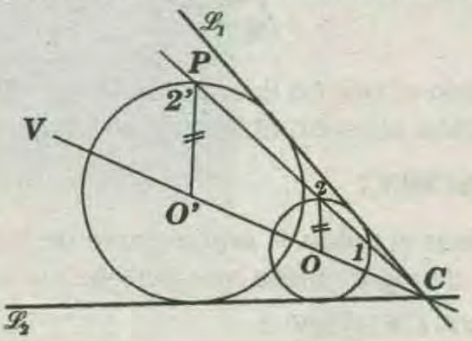
* Con centro en cualquier punto de CV construimos una circunferencia de radio r arbitrario.

* Unimos P con C, que corta a la circunferencia en los puntos 1 y 2.

* Paralelo a $O2$ trazamos PO' ó $2'O'$.

* $O'P$ ó $O'2'$ es el radio de una circunferencia de radio R que pasa por P y es tangente a L_1 y L_2 respectivamente.

* Otra solución se podrá determinar al usar O_1.



PROPOSICIÓN :

Dados dos puntos cualesquiera como K y C, y una circunferencia de centro en Q, determinar otra circunferencia que sea tangente a la primera y que pase por dichos puntos.

PROCEDIMIENTO :

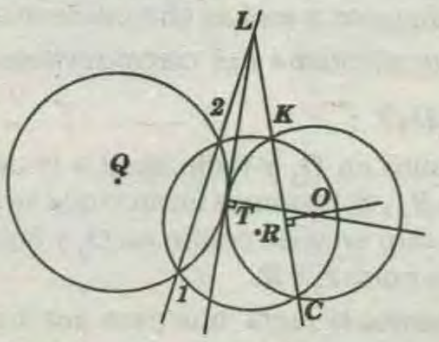
* Con centro en cualquier punto R, trazamos una circunferencia que pase por K y C y sea secante a la circunferencia de centro Q en 1 y 2 respectivamente.

* Trazamos 12 y KC que se encuentran en L.

* Trazamos LT, tangente a la circunferencia de centro Q.

* Perpendicular a LT en T trazamos una perpendicular que encuentra a la mediatriz de KC en el punto O.

* El punto O es centro de la circunferencia de radio OT que pasa por K y C y es tangente a la circunferencia de centro Q.

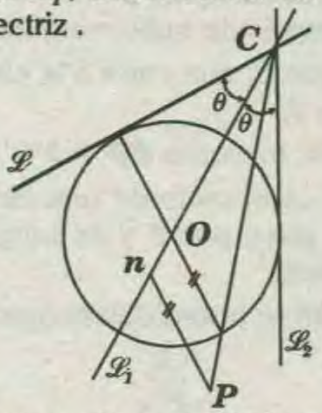


APLICACIÓN :

Teniéndose las rectas L y $L_1 / L \not\subset L_1$, y un punto fuera de dichas rectas, Hallar un punto n en L_1 que equidiste de L y el punto P.

RESOLUCIÓN :

Ubicamos $L \not\subset L_1$, construimos otro ángulos, tal que L_1 sea bisectriz .



Realizando el mismo tipo de construcción que en la proposición anterior, ubicamos el punto n.

APLICACIÓN :

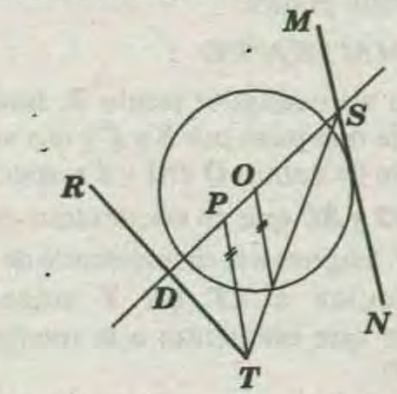
Determinar el punto P, equidistante de los extremos de RT y de algún punto que pertenezca a MN.

RESOLUCIÓN :

Incidimos la mediatriz de RT en MN, $S \in MN$

* Con DS bisectriz construimos una circunferencia de radio arbitrario tangente a MN .

* Por construcción el punto P.



CASO 3: trazar un arco tangente a dos circunferencias

Dadas las circunferencias de centro O_1 y O_2 y radios r_1 y r_2 respectivamente, debemos trazar un arco de radio R tangente a ambas circunferencias.

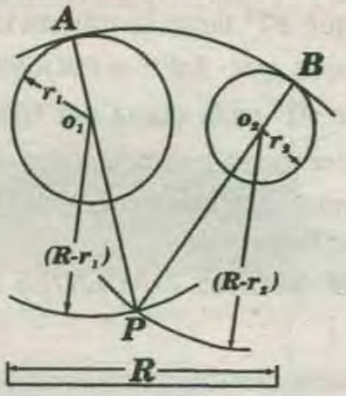
A) ARCO QUE INSCRIBE A LAS CIRCUNFERENCIAS DADAS :

MÉTODO :

* Con centro en O_1 y radio igual a la diferencia de los radios R_1 y R, trazamos un arco que se intersectará en P con otro arco de centro en O_2 y radio igual a la diferencia entre r_2 y R.

* Prolongamos la recta que pasa por los puntos P y O_1 hasta A, de igual modo P y O_2 hasta B.

* Los puntos A y B hallados serán los puntos de tangencia del arco de radio R y centro en el punto P.

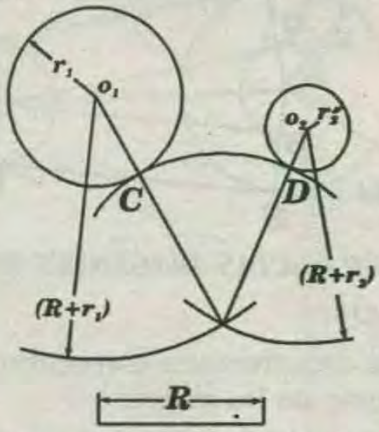


B) ARCO QUE CIRCUNSCRIBE A LAS CIRCUNFERENCIAS

MÉTODO:

* El procedimiento es semejanza, con la diferencia que para el centro O del arco pedido, se toman como centros O_1 y O_2 y como radios de longitud de la suma de R y r_1 por un lado; y de R y r_2 por el otro, respectivamente.

* C y D serán los puntos de tangencia.



EMPALME DE RECTAS Y CURVAS

Empalme consiste el ligar sin interrumpir líneas rectas y/o curvas.

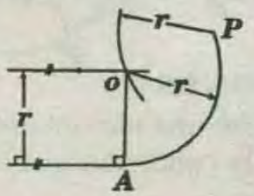
CASO 1: *Empalmar un punto y una recta mediante un arco dado.*

MÉTODO : *del arco*

* A una distancia igual a la longitud del radio dado *(r)* trazamos una línea paralela a la recta dada.

* Con centro en P y radio r, trazamos un arco que cortará a la paralela trazada en el punto O.

* Desde el punto O trazamos OA perpendicular a la recta dada; A será el punto de conexión del punto y la recta.

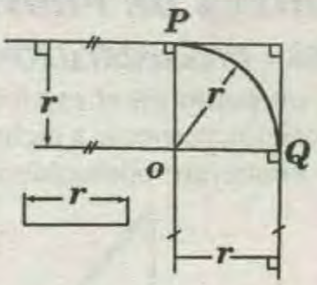


CASO 2 : Empalmar dos rectas dadas:

MÉTODO : DE LAS RECTAS PARALELAS

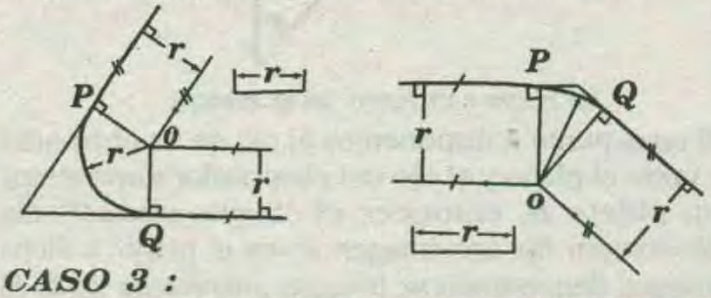
* En la parte interna del ángulo formado por las rectas dadas, y una distancia igual a la longitud del radio dado, trazamos paralelas a las rectas dadas ; el punto de intersección *O* de dichas paralelas será el centro del arco buscado.

* Desde el punto *O* trazamos perpendiculares a las rectas dadas, determinando los puntos *P* y *Q* que serán los puntos de conexión del arco y las rectas dadas.



NOTA:

Observar que el procedimiento es único, ya sea para empalmar ángulos agudos, rectos u obtusos .



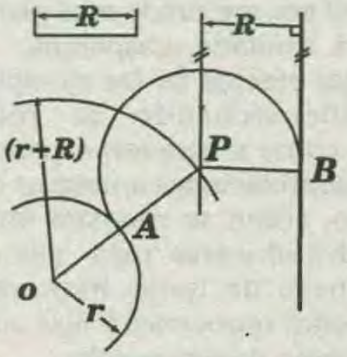
CASO 3 :

EMPALME DE UNA RECTA Y UNA CURVA MEDIANTE UN ARCO DE RADIO DADO.

MÉTODO :

* Trazamos un arco con centro en *O* y radio igual a la longitud de la suma *(R+r)* de los radios dados que se cortará en el punto *P* con una recta paralela a la recta dada y que se pasa a una distancia *R* de ésta.

* Trazamos el segmento *OP* que corta a la circunferencia en *A* ; y desde *P* una norma a la recta, tal como *PB*; *A* y *B* serán los puntos de contacto buscados.



PROPIEDAD DE SIMETRÍA , APLICACIONES CARACTERÍSTICAS

CASO 1: EN EL PLANO

Dados dos puntos y una recta, determinar en ésta un punto de modo que la suma de los segmentos formados por cada punto dado y el punto sobre la recta sea mínimo . Sean los puntos *A* y *B* , y la recta *L* Nos piden determinar un punto *P* de modo que *(AP+PB)* sea mínimo.

PROCEDIMIENTO :

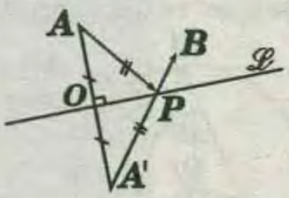
* Por simetría determinamos el punto *A'*.

* La recta *A'B* corta a *L* en el punto *P*.

* *A'P* es simétrico de *AP* y de igual longitud , luego *P* es el punto buscado.

* La suma de los segmentos *AP* y *PB* es mínimo

Observar que los puntos *P; A; B; A'* y la recta *L* son coplanares, todos pertenecen o están contenidos en el plano *Q*.



CASO 2 : EN EL ESPACIO

Dados en un plano y dos puntos fuera de ella determinar un punto en el plano, tal que la trayectoria que una los puntos dados con el punto en el plano, sea mínima.

Dados el plano *P*, los puntos *A* y *B* fuera del plano; hallar un punto *M* tal que la trayectoria *AMB* sea mínima.

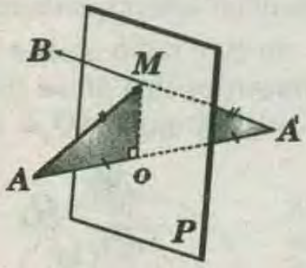
PROCEDIMIENTO:

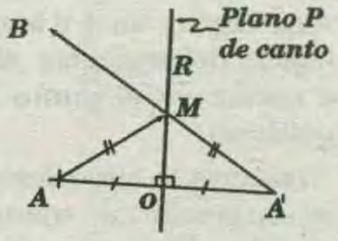
* Disponemos el plano dado de canto como se muestra la figura.

* Hallamos *A'* simétrico de *A* al otro lado del plano y a igual distancia, luego *AM=A'M*.

* La recta *A'B* corta al plano de canto en *M*.

* *AMB* es la trayectoria mínima, porque *(AM+MB)* es menor que cualquier otra, ejemplo *(AR+RB)* es menor que cualquier otra, por ejemplo *(AR+RB)*.





CONSTRUCCIONES DE UN ARCO CAPAZ, APLICACIONES CARACTERISTICAS

CONSTRUCCIONES DE UN ARCO CAPAZ :

PROPOSICIÓN :

Determinar el lugar geométrico de todos los puntos que hacen un ángulo constante α con un segmento

AB y/o sus extremos. Resolver cuando $\alpha=45°$ fig(*a*) y cuando $\alpha=110°$ en la fig(*b*).

MÉTODO :

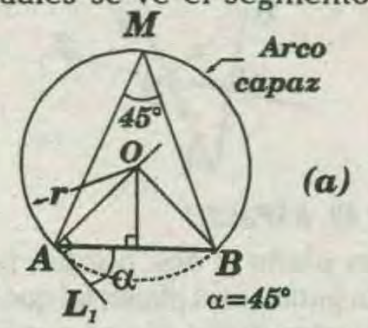
* Por uno de los extremos, por ejemplo *A*, determinamos un ángulo α mediante la recta L_1.

* Por el punto *A*,trazamos una perpendicular a la recta L_1.

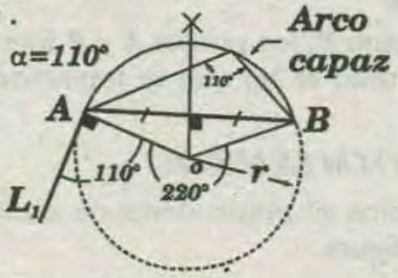
* Esta perpendicular interseca a la mediatriz del segmento *AB* en el punto *O*.

* El punto *O* es centro de una circunferencia de radio *OA*.

* El arco *AMB* es el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve el segmento *AB y/o* sus extremos



bajo un ángulo constante de α (*45°* en la fig(*a*) y *110°* en la fig(*b*)) .



APLICACIONES CARACTERISTICAS

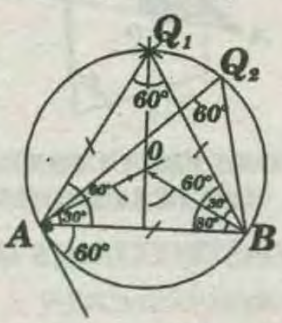
EJEMPLO 1 :

Dado el segmento *AB*, determinar el lugar geométrico de todos los puntos *Q* tal que el ángulo *AQB=60°*.

PROCEDIMIENTO: *(ensayaremos un método particular)*

* Con centro en *A* y luego en *B*, y radio igual a la longitud del segmento *AB*, trazamos dos arcos que se cortan en el punto Q_1. el triángulo AQ_1B es equilátero.

* Trazamos la circunferencia circunstancia al triángulo formado; el arco superior *AB* es la solución.

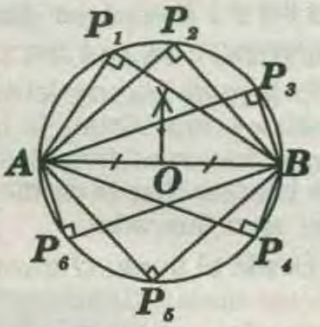


EJEMPLO 2 :

Hallar el lugar geométrico de los triángulos rectángulos cuya hipotenusa es el segmento *AB*.

RESOLUCIÓN :

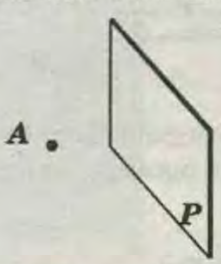
El segmento *AB* es la hipotenusa de los triángulos rectángulos (visto bajo un ángulo constante de *90°*) que nos forman los puntos de una circunferencia de centro en el punto medio del segmento *AB*.



FORMACIONES DE PROYECCIONES

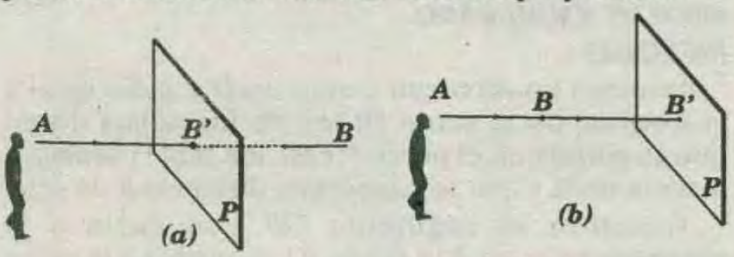
PROYECCIONES - INTERPRETACIÓN

Consideremos un punto en el espacio y un plano[1] en cualquier posición respecto a dicho punto, tal que el punto no se encuentre contenido en el plano .



UN PLANO Y UN PUNTO EN EL ESPACIO

Si en el punto *A* disponemos el ojo de un obsevador y entre el plano y el ojo del observador disponemos un objeto *B*, entonces el ***"rayo visual"*** del observador fija una imagen *B'* en el plano, a dicha imagen denominamos: Imagen proyectada de *B*. Al punto *A* llamamos también foco de proyección.



(proyección de punto)

El plano al cual nos referimos es el plano geométrico bidimensional, ilimitado, trasparente y sin espesor solamente para efectos de los ejemplos mostrados en los gráficos(cuando se requiera), los mostraremos como si tuvieran espesor, para anular este modo interpretaciones ambiguas de su posición en el espacio, como se muestra en la Figura. El objeto *B* podrá ubicarse más alla del plano de proyección pero de todas maneras el ojo del observador podrá retroceder y fijar una imagen del objeto en el plano de proyección .

DEFINICIONES FUNDAMENTALES SOBRE PROYECCIONES

PROYECTAR :

Objetivizar lo que nuestro sentido de la vista capta de las formas y dimensiones de los objetos en el

plano. Plano de proyecciones: superficie sin espesor, transparente, ilimitado y bidimensional donde se fija o proyecta la imagen de un objeto.

PROYECCIÓN :

figura que resulta de proyectar los puntos que se observa del objeto en la dirección del plano de proyección.

RECTA VISUAL Y PROYECTANTE

RECTA VISUAL :

Es la línea por donde transita la mirada del observador hasta encontrar el objeto.

PROYECTANTE :

Es la línea por donde se fija la imagen del objeto en el plano de proyección .

La recta visual y la proyectante se hallan contenidas en las mismas rectas. En el ejemplo de la Figura son rectas o líneas visuales ***AB*** y ***AB'*** y proyectantes ***BB'*** y ***BB'***, respectivamente.

FOCO DE PROYECCIÓN :

O punto de proyección, es el lugar desde donde se "emite" el "rayo visual" de la proyección. Adelantamos que este punto podrá considerarse cercano al objeto, o tan lejano de ella en el infinito. Resultado de ello serán las proyecciones cónicas y cilíndricas, respectivamente .

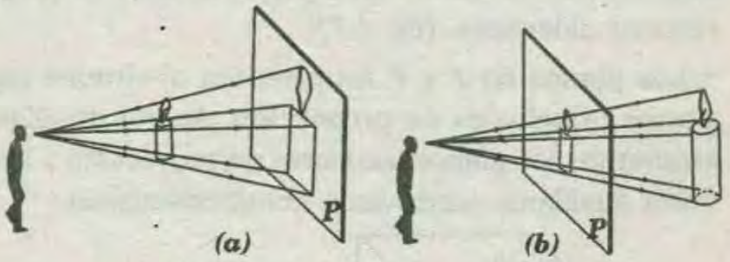
OBJETO PROYECTADO :

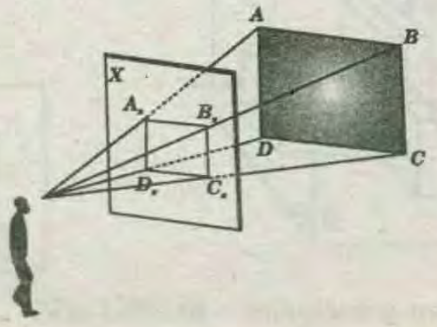
Todo lo que, por las percepciones que tenemos de su propiedades y dimensiones, pueda ser proyectado

TIPOS DE PROYECCIONES

A) PROYECCIÓN CÓNICA :

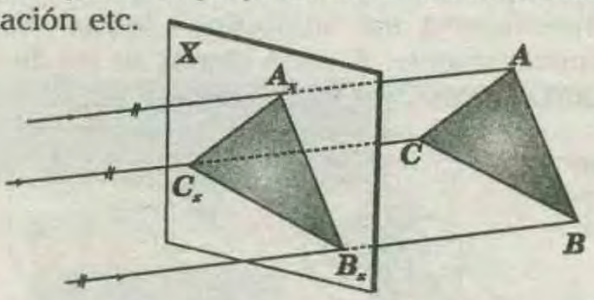
Las rectas de un punto (foco de proyección) (se supone cercano al objeto), formando un haz divergente y denso de "rayos visuales". El tamaño de la proyección depende de la distancia entre el foco el plano y el objetivo proyectado. Una aplicación particular de este tipo de proyecciones son las proyecciones en perspectiva.





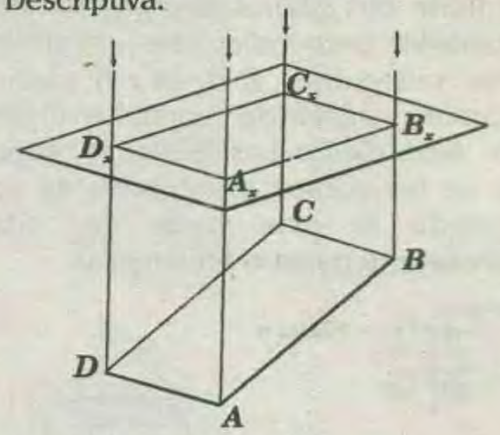
B) PROYECCIONES CILINDRICA :

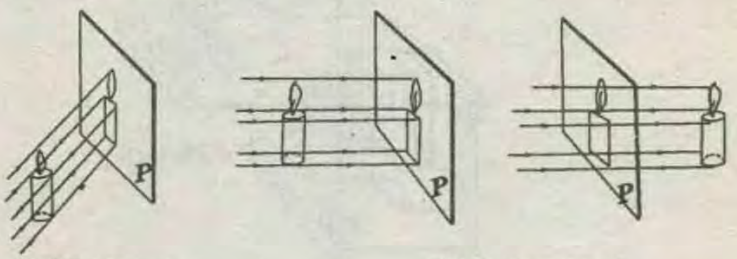
Los rayos proyectantes son paralelos entre sí formado éstos un ángulo cualquiera con el plano de proyección. El tamaño del objeto puede ser igual al de la proyección siempre y cuando al objeto, sea paralelo al plano de proyección. Se usa en sombras, iluminación etc.



C) PROYECCIONES ORTOGONAL :

Los rayos proyectantes son paralelos y además perpendiculares al plano de proyección. El tamaño de la proyección es menor al tamaño del objeto y será del mismo tamaño siempre y cuando el objeto y el plan de proyección sean paralelos. Se une en geometría Descriptiva.





(a)Oblicua *(b)Ortogonal*

PLANOS PRINCIPALES DE PROYECCIÓN, UBICACIÓN

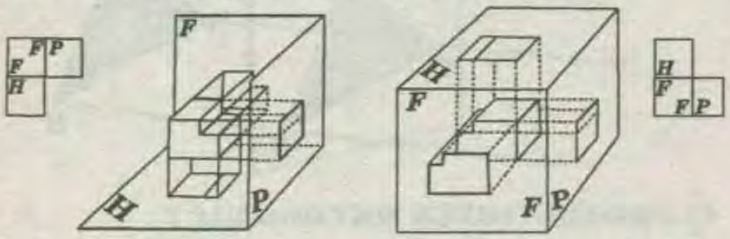
De todo lo anterior deducimos que los planos de proyección pueden fundamentalmente ocupar dos posiciones :

a) Ojo del observador – Objeto – Plano de proyección

b) Ojo del observador – Plano de proyección – Objeto

Tres planos mutuamente perpendiculares formarán un sistema tiédrico de planos de proyección, si los utilizamos para tal fin. Las figuras siguientes nos

muestran tres planos mutuamente perpendiculares en los que ortogonalmente se proyecta un objeto. Estos objetos de proyección de acuerdo a la posición que ocupan en relación al objeto, se denominan: Planos de proyección ***HORIZONTAL, FRONTAL*** y de ***PERFIL***, correspondiendo sus notaciones respectivas a los 'símbolo – letras' ***H;F*** y ***P***, respectivamente. A estos planos se les denomina ***PLANOS PRINCIPALES DE PROYECCION.***



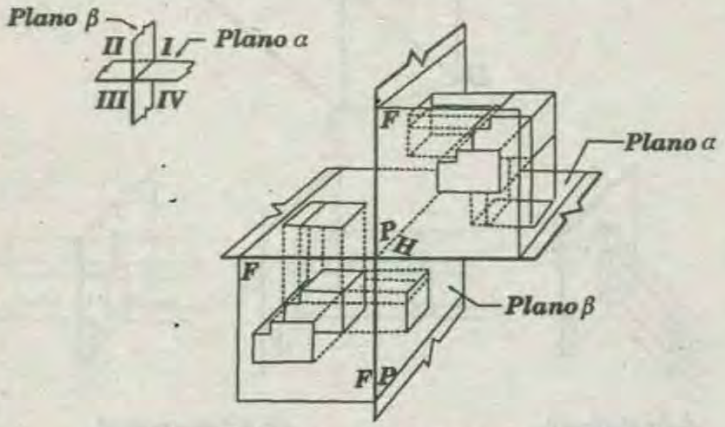
(a) D.I.N *(b) A.S.A*

(Primer cuadrante) *(Tercer cuadrante)*

PLANOS PRINCIPALES DE PROYECCIÓN

SISTEMAS DEL PRIMER Y TERCER DIEDRO

Si se tiene dos planos α y β y los disponemos mutuamente perpendiculares, se generan cuatro diedros consecutivos: ***I; II; III*** y ***IV*** diedro. Ahora, si realizamos el artificio de 'montar' en el primer diedro y en el tercer diedro. Los objetos se proyectan en las caras de los planos principales de proyección, generando de este modo dos sistemas de proyección ortogonal o rectangular.



sistemas del 1er y 3er diedro

SISTEMA DEL PRIMER DIEDRO : NORMA DIN

En relación a los planos ***H; F; P***, el observador ocupa una posición tal, que el objeto se encuentra entre el observador y los planos de proyección.

Esta disposición recíproca de planos de proyección perpendiculares, cumple el sistema del Primer diedro; sistema utilizado en Alemania, la Unión Soviética y otros países de Europa. Genéricamente se le conoce con la sigla ***DIN***, Que corresponde a las iniciales de: ***DEUTSCHE INDUSTRIE NORMEN.***

SISTEMA DEL TERCER DIEDRO: NORMA ASA

En relación a los planos de proyección ***H*** y ***P***, el observador ocupa una posición tal, Que los planos de proyección (mutuamente perpendiculares) se encuentran entre el observador y el objeto. Esta disposición cumple el sistema del Tercer diedro, sistema utilizado en los Estados Unidos, Inglaterra, Países Bajos, Canadá y en la mayoría de los países donde los Estados Unidos hace influir su dominio económico – tecnológico. Genéricamente se le conoce con la sigla ***ASA***, Que corresponde a las iniciales de: ***AMERICAN STANDARD ASOCIATION.***

En adelante, el presente capítulo, lo discurrimos a través de la Norma ***ASA***, es decir por el sistema del Tercer diedro (Sistema del tercer ángulo espacial). Mediatamente tendremos nociones sobre abatimiento de planos, línea de pliegue y depurado de proyecciones.

NORMA ASA :

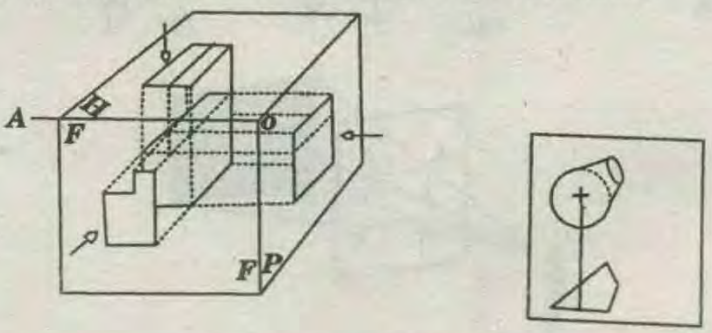
PLANOS PRINCIPALES DE PROYECCIÓN. LÍNEAS DE PLIEGUE

Nuestro Sistema de Planos de Proyección corresponde al sistema del tercer diedro (Sistema del tercer ángulo espacial); donde en relación al tiedro de planos de proyección ***H; F; P***, el observador ocupa una posición tal que dichos planos (mutuamente perpendiculares) se encuentran entre el observador y el objeto.

* Con respecto al plano horizontal ***(H)***, frontal ***(F)*** y de perfil ***(P),*** el ojo del observador se halla arriba, delante y al costado, respectivamente, de los planos de proyección (siempre en el infinito).

* Los planos de proyección son ilimitados y 'transparentes', en muchos ejemplos los consideramos como una caja cúbica; sólo por razones didácticas. (fig. ***1.7***).

* Los planos ***H; F*** y ***P*** representan al sistema de planos principales de proyección. Aparte de ellos tendremos los planos auxiliares de proyección y las vistas auxiliares sucesivas o complementarias.



Planos principales – ***NORMA ASA***

LÍNEA DE PLIEGUE *(o intersección de 2 planos principales)*

Es la línea recta que se halla 'uniendo' dos planos de proyección. Actúa como 'bisagra' a todo su largo cuando los planos o pliegues de proyección son abatidos. En la figura anterior la recta ***OA*** es una línea de pliegue, su notación queda entendido como: ***H–F***, que implica: línea de pliegue entre los planos ***H*** y ***F***. ***V***: ***F–P*** implica: línea de pliegue entre los planos ***F*** y ***P***.

* Existe sinonimia entre línea de pliegue , línea de tierra y eje de proyección.

EL PUNTO

PROYECTANTES DEL PUNTO : COTA , ALEJAMIENTO , APARTAMIENTO

* Un punto ***A***, en los planos ***H ; F ; P***, se proyecta ortogonalmente. Luego: A_H; A_F; A_P, denotadas de este modo, son las proyecciones de ***A*** en dichos planos.

* La distancia desde el punto objeto a sus proyecciones en los planos ***H;F*** y ***P***, respectivamente, se les denomina : ***COTA, ALEJAMIENTO Y APARTAMIENTO***.

COTA :

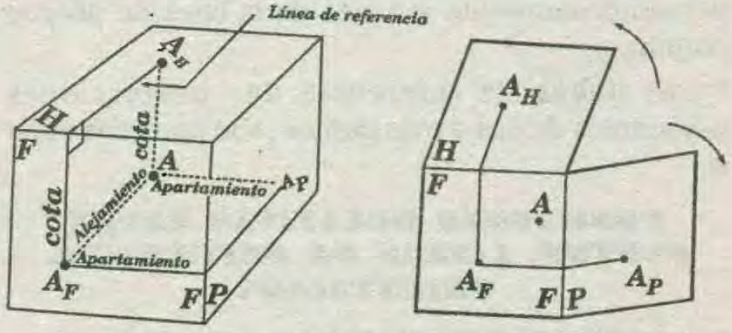
Es la distancia perpendicular del punto objeto al plano Horizontal ***(H)***.

ALEJAMIENTO :

Es la distancia perpendicular del punto objeto al plano Frontal ***(F)*** .

APARTAMIENTO :

Es la distancia perpendicular del punto objeto al plano Perfil ***(P)***.



Proyectantes del punto

ABATIMIENTO DE PLANOS DE PROYECCION. DEPURADO. LÍNEAS DE REFERENCIA

LÍNEA DE REFERENCIA :

* Es la línea de trazo fino que une las proyecciones adyacentes de un punto a través de la línea de pliegue común.

* Cuando los planos se hallan no abatidos, esta línea tiene el ángulo de los planos de proyección, y nos 'refiere' la posición del punto en el espacio respecto a las líneas de pliegue .

ABATIMIENTO DE PLANOS DE PROYECCIÓN

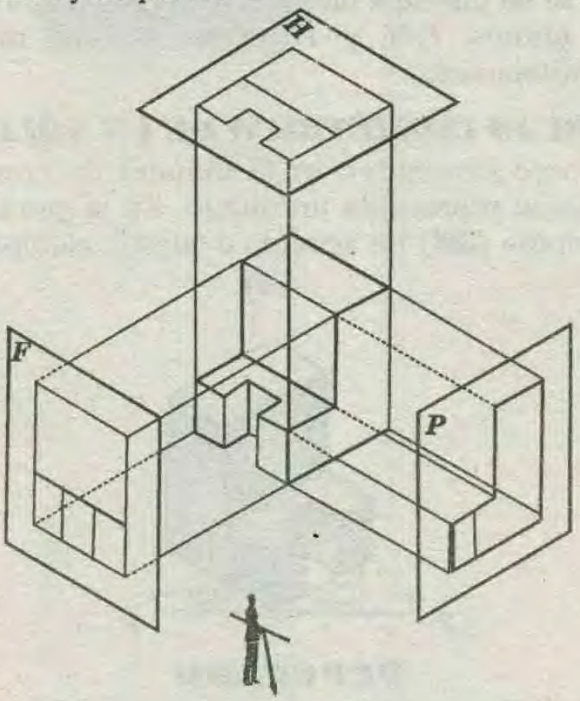
Consiste en girar ***90°*** los planos ***H*** y ***P*** (tomando ***F*** como fijo) alrededor de ***H-F*** y ***F-P***. Obteniéndose de este modo 'un solo plano'.

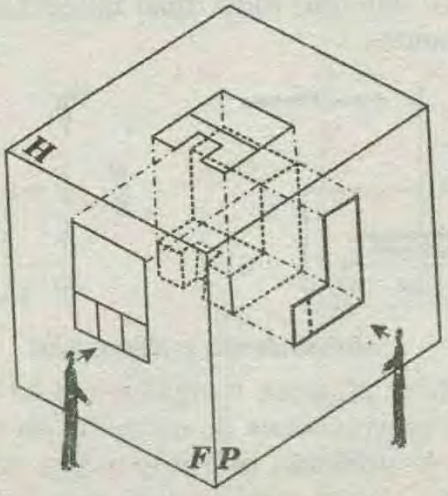
* Ahora, las líneas de referencia que unen dos proyecciones adyacentes forman un ángulo de ***180°*** a través de la línea de pliegue común.

* Al abatir los planos se ha cambiado la disposición espacial de los planos, más no la posición del objeto.

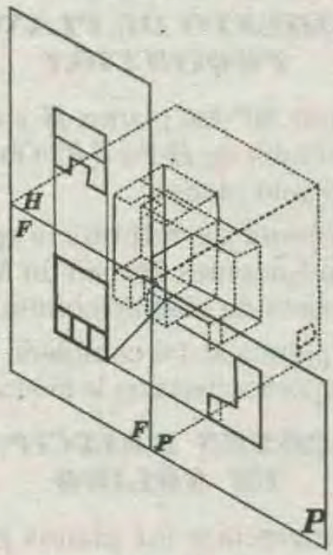
PROYECCIONES PRINCIPALES DE UN SÓLIDO

El objeto se proyecta a los planos principales de proyección como se indican en la ***figura***s. Luego se hace los rebatimientos de los planos principales horizontal y de perfil .





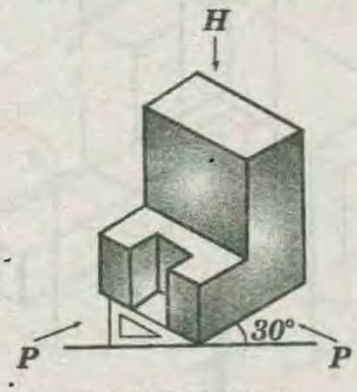
La visual de los tres observadores permiten hallar las tres proyecciones principales del sólido



Se observa que el plano ***P*** ha rotado ***90°*** y se ha puesto a nivel del plano ***F*** (bisagra ***F/P***) .El plano ***H*** ha rotado ***90°*** y se ha puesto a nivel del plano ***F*** (bisagra ***H/P***). Los planos ***F;H*** y ***P*** están en un mismo plano(depurado).

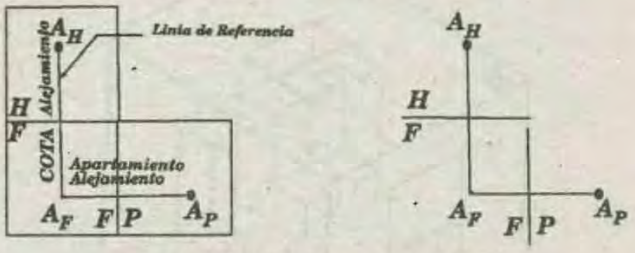
DIBUJO ISOMÉTRICO DE UN SÓLIDO

El dibujo isométrico es la manera de como el dibujante representa un objeto. En la geometría Descriptiva ***(30°)*** De acuerdo a nuestro ejemplo.



DEPURADO

Consiste en eliminar todo trazo innecesario en los planos abatidos.



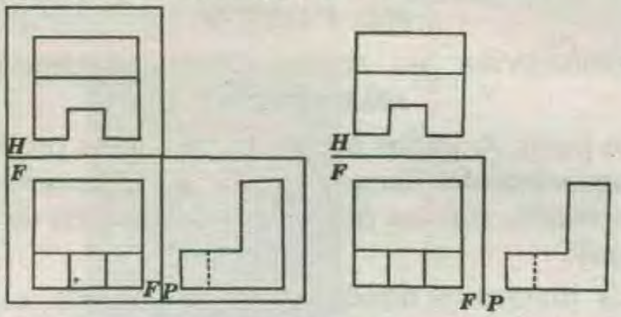
Abatimiento y depurado

* Como podrá al mirar, imaginarse el lector A_H, A_F, A_P, son las proyecciones de un punto en el espacio que toma la posición que nos indica su cota ,su alejamiento y apartamiento en el depurado.

* Es decir, que las proyecciones del objeto nos muestra la posición del objeto en el espacio respecto a un sistema de planos de proyección. Se ha logrado trasmutar un 'problema' espacial en uno plano.

* Al observar el depurado, es conveniente que el lector se imagine el cuadro espacial que ella representa.

Como se ha dicho anteriormente el depurado consiste en la representación de los planos de proyección en un solo plano. De acuerdo a nuestro ejemplo anterior su depurado será .



PLANO ADYACENTE :

Es el plano de proyección contíguo, separado por una línea de pliegue. Por ejemplo el plano ***P*** es adyacente del plano ***F***.

PLANO ANEXO :

Es un plano que se halla separado de otro por un plano adyacente Por ejemplo: el plano ***P*** es un plano anexo del plano ***H*** o viceversa.

LÍNEAS DE REFERENCIA :

* En el depurado, las proyecciones adyacentes de un punto tienen su línea de referencia alineada perpendicularmente a través de la línea de pliegue común.

* Las líneas de referencia de proyecciones adyacentes de dos o más puntos , son paralelas entre sí.

POSICIONES RELATIVAS ENTRE PUNTOS, LÍNEAS DE REFERENCIA, ORIENTACIÓN

POSICIÓN RELATIVA ENTRE DOS PUNTOS :

Para determinar la posición de un punto ***B***, lo relacionamos con otro punto ***A***, cuya posición la suponemos conocida.

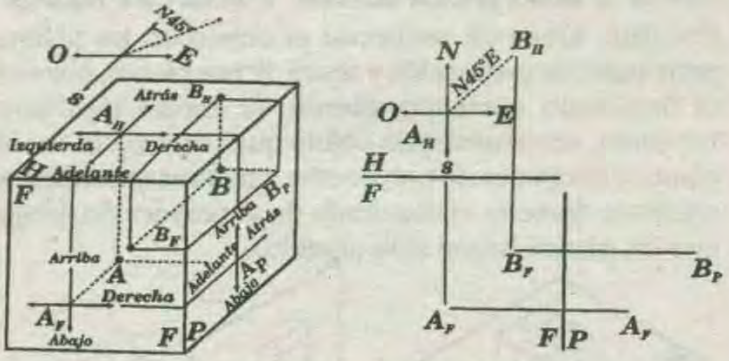
* Las proyecciones ortogonales de los puntos en los planos ***H;F ; P***, nos indicarán si un punto se halla "más arriba" o "más abajo", a la derecha o a la izquierda, delante o detrás, de otro punto cuya posición la suponemos conocida . En algunos casos podemos tener como referencia la línea de pliegue. Así el punto ***B***, de acuerdo a sus proyecciones en ***H***

se halla más atrás ya la derecha de *A*, y el plano frontal nos indica además que *B* se halla "más arriba", Luego la posición del punto *B* es atrás, a la derecha y arriba del punto *A*. (Figura posterior).

Las líneas de referencia de dos puntos a planos adyacentes, serán paralelas entre sí.

EJEMPLO :

$A_H A_F$ es paralelo a $B_H B_F$ y perpendicular a la línea de pliegue común $H - F$.



Posiciones relativas entre puntos - Orientación

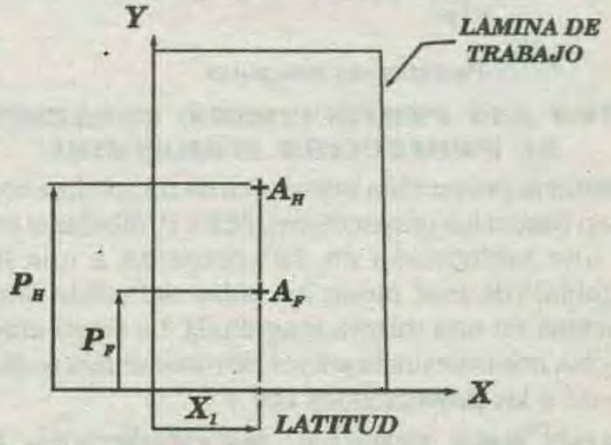
POSICIÓN DE ORIENTACIÓN:

Como podrá deducir el lector, solamente es posible definir en el plano horizontal una posición para las diferentes posiciones de orientación. Por convenio, el Norte de la ***BRUJULA***, indica la posición 'hacia atrás' en el plano *H*. La figura anterior, nos hace observar la dirección de las cuatro posiciones cardinales.

EJEMPLO :

El punto *B* se halla en una dirección *45°* al Nor-Este del punto *A*, cuya notación es : ***N45°E***, como se indica en el depurado.

GRAFICACIÓN DE UN PUNTO POR COORDENADAS



Graficación de las proyecciones de un punto por coordenadas

Si coincidimos la esquina inferior izquierda de nuestra lámina de trabajo con el origen de coordenadas cartesianas en el primer cuadrante, podremos determinar convencionalmente las proyecciones de un punto mediante la notación: $A(x_1; P_F; P_H)$, donde x_1 indica la posición de latitud del origen de coordenadas del punto *A*, cuyas proyecciones A_F y A_H están distantes P_F y P_H unidades sobre el eje *X*, dispuestos paralelamente al eje *Y*.

* En muchos problemas, no se dispone la posición de una de las proyecciones, y la solución generalmente requiere la ubicación de aquel punto mediante los métodos de la Geometría Descriptiva.

PROYECCIONES DE OBJETOS

Dispuesto entre un objeto (léase sólido geométrico) y el observador, el sistema de planos de proyección *H;F* y *P*; el sólido proyectará otorgonalmente toda su 'faz' que da hacia cada plano de proyección. En el presente acápite analizaremos cuatro principales problemas que se presentan al estudiar las proyecciones de un sólido.

I) Analizar la visibilidad de las proyecciones

II) Dado un sólido determinar sus proyecciones principales.

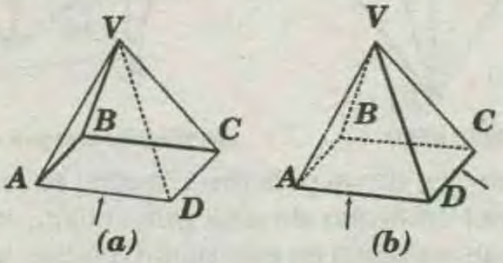
III) Dado las proyecciones principales de un sólido, construir su dibujo isométrico.

IV) Dado dos vistas o proyecciones, determinar la tercera proyección.

VISIBILIDAD DE LAS PROYECCIONES

Es el problema de averiguar qué vértices se muestran visibles al observador en las proyecciones, y cuáles ocultos. Las rectas visibles se trazan con líneas contínuas y las ocultas con pespunte.

La visibilidad nos muestra como se encuentra el objeto en el espacio.



REGLAS FUNDAMENTALES:

a) Es visible el contorno de toda proyección, en cualquier plano de proyección.

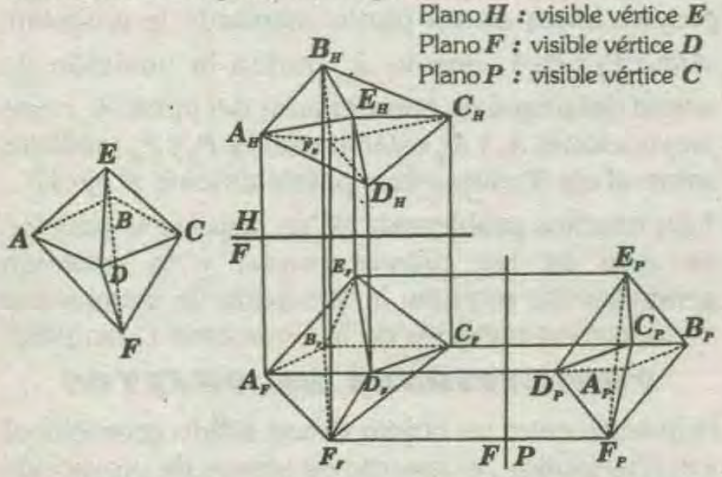
b) En general las proyecciones de un objeto, se mostrarán en el plano:

* ***Horizontal:*** Visibles e invisibles los puntos que están arriba y abajo, respectivamente.

* ***Frontal:*** Visibles e invisibles los puntos que están adelante y detrás, respectivamente.

* ***Perfil:*** Visibles e invisibles los puntos que están a

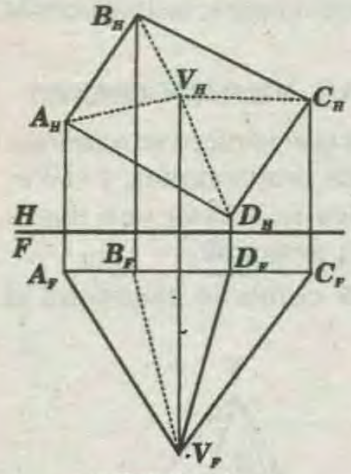
la derecha e izquierda, respectivamente.



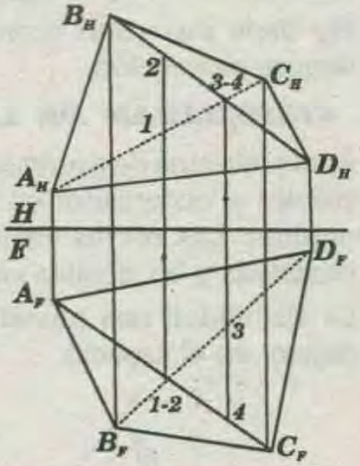
visibilidad

c) Es visible la arista o vértice más cercano al observador, que aparecerá en cualquier vista adyacente como el más cercano a la línea de pliegue común. En la figura el vértice *D* y las respectivas aristas en el plano *F*, son visibles por tal motivo.

d) Es visible el vértice o arista más lejano del observador si se encuentra dentro del contorno de la proyección. En la figura izquierda posterior el vértice *V* es invisible en el plano *H*.



VISIBILIDAD



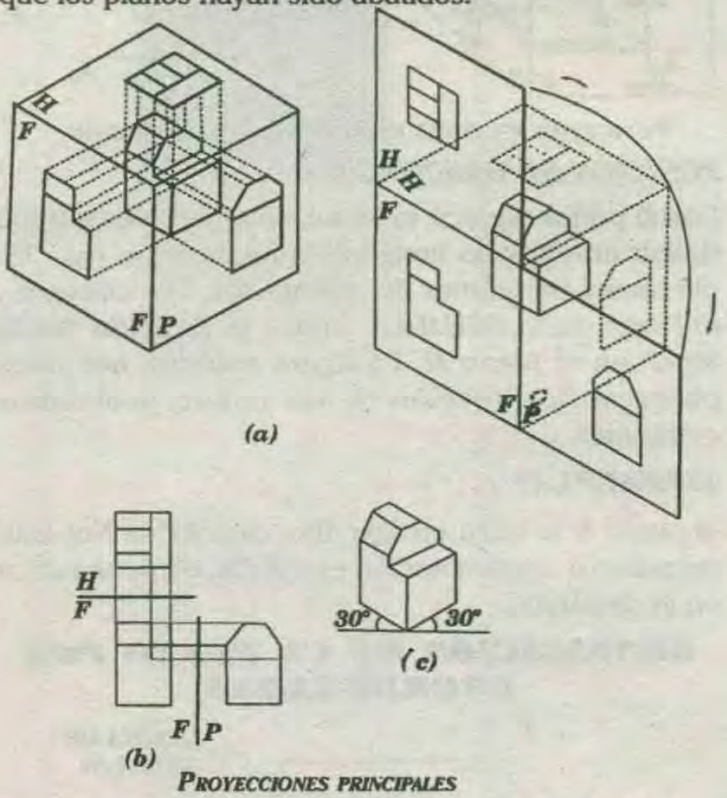
Aristas(rectas)que se cruzan

e) Si el vértice de un poliedro convexo se encuentra dentro del contorno de una proyección, todas las aristas que terminan en este punto tendrán la misma visibilidad del vértice. En la figura anterior izquierda en el plano *H*, el vértice *V* es invisible, luego las aristas que concurren en él , también son invisibles.

f) Para hallar la visibilidad de dos aristas que se cruzan en un plano de proyección, trazamos una línea de referencia desde el punto de cruce, hasta encontrar las proyecciones de las dos rectas en el plano adyacente, la primera recta que 'encuentre' dicha línea será visible en el punto de cruce del primer plano. la figura anterior derecha nos muestra un ejemplo: las aristas (rectas) *AC* y *BD* de un tetraedro muestran un punto de cruce en el plano *F*, al que denominamos *1 – 2*, de aquí trazamos una línea de referencia al plano *H*, la primera recta que encontramos es *AC* a la que denominamos *1*, y luego *BD* al que denominamos *2*, la primera recta que encontramos es visible, luego *AC* es visible en el punto de cruce del plano *F* es semejante el análisis para el punto *3 – 4*.

DADO UN SÓLIDO DETERMINAR SUS PROYECCIONES PRINCIPALES

Consiste, luego de proyectar el objeto en los planos principales de proyección y abatir dichos planos, obtener el depurado correspondiente, la Figura siguiente izquierda, nos muestra un objeto que se proyecta en los planos principales de proyección, mientras que la figura siguiente derecha el depurado de la proyección, luego que los planos hayan sido abatidos.



PROYECCIONES PRINCIPALES

DADO LAS PROYECCIONES, CONSTRUIR SU PROYECCIÓN ISOMÉTRICA

Construir la proyección isométrica de un sólido, consiste que en base a las proyecciones *H;F* y *P*, dibujar al sólido con una inclinación de *30°* respecto a una línea horizontal (de este modo los lados del sólido quedan reducidos en una misma magnitud), La figura anterior derecha, nos muestra la proyección isométrica realizado en base a las proyecciones *H;F* y *P* .

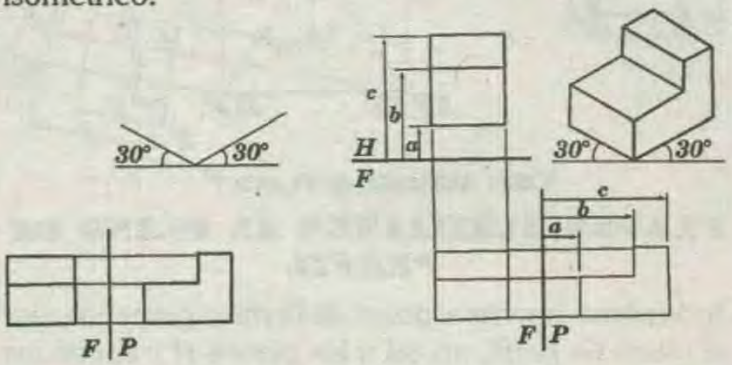
DADO DOS VISTAS, DETERMINAR LA TERCERA PROYECCION

Se construye la tercera proyección en base a las medidas tomadas de la proyección anexa a través de las líneas de referencia y con la ayuda de las líneas de pliegue. Las medidas serán tomadas (con un

compás), en la dirección opuesta a la proyección común adyacente, como se muestra en el siguiente ejemplo .

PROBLEMA:

Dadas las proyecciones ***F*** y ***P*** de un sólido, determinar su proyección horizontal y su dibujo isométrico.



RESOLUCIÓN :

Tomamos las medidas de alejamiento desde ***F–P*** en el plano de perfil y las trasladamos (a través de las líneas de referencia) al plano ***H*** a partir de la línea de pliegue ***H-F*** .

PROCEDIMIENTO DE LOS PLANOS AUXILIARES

Aquellos planos de proyección que ocupan una posición (respecto al objeto) que no es de los planos principales, y donde el objeto también se proyecta ortogonalmente , se denominan planos auxiliares de proyección. Al recurrir a este procedimiento, el proyectante, supone siempre estar en una posición frente a cada nuevo plano auxiliar donde se proyecta el objeto . .

TEORÍA DE LOS PLANOS AUXILIARES

Se denominan auxiliares, porque coadyuvan a lograr una nueva proyección del objeto (recta, plano, cuerpo geométrico, etc.) en una posición requerida más explícita, que las que ofrecen los planos principales.

* La práctica enseña que dichos planos se toman en relación (en relación perpendicular) a un plano principal de proyección.

* Siempre será posible disponer un plano auxiliar en relación(en relación perpendicular)a otro plano auxiliar al que denominaremos plano complementario o vista auxiliar sucesiva.

* Cuando se introduce un plano de proyección auxiliar se elige de acuerdo con alguna condición que responda a la finalidad de la construcción, es decir la elección de la posición de dichos planos está subordinado a la finalidad de determinar una nueva posición de las proyecciones del objeto.

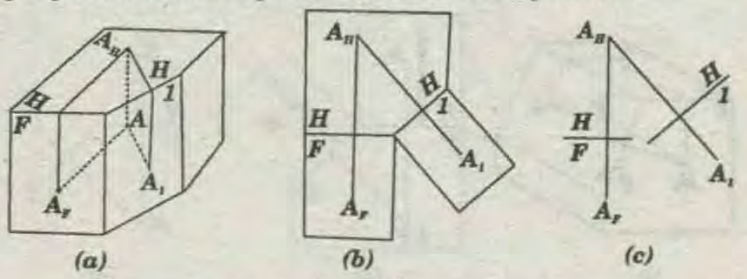
* Perpendicular a cada plano de proyección, se podrán trazar infinito número de planos de proyección auxiliares o complementarios, pero cada vez de acuerdo al requerimiento del problema.

* Al introducir un nuevo plano auxiliar o complementario se observará las mismas condiciones respecto a la posición del observador establecido en el sistema de planos ***H;F;P***.

* Las notaciones para los planos auxiliares y vistas auxiliares sucesivas o complementarios son los 'símbolo – números': ***1; 2; 3; 4***, etc.. correspondiendo el numeral sólo como identificación a dichos planos.

PLANOS AUXILIARES AL PLANO HORIZONTAL

Son aquellos planos de proyección que guardan una relación de perpendicularidad con el plano horizontal, el objeto proyectado en dicho plano muestra la elevación o la altura verdadera del objeto. La figura posterior izquierda muestra un sistema de planos conformado por el plano ***F; H*** y un plano auxiliar al plano horizontal, en los que se proyecta el 'punto-objeto' ***A***. La figura posterior del centro muestra dichos planos abatidos, en tanto que la figura posterior derecha es el depurado de las proyecciones del punto ***A*** en dichos planos.



PLANO AUXILIAR AL PLANO HORIZONTAL

PROCEDIMIENTO:

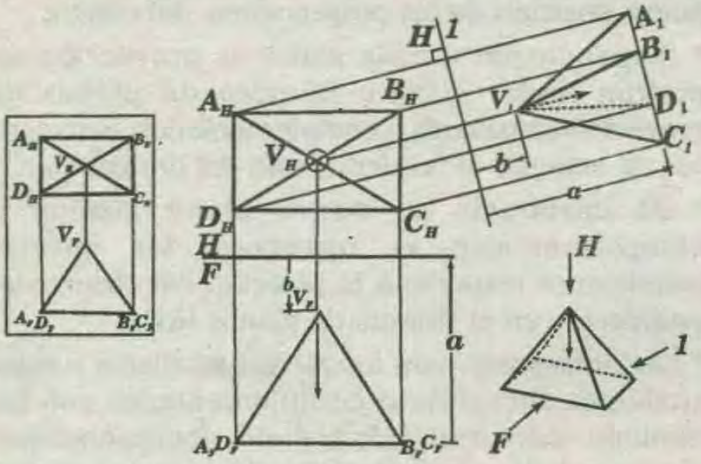
Dado las proyecciones ***F*** y ***H*** de un objeto, para determinar su proyección en el plano auxiliar al horizontal, se sigue el siguiente procedimiento:

* Ubicamos la posición del plano auxiliar mediante la línea de pliegue ***H –1***.

* Trazamos las líneas de referencia perpendiculares a la línea de pliegue ***H –1*** a partir de los puntos de la proyección horizontal.

* Tomamos las dimensiones de cota del plano ***F*** (figura posterior), las que disponemos en el plano auxiliar a partir de ***H –1***. Los puntos así ubicados en el plano auxiliar los unimos con línea llena o con pespunte según sea el resultado del análisis de la visibilidad.

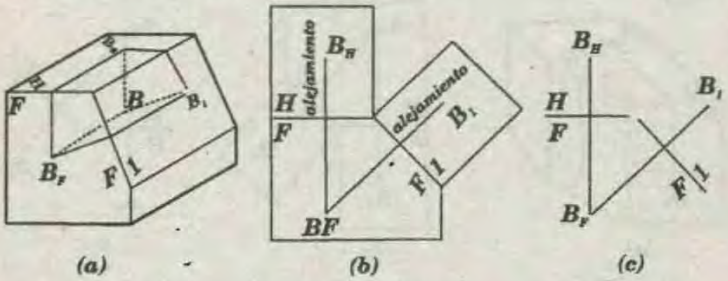
* En general, se sigue el procedimiento de, dado dos vistas hallar la tercera proyección.



PLANOS AUXILIARES AL PLANO FRONTAL

Son aquellos planos de proyección que guardan una relación de perpendicularidad con el plano frontal, no así con los planos *H* y *P*, con los que toma una posición inclinada.

* La figura posterior izquierda nos muestra un sistema de planos conformado por los planos *H; F* y un plano auxiliar a este último, en lo que se proyecta el punto objeto *A*. La figura posterior central muestra dichos planos abatidos, en tanto que la figura posterior derecha es el depurado de las proyecciones del punto *A* en dichos planos.



(a) (b) (c)

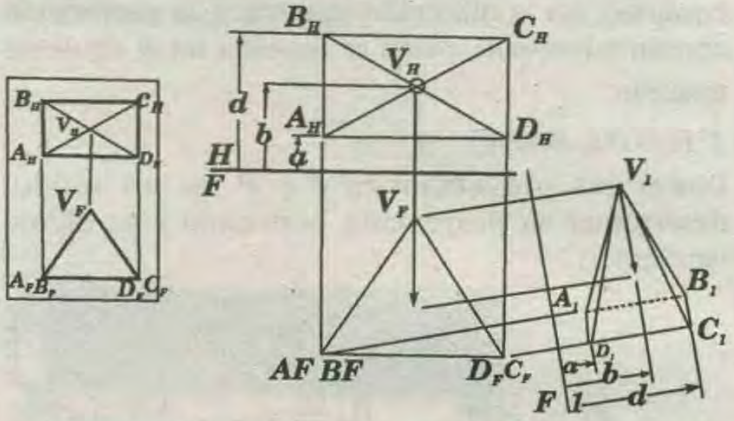
PLANO AUXILIAR AL PLANO FRONTAL

PROCEDIMIENTO:

Dado las proyecciones *H* y *F* de un objeto, para determinar su proyección en el plano auxiliar, se sigue el mismo procedimiento de: Dado dos vistas determinar la tercera proyección.

* En la figura se dan las vistas *H* y *F* de un objeto, para hallar sus proyecciones en el plano auxiliar, tomamos las dimensiones de 'alejamiento' o profundidad del plano *H* (anexo del plano auxiliar *1*); estas dimensiones las trasladamos al plano auxiliar sobre las respectivas líneas de referencia y a partir de *F–1*.

* Las proyecciones auxiliares al plano *F*, muestran las dimensiones de 'profundidad' o 'alejamiento' del objeto, *H–1* medido desde *F–1* hacia los puntos proyectados en el plano auxiliar.

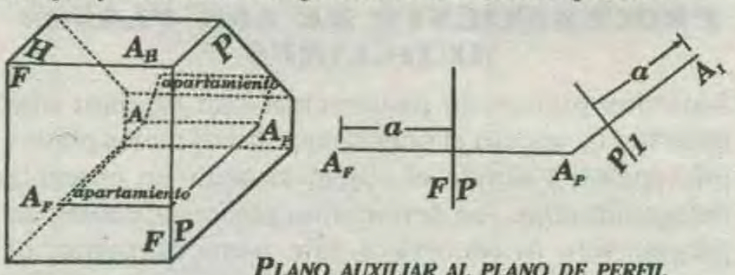


VISTA AUXILIAR AL PLANO F

PLANOS AUXILIARES AL PLANO DE PERFIL

Todo plano auxiliar al plano de Perfil es perpendicular al plano de perfil, no así a los planos *H* y *F*, con los que toma una posición inclinada.

* La figura posterior, nos muestra un sistema de planos de proyección *H*, *F* y un plano auxiliar a este último, en los que se proyecta el 'punto-objeto' *A*, y la figura posterior derecha muestra el depurado de las proyecciones del punto *A* en dichos planos.



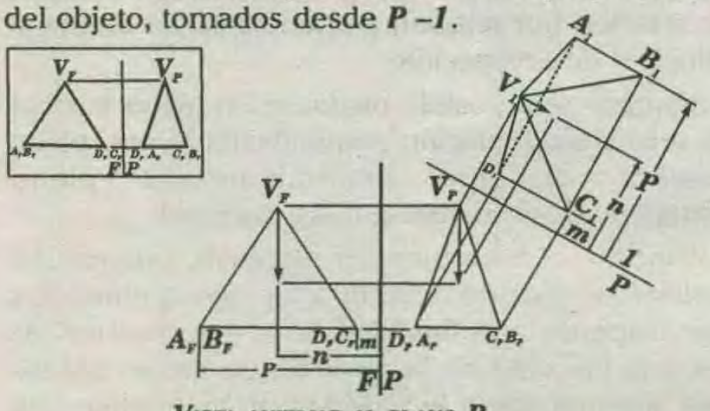
PLANO AUXILIAR AL PLANO DE PERFIL

PROCEDIMIENTO:

Dado las proyecciones *F* y *P* de un objeto, para determinar la proyección auxiliar al plano *P*, se sigue el mismo procedimiento de: Dados dos vistas, determinar la tercera proyección (figura posterior).

* Tomamos las dimensiones de apartamiento que llevamos al plano auxiliar por sobre las respectivas líneas de referencia a partir de *P – 1*.

* Las proyecciones auxiliares al plano *P*, muestran las dimensiones de apartamiento de las proyecciones del objeto, tomados desde *P –1*.



VISTA AUXILIAR AL PLANO P

VISTAS AUXILIARES SUCESIVAS Y PLANOS COMPLEMENTARIOS

* Si un sistema de planos de proyección (incluido un plano auxiliar), no resuelve el problema de proyectar un objeto en posición requerida, se podrá hacer uso de uno o más planos complementarios tomados siempre en relación (en relación perpendicular) a un plano de proyección, adyacente.

* Los planos complementarios se utilizan cuando la necesidad requiere de una nueva vista sucesiva, que disponga la proyección (de una recta, un plano, un cuerpo geométrico, etc.) en posición más explícita.

PROCEDIMIENTO:

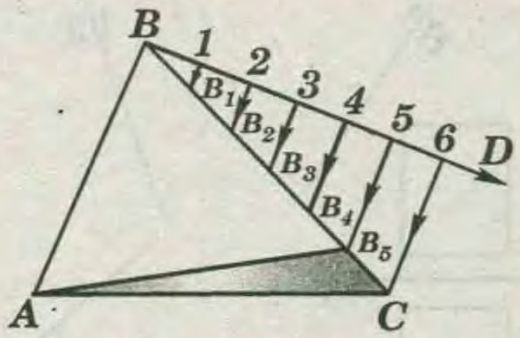
Para hallar las proyecciones de un objeto en un plano complementario, se sigue el mismo procedimiento de: 'dados dos vistas, determinar la tercera proyección. El siguiente ejercicio nos ilustrará ampliamente el procedimiento de disponer planos complementarios y sobre ella proyectar vistas auxiliares sucesivas de un objeto.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Dado un triángulo ***ABC***, construir un triángulo, tal que el área de su región limitada sea $\frac{1}{6}$ de la región triángular ***ABC***.

RESOLUCIÓN :



Del triángulo ***ABC*** trazado, se pide construir un triángulo de tal forma que el área de dicha región triangular sea $\left(\frac{1}{6}\right)$ del área de la región triangular ***ABC***.

Primero se traza $\overline{BD}$, luego se ubican los puntos ***1; 2; 3; 4; 5*** y ***6***, tal que:

$$\ell_{B1}=\ell_{12}=\ell_{23}=\ell_{34}=\ell_{45}=\ell_{56}$$

Se une ***C*** y ***6*** mediante un segmento, luego de los puntos ***5; 4; 3; 2; 1*** se trazan las paralelas de $\overline{C6}$ ubicándose los puntos B_5, B_4, B_3, B_2, B_1 en $\overline{BC}$, donde se cumplirá :

$$BB_1=B_1B_2=B_2B_3=B_3B_4=B_5C.$$

Finalmente, se traza $\overline{AB_5}$ y podemos notar que

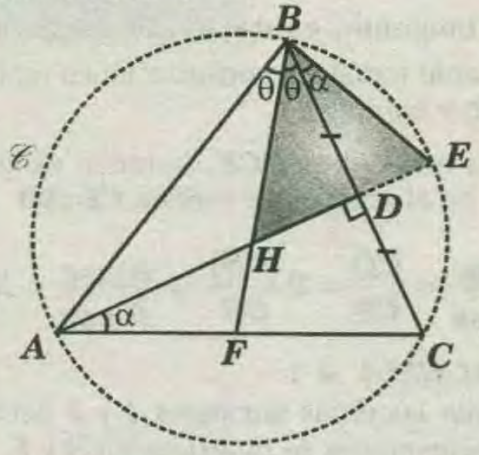
$$CB_5=\frac{1}{6}(BC) \Rightarrow \mathbb{A}_{\blacktriangle} CAB_5=\frac{1}{6}\mathbb{A}_{\blacktriangle} ABC$$

$\therefore$ El triángulo pedido es AB_5C

PROBLEMA 2 :

En un triángulo ABC se traza la altura ***AD*** y la bisectriz ***BF*** que se intersecan en ***H***, si $m\sphericalangle CAD=m\sphericalangle CBE$; $BD=DC$ utilizando regla y compás demuestre que $BE=EH$ (***E*** en la prolongación de ***AD***).

RESOLUCIÓN :



Probar que $BE=EH$

Del dato : $BD=DC \Rightarrow AB=AC$

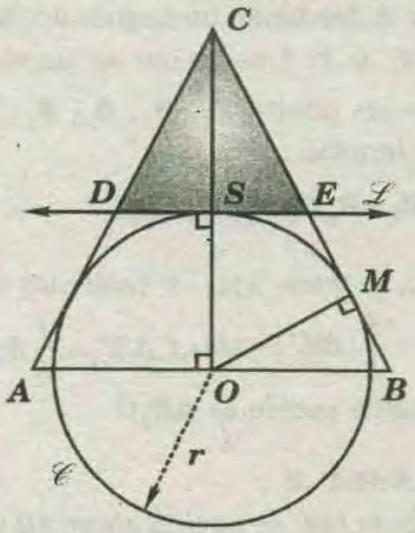
y $m\sphericalangle CAE = m\sphericalangle CBE=\alpha$

$\Rightarrow$ ***ABEC*** son los vértices de un cuadrilátero inscriptible, por lo cual se ha trazado la circunferencia ***C*** (en forma interrumpida) con el compás podemos verificar $BE=EH$.

PROBLEMA 3 :

Se tiene un triángulo equilátero ***ABC*** se traza una circunferencia cuyo diámetro está incluido en ***AB*** y es tangente a ***AC*** y ***BC*** Utilizando regla y compás, trazar una recta ***L*** que sea paralela a $\overline{AB}$ y tangente a dicha circunferencia. Además la recta interseca a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ en ***D*** y ***E*** respectivamente, calcule también la relación entre los perímetros de las regiones triangulares ***ABC*** y ***CDE***.

RESOLUCIÓN :



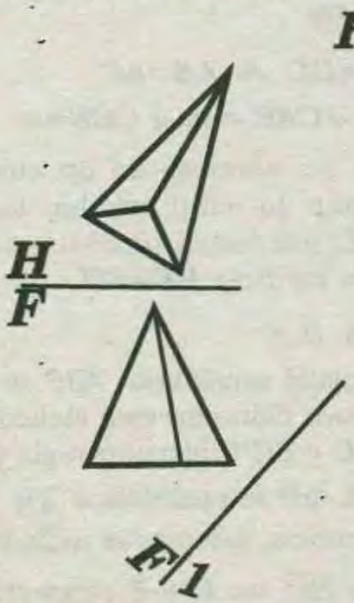
Primero trazamos el triángulo equilátero, se ubica el punto medio *O* del lado ***AB***. Luego se traza la perpendicular ***OM*** a ***BC***, ahora se traza la circunferencia ***C*** de centro *O* y radio ***OM***. Se traza $\overline{CO}$, que interseca a $\mathscr{C}$ en ***S***, de donde se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ que es tangente, es decir, se asegura $\overleftrightarrow{\ell} \parallel \overline{AB}$ (obviamente todos las construcciones realizadas es con regla y compás).

Podemos notar que $\triangle DCE$, también es equilátero. además en el compás se verifica $CS=SO$.

$$\Rightarrow \frac{p_{\triangle ABC}}{p_{\triangle ADE}} = \frac{CO}{CS} = 2\frac{(CS)}{CS} \Rightarrow \frac{p_{\triangle ABC}}{p_{\triangle CDE}} = 2$$

PROBLEMA 4 :

Determinar las vistas auxiliares ***1*** y ***2*** del tetraedro cuyas proyecciones se muestran en ***H*** y ***F***.



RESOLUCIÓN :

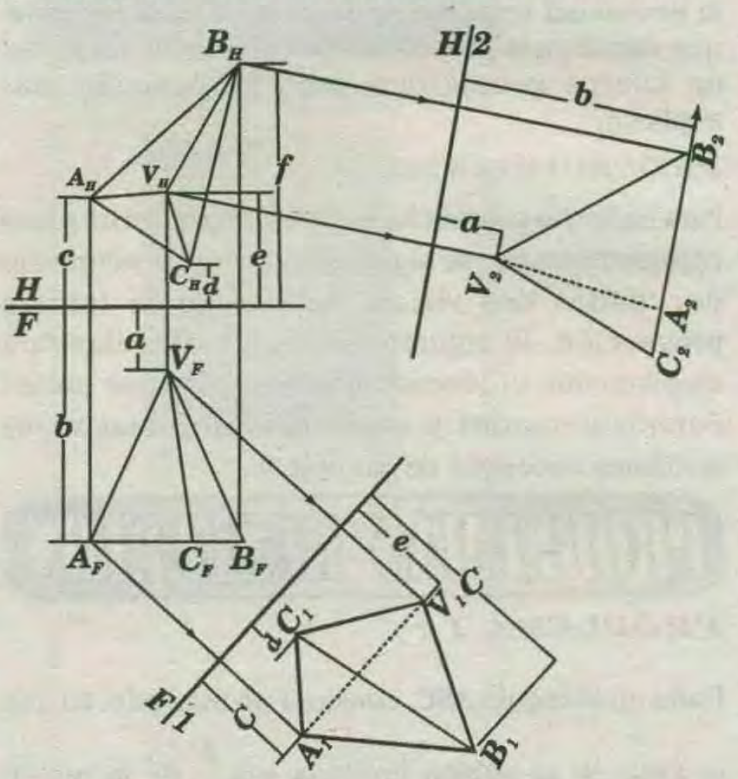
* Medimos los alejamientos ***c; d; e*** y ***f*** de las proyecciones de las aristas ***A; C; V*** y ***B*** en ***H*** y las llevamos a través de las líneas de referencia al plano ***1***.

* Realizamos el mismo proceso con las cotas ***a; b***, etc., para ubicar las proyecciones de ***V; A***, etc. en el plano ***2***.

VISIBILIDAD:

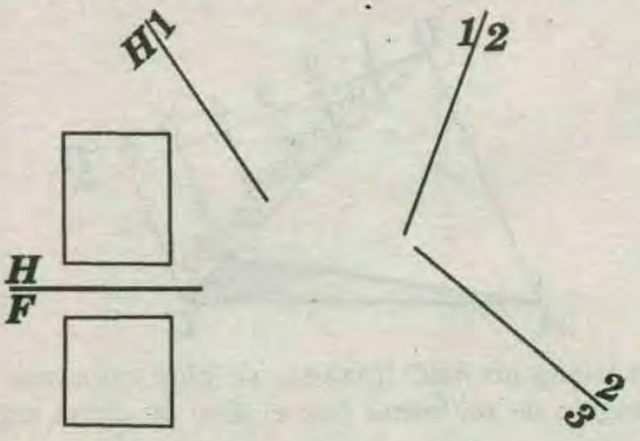
* En ***2***, es visible la cara ***VBC*** e invisible la arista ***VA***.

* En ***1***, son visibles todas las aristas que parten de ***B*** por estar más cerca del observador e invisible ***AV***.



PROBLEMA 5 :

Determinar las vistas auxiliares ***1; 2*** y ***3*** del sólido cuyas proyecciones se muestran en ***H*** y ***F***.

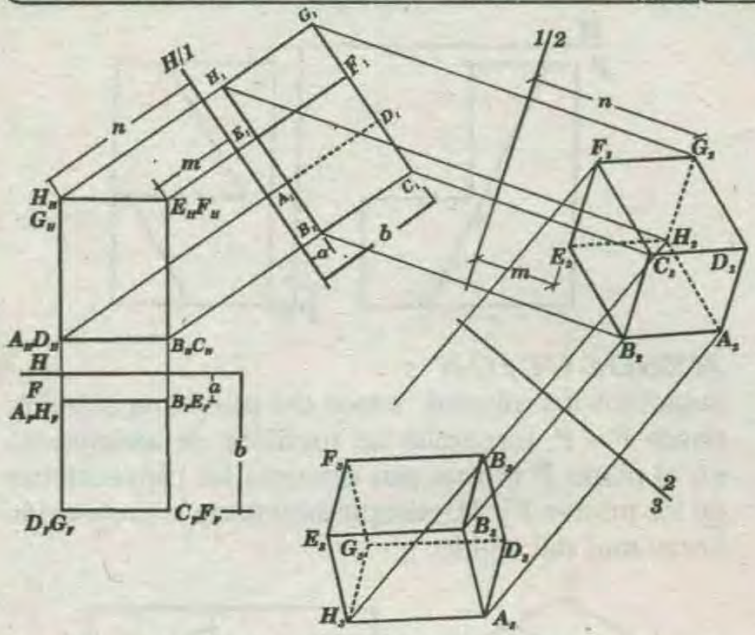


RESOLUCIÓN :

* De las proyecciones en ***H*** y ***F***, deducimos que se trata de un prisma de caras regulares.

* Asignamos letras a cada vértice.

* En el plano ***1***,la cara ***ABEH*** se proyecta paralela a ***H–1***, ubicando las aristas por sus cotas.



* De igual modo para hallar la proyección en **2**, tomamos distancias ***m; n*** (para ***E*** y ***G*** respectivamente) que transferimos al plano anexo **2**.

VISIBILIDAD:

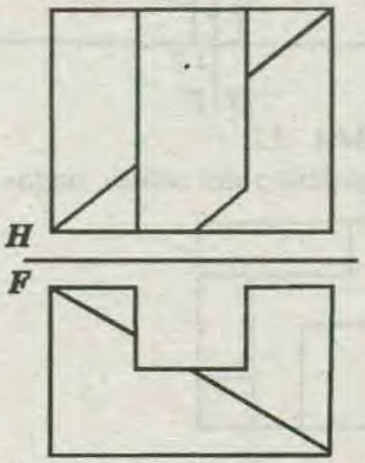
* En **1**, es visible la arista ***EF*** por estar más cercana del observador.

* En **2**, es visible el vértice ***C*** y luego las aristas que parten de él.

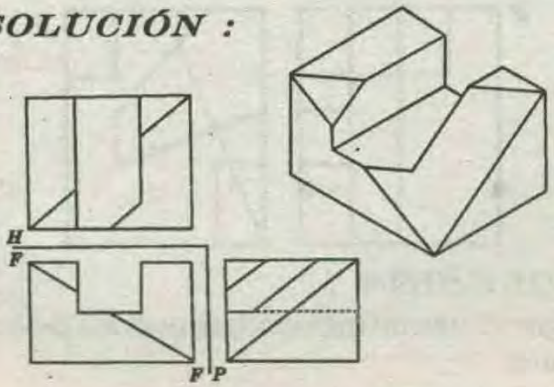
* En **3** es visible el vértice ***B*** y las aristas que parten de él.

PROBLEMA 6 :

Dadas las proyeccioens ***H*** y ***F*** de un sólido, determinar su proyección de perfil y su perspectiva.

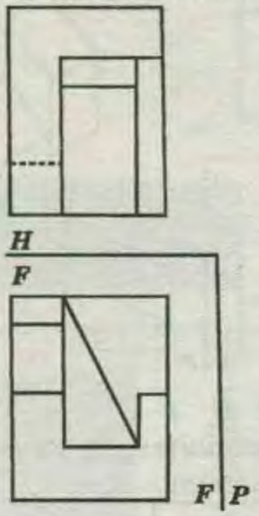


RESOLUCIÓN :



PROBLEMA 7 :

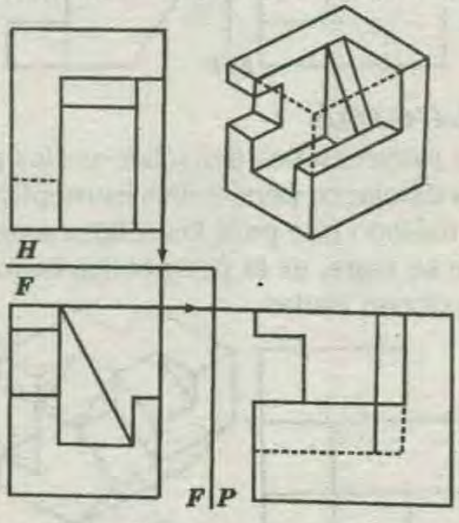
Dados las vistas ***H*** y ***F***, hallar la vista de perfil y la proyección isométrica del sólido dado.



RESOLUCIÓN :

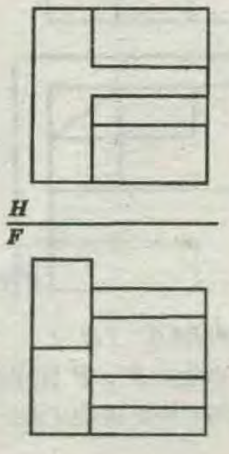
Tomamos las medidas desde ***H–F*** en el plano horizontal y las llevamos a tráves de la líneas de referencia a plano ***P*** analizando las aristas visibles e invisibles.

Con las vistas logradas en los planos ***H; F*** y ***P***, construimos la proyección isométrica, que consiste dibujar el sólido con una inclinación de ***30°*** respecto al plano de su base como se muestra.

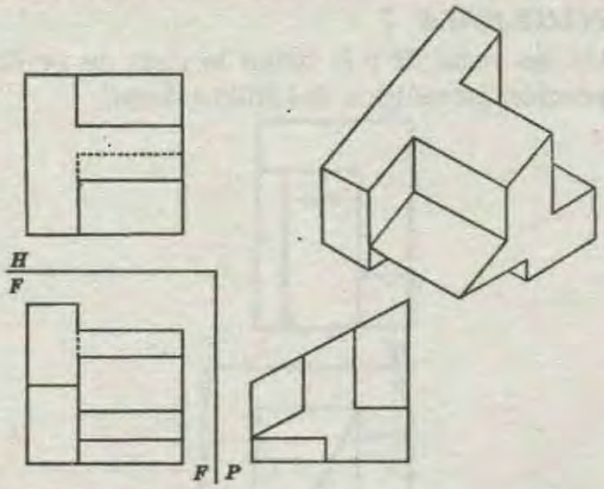


PROBLEMA 8 :

Dadas las proyecciones ***H*** y ***F*** de un sólido, determinar su proyección de perfil y su perspectiva isométrica.

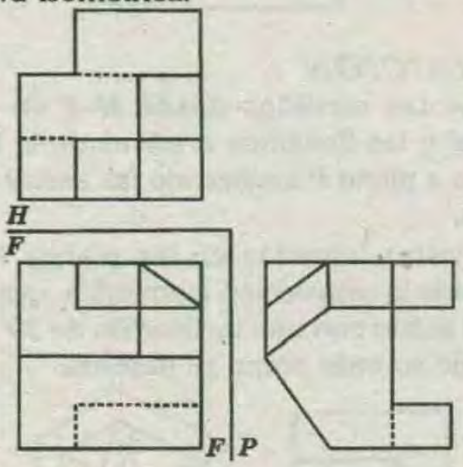


RESOLUCIÓN :



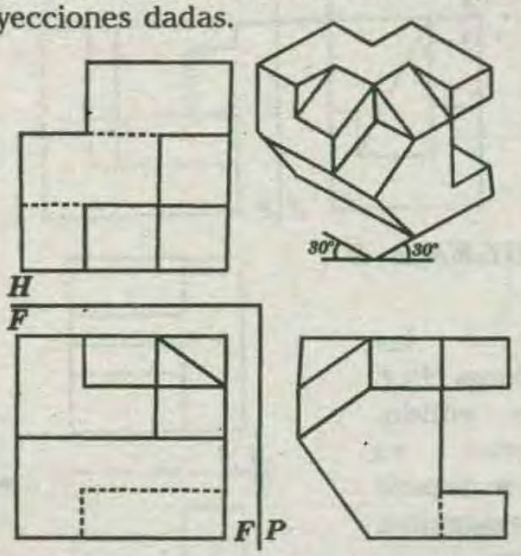
PROBLEMA 9 :

Dadas las proyecciones de un sólido, dibujar su perspectiva isométrica.



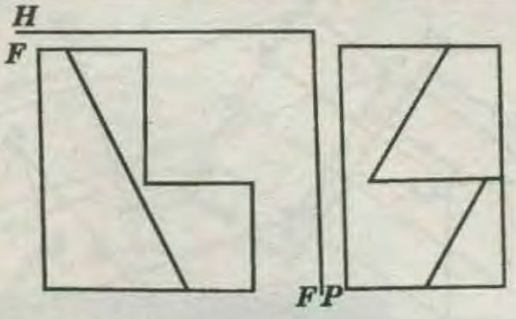
RESOLUCIÓN :

Dadas las proyecciones del sólido en los planos ***H***, ***F*** y ***P***, para dibujar su perspectiva isométrica se sigue el mismo método que para los sólidos anteriores, El sólido que se logra, es la perspectiva isométrica de las proyecciones dadas.



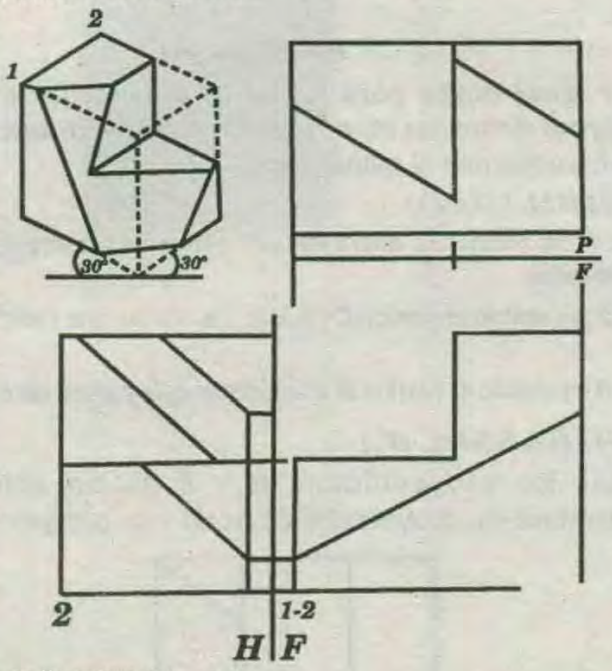
PROBLEMA 10 :

Dadas las vistas ***F*** y ***P*** hallar la vista horizontal y el dibujo isométrico reducido a la mitad.



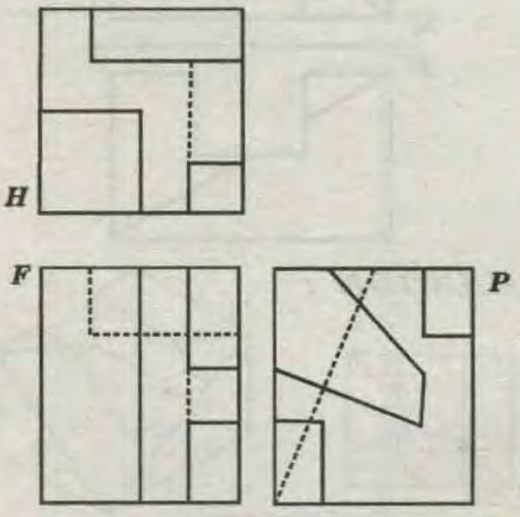
RESOLUCIÓN :

Seguimos los mismos pasos del problema anterior; desde ***F – P***, tomamos las medidas de alejamiento en el plano ***P*** (como por ejemplo las proyecciones de los puntos ***1*** y ***2***), complementando la proyección horizontal del sólido.



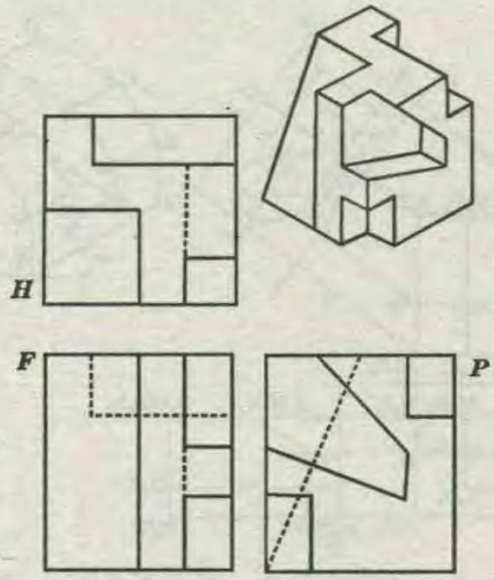
PROBLEMA 11 :

Dibujar el isométrico del sólido, dadas las vistas ***H;*** ***F*** y ***P***.



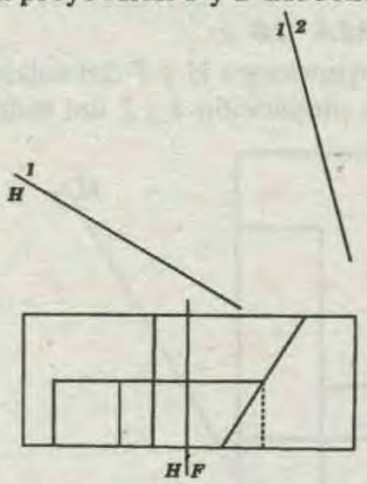
RESOLUCIÓN :

* Se sigue el mismo método que para los problemas anteriores.



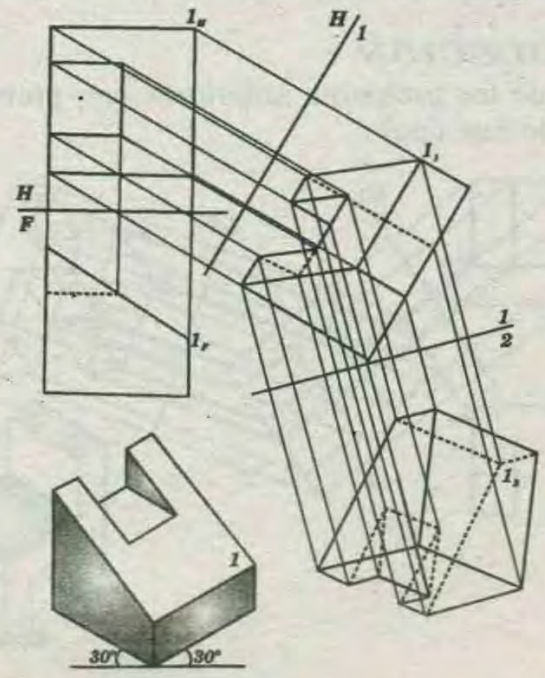
PROBLEMA 12 :

Dadas las proyecciones *H* y *F* del sólido mostrado. Determinar la proyección *1* y *2* del sólido.



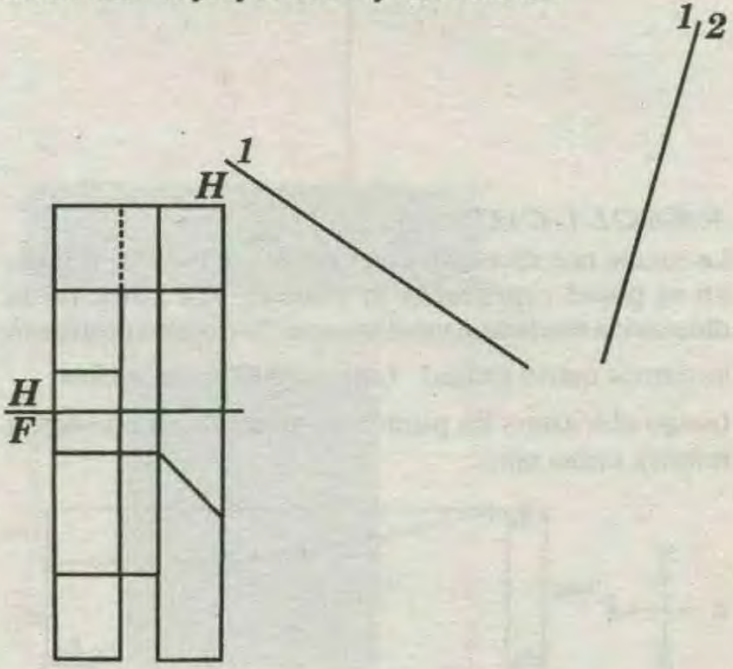
RESOLUCIÓN :

* Igual que los problemas anteriores inicial de este tipo.



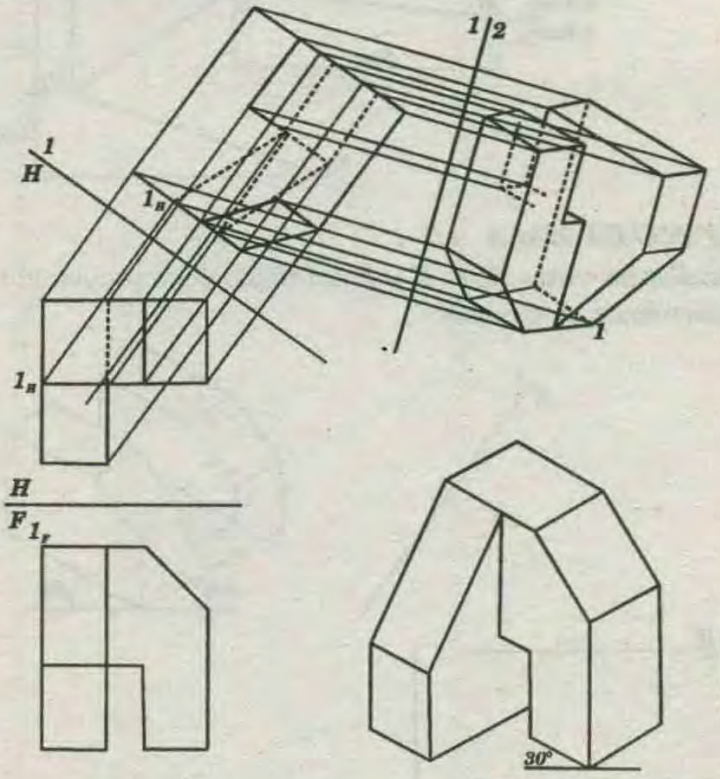
PRCBLEMA 13 :

Dadas las proyecciones *H* y *F* del sólido mostrado. Determinar la proyección *1* y *2* del sólido.



RESOLUCION :

Igual que los problemas anteriores (ver problema inicial de éste tipo) .



PROBLEMA 14 :

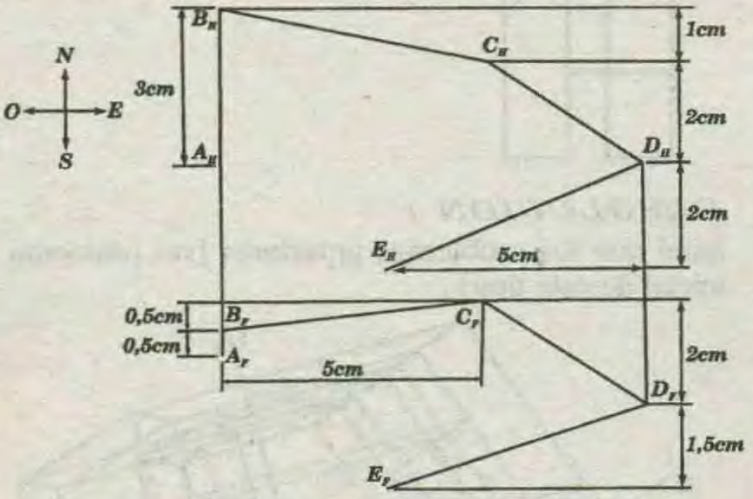
Dibujar el polígono abierto ***ABCDE***, sabiendo que:
B, está ***3km.*** al norte y ***500m*** arriba de ***A***;
C, está ***5km.*** al Este, ***1km.*** al sur y ***500m.*** arriba de ***B***
D, está ***2km*** hacia adelante, ***3km*** a la derecha y ***2km*** hacia abajo de ***C***;
E, está ***5km.*** al Oeste, ***2km*** al sur y ***1500m*** debajo de ***D***.

Escala *1/100000*

RESOLUCION :

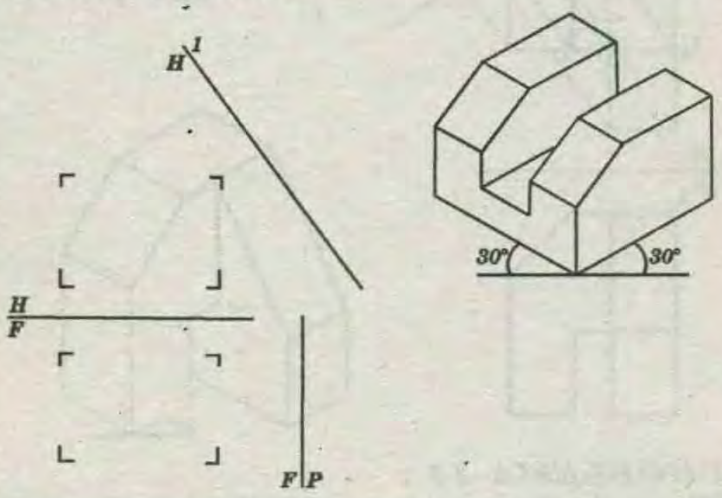
La escala nos dice que una unidad cualquiera tomada en el papel representa la ***100000*** ava parte de la dimensión verdadera en el terreno. En nuestro problema tomamos como unidad $1cm \equiv 100000\,cm = 1km$

Luego ubicamos los puntos de acuerdo a su posición relativa entre ellos.



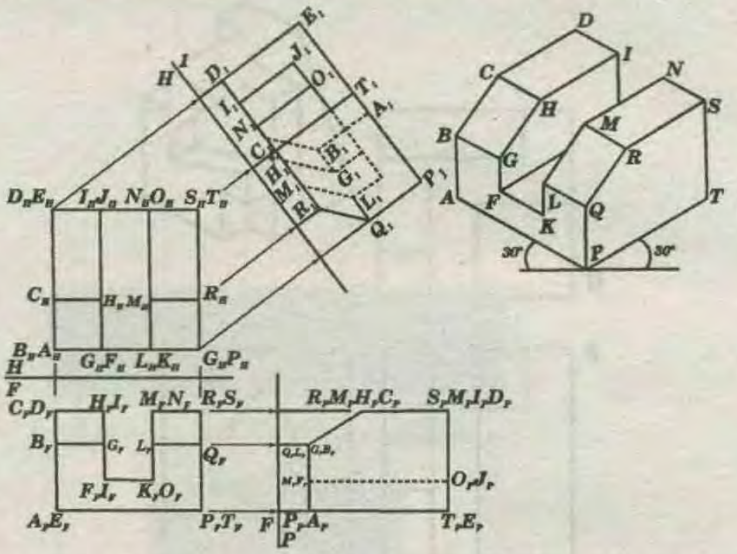
PROBLEMA 15 :

Hallar las vistas ***H***, ***F***, ***P*** y ***1*** del sólido cuya proyección isométrica se muestra .



RESOLUCIÓN :

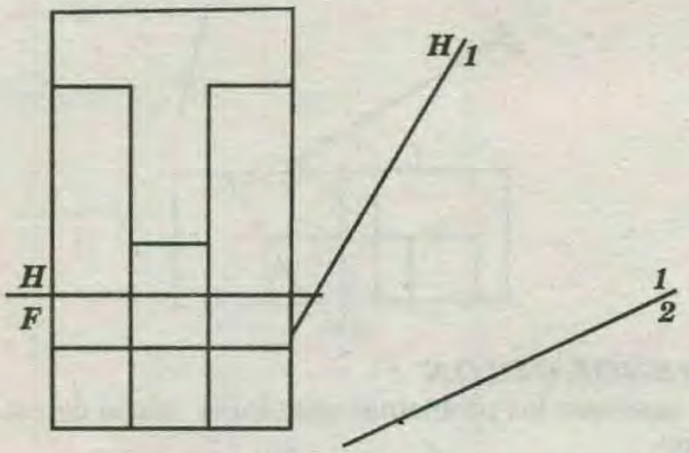
Asignamos a cada vértice del sólido, según su ubicación,una letra o un número en sus proyecciones ***H*** y ***F***, respectivamente ; construímos las proyecciones del sólido en el plano ***1*** .



tomando dimensiones de cota del plano ***F***. Tener sumo cuidado al analizar la visibilidad . El croquis adjunto es la proyección isométrica del sólido.

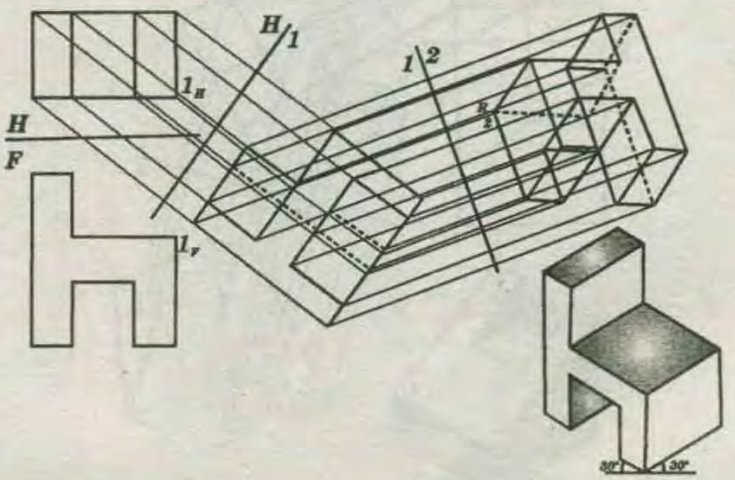
PROBLEMA 16 :

Dadas las proyecciones ***H*** y ***F*** del sólido mostrado . Determinar la proyección ***1*** y ***2*** del sólido.



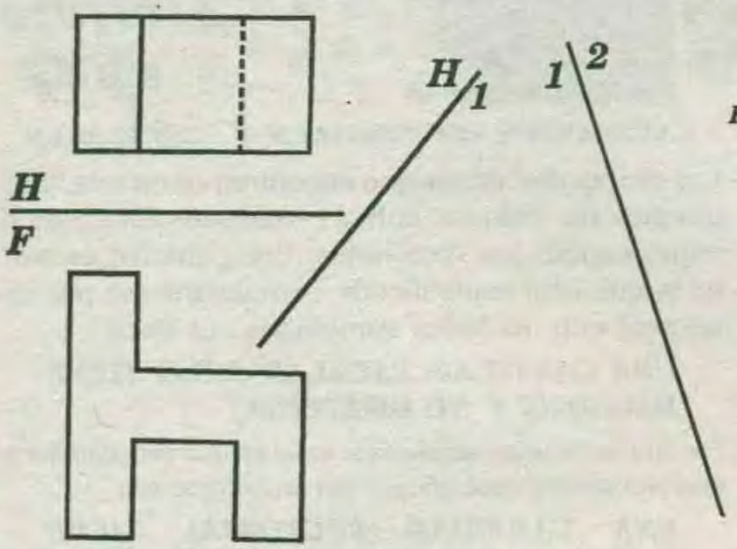
RESOLUCIÓN :

Igual que los problema anteriores (ver problema inicial de éste tipo) .



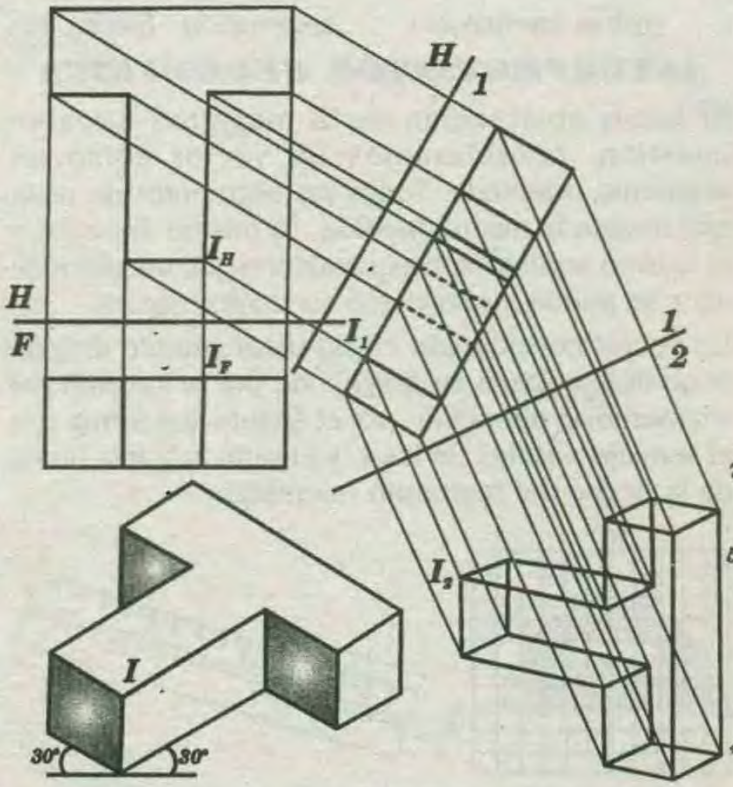
PROBLEMA 17 :

Dadas las proyecciones *H* y *F* del sólido mostrado. Determinar la proyección *1* y *2* del sólido.



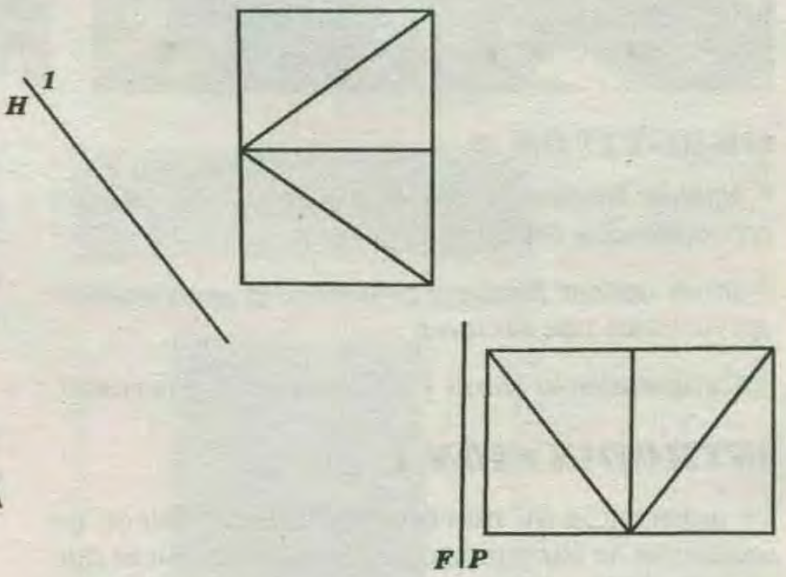
RESOLUCIÓN :

igual que los problemas anteriores (ver problema inicial de este tipo)



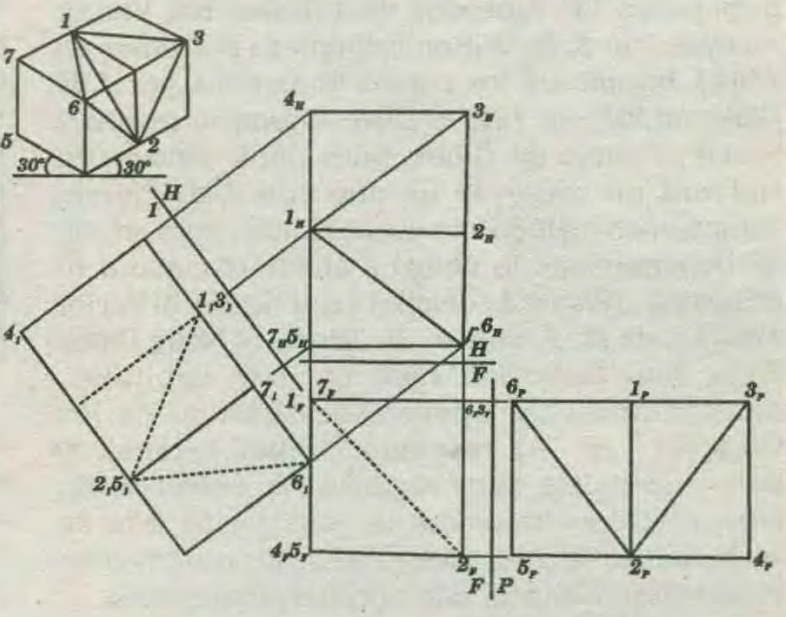
PROBLEMA 18 :

Determinar la proyección frontal y la proyección auxiliar del sólido y visibilidad.



RESOLUCIÓN :

Con ayuda de las líneas de referencia de las proyecciones del sólido en los planos *H* y *P*. proyectamos el objeto en el plano *F*, y luego en el plano *1*. Si creemos por conveniente esbozamos el sólido a mano alzada y numeramos algunas de sus aristas, lo que nos permitirá visualizar mejor el análisis de la visibilidad tanto en el plano *F* como en el plano *1*. En el plano *H*, el vértice *3* es el más alejado respecto a *1-H*, luego en el plano *1*, se proyectaran invisibles las aristas que parten de dicho vértice, la arista *57*, respecto al plano *1*, es la más cercana al observador, luego será toda visible, no así *21* y *26* que se mostrarán invisibles .



GEOMETRIA VECTORIAL

CAPITULO 44

OBJETIVOS :

** Algunos fenómenos físicos y geométricos pueden ser explicados utilizando vectores .*

** Saber aplicar Reglas y propiedades para realizar operaciones con vectores .*

** Comprender la suma y descomposición vectorial.*

INTRODUCCIÓN :

La ocurrencia de muchos fenómenos físicos no solamente se caracteriza por magnitudes físicas que solo se definen con un número y una unidad de medida , se requiere también de otras magnitudes físicas que tengan un elemento adicional llamado dirección . Es precisamente el análisis vectorial el que determina las reglas y propiedades que deben cumplir tales magnitudes físicas denominadas vectoriales . De acuerdo a lo anterior , en el análisis de un fenómeno físico , se utilizará magnitudes escalares como : el volumen , densidad , tiempo , recorrido , longitud , etc ; y también magnitudes vectoriales como: la velocidad , aceleración , fuerza, desplazamiento , etc. La diferencia entre éstas magnitudes es solo la dirección . Aproximadamente hasta el año de ***1900***, muchos científicos se resistieron a usar vectores en favor de la teoría más complicada de los cuaterniones . El libro que popularizó los métodos vectoriales fue Vector Analysis , de ***E. B.*** Wilson (reimpreso por Dover en ***1960***), basado en los cursos impartidos por ***J.W.*** Gibbs en Yale en ***1899*** y ***1900***. Wilson se resistía a tomar el curso de Gibbs, pues había llevado en Harvard un curso de un año con ***J.M.*** Pierce, campeón en método con cuaterniones , pero un jefe de departamento lo obligó a añadir el curso a su programa . (Para más detalles ver a History of Vector Analysis, de ***M. J.*** Crowe , University of Notre Dame Press, Notre Dame, Ind. ***1967***. En este capitulo , consideramos las operaciones básicas de los vectores en el espacio bidimensional y tridimensional: la suma vectorial , la multiplicación por un escalar y los productos punto y cruz . Una de las herramientas más poderosas de las matemáticas y sus aplicaciones ha sido el concepto de vector .

CANTIDADES VECTORIALES Y ESCALARES

Las cantidades físicas que encontremos en este texto pueden ser tratadas como cantidades escalares o como cantidades vectoriales. Una cantidad escalar es la que está especificada completamente por un número con unidades apropiadas . Es decir :

UNA CANTIDAD ESCALAR SOLO TIENE MAGNITUD Y NO DIRECCIÓN

Por otra parte una cantidad vectorial es una cantidad física completamente especificada por un número con

UNA CANTIDAD VECTORIAL TIENE MAGNITUD COMO DIRECCIÓN

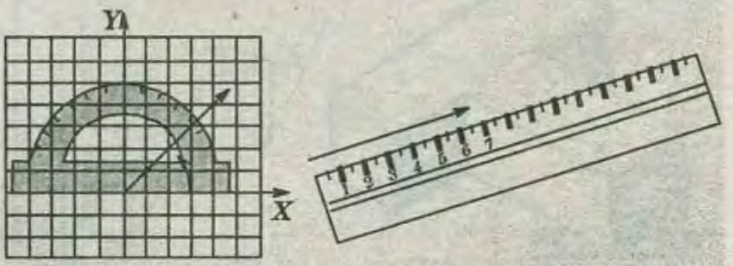
POR EJEMPLO:

CANTIDADES ESCALARES	CANTIDADES VECTORIALES
volumen	*desplazamiento*
tiempo	*velocidad*
masa energía,etc.	*aceleración , fuerza, etc.*

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Al hacer abstracción de la magnitud física en cuestión, consideramos un vector como un segmento orientado. Todos los segmentos de recta que tengan la misma medida , la misma dirección y el mismo sentido son equivalentes y cualquiera de ellos se puede tomar como su representante.

Un vector considerado como un segmento dirigido tiene determinada su magnitud , por la longitud del segmento; la dirección , por el ángulo que forma con el semieje positivo de las x, y el sentido por la punta de la flecha del segmento orientado.



INTERPRETACIÓN ALGEBRAICA

Al definir un vector en forma algebraica , no se tiene en cuenta ni la magnitud física que representa , ni su representación geométrica. Sólo se tiene en cuenta su estructura operativa.

Un vector $\bar{v}$ es un conjunto de números reales de la forma:

$$\overline{v}=(x_1;\ x_2;\ x_3;.....;x_n)$$

Los números $(x_1;\ x_2;\ x_3;.....;x_n)$ se llaman componentes del vector.

* Así : x_1 es la primera componente, x_2 la segunda componente, y x_n la n.ésima componente.

VECTOR

En matemática se utiliza al numeral para representar al número que solo es una abstracción del hombre (ente matemático) para poder indicar cantidad de objetos . De igual forma , para poder representar a las magnitudes físicas vectoriales se utiliza un ente matemático denominado vector .

¿Qué es un vector?

Es un ente matemático que se utiliza para representar a las magnitudes físicas vectoriales .

Un vector puede ser representado ***geométricamente*** por un segmento de recta orientado y ***analíticamente*** por letras minúsculas o mayúsculas con rayos .

$\vec{A}$, es la representación analítica del vector , que se lee "vector A" . Otra forma de representar a un vector es indicando su punto de origen y final , es de decir:

$\overrightarrow{PQ}$: se lee vector PQ .

$|\overrightarrow{PQ}|$: se lee módulo del vector PQ.

θ : su medida nos indica la dirección del vector; se mide en sentido antihorario respecto de la horizontal (esto es en dos dimensiones) .

$$\vec{A}=\overrightarrow{PQ}$$

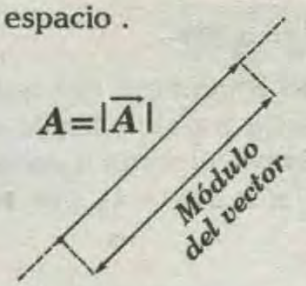
Vector : $\vec{A}=\overrightarrow{PQ}=\underbrace{|\overrightarrow{PQ}|}_{\text{módulo}}\ \underbrace{\theta}_{\text{dirección}}$

¿Cuáles son los elementos de un vector?

En general un vector tiene *2* elementos :

MÓDULO y DIRECCIÓN :

El ***módulo o magnitud*** es el que indica el tamaño o valor del segmento de recta , mientras que la dirección nos señala la orientación del vector respecto del sistema de ejes cartesianos definiendose con la medida de *2* ángulos, en el plano y de *3* ángulos . en el espacio .



$|\vec{A}|$: se lee, ***"módulo del vector A"*** y siempre es positivo .

$(Magnitud\ de|\vec{A}|)=A=|\vec{A}|$

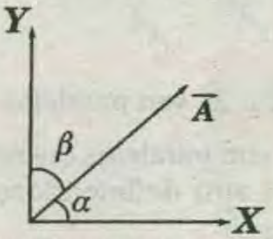
Por definición , la magnitud de un vector es un escalar ***(un número)*** y siempre es positivo .

Observamos que un vector nunca puede ser igual a un escalar porque son cantidades de distinto tipo .

La expresión "$\vec{A}=6m$" es tan errónea como "*2* naranjas=*3* manzanas" o"***6 lb=7km***".

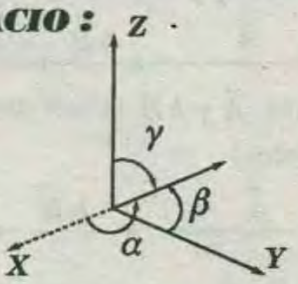
DIRECCIÓN :

Las direcciones , en un plano , se determinan por un ángulo , que es el ángulo entre una dirección de referencia y la dirección que se desea indicar , medido en dirección contrario al movimiento de las agujas del reloj .



* α : define la dirección respecto de $+X$
* β : define la dirección respecto de $+Y$

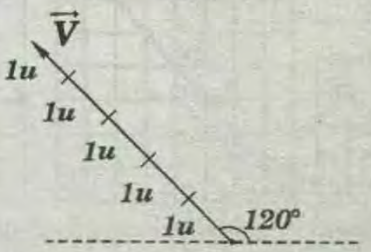
EN EL ESPACIO :



NOTA :

Cuando se hace la notación de un vector se debe expresar su módulo y dirección .

EJEMPLO :

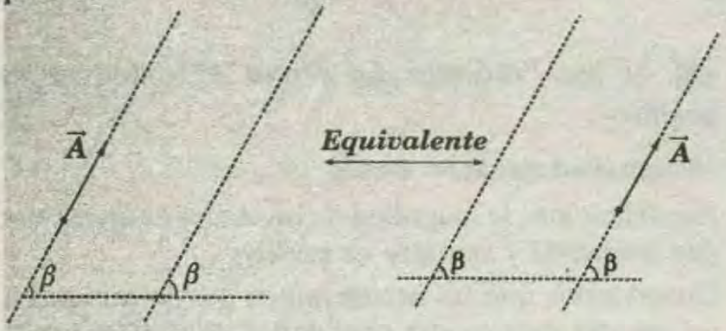


Módulo : $|\vec{A}|=6u$

Dirección : $\theta=120°$

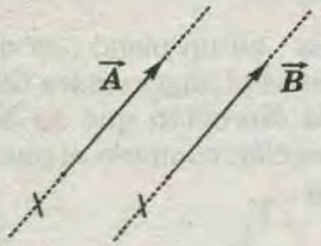
Vector : $\vec{A}=|\vec{A}|\angle\theta=u\angle 120°$

* Una propiedad importante de los vectores es la de poder trasladarse paralelamente a su dirección original . Por ejemplo el vector **A** puede ser trasladado de la recta L_1 a la recta L_2 por ser direcciones paralelas.



CLASES DE VECTORES

I) Vectores Colineales : Vectores que tienes las mismas líneas están contenidos en una misma recta .



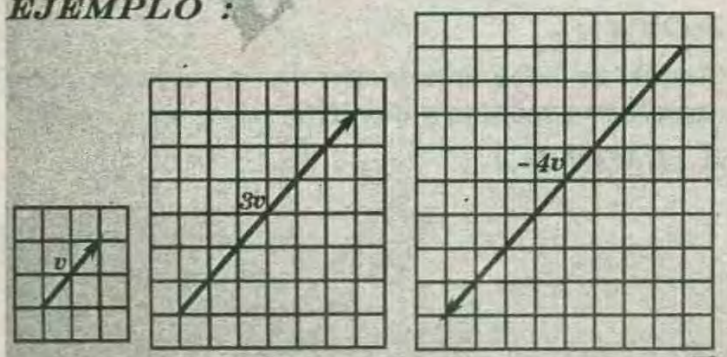
Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos .

Si dos vectores son paralelos colineales una de ellos es múltiplo del otro definiendose de las siguente forma . $\vec{A}=k\vec{B}$

* $k > 0$: entonces $\vec{A}$ y $k\vec{B}$ tienen igual dirección .

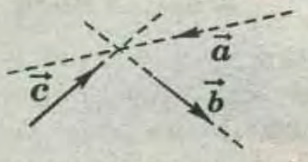
* $k < 0$: entonces $\vec{A}$ y $k\vec{B}$ tienes dirección opuesta (Vectores opúestos)

EJEMPLO :

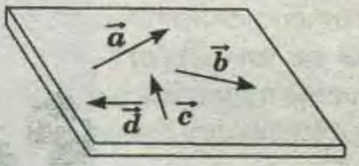


Podemos encontrar que al multiplicar un vector $\vec{A}$ por un número real **m** el módulo del vector que se obtiene como resultado es $|m|A$ (El módulo del vector $m\vec{A}$ es $|m|$ veces el módulo del vector $\vec{A}$). Esto se puede apreciar claramente en el ejemplo anterior .

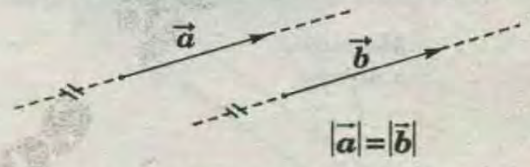
II) VECTORES CONCURRENTES : Son aquellos vectores cuyas líneas de acción concurren en un mismo punto o tienen el mismo punto de origen .



III) VECTORES COPLANARES : Vectores contenidos en un mismo plano .

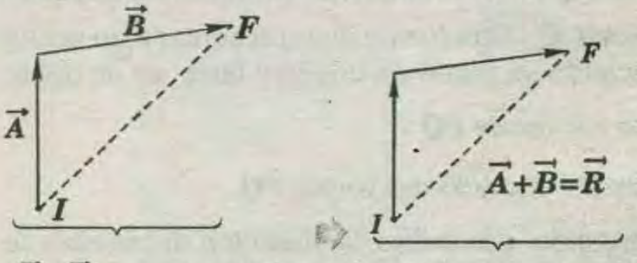


IV) VECTORES IGUALES : Son vectores que tienen el mismo módulo dirección y sentido .



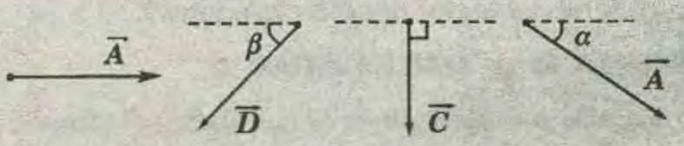
¿Que es un vector resultante?

Es el que reemplaza a dos o más vectores consecutivos . Tambien se le conoce como vector suma . Geométricamente une el origen del primer vector con el extremo del último vector



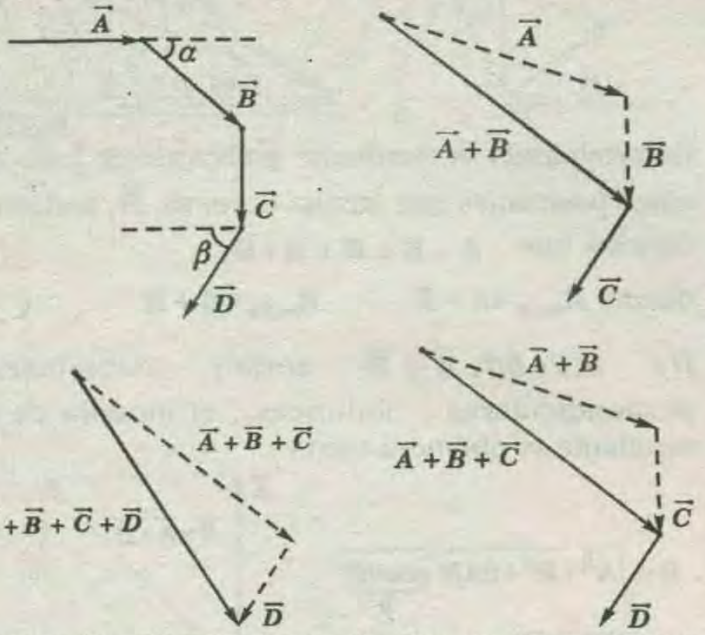
$\vec{A} \wedge \vec{B}$ ***son consecutivos*** "$\vec{R}$" ***es el vector suma***

Para determinar la resultante de dos vectores se utiliza el ***método del triángulo*** que, en forma general, cuando se quiere sumar más de dos vectores , se aplica ***método del polígono***, el cual detallaremos a continuación . Del siguiente conjunto de vectores, obtengamos su resultante .

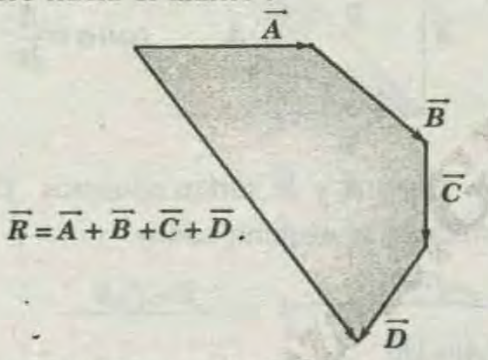


Primeramente, debemos trasladar los vectores y colocarlos uno a continuación de otro , de tal forma que el extremo de un vector coincida con el origen del siguiente. El orden en el cual se grafiquen no

importa , pero sí respetar la dirección de los vectores



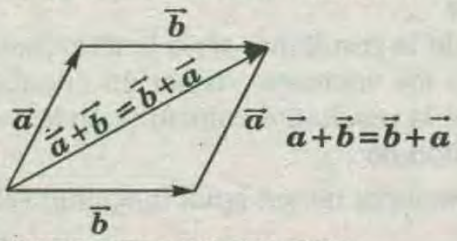
Tomando a las vectores de dos en dos , vamos sumándolos de acuerdo con lo que se ha realizado en el método del triángulo y finalmente concluimos que la suma de todos los vectores , es decir , el vector resultante, se obtiene uniendo el origen del primer vector con el extremo del último vector y dirigido del primero hacia el último .



¿Que propiedades cumplen los vectores?

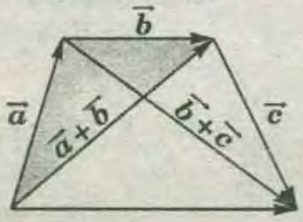
Al igual que los números , los vectores cumplen con la propiedad commutativa y asociativa .

I) PROPIEDAD COMMUTATIVA .



$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

II) PROPIEDAD ASOCIATIVA .



$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$$

OPERACIONES CON VECTORES

Los vectores pueden sumarse o restarse teniendo en cuenta ciertas reglas de acuerdo al tipo de vectores con los que se opera . Cuando los vectores son colineales o paralelos la operación es como si fueran simples números reales , teniendo en cuenta la orientación del vector al cual se le asigna un signo . Si los vectores son oblícuos la operación de suma o resta se puede determinar con reglas como las del paralelogramo , ley de cosenos y ley de senos .

I) CON VECTORES COLINEALES O PARALELOS

1) $\xrightarrow{A=5}\ \xrightarrow{B=4} \Rightarrow |\vec{R}|=A+B=9$

2) $\xrightarrow{P=8}\ \xleftarrow{Q=3} \Rightarrow |\vec{R}|=P-Q=5$

3) $\xrightarrow{A=4}$, $\xrightarrow{B=6}$, $\xleftarrow{C=2}$ $\Big\} |\vec{R}|=\underbrace{A+B-C}_{8}$

Debemos tener presente que para poder sumar vectores estos deben tener igual unidad de medida. Por ejemplo , podemos sumar dos vectores que representen velocidad , pero no así un vector que represente velocidad con otro que represente desplazamiento. Recordemos que esto mismo obedecen las magnitudes escalares. Cuando decimos que para sumar vectores deben tener la misma unidad de medida , no significa que deben representar a una misma magnitud necesariamente; podemos sumar vectores que representen a distintas magnitudes pero que tengan igual unidad de medida. Por ejemplo , el desplazamiento y la posición se miden en la misma unidad (metros); entonces , podemos sumar un vector que represente desplazamiento con otro que represente posición. Pero para la multiplicación de vectores no se requiere que tengan la misma unidad de medida .

ADICIÓN DE VECTORES

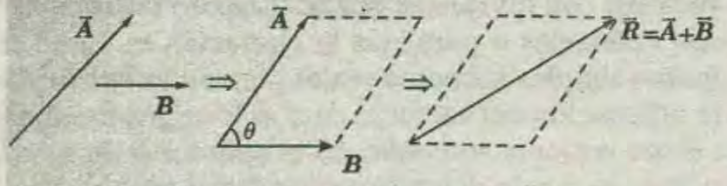
La adición de vectores es el proceso en el cual dado dos o más vectores se obtiene el ***vector suma*** o llamado también vector resultante . El ***vector resultante*** reemplaza a los vectores que se suman (componentes) y se puede obtener a partir de un análisis gráfico ***y/o*** matemático. Veamos a continuación una forma de como podemos llegar a determinar el vector resultante .

MÉTODO DEL PARALELOGRAMO

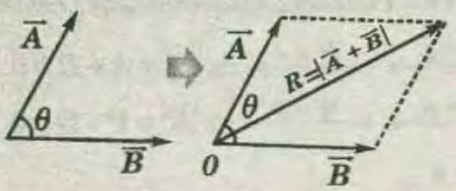
Geométricamente definimos el vector suma como sigue. En el plano que contiene a los vectores $\vec{A}$ y

$\vec{B}$ formemos el paralelogramo que tiene como un lado a $\vec{A}$ y como lado adyacente a $\vec{B}$.

Entonces $\vec{A}+\vec{B}$ es el segmento de recta dirigido a lo largo de la diagonal del paralelogramo llamada resultante $(\vec{R}=\vec{A}+\vec{B})$.



$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}$: ***vector*** resultante; por lo tanto, tiene magnitud (módulo) y dirección.

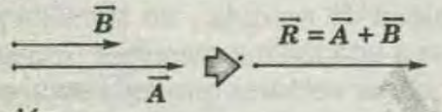


Con los vectores oblícuos se forma el paralelogramo, los cuales son reemplazados por el vector suma o resultante, que tiene el mismo origen de los vectores y se ubica en la diagonal del paralelogramo. Con la regla del paralelogramo, se obtiene :

$$R=|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$$

CASOS PARTICULARES :

I) Si $\theta=0°$ serían paralelos, de igual dirección. La resultante sería así.



De la ecuación :

$$R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\underbrace{\cos 0°}_{1}}\Rightarrow R=\sqrt{A^2+B^2+2AB}$$

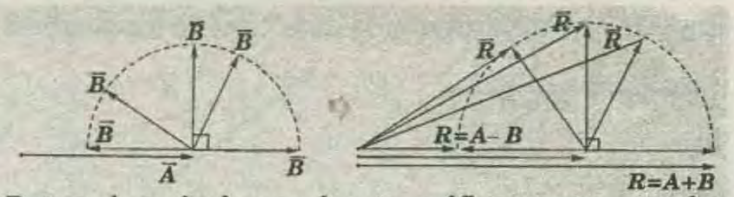
$$\Rightarrow R=\sqrt{(A+B)^2}=A+B$$

OBSERVACIÓN :

La magnitud (módulo) de la resultante cumple la siguiente desigualdad: $R_{mín}\le R\le R_{máx}$

* Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ determinemos gráficamente entre qué valores se encuentra el módulo del vector suma o vector resultante $(\vec{R})$. Para ello, consideremos que $\vec{A}$ se orienta hacia la derecha, mientras que $\vec{B}$ no se cónoce su dirección, pero sí su módulo.

Graficando al vector $\vec{B}$ en diversas posiciones, su extremo describirá una circunferencia cuyo centro se ubica en el extremo de $\vec{A}$, tal como se muestra.



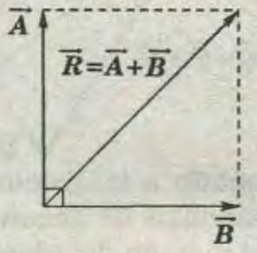
Determinando la resultante gráficamente para las cinco posiciones que adopta el vector $\vec{B}$, podemos concluir que $A-B\le R\le A+B$

donde $R_{mín}=A-B$ $\quad$ $R_{máx}=A+B$

II) Si $\theta=90°$, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ serían mutuamente perpendiculares. Entonces, el módulo de la resultante se obtendrá como :

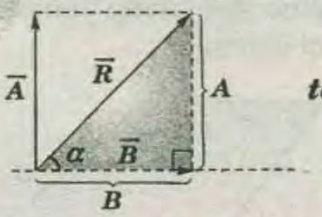
$$R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\underbrace{\cos 90°}_{0}}$$

$$R=\sqrt{A^2+B^2}$$



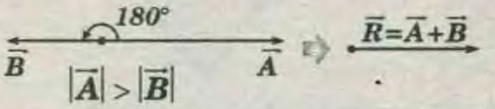
(Teorema de Pitágoras)

En este caso,la dirección de la resultante está definida por la medida del ángulo α y será :



$$tan\alpha=\frac{A}{B}$$

III) Si $\theta=180°$, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ serían opuestos. El módulo de la resultante se obtiene como



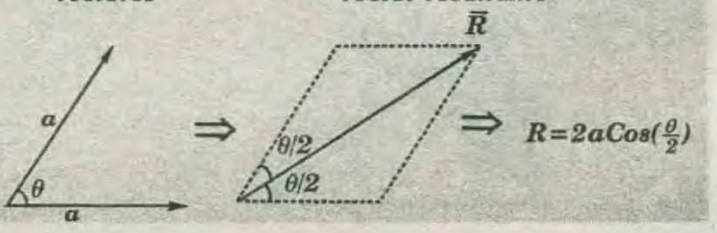
$$R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\underbrace{\cos 180°}_{-1}}$$

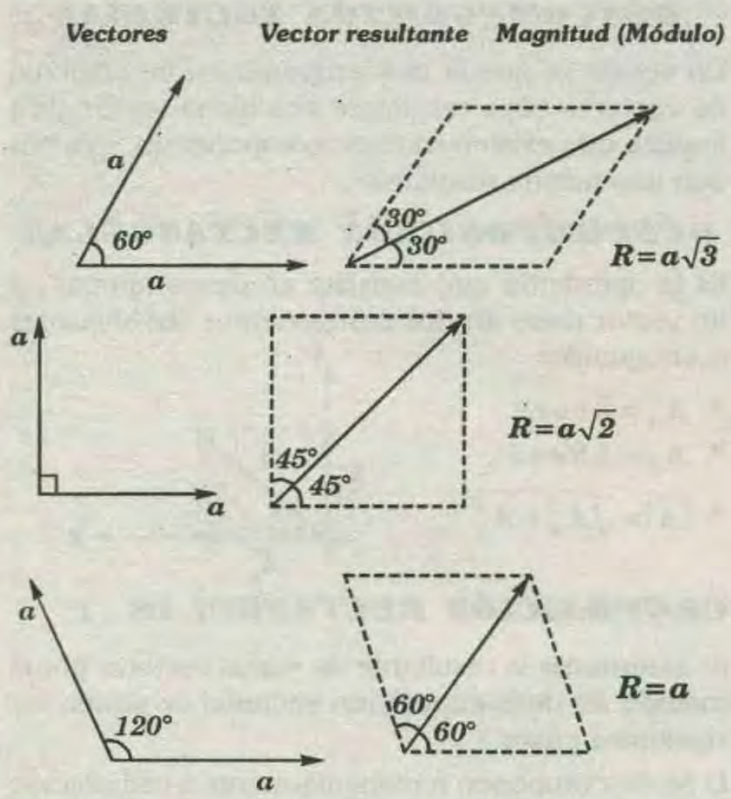
$$R=\sqrt{A^2+B^2+2AB}=\sqrt{(A-B)^2}$$

$$R=A-B$$

El módulo de la resultante sería la diferencia de los módulos de los vectores. Tener en cuenta que la dirección de la resultante coincide con la del vector de mayor módulo. _

IV) Si dos vectores tienen igual magnitud (módulo), se cumple :

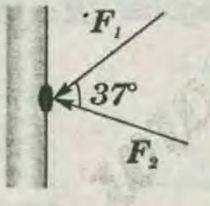




En la figura, se ilustra otra manera de considerar la suma vectorial en términos de triángulos en lugar de paralelogramos ; luego , se generaliza a polígonos, para más de dos vectores .

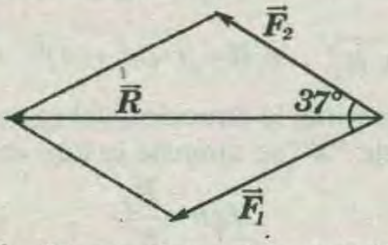
EJEMPLO 1:

Sobre un punto de una pared se aplican *2* fuerzas de *2N* y *5N* de módulo. Determinar la fuerza Resultante (Efectiva) que se aplica sobre dicho punto .



RESOLUCIÓN :

1°) Desplazamos adecuadamente los vectores y graficamos el paralelogramo :



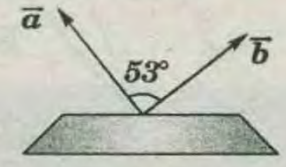
2°) $\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$, $\vec{R}$ es el vector resultante cuyo módulo es:

$$R=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\ cos37°}$$

$$\rightarrow R=\sqrt{2^2+5^2+2(2)(5)\ 4/5} \Rightarrow R=3\sqrt{5}N$$

EJEMPLO 2 :

Se desea levantar una masa aplicando dos fuerzas de *5* y *7N*. Como indica la figura . Determinar el módulo de la fuerza resultante que se le está aplicando al cuerpo .

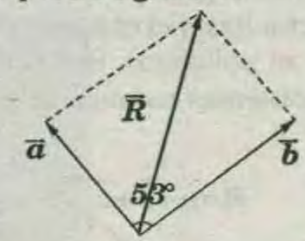


$|\vec{a}|=5\ N$

$|\vec{b}|=7\ N$

RESOLUCIÓN :

1°) Determinamos el paralelogramo :



2°) Calculamos el módulo de $\vec{R}$:

$$R=\sqrt{5^2+7^2+2(5)(7)cos53°}$$

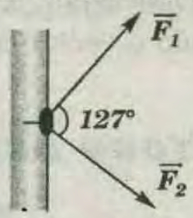
$$\rightarrow R=2\sqrt{29}\ N$$

EJEMPLO 3 :

Al extraer un clavo de una pared se aplican dos fuerzas de *30* y *50N*. Respectivamente y que forman un ángulo de **127°**. Calcular el módulo de la fuerza resultante .

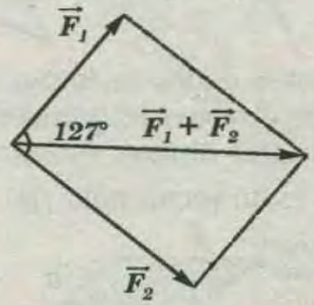
$|\vec{F}_1|=30N$

$|\vec{F}_2|=50N$



RESOLUCION:

1°) Graficamos el paralelogramo :



2°) El módulo de la Resultante la calculamos por :

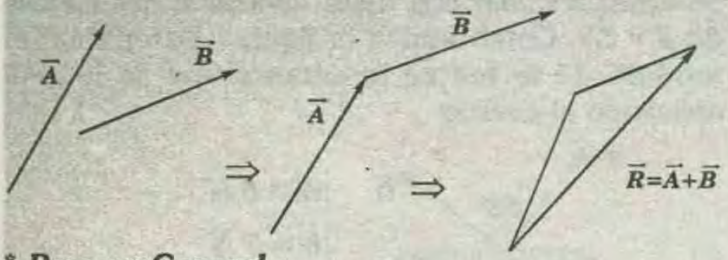
$$|\vec{F}_1+\vec{F}_2|=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2cos127°}$$

Donde : $cos127°=-cos53°$

$$|\vec{F}_1+\vec{F}_2|=\sqrt{30^2+50^2+2(30(50)(-3/5)}$$

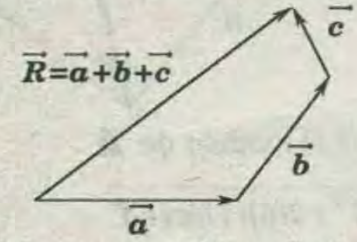
$$\rightarrow |\vec{F}_1+\vec{F}_2|=40\ N$$

MÉTODO DEL TRIÁNGULO



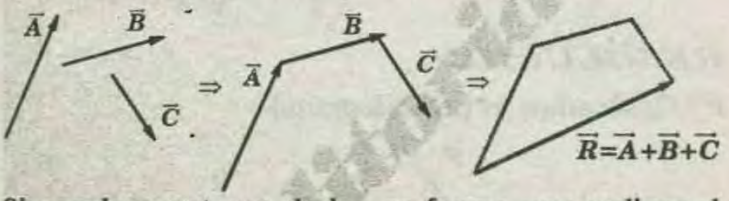
* ***Pero en General :***

Para sumar más de dos vectores , se ubica uno a continuación de otro formado un polígono. El vector suma (resultante) es el que va desde el origen del primer vector hasta el extremo del último (aquel que completa el polígono). Es decir , para resolver este tipo de problemas usamos el método del polígono.

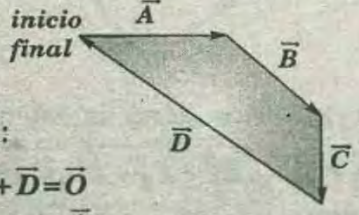


El módulo siempre es positivo. Si el módulo fuera cero, el origen coincidiría con el extremo ; es decir , el vector se reduciría a un punto y , por tanto , no podría hablarse propiamente de un vector. Sin embargo, aunque en este caso no se pueda hablar de dirección ni de sentido , para facilitar muchas operaciones que veremos más adelante hablaremos de vector nulo o vector cero, y lo representaremos por $\vec{0}$.

MÉTODO DEL POLÍGONO

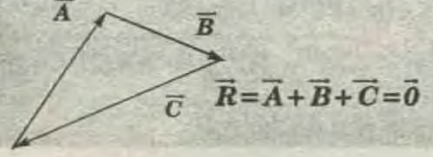


Si con los vectores dados se forma una poligonal cerrada , es decir , el origen del primer vector coincide con el extremo del último; entonces, el vector resultante $(\vec{R})$ es un vector nulo $(\vec{O})$.



En este caso :

$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}=\vec{O}$



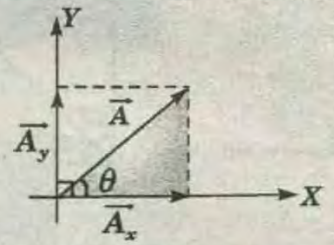
DESCOMPOSICIÓN VECTORIAL

Un vector se puede descomponer en un conjunto de vectores cuya resultante sea dicho vector. Esto implica que existen muchas componentes que nos den una misma resultante .

DESCOMPOSICIÓN RECTANGULAR

Es la operación que consiste en descomponer , a un vector dado en dos componentes rectangulares u ortogonales .

* $A_x = A\cos\theta$
* $A_y = A\,Sen\theta$
* $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$



COMPOSICIÓN RECTANGULAR :

Al determinar la resultante de varios vectores por el método de descomposición vectorial se siguen los siguientes pasos :

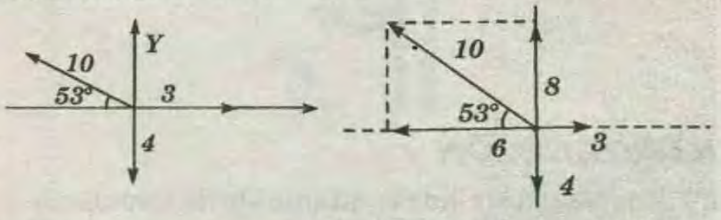
I) Se descomponen rectangularmente a cada vector, respecto a un par de ejes rectangulares elegidos arbitrariamente .

II) Se suman los componentes según el eje donde se ubican, donde obtendremos dos resultantes, R_x y R_y

* R_x : Suma de los componentes en el eje X .
* R_y : Suma de los componentes en el eje Y .

III) El módulo de la resultante se determina aplicando el teorema de Pitágoras . $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

EJEMPLO 1 :



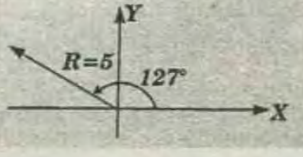
* $R_x = 3 - 6 = -3$
* $R_y = 8 - 4 = 4$
* $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \Rightarrow R = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} \rightarrow R = 5$

IV) Para determinar la dirección del vector resultante respecto al eje *"X"* se apuesta la función tangente :

$$tg\theta = \frac{R_y}{R_x}$$

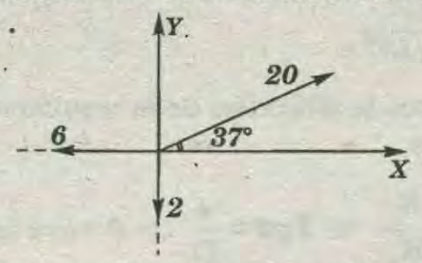
* En el ejemplo dado :
* $tg\theta = -\frac{4}{3} \rightarrow \theta = 127°$

Luego :

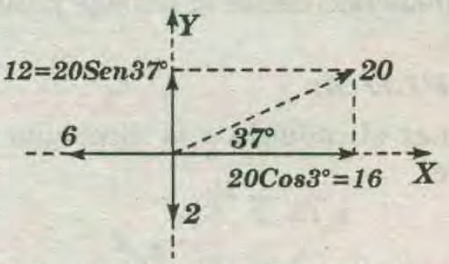


EJEMPLO 1:

Determinar el módulo de la resultante de los vectores mostrados .



* En este caso al vector de módulo **20** se lo descompone rectangularmente , obteniéndose lo siguiente :



Se determina la resultante, en forma independiente, en los ejes "*X*" e "*Y*" .

Eje "*X*":

$$\vec{R}_x=+16-6 \rightarrow \vec{R}_x=+10$$

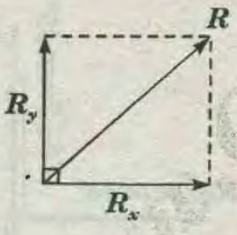
Eje "*Y*": $\vec{R}_y=+12-2 \rightarrow \vec{R}_y=+10$

* Se determina la resultante de los vectores $\vec{R}_x$ y $\vec{R}_y$.

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}$$

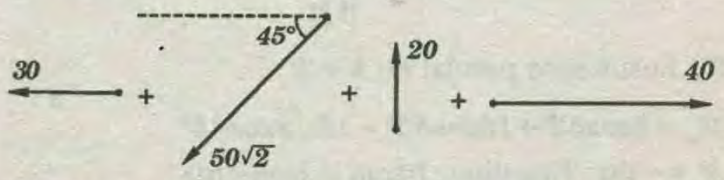
$$\rightarrow R=\sqrt{10^2+10^2}$$

$$R=10\sqrt{2}$$



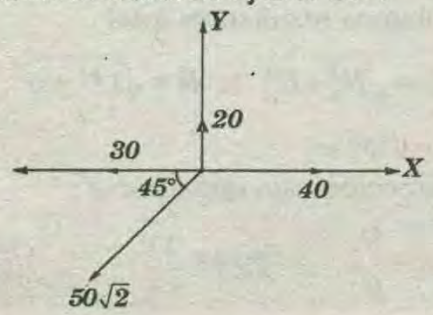
EJEMPLO 2 :

Hallar el véctor resultante de los vectores que se muestran :

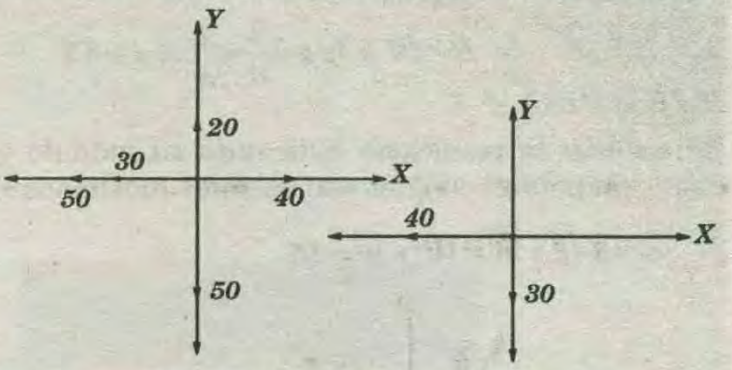


RESOLUCIÓN :

* Se colocan todos los vectores con el mismo origen en el centro de un sistema de ejes *X* e *Y* .



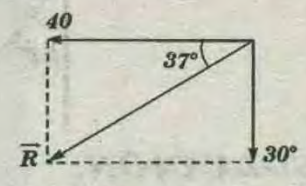
* Se determinan las componentes de los vectores :



* Se suman vectorialmente la componentes .

* Por tanto el vector resultante $\vec{R}$ es .

donde $\begin{cases} R_x=-40 \\ R_y=-30 \end{cases}$

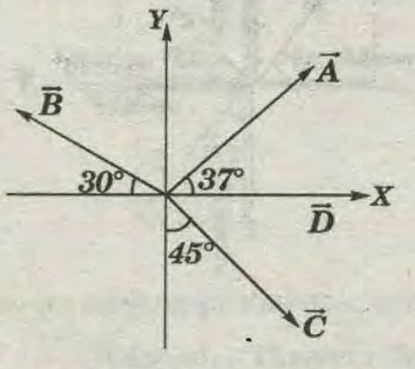


$$|\vec{R}|=50$$

EJEMPLO 3 :

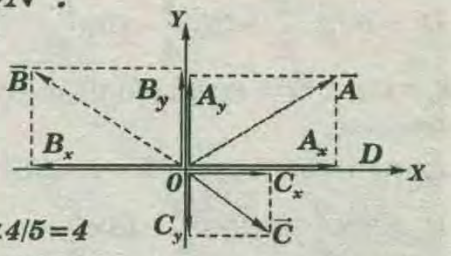
Encontrar el módulo y dirección de la resultante del conjunto de vectores mostrados en la figura , si :

$$|\vec{A}|=5\ ;\ |\vec{B}|=14\ ;\ |\vec{C}|=2\sqrt{2}\ ;\ |\vec{D}|=7\sqrt{3}$$



RESOLUCIÓN :

* Tenemos :



$$\vec{A}\begin{cases} A_x=A\cos 37°=5\times 4/5=4 \\ A_y=A\operatorname{sen}37°=5\times 3/5=3 \end{cases}$$

$$\vec{B}\begin{cases} B_x=B\cos 30°=14\times\sqrt{3}/2=7\sqrt{3} \\ B_y=B\operatorname{sen}30°=14\times 1/2=7 \end{cases}$$

$$\vec{C}\begin{cases} C_x=C\cos 45°=2\sqrt{2}\times 1/\sqrt{2}=2 \\ C_y=C\operatorname{sen}45°=2\sqrt{2}\times 1/\sqrt{2}=2 \end{cases}$$

* Luego de las fórmulas :

$$R_x=+A_x+C_x+D-B_x=+4+2+7\sqrt{3}-7\sqrt{3}=+6$$

$$R_y=+A_y+B_y-C_y=+3+7-2=+8$$

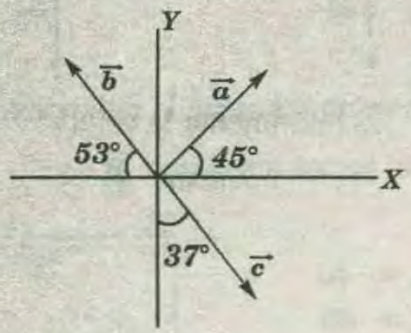
* Finalmente , usamos :

$R=\sqrt{6^2+8^2} \Rightarrow R=10$ y $tg\phi=\frac{8}{6}=\frac{4}{3} \Rightarrow \phi=53°$

EJEMPLO 4 :

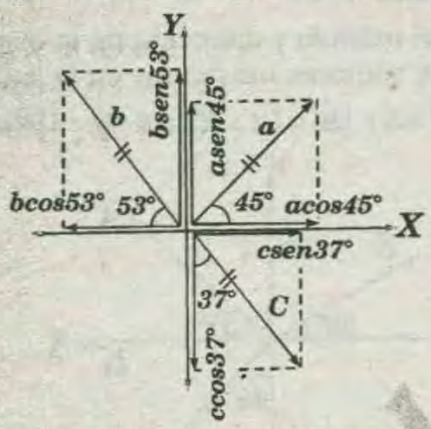
Determinar la resultante indicando su módulo y dirección para el conjunto de vectores mostrados .

Si : $|\vec{a}|=8\sqrt{2}$; $|\vec{b}|=10$ y $|\vec{c}|=15$



RESOLUCIÓN:

1°) Descomponemos los vectores en sus componentes rectangulares . (trabajaremos con los módulos)



2°) Calculamos resultados parciales en cada eje :

$R_x=a\cos 45°+c\,sen37°-b\cos 53°$

$R_x=8\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+15\times\frac{3}{5}-10\times\frac{3}{5}$

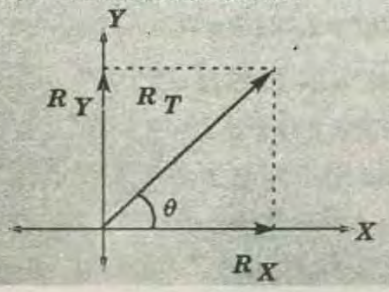
$R_x=11u$. Este resultado es positivo , indica hacia la derecha .

$R_y=b\,sen\,53°+a\,sen45°-c\cos 37°$

$R_y=10\times\frac{4}{5}+8\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-15\times\frac{4}{5}$

$R_y=4u$. Positivo indica hacia arriba

3°) Obtenemos el resultado total :



$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2} \rightarrow R=\sqrt{11^2+4^2}$

$\rightarrow R=\sqrt{137}u$

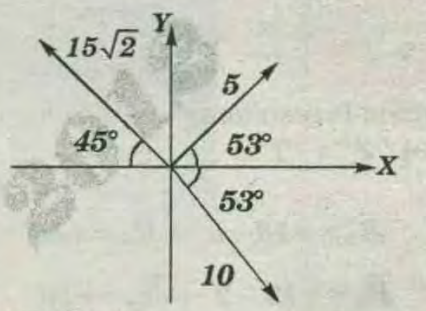
* Calculamos la dirección de la resultante dado por el ángulo θ.

Por $Tg\theta=\frac{R_y}{R_x} \Rightarrow Tg\theta=\frac{4}{11} \Rightarrow \theta=arc\,tg(\frac{4}{11})$

Importante : La dirección dada por el ángulo θ se obtiene midiendo desde el semieje positivo *X* hacia el vector .

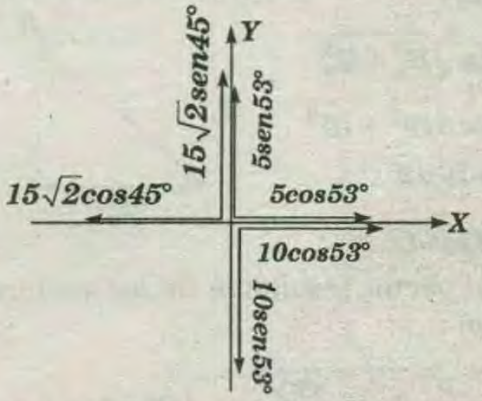
EJEMPLO 5:

Determinar el módulo y la dirección del vector resultante .



RESOLUCIÓN :

1°) Descomposición rectangular :



2°) Resultados parcial en *X* e *Y*

$R_x=5\cos 53°+10\cos 53°-15\sqrt{2}\cos 45°$

$R_x=-6u$. Negativo , hacia la izquierda :

$R_x=15\sqrt{2}sen45°+5sen53°-10sen53°$

$R_y=11\,u$.

3) Calculamos resultantes total .

$R_x=\sqrt{R_x^2+R_y^2} \Rightarrow R=\sqrt{11^2+6^2}$

$R=\sqrt{157}\,u$

4°) La dirección esta dada por θ:

Por : $Tg\theta=\frac{R_y}{R_x} \Rightarrow Tg\theta=\frac{11}{-6}$

$$\theta = arctg(-\frac{11}{6})$$

EJEMPLO 6 :

Cual debe ser el valor del ángulo Φ para que la resultante sea nula .

RESOLUCIÓN :

1°) Si la resultante es nula , entonces

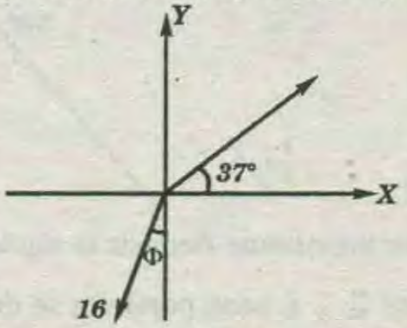
$R_x = 0$ y $R_y = 0$, luego en X :

$$0 = 5\frac{(3)}{5} + 6sen\Phi - 6\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow sen\Phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \Phi = 30°$$

EJEMPLO 7 :

Determinar el ángulo Φ para que la resultante del conjunto de vectores se ubique en el eje Y .



RESOLUCIÓN :

1°) Para que la resultante se ubique en eje Y , el resultado parcial en el eje X debe ser nulo .

*Luego en eje X :

$$0 = 10\sqrt{3}\cos 37° - 16\,sen\Phi$$

$$\Rightarrow sen\Phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

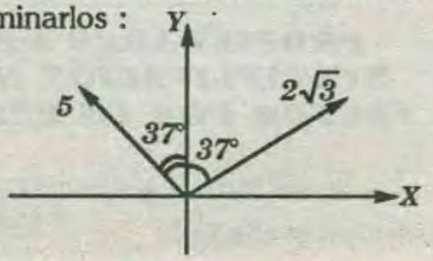
* Por lo tanto : $\Phi = 60°$

EJEMPLO 8 :

Dados dos vectores cuyos módulos son $2\sqrt{3}\ u$ y $5\ u$. Determinar el módulo de la resultante sabiendo que los vectores forman un ángulo de $67°$.

RESOLUCIÓN :

1°) $67°$ uno es notable entonces ubicamos ejes que permitan determinarlos :



2°) Ahora por descomposición rectangular .

$$R_x = 2\sqrt{3}sen30° - 5sen37°$$

$$\Rightarrow R_x = (\sqrt{3} - 3)\ u$$

$$R_y = 2\sqrt{3}cos30° + 5cos37°$$

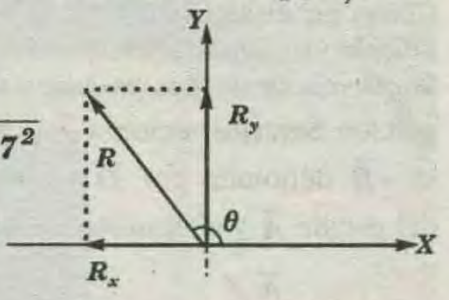
$$\Rightarrow R_y = 7\ u$$

3°) Determinamos resultante total con R_x y R_y .

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

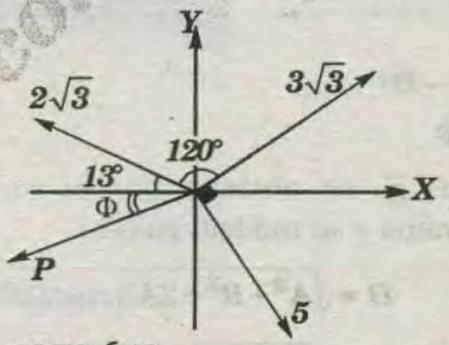
$$\Rightarrow R = \sqrt{(\sqrt{3} - 3)^2 + 7^2}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{61 - 6\sqrt{3}}\ u$$



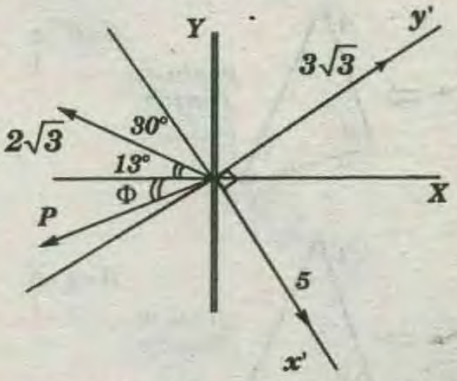
EJEMPLO 9 :

Determinar el angulo Φ , para que la resultante del conjunto de vectores mostrados sea nula .



RESOLUCIÓN:

1°) Ubicamos nuevos ejes X' e Y' (recurrimos a ello para visualizar ángulos notables) , aprovechamos vectores que formam entre sí $90°$.



2°) Ahora $2\sqrt{3}$ forma $30°$ con X' y el vector P forma $(43° + \Phi)$ con X'.

3°) Por datos del problema la resultante debe ser cero entonces :

$$R_{x'} = 0 \wedge R_{y'} = 0$$

* En X': $0 = 5 - 2\sqrt{3}cos30° - Pcos(43° + \Phi)$

$$\Rightarrow Pcos(43° + \Phi) = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

www.GRATIS2.com

* En Y'; $0 = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}sen30° - Psen(43°+\Phi)$

$\Rightarrow Psen(43°+\Phi) = 2\sqrt{3}$ .....(β)

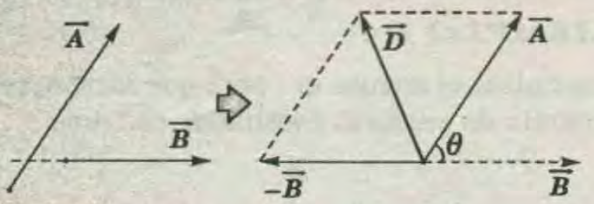
4°) $(\beta)+(\alpha)$:

$$\frac{Psen(43°+\Phi)}{P\cos(43°+\Phi)} = \frac{2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Tg(43°+\Phi) = \sqrt{3}$$

* Por lo tanto : $43°+\Phi = 60° \Rightarrow \Phi = 17°$

DIFERENCIA DE VECTORES

Como en el álgebra vectorial sólo está definido la adición y multiplicación de vectores, para determinar la diferencia de dos vectores se puede partir de la adición. Sean los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el vector diferencia $\vec{A}-\vec{B}$ denotado por $\vec{D}$ se obtiene como la suma del vector $\vec{A}$ y el opuesto del vector $\vec{B}$. Así :



$\vec{D} = \vec{A} + (-\vec{B})$

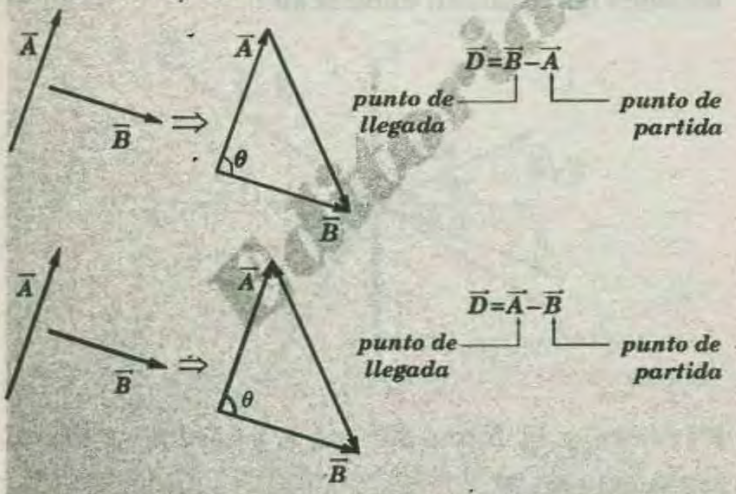
$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$

El vector $\vec{D}$ se obtiene por el método del paralelogramo y su módulo como :

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(180 - \theta)}$$

Por lo tanto , $D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$

Dirección : pero una formá más de representar al vectores es la siguiente :

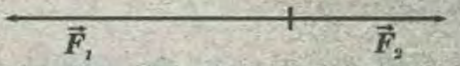


MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

En el problema de don jacinto y el caballo , el caballo ejerce el doble de fuerza que don jacinto , pero en sentido contrario.

* Es decir :

$$\vec{F}_1 = -2\vec{F}_2 = (-2)\vec{F}_2$$



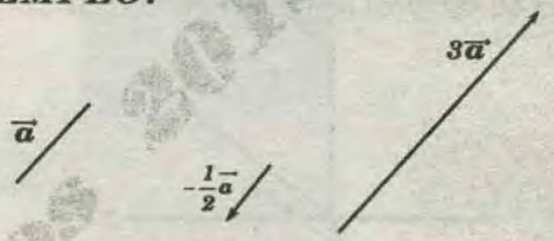
* Una vez pasado el enojo , tanto don jacinto como el caballo empiezan a llevar la carreta en el mismo sentido y con las mismas fuerzas anteriores , como se muestra en la figura :

DEFINICIÓN :

Si $\vec{a}$ es un vector y c es un escalar (un número real) el producto $c\,\vec{a}$ se define como un vector que tiene:

* La dirección de $\vec{a}$
* El mismo sentido de $\vec{a}$, si $c > 0$
* El sentido opuesto de $\vec{a}$, si $c < 0$
* La magnitud o módulo $||c\vec{a}|| = |c|\,||\vec{a}||$

EJEMPLO:



* De aquí es importante deducir lo siguiente :

Para que dos $\vec{a} \wedge \vec{b}$ sean paralelos se debe cumplir $\vec{a} = t\,\vec{b}$,para algún t real. Si $t=0$ entonces $\vec{a} = \vec{0} \wedge \vec{b}$ es cualquier vector , con lo que podemos convenir que el vector $\vec{0}$ es paralelo a cualquier vector.

EJEMPLO:

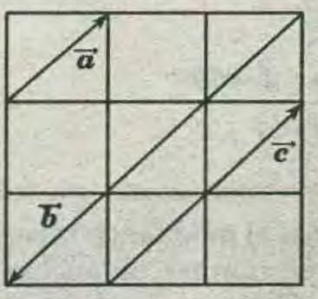
Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ de la figura, donde todos los cuadrados tienen igual medida.

* Se tiene :

$\vec{c} = 2\vec{a}$

$\vec{b} = -3\vec{a}$

$\vec{b} = \left(-\frac{3}{2}\right)\vec{c}$



OJO :

Denotamos : $\vec{b}(-1) = (-1)\,\vec{b}$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

Sean $\vec{a} \wedge \vec{b}$ vectores, c y d escalares. Se tienen las siguientes propiedades:

1) $c(\vec{a}+\vec{b}) = c\vec{a}+c\vec{b}$

2) $(c+d)\vec{a} = c\vec{a}+d\vec{a}$

3) $(cd)\vec{a} = c(d\vec{a}) = d(c\vec{a})$

4) $1\vec{a} = \vec{a}$

5) $0\vec{a} = \vec{0}$

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE VECTORES

Sean los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{0}$ (vector nulo). Entonces se cumplen las siguientes propiedad :

1) $\vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$.....*(elemento neutro aditivo)*

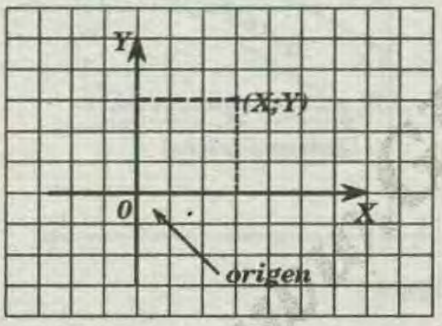
2) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$.....*(comutatividad)*

3) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (a+b)+\vec{c}$.....*asociatividad)*

4) $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$.....*(elemento inverso aditivo)*

EL SISTEMA COORDENADO BIDIMENSIONAL

El sistema coordenado bidimensional está formado por dos rectas perpendiculares , llamadas ejes , que se cortan en un punto llamado origen. Este sistema se conoce como plano *XY*.



El conjunto de todos los puntos o pares ordenados de este sistema se denota por $\mathbb{R}^2$

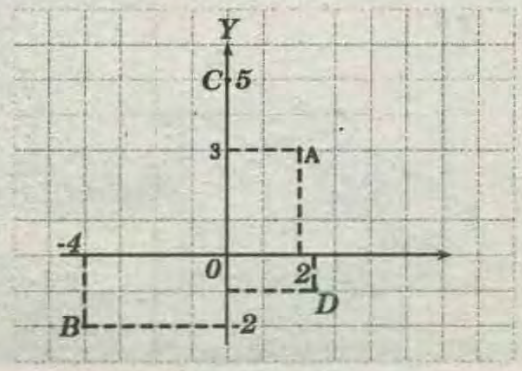
Donde $\mathbb{R}^2 = \{(x;y)/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

EJEMPLO :

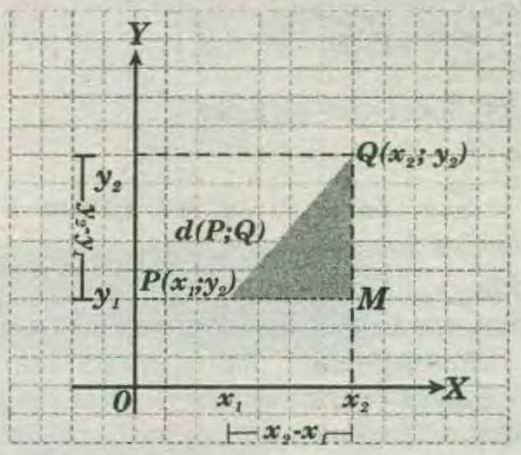
Ubicar en el plano *X* y *Y* los siguientes puntos :

A) A(2;3)B) B(–4;–2) C) C(0;5)D) D(2,5;–1)

RESOLUCIÓN :



DISTANCIAS ENTRE DOS PUNTOS



Sea *d(P,Q)* La distancia entre los puntos *P* y Q.

* Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo *PMQ*, Se tiene :

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

* Por lo tanto :

$$\boxed{d(P;Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

EJEMPLO :

Determinar la distancia entre los puntos :

a)P(7;1),Q(–1;–3) *b)A(–2;0),B(1;4)*

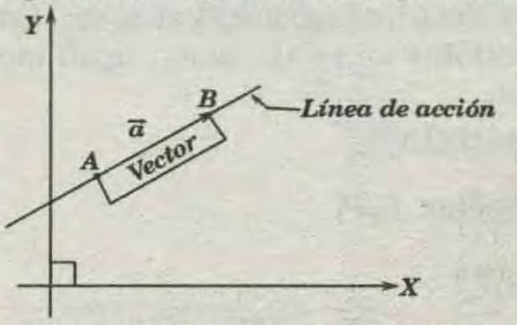
RESOLUCIÓN :

a) $d(P;Q) = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$

b) $d(A;B) = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$

REPRESENTACIÓN DEL VECTOR

Del análisis realizado en el espacio vectorial bidimensional , un vector se denota con una letra minúscula y sobre ella una flecha , así $\vec{a}$: se lee vector *a* . La representación geométrica del vector a es mediante una flecha o segmento dirigido , el siguiente gráfico nos ilustra dicha representación.



* El segmento dirigido *AB* o flecha representa al vector *a*, donde *A* es el punto inicial o extremo inicial y *B* es el punto final , su notación correspondiente es :

$\overrightarrow{AB}$: se lee vector *AB* o segmento dirigido que va de *A* hacia *B*.

* Luego : $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$

$$\rightarrow \boxed{\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \vec{a}}$$

Operación lineal con vectores

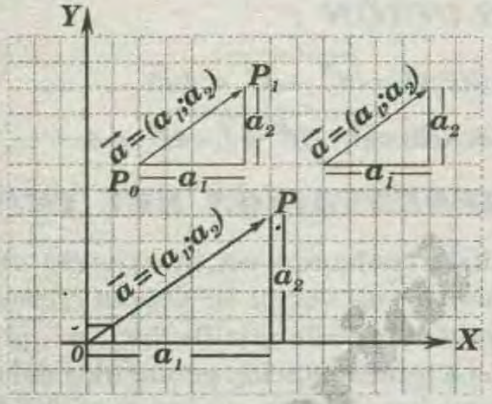
NOTA :

* Sea : $\vec{a} = (a_1;a_2)$: se lee vector a cuyas componentes son a_1 y a_2.

* Sea : $P(x_0;y_0)$: Se lee punto P de coordenadas x_0 y y_0. Es frecuente asociar la palabra vector en el campo de las matemáticas , física, mecánica y otras ciencias. Esto es cuando se refiere a las magnitudes vectoriales, así tenemos por ejemplo : la velocidad, la aceleración,la intensidad del campo electromagnético, etc. Además de sus valores numéricos estos tienen una dirección y un módulo, se representan mediante un vector o segmento dirigido.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE UN VECTOR EN $\mathbb{R}^2$

Geométricamente un vector $\vec{a} = (a_1;a_2)$ en $\mathbb{R}_2$ es representado mediante un segmento dirigido o una flecha.



* Cada vector $\vec{a} = (a_1;a_2)$ tiene un número infinito de representaciones geométricas en $\mathbb{R}_2$, todos ellos son paralelos entre sí, tienen igual módulo y dirección.

NOTACIÓN :

$\overrightarrow{P_0P_1}$: *vector* P_0P_1

$\vec{a}$: vector a

$$\boxed{\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1} \Rightarrow \vec{a} = P_1 - P_0}$$

* Donde :

P_0 : punto inicial o extremo inicial

P_1 : punto final o extremo final

$\vec{a} = (a_1;a_2)$ se lee, vector a cuyas componentes son a_1 y a_2 tienen la dirección de los ejes X e Y.

* Donde :

a_1: se denomina primera componente y es desplazado paralelamente al eje X.

a_2: se denomina segunda componente y es desplazado paralelamente al eje Y.

RADIO VECTOR :

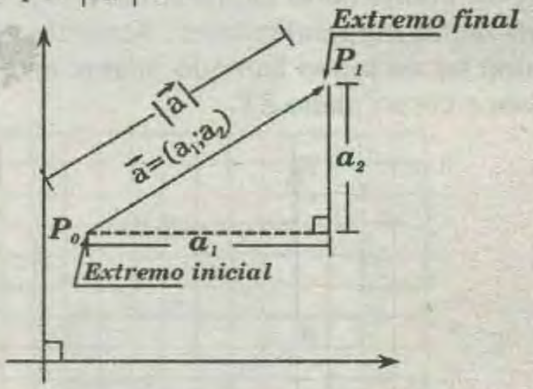
Es aquel vector cuyo punto inicial es el origen de coordenadas.

En la figura *A*.

$\overrightarrow{OP}$: radio vector .....(vector posición)

MODULO O MAGNITUD DE UN VECTOR :

Para cada vector $\vec{a}=(a_1;a_2) \in \mathbb{R}^2$, existe un escalar o número real denominado módulo , magnitud, norma o longitud de dicho vector $\vec{a}$ denotado por $|\vec{a}|$.



* En la figura :

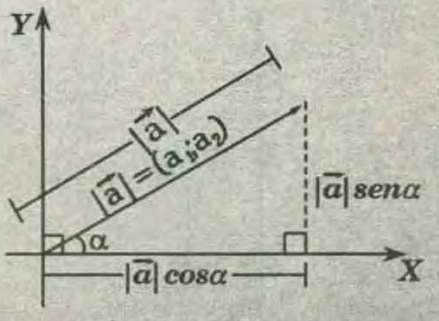
$\triangle P_0MP_1$: aplicando el teorema de Pitágoras

$$(|\vec{a}|)^2 = a_1^2 + a_2^2 \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

DIRECCIÓN DE UN VECTOR :

A cada vector no nulo $\vec{a}=(a_1;a_2)$, le corresponde una dirección dada por la medida del ángulo que forma el vector con el eje X.

Así :



Dado el vector : $\vec{a}=(a_1;a_2)$

* Del gráfico :

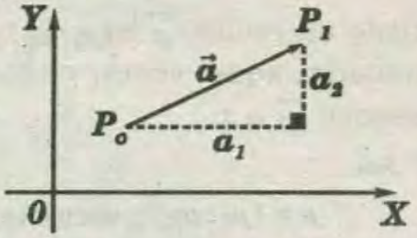
$$a_1 = |\overrightarrow{a}|\cos\alpha,\ a_2 = |\overrightarrow{a}|\operatorname{sen}\alpha$$

* Luego: $\overrightarrow{a} = (|\overrightarrow{a}|\cos\alpha; |\overrightarrow{a}|\operatorname{sen}\alpha)$

$$\rightarrow \boxed{\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha)}$$

* Analizando las componentes del vector $\overrightarrow{a}$, se observa dos elementos muy importantes los cuales son el módulo $|\overrightarrow{a}|$ y α. Donde a es medido en sentido antihorario a partir del eje x el cual indica la dirección del vector.

OBSERVACIÓN :



Donde : $\vec{a} = \overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_0}; \vec{a} = (a_1; a_2)$

Si : $a_1 = x_1 - x_o$ y $a_2 = y_1 - y_o$

$\vec{a} = (x_1 - x_o; y_1 - y_o)$

NOTA :

El conjunto : $\mathbb{R}^2 = \{\vec{a} = (a_1; a_2) / a_1 \text{ y } a_2 \in \mathbb{R}\}$

tiene por gráfica :

Vector : $\vec{a} = (a_1; a_2)$

Longitud de $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

IGUALDAD DE VECTORES :

Dos vectores $\vec{a} = (a_1; a_2) \wedge \vec{b} = (b_1; b_2)$ son iguales si se cumplen que $a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2$; es decir, si sus respectivas componentes son iguales :

EJEMPLO:

Si: $\overrightarrow{u} = (-2,1)$ y $\overrightarrow{v} = (5+x, -3+2y)$ halla el valor de x,y de y sabiendo que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$

RESOLUCIÓN :

* De la igualdad de vectores se tiene que :

* Son iguales las primeras componentes.

$$5 + x = -2 \rightarrow x = -7$$

* Son iguales las segundas componentes.

$$-3 + 2y = 1 \rightarrow y = 2$$

OPERACIONES CON VECTORES

Las operaciones entre vectores estudiadas se pueden efectuar expresándolas en términos de sus componentes, con lo que evitamos las construcciones geométricas. Ahora veremos cómo efectuar la adición y diferencia de vectores y la multiplicación de un vector por un escalar.

DEFINICIÓN :

Si $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ son dos vectores y a es un número real, entonces :

I) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1 ; a_2 + b_2)$

II) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1 ; a_2 - b_2)$

III) $aa = (aa_1 ; aa_2)$

*Puedes verificar que todas las propiedades vistas sobre la adición de vectores y del producto por un escalar se satisfacen cuando expresamos un vector en términos de sus componentes.

EJEMPLOS :

Si $\vec{a} = (-3;6)$ y $\vec{b} = (1;-3)$, entonces :

* $\vec{a} + \vec{b} = (-3 + 1; 6 - 3) = (-2 ; 3)$

* $2\vec{a} = 2(-3 ; 6) = (2(-3) ; 2(6)) = (-6 ; 12)$

* $\vec{a} - \vec{b} = (-3 - 1 ; 6 - (-3)) = (-4 ; 9)$

* $-3\vec{a} + 4\vec{b} = -3(-3 ; 6) + 4(1 ; -3)$

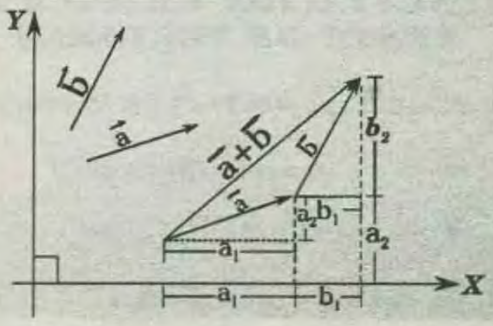
$\rightarrow -3\vec{a} + 4\vec{b} = (9; -18) + (4; -12) = (13; -30)$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA SUMA DE VECTORES

Sean : $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$ y $\vec{b} = (b_1 ; b_2)$, luego el vector suma es:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 ; a_2) + (b_1 ; b_2)$$

$$\rightarrow \boxed{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1 + b_1 ; a_2 + b_2)}$$



WWW.GRATIS.COM

* En el gráfico :

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1;a_2)+(b_1;b_2)$$

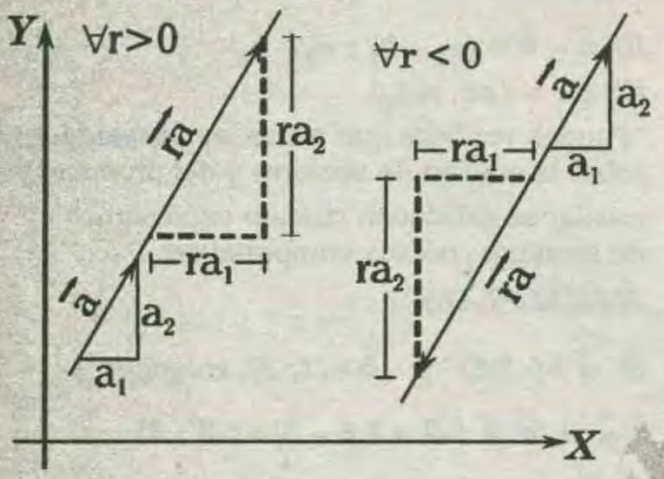
$\vec{a}+\vec{b}$: se denomina resultante

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR CON UN VECTOR

Dado un número real r (escalar) y un vector $\vec{a}$: $(a_1; a_2)$,se tiene : $r.\vec{a}=r(a_1; a_2)$.

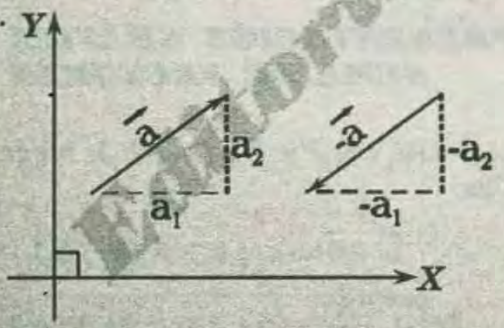
$$\boxed{r.\vec{a}=r(a_1; a_2)}$$

Donde $r\vec{a}$: se lee r veces el vector a y $r\vec{a}$: tienen igual dirección que $\vec{a}$.



NOTA :

Todo vector $\vec{a}=(a_1;a_2)$ tiene su inverso aditivo denotado por $-\vec{a}=(a_1;a_2)$,denominado también el opuesto del vector a y ambos tienen igual módulo y dirección.

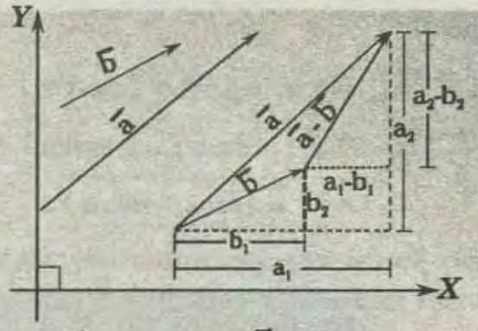


REPRESENTACION GRÁFICA DE LA RESTA DE VECTORES

Sean los vectores $\vec{a}=(a_1; a_2)$ y $\vec{b}=(b_1; b_2)$, se define la resta $\vec{a}-\vec{b}=a+(-b)$ es decir :

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1; a_2)+(-b_1; -b_2)$$

* Luego: $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;\ a_2-b_2)$



En la figura : $\vec{a}=(a_1;a_2)$ y $\vec{b}=(b_1;b_2)$, luego :

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;\ a_2-b_2)$$

VECTOR UNITARIO BIDIMENSIONAL

Dado un vector $\vec{\mu}=(\mu_1;\mu_2)$,se denomina vector unitario, aquel vector cuyo módulo es uno, se denota: $\vec{\mu}=1$.

* Así

$\vec{\mu}=(\mu_1;\mu_2)$: vector unitario.

* Luego: $|\vec{\mu}|=\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}=1$

EJEMPLO:

El vector $\vec{\mu}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es unitario dado que:

$$|\vec{\mu}|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2}=1$$

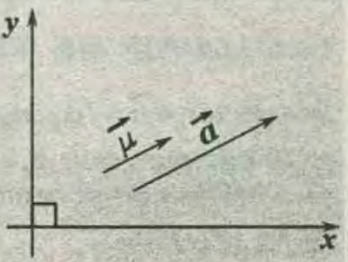
VECTOR UNITARIO QUE TIENE LA DIRECCIÓN DE UN VECTOR

Dado el vector $\vec{a}=(a_1;a_2), \vec{a}\neq 0$ y el vector unitario $\vec{\mu}$ que tiene la dirección del vector a como $\vec{a}$ y $\vec{\mu}$ tienen igual dirección, entonces dichos vectores son paralelos.

* En la figura:

$\vec{\mu}\ //\ \vec{a} \rightarrow \vec{a}=|\vec{a}|.\vec{\mu}$

* Luego : $\vec{\mu}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$



EJEMPLO :

* Consideremos el vector $\vec{a}=(3;4)$. Es claro que $\vec{a}=5$

* Si multiplicamos dicho vector por $\dfrac{1}{|\vec{a}|}=\dfrac{1}{5}$ obtendremos:

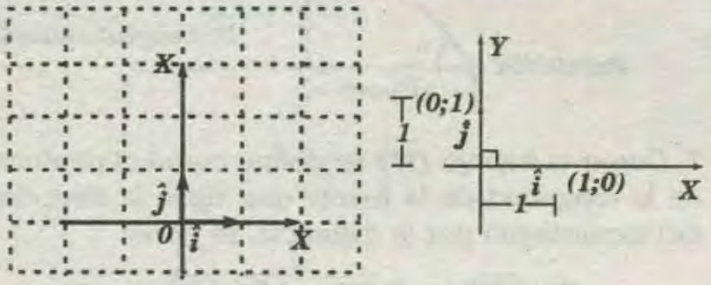
$$\vec{\mu}_{\vec{n}}=\frac{(3;4)}{5}=\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$$

Editorial Cubinas

Que es un vector unitario.

VECTORES UNITARIOS ESPECIALES $\hat{i}$; $\hat{j}$

Se nombra a $\hat{i}=(1;0)$ y $\hat{j}=(0;1)$ como los vectores unitarios que siguen la dirección de los semiejes coordenados positivos. A estos vectores también se les llama vectores canónicos de R^2.



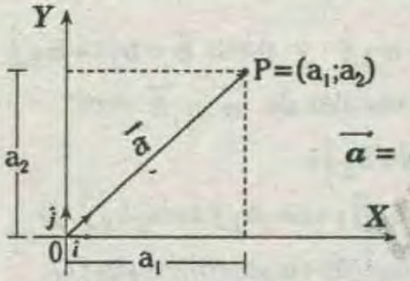
* Del gráfico:

$$\boxed{\hat{i}=(1;0)} \quad \boxed{\hat{j}=(0;1)}$$

DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR EN TÉRMINOS DE LOS VECTORES CANÓNICOS $\hat{i}$, $\hat{j}$

Los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$ se utilizan para tener otra forma de representar vectores. En efecto, si $\vec{a}=(a_1;a_2)$ se tiene: $\vec{a}=(a_1;0)+(0,a_2)=a_1(1;0)+a_2(0;1)$

* Luego, este resultado puede expresarse como:



$$\vec{a}=(a_1;a_2)=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}$$

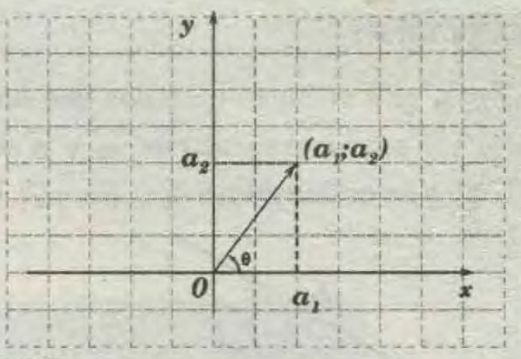
EJEMPLO:

* $(3;-2)=3\hat{i}-2\hat{j}$
* $(-5;-9)=-5\hat{i}-9\hat{j}$
* Las operaciones con vectores expresados en términos de los vectores $\hat{i}$ y $\hat{j}$ se realizan en forma idéntica a las operaciones con suma algebraicas.
* En efecto:

$$(4;-5)+(7;3)=4\hat{i}-5\hat{j}+7\hat{i}+3\hat{j}=11\hat{i}-2\hat{j}=(11;-2)$$

FÓRMULAS PARA EXPRESAR UN VECTOR EN TÉRMINOS DE SUS COMPONENTES

* Sea $\vec{a}=(a_1;a_2)$ un vector, cuyo ángulo director es q grados, como muestra la figura:



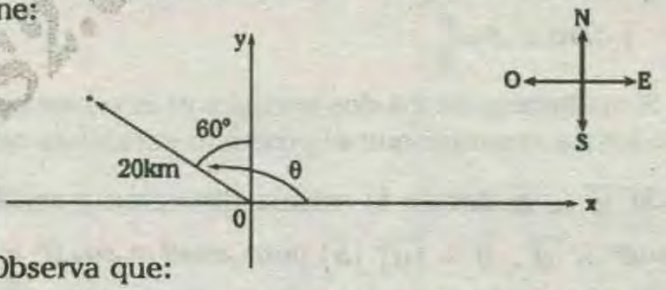
* Puesto que:

$$\boxed{Cos\,\theta=\frac{a_1}{|\vec{a}|}} \wedge \boxed{sen\,\theta=\frac{a_2}{|\vec{a}|}}$$

* Se obtienen las fórmulas siguientes:
* Dado el vector: $\vec{a}=(a_1;a_2)=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}$
* Entonces: $a_1=|\vec{a}|\cos\theta$, $a_2=|\vec{a}|\,sen\theta$
* Es decir: $\vec{a}=|\vec{a}|\cos\theta\,\hat{i}+|\vec{a}|\,sen\theta\,\hat{j}$

EJEMPLO :

Si el viento sopla a **20 km/h** en dirección **N 60° O**, se tiene:



* Observa que:

$$\theta=90^\circ+60^\circ=150^\circ$$

* Luego, la velocidad expresada en términos de sus componentes es:

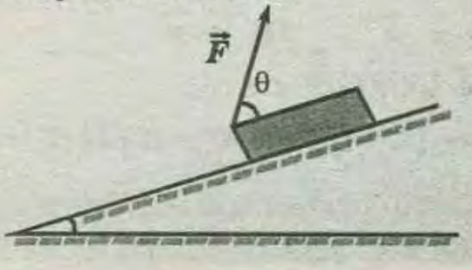
$$\vec{v}=20\cos 150^\circ\hat{i}+20\,sen\,150^\circ\hat{j}$$

$$\rightarrow \vec{v}=-17{,}32\hat{i}+10\hat{j}$$

PRODUCTO ESCALAR

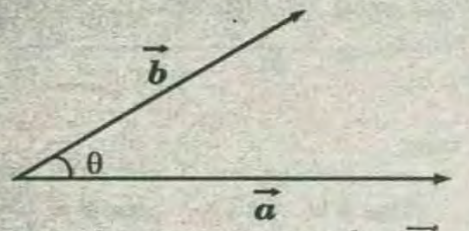
Considera un bloque que se encuentra sobre una rampa, tal como se encuentra en la figura. Si aplicamos una fuerza **F** sobre el bloque, éste se moverá hacia arriba. ¿Cuál es el trabajo que se desarrolla si el bloque se desplaza una distancia **D** por acción de la fuerza constante **F**?

Para responder a esta pregunta debemos estudiar el concepto de producto escalar.



DEFINICIÓN:

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no nulos que forman un ángulo "q". El producto escalar de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se denota por $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ y se define como $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$



El ángulo entre dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es el ángulo q, tal que $0° \le \theta \le 180°$

* El producto escalar de dos vectores es un número real.

* El producto escalar es:

Positivo si $\theta < \frac{\pi}{2}$,

Negativo si $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$

y cero si $\theta = \frac{\pi}{2}$

* Si cualquiera de los dos vectores es el vector nulo, podemos convenir que el producto escalar es cero.

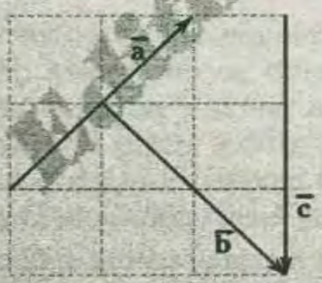
* Si $\vec{a} \wedge \vec{b}$ tienen la misma dirección y sentido $\theta = 0° \wedge \vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$ pues $\cos\theta = \cos 0° = 1$

* Si los vectores son perpendiculares el producto escalar es cero y viceversa.

* $\vec{a}\,.\,\vec{a} = |\vec{a}|^2$

EJEMPLO :

En la figura, todos los cuadrados pequeños tienen lados de *1cm* de longitud .



Calcular:

I) $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ *II)* $\vec{a}\,.\,\vec{c}$

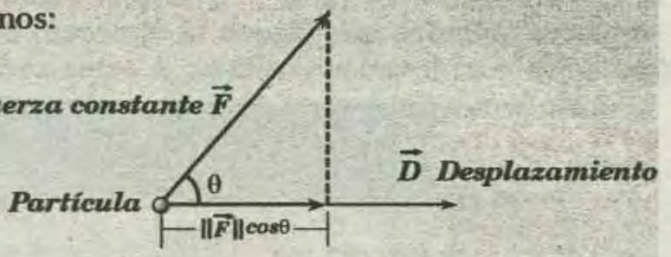
RESOLUCIÓN :

I) $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 90° = (2\sqrt{2})\,(2\sqrt{2})\,(0) = 0$

II) $\vec{a}\,.\,\vec{c} = |\vec{a}|\,|\vec{c}|\cos 135° = (2\sqrt{2})(3)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -6$

APLICACIÓN :

Como ya vimos, el producto escalar permite calcular el trabajo que realiza una fuerza constante $\vec{F}$ cuando la partícula tiene un desplazamiento $\vec{D}$. Veamos:



* Como el trabajo *(W)* se define como el producto de la magnitud de la fuerza que sigue la dirección del movimiento por la distancia, se tiene:

$$W = |\vec{F}|\cos\theta\,|\vec{D}| = |\vec{F}|\,|\vec{D}|\cos\theta$$

* Por tanto: $W = \vec{F}\,.\,\vec{D}$

PRODUCTO ESCALAR EN R^2

Ya hemos definido el producto escalar como $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$, donde q es el ángulo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$.

* Así, tenemos que:

$\hat{i}\,.\,\hat{j} = 1\,;\ \hat{i}\,.\,\hat{j} = 1$

$\hat{i}\,.\,\hat{j} = 1\,;\ \hat{j}\,.\,\hat{i} = 0$

* Si para $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j}$ y para $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j}$ entonces el producto escalar de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ será:

$\vec{a}\,.\,\vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j})\,.\,(b_1\hat{i} + b_2\hat{j})$

$\Rightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b} = (a_1b_1\hat{i}\,.\,\hat{i} + a_1b_2\hat{i}\hat{j}) + (a_2b_1\hat{j}\,.\,\hat{i} + a_2b_2\hat{j}\,.\,\hat{j})$

$\Rightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b} = a_1b_1(1) + a_1b_2\hat{i}(0) + a_2b_1(0) + a_2b_2(1)$

$\Rightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

Dados los vectores $\vec{a} = (a_1;a_2) \wedge \vec{b} = (b_1;b_2)$; el producto escalar o interno de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se denota por $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ y se define por:

$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_1;a_2)\,.\,(b_1;b_2)$

$$\rightarrow \boxed{\vec{a}\,.\,\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$$

Al producto escalar también se le suele llamar producto punto, producto interior, o producto interno.

EJEMPLO :

Si $\vec{a}=(-2;5)$ y $\vec{b}=(4;7)$,

* Entonces: $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-2)(4)+(5)(7)=27$

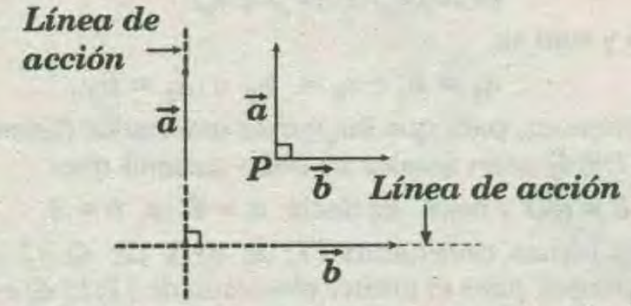
PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores y a un escalar, luego:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ ..... *(conmutatividad)*
2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{b})+(\vec{a}\cdot\vec{c})$ .....*(distributividad)*
3) $(a\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(a\vec{a})=a(\vec{a}\cdot\vec{b})$..... *(homogeneidad)*

VECTORES ORTOGONALES

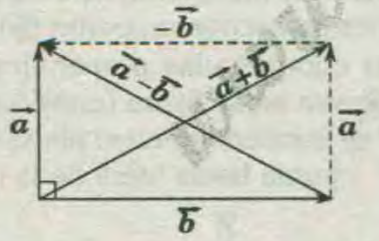
En el espacio vectorial dos vectores son ortogonales si sus respectivas líneas de acción son perpendiculares.



* En la figura, se muestran dos vectores $\vec{a}\wedge\vec{b}$ cuyas líneas de acción son perpendiculares. Mediante una traslación, los vectores $\vec{a}\wedge\vec{b}$.

* Son ortogonales en *P* y se denota por $\vec{a}\perp\vec{b}$.

* Así:



* Siendo:

$\vec{a}=(a_1;a_2)\ \wedge\ \vec{b}=(b_1;b_2)$

* Luego:

Suma:

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2)$

$\rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}$

* ***Resta :***

$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;a_2-b_2)$

$\rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$

* En el rectángulo sus diagonales tienen igual longitud, entonces.

$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=0$

* Luego:

$\rightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$ .....*(I)*

* Por definición del producto escalar:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$.....*(II)*

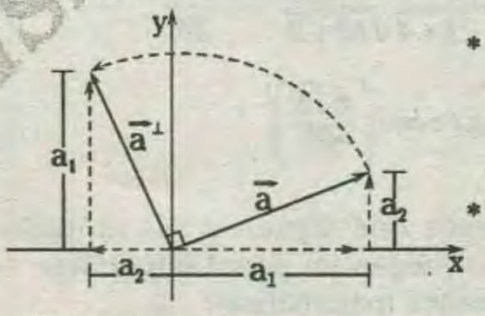
* Luego de *(I)* y *(II)*: $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$

NOTA :

Si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales, entonces el producto escalar es cero, así: $\vec{a}\perp\vec{b}=0$

ORTOGONAL DE UN VECTOR

Para cada vector $\vec{a}=(a_1;a_2)$ se define su correspondiente vector ortogonal denotado por $\vec{a}^{\perp}$ cuyas componentes son$(-a_2;a_1)$, es decir: $\vec{a}^{\perp}=(a_2;a_1)$.Gráficamente el vector $\vec{a}^{\perp}$se obtiene haciendo girar el vector $\vec{a}$ sobre su punto inicial un ángulo cuya medida es 90° en sentido antihorario.



* ***En figura:***

$\vec{a}=(a_1;a_2)$

$\vec{a}^{\perp}=(-a_2;a_1)$

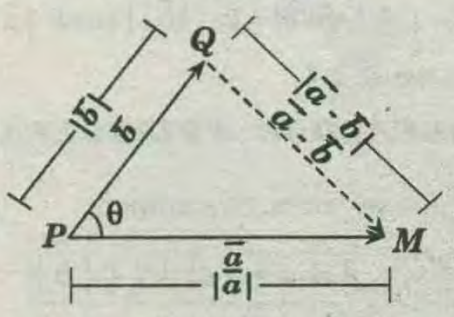
* ***Luego:***

$\vec{a}\cdot\vec{b}^{\perp}=0$

ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

Sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que tienen el mismo origen y forman un ángulo de medida θ, luego el $\cos\theta$ se define por:

$$\boxed{\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}}$$



* En el ΔPQM : Aplicando la ley de cosenos :

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

* Despejando $\cos\theta$:

WWW.GRATIS.COM

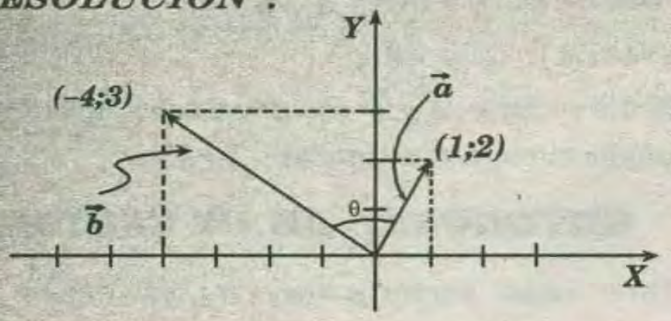
$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

EJEMPLO :

Calcular el ángulo que forma :

$$\vec{a} = (1;2) \ \wedge \ \vec{b} = (-4\ ;\ 3)$$

RESOLUCIÓN :



* Se tiene :

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

* Como :

$$\vec{a} = (1;2) \ \ y \ \ \vec{b} = (-4\ ;\ 3)$$

* Entonces :

$$\cos\theta = \frac{(1)(-4)+(2)(3)}{\sqrt{1+4}\sqrt{16+9}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}$$

* Por tanto :

$$\theta = arc\cos\left(\frac{2\sqrt{5}}{25}\right)$$

NOTA:

Las desigualdades que siguen y sus múltiples generalizaciones juegan un papel importante en muchas deducciones matemáticas.

I) DESIGUALDADES DE CAUCHY SCHWARZ :

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores. Se tiene:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| \ \leq \ |\vec{a}||\vec{b}|$$

* Prueba :

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ||\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta| = |\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta\ | \leq |\vec{a}|\ |\vec{b}|$$

* Pues : $0 \leq |\cos\theta| \leq 1$

II) DESIGUALDAD TRIANGULAR :

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores. Se cumple :

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

* Esta desigualdad corresponde al teorema geométrico: la longitud de un lado de un triángulo siempre es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

VECTORES EN EL ESPACIO

EL SISTEMA COORDENADO TRIDIMENSIONAL

Para estudiar los vectores en el espacio se usan ternas ordenadas y un sistema de coordenadas en tres dimensiones.

DEFINICIÓN :

Un terna ordenada *(a; b; c)* es un conjunto{*a; b; c*} de tres números de los cuales *"a"* se considera el primero, *"b"* el segundo y *"c"* el tercero.

* En la terna *(3;2;5)*, por ejemplo; *3* es el primero, *2* es el segundo y *5* es el tercero .

DEFINICIÓN :

Dos ternas ordenadas $(a_1;a_2;a_3)$ y $(b_1;b_2;b_3)$ son iguales, lo que se escribe como:

$$(a_1;a_2;a_3) = (b_1;b_2;b_3)$$

* Si y sólo si:

$$a_1 = b_1 \ ; \ a_2 = \ b_2 \ \ y \ \ a_3 = b_3$$

* Entonces, para que las ternas ordenadas *(5;b;4)* y *(a–1;3;4)* sean iguales se debe cumplir que:

5 = a–1 y *b=3.* Es decir, *a = 6* y *b = 3.*

*Las ternas ordenadas *(1; 2; 4)* y *(2; 4; 1)* son diferentes, pues el primer elemento de *(1; 2; 4)* es *1*, mientras que el de *(2; 4; 1)* es *2*.

* La colección de todas las ternas ordenadas se denota por $R \times R \times R$, o también por R^3 (se lee *R* tres).

* Para establecer un sistema de coordenadas en tres dimensiones se escoge un punto fijo *0* (el origen) y tres rectas coordenadas perpendiculares entre sí, como se ilustra en la figura (considera que los ejes *"Y"* y *"Z"* se encuentran en el plano del papel y que el eje *"X"* apunta hacia fuera de la hoja).

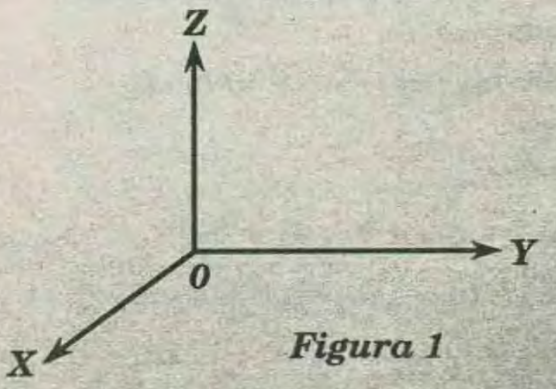
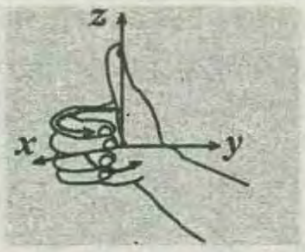


Figura 1

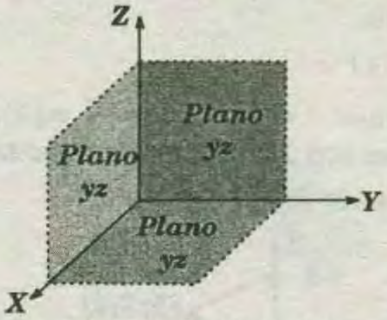
NOTA:

Usualmente la denominación de los ejes se hace de acuerdo con la regla de la mano derecha, como se muestra en la figura.



Si los dedos de la mano derecha se pliegan en la dirección que va del semieje **"X"** positivo al semieje **"Y"** positivo, entonces la dirección del pulgar apunta en la dirección del semieje **"Z"** positivo.

* Las tres coordenadas determinan tres planos coordenados que se indican en la figura: el plano ***XY***, el plano ***YZ*** y el plano ***XZ***.



Sea ***P*** un punto del espacio. Denotemos por P_{XY} a la proyección de ***P*** sobre el plano ***XY*** como P_{XY} se encuentra en el plano ***XY***, podemos considerar sus coordenadas tal como lo hicimos en el plano. sean ***a*** y ***b*** dichas ordenadas. Ahora denotemos por **"c"** la distancia dirigida del plano ***XY*** al punto ***P***. está debajo del plano ***XY*** entonces **"c"** es negativo. Es claro que si ***P*** está en el plano ***XY***, entonces **"c"** es cero.

EJEMPLO :

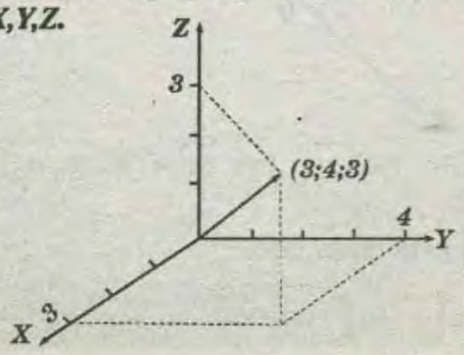
Representar geométricamente el vector definido por las componentes $\overline{v} = (3;4;3)$.

RESOLUCIÓN :

*El vector $\overline{v} = (3;4;3)$ lo representamos gráficamente en el sistema coordenado, así:

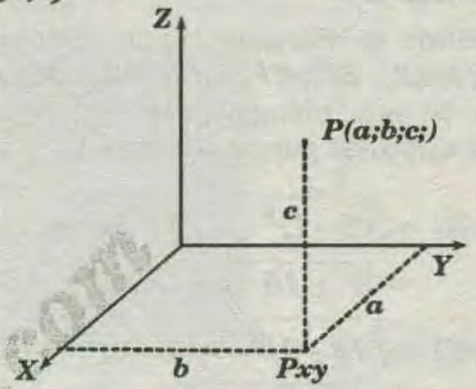
* Punto que representa la pareja ***(3;4)*** en el plano ***XY***.

* ***P***: punto que representa el trío ***(3;4;–3)*** en el sistema ***X,Y,Z.***



Para representar gráficamente un vector de tres componentes, se representa el espacio determinado por tres ejes perpendiculares entre sí, llamado sistema coordenado cartesiano tridimensional y en el se representa el punto terminal ***(a;b;c)*** del vector con punto inicial en el origen del sistema, **"a"** unidades en el eje ***X***, **"b"** unidades en el eje ***Y***, **"c"** unidades en el eje ***Z***.

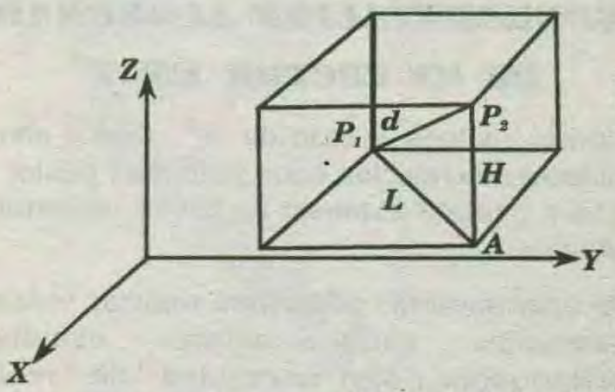
* De esta manera, al punto ***P*** del espacio se le ha asociado una única terna ordenada ***(a;b;c)*** de $\mathbb{R}^3$. en este caso decimos que las coordenadas del punto ***P*** son ***(a;b;c)***.



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Sean P_1 y P_2 dos puntos del espacio. Podemos deducir una expresión para la distancia d $(P_1;P_2)$ entre estos dos puntos.

* Supongamos que la coordenadas de P_1 y P_2 son, respectivamente, $(x_1;y_1;z_1)$ y $(x_2;y_2;z_2)$.



* Como el triángulo P_1 A P_2 es recto en ***A***, por el teorema de Pitágoras tenemos:

$$[d(P_1,P_2)]^2 = L^2 + H^2$$

* Como : $L^2=(x_2-x_1)^2+(y_1-y_2)^2$; $H^2=(z_2-z_1)^2$

* Se tiene que:

$$[d(P_1;P_2)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

DEFINICIÓN :

Si $P_1(x_1;y_1;z_1)$ y $P_2(x_2;y_2;z_2)$ son dos puntos cuales quiera del espacios, entonces la distancia $d(P_1;P_2)$

entre ellos está dada por:

$$d(P_1;P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

EJEMPLO 1 :

La distancia d entre los puntos $P_1(2;3;4)$ y $P_2(5;4;3)$ está dada por:

$$d = \sqrt{(5-2)^2 + (4-3)^2 + (3-4)^2}$$

$$\rightarrow d = \sqrt{(3)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$$

EJEMPLO 2 :

Considerando el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1;0;2)$, $B(2;4;1)$ y $C(3;4,2)$, determinar el perímetro de este triángulo. Para ello, hallemos las distancias entre los puntos tomándolos dos a dos.

$$d(A;B) = \sqrt{(2-1)^2 + (4-0)^2 + (1-2)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$d(A;C) = \sqrt{(3-1)^2 + (4-0)^2 + (2-2)^2}$$
$$= \sqrt{4 + 16 + 0} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$d(B;C) = \sqrt{(3-2)^2 + (4-4)^2 + (2-1)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$$

* Sumando las tres distancias, obtendremos que el perímetro del triángulo es $4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ unidades.

REPRESENTACION ALGEBRAICA DE UN VECTOR EN R^3

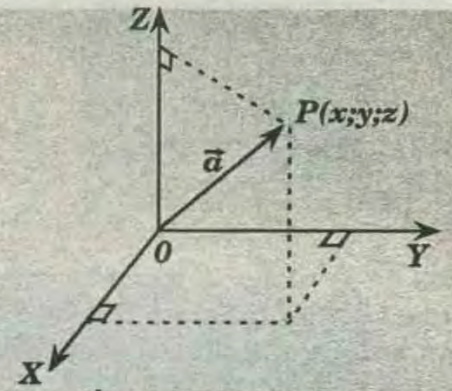
En forma análoga al caso de R^2, vamos ahora a establecer una relación entre vectores y puntos que nos va a permitir expresar un vector en forma de algebraica.

* De esta manera, podremos realizar todas las operaciones entre vectores estudiadas anteriormente, sin necesidad de realizar construcciones geométricas.

* Sea $\vec{a}$ un vector cuyo punto inicial lo colocaremos en el origen de coordenadas. Si $P(x;y;z)$ es el punto final de $\vec{a}$, entonces al vector $\vec{a}$ lo asociamos con el punto P. de esta manera obtendremos una relación biunívoca entre los vectores y los puntos del espacio.

En este caso, el vector $\vec{a}$ se expresa como $\vec{a} = (x;y;z)$.

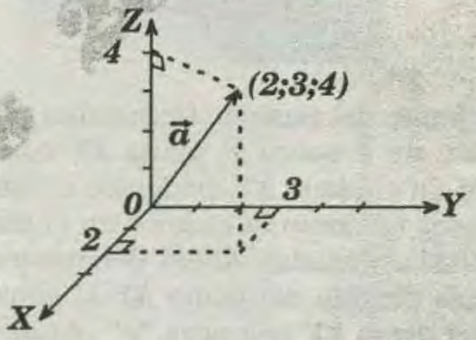
* Los números x, y $\vee$ z se llaman componentes de $\vec{a}$.



* Observa que ahora un punto y un vector tienen la misma representación. Así, podemos hablar del punto $P(x;y;z)$ y del vector $\vec{a} = (x;y;z)$. por eso, debemos tener mucho cuidado para no confundirnos.

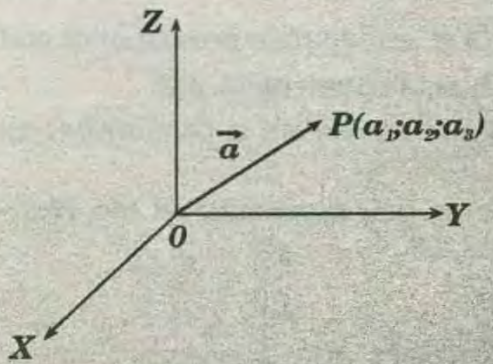
EJEMPLO :

Consideremos el vector $\vec{a} = (2;3;4)$. Sus componentes son $2;3$ y 4. Su representación gráfica se muestra en la figura siguiente:



* El modulo de un vector se puede determinar cuando lo expresamos en términos de sus componentes.

* Sea $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ un vector. Si observamos la figura siguiente nos daremos cuenta de que el módulo de a es igual a la distancia entre los puntos $(0;0;0)$ y $(a_1;a_2;a_3)$.



El modulo del vector $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ que se representa por: $\|\vec{a}\|$ está dado por:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

EJEMPLO 1 :

El módulo $\|\vec{a}\|$ del vector $a = (2;4;3)$ es:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = 2\sqrt{9}$$

* Si $\vec{a}$ es un vector no nulo , sabemos que un vector unitario en la dirección de $\vec{a}$ es:

$$\vec{\mu}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

* También podemos hacer esto cuando el vector está dado en términos de sus componentes.

EJEMPLO 2 :

Ya sabes que el módulo del vector $\vec{a} = (2;4;3)$ es $\sqrt{29}$. Luego, el vector unitario en la dirección de $\vec{a}$ es:

$$\vec{\mu}_{\vec{a}} = \frac{(2;4;3)}{\sqrt{29}} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}; \frac{4}{\sqrt{29}}; \frac{3}{\sqrt{29}}\right)$$

Puedes comprobar que, en efecto, el módulo de $\vec{\mu}_{\vec{a}}$ es uno.

EJEMPLO 3 :

Consideremos el vector $\vec{a} = (2;4;3)$ Sabemos que $\|\vec{a}\| = \sqrt{29}$ y que el vector unitario $\vec{\mu}_{\vec{a}}$ en la dirección de $\vec{a}$ es:

$\vec{\mu}_{\vec{a}} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}; \frac{4}{\sqrt{29}}; \frac{3}{\sqrt{29}}\right)$ *luégo, es claro que:*

$$\vec{a} = (2;4;3) = \sqrt{29}\left(\frac{2}{\sqrt{29}}; \frac{4}{\sqrt{29}}; \frac{3}{\sqrt{29}}\right) = \sqrt{29}\,\vec{\mu}_{\vec{a}} = \|\vec{a}\|\vec{\mu}_{\vec{a}}$$

Así, todo vector no nulo se puede expresar en términos de su vector unitario. En efecto, sea $\vec{a}$ un vector no nulo. Como el vector unitario en la dirección de $\vec{a}$ está

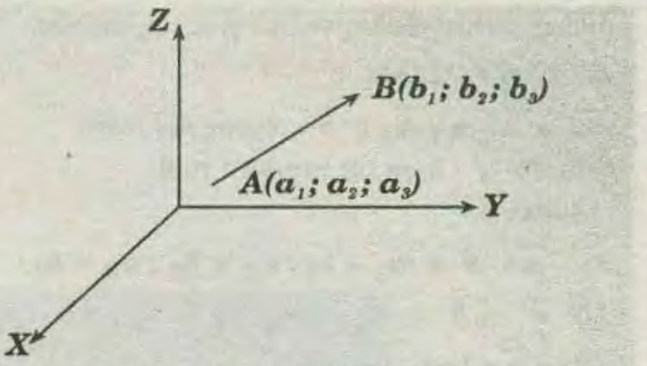
dado por $\vec{\mu}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, entonces de $\vec{a} = \|\vec{a}\|\vec{\mu}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$.

Luego, podemos afirmar que:

* Si $\vec{a}$ es un vector no-nulo y $\vec{\mu}_{\vec{a}}$ es el vector unitario en la dirección de $\vec{a}$, entonces.

$$\vec{a} = \|\vec{a}\|\vec{\mu}_{\vec{a}}$$

* Consideremos dos puntos $A(a_1;a_2;a_3)$ y $B(b_1;b_2;b_3)$ del espacio (ver figura). Si una partícula se mueve de A a B,¿qué vector describe dicho desplazamiento?.



* Observa que, en este caso, el punto inicial es A y el punto final es B.

EJEMPLO 4 :

Si $A(3;5;2)$ y $B(2;3;6)$, entonces el vector $\overline{AB}$ está dado por:

$$\overline{AB} = (2-3;3-5;6-2) = (-1;-2;4).$$

* Y su módulo es:

$$\|\overline{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{21}$$

DEFINICIÓN :

Si $A(a_1;a_2;a_3)$ y $B(b_1;b_2;b_3)$ son dos puntos del espacio, entonces el vector que describe el desplazamiento de A a B se denota por $\overline{AB}$ y está dado por

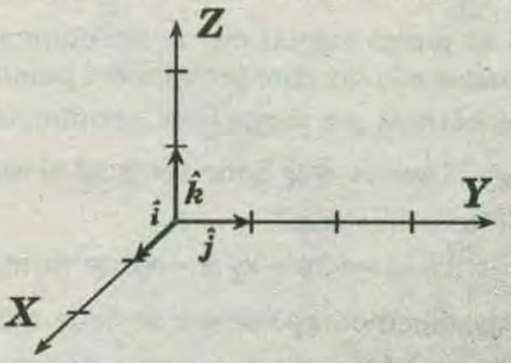
$$\overline{AB} = B - A = (b_1 - a_1\,;\, b_2 - a_2\,;\, b_3 - a_3)$$

* Y su módulo es

$$\|\overline{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

LOS VECTORES UNITARIOS $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$

Sean $\hat{i} = (1;0;0)$, $\hat{j} = (0;1;0)$ $\wedge$ $\hat{k} = (0;0;1)$, cuya representación gráfica se muestra en la figura:



* Los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$ $\wedge$ $\hat{k}$ son unitarios y están dirigidos en la dirección de los semiejes positivos x,y $\wedge$ z respectivamente.

OPERACIONES CON VECTORES

En forma análoga a las operaciones en $\mathbb{R}^2$ se tienen las operaciones de adición, sustracción y la

multiplicación de un vector por un escalar.

DEFINICIÓN :

Si $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ son dos vectores y a es un número real,

Entonces :

I) $\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1 ; a_2+b_2 ; a_3+b_3)$

II) $\vec{a}-\vec{b} = (a_1-b_1 ; a_2-b_2 ; a_3-b_3)$

III) $a\vec{a} = (aa_1;aa_2;aa_3)$

EJEMPLO 5 :

* Si: $\vec{a} =(3 ; 4 ; 6)$ y $\vec{b} = (1; -3 ; 2)$

* Entonces:

$\vec{a}+\vec{b}=(3+1 ; 4-3 ; 6+2) = (4 ; 1 ; 8)$

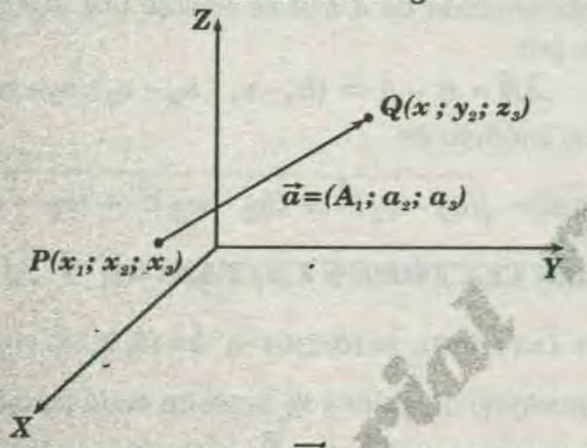
$* \ 4\vec{a} = 4(3 ; 4 ; 6) = (12 ; 16 ; 24)$

$* \ \vec{a}-\vec{b} = (3-1 ; 4-(-3) ; 6-2) = (2 ; 7 ; 4)$

$* \ 3\vec{a}+2\vec{b} = 3(3 ; 4 ; 6) + 2(1 ; -3 ; 2)$

$\rightarrow 3\vec{a}+2\vec{b} = (9;12;18) + (2;-6;4) = (11;6;22)$

* Sean $P(x_1;x_2;x_3)$ un punto y $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ un vector tal como se muestra en la figura.



* Si el punto inicial de $\vec{a}$ lo colocamos sobre P, ¿cuáles son las coordenadas del punto final Q?.

* Denotemos por $(x;y;z)$ las coordenadas de Q.

Luego el vector $\overrightarrow{PQ}$ debe ser igual al vector $\vec{a}$.

* Así, tenemos que:

$$(x-x_1;y-x_2;z-x_3) = (a_1;a_2;a_3)$$

* Igualando componentes se tiene que:

$$x = x_1 + a_1, \quad y = x_2 + a_2, \quad z = x_3 + a_3$$

$$\rightarrow (x,y,z) = (x_1+a_1;x_2+a_2;x_3+a_3)$$

* Así: $\Rightarrow Q = (x_1;x_2;x_3) + (a_1;a_2;a_3) = P + \vec{a}$

Aunque $(x_1;x_2;x_3)$ denota un punto y $(a_1;a_2;a_3)$ denota un vector, utilizaremos esta fórmula para hallar el punto final de un vector. En forma similar se procede para hallar el punto inicial de un vector cuando se conoce su punto final.

DEFINICIÓN :

Si $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ es un vector:

* Si $P(x_1;y_1;z_1)$ es el punto inicial de a , entonces su punto final Q está dado por:

$$Q = P + a$$

$$\rightarrow Q=(x_1+a_1 + a_2 ; z_1 + a_3)$$

* Si $Q\ (x_2;y_2;z_2)$ es el punto final de a , entonces su punto inicial P está dado por:

$$P = Q - \vec{a}$$

$$\rightarrow P=(x_2-a_1;y_2-a_2;z_2-a_3)$$

EJEMPLO :

Si $\overrightarrow{PQ} = (4;2;5)$ y $P = (1;2;3)$, entonces:

$$Q = P + \overrightarrow{PQ} = (4;2;5) + (1;2;3)$$

$$\rightarrow Q =(5;4;8)$$

EJEMPLO :

Si $\overrightarrow{RS} = (5;-3;2) \ \wedge \ S = (1;1;3)$, entonces:

$$\overrightarrow{RS} = S - R \rightarrow R = S - \overrightarrow{RS} = (1;1;6)-(5;-3;2)$$

$$\rightarrow \overrightarrow{RS} =(-4;4;4)$$

DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR EN TÉRMINOS DE LOS VECTORES $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$

Sea $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ un vector. Es claro que podemos escribir:

$$\vec{a} =(a_1;a_2;a_3)=(a_1;0;0)+(0;a_2;0)+(0;0;a_3)$$

$$\rightarrow \vec{a} = a_1(1;0;0) + a_2(0;1;0) + a_3(0;0;1)$$

$$\rightarrow \vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$$

* Es decir:

Todo vector $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ se puede escribir en forma :

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3) = \vec{a} =a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$$

* Así, podemos decir que todo vector se puede expresar como la suma de vectores paralelos a los vectores $\hat{i}$, $\hat{j} \wedge \hat{k}$.

EJEMPLO :

El vector $\vec{a}=(2;4;5)$ se puede expresar como $\vec{a} =2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$

EJEMPLO :

La expresión $-7\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}$ representa el vector $(-7;5;1)$.

NOTA :

Observa que ahora un vector se puede expresar de dos maneras. Así, podemos hablar del vector.

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$$

o del vector $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$

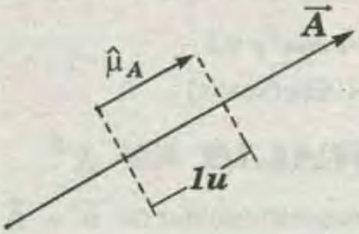
VECTOR UNITARIO

Es aquel vector que define la dirección de cualquier vector a lo largo de cualquier línea de acción. Se caracteriza porque su módulo es igual a la unidad.

Matemáticamente el vector unitario se define con la siguiente expresión :

$$\vec{u}=\frac{Vector}{módulo\ vector}$$

Por ejemplo, si el vector unitario está asociado , con el vector $\vec{A}$, se lo define con la siguiente expresión:



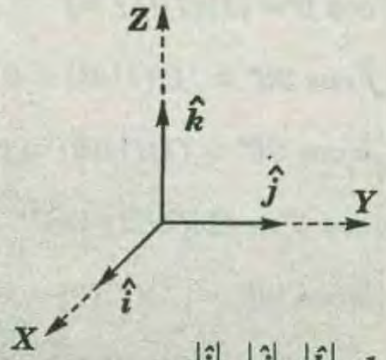
$$\hat{\mu}_A=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{\vec{A}}{A}$$

El vector $\vec{A}$ expresado en función de su vector unitario $\hat{\mu}_A$ es :

$$\vec{A}=A\hat{\mu}_A \qquad \vec{A}=\vec{\mu}A \qquad |\vec{\mu}|=1$$

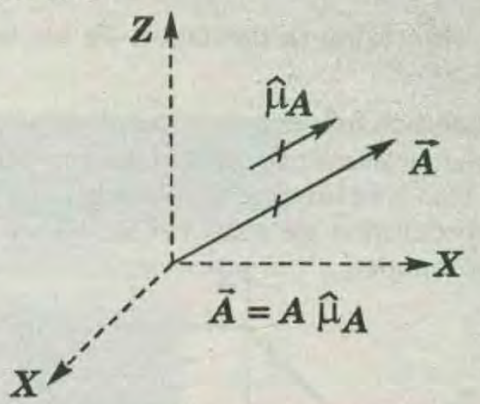
"Todo vector se expresa como el producto de su modulo por su vector unitario"

Usaremos $\hat{i},\hat{j}$ y $\hat{k}$ para representar vectores unitarios que apuntan en las direcciones X ,Y y Z positivas respectivamente . Los vectores unitarios $\hat{i},\hat{j}$ y $\hat{k}$ forman un conjunto de vectores, mutuamente perpendiculares , en un sistema de coordenadas de mano derecha como muestra en la figura. La magnitud de cada vector unitario es igual a la unidad , es decir $|\hat{i}|=|\hat{j}|=|\hat{k}|=1$.



$$|\hat{i}|=|\hat{j}|=|\hat{k}|=1$$

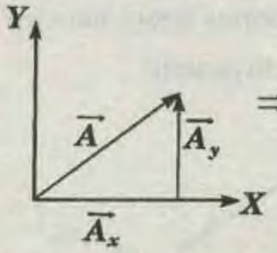
Es importante recordar que todo vector unitario tiene como módulo la unidad , de allí su nombre . Al vector unitario también se le denomina vector direccional, porque su dirección nos da la dirección del vector al cual corresponde .



COMPONENTES DE UN VECTOR

Cualquier vector $\vec{A}$ puede siempre considerarse como la suma de dos (o más) vectores, siendo el número de posibilidades infinito. A cualquier conjunto de vectores que, al sumarse den $\vec{A}$, se les llama componentes de $\vec{A}$

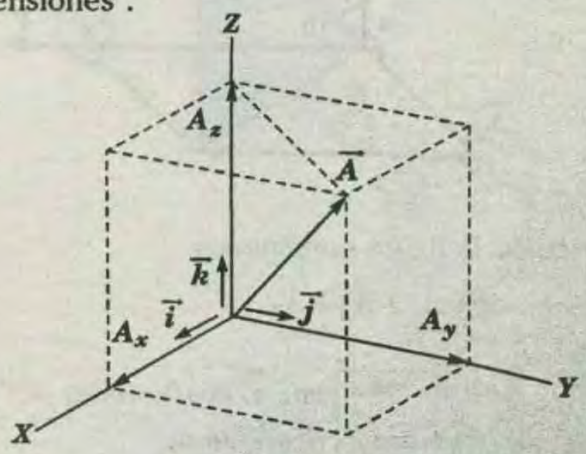
* Componentes rectangulares de un vector en un plano .



$$\Rightarrow \vec{A}=\vec{A}_x=\vec{A}_y$$
$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}$$

Su módulo es : $|\vec{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2}$

* Componentes rectangulares de un vector en tres dimensiones .



$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$$

$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$$

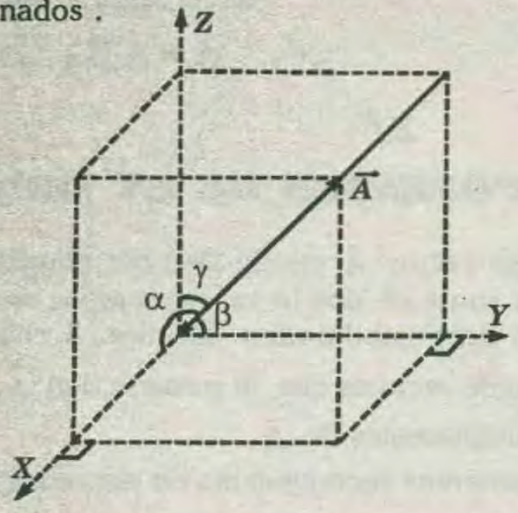
Donde :

* $\hat{i}$: determina la dirección de los vectores en el eje "X"

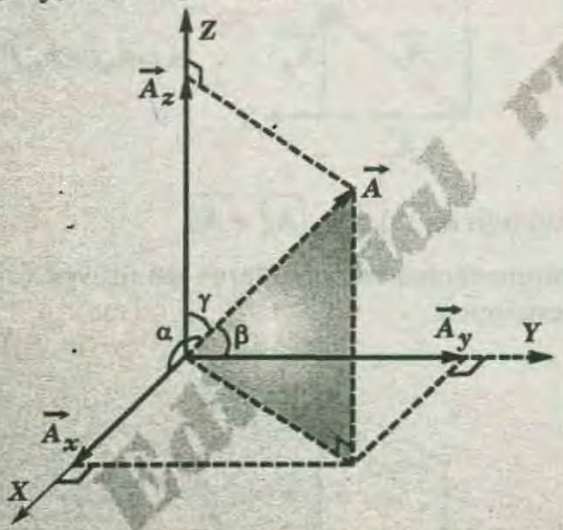
* $\hat{j}$: determina la dirección de los vectores en eje "Y".

* $\hat{k}$: determina la dirección de los vectores en el eje "Z".

Si tenemos un vector en tres dimensiones tal como el que se muestra , podemos expresarlo en función de tres vectores componentes , que son las proyecciones de este vector sobre los tres ejes coordenados .



Dado el $\vec{A}$ sus proyecciones sobre los ejes X, Y, Z son $\vec{A}_x; \vec{A}_y; \vec{A}_z$, respectivamente .



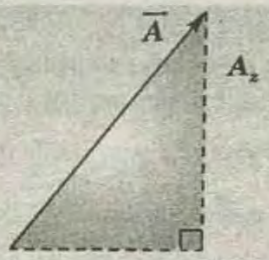
Observando la figura concluimos

$$\vec{A}=\vec{A}_x+\vec{A}_y+\vec{A}_z$$

donde :

$$\left.\begin{aligned}\vec{A}_x&=|\vec{A}|\cos\alpha\\ \vec{A}_y&=|\vec{A}|\cos\beta\\ \vec{A}_z&=|\vec{A}|\cos\gamma\end{aligned}\right\}\ \cos\alpha,\ \cos\beta \wedge \cos\gamma \text{ se denominan cosenos directores}$$

Si del gráfico extraemos el triángulo rectángulo sombreado , encontramos :



$$|\vec{A}|^2=\sqrt{\left(A_x^2+A_y^2\right)}^2+A_z^2$$

$$A^2=A_x^2+A_y^2+A_z^2$$

$$\sqrt{A_x^2+A_y^2}$$

Por lo tanto : $A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$

(Módulo del vector $\vec{A}$)

Pero conocemos que :

$$A_x=A\cos\alpha,\ A_y=A\cos\beta,\ A_z=A\cos\gamma$$

$$A=\sqrt{(A\cos\alpha)^2+(A\cos\beta)^2+(A\cos\gamma)^2}$$

$$\rightarrow A=\sqrt{A^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}$$

Simplificando , se obtiene :

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

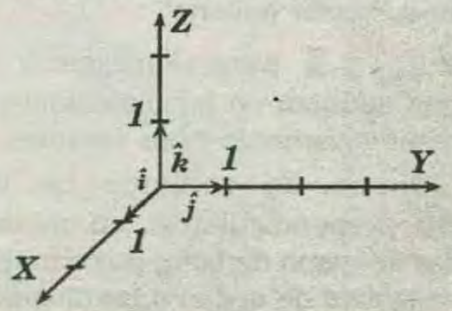
(Propiedad de los cosenos directores)

PRODUCTO ESCALAR EN $\mathbb{R}^3$

Como ya hemos visto, el producto escalar de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ está dado por:

$\vec{a} \wedge \vec{b}=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$, donde θ es el ángulo formado por $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

* Calculando el producto escalar para los vectores unitarios canónicos $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$:



* Tendremos:

$$\hat{i}\,.\,\hat{i}=|\hat{i}|\ |\hat{i}|\cos 0^\circ=(1)(1)(1)=1$$

$$\hat{i}\,.\,\hat{j}=|\hat{i}|\ |\hat{j}|\cos 90^\circ=(1)(1)(0)=0$$

$$\hat{i}\,.\,\hat{k}=|\hat{i}|\ |\hat{k}|\cos 90^\circ=(1)(1)(0)=0$$

$$\hat{j}\,.\,\hat{j}=|\hat{j}|\ |\hat{j}|\cos 0^\circ=(1)(1)(1)=1$$

$$\hat{j}\,.\,\hat{k}=|\hat{j}|\ |\hat{k}|\cos 90^\circ=(1)(1)(0)=0$$

$$\hat{k}\,.\,\hat{k}=|\hat{k}|\ |\hat{k}|\cos 0^\circ=(1)(1)(1)=1$$

* Si ordenamos estos productos en una tabla de doble entrada se tendrá:

	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	1	0	0
$\hat{j}$	0	1	0
$\hat{k}$	0	0	1

que es más fácil de recordar.

Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ están en términos de los vectores unitarios canónicos, es decir:

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \ \wedge \ \vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k},$$

El producto escalar de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ será:

$$\vec{a}.\vec{b}=\left(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}\right).\left(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=a_xb_x\hat{i}\hat{i}+a_xb_y\hat{i}\hat{j}+a_xb_z\hat{i}\hat{k}+a_yb_x\hat{j}\hat{i}+a_yb_y\hat{j}\hat{j}+a_yb_z\hat{j}\hat{k} + a_zb_x\hat{k}\hat{i}+a_zb_y\hat{k}\hat{j}+a_zb_z\hat{k}\hat{k}$$

* Es decir:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_xb_x(1) + a_xb_y(0) + a_xb_z(0) + a_yb_x(0) + a_yb_y(1) + a_yb_z(0) + a_zb_x(0) + a_zb_y(0) + a_zb_z(1)$$

$$\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

* Luego, podemos resumir en lo siguientes:

Si $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \ \wedge \ \vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$;

Entonces el producto escalar de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ está dado por $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

* O equivalentemente:

Sean $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ y $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ dos vectores.

El producto escalar de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ está dado por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

EJEMPLO :

Si $\vec{a}=(6;-3;5)$ y $\vec{b}=(-2;6;2)$,

* Entonces:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (6;-3,5) \cdot (-2;6;2)$$

$$\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (6)(-2) + (-3)(6) + (5)(2) = -12-18+10 = -20$$

Observa que todas las propiedades del producto escalar se pueden verificar con la nueva expresión que tenemos para hallarlo.

EJEMPLO :

Sea $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ un vector cualquiera, como:

$$\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

y $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

* Entonces: $\|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

* También: $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

EJEMPLO :

Sean: $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$

$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$

Dos vectores no nulos y θ el ángulo entre ellos. Como el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ se puede calcular usando sus componentes de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y dado que:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta} \ ; \ 0° \le \theta \le 180°$$

* Entonces el ángulo θ se puede hallar mediante la fórmula :

$$\boxed{Cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}}$$

EJEMPLO:

Si $\vec{a} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

$\vec{b} = -2\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$

* Entonces :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -20; \ = \|\vec{a}\| = \sqrt{70} \ y \ \|\vec{b}\| = \sqrt{44}$$

* Luego, si θ es el ángulo entre los vectores se tiene que:

$$Cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{\sqrt{-20}}{\sqrt{70}\sqrt{44}} = -0,36 \rightarrow \theta = arccos(-0,36)$$

* De lo cual se sigue que $\theta \cong 111,1°$.

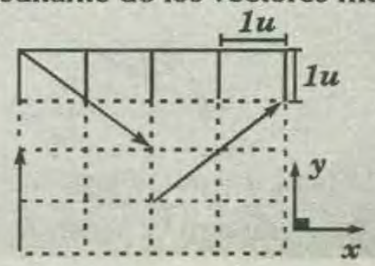
NOTA :

* Si dos vectores son perpendiculares u ortogonales, el producto escalar de ellos es cero.

* Si $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ para un número α (es decir, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos), entonces $\theta = 0°$ si a es positivo, y $\theta = 180°$ si α es negativo.

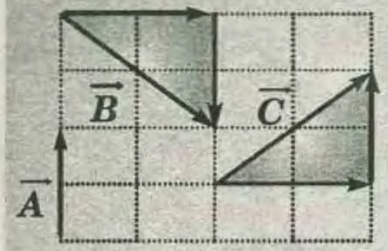
EJEMPLO 4 :

Determinar la resultante de los vectores mostrados .



RESOLUCIÓN :

Para hallar la resultante de los vectores mostrados se les da una representación analítica a cada vector y se le expresa vectorialmente a cada uno .

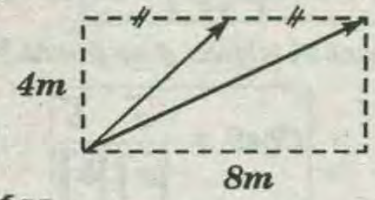


$$\vec{A} = 2\hat{j}$$
$$\vec{B} = 2\hat{i} + 2\hat{j}$$
$$\vec{C} = 2\hat{i} - 2\hat{j}$$
$$\sum: A+B+C = 4\hat{i} + 2\hat{j}$$

Por lo tanto la resultante de los vectores mostrados será : $4\hat{i}+2\hat{j}$

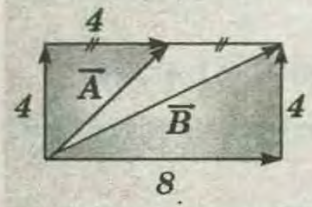
EJEMPLO 5:

Determinar la restante de los vectores mostrados



RESOLUCIÓN :

A cada vector se le da una representación analítica $(\vec{A}$ y $\vec{B})$ y se analiza independientemente a cada uno obteniendose lo siguiente .

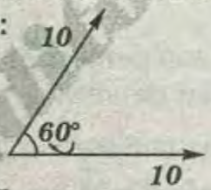


$$\vec{B} = 4\hat{i} + 4\hat{j}$$
$$\vec{C} = 8\hat{i} + 4\hat{j}$$
$$\sum: \vec{A} + \vec{B} = 12\hat{i} + 8\hat{j}$$

La resultante-de dos vectores es : $12\hat{i}+8\hat{j}$

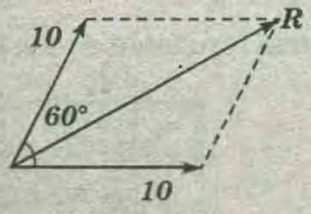
EJEMPLO 6 :

Determinar el módulo del valor resultante de los vectores mostrados :



RESOLUCIÓN :

Se construye el paralelogramo con los vectores mostrados .

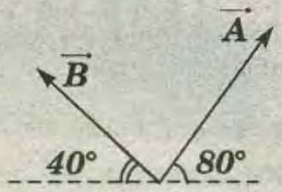


Se utiliza la regla del paralelogramo :

$$R = \sqrt{10^2+10^2+2(10)(10)\cos 60^\circ}$$
$$\Rightarrow R = \sqrt{2(10)^2+2(10)^2\times\frac{1}{2}} = \sqrt{3(10)^2}$$
$$\Rightarrow R = 10\sqrt{3}$$

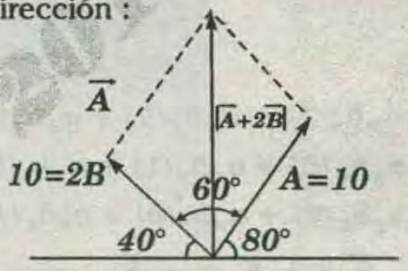
EJEMPLO 7 :

Determinar $|\vec{A}+2\vec{B}|$, si $|\vec{B}|=5$ y $|\vec{A}|=10$



RESOLUCIÓN:

* La idea es que a partir de los dos ángulos se obtenga como resultado un ángulo notable ya sea sumandolos o restandolos . Nótese que se requiere $2\vec{B}$, esto significa que al vector $\vec{B}$ se le duplica y no se altera su dirección :



Al igual que en el ejercicio anterior se nota que $A=10$; $2B=10$ y el ángulo entre los 2 vectores es $60°$, por lo tanto: $|\vec{A}+2\vec{B}|$ que representa al módulo de la resultante será :$R=10$

EJEMPLO 8 :

Hallar la resultante de los siguientes vectores :

$\vec{A}=(a;b;c)$, $\vec{B}=(c;a;b) \wedge \vec{C}=(b;c;a)$

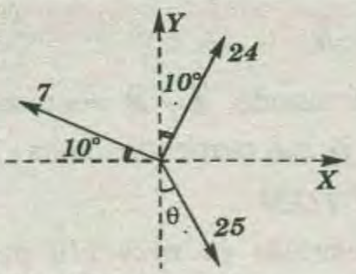
RESOLUCIÓN :

Todo vector se puede representar como una triada (en el espacio) o con vectores unitarios :

$$\vec{A}=(a;b;c)=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$$
$$\vec{A}=(c;a;b)=c\hat{i}+a\hat{j}+b\hat{k}$$
$$\vec{C}=(b;c;a)=b\hat{i}+c\hat{j}+a\hat{k}$$
$$\sum: \vec{A}+\vec{B}+\vec{C} = (a+b+c;\ a+b+c;\ a+b+c)$$
$$\Rightarrow \underbrace{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}_{\text{vector suma o resultante}} = (a+b+c)\hat{i}+(a+b+c)\hat{j}+(a+b+c)\hat{k}$$
$$|\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}| = \sqrt{\underbrace{(a+b+c)^2}_{\text{eje x}}+\underbrace{(a+b+c)^2}_{\text{eje y}}+\underbrace{(a+b+c)^2}_{\text{eje z}}}$$
$$|\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}| = (a+b+c)\sqrt{3}$$

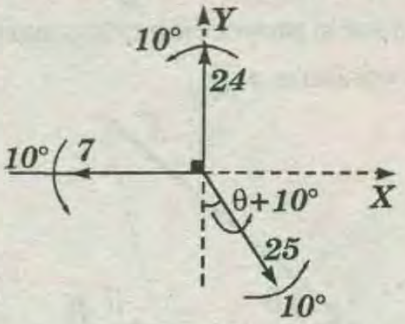
EJEMPLO 9 :

Hallar el valor de θ, si la resultante de los vectores mostrados es nula .

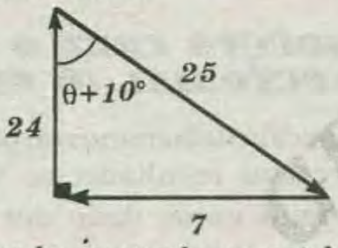


RESOLUCIÓN :

* Si la resultante de más de 2 vectores es nula . los vectores formarán el denominado *"POLÍGONO VECTORIAL CERRADO"*. En este problema conviene hacer , girar *"10°"* a los vectores , en forma antihoraria, obteniéndose lo siguiente :



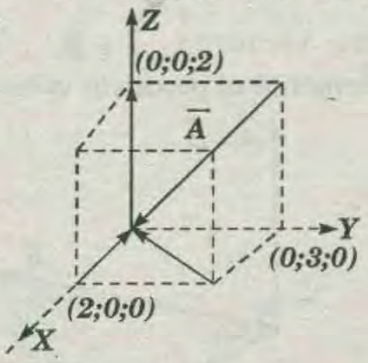
* Como la resultante es nula , los vectores forman un polígono vectorial cerrado .



* El triángulo rectángulo mostrado es notable, por lo tanto : $\theta+10°=16 \Rightarrow \theta=6°$

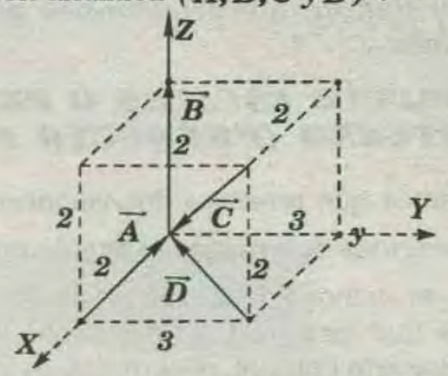
EJEMPLO 10 :

La figura maestra un paralelepípedo, determinar el vector resultante .



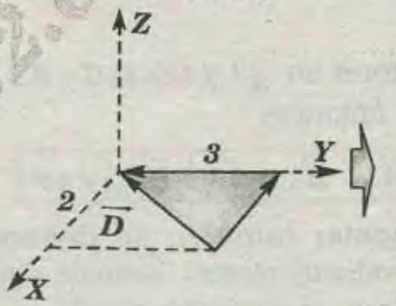
RESOLUCIÓN :

En este caso para hallar al vector resultante , cada vector se le asociará con su vector unitario o vectores unitarios correspondientes , para ello debemos tener en cuenta a los puntos que se dan como dato. Para mayor comodidad a cada vector se le asignará una representación analítica $(\vec{A},\vec{B},\vec{C}\ y\ \vec{D})$.

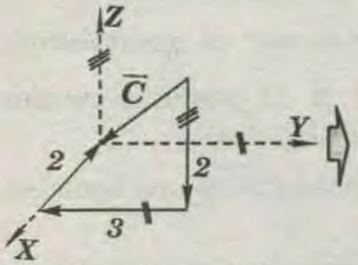


Nótese que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son colineales con los ejes *"X"* y *"Z"* respectivamente , por lo tanto. considerando su módulo y dirección tenemos :

$\vec{A}=-2\hat{i}$: *(–)* porque es opuesto a *"+X"* $\vec{A}=+2\hat{k}$: *(+)* porque tiene la dirección de *"+Z"* Además $\vec{D}$ está en el plano *XY*, por lo tanto se expresará con 2 vectores unitarios $(\hat{i}\ y\ \hat{j})$. Mientras que $\vec{C}$ está en el espacio por lo que estará asociado con los tres vectores unitarios $(\hat{i},\hat{k},\hat{j})$.



$$\overbrace{\vec{D}=-2\hat{i}-3\hat{j}}^{Consecutivos}$$



$$\overbrace{\vec{C}=-2\hat{k}-3\hat{j}-2\hat{j}}^{Consecutivos}$$

$$\vec{C}=-2\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}$$

Finalmente los vectores serán los siguientes :

$$\vec{A}=-2\hat{i}+0\hat{j}+0\hat{k}$$

$$\vec{B}=0\hat{i}+0\hat{j}+2\hat{k}$$

$$\vec{C}=-2\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}$$

$$\vec{D}=-2\hat{i}-3\hat{j}+0\hat{k}$$

$$\sum:\ \underbrace{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}}_{\text{vector suma o resultante}}=-6\hat{i}-6\hat{j}+0\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{R}=-6\hat{i}-6\hat{j}$$

PRODUCTO ESCALAR Y PRODUCTO VECTORIAL

En esta sección, estudiaremos dos productos de vectores : el producto escalar o interno y el producto

cruz o vectorial . Son muy útiles en aplicaciones físicas y tienen interpretaciones geométricas interesantes.

PRODUCTO ESCALAR O PRODUCTO INTERNO (PRODUCTO PUNTO)

Supongamos que tenemos dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en $\mathbb{R}^3$ y queremos determinar el ángulo entre ellos , esto es , el menor ángulo subtenido por $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en el plano que generan. El producto interno nos permite hacerlo.Primero, desarrollamos formalmente el concepto y después probamos que este producto hace lo que aseguramos .

Sea $A= a_1\hat{i} + a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ y $B=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

Definimos el produdo interno de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que se escribe como $\vec{A}\times\vec{B}$ como el número real .

$$\vec{A}\times\vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

CUIDADO Nótese que el ***producto interno*** de dos vectores es una ***cantidad escalar***.

TEOREMA :

Sea $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea $\theta, 0 \le \theta \le \pi$ el ángulo entre ellos . Entonces :

$$\boxed{\vec{A}\ .\ \vec{B}\ =\ |\vec{A}||\vec{B}|Cos\theta}$$

Este producto escalar tambien se denomina producto punto o producto interno . Veamos algunas propiedades que posee el producto escalar .

1) $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$ El producto escalar es conmutativo.

2) $\vec{C}.(\vec{A}+\vec{B})=\vec{C}.\vec{A}+\vec{C}.\vec{B}$ El producto escalar cumple con la propiedad distributiva .

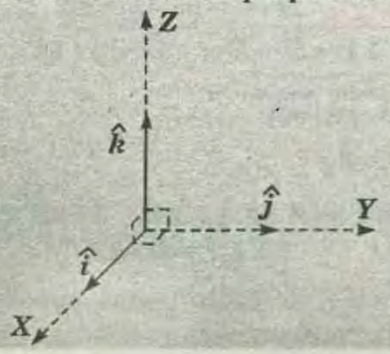
3) $m(\vec{A}.\vec{B})=(m\vec{A}).\vec{B}$ donde m es una cantidad escalar .

Para el caso de los vectores unitarios cartesianos, tenemos $\hat{i}.\hat{i}=\hat{j}.\hat{j}=\hat{k}.\hat{k}=1$

(Vectores unitarios cartesianos colineales)

$$\hat{i}.\hat{j}=\hat{j}.\hat{k}=\hat{i}.\hat{k}=0$$

(Vectores unitarios cartesianos perpendiculares)



4) $A=|\vec{A}|=\sqrt{\vec{A}.\vec{A}}$

5) Si $\vec{A}.\vec{B}=0$ siendo $\vec{A}$ y $\vec{B}$ vectores no nulos entonces $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares

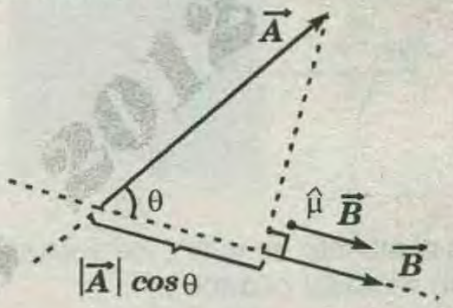
OBSERVACIÓN :

El producto escalar es muy útil para definir magnitudes fisicas escalares muy importantes como el trabajo mecánico y el flujo magnético .

$W=\vec{F}.\vec{d}$ (trabajo) $\Phi=\vec{B}.\vec{A}$ (flujo magnético)

* Si de la expresión *(I)* pasamos al primer miembro el $|\vec{A}|$ tendremos $|\vec{A}|cos\theta=\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{\vec{B}}$

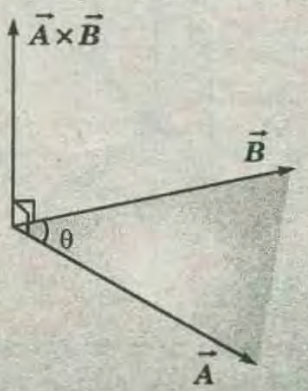
que vendra a ser la proyección ortogonal de $\vec{A}$ sobre la recta que contiene a $\vec{B}$.



PRODUCTO CRUZ O PRODUCTO VECTORIAL (Ó EXTERNO)

En esta sección definiremos un producto de vectores que da como resultado un vector ; esto es , mostraremos como dado dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, podemos producir un tercer vector $\vec{A}\times\vec{B}$, llamado el producto cruz de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Este nuevo vector tendrá la muy agradable, propiedad geométrica de ser perpendicular al plano generado (determinado) por $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se representa geométricamente el producto vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$ como



Su módulo se determina como $|\vec{A}\times\vec{B}|=AB\ sen\theta$

Sean: $\vec{A}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ y $B=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ vectores en

$\mathbb{R}^3$. *El producto cruz denotado por* × *está definido como el vector* :

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\hat{k}$$

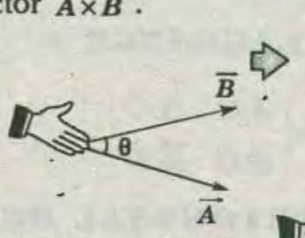
o simbólicamente :

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

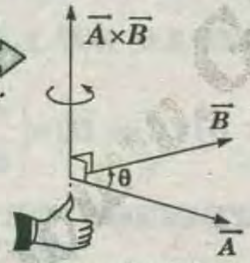
CUIDADO Notar que el producto cruz de dos vectores es otro vector , a veces se le llama producto vectorial .

Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ no son colineales entonces generan un plano y $\vec{A}\times\vec{B}$ es vector perpendicular al plano . La magnitud de $\vec{A}\times\vec{B}$, es igual $\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|Sen\theta$, es simplemente el área del paralelogramo que tiene como lados adyacentes a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Para determinar la dirección del vector $\vec{A}\times\vec{B}$ de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se utiliza una regla práctica llamada regla de la mano derecha ***(RMD)***, que consiste en colocar la mano derecha extendida (ver gráfico) a lo largo del primer vector a multiplicar, en este caso el vector $\vec{A}$. Luego , cerramos la mano girando los dedos hacia el otro vector, en este caso hacia $\vec{B}$. Al extender el dedo pulgar, éste nos indicará la dirección del vector $\vec{A}\times\vec{B}$.



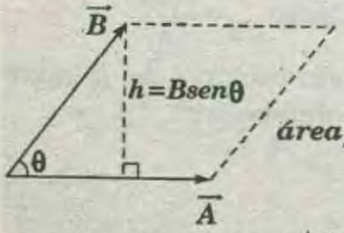
Colocando la mano derecha a lo largo de vector $\vec{A}$



Giramos los dedos hacia $\vec{B}$ *y extenderemos el dedo pulgar*

$\vec{A}\times\vec{B}$ es un vector normal al plano que contiene a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

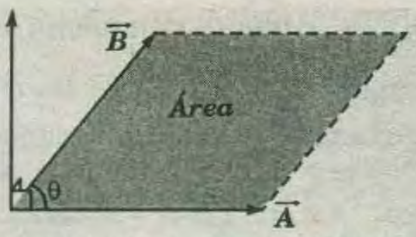
Matemáticamente, el producto vectorial de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tiene un módulo igual al área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



$área_{\square}=base\times altura=ABsen\theta$

Por lo tanto $área_{\square}=|\vec{A}\times\vec{B}|$

En general $\vec{A}\times\vec{B}$



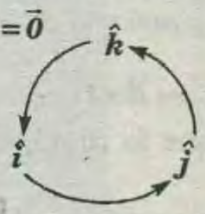
PROPIEDADES DEL PRODUCTO VECTORIAL

1) $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{B}\times\vec{A}$ 2) $\vec{A}\times\vec{A}=0$

3) $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

Productos vectorial de los vectoriales unitarios

* $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=\vec{0}$
* $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$
* $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$
* $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$



Dados $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$ y $\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$ se verifica que :

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

Cuyo desarrollo es :

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}-\hat{j}(A_xB_z-A_zB_x)+\hat{j}(A_xB_y-A_yB_x)$$

Si $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$, y ninguno de las vectores es nulo los vectores tienen la misma dirección (con sentidos iguales u opuestos), es decir son paralelos .

NOTA :

El producto vectorial es muy útil para definir magnitudes vectoriales que.se estudian , en la parte de la física denominada mecánica , tales como el momento de una fuerza y el momentum angular .

$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ *(momento o torque)*

$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ *(momentum angular)*

PRODUCTO MIXTO Y OTROS PRODUCTOS VECTORIALES TRIPLE PRODUCTO ESCALAR O PRODUCTO MIXTO

Dado los vectores :

$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}\,A_z\vec{k}$, $\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}\,B_z\vec{k}$ ∧ $\vec{C}=C_x\vec{i}+C_y\vec{j}+C_z\vec{k}$

El producto triple de dichos vectores es :

$$(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}=\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{C}\times\vec{A}).\vec{B}$$

Al escribir al ecuación anterior se ha utilizado el orden ciclico destrorsum (derecha) . cada uno de los productos es igual al volumen V del los vectores

$\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$, como se muestra en la figura .

Entonces : $(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}=\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{C}\times\vec{A}).\vec{B}=V$

Sin embargo, un conjunto dextrorso se comvierte en sinistrorso y viceversa , cuando se cambia el orden cíclico . $(\vec{A}\times\vec{C}).\vec{B}=(-\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}$

Entonces se tiene :

para un paralelepípedo sinistrorso :

$$(\vec{A}\times\vec{C}).\vec{B}=(\vec{C}\times\vec{B}).\vec{A}=(\vec{B}\times\vec{A}).\vec{C}=-V$$

El triple producto escalar presenta las siguientes propiedades :

I) El Valor del triple producto no se altera por el intercambio del punto y la cruz , ya que se tiene que :

$$(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}=(\vec{B}\times\vec{C}).\vec{A}=(\vec{C}\times\vec{A}).\vec{B}$$

Esto se debe a que la multiplicación escalar es conmutativa .

II) La condición necesaria y suficiente para que tres vectores sean paralelos a un mismo plano (coplanares) es que su producto mixto sea nulo .

III) Si $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son vectores , se verifica que :

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Tambien se puede escribir :

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix} A_x & B_y & C_z \\ A_x & B_y & C_z \\ A_x & B_y & C_z \end{vmatrix}$$

DEFINICIÓN :

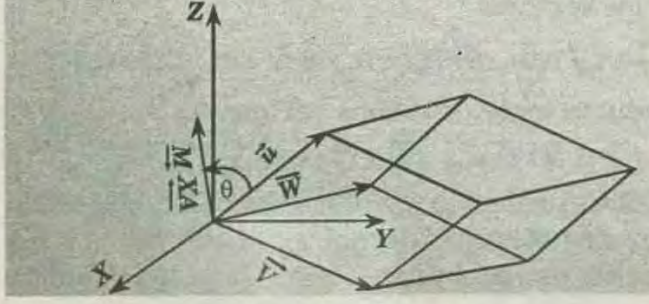
Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ que no están en el mismo plano determina los lados de un paralelepípedo en el espacio. El volumen de este paralelepípedo viene dado por:

V = área de la base por la altura ó $V = A.h$

*Donde $A = |\vec{u}\times\vec{w}|$ y $\cos\theta = \dfrac{h}{|\vec{u}|}$ donde $h = |\vec{u}|\cos\theta$

* Osea el volumen del paralelepípedo es:

$V= |\vec{u}\times\vec{w}|\ |\vec{u}|\cos\theta = |\vec{u}|\ |\vec{v}\times\vec{w}|\cos\theta = |\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|$



El volumen de un paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ viene dado por la magnitud del triple producto escalar de dichos vectores.

EJEMPLO :

Hallar le volumen del paralelepípedo determinado por los vectores.

$\vec{u}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{v}=4\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ y $\vec{w}=\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$

RESOLUCIÓN :

Se sabe que el volumen está dado por:

$$V = |\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|$$

* Donde:

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}=-3\vec{i}-18\vec{j}-3\vec{k}$$

* Ahora:

$|\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|=(3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}).(-3\vec{i}-18\vec{j}-3\vec{k})|$

$|\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|=|-9-36-3|=|-48|=48$

TRIPLE PRODUCTO VECTORIAL E IDENTIDADES VECTORIALES

Dado tres vectores $\vec{A},\vec{B}$ y $\vec{C}$ se define el triple producto vectorial .

1°) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$

2 °) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{B}.\vec{C})$

IDENTIDAD DE LAGRANGE :

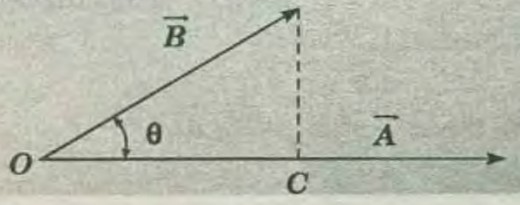
$$(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times\vec{D})=\begin{vmatrix} \vec{A}.\vec{C} & \vec{B}.\vec{C} \\ \vec{B}.\vec{C} & \vec{B}.\vec{D} \end{vmatrix}$$

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR

La proyección vectorial de un vector tal como $\vec{B}$ sobre otro vector $\vec{A}$ cuyo sentido está dado por el vector unitario $\vec{u}=\dfrac{\vec{A}}{A}$ se define como el múltiplo numérico de $\vec{u}$. Este número se llama componente de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$ que lo denotamos por $\text{Comp}_{\vec{B}\vec{A}}$ y tiene el siguiente aspecto :

$$Comp_{\vec{B}\vec{A}}=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|}$$

De manera que la proyección vectorial de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$ es de acuerdo a nuestra definición



$$\vec{Proy}_{\vec{BA}}=\left(Comp_{\vec{BA}}\right)\vec{u}=\left[\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|}\right]\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{(\vec{A}.\vec{B})\vec{A}}{|\vec{A}|^2}$$

En la figura se tiene que $\vec{Proy}_{\vec{BA}}=\overrightarrow{OC}$

Además se podrá observar que :

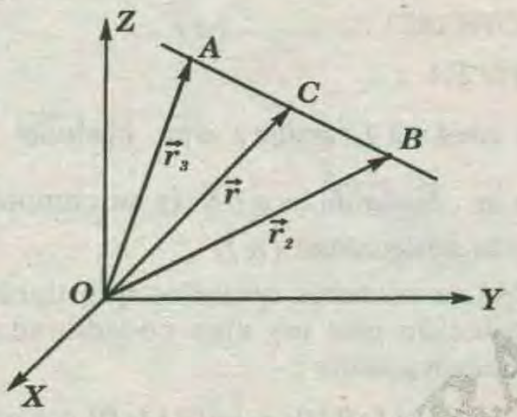
$$\left|\vec{Proy}_{\vec{BA}}\right|=Comp_{\vec{BA}}=Proy_{\vec{BA}}$$

PUNTO DE DIVISIÓN :

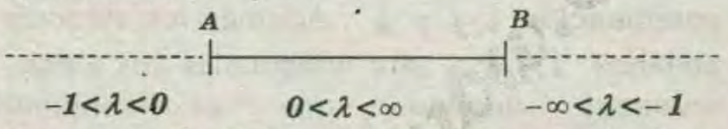
Si A, B, C, son puntos de una recta, se dice que el punto C divide al segmento AB en la razón λ si :

$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$$

Evidentemente $\lambda>0$ cuando C está dentro del segmento AB ; $\lambda<0$ cuando C está fuera del segmento AB



A la izquierda de A, varía entre 0 y -1 a la derecha de B, varía entre $-\infty$ y -1.



De acuerdo con la figura el vector de posición C es :

$$\vec{r}=\frac{\vec{r_1}+\lambda\vec{r}_2}{1+\lambda}$$

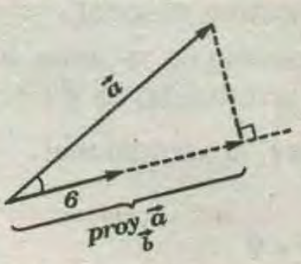
Entonces : $\lambda=0,\lambda=\pm\infty$ y $\lambda=-1$ cuando C está en A, en B o en el punto infinito de esta recta respectivamente .

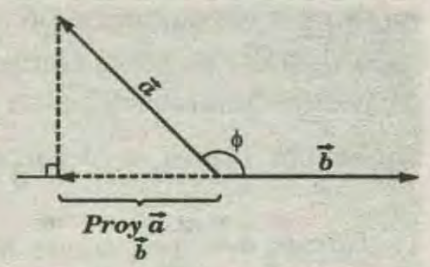
PROYECCIÓN ORTOGONAL COMPONENTES

Se llama proyección ortogonal de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$. al vector :

$\vec{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ $(\acute{o}\ Pr_{\vec{b}}\vec{a})$ definido de la siguiente manera:

$$\vec{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}=\left(\frac{\vec{a}\ .\ \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}\text{, donde }\vec{b}\neq\vec{0}$$





De la definición y teniendo presente que $\vec{a}\ .\ \vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$, obtenemos las siguientes consecuencias :

1°) El vector $\vec{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ y el vector $\vec{b}$ son paralelos .

2°) El vector $\vec{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ y el vector $\vec{b}$ tienen el mismo sentido si el ángulo ϕ (formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$) es agudo.

3°) El vector $\vec{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ y el vector $\vec{b}$ tienen sentidos opuestos si ángulo ϕ es obtuso .

4°) El vector $\vec{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ y el vector $\vec{b}$ son ortogonales si $\phi=\pi/2$ en cuyo caso $\vec{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}=\vec{0}\ ,(\vec{a}\perp\vec{b})$.

5°) $\vec{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}=\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$

PROPIEDADES DEL VECTOR PROYECCIÓN ORTOGONAL

1) $\vec{Proy}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=\vec{Proy}_{\vec{c}}\vec{a}+\vec{Proy}_{\vec{c}}\vec{b}\ ,(\vec{c}\neq\vec{0})$ *2)*

2) $\vec{Proy}_{\vec{b}}(t\vec{a})=t\vec{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}\ ,(\vec{b}\neq\vec{0})$

3) $\vec{Proy}_{r\vec{b}}\vec{a}=\vec{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$

Cuando se proyecta un vector "sobre otro", lo que en realidad se hace , es proyectar el vector sobre la dirección del otro . .

Demostramos únicamente la tercera propiedad , las demás quedan como ejercicio para el lector .

Por definición :

$$\vec{Proy}_{r\vec{b}}\vec{a}=\left[\frac{\vec{a}\ .\ (r\vec{b})}{|r\vec{b}|^2}\right](r\vec{b})=\frac{r^2}{|r|^2}\left[\frac{\vec{a}\ .\ \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right]\vec{b}=$$

$$=\frac{r^2}{r^2}\left[\frac{\vec{a}\ .\ \vec{b})}{|\vec{b}|^2}\right]\vec{b}=\left[\frac{\vec{a}\ .\ \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right]\vec{b}=\vec{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$$

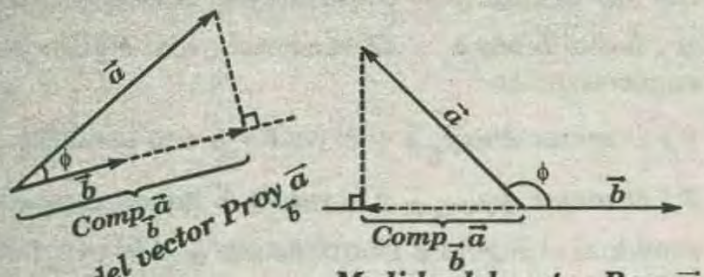
Componentes

De la 5ª consecuencia tenemos que $\vec{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}=\left[\frac{\vec{a}\ .\ \vec{b})}{|\vec{b}|}\right]\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ y como $\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|}$ es un vector unitario , entonces el coeficiente (número real) $\frac{\vec{a}\ .\ \vec{b}}{|\vec{b}|}$ nos proporciona la "medida" del vector $\vec{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$,

motivo por el cual recibe un nombre especial .

DEFINICIÓN . Se llama componente de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ (más directamente , de $\vec{a}$ en la dirección de $\vec{b}$). se denota por $Comp_{\vec{b}}\vec{a}$ *(ó* $Cp_{\vec{b}}a$*)*, al número real .

$$Comp_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}, \text{ donde } \vec{b}\neq 0$$



De la definición y teniendo presente que $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$ obtenemos las siguientes consecuencias :

1°) El vector proyección y la componente están relacionados por :

$$Proy_{\vec{b}}\vec{a}=\left(comp_{\vec{b}}\vec{a}\right)\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

2°) Si $Comp_{\vec{b}}\vec{a}>0$ (ϕ =angulo agudo), entonces el vector $\vec{b}$ y el vector $Proy_{\vec{b}}\vec{a}$ tienen el mismo sentido.

3°) Si $Com_{\vec{b}}\vec{a}<0$ (ϕ =ángulo obtuso), entonces el vector $\vec{b}$ y el vector $Proy_{\vec{b}}\vec{a}$ tienen sentidos opuestos .

4°) Si $Comp_{\vec{b}}\vec{a}=0$ $(\phi=\pi/2)$. entonces el vector $\vec{b}$ y el vector $Proy_{\vec{b}}\vec{a}$ son ortogonales en cuyo caso $Proy_{\vec{b}}\vec{a}=0$ $(\vec{a}\perp\vec{b})$.

PROPIEDADES DE LAS COMPONENTES

1) $Comp_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=Comp_{\vec{c}}\vec{a}+Comp_{\vec{c}}\vec{b}$, $(\vec{c}\neq\vec{0})$

2) $Comp_{\vec{b}}(t\vec{a})=Comp_{\vec{b}}\vec{a}$, $(\vec{b}\neq\vec{0})$

3) a) $Comp_{r\vec{b}}\vec{a}=Comp_{\vec{b}}\vec{a}$ si $r>0$, $(\vec{b}\neq 0)$

b) $Comp_{r\vec{b}}\vec{a}=-Comp_{\vec{b}}a$ si $r>0$, $(\vec{b}\neq 0)$

Demostraremos únicamente la tercera propiedad las demás quedan como ejercicio para el lector .

$$Comp_{r\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot(r\vec{b})}{|r\vec{b}|}=\frac{r}{|r|}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

a) Si $r>0$, entonces $\frac{r}{|r|}=1$. Reemplazando en (α):

$$Comp_{r\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=Comp_{\vec{b}}\vec{a}$$

b) Si $r<0$, entonces $\frac{r}{|r|}=-1$; Reemplazando en (α)

$$Comp_{r\vec{b}}\vec{a}=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=-Comp_{\vec{b}}\vec{a}$$

OBSERVACIONES GENERALES

1°) Sabemos que $\cos\phi=\frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\Rightarrow\vec{a}\,.\,\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$

luego, $|\vec{a}\,.\,\vec{b}|=\|\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi|=|\vec{a}||\vec{b}||\cos\phi|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$

$\Rightarrow|\vec{a}\,.\,\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$ (Desigualdad de ***CAUCHY-SCHWARZ***) ..... (α)

NOTA :

Si $\cos\phi=\pm 1,(\phi=0;\pi)\Rightarrow|\vec{a}\,.\,\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|$

$\Rightarrow|\vec{a}\,.\,\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\Leftrightarrow\vec{a}\,//\,\vec{b}$ (y se cumple la igualdad en la desigualdad (α)) .

2°) Los vectores unitarios que tienen la misma dirección que los ejes coordenadas ***XYZ*** son, respectivamente :

$$\hat{i}=(1;0;0)\ ;\ \hat{j}=(0;1;0)\ ;\ \hat{k}=(0;0;1)$$

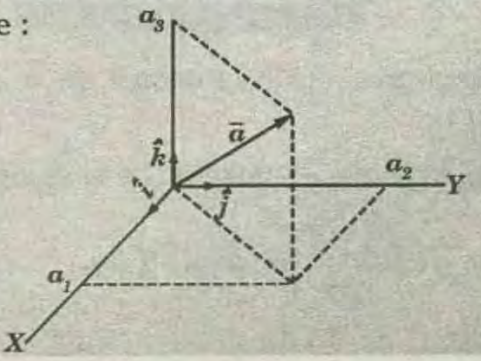
Luego , toda vector $\vec{a}\in R^3$ puede expresarse como combinación $\hat{i}\,;\hat{j}$ y $\hat{k}$. Además los vectores unitarios $\hat{i}\,;\hat{j}$ y $\hat{k}$ son ortogonales dos a dos , entonces decimos que el conjunto $\{\hat{i}\,;\hat{j}\,;\hat{k}\}$ constituye una base (la base usual) para el espacio R^3 y por ***10*** tanto , la dimensión del espacio R^3 es ***3***.

Más propiamente *a* esta base se le llama base ortonormal . Vemos que :

$$a=(a_1;a_2;a_3)=(a_1;0;0)+(0;a_2;0)+(0;0;a_3)$$

$$=a_1(1;0;0)=a_2(0;1;0)+a_3(0;0;1)=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$$

Gráficamente :



PROBLEMA :

Dados tres puntos **A, B** y **C**, los cuales forman un triángulo, hallar la dirección de una altura cualquiera del triángulo, usando el vector proyección .

RESOLUCIÓN :

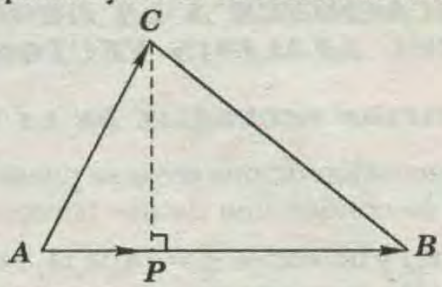
Vamos a calcular, como modelo la altura relativa al lado $\overline{AB}$.

Así, la altura $\overline{PC}=\overline{PA}+\overline{AC}$ .....(I)

Pero, $\overline{PA}=-\overline{AP}=-Proy_{\overline{AB}}\ \overline{AC}$ .....(II)

(II) en (I) : $\overline{PC}=\overline{AC}-Proy_{\overline{AB}}\ \overline{AC}$

con lo cual queda fijado la dirección de la altura .



EJEMPLOS :

1) Sean los vectores $\vec{a}=(3;5;2)$ y $\vec{b}=(-4;0;3)$, tal que $\vec{b}=\vec{r}+\vec{s}$, siendo $\vec{r}$ paralelo a $\vec{b}$ y ortogonal a $\vec{s}$. Hallar $\vec{r}$ y $\vec{s}$.

RESOLUCIÓN :

En el problema general anterior hacemos :

$\overline{AC}=\vec{a}$; $\overline{AB}=\vec{b}$. Si $\overline{AB}=\vec{b}$, entonces $\overline{AP}=\vec{r}$ y $\overline{PC}=\vec{s}$.

De donde : $\vec{r}=Proy_{\vec{b}}\vec{a}=-\frac{6}{25}(-4;0;3)$

$$\vec{r}=\vec{a}-\vec{r}=\frac{1}{25}(51;125;68)$$

DERIVACIÓN DE VECTORES

Si $\vec{A}_{(u)}$ es un vector función de la variable escalar u, en estas condiciones la derivada de $\vec{A}_{(u)}$ con respecto al escalar u se define por :

$$\frac{d\vec{A}}{du}=Lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta u}=Lim_{\Delta u\to 0}\frac{\vec{A}_{(u+\Delta u)}-\vec{A}_{(u)}}{\Delta u}$$

Si : $\vec{A}_{(u)}=\vec{A}_{x(u)}\hat{i}+A_{y(u)}\hat{j}+A_{z(u)}\hat{k}$

Entonces : $\frac{d\vec{A}}{du}=\frac{dA_x}{du}\hat{i}+\frac{dA_y}{du}\hat{j}+\frac{dA_z}{du}\hat{k}$

Las reglas usuales en el cálculo diferencial puede ser extensiva a los vectores , aunque el orden de los factores en los productos de vectores puede ser muy importante .

Por ejemplo si se tiene $\vec{A}_{(u)};\ \vec{B}_{(u)};\vec{C}_{(u)};\varnothing_{(u)}$ se verifica :

1) $\frac{d}{du}(\vec{A}+\vec{B})=\frac{d\vec{A}}{du}+\frac{d\vec{B}}{du}$

2) $\frac{d}{du}(\vec{A}.\vec{B})=\vec{A}.\frac{d\vec{B}}{du}+\frac{d\vec{A}}{du}.\vec{B}$

3) $\frac{d}{du}(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du}+\frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B}$

4) $\frac{d}{du}(\varnothing\vec{A})=\varnothing\frac{d\vec{A}}{du}+\frac{d\varnothing}{du}\vec{A}$

5) $\frac{d}{du}(\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C})=\vec{A}.\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{du}+\vec{A}.\frac{d\vec{B}}{du}\times\vec{C}+\frac{d\vec{A}}{du}.\vec{B}\times\vec{C}$

6) $\frac{d}{du}[\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}]=\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{du}\right)+\vec{A}\times\left(\frac{d\vec{B}}{du}\times\vec{C}\right)+\frac{d\vec{A}}{du}\times(\vec{B}\times\vec{C})$

7) $d(\vec{A}.\vec{B})=\vec{A}.d\vec{B}+d\vec{A}.\vec{B}$

8) $d(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\times d\vec{B}+d\vec{A}\times\vec{B}$

9) Si $\vec{A}=\vec{A}(x;y;z)$ se tiene :

$$d\vec{A}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}dx+\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}dy+\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}dz$$

INTEGRALES DE VECTORES

Si $\vec{A}_{(u)}=A_{x(u)}\hat{i}+A_{y(u)}\hat{j}+A_{z(u)}\hat{k}$ es una función vectorial de u, se define la integral indefinida $\vec{A}_{(u)}$ como .

$$\int\vec{A}_{(u)}du=\hat{i}\int A_{x(u)}du+\hat{j}\int A_{y(u)}du+\hat{k}\int A_{z(u)}du$$

Si se tiene : $\vec{A}_{(u)}=\frac{d}{du}\vec{B}_{(u)}$, entonces :

$$\int\vec{A}_{(u)}du=\int\frac{d}{du}\vec{B}_{(u)}\,du=\vec{B}_{(u)}+C$$

Donde C es constante arbitraria independiente de μ. La integral definida entre los límites $u=a$ y $u=b$ es :

$$\int_a^b\vec{A}(u)du=\int_a^b\frac{d}{du}\vec{B}(u)\,du=\vec{B}(u)+C\Big]_a^b=B(b)-B(a)$$

Si $\vec{r}_{(u)}=x_{(u)}\hat{i}+y_{(u)}\hat{j}+z_{(u)}\hat{k}$ es el vector de posición del punto $(x;\ y;\ z)$ de una curva que pasa por los puntos P_1 y P_2 correspondientes a $u=u_1$ y $u=u_2$ se tiene :

$$\int_{P_1}^{P_2}\vec{A}.d\vec{r}=\int_C\vec{A}.d\vec{r}=\int_C(A_x dx+A_y dy+A_z dz)$$

$$= \int_C A_x dx + \int_C (A_y dy + \int_C (A_z dz$$

OPERADORES DIFERENTES VECTORIALES

EL OPERADOR NABLA : Es un operador vectorial y goza de propiedades análogas a los vectores ordinarios , de gran utilidad en la práctica en operaciones llamadas gradiente , divergencia y rotacional , se representa por ∇ y se define :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

GRADIENTE : Si $\varnothing = \varnothing(x;y;z)$ el gradiente de $\varnothing$ representación por $\nabla\varnothing$ está dado por :

$$\nabla_{\varnothing} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right]\Phi = \frac{\partial \varnothing}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \varnothing}{\partial y}\hat{i} + \frac{\partial \varnothing}{\partial z}\hat{k}$$

$\varnothing$ define un campo escalar derivable en cada uno de los puntos $(x; y ; z)$.

DIVERGENCIA :

Dado $\vec{A}(x; y;z) = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ una función vectorial definida en cada uno de los puntos $(x; y;z)$ de una cierta región del espacio, la divergencia de $\vec{A}$, representar por $\nabla\vec{A}$, o div $\vec{A}$ tiene el siguiente aspecto :

$$\nabla.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Observe que $\vec{A}$ define un campo vectorial derivable.

ROTACIONAL : El rotacional de cualquier campo vectorial derivable tal como $\vec{A}$, se representa por $\nabla\times\vec{A}$, ó rot $\vec{A}$ y tiene el siguiente aspecto .

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Estas expresiones tienen una gran aplicación en física sobre todo en Mecánica de Fluídos y Electrodinámica.

Aquí damos algunas fórmulas en que interviene ∇

1) $\nabla(\varnothing + \Psi) = \nabla\varnothing + \varnothing\Psi$, $\varnothing$ y Ψ ***escalares***

2) $\nabla.(\vec{A} + \vec{B}) = \nabla.\vec{A} + \nabla.\vec{B}$

3) $\nabla\times(\vec{A} + \vec{B}) = \nabla\times\vec{A} + \nabla\times\vec{B}$

4) $\nabla.(\varnothing\vec{A}) = (\nabla\varnothing).\vec{A} + \varnothing(\nabla.\vec{A})$

5) $\nabla\times(\varnothing\vec{A}) = (\nabla\varnothing)\times\vec{A} + \varnothing(\nabla\times\vec{A})$

6) $\nabla.(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}.(\nabla\times\vec{A}) - A.(\nabla\times\vec{B})$

7) $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}.\nabla)\vec{A} - \vec{B}(\nabla.\vec{A}) - (\vec{A}.\nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla.\vec{B})$

8) $\nabla(\vec{A}.\vec{B}) = (\vec{B}.\nabla)\vec{A} + (\vec{A}.\nabla)\vec{B} + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})$

9) $\nabla\times\nabla\varnothing = 0$

10) $\nabla.(\nabla\times\vec{A}) = 0$

11) $d\vec{A} = (d\vec{r}.\nabla)\vec{A} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}dt$

12) $d\varnothing = d\vec{r}.\nabla\varnothing + \frac{\partial\varnothing}{\partial t}dt$

APLICACIONES A LA GEOMETRIA DEL ANALISIS VECTORIAL

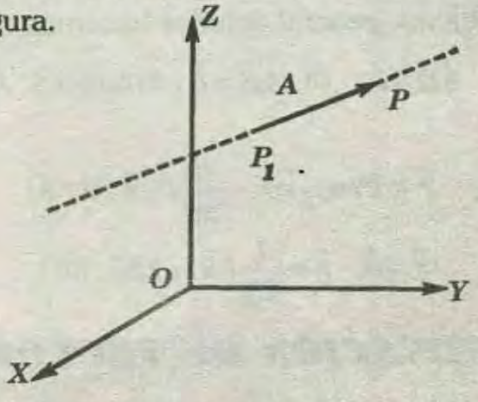
A) ECUACION VECTORIAL DE LA RECTA :

a.1) La ecuación de una recta se puede determinar cuando se conoce uno de sus puntos tales como $P_1(x_1;y_1;z_1)$ y un vector $\vec{A} = (A_x;A_y;A_z)$ que indique su dirección tomando un punto genérico $P(x;y;z)$ que pertenece a la recta.

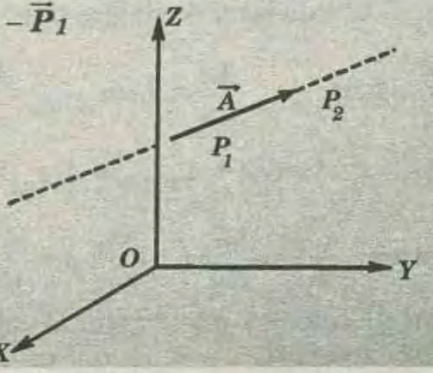
De manera que la ecuación vectorial de la recta pedida es :

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + k\vec{A}$$

Siendo k un parámetro variable , de manera que al variar que $-\infty < k < \infty$ describe toda la recta pedida . Véase figura.



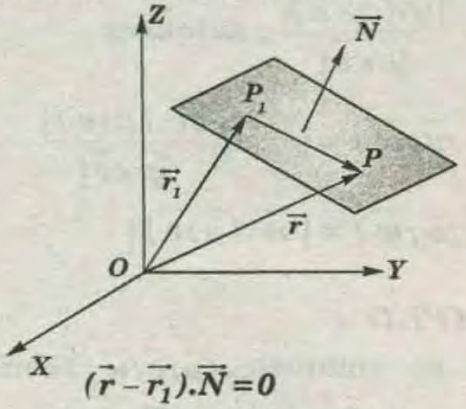
b) Cuando la recta pasa por dos puntos conocidos tales como $P_1(x_1;y_1;z_1)$ $P_2(x_2;y_2;z_2)$ en este caso se tiene que $\vec{A} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$



De manera que la ecuación vectorial de la la recta es. $\vec{P}=\vec{P_1}+k\vec{A}=\vec{P_1}+k(\vec{P_2}-\vec{P_1})$

B) ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO :

Si $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ es un punto conocido del plano y $\vec{N}=N_x\hat{i}+N_x\hat{j}+N_2\hat{k}$ es un vector peperdicular al plano y $P(x;y;z)$ es un punto cualquiera del plano; la ecuación vectorial del plano es .

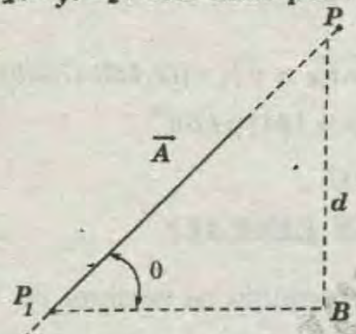


$$(\vec{r}-\vec{r_1}).\vec{N}=0$$

De donde : $N_xx+N_yy+N_zz+D=0$ en la que $D=-(N_xx_1+N_yy_1+N_zz_1)$

C)DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA:

Con referencia a la figura la distancia de la recta cuya ecuación es $\vec{P}=\vec{P_1}+k\vec{A}$ al punto $B(B_x;B_y;B_z)$ está dado por :



$$d=\frac{\overrightarrow{P_1B}\times\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

D) DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

Una recta que pasa por $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y es paralela al vector $\vec{A}$ tiene a ecuación $\vec{P}=\vec{P_1}+k\vec{A}$, y otra recta que pasa por c punto $P_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ y que es paralelo el vector $\vec{B}$ tiene por ecuación $\vec{P}=\vec{P_2}+k\vec{B}$ entonces la distancia mínima entre estas dos rectas está dado por :

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}(\vec{A}\times\vec{B})|}{|\vec{A}\times\vec{B}|}$$

ANGULO ENTRE DOS PLANOS

Dada las rectas $\vec{P}=\vec{P}_1+k\vec{A}$ y $\vec{P}=\vec{P}_2+k\vec{B}$, el ángulo entre ellas está dado por $Cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{A\ B}$, son perpendiculares si : $\vec{A}.\vec{B}=0$ son paralelas las rectas, si $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$.

ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS

Dados los planos con ecuaciones vectoriales $(\vec{r}-\vec{r_1}).\vec{N}=0$ y $(\vec{r}-\vec{r_2}).\vec{M}=0$ el ángulo entre ellos está dado por :

$$Cos\theta=\frac{\vec{M}.\vec{N}}{M\ N}$$

a) son paralelos si : $\vec{A}\times\vec{N}=\vec{0}$

b) son perpendiculares si : $\vec{M}\ .\ \vec{N}=\vec{0}$

ÁNGULO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

Dada una recta con ecuación vectorial $\vec{P}=\vec{P}_1+k\vec{A}$ y el plano con ecuación vectorial $(\vec{r}-\vec{r_1}).\vec{N}=0$ el ángulo que forma la recta con el plano será el complementario del que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{N}$ es decir :

$$sen\theta=\frac{\vec{A}\ .\ \vec{N}}{A\ N}$$

La recta y el plano perpendiculares si : $\vec{A}\times\vec{N}=0$

Si : $\vec{A}\ .\ \vec{N}=\vec{0}$. Son paralelos

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

Dado un punto $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ que pertenece a un plano y un vector normal al plano tal como $\vec{N}$, la distancia del punto $P(x;\ y\ ;\ z)$ al plano está dado por :

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P}\ .\ \vec{N}|}{N}$$

* En coordenadas cartesianas tendremos:

$$P=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3/ax+by+cz+d=0\}$$

La normal $\vec{n}=(a;b;c)$ es paralela a $\vec{\mu}\times\vec{v}$; entonces $\vec{\mu}\times\vec{v}=t\vec{n}$

* Si $Q=(x_0;y_0;z_0)$ y $P_0(x_1;y_1;z_1)$ tenemos:

$$d(Q;P)=\frac{|(x_0-x_1;y_0-y_1;z_0-z_1)\ ;\ (a;b;c)\ |}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\rightarrow d(Q;P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ pues\ P_0\in P$$ por lo tanto verifica

$$d=-ax_1-by_1-cz_1$$

$$\rightarrow d(Q;P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

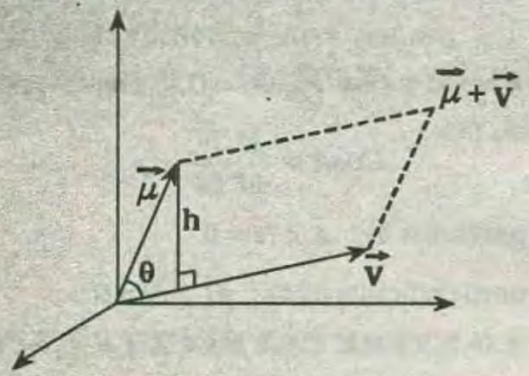
ÁREA DE UN PARALELOGRAMO

Deseamos hallar el área del paralelogramo (en R^3) determinado por los vectores $\vec{\mu}$ y $\vec{v}$; es decir; de vértices $O\ ;\vec{v}\ ;\ \vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{\mu}$.

$h=|\vec{\mu}|\ sen\theta$

$A(\mu\ ;\ v)=h|\vec{v}|=|\vec{\mu}|\,|\vec{v}|\ sen\theta=|\vec{\mu}\times\vec{v}|$

Área



Luego $A(\vec{\mu}\ ;\ \vec{v})=|\vec{\mu}\times\vec{v}|$; el área del paralelo gramo Determinado por $\vec{\mu}$ y $\vec{v}$ de donde el área del triángulo determinado por $\vec{\mu}$ y $\vec{v}$ es $A(\vec{\mu}\ ;\ \vec{v})=\frac{1}{2}|\vec{\mu}\times\vec{v}|$

EJEMPLO :

Hallar el área del triángulo de vértices

$(-1;2;-1)\ ;\ (1;2;0)\ ;\ (-3;1;-1)$

RESOLUCIÓN :

* Sea: $P_0=(-1;2;-1)$

$\vec{\mu}=(1;2;0)-(-1;2;-1)=(2;0;1)$

$\vec{V}=(-3;1;-1)-(1;2;-1)=(-2;-1;0)$

* Luego : $A(\vec{\mu}\ ;\ \vec{v})=\frac{1}{2}\ |\vec{\mu}\times\vec{v}|=\frac{1}{2}|(1;-2;2)|=\frac{9}{2}\mu^2$

AREA DE UN TRIÁNGULO

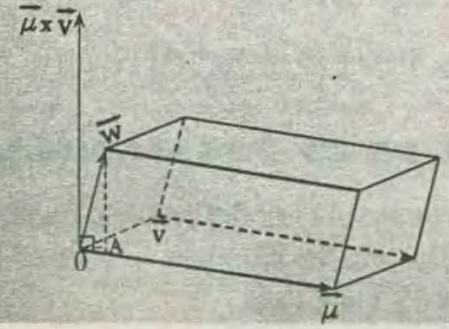
Si : $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y $P_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ y $P_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$ son los vértices de un triángulo, y $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, son los respectivos vectores de posición con respectos al origen de coordenadas el área del triángulo se :

$$S=\frac{1}{2}|(\vec{P}_2-\vec{P}_1)\times(\vec{P}_3-\vec{P}_1)|$$

Que es lo mismo . $S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\ |$

VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO

Sean los vectores $\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ;\vec{w}$; entonces el volumen determinado por los vectores $\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ;\vec{w}$ es:



* El volumen $v\ (\vec{\mu}\ ;\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})=|\vec{\mu}\times\vec{v}|.h$

$\rightarrow\ \vec{w}.(\vec{\mu}\times\vec{v})-A.(\vec{\mu}\times\vec{v})=|\vec{\mu}\times\vec{v}|^2$

$\rightarrow w.(\vec{\mu}\times\vec{v})=\lambda|\vec{\mu}\times\vec{v}|^2\rightarrow\lambda=\frac{w.(\vec{\mu}\times\vec{v}}{|\vec{\mu}\times\vec{v}|^2}$

* Pero: $h=|\lambda|\ |\vec{\mu}\times\vec{v}|$

$\rightarrow\ h=\frac{|w.(\vec{\mu}\times\vec{v})|}{|\vec{\mu}\times\vec{v}|}$; ***entonces***

$\rightarrow v(\vec{\mu};\vec{v};\vec{w})=|\vec{\mu}\times\vec{v}|.\frac{|\vec{w}.(\vec{\mu};\vec{v})|}{|\vec{\mu}\times\vec{v}|}$

$\rightarrow v(\vec{\mu};\vec{v};\vec{w})=|\vec{w}.(\vec{\mu};\vec{v})|$

EJEMPLO :

Hallar el volumen $v(\vec{\mu};\vec{v};\vec{w})$ sabiendo que $\vec{\mu}=(1;3;-3);\ \vec{v}=(-2;2;1)\ ;\ \vec{w}=(2;1;3)$

RESOLUCIÓN :

* Sean los vectores $\vec{\mu}=(1;3;-2)\ ;\ \vec{v}=(-2;2;1);\ \vec{w}=(2;1;3)$

$$\rightarrow\vec{\mu}\times\vec{v}=\begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}=7\vec{i}+3\vec{j}+8\vec{k}=(7;3;8)$$

* Luego:

$$v\ (\vec{\mu}\ ;\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})=|\vec{w}.(\vec{\mu}\times\vec{v})|=|(2,1;3).(7;3;8)|$$

$$v(\vec{\mu}\ ;\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})=|41|=41m^3$$

DEFINICIONES :

A) COMBINACIÓN LINEAL:

Si $\{\vec{a}_1;\vec{a}_2;....;a_n\}$ un conjunto de vectores de V_n ;el vector $\vec{V}\in V_n$ es, una combinación lineal de los vectores $\vec{a}_1;\vec{a}_2;...;\vec{a}_n$ si $\vec{V}$ puede expresarse como:

$\vec{V}=r_1\vec{a}_1+r_2\vec{a}_2+...+r_n\vec{a}_n$ para $r_i\in R/\ i=1;2;...;n$

B) Un vector $\vec{a}\in V_n$ es combinación lineal de los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ si y sólo si existen los escalares $r;s\in R$

tales que: $\vec{a}=r\vec{b}+s\vec{c}$

EJEMPLO:

$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

$\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$

El vector a es una combinación de: $\{\hat{i}\hat{j};\hat{k}\}$ en R^3

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Dado los vectores: $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j}$ y $\vec{b} = 7\hat{i} - 3\hat{j}$

Determinar:

I) $\vec{a} + \vec{b}$ II) $\vec{a} - \vec{b}$ III) $-2\vec{a} + 3\vec{b}$

RESOLUCIÓN:

I) $\vec{a} + \vec{b} = 9\hat{i} + 2\hat{j}$

II) $\vec{a} - \vec{b} = -5\hat{i} + 8\hat{j}$

III) $-2\vec{a} + 3\vec{b} = -2(2\hat{i} + 5\hat{j}) + 3(7\hat{i} - 3\hat{j})$

$\Rightarrow -2\vec{a} + 3\vec{b} = x - 4\hat{i} - 10\hat{j} + 21\hat{i} - 9\hat{j}$

$\Rightarrow -2\vec{a} + 3\vec{b} = 17\hat{i} - 19\hat{j}$

PROBLEMA 2:

Determinar el vector $\vec{x}$ de: $-3(1;3) - 2\vec{x} = 5(0;2) + 4\vec{x}$

RESOLUCIÓN:

$(-3;-9) + 2\vec{x} = (0;-10) + 4\vec{x} \Rightarrow (-3;-9) - (0;-10) = 4\vec{x} - 2\vec{x}$

$\Rightarrow (-3;1) = 2\vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{2}(-3;1) = \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$

PROBLEMA 3:

Si: $\vec{u} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{v} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, y $\vec{w} = 3\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$.

Calcula: $\vec{u} + 2\vec{w} - 3\vec{v}$

RESOLUCIÓN:

$\vec{u} + 2\vec{w} - 3\vec{v} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + 2(3\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}) - 3(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$

$\rightarrow \vec{u} + 2\vec{w} - 3\vec{v} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k} + 6\hat{i} + 2\hat{j} - 10\hat{k}) - 3\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k})$

$\rightarrow \vec{u} + \vec{w} - 3\vec{v} = 5\hat{i} + 11\hat{j} - 14\hat{k} = (5;11;-14)$

PROBLEMA 4:

Si: $\vec{u} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$; $\vec{v} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{w} = 3\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$,

Calcula: $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

RESOLUCIÓN:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) = 2 - 6 - 1 = -5$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (3\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}) = 3 - 2 - 5 = -4$

*Es decir: $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} = (-5) + (-4) = -9$

PROBLEMA 5:

Si $\vec{u} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ y $\vec{v} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, calcular el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

RESOLUCIÓN:

* Se sabe que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u \cdot v \cos\theta \text{ ó } \cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$$

$$\cos\theta = -\frac{5}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2 \times 1^2+(-2)^2+1^2}} = -\frac{5}{\sqrt{14 \times 6}}$$

$$= -\frac{5}{\sqrt{84}} = -0{,}54$$

$\rightarrow \theta = \arccos(-0{,}54)$

PROBLEMA 6:

Considerando los vectores

$$\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k} \text{ y } \vec{b} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$$

I) Determinar $\vec{a} + \vec{b}$

II) Determinar $\vec{a} - \vec{b}$

III) Determinar $3\vec{a} - 2\vec{b}$

RESOLUCIÓN:

I) $\vec{a} + \vec{b} = 6\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k}$

II) $\vec{a} - \vec{b} = -2\hat{i} + 7\hat{j} + 4\hat{k}$

III) $3\vec{a} - 2\vec{b} = 3(2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}) - 2(4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$

$\Rightarrow 3\vec{a} - 2\vec{b} = -2\hat{i} + 18\hat{j} + 13\hat{k}$

PROBLEMA 7:

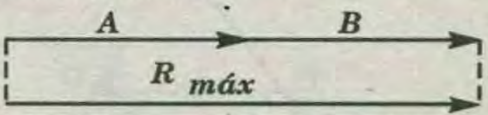
Dos vectores tienen una resultante máxima que mide 14 y una resultante mínima que mide 2. ¿Cuál es el módulo de la resultante de dichos vectores cuando formen un ángulo de 90°?

RESOLUCIÓN:

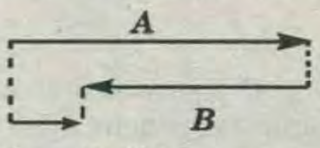
* Según datos:

$R_{máx} = A + B = 14$ ..... (I)

$R_{mín} = A - B = 2$ ..... (II)



* Resolviendo las ecuaciones (I) y (II) obtendremos:



$A = 8$ y $B = 6$

* Luego, cuando los vectores formen 90°, su resultante se obtendrá de la fórmula:

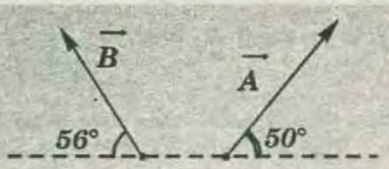
$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos 90°} = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ ..... } \cos 90° = 0$$

$$R = \sqrt{8^2 + 6^2} \Rightarrow R = 10$$

PROBLEMA 8:

Entcontrar el módulo del vector diferencia $\vec{A} - \vec{B}$, si estos vectores se muestran en la figura, de módo que.

$|\vec{A}|=50, |\vec{B}|=14$

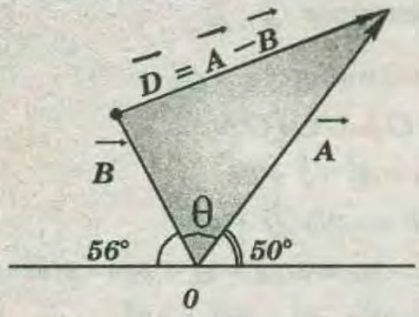


RESOLUCIÓN:

* trasladando los vectores de modo paralelo a sus posiciones originales hasta que sus posiciones originales hasta que sus origenes coincidan, observaremos que ángulo formado por ellos se obtienen de :

$$56°+\theta+50°=180° \Rightarrow \theta=74°$$

* Luego, utilizamos la fórmula :



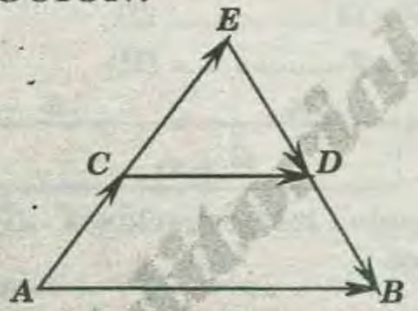
$$D=\sqrt{50^2+14^2-2\times50\times14\cos74°} \quad \text{.....(cos74°=7/25)}$$

$$D=48$$

PROBLEMA 9:

Demostrar que el segmento de la recta que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y que su longitud es igual a la mitad de la longitud del tercer lado.

RESOLUCIÓN:



Como C y D son puntos medios de AE y EB respectivamente, se tiene $AC = CE$ y $ED = DB$.

* Por tanto : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow 2\overrightarrow{CE} + 2\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$

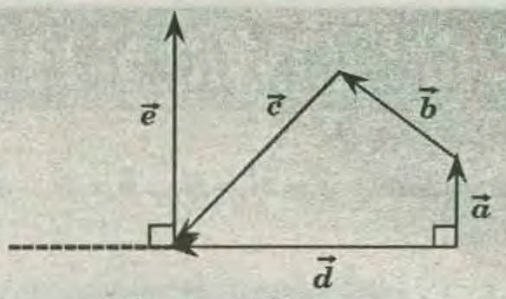
$$\Rightarrow 2(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED}) = \overrightarrow{AB} \Rightarrow 2\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$$

* Es decir: $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \rightarrow |\overrightarrow{CD}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$

* Por consiguiente, $\overrightarrow{CD}$ es paralelo a $\overrightarrow{AB}$ y tiene una longitud igual a la mitad de $|\overrightarrow{AB}|$.

PROBLEMA 10:

Determinar el módulo de la resultante del conjunto de vectores.

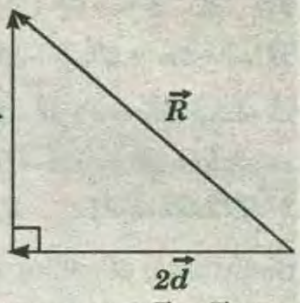


Si $|\vec{e}|=12$; $|\vec{d}|=2,5$

RESOLUCIÓN:

* Como la resultante R es la suma de todos los vectores, se tiene:

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$$
$$\rightarrow \vec{R} = \vec{d} + \vec{d} + \vec{e}$$
$$\rightarrow \vec{R} = 2\vec{d} + \vec{e}$$



Como los vectores que se obtienen, $2\vec{d}$ y $\vec{e}$,son perpendiculares, la resultante es la hipotenusa del triángulo rectángulo y su módulo se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras:

$$|\vec{R}| = \sqrt{|2\vec{d}|^2+|\vec{e}|^2} \Rightarrow |\vec{R}| = \sqrt{(5)^2 + (12)^2}$$

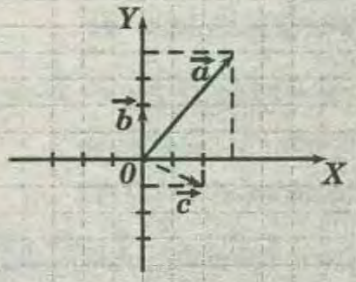
* Por tanto: $|\vec{R}|=13$

PROBLEMA 11:

Dado los vectores $\vec{a}=(3;4)$, $\vec{b}=(0;2)$, $\vec{c}=(2;-1)$, representarlos en el plano "X" y "Y" calcular la magnitud o módulo de cado uno.

RESOLUCIÓN:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2-4^2} = 5$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$$
$$|\vec{c}| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$$



PROBLEMA 12:

Se tienen dos vectores coplanares y concurrentes cuyos módulos son 3 y 5 respectivamente. Determinar el ángulo que ellos deben formar para que su vector suma correspondiente tenga un módulo igual a 7 .

RESOLUCIÓN :

* Sean $A=3$; $B=5$ y $R=7$; entonces , aplicando la fórmula *de la ley de cosenos* , pero elevando al

cuadrado previamente , para eliminar el símbolo radical y dejar expuesto el término $\cos\theta$ mediante quien llegaremos a conocer el ángulo "θ" pédido .

* Veamos :

$$R^2=A^2+B+2AB\cos\theta \Rightarrow 7^2=3^2+5^2+2\times3\times5\cos\theta$$

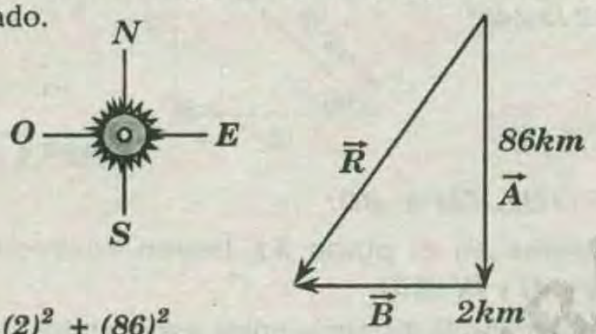
$$49=34+30\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=1/2 \Rightarrow \theta=60°$$

PROBLEMA 13:

Retomando el día de playa de Luis, si el auto en el que viaja recorre **86 km** rumbo al sur y después tomo un desvío de **2 km** en dirección oeste para finalmente llegar a la playa "León Dormido",¿cuál es la longitud del desplazamiento resultante del auto?

RESOLUCIÓN:

El desplazamiento resultante $\vec{R}$ es la suma de dos desplazamientos individuales $\vec{A}$ y $\vec{B}$. para el cálculo algebraico de la magnitud de la resultante aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo formado.



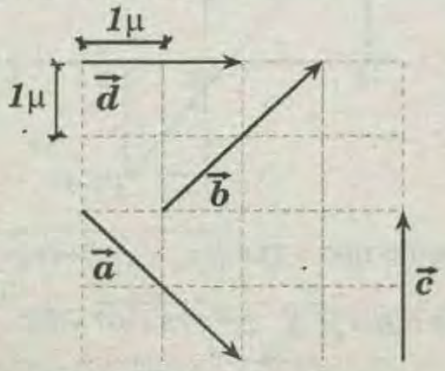
$$|\vec{R}|^2=(2)^2+(86)^2$$

$$|\vec{R}|=\sqrt{7400} \Rightarrow |\vec{R}|=86{,}02$$

* Por tanto, la longitud del desplazamiento es de **86,02 km.**

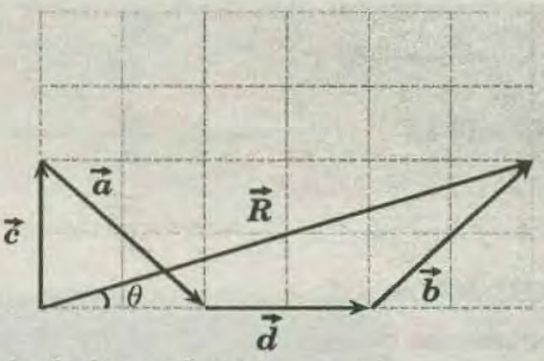
PROBLEMA 14:

Determinar la dirección y el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrado, si cada cuadrado pequeño de la figura tiene por lado una longitud de lado de una unidad **(1u)**.



RESOLUCIÓN :

* Ordenamos los vectores uno a continuación de otro para determinar gráficamente la resultante :



* Módulo de la resultante:

$$|\vec{R}|^2=(6u)^2+(2u)^2 \Rightarrow |\vec{R}|=2\sqrt{10}u$$

* Podemos determinar la dirección de muchas formas. Por ejemplo, si los vectores están en un plano podemos convenirla como el ángulo girado en sentido antihorario que hace el vector con relación a una línea horizontal.

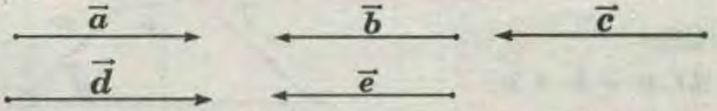
* Luego, tendremos:

$$\tan\theta=\frac{2u}{6u}=\frac{1}{3}\rightarrow\theta=\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

PROBLEMA 15:

Encontrar el módulo y dirección del siguiente conjunto de vectores, si se sabe que :

$$|\vec{A}|=7, |\vec{b}|=8\ ,\ |\vec{c}|=6, |\vec{d}|=3, |\vec{e}|=4$$



RESOLUCIÓN:

* Se desea : $\vec{R}=\sum\vec{V}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$

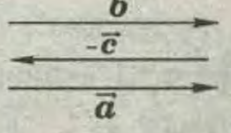
En vista de que los vectores dados son todos colineales , procederemos a anticipar que el vector suma a encontrar será colineal con ellos , y para encontrar su valor y signo elegiremos a priori una dirección positiva (hacia la derecha) y otra negativa (hacia la izquierda), de este modo :

$$R=+7-6+3-4-8 \Rightarrow R=-8\ ;\ \text{ó}\ ;\ R=8(+)$$

PROBLEMA 16:

Dado el siguiente conjunto de vectores , hallar :

$$\vec{R}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$$



Siendo : $|\vec{a}|=7\ ;\ |\vec{b}|=5\ ;\ |\vec{c}|=4$

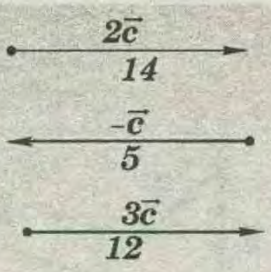
RESOLUCIÓN:

* Nuestra solución se obtendrá graficando en primer lugar a los vectores $(+2\vec{a});(-\vec{b})$ y $(+3\vec{c})$ para luego aplicar el mismo procedimiento del problema anterior:

$\vec{R}=\sum\vec{V}$ $(\overset{-}{\longleftarrow\bullet\longrightarrow}\overset{+}{})$

$R=+14-5+12$

$R=21\ (\rightarrow)$



PROBLEMA 17:

Dos vectores se encuentran a un mismo punto . Si uno de ellos mide **15** y el otro **7** ¿Cuál es el módulo de su vector suma , si el ángulo formado por ellos mide **53°**?

RESOLUCIÓN:

* Considerando que los vectores dados dados son $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tales que : $|\vec{A}|=15$; $|\vec{B}|=7$; y $\theta=53°$.

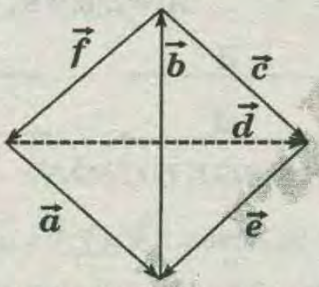
el ángulo formado por ellos , entonces aplicamos la siguiente fórmula :

$$R=\sqrt{15^2+7^2+2\times15\times7\cos53°}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(\cos53°=3/5)$$

$$\Rightarrow R=\sqrt{225+49+210\times3/5}=20$$

PROBLEMA 18:

Sean los vectores del tetraedro de la figura:



Hallar :

A) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

B) $\vec{b}+\vec{c}+\vec{e}$

C) $\vec{a}-\vec{d}$

D) Un vector que una el punto medio de la arista **a** con el punto medio de la arista **c**.

RESOLUCIÓN :

A) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=d$ B) $\vec{b}+\vec{c}+\vec{e}=0$

C) $\vec{a}-\vec{d}=\vec{e}$ D) Sea $\vec{x}$ el vector buscado. Entonces :

$$\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{c}=\vec{d}$$

* Por tanto: $\vec{x}=\vec{d}-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$

PROBLEMA 19:

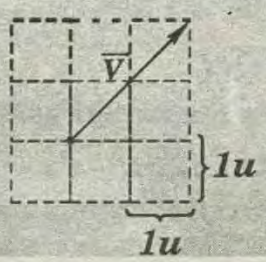
Determinar el módulo y la dirección del vector dado

A) $2\angle45°$

B) $2\angle30°$

C) $2\sqrt{2}\angle45°$

D) $3\sqrt{3}\angle30°$



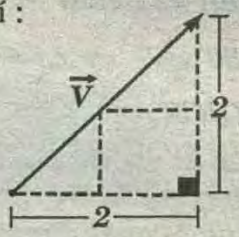
RESOLUCIÓN:

*** Para el módulo :**

Como se sabe es la longitud del segmento dirigido, el tamaño o lo que mide el vector .

* En el triángulo rectángulo formado aplicamos el teorema de pitágoras , así :

$|\vec{V}|=\sqrt{2^2+2^2}\rightarrow|\vec{V}|=2\sqrt{2}$

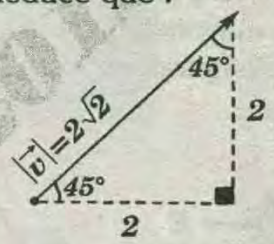


*** Para el módulo :**

Es la medida del ángulo que forma el vector con el eje **X** , por la relación entre sus catetos; se deduce que el triángulo rectángulo formado es notable **(45° y 45°)**

* Del gráfico se deduce que :

$\vec{V}=2\sqrt{2}\angle45°$



RPTA : "C"

PROBLEMA 20:

2 puntos en el plano **XY** tienen coordenadas **A(2; – 4)** y **B(–3;3)**

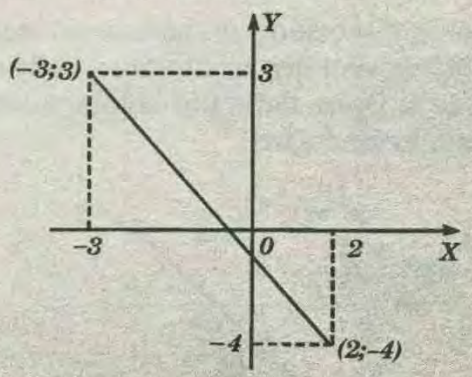
I) Determine la distancia entre estos puntos .

II) Determine sus coordenadas polares .

III) Determine sus coordenadas polares .

RESOLUCIÓN :

* Graficando adecuadamente :



I) Recordando que : $D=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

* Entonces : $D=\sqrt{(-3-2)^2+(3+4)^2}=\sqrt{74}$

II) Sea $A=(-3;3)\Rightarrow\begin{cases}-3=r\cos\theta\\3=r\,\mathrm{sen}\,\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\tan\theta=-1\\\theta=135°\end{cases}$

$$\Rightarrow r=\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt{2}m$$

* Luego: $A=(3\sqrt{2};135°)$

* Sea : $B=(2;-4) \Rightarrow r=\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$$Tg\theta=\frac{-4}{2} \rightarrow Tg\theta=-2 \rightarrow \theta=Tg^{-1}(-2)$$

PROBLEMA 21:

Si las coordenadas rectangulares y polares de un punto son $(2; y)$ y $(r; 30°)$, respectivamente. determine "y" y r.

RESOLUCIÓN:

Dato $(2;y)$ y $(r;30°) \rightarrow 2=r\cos 30° \Rightarrow r=4\sqrt{3}/3$

$$y=r\,sen30° \Rightarrow y=\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

*Luego : $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $r=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

PROBLEMA 22:

Las coordenadas polares de un punto son $r = 5,5\ m$ y $\theta = 240°$. ¿Cuales son las coordenadas cartesianas de este punto?

RESOLUCIÓN:

* Dato : $r=5,5\ m;\ \theta=240°$

$x=r\cos\theta \Rightarrow x=5,5\cos 240°=-5,5\cos 60°$

$$\rightarrow x=-5,5\left(\frac{1}{2}\right)=-2,75$$

$y=r\,sen\theta \Rightarrow y=5,5\,sen240°=-5,5\,sen60°$

$$\rightarrow y=\frac{-5,5}{2}\sqrt{3}=-2,75\sqrt{3}$$

PROBLEMA 23:

Dos puntos en un plano tienen coordenadas polares $(2,5\ m;\ 30°)$ y $(3,8\ m;120°)$. Determine:

a) Las coordenadas cartesianas de estos puntos.

b) La distancia entre ellos.

RESOLUCIÓN :

Sea el punto $A=(2,5;\ 30°)$

Sea el punto $B=(3,8;\ 120°)$

Parte *(a)* :

Hallando "A".

$x=2,5\cos 30° \Rightarrow x=2,5\frac{\sqrt{3}}{2}=1,25\sqrt{3}$

$y=2,5\,sen30° \Rightarrow y=2,5\frac{1}{2}=1,25$

$$\rightarrow A=(x;y)=(1,25\sqrt{3};1,25)$$

* Hallando "B" :

$x=3,8\cos 120° \Rightarrow x=-3,8\,sen30°$

$$\rightarrow x=-3,8\times\frac{1}{2}=-1,9$$

$y=3,8\,sen120° \Rightarrow y=3,8\cos 30°=3,8\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\rightarrow y=1,9\sqrt{3}$$

$B=(x;y)=(-1,9;1,9\sqrt{3})$

* Parte *(b)* :

$$D_{(A;B)}=\sqrt{\left(1,25\sqrt{3}-1,9/2\right)^2+\left(1,25-1,9\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\rightarrow D_{(A;B)}=2,33$$

PROBLEMA 24:

Cierta esquina de un cuarto se selecciona como el origen de un sistema de coordenadas rectangulares. Una mosca se mueve lentamente en una pared adyacente a uno de los ejes . Si la mosca se ubica en un punto que tiene coordenadas $(2;1)$ m.

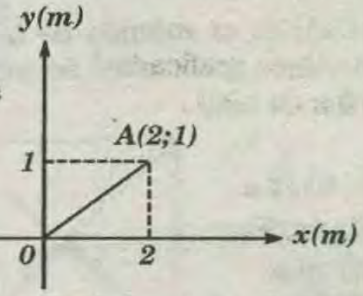
a) ¿a qué distancia se encuentra de la esquina del cuarto?

b) ¿cuál es la posición en coordenadas polares?

RESOLUCIÓN:

* Parte *(a)* :

$D_{(OA)}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}=2,24m$



* Parte *(b)* :

$x=r\cos\theta \Rightarrow 2=\sqrt{5}\cos\theta$

$y=r\,sen\theta \Rightarrow 1=\sqrt{5}\,sen\theta$

$tan\theta=1/2 \Rightarrow \theta=\frac{53}{2}$

*Luego las coordenadas polares de la mosca será:

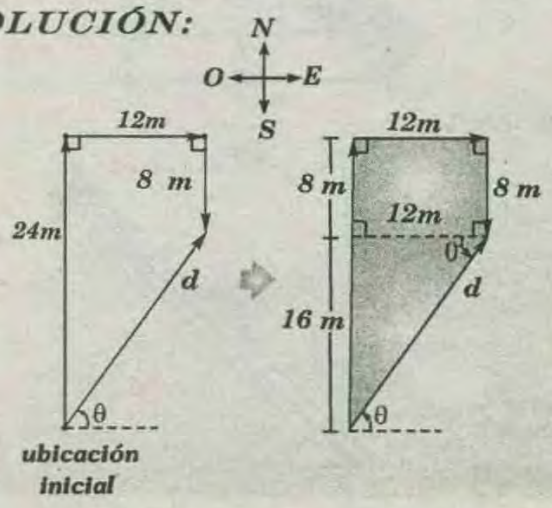
$$(\sqrt{5};53°/2)$$

PROBLEMA 25:

Determine el módulo y la dirección del desplazamiento total que experimenta un móvil , si primero se desplaza $24m$ hacia el norte , luego $12m$ hacia el este y finalmente $8\ m$ hacia el sur .

A) $20m|37°$ *B)* $10\,m|45°$ *C)* $20\,m|53°$

RESOLUCIÓN:



Grafiquemos primero cada uno de los desplazamientos seguidos por el móvil. El desplazamiento total será la suma vectorial de cada uno de los desplazamientos parciales. Nos piden el módulo del desplazamiento y θ, para ello aprovechamos la figura que se ha formado con los desplazamientos, la cual resulta ser un trapecio rectángulo. En él se aprovecha el trazo de una altura, porque, debido a ello, se forma un rectángulo y un triángulo rectángulo, y se determina en el triángulo rectángulo, aplicando el Teorema de Pitágoras.

$$d=\sqrt{(16)^2+(12)^2}=20$$

* La dirección del vector desplazando $|\vec{d}|$ viene dado por el ángulo θ y de la figura se tiene que:

$$Tg\theta=\frac{16}{12}\rightarrow Tg\theta=\frac{4}{3}\rightarrow \theta=53^\circ$$

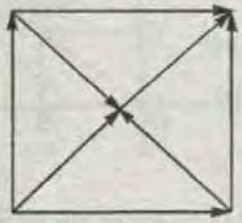
* Con lo que: $\vec{V}=20m\angle 53^\circ$

RPTA: "C"

PROBLEMA 26:

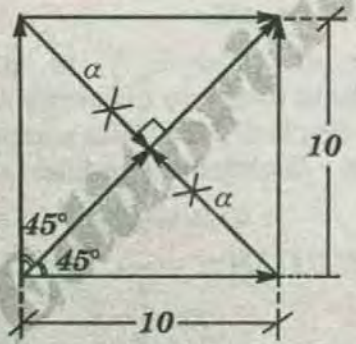
¿Cuál es el módulo de la resultante de todos los vectores graficados? Se sabe que el cuadrado tiene $10\,u$ de lado.

A) $30\sqrt{2}\,u$
B) $50\sqrt{2}\,u$
C) $30\,u$
D) $20\,u$

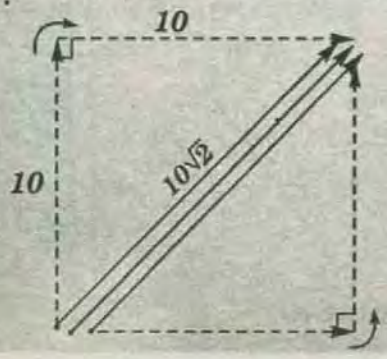


RESOLUCIÓN:

* Reduciendo, resultará:



* Luego queda:



$$\Rightarrow 10\sqrt{2}\ //\ 10\sqrt{2}\ //\ 10\sqrt{2}\Rightarrow R=3(10\sqrt{2})=30\sqrt{2}$$

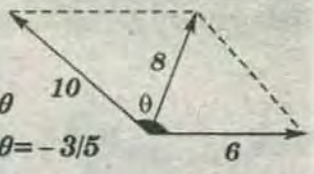
RPTA: "A"

PROBLEMA 27:

Dos vectores de módulos **10** y **6** tienen una resultante igual a **8** ¿Qué ángulo formarán dichos vectores?

A) 60° B) 37° C) 107° D) 127° E) 137°

RESOLUCIÓN:



* $R=\sqrt{A^2+B^2+2ABCos\theta}$

$8^2=10^2+6^2+2\times 10\times 6Cos\theta$

$\Rightarrow 64=136+120Cos\theta\rightarrow Cos\theta=-3/5$

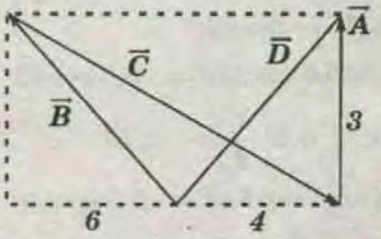
$\Rightarrow \theta=127^\circ$

RPTA: "C"

PROBLEMA 28:

Si $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$, determine el módulo del vector $\vec{R}-2\vec{D}$

A) 7,2
B) 6,7
C) 5
D) 0

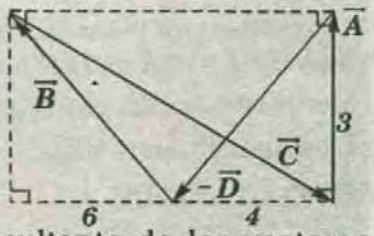


RESOLUCIÓN:

* Se sabe que: $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$

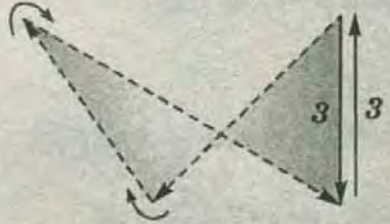
*Nos piden: $\vec{x}=\vec{R}-2\vec{D}$

$\rightarrow \vec{x}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}-\vec{D}$



* El vector $\vec{x}$ es la resultante de los vectores $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$, y $-\vec{D}$.

* Luego:



$\Rightarrow 3\downarrow\ \uparrow 3\ \Rightarrow x=3-3=0$

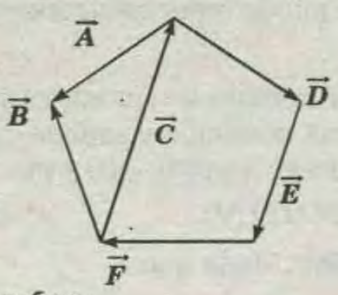
RPTA: "D"

PROBLEMA 29:

La figura muestra **6** vectores: $\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D},\vec{E}$ y $\vec{F}$.

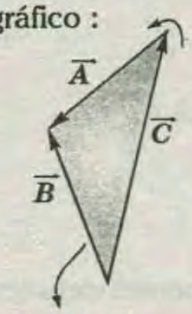
Halle $\vec{S}=\vec{A}-\vec{B}+2\vec{C}+\vec{D}+\vec{E}+\vec{F}$.

A) $2\vec{A}$
B) $2\vec{B}$
C) $\vec{C}+\vec{D}$
D) $\vec{E}$
E) $\vec{O}$

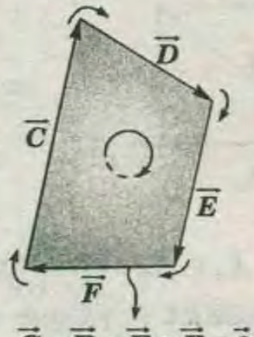


RESOLUCIÓN:

* Del gráfico :



$\vec{B}=\vec{A}+\vec{C}$



$\vec{C}=\vec{D}+\vec{E}+\vec{F}=\vec{0}$

* Luego :

$$\left.\begin{array}{r}\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}\ .....(I)\\ \vec{C}+\vec{D}+\vec{E}+\vec{F}=\vec{0}\ .....(II)\end{array}\right\}\ \text{Sumando } (+)\downarrow$$

$$\vec{A}+2\vec{C}+\vec{D}+\vec{E}+\vec{F}=\vec{B}$$

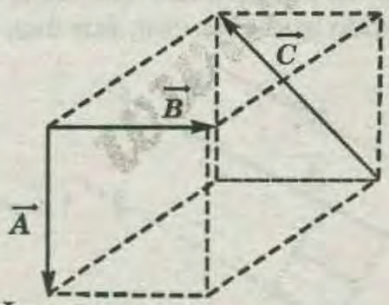
$$\underbrace{\vec{A}-\vec{B}+2\vec{C}+\vec{D}+\vec{E}+\vec{F}=\vec{0}}_{\Rightarrow\ \vec{S}=\vec{0}}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 30 :

En el sistema de vectores mostrados determine el vector resultante .

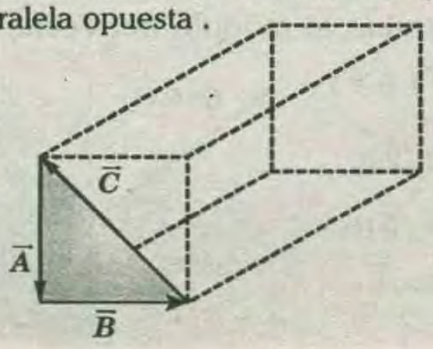
A) $\vec{0}$
B) $\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}$
C) $\vec{A}+\vec{B}-\vec{C}$.



RESOLUCIÓN :

* Nos piden $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

Trasladamos $\vec{B}$ hacia el lado paralelo inferior y ; $\vec{C}$ hacia la cara paralela opuesta .



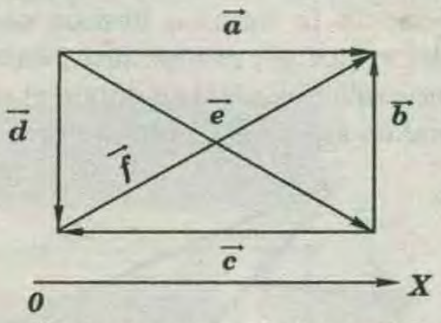
En el triángulo sombreado :

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=\vec{0}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 31:

Dado :



¿cuál de los siguientes enunciados es falso?

A) Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$ tienen la misma dirección .

B) $\vec{f}=\vec{b}-\vec{c}$

C) Todos los vectores tienen componente x de módulo menor o igual al módulo del vector $\vec{a}$

D) $\vec{e}+\vec{f}=\vec{a}-\vec{c}$

E) $\vec{d}+\vec{f}-\vec{c}=0$

RESOLUCIÓN:

A) VERDADERO : $\vec{a}$ y $\vec{c}$ tienen la misma dirección pero sentido contrario .

B) VERDADERO : porque $\vec{c}+\vec{f}=\vec{b}$

C)VERDADERO : todos los vectores tienen componente x de módulo menor o igual al módulo de $\vec{a}$

D) VERDADERO : $\vec{a}-\vec{c}=2\vec{a}$; $\vec{e}+\vec{f}=2\vec{a}$

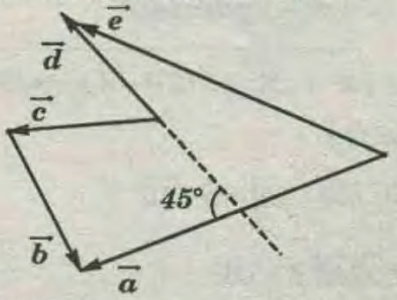
E) FALSO : porque $\vec{d}+\vec{f}+\vec{c}=0$

RPTA : "E"

PROBLEMA 32:

Dado el siguiente conjunto de vectores donde $|\vec{a}|=\sqrt{2}u$ y $|\vec{d}|=2u$, determine el módulo de la resultante de los vectores mostrados .

A) 2 u
B) $\sqrt{7}$
C) $\sqrt{10}$
D) $2\sqrt{10}$



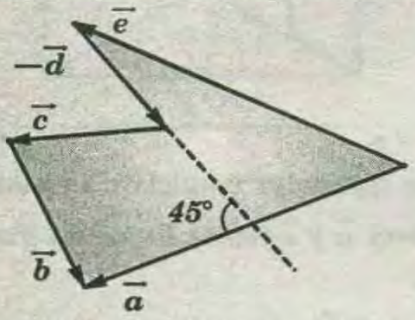
RESOLUCIÓN:

* El vector resultante $(\vec{R})$ se determina como la suma de todos los vectores, así :

$$\vec{R}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}\ .....(I)$$

y nos piden $|\vec{R}|$; ahora debemos buscar alguna relación entre los vectores dados y nos convendría colocar a los vectores $\vec{b}, \vec{c}$ y $\vec{e}$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{d}$, ya que de estos últimos se conoce sus módulos .

* Acomodando la figura , hemos colocado el opuesto del vector $\vec{d}$, porque nos , damos cuenta que se forma una poligonal en donde el vector $\vec{d}$ es la resultante de los otros cuatro vectores .



$$\Rightarrow \vec{a}=\vec{e}+(-\vec{d})+\vec{c}+\vec{b}$$

$$\Rightarrow \vec{a}+\vec{d}=\vec{e}+\vec{c}+\vec{b} \quad \text{.....(II)}$$

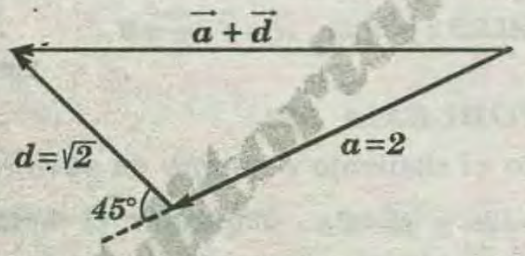
* Reemplazando la expresión *(II)* en *(I)* :

$$\Rightarrow \vec{R}=\vec{a}+\vec{d}+\underbrace{\vec{b}+\vec{c}+\vec{e}}_{\vec{a}+\vec{d}}$$

$$\Rightarrow \vec{R}=2(\vec{a}+\vec{d}) \Rightarrow |\vec{R}|=2|\vec{a}+\vec{d}| \quad \text{.....(III)}$$

* Solo queda determinar el módulo de la resultante de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{d}$. Note que estos vectores forman, entre sí $45°$.

* Trasladando $\vec{d}$, de tal forma que su origen coincida con el final de $\vec{a}$, aplicamos el método del triángulo.



$$|\vec{a}+\vec{d}|=\sqrt{a^2+d^2+2ad\cos 45°}$$

$$\rightarrow |\vec{a}+\vec{d}|=\sqrt{2^2+\sqrt{2}^2+2(2)(\sqrt{2})\cos 45°}$$

$$\rightarrow |\vec{a}+\vec{d}|=\sqrt{10}$$

* Luego en *(III)*: $|\vec{R}|=2\sqrt{10}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 33:

Señale la veracidad *(V)* o falsedad *(F)* de las siguientes proposiciones:

I) La suma vectorial de los componentes de un vector da como resultado dicho vector .

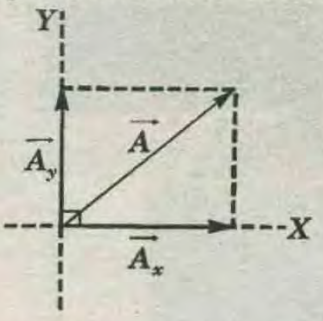
II) Un vector puede tener componentes en cualquier dirección .

III) El vector unitario de un vector necesariamente tiene la misma dirección y sentido que el vector .

A) VVF B) FVF C) VVV D) FVV E) FFF

RESOLUCIÓN:

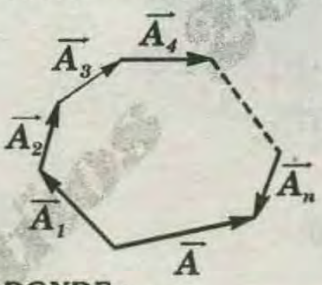
I) VERDADERA . dada que :



$$\Rightarrow \vec{A}=\vec{A}_x+\vec{A}_y$$

DONDE : $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ son componentes del vector $\vec{A}$.

II) VERDADERA : ya que un vector puede tener infinitas componentes y en cualquier dirección .

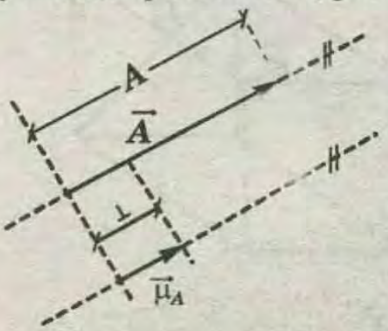


$$\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2+.....+\vec{A}_n$$

DONDE :

$\vec{A}_1, \vec{A}_2, ..., \vec{A}_n$: son componentes del vector $\vec{A}$.

III) VERDADERA : dado que el vector unitario de un vector es aquel vector que tiene la misma dirección y sentido que el vector, por eso, su nombre .



$\vec{\mu}_A$ = *vector unitario del vector A .*

RPTA : "C"

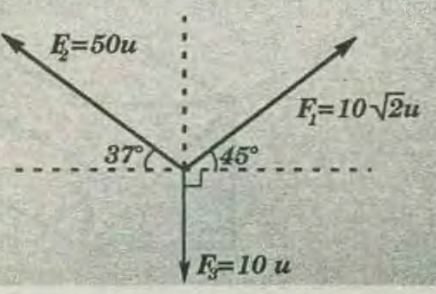
PROBLEMA 34:

Determine el módulo del vector resultante de $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$.

A) $30\sqrt{2}\,u$

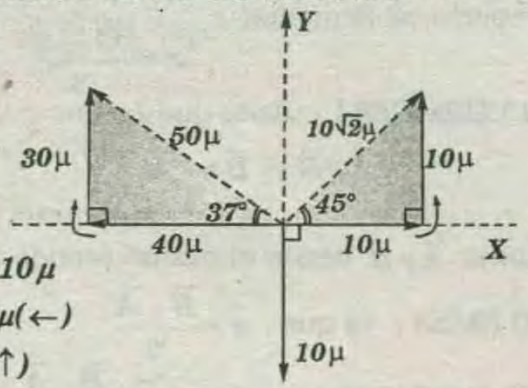
B) $60\sqrt{3}\,u$

C) $20\sqrt{3}\,u$



RESOLUCIÓN :

* Descomponiendo dos de los vectores :

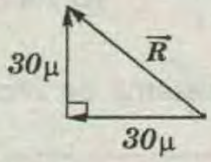


* $R_x = 40\mu - 10\mu$

$\Rightarrow R_x = 30\mu(\leftarrow)$

* $R_y = 30\mu\ (\uparrow)$

* Simplificando:



$\Rightarrow |\vec{R}| = 30\sqrt{2}\mu$

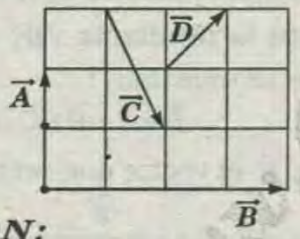
PROBLEMA 35:

Con referencia a los vectores que se muestran en la figura, ¿cuáles de las siguientes proposiciones son correctas?

I) $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}=3\vec{B}/2$ **II)** $3\vec{A}+\vec{D}=\vec{C}$

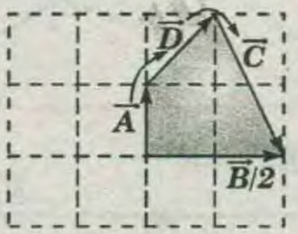
III) $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}-\vec{D}=0$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Todas
E) Ninguna.



RESOLUCIÓN:

I) VERDADERA : ya que :

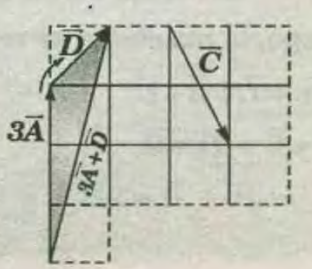


* De la figura :

$$\frac{\vec{B}}{2}=\vec{A}+\vec{D}+\vec{C} \Rightarrow \frac{\vec{B}}{2}+\vec{B}=\vec{A}+\vec{D}+\vec{C}+\vec{B}$$

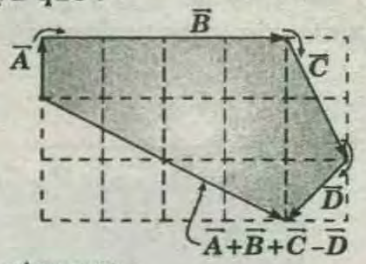
$$\Rightarrow \vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}=\frac{3}{2}\vec{B}$$

II) FALSA : dado que .



* Se puede notar que : $3\vec{A}+\vec{D}\neq\vec{C}$

III) FALSA , ya que :



* Se puede notar que :

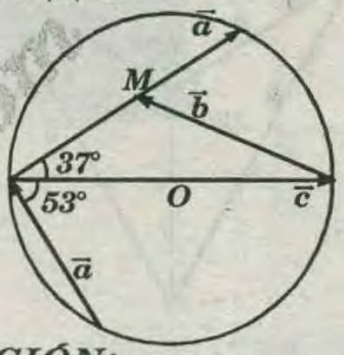
$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}-\vec{D}\neq 0$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 36:

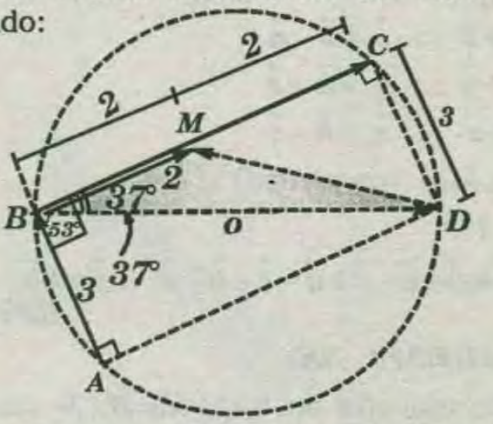
Determine el módulo del vector resultante del sistema mostrado si **"M"**: punto medio , **"O"**: centro de la circunferencia y $|\vec{a}|=4$

A) $\sqrt{5}$
B) $\sqrt{6}$
C) $2\sqrt{5}$
D) $3\sqrt{5}$
E) $3\sqrt{6}$



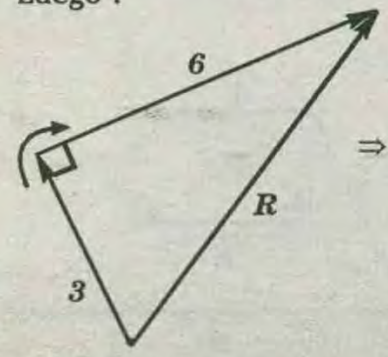
RESOLUCIÓN:

* Dandole forma al sistema de vectores , y reduciendo:



* Por simple inspección $\square ABCD$ es un rectángulo .

* Luego :



$\Rightarrow R = 3\sqrt{1^2+2^2} = 3\sqrt{5}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 37:

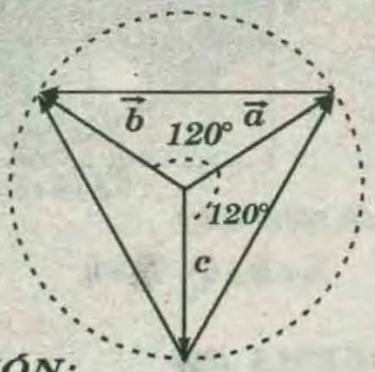
Determine la suma del conjunto de vectores mostrados en términos de $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$, si estos últimos nacen en el centro de la circunferencia .

A) $2\vec{b}-2\vec{c}$

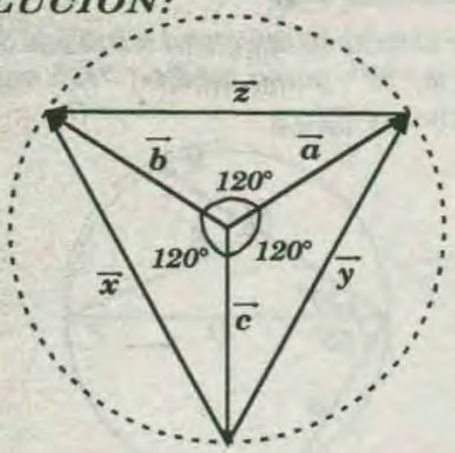
B) $2\vec{a}-2\vec{b}$

C) $2\vec{c}-2\vec{a}$

D) $2\vec{c}-2\vec{b}$



RESOLUCIÓN:



Sea :

$$\vec{S}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}.....(I)$$

De la figura , Aplicando la regla del Δ vectorial :

* $\vec{b}=\vec{a}+\vec{z} \Rightarrow \vec{z}=\vec{b}-\vec{a}$
* $\vec{a}=\vec{c}+\vec{y} \Rightarrow \vec{y}=\vec{a}-\vec{c}$
* $\vec{b}=\vec{c}+\vec{x} \Rightarrow \vec{x}=\vec{b}-\vec{c}$
* $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ (propiedad)
* En *(I)* :

$$\vec{S}=\vec{0}+\vec{b}-\vec{c}+\vec{a}-\vec{c}+\vec{b}-\vec{a} \rightarrow \vec{S}=2\vec{b}-2\vec{c}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 38:

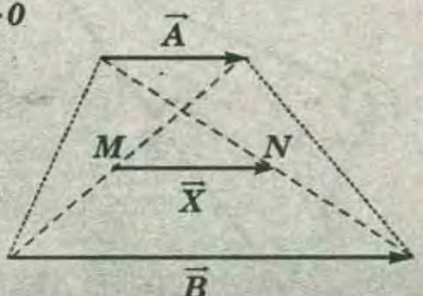
La figura muestra un trapecio *M, N* son puntos medios de las diagonales; respectivamente , identifique la veracidad *(V)* o falsedad *(F)* de las proposiciones:

I) $\vec{B}=\lambda\vec{A}$, donde $\lambda>0$

II) $\vec{x}=(\vec{A}+\vec{B})/2$

III) $\vec{x}=(\vec{B}-\vec{A})/2$

A) FFF
B) FFV
C) VFV
D) FVF
E) VVF



RESOLUCIÓN :

* Por propiedad de geométrica elemental , en un trapecio, se tiene que :

$$|\vec{x}|=\frac{|\vec{B}|-|\vec{A}|}{2}$$

I) VERDADERA : dado que como

$$\vec{A}//\vec{B} \Rightarrow \vec{B}=\lambda\vec{A}$$

λ : número real

Como $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen el mismo sentido : $\Rightarrow \lambda>0$

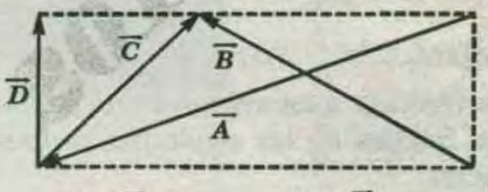
II) FALSA : ya que . $\vec{x}=\frac{\vec{B}-\vec{A}}{2}$

III) VERDADERA : ya que : $\vec{x}=\frac{\vec{B}-\vec{A}}{2}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 39:

Determine la resultante del sistema de vectores mostrado :



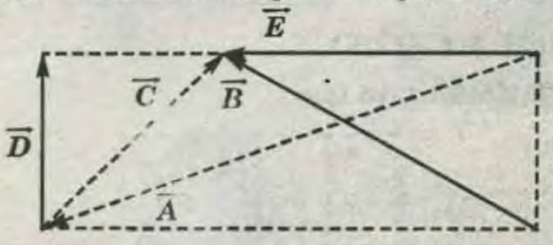
A) $3\vec{C}$ B) $2\vec{A}$ C) $2\vec{B}$

RESOLUCIÓN :

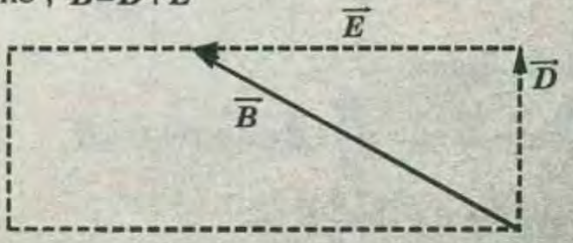
* Para determinar el módulo de la resultante , primero expresaremos la resultante $(\vec{R})$ en función de los vectores que se muestran :

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$$

* Ahora, sea $\vec{E}$ el vector que reemplaza a $\vec{A}+\vec{C}$



* Asimismo , $\vec{B}=\vec{D}+\vec{E}$



* Luego, la resultante se reduce a lo siguiente :

$$\vec{R}=\underbrace{\vec{A}+\vec{C}}+\vec{B}+\vec{D}$$

$$\rightarrow \vec{R}=\underbrace{\vec{E}+\vec{D}}+\vec{B}$$

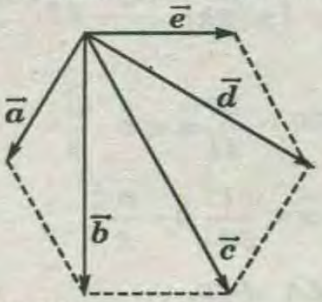
$$\rightarrow \vec{R}=\vec{B}+\vec{B}=2\vec{B}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 40:

Se muestra un sistema de vectores dispuestos sobre un hexágono regular .

Determine la resultante del sistema de vectores mostrado .



A) $3\vec{a}$

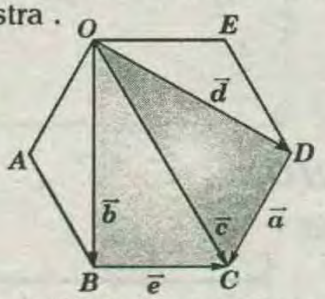
B) $2\vec{d}$

C) $3\vec{c}$

D) $5\vec{b}$

RESOLUCIÓN:

* Para obtener $\vec{R}$ podemos aprovechar las propiedades de un hexágono regular, por ejemplo, sus lados opuestos son paralelos y de igual longitud, con ello podemos trasladar a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{e}$, tal como se muestra .



* Ahora en los triángulos sombreados se puede deducir que .

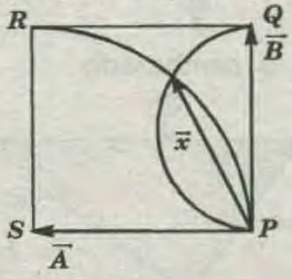
$$\left.\begin{array}{l} el\,\Delta OBC\ \ \vec{b}+\vec{e}=\vec{c} \\ el\,\Delta ODC\ \ \vec{d}+\vec{a}=\vec{c} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{R}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$$

$$\rightarrow \vec{R}=\underbrace{\vec{c}}_{\vec{b}+\vec{e}}+\underbrace{\vec{c}}_{\vec{b}+\vec{a}}+\vec{c}=3\vec{c}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 41:

Determinar la expresión vectorial para $\vec{x}$ en función de los vectoriales $\vec{A}$ y $\vec{B}$, sabiendo que ***PQRS*** es un cuadrado .



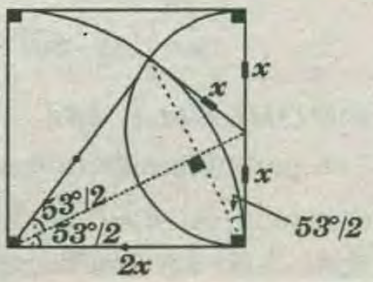
A) $\vec{x}=(3/5)(\vec{A}+3\vec{B})$

B) $\vec{x}=(2/5)(\vec{A}+2\vec{B})$

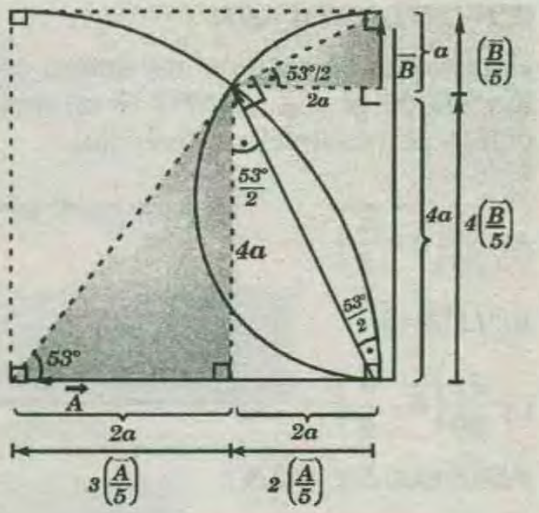
C) $\vec{x}=(1/5)(\vec{A}+\vec{B})$

RESOLUCIÓN:

* Se deduce que :



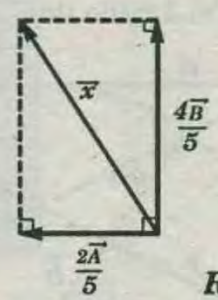
* Luego :



* De la figura :

$$\vec{x}=\frac{2\vec{A}}{5}+\frac{4\vec{B}}{5}$$

$$\Rightarrow \vec{x}=\frac{2}{5}(\vec{A}+2\vec{B})$$



RPTA : "B"

PROBLEMA 42:

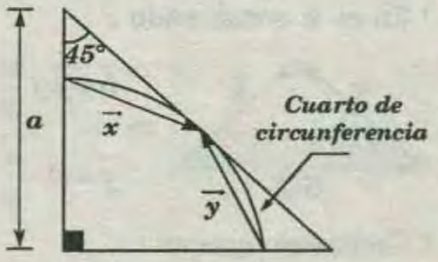
Hallar el módulo de $\vec{x}+\vec{y}$

A) $(2\sqrt{2}-1)a$

B) $(2\sqrt{2}+1)a$

C) $(\sqrt{2}+1)a$

D) $(\sqrt{2}-1)a$



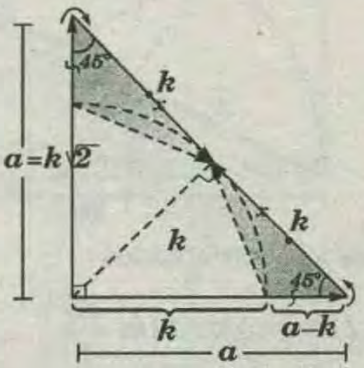
RESOLUCIÓN:

Descomponiendo los vectores convenientemente .

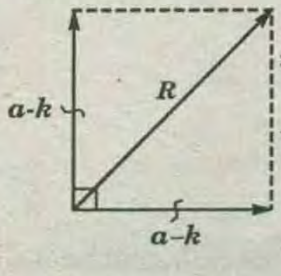
* Como:

$$a=k\sqrt{2}$$

$$\rightarrow k=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$



* Recuerdo :



$$\Rightarrow R=(a-k)\sqrt{2}$$

$$\rightarrow R=(a-a\frac{\sqrt{2}}{2})\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow R=(\sqrt{2}-1)a$$

RPTA : "D"

Lobo GRATIS.com

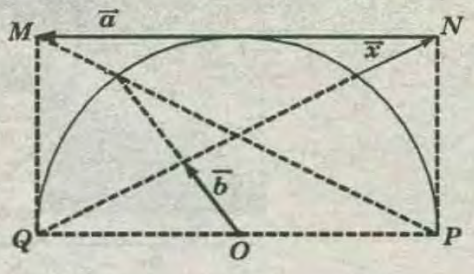
PROBLEMA 43:

Del sistema de vectores mostrado, determine $\vec{x}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$. *(MNPQ es un rectángulo y O es centro de la semicircunferencia).*

A) $\frac{11}{20}\left(\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}\right)$

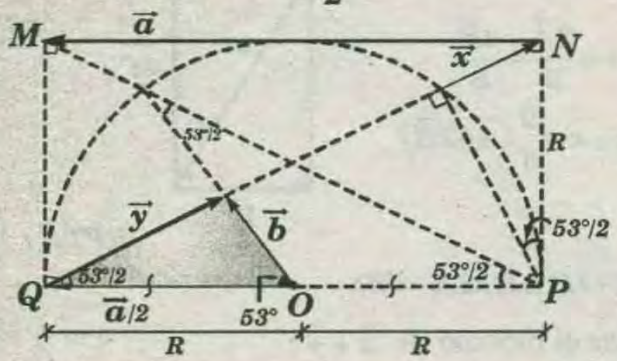
B) $11(\vec{b}-\vec{a})$

C) $\frac{11}{20}\left(\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}\right)$

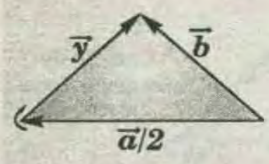


RESOLUCIÓN:

* Utilizando el ángulo de $\frac{53°}{2}$, se obtendrá :

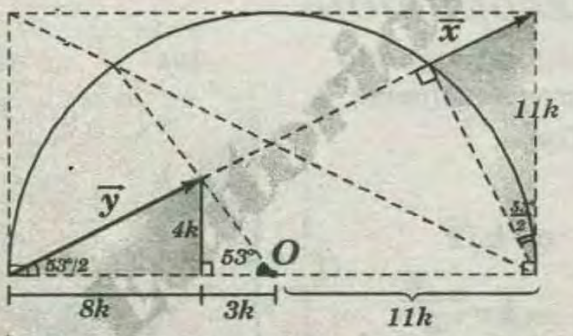


* En el Δ sombreado :



$$\vec{b}=\vec{y}+\frac{\vec{a}}{2} \Rightarrow \vec{y}=\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2} \quad .....(I)$$

* Geométricamente :



* En los △s sombreados :

- $|\vec{x}|=11k\,sen53°=11k\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$$|\vec{x}|=\frac{11}{5}\sqrt{5}k$$

- $4k=|\vec{y}|\,sen53°$

$$4k=|\vec{y}|\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow |\vec{y}|=4\sqrt{5}k$$

* Como $\vec{x}$ e $\vec{y}$ tienen la misma dirección; entonces .

$$\vec{\mu}_x=\vec{\mu}_y \rightarrow \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}=\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}$$

$$\rightarrow \frac{\vec{x}}{\left(\frac{11}{5}\sqrt{5}F\right)}=\frac{\vec{y}}{(u\sqrt{5}k)} \rightarrow \vec{y}=\frac{20}{11}\vec{x} \quad .....(II)$$

* Reemplazando : $\frac{20}{11}\vec{x}=\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}$

$$\Rightarrow \vec{x}=\frac{11}{20}\left(\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}\right)$$

RPTA : "C"

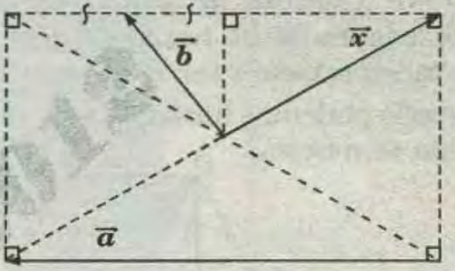
PROBLEMA 44:

Determine $\vec{x}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

A) $\frac{1}{4}(3\vec{a}-4\vec{b})$

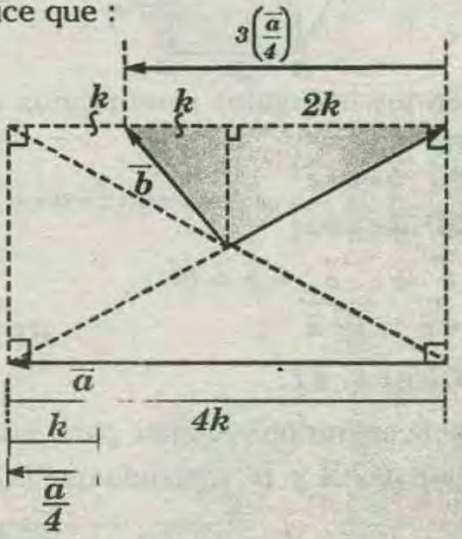
B) $\frac{1}{4}(3\vec{b}-4\vec{a})$

C) $\frac{1}{4}(4\vec{b}-3\vec{a})$

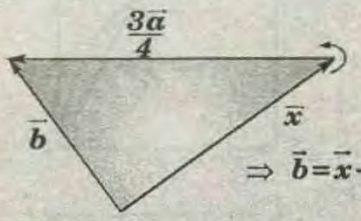


RESOLUCIÓN:

* Se deduce que :



* En el Δ sombreado .



$$\Rightarrow \vec{b}=\vec{x}+\frac{3\vec{a}}{4}$$

$$\vec{x}=\frac{1}{4}(4\vec{b}-3\vec{a})$$

RPTA:"C"

PROBLEMA 45:

Una partícula experimenta tres desplazamientos consecutivos: $d_1=(1{,}5\hat{i}+3\hat{j})\ cm$, $d_2=(2{,}1\hat{i}-0{,}6\hat{j})cm$, $d_3=(-1{,}3\hat{i}+2{,}5\hat{j})\ cm$. Encontrar las componentes del

desplazamiento resultante y su magnitud.

RESOLUCIÓN:

$\vec{R} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3$

$\rightarrow R = (1;5+2;1-1;3)\hat{i} + (3,0-0,6+2,5)\hat{j}$

$\rightarrow R = (2\,;\, 3\hat{i} + 4\,;\, 9\hat{j})\ cm.$

Esto indica que las componentes en los semiejes "*x*" positivo e "*y*" positivo del desplazamiento resultante son **2,5** cm y **4,9** cm respectivamente. Además, su magnitud $|\vec{R}|$ es:

$$|\vec{R}| = \sqrt{(2;3)^2 + (4;9)^2} = 5;41$$

Luego, la magnitud del desplazamiento resultante es **5,41** cm.

PROBLEMA 46:

Si $\vec{a} = 6\hat{i} - 2$ y $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j}$

Calcular:

A) $(2\vec{a} - 3\vec{b}).\vec{a}$

B) El ángulo que forma $\vec{a}$ y $\vec{a} + \vec{b}$

RESOLUCIÓN:

A) $(2\vec{a} - 3\vec{b}).\vec{a} = (12\hat{i} - 4\hat{j} - 9\hat{j}).(6\hat{i} - 2\hat{j})$

$= (9;-13).(6\,;-2)$

$= 54 + 26 = 80$

B) Sea θ el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{a} + \vec{b}$.

* Como: $a + b = 6\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{i} + 3\hat{j} = 7\hat{i} + \hat{j} = (7;1)$

* Luego: $\cos\theta = \dfrac{(6;-2).(7;1)}{|(6;-2)(7;1)|}$

$\rightarrow \cos\theta = \dfrac{.42 - 2}{\sqrt{36+4}\ \sqrt{49+1}}$

$\rightarrow \cos\theta = \dfrac{40}{(2\sqrt{10})(5\sqrt{2})} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

* Por tanto $\theta = arc\cos\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) = 26,57°$

* Es decir, el ángulo que forma $\vec{a}$ y $\vec{a} + \vec{b}$ es aproximadamente de **26,57°**.

PROBLEMA 47:

Una fuerza constante tiene magnitud y dirección expresadas por $\vec{a} = 7\hat{i} + 4\hat{j}$. Calcular el trabajo efectuado cuando el punto de aplicación de a se mueve a lo largo del eje ***x***, desde ***P (–5;0)*** hasta ***Q (3;0)***.

RESOLUCIÓN:

* La fuerza ***F*** está dada por $\vec{a} = 7\vec{i} + 4\vec{j} = (7;4)N.$

* El desplazamiento es:

$$\vec{D} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (3;0) - (-5;0) = (8;0)$$

* Como sabemos, el trabajo ***W*** está dado por $W = \vec{F}\,.\,\vec{D}$

* Luego:

$$W = (7;4)\,.\,(8;0) = 56 \text{ joules.}$$

Este resultado se puede interpretar teniendo en cuenta en qué unidades está dada la fuerza. Por ejemplo, la unidad de longitud es el metro y la magnitud de la fuerza se expresa en newtons, entonces el trabajo efectuado es **56** Newton - metros o **56** joules.

PROBLEMA 48:

Determinar el valor de ***k*** si los vectores $\vec{a} = 3\hat{i} - k\hat{j}$, $\vec{b} = 5\hat{i} + 6\hat{j}$ son perpendiculares.

RESOLUCIÓN:

* Se sabe que si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, entonces $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$. Luego, $(3;-k).(5;6) = 0$

$15 - 6k = 0$, entonces $k = 2;5$

PROBLEMA 49:

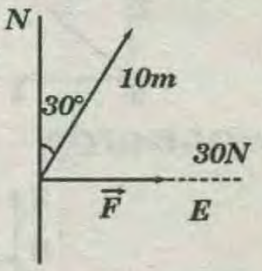
Encontrar el trabajo realizado por una fuerza constante $\vec{F}$ de **30 N** si está en dirección Este y mueve un objeto diez metros en dirección **N 30° E.**

RESOLUCIÓN:

$W = \vec{F}.\,\vec{D} = |\vec{F}|\,|\vec{D}|\cos 60°$

$\rightarrow W = (30N)(10m)\cos 60°$

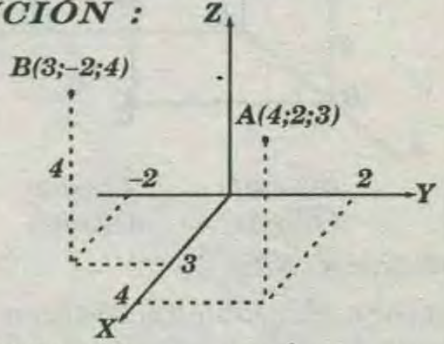
$\rightarrow W = 150Nm$



PROBLEMA 50:

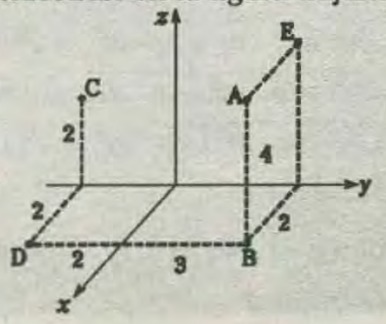
Ubicar los puntos ***A(4;2;3)*** y ***B(3;–2;4)***.

RESOLUCIÓN :



PROBLEMA 51:

Determinar las coordenadas de los puntos ***A,B,C,D*** y ***E*** que se muestran en la figura adjunta.

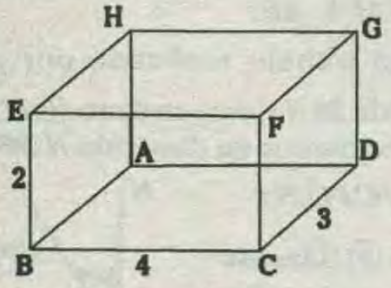


RESOLUCIÓN:

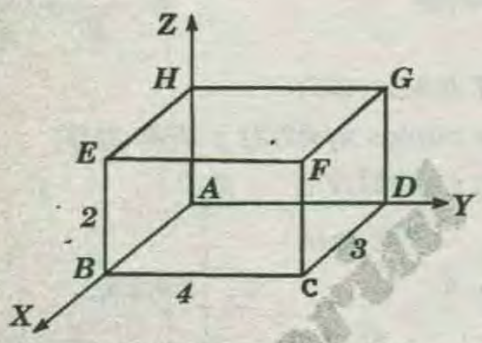
Las coordenadas de A son $(2;3;4)$ y B es la proyección de A sobre el plano XY. Así, las coordenadas de B son $(2;3;0)$. El punto C se encuentra en el plano YZ y sus coordenadas son $(0;-2;2)$. El punto D se encuentra en el plano XY y sus coordenadas son $(2;-2;0)$. Finalmente, el punto E es la proyección de A sobre el plano YZ y sus coordenadas son $(0;3;4)$.

PROBLEMA 52:

En el paralelepípedo de la figura adjunta, ubicar el origen de un sistema de coordenadas en el vértice A de manera que el segmento AB esté sobre el semieje positivo de x, el segmento AD sobre el semieje positivo de y, y el segmento AH sobre el semieje positivo de z. A partir de ahí, obtener las coordenadas de los demás vértices.



RESOLUCIÓN:



$A(0;0;0)$ $B(3;0;0)$ $C(3;4;0)$ $D(0;4;0)$
$E(3;0;2)$ $F(3;4;2)$ $G(0;4;2)$ $H(0;0;2)$

PROBLEMA 53:

Considerando el problema anterior, hallar las distancias de A a F, de B a G y de H a B.

RESOLUCIÓN:

$$d(A;F) = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{29}$$

$$d(B;G) = \sqrt{(0-3)^2 + (4-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{29}$$

$$d(H;B) = \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$d(H;B) = \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{13}$$

PROBLEMA 54 :

Hallar el vector $\overrightarrow{AB}$ si $A=(3;-2;1)$ y $B=(1;-5;3)$

RESOLUCIÓN :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1-3;-5-(-2);3-1) = (-2;-3;2)$$

PROBLEMA 55:

Si $A=(3;6;2)$ y $B(0;3;-7)$, hallar el vector $\overrightarrow{BA}$ y el vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{BA}$.

RESOLUCIÓN:

$$\overrightarrow{AB} = (3;3;9)$$

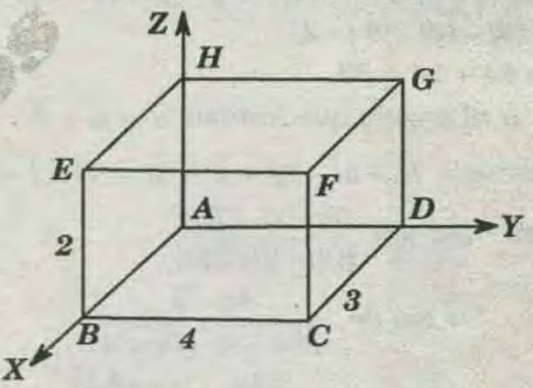
$$\rightarrow |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 9^2} = 99 = 3\sqrt{11}$$

* Luego :

$$\vec{u}_{\overrightarrow{BA}} = \frac{(3;3;9)}{3\sqrt{11}} = \left(\frac{1}{\sqrt{11}};\frac{1}{\sqrt{11}};\frac{3}{\sqrt{11}}\right)$$

PROBLEMA 56:

Considerar el paralelepípedo de la figura adjunta. Ubicar el origen de un sistema de coordenadas en el vértice A, de manera que el segmento AB esté sobre el semieje positivo de las "x", el segmento AD sobre el semieje positivo de las "y" y el segmento AH sobre el semieje positivo de las z. A partir de ahí, obtener las coordenadas de los demás vértices y hallar los vectores $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}$, y $\overrightarrow{HG}$.



RESOLUCIÓN:

$A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $C(3;4;0)$, $D(0;4;0)$, $E(3;0;2)$, $F(3;4;2)$, $G(0;4;2)$ $H(0;0;2)$

* Luego :

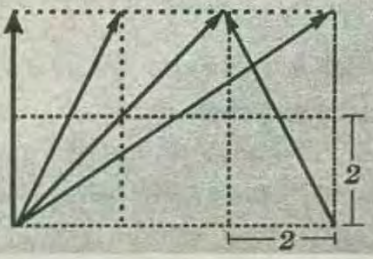
$\overrightarrow{AF} = (3;4;2)$, $\overrightarrow{BG} = (-3;4;2)$ y $\overrightarrow{ED} = (-3;4;-2)$

* Además: $\overrightarrow{EF} = (0;4;0)$ y $\overrightarrow{HG} = (0;4;0)$

Los vectores $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{HG}$ son iguales. Esto significa que los desplazamientos de E a F y de H a G son iguales.

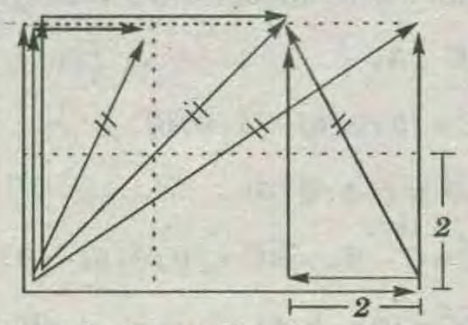
PROBLEMA 57:

Determinar el módulo de la resultante de los vectores mostrados .



RESOLUCIÓN:

1°) Tomamos direcciones que formen *90°* y aplicamos descomposición poligonal :

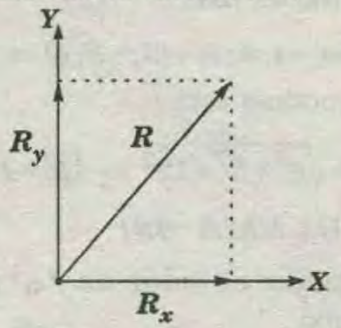


2°) Hallamos resultados en *X* e *Y* :

En *X* : $R_x=2+4+6-2 \rightarrow R_x=10$

En *Y* : $R_y=4+4+4+4+4 \rightarrow R_x=10$

3°) Con R_x y R_y calculamos la resultante :

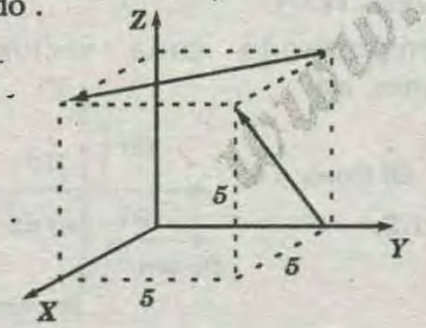


$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}$

$R=\sqrt{10^2+20^2} \Rightarrow R=10\sqrt{5}\ cm.$

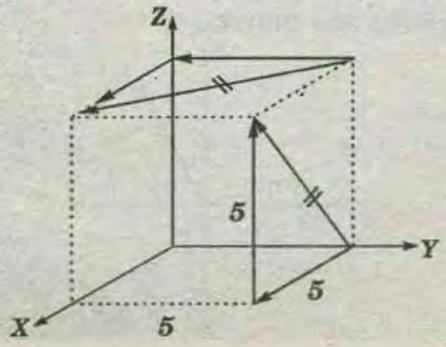
PROBLEMA 58:

Determinar el módulo de la resultante del conjunto de vectores espaciales mostrados , si el cubo tiene *5 cms.* de lado .



RESOLUCIÓN :

1°) Descomponemos cada vector en componentes ubicados en los ejes o en direcciones paralelas a cada eje .



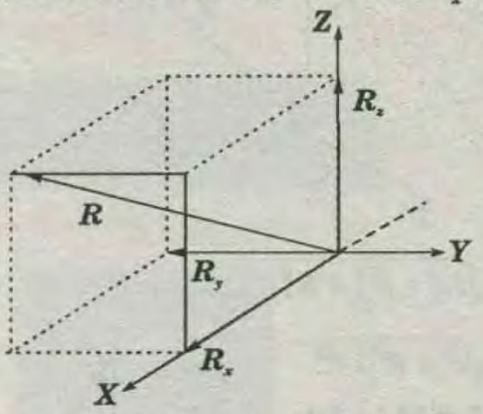
2°) Ahora calculamos R_x; R_y y R_z.

En *X* : $R_x=5+5=10$ semi eje positivo *X*

En *Y* : $R_y=-5$ semi eje negativo *Y*

En *Z* : $R_z=5$ semieje positivo *Z*

3°) Calculamos la resultante total con R_x, R_y y R_z.



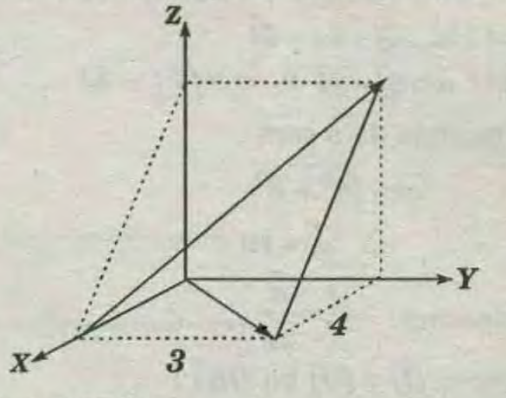
* Luego *R* es la resultante cuyo módulo es :

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}$$

$$\Rightarrow R=\sqrt{10^2+5^2+5^2} \Rightarrow R=5\sqrt{6}\ cms.$$

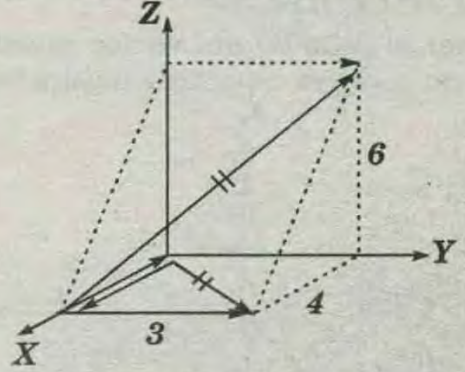
PROBLEMA 59:

Determinar el módulo de la resultante para el conjunto de vectores espaciales mostrados .



RESOLUCIÓN:

1°) Descomposición poligonal de vectores en función de los ejes , denominados ángulos α



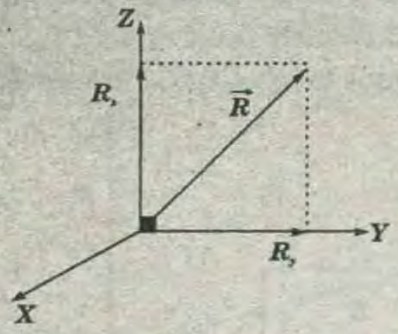
2°) Ahora calculamos R_x, R_y y R_z.

En *X* : $R_x=4-4=0$

En *Y* : $R_y=3+3=6$

En Z : $R_z=6$

3°) Calculamos la resultante total con R_x, R_y y R_z.



$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}$$

$$\Rightarrow R=\sqrt{0^2+6^2+6^2} \quad \Rightarrow R=6\sqrt{2}$$

PROBLEMA 60:

Si $\vec{a}=3\vec{b}+2\vec{c}$; Siendo $\vec{b}=4\hat{i}-2\hat{j}$ y $\vec{c}=-3\hat{i}-\hat{j}$. Determinar un vector unitario en la dirección de $\vec{a}$.

RESOLUCIÓN:

1°) Por dato se tiene que :

$$\vec{a}=3\vec{b}+2\vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{a}=3(4\hat{i}-2\hat{j})+2(-3\hat{i}-\hat{j})$$

$$\vec{a}=12\hat{i}-6\hat{j}-6\hat{i}-2\hat{i}$$

*Luego : $\vec{a}=6\hat{j}-8\hat{i}$ ó $\vec{a}=(6\,;-8)$ .....(I)

2°) El módulo de a será :

$$|\vec{a}|=\sqrt{6^2+8^2}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|=10 \text{ ..... (II)}$$

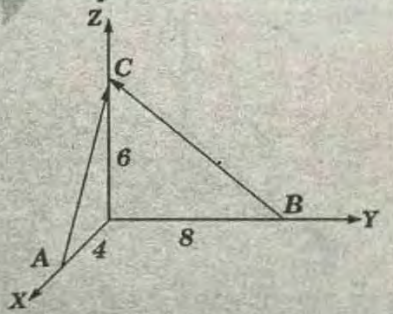
Sabemos que : $\vec{u_a}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ .....(III)

* Entonces *(I)* y *(II)* en *(III)* :

$$\vec{u}_a=\frac{(6;-8)}{10} \quad \vec{u}_a=\left(\frac{6}{10};\frac{-8}{10}\right) \quad \Rightarrow \vec{u}_a=\left(\frac{3}{5};\frac{-4}{5}\right)$$

PROBLEMA 61:

Determinar el módulo del vector resultante del conjunto de vectores espaciales mostrados .



RESOLUCIÓN:

1°) Determinamos las coordenadas de los puntos A, B y C .

$A=(4;0;0)$, $B=(0;8;0)$, $C=(0;0;6)$

2°) Ahora determinamos los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AC}=C-A$$

$$\overrightarrow{AC}=(0;0;6)-(4;0;6)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC}=(-4;0;6) \text{ ..... (I)}$$

$$\overrightarrow{BC}=C-B \Rightarrow \overrightarrow{BC}=(0;0;6)-(0;8;0)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC}=(0;-8;6) \text{ ..... (II)}$$

3°) La resultante sería :

$$\vec{R}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC} \text{ ..... (III)}$$

* *(I)* y *(II)* en *(III)* .

$$\vec{R}=(-4;0;6)+(0;-8;6) \Rightarrow \vec{R}=(-4;-8;12)$$

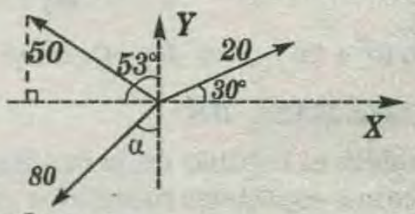
* y su módulo será :

$$|\vec{R}|=\sqrt{4^2+8^2+12^2} \Rightarrow |\vec{R}|=4\sqrt{14}$$

PROBLEMA 62:

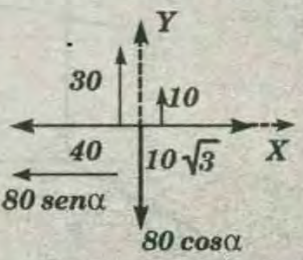
Determinar el valor de "α" si la resultante es horizontal .

A) 60°
B) 30°
C) 37°
D) 53°
E) 45°



RESOLUCIÓN:

* Descomponiendo cada vector en sus componentes, así :



* $R_y=0$

$$30+10-80\,Cos\alpha=0$$

$$\Rightarrow Cos\alpha=1/2$$

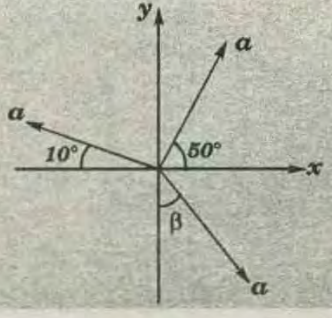
$$\rightarrow \alpha=60°$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 63:

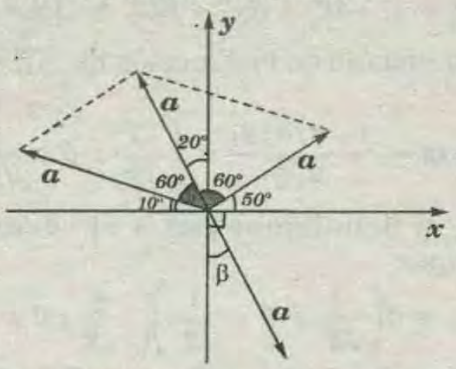
Hallar el ángulo β para que el módulo de la suma de los vectores sea mínimo .

A) 10°
B) 20°
C) 15°
D) 15°
E) 30°



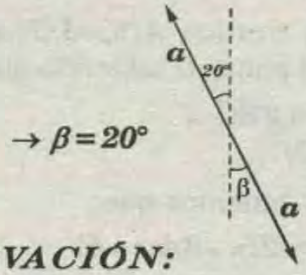
RESOLUCIÓN :

* Reduciendo el sistema de vectores :



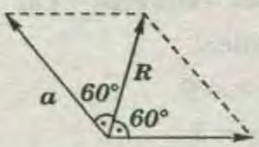
* Luego :

Para que la resultante sea mínima entonces los dos vectores deben ser ser paralelos y opuestos .



$\rightarrow \beta = 20°$

OBSERVACIÓN:



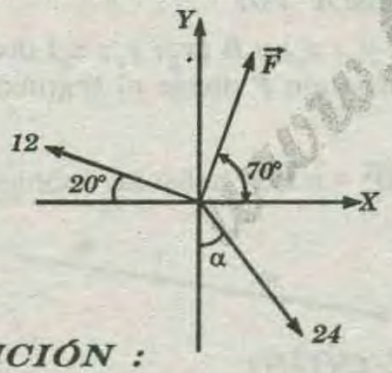
$\Rightarrow R = a$

RPTA : "B"

PROBLEMA 64:

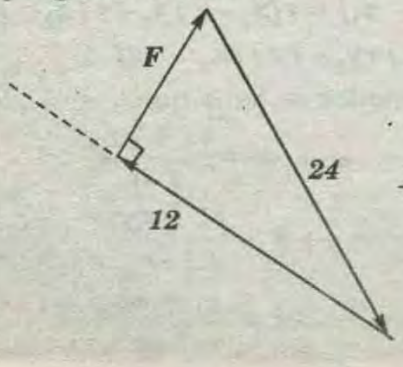
Si la resultante de los **3** vectores mostrados es nula, hallar F .

A) $10\sqrt{3}$
B) $12\sqrt{3}$
C) $14\sqrt{3}$
D) $16\sqrt{3}$
E) $2\sqrt{3}$



RESOLUCIÓN :

* Para que la resultante sea nula , entonces los vectores deben estar en forma consecutiva formando un polígono cerrado .



$\rightarrow F = 12\sqrt{3}$

RPTA: "C"

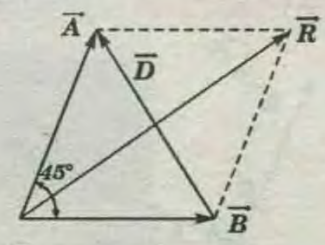
PROBLEMA 65 :

Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que forman entre sí **45°**, donde $A = \sqrt{2}u$ y el módulo del vector diferente tiene su menor valor , determinar el módulo del vector resultante entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

A) $\sqrt{3}$ **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{7}$ **D)** $\sqrt{5}$

RESOLUCIÓN:

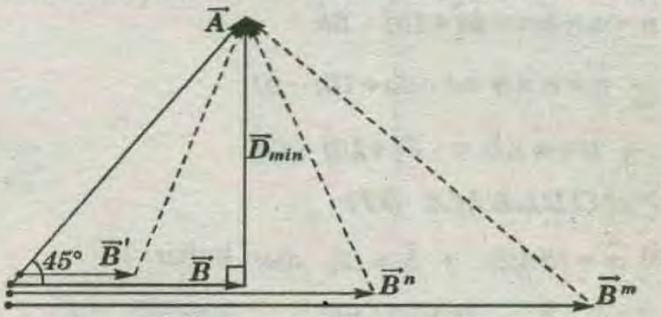
* Graficando los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, también los vectores suma $(\vec{R})$ y diferencia $(\vec{D})$ se tiene el gráfico adjunto .



* Donde : $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$

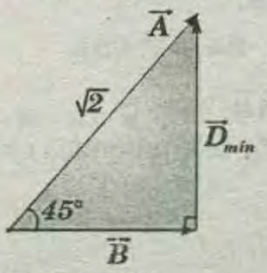
$\rightarrow R = \sqrt{\sqrt{2}^2 + B^2 + 2(\sqrt{2})AB\cos 45°}$ .....(I)

* Para hallar R debemos conocer B, para esto utilizamos la condición de que el vector diferencia $\vec{D}$ entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ toma su menor valor , o sea es mínimo. Examinamos esta condición gráficamente:



* Como se conoce el módulo del vector $\vec{B}$ encontramos varias posibilidades para representar el vector diferente ya que este parte del extremo $\vec{B}$ y se dirige hacia el extremo de $\vec{A}$. Pero , de todos estos vectores, el que presenta menor longitud (mínimo módulo) es aquel que es perpendicular a la línea que contiene a $\vec{B}$.

Extrayendo el triángulo que contiene a $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{D}_{mín.}$ Como el $\triangle$ es notable **(45°;45°)** tenemos que $B = 1$.



* Reemplazando en **(I)** :

$$R=\sqrt{\sqrt{2}^2+1^2+2(\sqrt{2})(1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

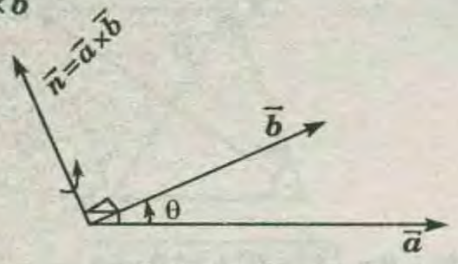
$\rightarrow R=\sqrt{5}$ **RPTA : "D"**

PROBLEMA 66:

Encontrar un vector normal al plano determinado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Si $\vec{a}=(1;2;3)$ y $\vec{b}=(6;7;8)$.

RESOLUCIÓN:

1°) Un vector normal al plano determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sería $n=\vec{a}\times\vec{b}$



* Luego : $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&2&3\\6&7&8\end{vmatrix}$

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}2&3\\7&8\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix}1&3\\6&8\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}1&2\\6&7\end{vmatrix}\hat{k}$$

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=-5\hat{i}+10\hat{j}-5\hat{k}$$

$$\rightarrow \vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=(-5;+10;-5)$$

$$\rightarrow \vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=-5\hat{i}+10\hat{j}-5\hat{k}$$

PROBLEMA 67:

Si $\vec{a}=(3;5;8)$ y $\vec{b}=(2;-6;4)$, hallar:

I) $\vec{a}+\vec{b}$ *II)* $3\vec{a}+2\vec{b}$ *III)* $2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

RESOLUCIÓN:

I) $\vec{a}+\vec{b}=(3+2;5-6;8+4)=(5;-1;12)$

II) $3\vec{a}+2\vec{b}=3(3;5;8)+2(2;-6;4)$

$=(9;15;24)+(4;-2;8)=(13;3;32)$

III) $2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}=2(3;5;8)-\frac{1}{2}(2;-6;4)$

$=(6;10;16)-(1;-3;2)=(5;13;14)$

PROBLEMA 68:

Sean $A=(1;4;-3)$ y $B=(-2;4;0)$.

I) Hallar el vector $\overrightarrow{AB}$.

II) Hallar un vector de seis unidades en la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$.

RESOLUCIÓN:

I) $\overrightarrow{AB}=(-3;0;3)$

II) El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-3)^2+(0)^2+(3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

* El vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{AB}$ está dado por:

$$\vec{u}_{\overrightarrow{AB}}=\frac{(-3;0;3)}{3\sqrt{2}}=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

* Luego, si denotamos por a el vector pedido tenemos que:

$$\vec{a}=6\vec{u}_{\overrightarrow{AB}}=6\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-6}{\sqrt{2}};0;\frac{6}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\rightarrow \vec{a}=(-3\sqrt{2};0;3\sqrt{2})$$

PROBLEMA 69:

Considerando los puntos $A(6;-3;3), B(3;0;6)$ y $C=(x;y;z)$, hallar el punto C sabiendo que:

$$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$$

RESOLUCIÓN:

* Como $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$ tenemos que:

$$(x-6;y+3;z-3)=2(x-3;y;z-6)$$

$$(x-6;y+3;z-3)=(2x-6;2y;2z-12)$$

* Igualando componentes:

$x-6=2x-6 \longrightarrow x=0$

$y+3=2y \longrightarrow y=3$

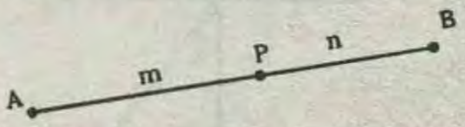
$z-3=2z-12 \longrightarrow z=9$

* Así, $C=(0;3;9)$

PROBLEMA 70:

Sean $A(x_1;y_1;z_1)$ y $B(x_2;y_2;z_2)$ dos puntos. Se dice que un punto P divide el segmento AB en la razón.

$r=\frac{m}{n}$. Si $\overrightarrow{AP}=r\overrightarrow{PB}$, hallar las coordenadas de P.



RESOLUCIÓN:

* Suponiendo que $P=(x;y;z)$, como $\overrightarrow{AP}=r\overrightarrow{PB}$ se tiene que:

$$(x-x_1;y-y_1;z-z_1)=r(x_2-x;y_2-y;z_2-rz)$$

$$=(rx_2-rx;ry_2-ry;rz_2-rz)$$

* Igualando coordenadas se tiene que:

$$x-x_1=rx_2-rx \longrightarrow x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$$

$$y-y_2=ry_2-ry \longrightarrow y=\frac{y1+ry_2}{1+r}$$

$$z-z_1=rz_2-rz \longrightarrow z=\frac{z_1+rz_2}{1+r}$$

* Por lo tanto :

$$P=\left(\frac{x_1+rx_2}{1+r};\frac{y1+ry_2}{1+r};\frac{z_1+rz_2}{1+r}\right)$$

PROBLEMA 71:

Sean: $\vec{a}=(5;7;1)$, $\vec{b}=(8;6;5;)$ y $\vec{c}=(-1;4;2)$.
Hallar el vector x que satisface la ecuación:

$$3\vec{x}+6\vec{a}-5\vec{c}=8\vec{b}$$

RESOLUCIÓN:

* De la ecuación dada se tiene que:

$\vec{x}=8\vec{b}-6\vec{a}+5\vec{c}$

$\rightarrow 3\vec{x}=8(8;6;5)-6(5;7;1)+5(-1;4;2)$

$\rightarrow 3\vec{x}=(29;26;44)$

$\rightarrow \vec{x}=\left(\frac{29}{3};\frac{26}{3};\frac{44}{3}\right)$

PROBLEMA 72:

Si $\overrightarrow{PQ}=(4;6;3)$ y $P=(1;4;5)$, Hallar el punto Q.

RESOLUCIÓN:

$Q=P+\overrightarrow{PQ}=(1;4;5)+(4;6;3)$

$\rightarrow Q=(5;10;8)$

PROBLEMA 73:

Considerando los vectores :

$\vec{a}=(1;4;-5)$, $\vec{b}=(3;-2;4)$ y $\vec{c}=(-3;5;2)$

Calcular :

I) $\vec{a}.\vec{b}$ II) $\vec{b}.\vec{c}$ III) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})$

RESOLUCIÓN:

I) $\vec{a}.\vec{b}=(1;4;-5).(3;-2;4)=(1)(3)+(4)(-2)+(-5)(4)$
$=3-8-20=-25$

II) $\vec{a}.\vec{b}=(3;-2;4).(-3;5;2)=(3)(-3)+(-2)(5)+(4)(2)$
$=-9-10+8=-11$

III) Como $\vec{b}+\vec{c}=(0;3;6)$, se tiene que :

$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=(1;4;-5).(0;3;6)=0+12-30=-18$

PROBLEMA 74:

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 60° y $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$ y $|\vec{b}|=2$

Hallar :

I) $\vec{a}.\vec{b}$ II) $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})$

RESOLUCIÓN:

I) $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|\ |\vec{b}|\cos 60^\circ=2\sqrt{3}\times 2\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$

II) $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}.(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}.(\vec{a}-\vec{b})$
$=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}-\vec{b}.\vec{b}$
$=|a|^2-|b|^2=12-4=8$

PROBLEMA 75 :

Considerando los vectores $\vec{a}=(-4;8;-3)$ y $\vec{b}=(2;1;1)$, hallar el ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

RESOLUCIÓN:

$$\vec{a}.\vec{b}=(-4;8;-3).(2;1;1)=-3$$

* Como: $\vec{a}=(-4;8;-3)$ y $\vec{b}=(2;1;1)$

* Se tiene que: $\|\vec{a}\|=\sqrt{89}$; $\|\vec{b}\|=\sqrt{6}$

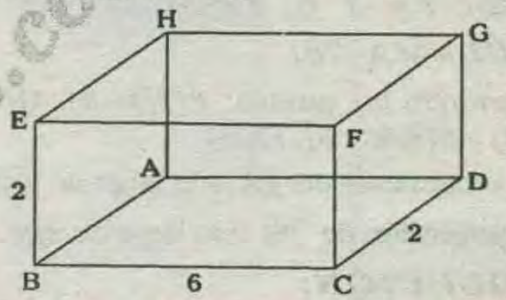
* Luego:

* De $\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}=\frac{-3}{\sqrt{89}\sqrt{6}}=\frac{-3}{\sqrt{534}}=-0,129$

* Se sigue que: $\theta=\arccos(-0,129)$

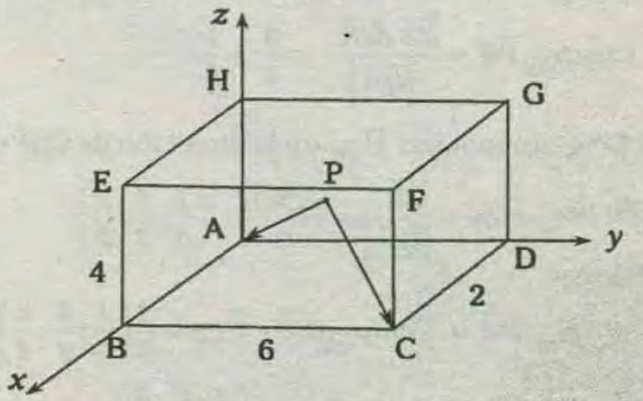
PROBLEMA 76:

Una caja rectangular tiene dimensiones **2;6** y **4** metros respectivamente, tal como se muestra en la figura adjunta. Si **P** es el centro de la caja, usar vectores para hallar el ángulo **APC**.



RESOLUCIÓN:

Ubiquemos un sistema de coordenadas rectangulares con origen en el punto **A**, tal como se muestra en la figura adjunta.



Con respecto a este sistema de referencia. Las coordenadas de los vértices **A,P** y **C** son:
A(0;0;0),P(1;3;2),C(2;6;0). Luego:

$\overrightarrow{PA}=(-1;-3;-2)\ \rightarrow\ \|\overrightarrow{PA}\|=\sqrt{14}$

$\overrightarrow{PC}=(1;3;-2)\ \rightarrow\ \|\overrightarrow{PC}\|=\sqrt{14}$

$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PC}=(-1;-3;-2).(1;3;-2)=-6$

www.GRATIS2.com

* Si denotamos por θ al ángulo APC se tiene que:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PC}}{\left\|\overrightarrow{PA}\right\|\left\|\overrightarrow{PC}\right\|} = \frac{-6}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{-6}{14} = -\frac{3}{7}$$

* de lo cual se obtiene que:

$$\theta = arcos\left(-\frac{3}{7}\right).$$

PROBLEMA 77:

¿Para qué valores de r los vectores $\vec{a}=(r;r;1)$ y $\vec{b}=(2r;-2;-4)$ son perpendiculares?

RESOLUCIÓN:

* Para que a y b sean perpendiculares su producto escalar debe ser cero. Así, se debe tener que:

$$(r;r;1).(2r;-2;-4) = 0$$
$$\rightarrow 2r^2 - 2r - 4 = 0$$
$$\rightarrow r^2 - r - 2 = 0$$
$$\rightarrow (r+1)(r-2) = 0$$

* Es decir: $r=-1$ ó $r=2$

PROBLEMA 78:

Considerando los puntos: $P(2;4;-3)$, $Q(-3;1;2)$, $R(0;7;8)$ y $S(3;6;-5)$, Hallar:

I) La componente de $\overrightarrow{PS}$ a lo largo de $\overrightarrow{QR}$.

II) La proyección de $\overrightarrow{PS}$ a lo largo de $\overrightarrow{QR}$.

RESOLUCIÓN:

$\overrightarrow{PS}=(1;2;-2)$, $\left\|\overrightarrow{PS}\right\|=3$

$\overrightarrow{QR}=(3;6;6)$, $\left\|\overrightarrow{QR}\right\|=9$

$\overrightarrow{PS}.\overrightarrow{QR}=(1;2;-2).(3;6;6)=3$

I) $Comp_{\overrightarrow{QR}}\overrightarrow{PS} = \dfrac{\overrightarrow{PS}.\overrightarrow{QR}}{\left\|\overrightarrow{QR}\right\|} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

II) El vector unitario $\vec{U}_{\overrightarrow{QR}}$ en la dirección de $\overrightarrow{QR}$ está dado por $\vec{U}_{\overrightarrow{QR}} = \dfrac{\overrightarrow{QR}}{\left\|\overrightarrow{QR}\right\|} = \dfrac{(3;6;6)}{9} = \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

* Luego:

$$Proy_{\overrightarrow{QR}}\overrightarrow{PS} = (Comp_{\overrightarrow{QR}}\overrightarrow{PS})\,\vec{U}_{\overrightarrow{QR}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{9};\frac{2}{9};\frac{2}{9}\right)$$

PROBLEMA 79:

Si $\vec{u}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ y $\vec{v}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ calcular $\vec{u}\times\vec{v}$

RESOLUCIÓN:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\hat{k}$$

$$\rightarrow \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = (-10-(-3))\hat{i} - (15-1)\hat{j} + (-7))\hat{k} = -7\hat{i} - 14\hat{j} - 7\hat{k}$$

PROBLEMA 80:

Considera los vectores $\vec{a}=(1;4;3)$ y $\vec{b}=(-2;5;1)$.

Hallar el vector que sea perpendicular tanto a $\vec{a}$ como a $\vec{b}$.

RESOLUCIÓN:

Un vector que sea perpendicular a ambos vectores es el vector $\vec{a}\times\vec{b}$. así que calcularemos este producto vectorial:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}\hat{k}$$

$$\rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = -11\hat{i} - 7\hat{j} + 13\hat{k}$$

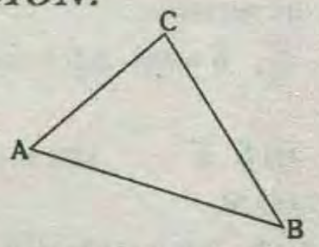
* Por lo tanto, el vector $-11\hat{i}-7\hat{j}+13\hat{k}$ es perpendicular a los vectores dados.

PROBLEMA 81:

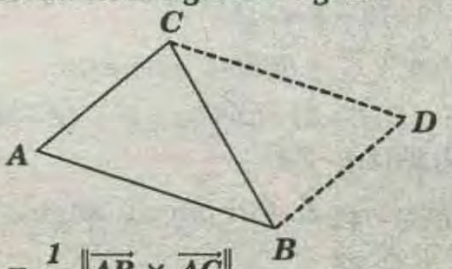
Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos.

$A(5;-2;2)$, $B(7;-3;8)$ y $C(2;3;3)$.

RESOLUCIÓN:



Denotemos por "S" el área del triángulo. Es claro que S es igual a la mitad del área del paralelogramo que se muestra en la siguiente figura:



Luego: $S = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$

* Como $\overrightarrow{AB}=(2;-1;6)$ y $\overrightarrow{AC}=(-3;5;1)$ Se sigue que:

$$S = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow S = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}\hat{k}\right] = \frac{1}{2}(-31\hat{i} - 20\hat{j} + 7\hat{k})$$

$$\rightarrow S = \frac{1}{2}\sqrt{(-31)^2 + (-20)^2 + (7)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1410} = 18{,}8$$

* Por lo tanto, el área del triangulo es ***18,8*** unidades cuadradas.

PROBLEMA 82:

Hallar el área del paralelogramo determinado por

$$\vec{u} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k} \quad y \quad \vec{v} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k}$$

RESOLUCIÓN:

* Primero calculamos el vector $\vec{u}\times\vec{v}$ y luego hallamos su módulo :

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}\hat{k} = 8\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

*Ahora la magnitud de $\vec{u}\times\vec{v}$ será:

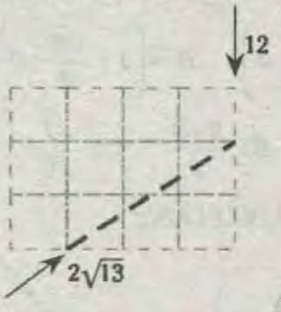
$$|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{8^2+(-6)^2+(-2)^2} = \sqrt{64+36+4} = \sqrt{104} = 10{,}19$$

El área del paralelogramo es ***10,19*** unidades cuadradas.

PROBLEMA 83:

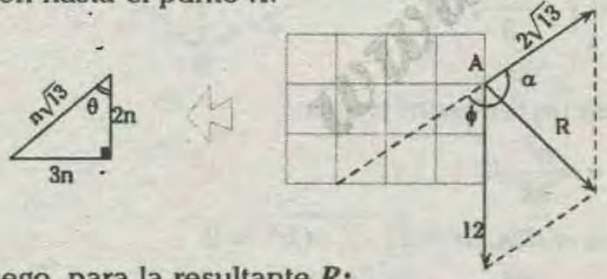
Calcular el módulo de la resultante de los vectores mostrados:

A) 6
B) 10
C) 15
D) 22
E) 25



RESOLUCIÓN:

* Trasladamos los vectores a lo largo de su línea de acción hasta el punto *A*:



* Luego, para la resultante ***R:***

$$R^2 = (2\sqrt{13})^2 + (12)^2 + 2(2\sqrt{13})(12)\cos\alpha$$

* Siendo: $\cos\alpha = -\cos\phi = \dfrac{-2n}{n\sqrt{13}} = \dfrac{-2}{\sqrt{13}}$

* Entonces:

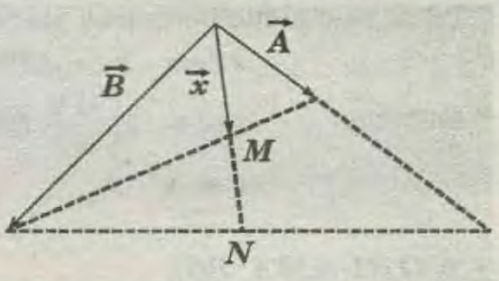
$$R^2 = 5^2 + 144 + 48\sqrt{13}\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right) = 100$$

* De donde: $R = 10$

PROBLEMA 84:

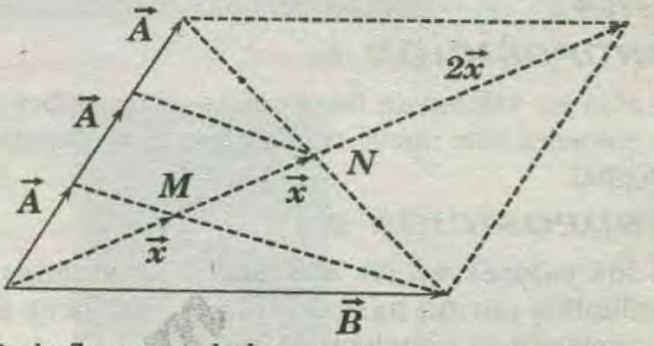
Determinar $\vec{x}$ en términos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, si *M* y *N* son puntos medios.

A) $2\vec{A} - \vec{B}$
B) $2\vec{B} - \vec{A}$
C) $\dfrac{3\vec{A} + \vec{B}}{4}$
D) $\dfrac{2\vec{A} + \vec{B}}{2}$



RESOLUCIÓN:

* Formado un paralelogramo:



* De la figura, se deduce que:

$$3\vec{A} + \vec{B} = 4\vec{x}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \frac{3\vec{A} + \vec{B}}{4}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 85:

Determinar *m*, de modo que la recta:

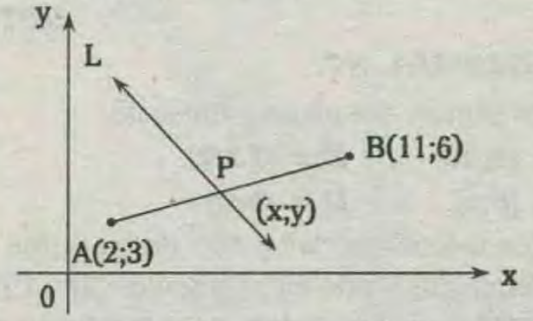
$$12mx - 9y + 129 = 0$$

Intersecte al segmento de extremos ***A (2;3)*** y ***B (11;6)*** En la razón ***2/7***

A)1 ***B) – 2*** ***C) – 1*** ***D) 2*** ***E)3***

RESOLUCIÓN:

* ***P(x;y)*** es la intersección de la recta dada y el segmento ***AB***.



* Por condición: $\dfrac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|} = \dfrac{2}{7}$

* Luego : $7(\overline{AP}) = 2(\overline{PB})$

* Esto es : $7(A-P) = 2(P-B)$

* De donde : $P = \dfrac{7}{9}A + \dfrac{2}{9}B = \dfrac{7}{9}(2;3) + \dfrac{2}{9}(11;6)$

$$\rightarrow P = \left(4\,;\,\frac{11}{3}\right)$$

WWW.GRATIS2.COM

* Como este punto pertenece ala recta:

$$12mx - 9y + 129 = 0$$

* Entonces: $12m(4) - 9\left(\frac{11}{3}\right) + 129 = 0$

$$\rightarrow m = -2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 86:

Un cuadrilátero tiene sus vértices en los puntos coordenados: $A=(0;0)$; $B=(2;2)$, $C=(7;2)$ y $D=(5;0)$.

PROPOSICIÓN 1:

Si sólo los valores de las abscisas se multiplica por 2, entonces este nuevo cuadrilátero es semejante al original.

PROPOSICIÓN 2:

Si los valores de las abscisas y ordenadas se multiplica por un mismo número, entonces este cuadrilátero es semejante al original.

PROPOSICIÓN 3:

Si los valores de las abscisas se multiplica por 2 y las ordenadas por 3 , entonces el área de éste nuevo cuadrilátero es 5 veces mayor que el original.

A) FVF B) FFV C) VFF D) FFF E) VVF

RESOLUCIÓN:

La única verdadera es la proposición 2:

"Si $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, son vértices de un polígono y todas las abscisas y ordenadas de dichos puntos se multiplica por un mismo número real r, se obtiene otro polígono semejante al original.

Donde la razón de semejanza es $|r|$.

$$\rightarrow FVF$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 87:

Sean los puntos del plano cartesiano:

$A = (3;10)$, $B = (13;2)$

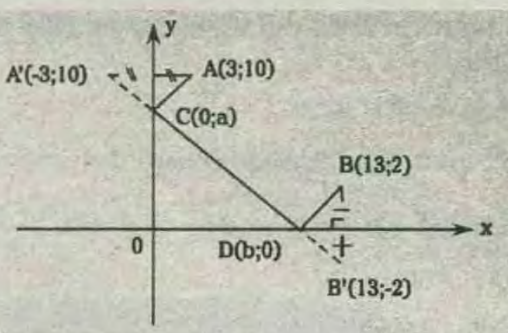
$C = (0;a)$ y $D = (b;0)$

Hallar los valores de "a" y "b" de tal forma que la suma de longitudes de los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DB}$ sea la menor posible y dar como respuesta el valor de 12 ab.

A) 961 B) 828 C) 780 D)1 020 E) 605

RESOLUCIÓN:

Se trata de hallar el menor camino para ir de A a B, tocando primero un punto de $\overline{Oy}$ y luego un punto de $\overline{Ox}$ .Para ello graficamos $A'=(-3;10)$ y $B'=(13;-2)$, Simétricos de A y B respecto a dichos ejes.



* Luego:

$$m_{A'B'} = \frac{-2-10}{13-(-3)} \rightarrow m_{A'B'} = -\frac{3}{4}$$

* Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a-10}{0-(-3)} = -\frac{3}{4} \rightarrow a = 31/4 \\ \frac{0-10}{b-(-3)} = -\frac{3}{4} \rightarrow b = 3\ 1/3 \end{array}\right\} 12ab = 961$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 88:

Hallar el volumen del tetraedro regular cuya base es el triángulo de vértices:

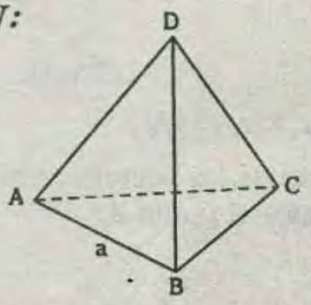
$$A=\left(-1;\frac{\sqrt{3}}{3};0\right),\quad B=\left(1;\frac{\sqrt{3}}{3};0\right)\quad C=\left(0;\frac{-2\sqrt{3}}{3};0\right)$$

A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ E)1

RESOLUCIÓN:

$$A=\left(-1;\frac{\sqrt{3}}{3};0\right)$$

$$B=\left(1;\frac{\sqrt{3}}{3};0\right)$$



* Para un tetraedro regular:

$$v = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$$

$$a = d(A,B) = \sqrt{(1-(-1))^2} = 2$$

$$v = \frac{2^3}{12}\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 89:

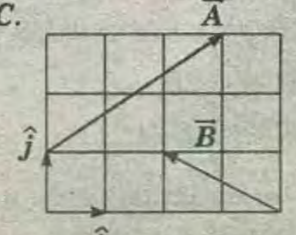
Si se cumple que : $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=\vec{O}$, determine el vector unitario del vector C.

A) $(\hat{i}+3\hat{j})/\sqrt{5}$

B) $-(\hat{i}+3\hat{j})/\sqrt{10}$

C) $(\hat{i}+\hat{j})/\sqrt{2}$

D) $(2\hat{i}+3\hat{j})/\sqrt{5}$



RESOLUCIÓN:

Del gráfico : $\vec{A}=3\hat{i}+2\hat{j}$ $\vec{B}=-2\hat{i}+\hat{j}$

* Se sabe : $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=\vec{O}\Rightarrow(3\hat{i}+2\hat{j})+(-2\hat{i}+\hat{j})+\vec{C}=\vec{O}$

$\rightarrow \vec{C}=-\hat{i}-3\hat{j}$

* Nos piden : $\vec{\mu}_C=\dfrac{\vec{C}}{|\vec{C}|}=\dfrac{-\hat{i}-3\hat{j}}{\sqrt{1^2+3^2}}=-\dfrac{(\hat{i}+3\hat{j})}{\sqrt{10}}$

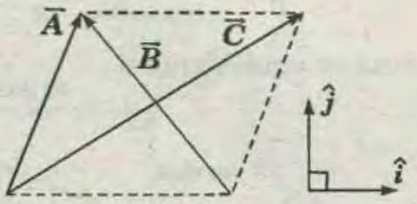
RPTA : "B"

PROBLEMA 90:

Para el conjunto de vectores dados, determine el vector unitario del vector resultante.

Si : $|\vec{A}|=|\vec{B}|=|\vec{C}|/\sqrt{3}$

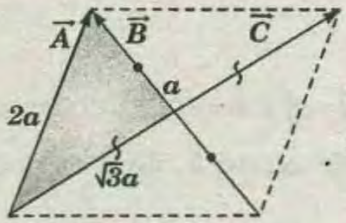
A) $(\hat{i}+\hat{j})$
B) $\hat{i}+\sqrt{3}\hat{j}$
C) $(\hat{i}+\sqrt{3}\hat{j})/2$
D) $(\hat{i}-\hat{j})\sqrt{3}$



RESOLUCIÓN:

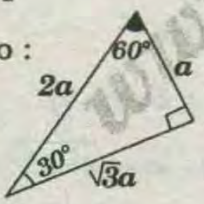
* Haciendo $|\vec{A}|=2a$

*Luego : $|\vec{B}|=2a$ y $|\vec{C}|=2\sqrt{3}a$

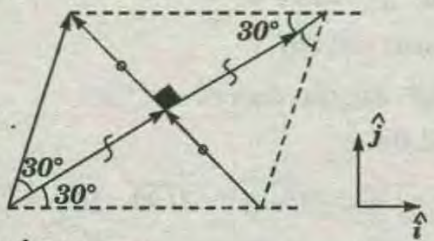


$\Rightarrow$ romboide

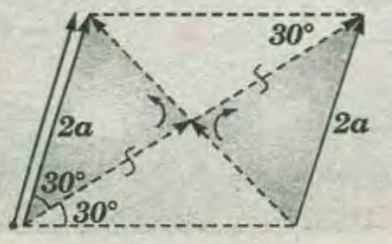
* En el Δ sombreado :

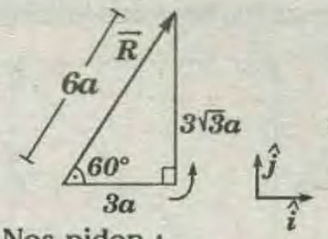


* Entonces, se tendrá :



* Reduciendo :





$\Rightarrow \vec{R}=3a\hat{i}+3\sqrt{3}a\hat{j}$

* Nos piden :

$$\vec{\mu}_R=\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}=\frac{3a\hat{i}+3\sqrt{3}a\hat{j}}{6a}=(\hat{i}+\sqrt{3}\hat{j})/2$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 91:

Tres vectores $\vec{A},\vec{B}$ y $\vec{C}$ tienen componentes x e y como se muestra en la tabla . Calcular el ángulo que forma el vector $3\vec{A}-2\vec{B}+\vec{C}$ con el eje X .

A) 0
B) $\pi/4$
C) $\pi/3$
D) $\pi/2$
E) π

	$\vec{A}$	$\vec{B}$	$\vec{C}$
x	3	4	−1
y	1	−2	1

RESOLUCIÓN:

* De la tabla se deduce :

* $\vec{A}=(3;1)$ * $\vec{B}=(4;-2)$ * $\vec{C}=(-1;1)$

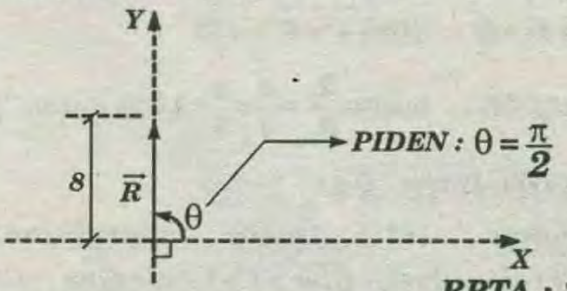
* Calculando el vector .

$\vec{R}=3\vec{A}-2\vec{B}+\vec{C}$

$\vec{R}=3(3;1)-2(4;-2)+(-1;1)$

$\Rightarrow \vec{R}=(9;3)-(8;-4)+(-1;1)\Rightarrow \vec{R}=(0;8)$

* Graficando el vector "$\vec{S}$" :

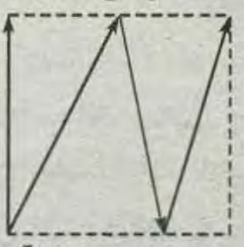


RPTA : "D"

PROBLEMA 92:

Si el lado del cuadrado es "K" determine la magnitud del vector resultante del grupo de vectores mostrados:

A) $K\sqrt{3}$
B) $2K$
C) $K\sqrt{5}$
D) $5K$
E) $K\sqrt{7}$

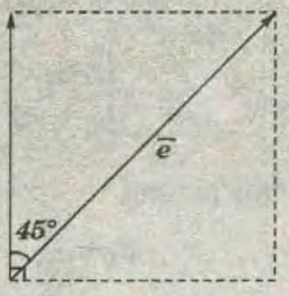


RESOLUCIÓN :

* Aplicando la regla del polígono vectorial,

WWW.GRATIS.COM

determinamos , la resultante de los vectores internos al cuadrado , quedando así :



* $|\vec{a}|=k$
* $|\vec{e}|=k\sqrt{2}$
* Luego : $\vec{R}=\vec{a}+\vec{e}$

$\rightarrow |\vec{R}|=\sqrt{k^2+(k\sqrt{2})^2+2(k)(k\sqrt{2})(\cos 45°)}$

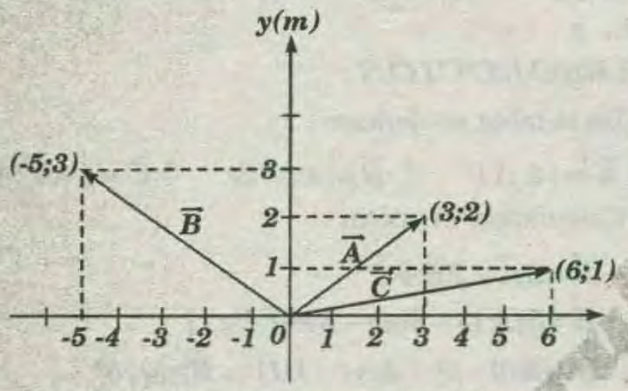
$\rightarrow |\vec{R}|=K\sqrt{5}$ **RPTA : "C"**

PROBLEMA 93:

Determine la magnitud y dirección de la resultante de tres desplazamientos que tienen componentes rectangulares **(3;2) ,(– 5: 3)** y **(6; 1)**

RESOLUCIÓN:

$\vec{A}=3\hat{i}+2\hat{j}$; $\vec{B}=-5\hat{i}+3\hat{j}$; $\vec{C}=6\hat{i}+\hat{j}$



$\Rightarrow \vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(3\hat{i}+2\hat{j})+(-5\hat{i}+3\hat{j})+(6\hat{i}+\hat{j})$

$\Rightarrow R=4\hat{i}+6\hat{j} \Rightarrow |\vec{R}|=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}$

* Dirección : $\tan\theta=\frac{R_y}{R_x}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1,5 \Rightarrow \theta=\tan^{-1}(1,5)$

PROBLEMA 94:

Considere el vector desplazamiento $\vec{A}=(3\hat{i}+3\hat{j})m$; $\vec{B}=(\hat{i}-4\hat{j})m$ y $\vec{C}=(-2\hat{i}+5\hat{j})m$. Con el método de componentes, determine :

I) La magnitud y dirección del vector $\vec{D}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$.

II) La magnitud y la dirección de $E=-\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}$.

RESOLUCIÓN:

I) $\vec{D}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} \Rightarrow \vec{D}=(3\hat{i}+\hat{i}-2\hat{i})+(3\hat{j}-4\hat{j}+5\hat{j})$

$\rightarrow \vec{D}=2\hat{i}+4\hat{i}) \Rightarrow |\vec{D}|=\sqrt{(2)2+(4)^2}=\sqrt{20}$

Dirección: $\tan\theta=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow \theta=\tan^{-1}(2)$

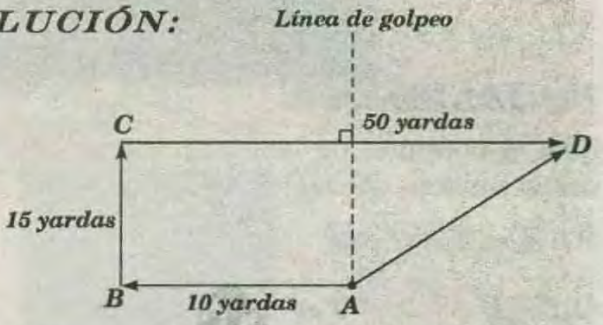
II) $\vec{E}=-\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}=(-3\hat{i}-3\hat{j})+(-\hat{i}+4\hat{j})+(-2\hat{i}+5\hat{j})$

Dirección : $\tan\theta=\frac{6}{-6}=-1 \Rightarrow \theta=\tan^{-1}(-1)=135°$

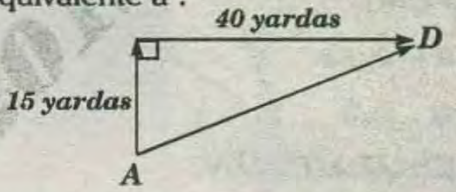
PROBLEMA 95:

Un mariscal de campo toma el balón desde la línea de golpeo , corre hacia atrás **10** yardas y después recorre **15** yardas en paralelo a la misma línea de golpeo . En este punto , lanza un pase recto de **50** yardas dentro del campo perpendicular a la línea de golpeo . ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento resultante del balón de fútbol?

RESOLUCIÓN:



* El sistema es equivalente a :



* Entonces :

$\rightarrow |\overline{AD}|=\sqrt{(15\ yardas)^2+(40\ yardas)^2}$

$\rightarrow |\overline{AD}|=5\sqrt{73}$ yardas .

PROBLEMA 96:

Dados dos vectores $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}$ y $\vec{b}=6\hat{i}+8\hat{j}$, encontrar la dirección y magnitud de $\vec{a}$, de $\vec{b}$, de $\vec{a}+\vec{b}$ y de $\vec{a}-\vec{b}$.

RESOLUCIÓN:

Dado : $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}$; $\vec{b}=6\hat{i}+8\hat{j}$

a) Magnitud de $\vec{a}$: $|\vec{a}|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

Dirección de $\vec{a}$: $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

$\rightarrow \theta=\arctan(-0,75)$

$\rightarrow \theta=323,13°$ ángulo con el eje **"X"**

b) Magnitud de $\vec{b}$:

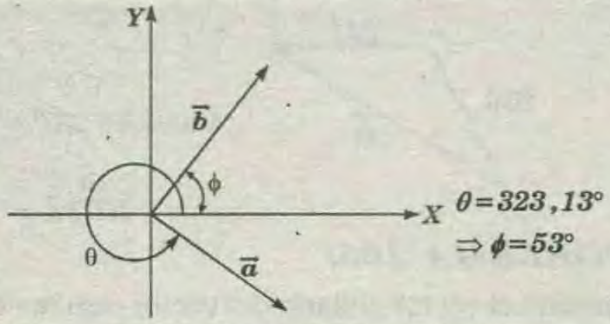
$$|\vec{b}|=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$$

Dirección de $\vec{b}$: $tag\phi=\frac{8}{6}$

$\rightarrow \phi=\arctan(\frac{8}{6})$

$\rightarrow \phi=53°$ ángulo con el eje **"X"**

* Gráfico de las posiciones de cada uno de los vectores :



c) Magnitud de $\vec{a}+\vec{b}$: $\vec{a}+\vec{b}=10\hat{i}+5\hat{j}$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10^2+5^2}$ $\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|=5\sqrt{5}$

Dirección de $\vec{a}+\vec{b}$: $tag\beta=\frac{5}{10}$

$\rightarrow \beta=26,57°$

d) Magnitud $\vec{a}-\vec{b}$. $\vec{a}-\vec{b}=-2\hat{i}-11\hat{j}$

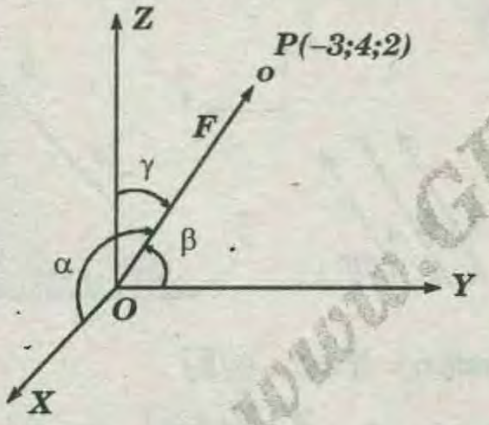
$\rightarrow |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+(-11)^2}=5\sqrt{5}$

PROBLEMA 97:

La figura muestra una figura cuya magnitud es ***100N***. Determinar.

I) Las componentes cartesianas de la fuerza.

II) Los cosenos directores.



RESOLUCIÓN:

I) $\vec{F}=F\vec{u}$, siendo $F=100\ N$.

$$\vec{u}=\frac{\overrightarrow{OP}}{OP}=\frac{-3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{29}}$$

* Entonces la expresión vectorial de la fuerza es :

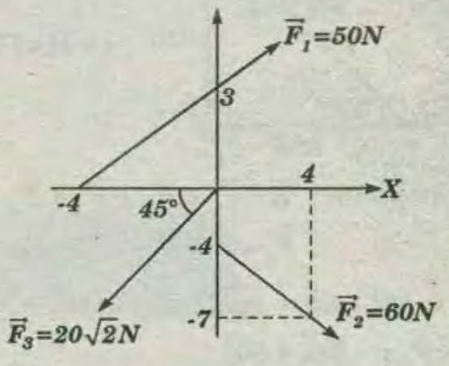
$$F=-\frac{300}{\sqrt{29}}N\hat{i}+\frac{400\ N}{\sqrt{29}}\hat{j}+\frac{200\ N}{\sqrt{29}}\hat{k}$$

* De donde : $F_x=-\frac{300N}{\sqrt{29}}, F_y=\frac{400\ N}{\sqrt{29}}, F_z=\frac{200\ N}{\sqrt{29}}$

II) $cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{29}}; cos\beta=\frac{3}{\sqrt{29}}; cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{29}}$

PROBLEMA 98:

Se sabe que al sumar las tres fuerzas que se indican con una cuarta fuerza, se obtiene una fuerza resultante de módulo ***50 N*** y que forma ***53°*** con el semieje ***+X***. Determine la cuarta fuerza (en ***N***)



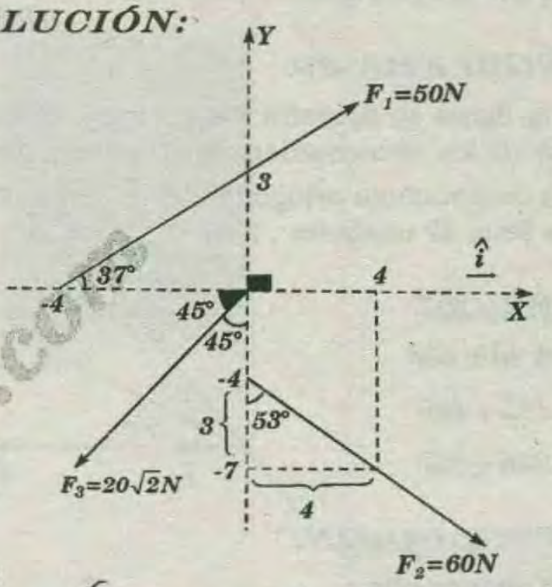
A) $20\hat{i}+60\hat{j}$

B) $-28\hat{i}+56\hat{j}$

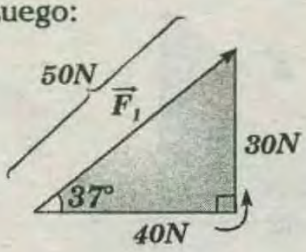
C) $20\hat{i}+40\hat{j}$

D) $-38\hat{i}+66\hat{j}$

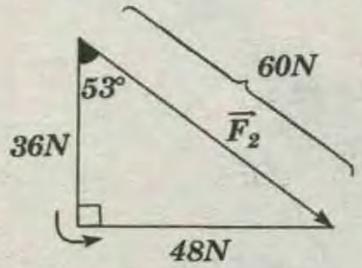
RESOLUCIÓN:



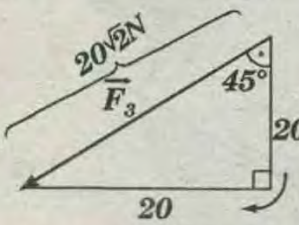
* Luego:



$\Rightarrow \vec{F}_1=(40\hat{i}+30\hat{j})N$



$\Rightarrow \vec{F}_2=(48\hat{i}-36\hat{j})N$



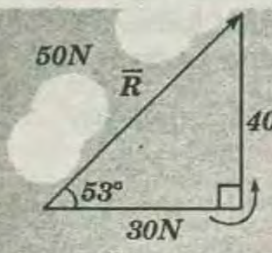
$\Rightarrow \vec{F}_3=(-20\hat{i}-20\hat{j})N$

Del dato del problema :

$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4$; piden $\vec{F}_4=??$

Donde :

www.GRATIS2.com



$\Rightarrow \vec{R}=(30\hat{i}+40\hat{j})N$

* Luego en : $\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4$

$\Rightarrow \vec{F}_4=\vec{R}-\vec{F}_1-\vec{F}_2-\vec{F}_3$

$\vec{F}_4=(30\hat{i}+40\hat{j})-(40\hat{i}+30\hat{j})-(48\hat{i}-36\hat{j})-(-20\hat{i}-20\hat{j})$

$\rightarrow F_4=-38\hat{i}+66\hat{j}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 99:

En la figura se muestra los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenadas U y V del plano .

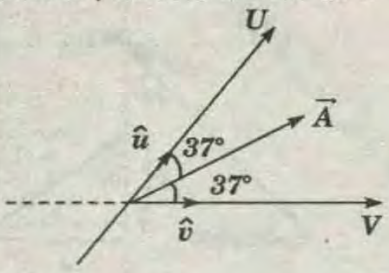
Si la componente ortogonal de $\vec{A}$ sobre uno de los ejes tiene 32 unidades , halle el vector $\vec{A}$.

A) $32\hat{u}+32\hat{v}$

B) $3{,}2\hat{u}+40\hat{v}$

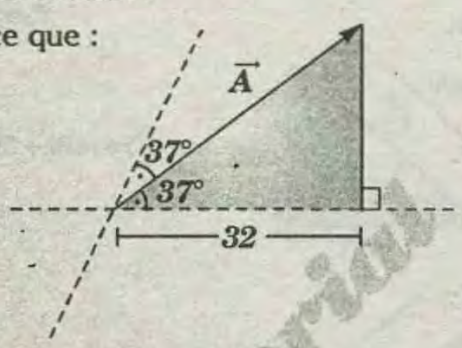
C) $42\hat{u}+40\hat{v}$

D) $25\hat{u}+25\hat{v}$



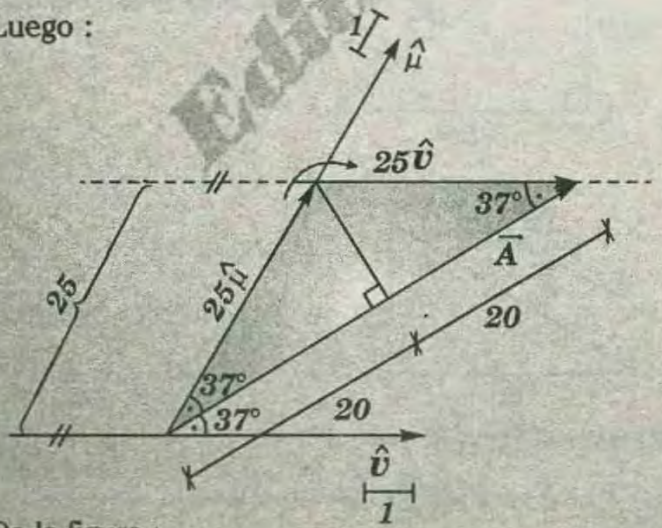
RESOLUCIÓN:

* Se deduce que :

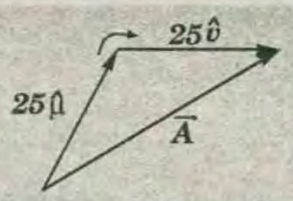


Dato de la figura : $|\vec{A}|=A=40$

* Luego :



* De la figura :



$\vec{A}=25\hat{\mu}+25\hat{v}$

RPTA : "D"

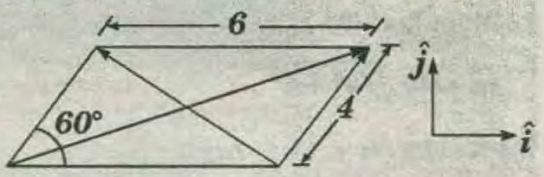
PROBLEMA 100:

Determine el vector unitario del vector resultante .

A) $\dfrac{(\hat{i}+\sqrt{3}\hat{j})}{2}$

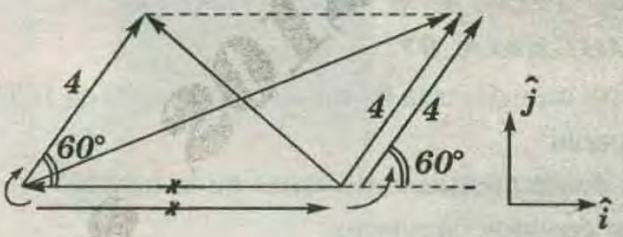
B) $\hat{i}-\sqrt{3}\hat{j}$

C) $\dfrac{(2\hat{i}+3\hat{j})}{2}$

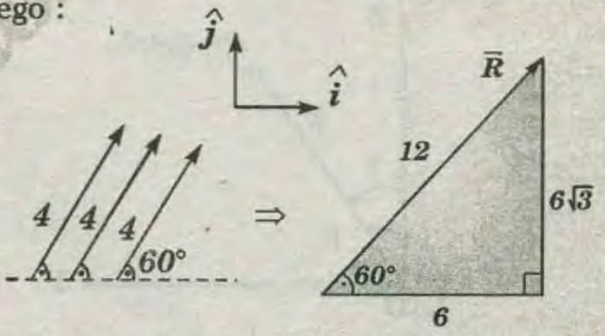


RESOLUCIÓN:

* Descomponiendo algunos vectores , así :



* Luego :



* Del gráfico : $\vec{R}=6\hat{i}+6\sqrt{3}\hat{j}$

* Nos piden : $\vec{\mu}_R=\dfrac{\vec{R}}{|\vec{R}|}=\dfrac{6\hat{i}+6\sqrt{3}\hat{j}}{12}\Rightarrow \vec{\mu}_R=\dfrac{(\hat{i}+\sqrt{3}\hat{j})}{2}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 101:

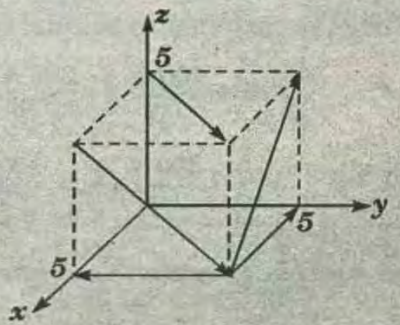
Determine el vector unitario del vector resultante.

A) $(-\hat{i}+\hat{j})/\sqrt{2}$

B) $(\hat{i}-\hat{j})/2$

C) $-\hat{i}$

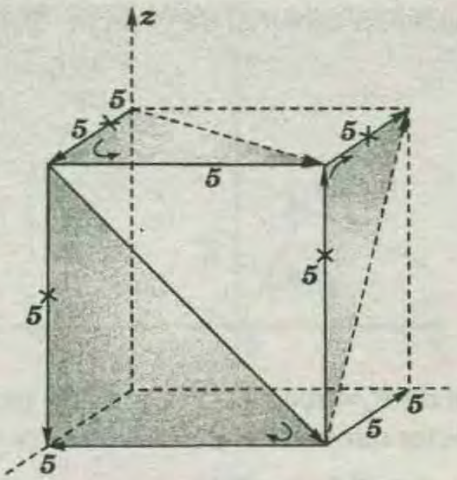
D) $\hat{k}$



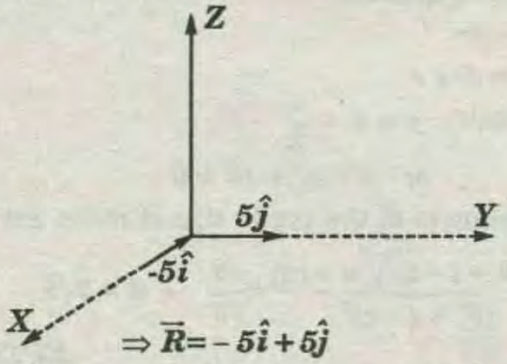
RESOLUCIÓN :

* Descomponiendo algunos vectores , y reduciendo:

Editorial rubinos



* Simplificando , resulta :



$\Rightarrow \vec{R} = -5\hat{i} + 5\hat{j}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 102:

Si $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$, donde $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores unitários, identifique la veracidad *(V)* o falsedad *(F)*, de las proposiciones siguientes :

I) El módulo de $\vec{S}$ satisface :

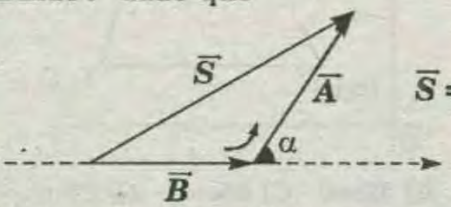
II) $\vec{S}$ también puede ser unitario .

III) Si $\alpha = 60°$ es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ luego $|\vec{S}| = 3$

A) VVV B) FVV C) VFF D) FFF E) VVF

RESOLUCIÓN:

I) VERDADERA : dado que



$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$

Como $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores unitarios, entonces :

$$\vec{A} = \vec{B} = 1$$

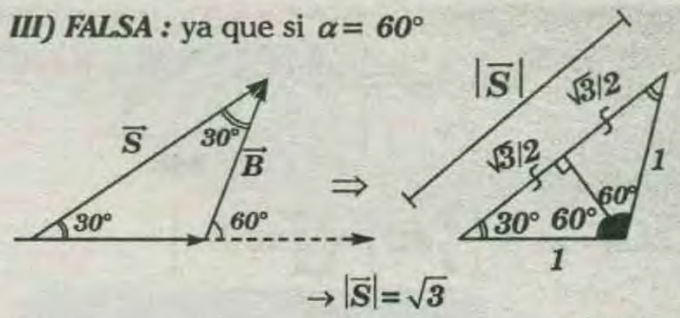
$$\rightarrow \underbrace{A - B} \leq S \leq A + B$$

$$\rightarrow 0 \leq S \leq 2$$

II) VERDADERA :

Efectivamente cuando $|\vec{S}| = S = 1$, esto se dará cuando $\alpha = 120°$

III) FALSA : ya que si $\alpha = 60°$



$\rightarrow |\vec{S}| = \sqrt{3}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 103:

En la figura mostrada, la medida del ángulo *BCA* es *30°*. El punto *D* es punto medio de $\overline{AC}$, $\overline{ED} // \overline{AB}$, $\overline{AE} // \overline{DF}$ y el módulo $|\overline{AB}| = 6$. Hallar el módulo de : $\overline{AB} + \overline{AE} + \overline{ED} + \overline{DF}$

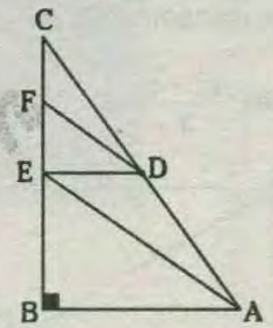
A) $\frac{4}{3}\sqrt{91}$

B) $\sqrt{91}$

C) $2\sqrt{91}$

D) $\frac{3}{2}\sqrt{91}$

E) $\frac{3}{4}\sqrt{91}$



RESOLUCIÓN:

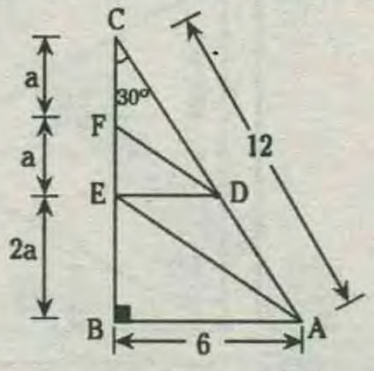
$$\vec{R} = \overline{AB} + \overline{AE} + \overline{ED} + \overline{DF}$$

$$|\vec{R}| = ?$$

* Con el gráfico:

$$\vec{R} = \overline{AB} + \overline{AE} + \overline{ED} + \overline{DF}$$

$$\rightarrow \vec{R} = \overline{AB} + (\overline{AB} + \overline{BE}) + \overline{ED} + (\overline{DE} + \overline{EF})$$



* Cancelando $\overline{ED}$ y $\overline{DE}$:

$$\vec{R} = 2\overline{AB} + \overline{BE} + \overline{EF}$$

$$\vec{R} = 2\overline{AB} + \overline{BF}$$

$$\text{ó } \vec{R} = 2\overline{AB} + \frac{3}{4}\overline{BC}$$

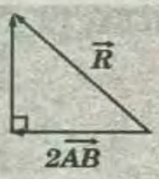
$\frac{3}{4}\overline{BC}$ $\vec{R}$ $2\overline{AB}$

$\vec{R}$ se puede representar como:

{Combinación lineal de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$}

WWW.GRATIS.COM

(ya que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$)



* Siendo :

$$|2\overrightarrow{AB}|=12 \wedge \left|\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right| = \left|\frac{3}{4}\times 6\sqrt{3}\right|$$

$$\Rightarrow |\vec{R}| = \sqrt{12^2+\left(\frac{3}{4}\times 6\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{91}$$

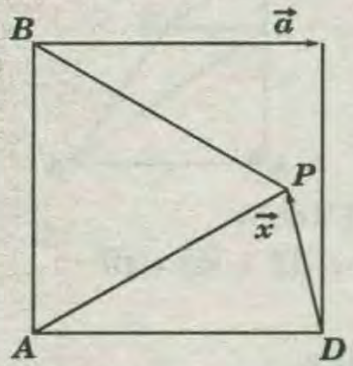
RPTA : "D"

PROBLEMA 104:

Del gráfico, **ABCD** es un cuadrado y **APB** es equilátero. Halle $\vec{x}$

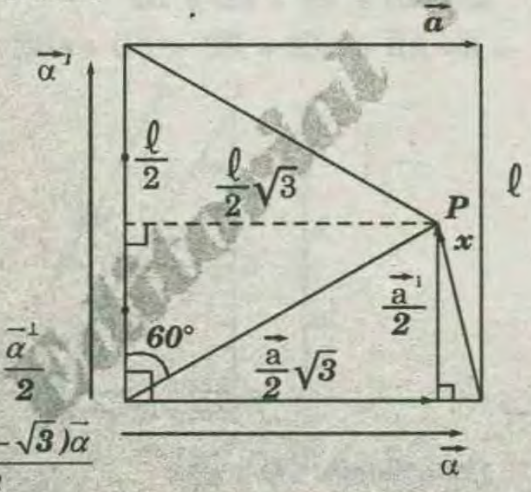
Nota : $\vec{\alpha}^{\perp}$ vector ortogonal de $\vec{\alpha}^{\perp}$

A) $\frac{2\vec{a}^{\perp}-\vec{a}}{3}$ **B)** $\frac{\vec{a}^{\perp}-\vec{a}}{3}$ **C)** $\frac{\vec{a}^{\perp}-(2-\sqrt{3})\vec{a}}{2}$



RESOLUCIÓN:

Piden: $\vec{x}=?$



$$\vec{\alpha}-\frac{\vec{\alpha}}{2}\sqrt{3}+\vec{x}=\frac{\vec{\alpha}^{\perp}}{2}$$

$$\rightarrow \vec{x}=\frac{\vec{\alpha}^{\perp}-(2-\sqrt{3})\vec{\alpha}}{2}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 105:

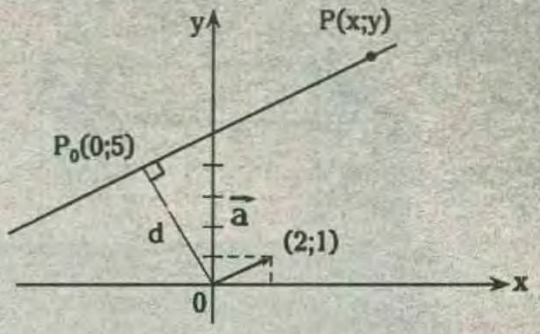
Hallar la distancia del origen de coordenadas x–y, a la recta L, definida por:

$P = (0;5) + t(2;1)$, donde $t \in R$

A) $3\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{10}$ **C)** $2\sqrt{5}$ **D)** $3\sqrt{5}$ **E)** $\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN:

* Ecuación vectorial de la recta: $P = P_0 + r\vec{a}$



* Donde $P_0=(0;5)$ es un punto de paso y $\vec{a}=(2;1)$ es el vector direccional y $r \in \mathbb{R}$ es el parámetro.

$\rightarrow (x;y) = (0;5) + r(2;1)$

$\rightarrow (x;y) = (2r;5+r)$

$\rightarrow x = 2r$

$\rightarrow y = 5 + r$

* De donde: $y = 5 + \frac{x}{2}$

ó: $x - 2y + 10 = 0$

* La distancia d, del punto o, a la recta, es:

$$d=\frac{|1\times 0+(-2)\times 0+10|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}} \rightarrow d = 2\sqrt{5}$$

RPTA : "C"

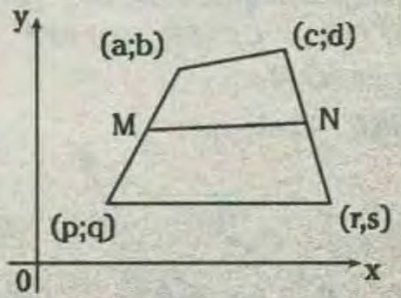
PROBLEMA 106:

El punto $\left(\frac{a+c}{2};\frac{b+d}{2}\right)$ es el punto medio del segmento que une los puntos $(a;b)$ y $(c;d)$. En el cuadrilátero de la figura adjunta, M y N son puntos medios.

Si la longitud del segmento MN es $15\ cm$.

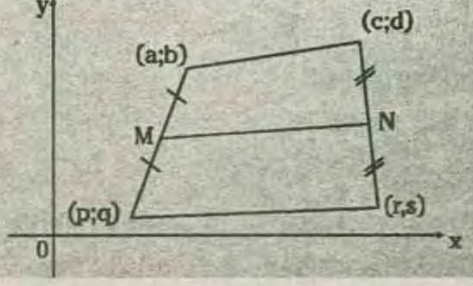
Calcular la longitud del vector:

$$(c-a\ ;\ d-b) + (r-p\ ;\ s-q)$$



A) 20cm. B) 22cm. C) 25cm. D) 28cm. E) 30cm.

RESOLUCIÓN:



* Nos piden el módulo de:

$|(c-a;-d)+(r-p;s-q)|=$

$=|(c+r-a-p;d+s-b-q)|$.....(I)

* Se conoce el módulo de $|\overrightarrow{MN}|=|N-M|=$

$=\left|\left(\frac{c+r}{2};\frac{d+s}{2}\right)-\left(\frac{a+p}{2};\frac{b+q}{2}\right)\right|=$

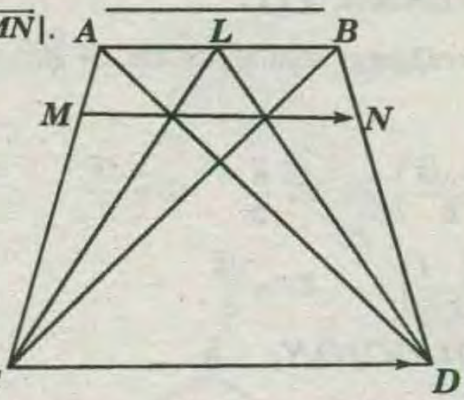
$=\frac{1}{2}|(c+r-a-p;d+s-b-q)|=15\ cm$

$\rightarrow |(c+r-a-p;d+s-b-q)|=30\ cm$

RPTA : "E"

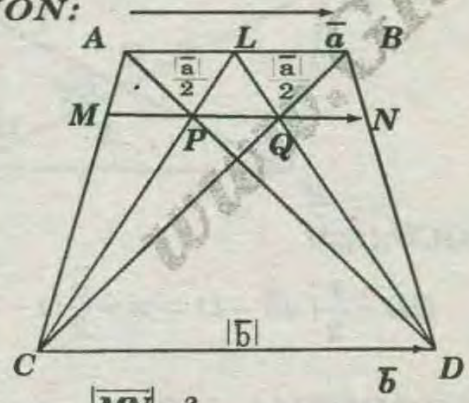
PROBLEMA 107:

Según el gráfico, $AL=LB$; $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$, $\overline{AB}=\vec{a}$ y $\overline{CD}=\vec{b}$, calcule $|\overrightarrow{MN}|$.



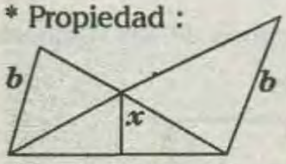
A) $\frac{3|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+2|\vec{b}|}$ B) $\frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$ C) $\frac{|\vec{a}|+|\vec{b}|}{3}$

RESOLUCIÓN:



* Piden: $|\overrightarrow{MN}|=?$

* Propiedad :



$x=\frac{ab}{a+b}$

En el problema:

$MP=PQ=QN$

$\Rightarrow MP=\frac{\frac{|\vec{a}|}{2}\cdot|\vec{b}|}{\frac{|\vec{a}|}{2}+|\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+2|\vec{b}|}\Rightarrow|\overrightarrow{MP}|=3(MP)\Rightarrow\overrightarrow{MP}=\frac{3|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+2|\vec{b}|}$

RPTA : "A"

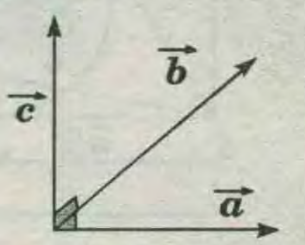
PROBLEMA 108:

Dados los vectores $\vec{a}=(1;-1;2)$; $\vec{b}=(0;2;4)$ y $\vec{c}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{c}$ es perpendicular con $\vec{a}$ y $\vec{b}$ respectivamente, y $\vec{c}$ es un vector unitario, determine la longitud del vector $|\vec{b}-\vec{c}|$.

A) $2\sqrt{21}$ B) $4\sqrt{21}$ C) $\sqrt{21}$ D) $3\sqrt{21}$ E) $5\sqrt{21}$

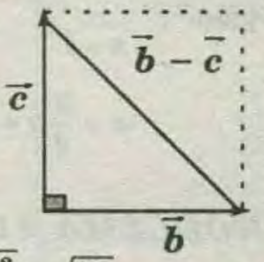
RESOLUCIÓN:

* Si hacemos el gráfico de los vectores, en tres dimensiones, por dato c es perpendicular a: $\vec{a}$ y $\vec{b}$ –



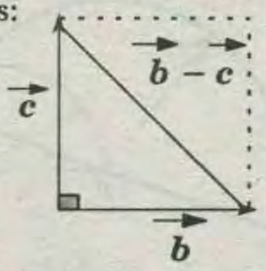
* Observando el plano comprendido entre $\vec{b}-\vec{c}$ estos son perpendiculares.

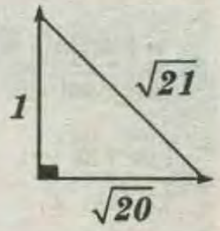
El módulo del vector $\vec{b}$ esta dado por :



$$b=\sqrt{0^2+2^2+4^2}=\sqrt{20}$$

*Si $\vec{c}$ es unitario su módulo es uno: $c=1$ Por Pitágoras:





$$\Rightarrow|\vec{b}-\vec{c}|=\sqrt{21}$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 109:

En el gráfico $\mathscr{C}$ está inscrita en el triángulo equilátero ABC. Si $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$, calcule $\overrightarrow{AP}$.

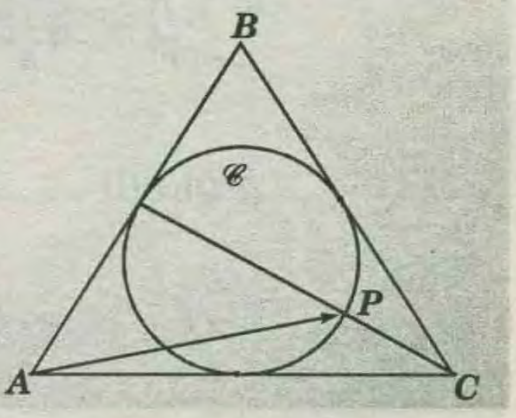
A) $\frac{\vec{a}-\sqrt{3}\vec{a}^{\perp}}{4}$

B) $\vec{a}+\sqrt{3}\vec{a}^{\perp}$

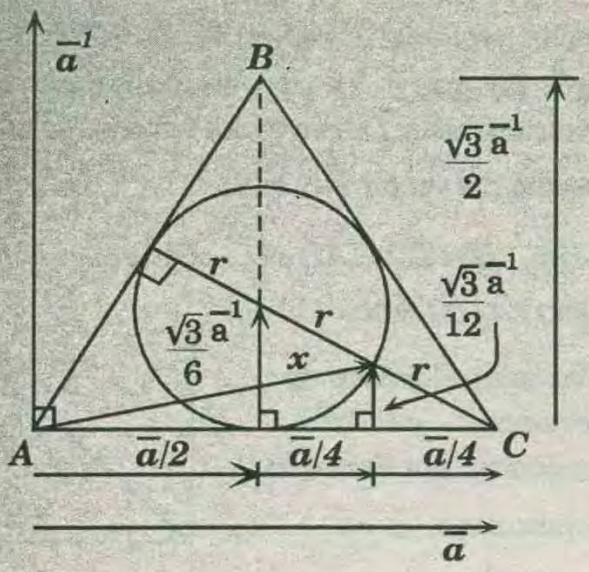
C) $\vec{a}-\sqrt{3}\vec{a}^{\perp}$

D) $\frac{9\vec{a}+\sqrt{3}\vec{a}^{\perp}}{12}$

E) $\frac{6\vec{a}+\sqrt{3}\vec{a}^{\perp}}{8}$



RESOLUCIÓN:



* Piden: $\vec{x}=?$

$$\vec{x}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{\sqrt{3}}{12}\vec{a}^{\perp}\Rightarrow x=\frac{9\vec{a}+\sqrt{3}\vec{a}^{\perp}}{12}$$

RPTA :"D"

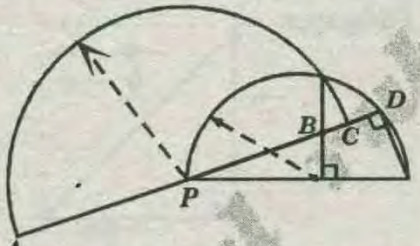
PROBLEMA 110:

Según el gráfico $\overrightarrow{AB}=\vec{a};\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, calcule $\overrightarrow{CD}$.

En un pentágono regular *ABCDE*,

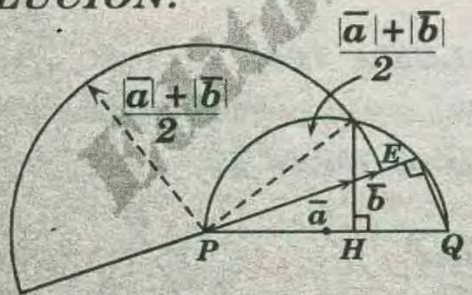
A) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\left(\frac{|\vec{b}|(|\vec{a}|+|\vec{b}|)}{|\vec{a}|-|\vec{b}|}\right)$

B) $\left(\frac{|\vec{a}|+|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\right)\vec{a}$



C) $\left(\frac{|\vec{a}|-|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\right)\vec{b}$ D) $\left(|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right)\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ E) $\left(\frac{2|\vec{a}|-|\vec{b}|}{|\vec{a}|-|\vec{b}|}\right)\vec{a}$

RESOLUCIÓN:



$$\left(\frac{|\vec{a}|+|\vec{b}|}{2}\right)^2=(PQ)(PH)\ldots\ldots\ldots(I)$$

* Secantes :

$$(PQ)(PH)=\left(\frac{|\vec{a}|+|\vec{b}|}{2}+|\vec{x}|\right)\left(\frac{|\vec{a}|-|\vec{b}|}{2}\right)\ldots\ldots\ldots(II)$$

* (I) = (II):

$$\left(\frac{|\vec{a}|+|\vec{b}|}{2}\right)^2=\left(\frac{|\vec{a}|+|\vec{b}|+2|\vec{x}|}{2}\right)\left(\frac{|\vec{a}|-|\vec{b}|}{2}\right)$$

$$|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2+2|\vec{x}|\left(|\vec{a}|-|\vec{b}|\right)$$

$$\rightarrow \vec{x}=|\vec{b}|\left(\frac{|\vec{a}|+|\vec{b}|}{|\vec{a}|-|\vec{b}|}\right)$$

* Piden : $\vec{x}=|\vec{x}|\vec{\mu}_{\vec{a}}\Rightarrow\vec{x}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\left(\frac{|\vec{b}|\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|\right)}{|\vec{a}|-|\vec{b}|}\right)$

RPTA : "A"

PROBLEMA 111:

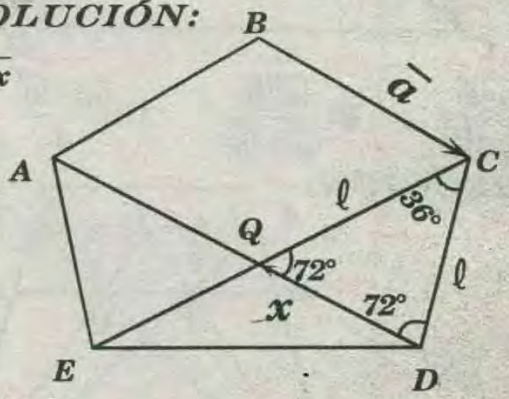
En un pentágono regular *ABCDE*, Si $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, calcule $\overrightarrow{DQ}$.

A) $\vec{a}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ B) $\frac{\vec{a}}{2}$ C) $\vec{a}\frac{\sqrt{5}}{2}$

D) $\vec{a}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ E) $\vec{a}\frac{\sqrt{5}}{5}$

RESOLUCIÓN:

Piden: $\vec{x}$



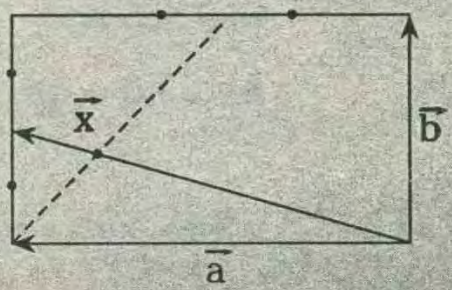
$\Delta QCD:(\ell_{10})$:

$$QD=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\Rightarrow\vec{x}=\frac{\vec{a}}{2}(1-\sqrt{5})$$

CLAVE : " A"

PROBLEMA 112:

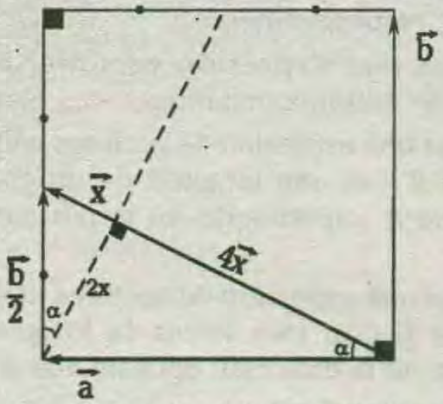
Determinar el vector $\vec{x}$ en términos de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en el cuadrado mostrado.



A) $(2\vec{a}+\vec{b})/10$ B) $(\vec{a}-\vec{b})/5$ C) $(\vec{a}+2\vec{b})/7$

RESOLUCIÓN :

* Trazando vectores auxiliares adecuadamente:



* Por semejanza de triángulos, se deduce el vector $4\vec{x}$.

* Luego también se observa que:

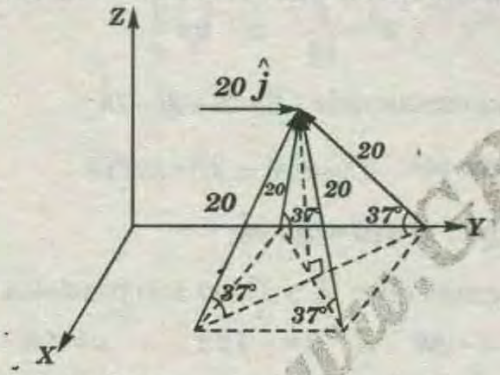
$$\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} = 5x \rightarrow \vec{x} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{10}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 113:

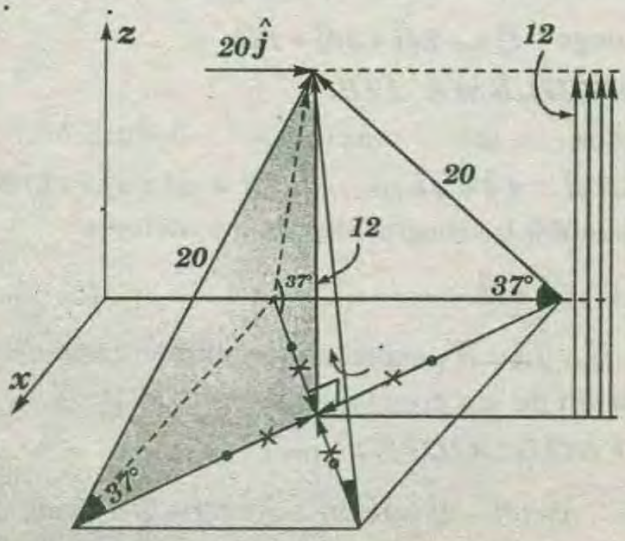
En la figura se muestran los vectores de magnitudes indicadas . Hallar el módulo del vector resultante .

A) 20
B) 32
C) 48
D) 52
E) 60

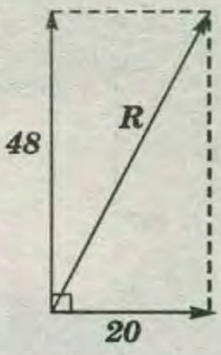


RESOLUCIÓN:

* Descomponiendo , adecuadamente los vectores , así :



* Simplemente se obtendrá :



$\Rightarrow R^2 = 20^2 + 48^2$

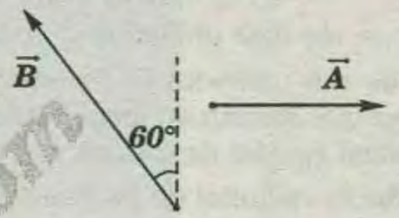
$\rightarrow R = 52$

RPTA :"D"

PROBLEMA 114:

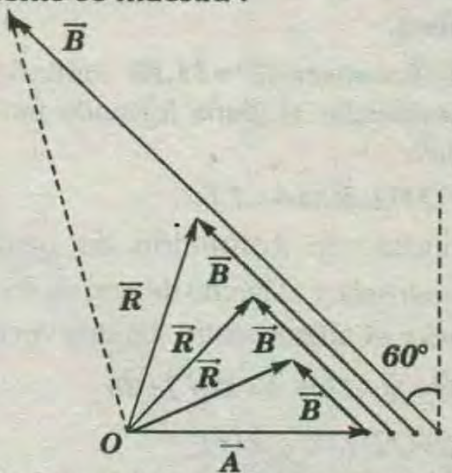
Se tiene dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tal como se muestra . Si $|\vec{A}| = 6u$ ¿qué valor tiene la resultante de estos vectores , si se sabe que es mínima?

A) 1μ
B) 3
C) $3\sqrt{3}$
D) $\sqrt{3}$



RESOLUCIÓN:

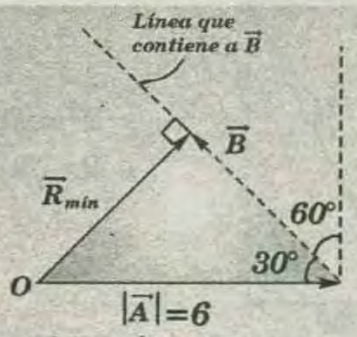
* $\vec{A}$ tiene dirección y módulo definidos , entonces, su longitud también está definida ; $\vec{B}$ tiene dirección definida, pero no tiene un valor definido ; entonces, la longitud del segmento dirigido que lo representa tampoco , tal como se muestra :



* El vector representado con líneas punteadas, representa la resultante $\vec{R}$ para los distintos casos planteados .

* Del gráfico se deduce que $\vec{R}$ también no tendría un valor definido ya que lo representa un segmento dirigido de diferente longitud ; por último , para que $\vec{R}$ tenga su menor valor (mínimo), el segmento dirigido que lo representa debe presentar la menor longitud, lo cual es posible si a partir de O lo dirigimos en forma perpendicular hacia la línea que contiene $\vec{B}$, tal como se ve a continuación :

www.GRATIS2.com



* Del Triángulo formado se tiene que :

$$R_{mín}=A\,sen30°=6\left(\frac{1}{2}\right)=3$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 115:

Un vector $\vec{a}$ de diez unidades de magnitud y otro vector $\vec{b}$ de seis unidades de magnitud apuntan en direcciones que forman un ángulo de $60°$. Encontrar

I) el producto escalar de los dos vectores .

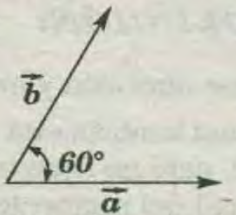
II) el producto vectorial de los mismos .

RESOLUCIÓN:

* Las magnitudes son :

$a = 10$ unidades

$b = 6$ unidades



$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos60°=30$ unidades al cuadrado (es un escalar).

II) $\vec{a}\times\vec{b}=ab\,sen60°=51{,}96$ unidades al cuadrado perpendicular al plano formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (es un vector).

PROBLEMA 116:

Aplicando la definición de producto escalar $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\phi$ y el hecho de que $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ obtener el ángulo entre los dos vectores dados por $\vec{a}=3\hat{i}+3\hat{j}-3\hat{k}$ y $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$.

RESOLUCIÓN:

* $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2+3\times1+(-3\times3)$

$\rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=6+3+-9 \qquad \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

* Las magnitudes de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ serán :

$$a=\sqrt{3^2+3^2+(-3)^2}=\sqrt{27}$$

$$b=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$$

* Determinación del ángulo que forman :

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\phi$$

como $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$\rightarrow \cos\phi=0 \Rightarrow \phi=90°$$

PROBLEMA 117:

El vector A tiene componentes $x\,;\,y\,;\,z$ de $8;12$ y -4 unidades , respectivamente .

a) Escriba una expresión vectorial para A en notación de vectores unitarios.

b) Obtenga una expresión de vectores unitarios para un vector B con una longitud de un cuarto de la longitud de A , apuntando en la misma dirección que A.

c) Obtenga una expresión de vectores unitarios para un vector C con tres veces la longitud de A , apuntando en la dirección opuesta a la de A .

RESOLUCIÓN:

* Por dato : $\vec{A}=(3;12;-4)u$

Parte (a): $\vec{A}=8\hat{i}+12\hat{j}-4\hat{k}$

Parte (b): $|\vec{A}|=\sqrt{8^2+12^2+(-4)^2}=\sqrt{224}=4\sqrt{14}$

$\rightarrow |\vec{A}|=\sqrt{14} \qquad B=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$

* pero: $a=8k \;;\; b=12k \;;\; c=-4k$

* Luego: $(8k)^2+(12k)^2+(-4k)^2=14 \Rightarrow 224k^2=14$

$$\rightarrow k^2=\frac{1}{16} \;\Rightarrow\; k=\frac{1}{4}$$

* En consecuencia : $\vec{B}=2\hat{i}+3\hat{j}-1\hat{k}$

Parte (c): $|\vec{C}|=3|\vec{A}| \Rightarrow |\vec{C}|=12\sqrt{14}$

* Luego : $\vec{C}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$

* Sabemos que: $\vec{A}$ y $\vec{C}$ no son paralelos .

$\Rightarrow a=-8k \;\wedge\; b=-12k \;\wedge\; c=4k$

$\Rightarrow (-8k)^2+(-12k)^2+(4k)^2=144\times14$

$\rightarrow 224k^2=144\times14 \Rightarrow k^2=9 \rightarrow k=3$

* Luego : $\vec{C}=-24\hat{i}+36\hat{j}+12\hat{k}$

PROBLEMA 118:

Dados los vectores desplazamiento $\vec{A}=(3\hat{i}-4\hat{j}+4\hat{k})m$ y $\vec{B}=(2\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k})m$, encuentre las magnitudes de los vectores

a) $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$

b) $\vec{D}=2\vec{A}-\vec{B}$, expresando también cada uno en función de sus componentes rectangulares .

RESOLUCIÓN:

Sea : $\vec{A}=(3\hat{i}-4\hat{j}+4\hat{k})m$; $\vec{B}=(2\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k})m$

Parte (a) : $\vec{C}-\vec{A}=\vec{B}$

$\Rightarrow \vec{C}=(3\hat{i}-4\hat{j}+4\hat{k})+(2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k})=(5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})m$

$\vec{C}=\sqrt{(5)^2+(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{35}m$

Parte (b) : $\vec{A}=(3\hat{i}-4\hat{j}+4\hat{k}) \Rightarrow 2\vec{A}=(6\hat{i}-8\hat{j}+8\hat{k})m$

* Luego : $\vec{D}=2\vec{A}-\vec{B}=(6\hat{i}-8\hat{j}+8\hat{k})-(2\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k})$

$\rightarrow \vec{D}=(4\hat{i}-11\hat{j}+15\hat{k})m$

$\rightarrow |\vec{D}|=\sqrt{(4)^2+(-11)^2+(15)^2}=\sqrt{362}$

PROBLEMA 119:

Si $\vec{A}=(6\hat{i}-8\hat{j})$ unidades , $\vec{B}=(-8\hat{i}+3\hat{i})$ unidades , y $\vec{C}=(26\hat{i}+19\hat{j})$ unidades, determine a y b de manera que : $a\vec{A}+b\vec{B}+\vec{C}=0$.

RESOLUCIÓN:

* Por dato: $\vec{A}=(6\hat{i}-8\hat{j})u$; $\vec{B}=(-8\hat{i}+3\hat{j})u$;

$\vec{C}=(20\hat{i}+19\hat{i})u$; $a\vec{A}+b\vec{B}+\vec{C}=0$

$\Rightarrow a(6\hat{i}-8\hat{j})+b(-8\hat{i}+3\hat{j})+26\hat{i}+19\hat{j}=0\hat{i}+0\hat{j}$

$\Rightarrow 6a\hat{i}-8b\hat{i}+26\hat{i}=0\hat{i} \Rightarrow 8b-6a=26$ ..... (I)

$-8a\hat{j}+3b\hat{j}+19\hat{j}=0\hat{j} \Rightarrow 8a-3b=11$ ..... (II)

* Resolviendo la ecuación resulta que $a=5 \wedge b=7u$.

PROBLEMA 120:

Determinar el ángulo que forman el vector $\vec{a}\times\vec{b}$ y el semieje positivo Z . Si $\vec{a}=(6;0;8)$ y $\vec{b}=(3;1;4)$.

RESOLUCIÓN:

1°) En semieje positivo Z consideramos al vector unitario $\hat{k}=(0;0;1)$ ..... (I)

2°) Determinamos el vector $\vec{a}\times\vec{b}$ y su módulo

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 6 & 0 & 8\\ 3 & 1 & 4\end{vmatrix}$$

* Desarrollando:

$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=(-8;0;6)$ ..... (II)

y : $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(-8)^2+0^2+6^2}=10$ ..... (III)

3°) Usando producto escalar calculamos ángulo formado por $\vec{a}\times\vec{b}$ eje Z :

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\hat{k}=|\vec{a}\times\vec{b}|\ |\hat{k}|\cos\theta$ ..... (α)

* *(II)* y *(III)* en α :

$\Rightarrow (-8;0;6)(0;0;1)=10\cos\theta \Rightarrow 6=10\cos\theta$

$\rightarrow \cos\theta=\frac{3}{5} \rightarrow \theta=53°$

PROBLEMA 121:

Un paralelepípedo tiene un vértice en $A=(1;2;3)$, siendo B, C y O sus vértices adyacentes . Además , se conoce que :

$\overrightarrow{AB}=2(1;0;1)$; $\overrightarrow{AC}=3(1;1;1)$ y $\overrightarrow{AD}=4(0;1;1)$.

¿Cuál es el vértice opuesto a A?

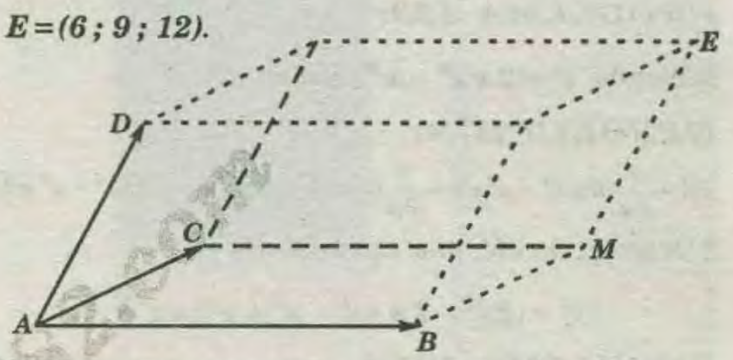
RESOLUCIÓN:

* De acuerdo al gráfico , vemos que el vértice opuesto a A es E luego :

$E=A+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{ME}=A+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

$=(1;2;3)+2(1;0;1)+3(1;1;1)+4(0;1;1)$

$E=(6;9;12)$.



PROBLEMA 122:

Desde $A=(1+2\sqrt{2};3;3+2\sqrt{2})$ y $B=(4;2;0)$ parten móviles que se dirigen perpendicularmente hacia la recta que contiene al segmento $\overline{CD}$. Si $C=(3;2;1)$ y $D=(-1;4;5)$, ¿alguno de los móviles interseca a $\overline{CD}$, ¿por qué punto?.

RESOLUCIÓN:

* Es necesario y suficiente que uno de los ángulos adyacentes a la base $\overline{CD}$ del triángulo CBD(ó CAD) sea obtuso para que la perpendicular respectiva caiga en la prlongación de $\overline{CD}$.

I) En el triángulo CBD, $\overline{CB}=(1;0;-1)$ y $\overline{CD}=(-4;2;4)$ como $\overline{CB}\cdot\overline{CD}=-8<0$, el ángulo α entre estos Vectores es obtuso . Luego, el móvil que parte de B no interseca a $\overline{CD}$.

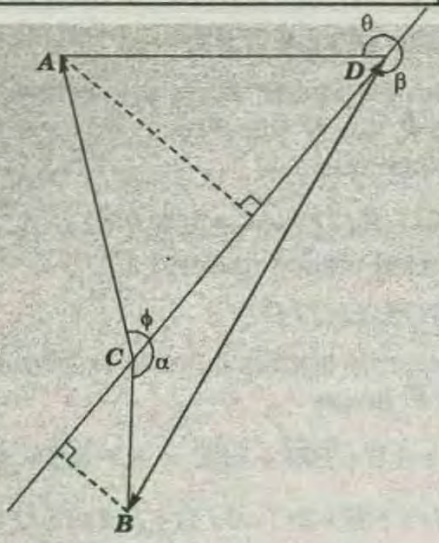
II) En el triángulo CAD :

$\overline{AC}=(2\sqrt{2}-2;1;2\sqrt{2}+2$ y $\overline{DA}=(2\sqrt{2}+2;-1;2\sqrt{2}-2)$

Como $|\overline{CA}|=|\overline{DA}|$, el triángulo es isósceles .

* Entonces, el ángulo ϕ es agudo y el buscando es el punto medio de $\overline{CD}$, así :

$$M=\frac{1}{2}(C+D)=(1;3;3)$$



PROBLEMA 123:

Sabiendo $\varnothing = 2xz^4 - x^2$; hallar $\nabla\varnothing$.

RESOLUCIÓN:

$$\nabla\varnothing = \frac{\partial}{\partial x}(2xz^4 - x^2y)\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}(2xz^4 - x^2y)\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}(2xz^4 - x^2y)\hat{k}$$

* Despues de efectuar operaciones :

$$\nabla\varnothing = (2z^4 - 2xy)\hat{i} - x^2\hat{j} + 8xz^3\hat{k}$$

PROBLEMA 124 :

Siendo $\vec{A} = x^2y\hat{i} - 2xz\hat{j} + 2yz\hat{k}$;hallar $\nabla\times\vec{A}$

RESOLUCIÓN:

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(-2xz)\right]\hat{i} - \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(-2x^2y)\right] +$$

$$\hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-2xz) - \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y)\right] = (2z + 2x)\hat{i} + 0\hat{j} - \hat{k}(2z + x^2)$$

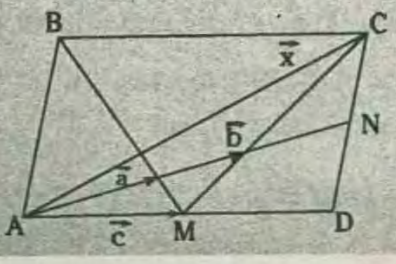
* Entonces : $\nabla\times\vec{A} = (2x + 2z)\hat{i} - (x^2 + 2z)\hat{k}$

PROBLEMA 125:

En el esquema mostrado, **ABCD** es un romboide Donde **M** es punto medio de **AD** y **N** punto medio de $\overline{CD}$.

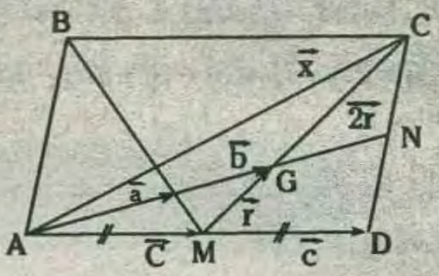
Hallar : $m^2 + n^2 + p^2$, si: $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

A) 12
B) 15
C) 18
D) 22
E) 24



RESOLUCIÓN:

* El punto **G** es baricentro del **ACD**. → $\overline{GC} = 2\overline{MG}$
* Si: $\overline{MG} = \vec{r} \rightarrow \overline{GC} = 2r$



* $\triangle AMG$: $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ .....(I)
* $\triangle AMC$: $\vec{x} = \vec{c} + 3\vec{r}$.....(II)
* (I) en (II): $\vec{x} = \vec{c} + 3(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$

$$\rightarrow \vec{x} = 3\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$$

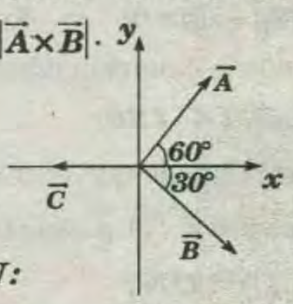
* Comparando: $m=3$, $n=3$ y $p=-2$
* Se pide: $m^2 + n^2 + p^2 = 22$

RPTA : "D"

PROBLEMA 126:

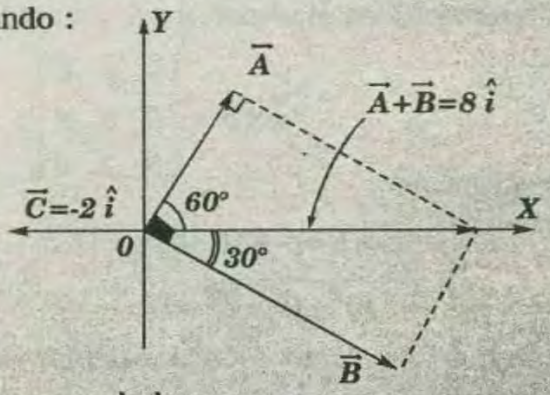
Respecto a los vectores mostrados . $|\vec{c}|=2$ y $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=6\hat{i}$; halle $|\vec{A}\times\vec{B}|$.

A) $5\sqrt{3}$
B) $20\sqrt{3}$
C) 36
D) $16\sqrt{3}$



RESOLUCIÓN:

* Si $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=6\hat{i}$ y $\vec{C}=-2\hat{i}$, entonces la resultante de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ debe ser paralelo al eje **X** e igual a $8\hat{i}$.
* Graficando :



* De la figura se deduce que :

$$|\vec{A}| = 4 \wedge |\vec{B}| = 4\sqrt{3}$$

* El módulo del produccto vectorial de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es :

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\cos(90°) = (4)(4\sqrt{3})(1) = 16\sqrt{3}$$

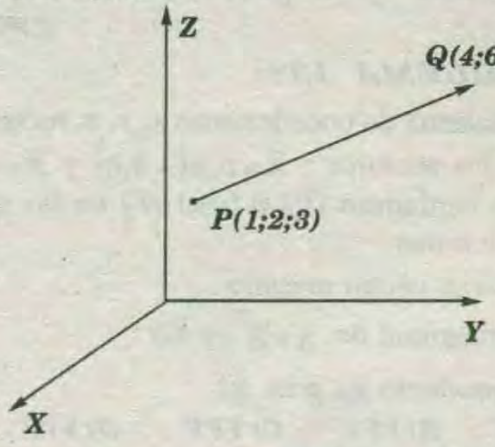
RPTA : "D"

PROBLEMA 127:

Se traza un vector $\overrightarrow{PQ}$ entre los puntos $P(1;2;3)$ y $Q(4;6;8)$ de un sistema coordenado cartesiano. La relación (componente x) ÷ (componente z) de $\overrightarrow{PQ}$, es :

A) 0,6 B) 0,65 C) 0,7 D) 0,75

RESOLUCIÓN:



$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(4;6;8)-(1;2;3)$

$\overrightarrow{PQ}=(V_x;V_y;V_z)=(8;4;5)$

* La componente de $\overrightarrow{PQ}$ en x es : $V_x=3$

* La componente de $\overrightarrow{PQ}$ en x es : $V_z=5$

* Se pide: $3\div 5=0,6$

RPTA : "A"

PROBLEMA 128:

La resultante $\vec{R}$ de los vectores $A=3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$ y $\vec{B}=-\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}$, forma un ángulo de $37°$ con la recta L. Halle el módulo de la componente de $\vec{R}$ a lo largo de L :

A) 3,23 B) 5,6 C) 8,3 D) 4,4

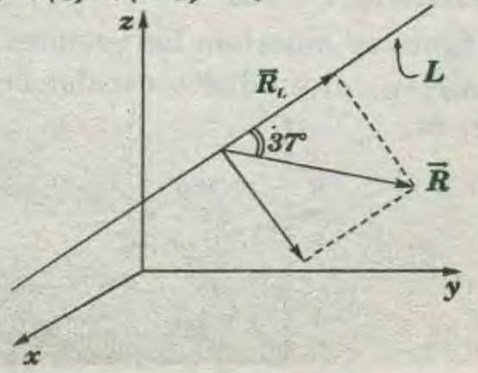
RESOLUCIÓN:

$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}$

$\vec{R}=(\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k})+(-\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k})$

$\vec{R}=2\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}$

$\Rightarrow |\vec{R}|=\sqrt{(2)^2+(6)^2+(-3)^2}=7$



* El módulo de la componente de $\vec{R}$ a lo largo de L es :

$$\vec{R}_L=|\vec{R}|\cos 37°=7\times\left(\frac{4}{5}\right)=5,6$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 129:

Dados los vectores: $\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}$; $\vec{A}=\hat{i}-2\hat{j}$ determine

$$\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{\vec{A}\,.\,\vec{B}}$$

A) $1,75\hat{k}$ B) $0,68\hat{k}$ C) $-1,75\hat{k}$

D) $1,92\hat{k}$ E) $-1,92\hat{k}$

RESOLUCIÓN:

* Calculado $\vec{A}\times\vec{B}$:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} + & - & + \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B}=+\hat{i}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-7\hat{k}$$

* Calculado $\vec{A}.\vec{B}$:

$\vec{A}.\vec{B}=(2;3;0).(1;-2;0)$

$\rightarrow \vec{A}.\vec{B}=2\times 1+3\times(-2)+0\times 0$

$\rightarrow \vec{A}.\vec{B}=-4$

* Se pide: $\frac{-7\hat{k}}{-4}=1,75\hat{k}$

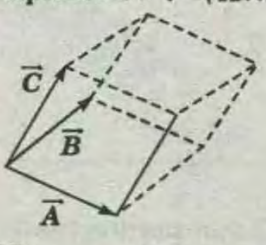
RPTA : "A"

PROBLEMA 130:

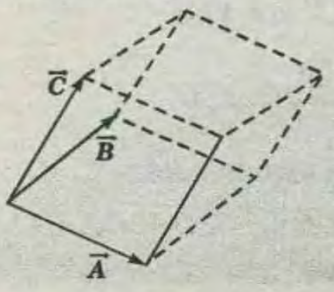
Los lados de un paralelepípedo oblicuo tiene lados dados por los vectores : $\vec{A}=\hat{i}$; $\vec{B}=\hat{i}+\hat{j}$ y $\vec{C}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$.

Halle el valor de la expresión : $V=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



RESOLUCIÓN:



$\vec{A}=(1;0;0)$

$\vec{B}=(1;1;0)$

$\vec{C}=(1;1;1)$

PAG GRATIS.com

* Nos piden : $\vec{V}=(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}$ .....*(I)*

* Calculando $\vec{A}\times\vec{B}$:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=+\hat{i}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=+\hat{i}(0)-\hat{j}(0)+\hat{k}(1)=\hat{k} \quad \rightarrow \vec{A}\times\vec{B}=(0;0;1)$$

* Reemplazando en *(I)*:

$$V=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} \quad \rightarrow V=(0;0;1)\cdot(1;1;1)$$

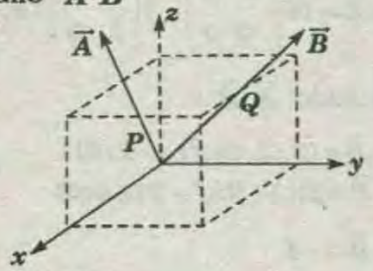
$$\rightarrow V=0\times1+0\times1+1\times1=1$$

RPTA : "A"

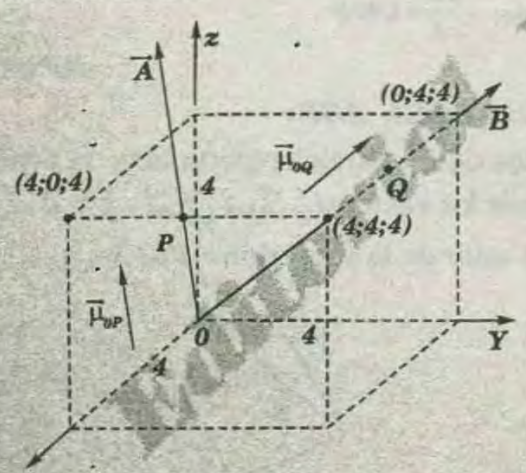
PROBLEMA 131:

El cubo mostrado tiene una arista de **4cm**, **P** y **Q** son puntos medios de los lados respectivos . Los módulos de los vectores **A** y **B** son **30** y **12** respectivamente. Halle $\vec{A}\cdot\vec{B}$

A) -180
B) 320
C) 200
D) 120



RESOLUCIÓN:



* Como **P** y **Q** son puntos medios , entonces :

$$\overrightarrow{OP}=P=\frac{(4;0;4)+(4;4;4)}{2}=(4;2;4)$$

$$\overrightarrow{OQ}=Q=\frac{(4;4;4)+(0;4;4)}{2}=(2;4;4)$$

* El vector $\vec{A}$ se puede expresar así :

$$\vec{A}=|\vec{A}|\vec{\mu}_{OP}=|\vec{A}|\left(\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}\right)$$

$$\rightarrow \vec{A}=30\left(\frac{(4;2;4)}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}}\right)=5(4;2;4)$$

* Analogamente :

$$\vec{B}=|\vec{B}|=\vec{\mu}_{OQ}=12\left(\frac{(2;4;4)}{\sqrt{2^2+4^2+4^2}}\right)\rightarrow \vec{B}=2(2;4;4)$$

* Finalmente : $\vec{A}\cdot\vec{B}=[5(4;2;4)\cdot2(2;4;4)]=320$

RPTA : "B"

PROBLEMA 132:

En un sistema de coordenadas **x, y, z**, rectangulares, se dan los vectores : $\vec{A}=0,8\hat{i}+0,6\hat{j}$ y $\vec{B}=-3\hat{i}+4\hat{j}$. Indique verdadero *(V)* o falso *(F)* en las siguientes proposiciones:

I) Solo $\vec{A}$ es vector unitario .

II) La magnitud de $\vec{A}\times\vec{B}$ es **4,8** .

III) El producto $\vec{A}\times\vec{B}$ es $5\hat{k}$

A) VVV **B) FVV** **C) VFV** **D) VVF** **E) FFF**

RESOLUCIÓN:

* Sea los vectores:

I) VERDADERA: ya que como $|\vec{A}|=1$ y $|\vec{B}|=5$; entonces solo "$\vec{A}$" es un vector unitario .

II) FALSA : dado que calculando $\vec{A}\times\vec{B}$.

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0,8 & 0,6 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\hat{i}\begin{vmatrix} 0,6 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix} 0,8 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix} 0,8 & 0,6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{A}\times\vec{B}=5\hat{k}\rightarrow|\vec{A}\times\vec{B}|=5$$

III)VERDADERA : porque $\vec{A}\times\vec{B}=5\hat{k}$

RPTA : "C"

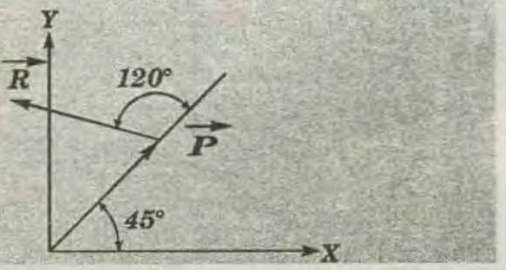
PROBLEMA 133:

En la figura se muestran los vectores $\vec{P}$ y $\vec{R}$. Si $|\vec{R}|=1,5|\vec{P}|=\alpha$, el producto escalar de $(\vec{P}-\vec{R})$ y $(\vec{P}+\vec{R})$ es :

A) $\frac{\alpha^2}{3}$

B) $\frac{\alpha^2}{6}$

C) $\frac{5\alpha^2}{9}$



RESOLUCIÓN:

* Piden calcular : $M=(\vec{P}-\vec{R})\cdot(\vec{P}+\vec{R})$

* Usando álgebra vectorial :

$$M=\vec{P}\cdot\vec{R}+\vec{P}\cdot\vec{R}-\vec{R}\cdot\vec{P}+\vec{R}\cdot\vec{R}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

* Se conoce que : $\vec{A}.\vec{A}=|\vec{A}|^2$ y $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$

* Usando estas propiedades en *(I)* tenemos :

$$M=|\vec{P}|^2+\cancel{\vec{P}.\vec{R}}-\cancel{\vec{R}.\vec{P}}-|\vec{R}|^2$$

$$\rightarrow M=\left(\frac{a}{1,5}\right)^2-a^2 \qquad \rightarrow M=\frac{-5a^2}{9}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 134:

Calcule la suma de los vectores unitarios de los productos $\vec{A}\times\vec{B}$, $\vec{C}\times\vec{D}$ y $\vec{E}\times\vec{F}$.

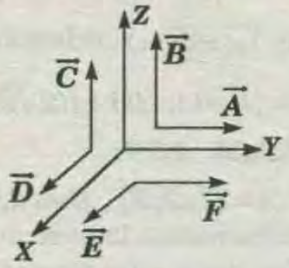
A) $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

B) $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

C) $-\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

D) $\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$

E) $-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$



RESOLUCIÓN:

* Aplicamos la regla de la mano derecha para cada productos vectorial escribimos :

$$\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}\times\vec{B}|\hat{i}\ ;\ \vec{C}\times\vec{D}=|\vec{C}\times\vec{D}|\hat{j}\ ;\ \vec{E}\times\vec{F}=|\vec{E}\times\vec{F}|\hat{k}$$

* Luego, la suma de los vectores unitarios de estos productos vectoriales es :

$$\vec{\mu}_{\vec{A}\times\vec{B}}+\vec{\mu}_{\vec{C}\times\vec{D}}+\vec{\mu}_{\vec{E}\times\vec{F}}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 135:

Con relación a las siguientes proposiciones sobre las operaciones vectoriales . Indique verdadero *(V)* o falso *(F)* :

I) Si $\vec{A}=6\hat{i}$ y $\vec{B}=8\hat{j}$; $\vec{A}\times\vec{B}=48$

II) Si $\vec{C}=6\hat{j}$: $\vec{D}=8\hat{k}$; $\vec{C}\times\vec{D}=-48\hat{i}$

III) Para dos vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ se cumple $\vec{V}_1\times\vec{V}_2=\vec{V}_2\times\vec{V}_1$

A) VVV B)VVF C)VFV D)FVV E) FFF

RESOLUCIÓN:

I) FALSA : ya que $\vec{A}=6\hat{i}$ y $\vec{B}=8\hat{j}$; $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$

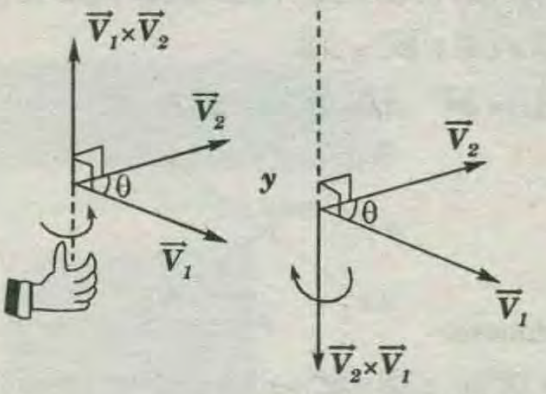
$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B}=(6\hat{i})\times(8\hat{j})=48\hat{i}\times\hat{j}\Rightarrow\vec{A}\times\vec{B}=48\hat{k}$

II) FALSA : dado que .

Si $\vec{C}=6\hat{j}$ y $\vec{D}=8\hat{k}$; $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$

$\Rightarrow \vec{C}\times\vec{D}=(6\hat{j})\times(8\hat{k})=48\hat{j}\times\hat{k}$; $\vec{C}\times\vec{D}=48\hat{i}$

III) FALSA : porque $\vec{V}_1\times\vec{V}_2=-\vec{V}_2\times\vec{V}_1$ ya que :



RPTA: "E"

PROBLEMA 136:

Dado los vectores $\vec{P}=2\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k}$ y $\vec{Q}=4\hat{i}+3\hat{j}$, determine el cociente de la proyección $\vec{P}$ sobre $\vec{Q}$ entre la proyección de $\vec{Q}$ sobre $\vec{P}$.

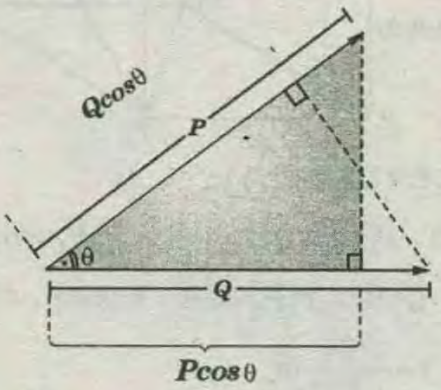
A) 0,25 B) 0,4 C) 0,5 D) 0,6 E) 1,2

RESOLUCIÓN:

* Se deduce que:

$$\vec{P}=|\vec{P}|=\sqrt{2^2+4^2+4^2}=6\ ;\ Q=|\vec{Q}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

* Luego proyección $\vec{Q}$ sobre $\vec{P}$



* Se pide proyección de $\vec{P}$ sobre $\vec{Q}$

$$x=\frac{P\cos\theta}{Q\cos\theta}\Rightarrow x=\frac{P}{Q}=1,2$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 137:

En un rectángulo *ABCD*, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ miden *4* y *3* unidades, respectivamente : ¿Cuál es la longitud del vector $\overline{AB}\times\overline{AD}$?

RESOLUCIÓN:

* Vemos que :

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}$

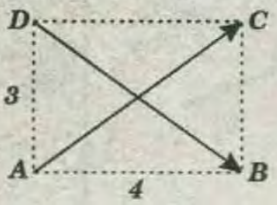
* Luego :

$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\times(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB})=$

$=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AB}$

$=-\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$



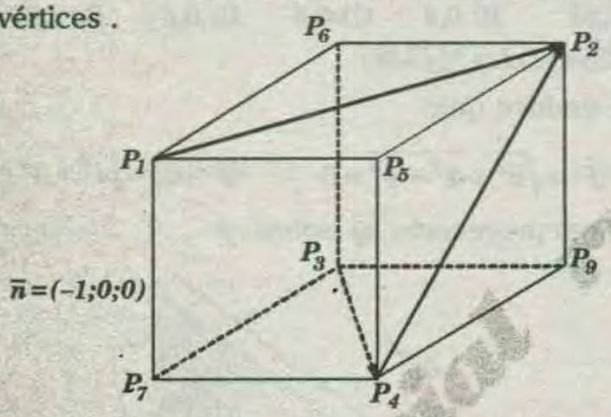
* Entonces:

$|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DC}|=|-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=2|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}||sen(\pi/2)|$

$=2\times4\times3\times1=24$

PROBLEMA 138:

Sean los puntos $P_1=(1;2;3)$; $P_2=(1;3;0)$; $P_3=(1+\sqrt{5};4;2)$ y $P_4=(1+\sqrt{5};1;1)$. Los segmentos $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_3P_4}$ son las diagonales de dos caras opuestas de un cubo. hallar sus vértices .



RESOLUCIÓN:

Vemos que : $\overrightarrow{P_1P_2}=(0;1;-3)$ y $\overrightarrow{P_3P_4}=(0;-3;-1)$

Además : $|\overrightarrow{P_1P_2}|=|\overrightarrow{P_3P_4}|=\sqrt{10}$. Luego , el lado del cubo es : $\ell=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}$

La dirección de una arista lateral está dada por :

$$\overrightarrow{P_3P_4}\times\overrightarrow{P_1P_2}=10(-1;0;0)$$

Por lo tanto, una normal a las bases en $\vec{n}=(-1;0;0)$, (vector unitario) .

* Entonces :

$P_5=P_4+\sqrt{5}\vec{n}=(1+\sqrt{5};1;1)+\sqrt{5}(-1;0;0)=(1;1;1)$

$P_6=P_3+\sqrt{5}\vec{n}=(1+\sqrt{5};4;2)+\sqrt{5}(-1;0;0)=(1;4;2)$

$P_7=P_1-\sqrt{5}\vec{n}=(1;2;3)+\sqrt{5}(1;0;0)=(1+\sqrt{5};2;3)$

$P_8=P_2-\sqrt{5}\vec{n}=(1;3;0)+\sqrt{5}(1;0;0)=(1+\sqrt{5};3;0)$

RESOLUCIÓN:

* Si α,β y γ son los ángulos que hace un vector $\vec{a}$ con los ejes coordenados X^+, Y^+ y Z^+, respectivamente ; entonces :

$$\vec{a}=|\vec{a}|\times(cos\alpha;\ cos\beta;\ cos\gamma)$$

Donde las componentes son las cosenos directores de $\vec{a}$.

Luego:

$\vec{a}=|\vec{a}|(cos\,45°\alpha,\ cos60°\beta,\ cos45°)=|\vec{a}|(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

* Tambien: $\vec{b}=|\vec{b}|(1/\sqrt{2};1/\sqrt{2};0)$

$a)\ \phi=arc\cos(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|})=arc\cos(\frac{|\vec{a}||\vec{b}|(2+\sqrt{2})}{4|\vec{a}||\vec{b}|})=arc\cos(\frac{2+\sqrt{2}}{4})$

es el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

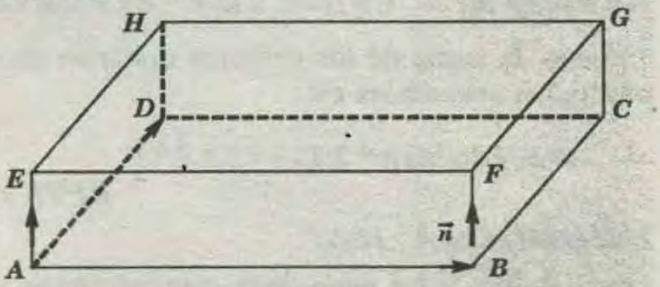
b) Nos dicen: $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$. Además $\vec{a}+\vec{b}=(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}+1}{2};\frac{1}{2})$

* Luego : $L=\{P=(1;1;1)+t(2\sqrt{2},1+\sqrt{2},1)/t\in\mathbb{R}\}$

PROBLEMA 139:

los puntos $A=(1;2;3)$, $B=(2;2;3)$, $C=(2;5;3)$ y $D=(1;5;3)$ determinan la base de un paralelepípedo rectángulo (es decir, sus caras son rectángulos). Dos de los vértices de la cara opuesta a la base pertenencen a la recta $\{P/P=(2;3;5)+t(0;1;0)\}$. ¿Cuáles son dichos vértices? .

RESOLUCIÓN:



$\overrightarrow{AB}=(1;0;0)$; $\overrightarrow{AD}=3(0;1;0)$. Luego, la recta pasa por el segmento $\overline{EH}$ o por el segmento $\overline{FG}$, (ya que es paralela a $(0;1;0)$)

* La dirección de la normal a las bases es :

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=3(0;0;1)$.Elejimos como nornal a $\vec{n}=(0;0;1)$.

Si asumimos que la recta pasa por $\overline{EH}$, se tendría : $A+s\vec{n}=E=(2;3;5)+t(0;1;0)$ para algún s y t .

Efectuando : $(1;2;3)+s(0;0;1)=(2;3+t;5)$

$\Rightarrow (1;2;3+s)=(2;3+t;5)$, lo cual es una contracción , (ya que las primeras componentes son

diferentes) .

* Luego , la recta pasa por $\overline{FG}$ y se tiene que :

Resolviendo: $s=2\ ,\ t=-1$

*Luego:

$F=(2;2;3)+2(0;0;1)=(2;2;5)$ y $G=C+\overline{CG}$

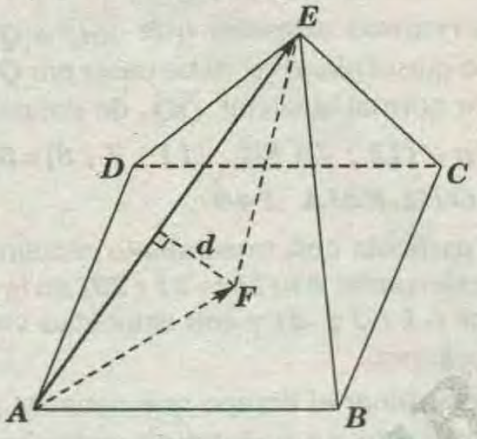
$\Rightarrow G=C+\overline{BF}\Rightarrow G=(2;5;3)+2(0;0;1)=(2;5;5)$

PROBLEMA 140:

Los puntos $A=(1;1;1);\ B=(4;1;1);\ C=(4;1+3\sqrt{3};1)$, $D=(1;1+3\sqrt{3};1)$ y $E=(5/2;1+3\sqrt{3}/2;5)$ forman una pirámide de base rectangular con vértice E . ¿Cuál es la distancia del centro de la base a una arista lateral?

RESOLUCIÓN:

* Efectuando un gráfico aproximado :



Por ser $ABCD$ un rectángulo su centro F es :

$$F=\frac{1}{2}(A+C)=\frac{1}{2}(B+D)=(\frac{5}{2};1+\frac{3}{2}\sqrt{3};1)$$

$$\overline{AF}=\frac{1}{2}(3;3\sqrt{3};0)\Rightarrow\overline{AF}=3$$

$$\overline{AE}=\frac{1}{2}(3;3\sqrt{3};8)\Rightarrow\overline{AF}=5$$

$$\Rightarrow\ \left|Comp_{\overline{AE}}\,\overline{AF}\right|=\frac{9}{5}$$

* Por pitágoras :

$$d=\sqrt{\left|\overline{AF}\right|^2-\left|Comp_{\overline{AE}}\,\overline{AF}\right|^2}=\frac{12}{5}=2{,}4$$

* Puede comprobarse , que :

$$|\overline{AF}|=|\overline{BE}|=|\overline{CE}|=|\overline{DE}|$$

Por lo que distancia de F a las otras aristas es la misma.

PROBLEMA 141:

Averiguar si los siguientes puntos : $A=(1\ ;\ 3\ ;\ 2)$, $B=(2\ ;\ 3\ ;\ 1)$ y $C=(3;\ 4\ ;\ 5)$, son los colineales o no.

RESOLUCIÓN:

* Los puntos A, B y C serán colineales si y sólo los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son paralelos .

* Vemos que: $\overline{AB}=B-A=(2;3;1)-(1;3;2)=(1;0;-1)$

y $\overline{AC}=C-A=(2\ ;1;3)$.

* Luego , $\overline{AB}\,//\,\overline{AC}\Leftrightarrow\overline{AB}\times\overline{AC}=\vec{0}$.

* Veamos:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&0&-1\\2&1&3\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}0&-1\\1&3\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}1&-1\\2&3\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k}=(1\ ;-5\ ;\ 1)\neq\vec{0}=(0\ ;0\ ;0)$$

*por lo tanto , los puntos A , B y C no son colineales

PROBLEMA 142:

Sean los vectores $\vec{a}=(-3\ ;4\ ;1)$ y $\vec{b}=(3\ ;\sqrt{2}\ ;5)$.

Derteminar un vector $\vec{c}$ ortogonal el vector $(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$ que satisface las condiciones: $\vec{a}\ .\ \vec{c}=6$ y $Comp_{\vec{b}}\,\vec{c}=1$

RESOLUCIÓN:

* sea $\vec{c}=(c_1;c_2;c_3)\wedge\vec{d}=(0;1;0)$

*como $\vec{c}\perp\vec{d}\Rightarrow\vec{c}.\vec{d}=0$

$\Rightarrow(c_1;c_2;c_3).(0;1;0)=0\Rightarrow c_2=0$

*como $\vec{a}.\vec{c}=6$

$\Rightarrow(-3;4;1).(c_1;1;c_3)=6\Rightarrow-3c_1+c_2=6....(I)$

Por otro lado : $Comp_{\vec{b}}\,\vec{c}=1\Leftrightarrow\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|}=1\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|=6$

$$\Leftrightarrow 3c_1+5c_3=6.....(II)$$

* De (I) y (II) : $c_1=-4/3\ ;\ c_3=2$

* Luego : $\vec{c}=(-4/3\ ;\ 0\ ;\ 2)$

PROBLEMA 143:

Dado el paralelepípedo $ABCDEFGH$, encontrar el ángulo que forman los vectores $\overline{AF}$ y $\overline{AC}$, sabiendo que: $A=(4\ ;\ 0\ ;-1)$, $F=(f_1;f_2;0)$, $\overline{PF}=Proy_{\overline{AF}}\,\overline{CF}=(3\ ;6\ ;3)$ y $\overline{CP}=(-1;3\ ;7)$.

RESOLUCIÓN:

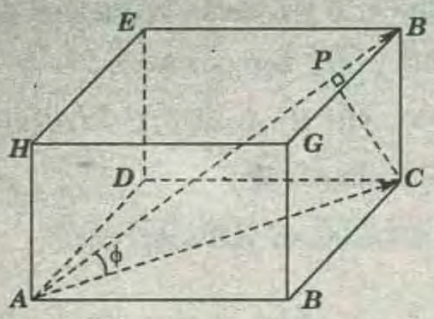
* Vemos que: $\overline{CF}=\overline{CP}+\overline{PF}=(-1;3\ ;7)+(3,-6\ ;3)$

$\Rightarrow\overline{CF}=(2\ ;-3\ ;10).....(I)$

* Como $Proy_{\overline{AF}}\,\overline{CF}=\overline{PF}\Rightarrow\overline{AF}\,//\,\overline{PF}$

$\Rightarrow\overline{AF}=t\,\overline{PF}\ \Rightarrow F-A=t(3\ ;-6\ ;3)$

$\Rightarrow (f_1-4;f_2;1)=t(3;-6;3)$



* Igualando componentes:

$$f_1-4=3t\ ;\ f_2=-6t,\ \ 1=3t$$

* De donde:

$t=1/3 \Rightarrow f_1=5$ y $f_2=-2 \Rightarrow F=(5;-2;0)$ ..... **(II)**

y $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PF}=(1;-2;1)$

* De **(I)** y **(II)** : $\overrightarrow{CF}=F-C=(2;-3;10)$

$\Rightarrow C=F-(2;-3;10)=(5;-2;0)-(2;-3;10) \Rightarrow C=(3;1;-10)$

*Luego , como $\overrightarrow{AF}=(1;-2;1)$ y $\overrightarrow{AC}=C-A=(-1;1;-9)$

$$\Rightarrow \cos\phi=\frac{\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AF}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{(1;-2;1).(-1;1;-9)}{\sqrt{6}\ \sqrt{83}}=-\frac{12}{\sqrt{6}\ \sqrt{83}}$$

$$\Rightarrow \phi=arc\cos\left(-\frac{12}{\sqrt{6}\ \sqrt{83}}\right)$$

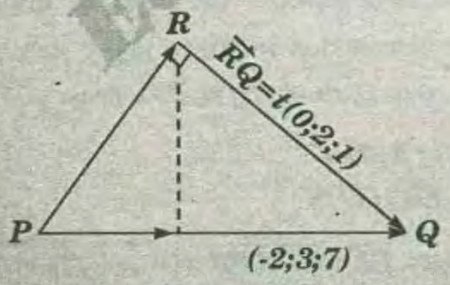
PROBLEMA 144:

Se tiene que los puntos **P, Q** y **R** foman un triángulo rectángulo , donde $\overrightarrow{RP}$ y $\overrightarrow{RQ}$ son los catetos. Encontrar la proyección del cateto $\overrightarrow{PR}$ sobre la hipotenusa $\overrightarrow{PQ}$, si el vector $\overrightarrow{RQ}$ es paralelo al vector $(0;2;1)$ y el vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene componentes $(-2;3;7)$.

RESOLUCIÓN:

* Por dato: $\overrightarrow{RQ}=t(0;2;1)$; $\overrightarrow{PQ}=(-2;3;7)$

* Luego : $\overrightarrow{RQ}=Proy_{(0;2;1)}(-2;3;7)$



$$\rightarrow \overrightarrow{RQ}=\left[\frac{(-2;3;7);(0;2;1)}{|(0;2;1)|^2}\right](0;2;1)=\frac{13}{5}(0;2;1)$$

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{RQ}=(-2;3;7)-\frac{13}{5}(-10;-11;22)=\frac{1}{5}(-10;-11;22)$$

$$\Rightarrow Proy_{\overrightarrow{PQ}}\overrightarrow{PR}=\left[\frac{\frac{1}{5}(-10;-11;22).(-2;3;7)}{|(-2;3;7)|^2}\right](-2;3;7)=\frac{141}{(5)(62)}(-2;3;7)$$

PROBLEMA 145:

Hallar la ecuación del plano $\mathscr{P}$ que pase por el punto de intersección de las rectas $L_1=\{(9;5;4)+t(1;1;2)\}$ y $L_2=\{(1;2;3)+s(2;1;1)\}$, siendo la distancia del plano al origen igual a $\sqrt{235}$ unidades .

RESOLUCIÓN:

* Sea $\{Q\}=L_1\cap L_2$, entonces $Q\in L_1$ y $Q\in L_2$.

* Luego :

$Q=(9;5;4)+t(1;1;2)=(1;2;3)+s(2;1;1)$

$\Rightarrow (8;3;1)+s(2;1;1)-t(1;1;2)$

Igualdad las respectivas componentes : $t=2;\ s=5$.

Por lo tanto $Q=(11;7;8)$

Observamos además que $|\overrightarrow{0Q}|=|Q|=\sqrt{234}$, de modo que el plano $\mathscr{P}$ debe pasar por Q y tener como vector normal al vector $\overrightarrow{OQ}$, de donde :

$\mathscr{P}$: $(p-(11\ ;\ 7\ ;\ 8))\ .\ (11\ ;\ 7\ ;\ 8)=0$

PROBLEMA 146:

Una partícula con movimiento rectilíneo uniforme, parte del punto $A=(11\ ;\ -21\ ;\ 20)$ en la dirección del vector $(-1\ ;\ 2\ ;\ -2)$ y con velocidad $v=12$ unidades por segundo.

a) Determinar el tiempo que necesita para recorrer el segmento comprendido entre los planos $\mathscr{P}$: $2x+3y+5x-41=0$ y $\mathscr{C}$: $2x+3y+5z+31=0$

b) ¿Cuál es el tiempo mínimo que la partícula necesita para pasar de un plano a otro, si la velocidad es la misma?.

RESOLUCIÓN:

a) Considerando la dirección unitaria del vector $(-1\ ;\ 2\ ;\ -2)$ tenemos :

$\vec{u}=(-1;2;-2)/3$, basta considerar un punto cualquiera $B\in\mathscr{P}$, como por ejemplo $B=(1\ ;\ 3\ ;\ 6)\in\mathscr{P}$. Para llegar al plano $\mathscr{C}$ en un punto $C\in\mathscr{C}$ se requiere que .

$$C=B+12\vec{u}=(1;3;6)+4t(-1;2;-2)\in\mathscr{C}$$

Reemplazando las coordenadas de C en $\mathscr{C}$ tenemos:

$2(1-4t)+3(3+8t)+5(6-8t)+31=0 \Rightarrow t=3\ seg$.

Luego, el tiempo requerido para recorrer el segmento comprendido entre los planos $\mathscr{P}$ y $\mathscr{C}$, en la dirección del vector $(-1;\ 2\ ;-2)$, **es** $t=3\ seg$.

b) Para calcular el tiempo mínimo , debemos avanzar en la dirección del vector normal común $\vec{n}=(2\ ;3\ ;5)$, (notar que los planos son paralelos) .

* Luego:

$C=B+(12r\vec{n}/|\vec{n}|=(1;3;6)+(12t/\sqrt{38})(2;3;5)\in\mathscr{C}$

Reemplazando las coordenadas de C en $\mathscr{C}$ tenemos:

$2(1+24t/\sqrt{38})+3(3+36t/\sqrt{38})+5(6+60t/\sqrt{38})+31=0$

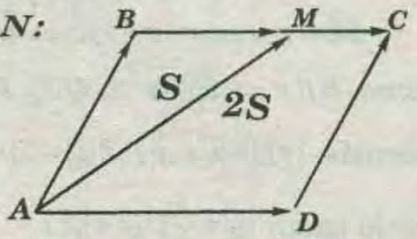
$\Rightarrow t=-6/\sqrt{38}$ seg.

* Por lo tanto , el tiempo mínimo para pasar de un plano a otro es $6/\sqrt{38}$ seg El signo (–) indica que se debe avanzar a partir de $B=(1;3;6)\in\mathscr{P}$, en el mismo sentido que el vector $(-2;-3;-5)$.

PROBLEMA 147:

Sea $ABCD$ un paralelogramo . M un punto del lado $\overline{BC}$. Si se sabe que el área del triángulo ABM es igual a la mitad del área del cuadrilátero $AMCD$ y que: $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{DC}+n\overrightarrow{AD}$. Calcular: $m+3n$

RESOLUCION:



*área del triángulo ABM :

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}^{\perp}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}^{\perp}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM}^{\perp}\right|$$

*área del paralelogramo $ABCD$:

$$3S=\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}^{\perp}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}^{\perp}\right|$$

* En el dato, multiplicamos escalarmente por $\overrightarrow{AB}^{\perp}$ y $\overrightarrow{BM}^{\perp}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}^{\perp}=n\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}^{\perp}\Rightarrow 2s=n(3s)\Rightarrow n=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}^{\perp}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM}^{\perp}+n\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BM}^{\perp}\Rightarrow 2s=m(2s)+0\Rightarrow m=1$

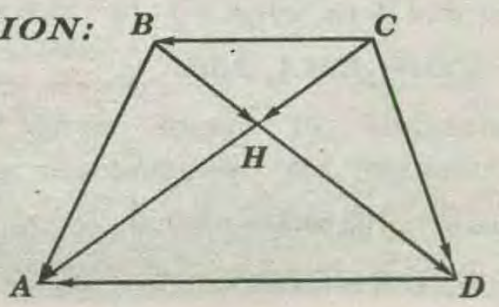
* Por lo tanto: $m+3n=3$

PROBLEMA 148:

Se tiene un trapecio escaleno $ABCD$, cuya base mayor $\overline{AD}$ tiene el doble de longitud de la base menor $\overline{BC}$. Se trazan las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ las que se cortan en el punto H .

Si $\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}=m(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})+n(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})$, entonces calcular $m+n$

RESOLUCION:



* Sean: $\overrightarrow{BH}=r\overrightarrow{BD};\ \overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CA}$

* Del gráfico:

$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{CH}\Rightarrow \overrightarrow{CB}+r\overrightarrow{BD}=t\overrightarrow{CA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CB}+r(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})=t(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})$

$\Rightarrow \overrightarrow{CB}(1-r-t)+r\overrightarrow{CD}=t\overrightarrow{BA}$ .....(I)

* También:

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA};\ \overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{CB}$$

* Por lo tanto :

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD};$ reemplazando en (I)

$\overrightarrow{CB}(1-r-t)+r\overrightarrow{CD}=t\overrightarrow{CB}+t\overrightarrow{CD}$; de donde:

$r=t;\ 1-r-t=t\Rightarrow r=t=1/3$

* Por lo tanto : $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD};\ \overrightarrow{CH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

* Luego:

$\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}=m(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})+n(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})=m\overrightarrow{BD}+n\overrightarrow{CA}$

* de donde:

$\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=m\overrightarrow{BD}+n\overrightarrow{CA}\Rightarrow m=n=\frac{1}{3}\Rightarrow m+n=\frac{2}{3}$

PROBLEMA 149:

Sobre un trapecio $ABCD$ $(\overrightarrow{BC}\parallel\overrightarrow{AD})$ se toman los puntos E y F , puntos medios de $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ respectivamente. Si se sabe que:

$$\overrightarrow{EF}=m\overrightarrow{DB}+n\overrightarrow{CA}$$

Hallar: m^2+n^2

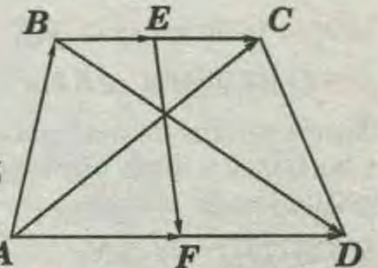
RESOLUCION:

* Del gráfico:

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{AF}$

* Pero:

$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$



* Luego:

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

* Buscando poner el $2do$. miembro en función de $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD};\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

* Reemplazando tendremos:

$\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

* De la figura: $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$

* Por lo tanto: $\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

* ó tambien: $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=m\overrightarrow{DB}+n\overrightarrow{CA}$

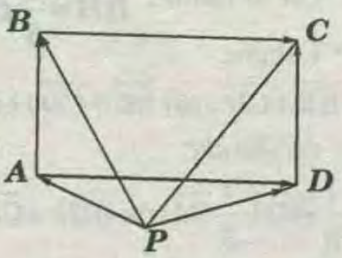
* De donde: $m=-\frac{1}{2};\ n=\frac{1}{2}\Rightarrow m^2+n^2=\frac{1}{2}$

PROBLEMA 150:

Sea el rectángulo **ABCD** (en ese orden) y **P** un punto del plano, exterior al rectángulo. Demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias de **P** a dos vértices opuestos del rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las distancias de **P** a los otros dos vértices opuestos .

RESOLUCION:

* Del gráfico: $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$



* Luego:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}$ .....(α)

$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PB}$ .....(β)

* De (α) y (β):

$$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{PC}|^2+|\overrightarrow{PA}|^2-2\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PA}$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{PD}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2-2\overrightarrow{PD}.\overrightarrow{PB}$$

* De donde:

$|\overrightarrow{PC}|^2+|\overrightarrow{PA}|^2=|\overrightarrow{PD}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+2(\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PD}.\overrightarrow{PB})$.....$(\gamma)$

$\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PD}.\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PD}.\overrightarrow{PB}$

$=\overrightarrow{PD}.(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PA}$

$=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PA})=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$

* Por lo tanto en (γ): $|\overrightarrow{PC}|^2+|\overrightarrow{PA}|^2=|\overrightarrow{PD}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2$

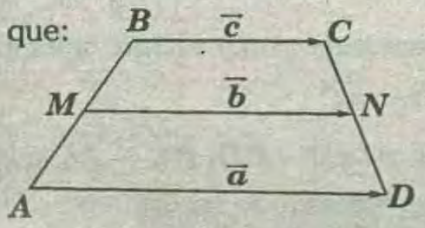
PROBLEMA 151:

Demostrar que la mediana de un trapecio es parelela a las bases y tiene por longitud la semisuma de las longitudes de las bases.

RESOLUCION:

* sean **M** y **N** puntos medios $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

* Demostraremos que:



$\vec{b}\parallel\vec{c}$ y $\vec{b}\parallel\vec{a}$

* También : $|\vec{b}|=\frac{1}{2}(|\vec{a}|+|\vec{c}|)$

* En la figura $\vec{c}\parallel\vec{a}$ y del mismo sentido $\Rightarrow\vec{a}=r\vec{c};r>0$

* Luego $\Rightarrow\vec{a}+\vec{c}=r\vec{c}+\vec{c}\Rightarrow\vec{a}+\vec{c}=(r+1)\vec{c}$

* Pero: $|\vec{a}+\vec{c}|=|\vec{a}|+|\vec{c}|$

* Además : $\begin{cases}\vec{b}=\overrightarrow{MB}+\vec{c}+\overrightarrow{CN}.....(I)\\ \vec{b}=\overrightarrow{MA}+\vec{a}+\overrightarrow{DN}.....(II)\end{cases}$

* De *(I)* y *(II)*

$2\vec{b}=\overrightarrow{MB}+\vec{c}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{MA}+\vec{a}+\overrightarrow{DN}.....(III)$

* Pero $\overrightarrow{MB}$ y $\overrightarrow{MA}$ son opuestos $\Rightarrow\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MA}$

* También: $\overrightarrow{CN}=-\overrightarrow{DN}$ en *(III)*:

$\Rightarrow 2\vec{b}=-\overrightarrow{MA}+\vec{c}+(-\overrightarrow{DN})+\overrightarrow{MA}+\vec{a}+\overrightarrow{DN}$

$\Rightarrow 2\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}$

$\Rightarrow 2\vec{b}=r\vec{c}+\vec{c}=(r+1)\vec{c}\Rightarrow\vec{b}\parallel\vec{c}$

* como $\vec{b}\parallel\vec{c}\Rightarrow\vec{b}\parallel\vec{a}$ **L.Q.Q.D.**

* Además: $|2\vec{b}|=|\vec{c}+\vec{a}|;\ 2|\vec{b}|=|\vec{c}|+|\vec{a}|$

* por lo tanto: $|\vec{b}|=\frac{1}{2}(|\vec{a}|+|\vec{c}|)$

PROBLEMA 152:

Si $\vec{a}$; $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores de $\mathbb{R}^2$ demostrar que el vector $\vec{d}=(\vec{b}^{\perp}.\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}^{\perp}.\vec{c})\vec{b}$ es paralelo al vector $\vec{c}$.

RESOLUCION:

* Sabemos que

a) En $\mathbb{R}^2$: $(\vec{r}.\vec{a}^{\perp})=(-\vec{r}^{\perp}.\vec{s})$

b) Si $\vec{r}$ y $\vec{s}$ son vectores paralelos; $\vec{r}.\vec{s}^{\perp}=0$

*Entonces demostramos que: $\vec{d}.\vec{c}^{\perp}=0$ o sea

$\vec{d}.\vec{c}^{\perp}=\left[(\vec{b}^{\perp}.\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}^{\perp}.\vec{c})\vec{b}\right]\vec{c}^{\perp}$

$\Rightarrow\vec{d}.\vec{c}^{\perp}=\left[(\vec{b}^{\perp}.\vec{c})\vec{a}\right]\vec{c}^{\perp}-\left[(\vec{a}^{\perp}.\vec{c})\vec{b}\right]\vec{c}^{\perp}$

$\Rightarrow\vec{d}.\vec{c}^{\perp}=(\vec{b}^{\perp}.\vec{c})(\vec{a}.\vec{c}^{\perp})-(\vec{a}^{\perp}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{c}^{\perp})$

$\Rightarrow\vec{d}.\vec{c}^{\perp}=(-\vec{b}.\vec{c}^{\perp})(\vec{c}^{\perp}.\vec{c})-(\vec{a}^{\perp}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{c}^{\perp})$

$\Rightarrow\vec{d}.\vec{c}^{\perp}=(\vec{b}.\vec{c}^{\perp})(\vec{a}^{\perp}.\vec{c})-(\vec{a}^{\perp}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{c}^{\perp})$

$\Rightarrow\vec{d}.\vec{c}^{\perp}=(\vec{a}^{\perp}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{c}^{\perp})-(\vec{a}^{\perp}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{c}^{\perp})\Rightarrow\vec{d}.\vec{c}^{\perp}=0$

PROBLEMA 153:

Considere el vector $\vec{c}=(|\vec{b}|^2)\vec{a}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{b}$ y demuestre la desigualdad de Schwarz: $|\vec{a}.\vec{b}|<|\vec{a}||\vec{b}|$ para $\vec{a}$ y $\vec{b}\neq_s\vec{0}$

RESOLUCION:

* Sabemos que para todo $\vec{c}\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow \vec{c}.\vec{c}=|\vec{c}|^2 \geq 0$

* Luego:

$$\vec{c}.\vec{c}=(|\vec{b}|^2\vec{a}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{b}).(|\vec{b}|^2\vec{a}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{b})$$

$$\Rightarrow \vec{c}.\vec{c}=|\vec{b}|^2|\vec{a}|^2-2|\vec{b}|^2(\vec{a}.\vec{b})^2+(\vec{a}.\vec{b})^2|\vec{b}|^2$$

$$\Rightarrow \vec{c}.\vec{c}=|\vec{b}|^2(|\vec{b}|^2|\vec{a}|^2-(\vec{a}.\vec{b})^2=|\vec{c}|^2\geq 0$$

$$0 \leq |\vec{b}|^2(|\vec{b}|^2|\vec{a}|^2-(\vec{a}.\vec{b})^2)$$

$$0 \leq (|\vec{b}|^2|\vec{a}|^2-(\vec{a}.\vec{b})^2)$$

$$(\vec{a}.\vec{b})^2 \leq |\vec{b}|^2|\vec{a}|^2 \Rightarrow \sqrt{(\vec{a}.\vec{b})^2} \leq \sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{a}|^2}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}.\vec{b}| \leq |\vec{b}||\vec{a}|$$

PROBLEMA154:

Probar que:

I) $(\vec{a}+\vec{b})^{\perp}=\vec{a}^{\perp}+\vec{b}^{\perp}$

II) Si $\vec{a}\neq\vec{0}$ y $r;t\in\mathbb{R} \Rightarrow r\vec{a}+t\vec{a}^{\perp}=\vec{0} \Rightarrow r=t=0$

RESOLUCION:

* Sean: $\begin{cases}\vec{a}=(\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2}) \Rightarrow \vec{a}^{\perp}=(-a_2;a_1)\\ \vec{b}=(\overrightarrow{b_1};\overrightarrow{b_2}) \Rightarrow \vec{b}^{\perp}=(-b_2;b_1)\end{cases}$

* Entonces:

I) $(\vec{a}.\vec{b})^{\perp}=[(a_1;a_2)+(b_1;b_2)]^{\perp}=(a_1+b_1;a_2+b_2)^{\perp}$

$=[-(a_2+b_2);(a_1+b_1)]=(-a_2-b_2;a_1+b_1)$

$=(-a_2;a_1)+(-b_2+b_1)$

$\Rightarrow (\vec{a}+\vec{b})^{\perp}=\vec{a}^{\perp}+\vec{b}^{\perp}$ .....L.Q.Q.D

II) $r\vec{a}+t\vec{a}^{\perp}=r(a_1;a_2)+t(-a_2;a_1)$

$=(ra_1;ra_2)+(-ta_2;ta_1)=(ra_1-ta_2;ra_2+ta_1)$.....*(I)*

$\Rightarrow r\vec{a}+t\vec{a}^{\perp}=\vec{0}=(0;0)$.....*(II)(por hipótesis)*

* Igualando componentes en *(I)* y *(II)*:

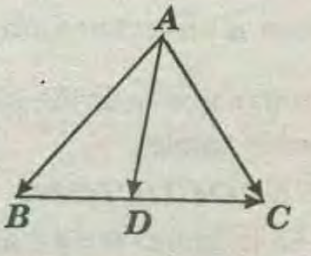
$$\left.\begin{aligned}ra_1-ta_2=0\\ ra_2+ta_1=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow r=t=0$$

* Por tanto: $r\vec{a}+t\vec{a}^{\perp}=\vec{0} \Rightarrow r=t=0$

PROBLEMA 155:

En el triángulo *ABC*, *D* es punto medio de *AB*:demostrar que el teorema de Apolonio :

$$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2=2\overrightarrow{AD}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2$$

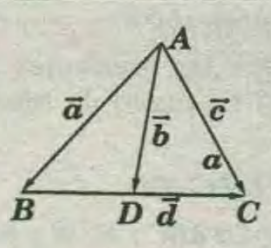


RESOLUCION:

* En la figura se tiene :

$\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$

$\vec{d}=\vec{a}-\vec{c}$



* Entonces:

$$|\vec{b}|^2=\vec{b}.\vec{b}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{c}).(\vec{a}+\vec{c})$$

$$\Rightarrow |\vec{b}|^2=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{a}+\vec{c}+\vec{c}+2\vec{a}.\vec{c})$$

$$\Rightarrow 4|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}.\vec{c} \text{ .....(I)}$$

* Además:

$$|\vec{d}|^2=\vec{d}.\vec{d}=(\vec{c}-\vec{a}).(\vec{c}-\vec{a})$$

$$|\vec{d}|^2=(\vec{c}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{a}-2\vec{a}.\vec{c})$$

$$\Rightarrow |\vec{d}|^2=|\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2-2\vec{a}.\vec{c} \text{ .....(II)}$$

* De *(I)* y *(II)*, sumando y despejando:

$$|\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2=2|\vec{b}|^2+\frac{1}{2}|\vec{d}|^2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2=2\overrightarrow{AD}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2$$

PROBLEMA 156:

Demostrar que cualesquiera que sean los vectores $\vec{a};\vec{b};\vec{c}\in\mathbb{R}^2, \{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\}$ es linealmente dependiente

RESOLUCION:

* los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independiente o linealmente dependientes ; entonces :

Suponiendo que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sea linealmente independientes entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son paralelas y generan $\mathbb{R}^2$, osea que existen los números reales s y t, tales que :

$$\vec{c}=r\vec{a}+s\vec{b}\text{: entonces}$$

$$1\vec{c}+(-r)\vec{a}+(-s)\vec{b}=\vec{0}$$

*Se tiene una combinación lineal igual a $\vec{0}$ donde $1\in\mathbb{R};1\neq 0 \Rightarrow \{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\}$ es linealmente depediente ; es decir : Existe $r, s\in\mathbb{R}$ al menos uno $\neq 0$ tal que:

$$r\vec{a}+s\vec{b}=\vec{0}\text{; entonces :}$$

$$r\vec{a}+s\vec{b}+0=|\vec{c}|=\vec{0}\text{;}$$

*o sea se tiene una combinación lineal, donde al menos uno de los coeficientes r ó $s\neq 0$; por tanto: $\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\}$ es linealmente independiente.

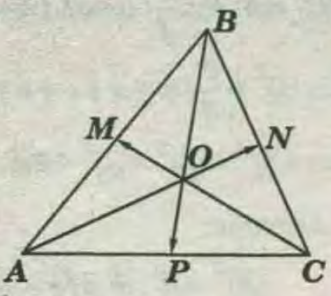
WWW.GRATIS2.COM

PROBLEMA 157:

Demostrar que las medianas de un triángulo se intersecan en un punto de trisección de cada una de ellas.

RESOLUCION:

* En el triángulo ABC : M; N y P son puntos medios de $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$. O es el punto de trisección debemos demostrar que :



$$\frac{2}{3}\overline{AN}, \frac{2}{3}\overline{CM} \text{ y } \frac{2}{3}\overline{BP}$$

el mismo terminal O .

* Entonces :

$$\overline{AB}+\frac{2}{3}\overline{BP}=\overline{AB}+\frac{2}{3}\left(\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AC}\right)$$

$$=\overline{AB}-\frac{2}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC}\ldots\ldots(\overline{BA}=-\overline{AB})$$

* Luego:

$$\overline{AB}+\frac{2}{3}\overline{BP}=\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC}\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$* \quad \overline{AC}+\frac{2}{3}\overline{CM}=\overline{AC}+\frac{2}{3}\left(\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{AB}\right)$$

$$=\overline{AC}-\frac{2}{3}\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{AB}\ldots\ldots(\overline{CA}=-\overline{CA})$$

$$\overline{AC}+\frac{2}{3}\overline{CM}=\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC}\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

$$* \quad \frac{2}{3}\overline{AN}=\frac{2}{3}\left(\overline{AB}+\overline{BN}\right)=\frac{2}{3}\left(\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{BC}$$

$$=\frac{2}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\left(\overline{BA}+\overline{AC}\right)=\frac{2}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{BA}+\frac{1}{3}\overline{AC}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\overline{AB}-\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC}\ldots\ldots(\overline{BA}=-\overline{AB})$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\overline{AN}=\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC}\ldots\ldots\ldots\ldots(III)$$

* Luego de (I) , (II) y (III):

$$\frac{2}{3}\overline{AN}=\overline{AB}+\frac{2}{3}\overline{BP}=\overline{AC}+\frac{2}{3}\overline{CM}$$

* Vemos que los tres vectores tienen el punto inicial A, y también el punto terminal O es el mismo.

* Por tanto: O es punto de trisección.

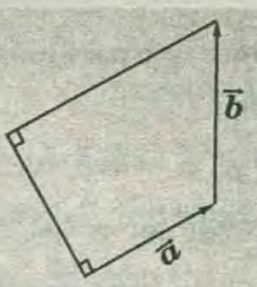
PROBLEMA 158:

Siendo $\vec{a}=(3;1)$ y $\vec{b}=(2;3)$:

Calcular el área del trapecio.

RESOLUCION:

* Se tiene:



$$\vec{a}=(3;1)\Rightarrow \vec{a}^{\perp}=(-1;3)$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{10}$$

* En la figura:

$$\Rightarrow \vec{c}=\left(\vec{c}\,.\,\vec{a}\right)\vec{b}+\left(\vec{c}.\vec{a}^{\perp}\right)\vec{a}^{\perp}\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

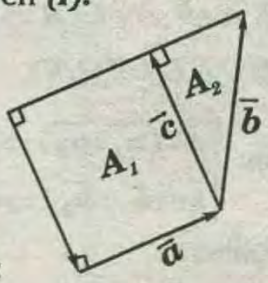
$$\Rightarrow (\vec{c}.\vec{a})\vec{a}=\left|(3;-2).\frac{-1}{\sqrt{2}}(-1;1)\right|.\frac{1}{\sqrt{2}}(-1;1)$$

$$\Rightarrow (\vec{c}\,.\,\vec{a}).\vec{a}=\frac{1}{2}(1;1)\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

$$*(\vec{c}.\vec{a}^{\perp}).\vec{a}^{\perp}=\left|(3;-2).-\frac{1}{\sqrt{2}}(-1;1)\right|.\frac{1}{\sqrt{2}}(-1;1)$$

$$\Rightarrow (\vec{c}.\vec{a}^{\perp}).\vec{a}^{\perp}=\frac{5}{2}(1;-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(III)$$

* Reemplazando (II) y (III) en (I):



$$\vec{c}=\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{-5}{2}\right)$$

$$\vec{c}=Proy_{\vec{a}^{\perp}}\vec{b}=\left(\frac{\vec{b}.\vec{a}^{\perp}}{|\vec{a}^{\perp}|}.\frac{\vec{a}^{\perp}}{|\vec{a}^{\perp}|}\right)$$

* Como $\vec{b}=(2;3)$ entonces:

$$\vec{c}=\left[\frac{(2;3).(-1;3)}{\sqrt{10}}\right].\frac{(-1;3)}{\sqrt{10}}\,;$$

$$\Rightarrow \vec{c}=\frac{7}{10}(-1;3)\Rightarrow \vec{c}^{\perp}=\frac{7}{10}(-3;-1)\ y\ |\vec{c}|=\frac{7}{10}\sqrt{10}$$

* Cálculo de áreas:

$$A_t=A_1+A_2$$

$$A_1=|\vec{a}||\vec{c}|\Rightarrow A_1=\sqrt{10}\times\frac{7\sqrt{10}}{10}=7\Rightarrow A_1=7u^2$$

$$A_2=\frac{1}{2}\left|\vec{b}.\vec{c}^{\perp}\right|=\frac{1}{2}\left|(2;3).\frac{7}{10}(-3;-1)\right|=\frac{63}{20}\Rightarrow A_2=\frac{63}{20}u^2$$

$$\Rightarrow A_t=7+\frac{63}{20}\,;\ A_t=\frac{203}{20}u^2$$

PROBLEMA 159:

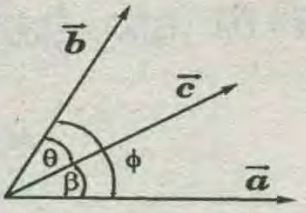
Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores no nulos y sea $\vec{c}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ probar que $\vec{c}$ divide al angulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en dos partes iguales.

RESOLUCION:

* En la figura: $0<\phi<\pi$

$\vec{c}$ es bisector de $\vec{a}$ y $\vec{b}$

demostraremos que $\beta=\theta$



$$\cos\phi=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|=\cos\phi \quad .....(I)$$

$$\cos\beta=\frac{\vec{a}.\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}=\frac{\vec{a}.\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)}{|\vec{a}|\ |\vec{c}|}$$

$$\cos\beta=\frac{(\vec{a}.\vec{a})|\vec{b}|+(\vec{a}.\vec{b})|\vec{a}|}{|\vec{a}|^2|\vec{b}||\vec{c}|}=\frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2|\vec{b}|\cos\phi}{|\vec{a}|^2|\vec{b}||\vec{c}|}$$

$$\Rightarrow \cos\beta=\frac{1+\cos\phi}{|\vec{c}|} \quad .....(II)$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{b}.\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}=\frac{\vec{b}.\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)}{|\vec{b}|\ |\vec{c}|};\ \textit{efectuando :}$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{1+\cos\phi}{|\vec{c}|} \quad .....(III)$$

* De *(II)* y *(III)* : $\cos\beta=\cos\theta \Rightarrow \beta=\theta$

PROBLEMA 160:

Encontrar los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $\vec{a}+\vec{b}^{\perp}=(-1;5)$; $\vec{a}^{\perp}+\vec{b}$ es ortogonal a $(-5;3)$; $\vec{a}+\vec{b}$ es paralelo a $(1;-1)$ y $\vec{a}\ .\ \vec{b}+11=0$.

RPTA : $\vec{a}=(-3;4);\vec{b}=(1;-2)$

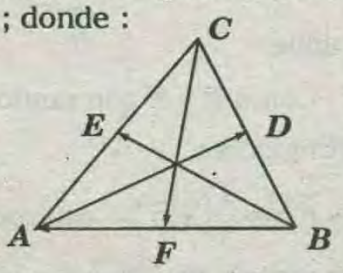
PROBLEMA 161:

Dado el triángulo *ABC*, cuyas medianas son $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BE}$ y $\overrightarrow{CF}$ demostrar que:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$$

RESOLUCIÓN:

* En la figura: *E; D* y *F* son puntos medios de sus respectivos lados ; donde :



* $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \quad .....(I)$$

* $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad .....(II)$$

* $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}$; $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\Rightarrow \overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ .....*(III)*

* Sumando *(I)* ; *(II)* y *(III)* y agrupando:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB})=\frac{3}{2}(\vec{0})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$$

PROBLEMA 162:

Identificar la función :

$$f:\mathbb{R}^2\Rightarrow\mathbb{R}^2, f(P)=(P.A)A+(P.A^{\perp})A^{\perp}$$

Donde A es un vector unitario , $A=(a;b)$ $P=(x;y)$

RESOLUCIÓN:

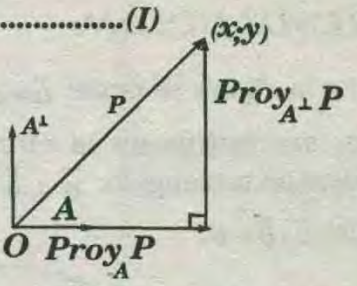
* Por el enunciado :

$|A|=1$; $|P|=(x;y)$

$f(P)=(P.A)A+(P.A^{\perp})A^{\perp}$ .....*(I)*

* De la figura:

$P=Proy_A P+Proy_{A^{\perp}}P$



* Entonces :

$$P=(P.A)\frac{A}{|A|^2}+(P.A^{\perp})\frac{A^{\perp}}{|A|^2};\ |A|^2=1$$

$$P=(P.A)A+(P.A^{\perp})A^{\perp} \quad .....(II)$$

* Comparando *(I)* y *(II)* : $f(P)=P=(x;y)$, por lo tanto $f(P)$ representa la función ***IDENTIDAD*** en $\mathbb{R}^2$

PROBLEMA 163 :

Demuestre que: $\left|\vec{a}\ .\ \vec{b}^{\perp}\right|\le|\vec{a}|\ |\vec{b}|$ expresion en que la desigualdad se verifica si y solo si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales $(\vec{a};\vec{b}\in\mathbb{R}^2)$

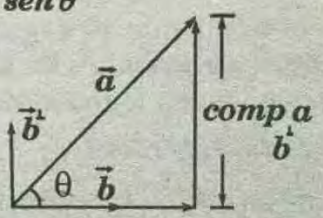
RESOLUCION:

* En la figura: $Comp_{\vec{b}^{\perp}}\vec{a}=|a|\,sen\,\theta$

* Siendo $Comp_{\vec{b}^{\perp}}\vec{a}=\frac{\vec{a}.\vec{b}^{\perp}}{|\vec{b}|}$

* Entonces

$\vec{a}.\vec{b}^{\perp}=|\vec{a}|\ |\vec{b}|\ sen\,\theta$



* tomando :

$$\left|\vec{a}.\vec{b}^{\perp}\right| = |\vec{a}|\,|\vec{b}||sen\theta| \le |\vec{a}|\,|\vec{b}| \Rightarrow \left|\vec{a}.\vec{b}^{\perp}\right| \le |\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

OTRO METODO:

* por la desigualdad de Schwarz :

$$(\vec{a}.\vec{b}^{\perp})^2 \le |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a}.\vec{b}^{\perp})^2 \quad .....(I)$$

* Como:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow (\vec{a}.\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\cos^2\theta$$

* Luego $|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\,sen^2\theta$

* También:

$$(\vec{a}.\vec{b}^{\perp})^2 = \left|\vec{a}.\vec{b}^{\perp}\right|^2 = |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\,|sen^2\theta|$$

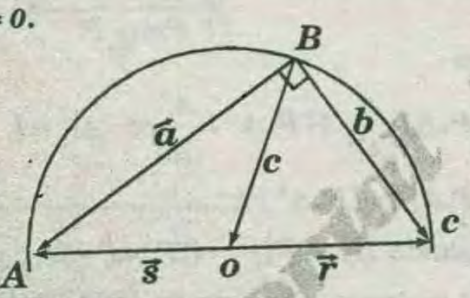
$$\Rightarrow \left|\vec{a}.\vec{b}^{\perp}\right| = |\vec{a}|\,|\vec{b}||sen\theta| \le |\vec{a}||\vec{b}| \Rightarrow \left|\vec{a}.\vec{b}^{\perp}\right| \le |\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

PROBLEMA 164:

Probar vectorialmente que el triángulo inscrito en una circunferencia, que tiene uno de sus lados como diámetro de la circunferencia es un triángulo rectángulo.

RESOLUCION:

* En la figura se tiene: $\vec{a}=\vec{c}+\vec{s}\,;\vec{b}=\vec{c}+\vec{r}\,;|\vec{s}|=|\vec{r}|=|\vec{c}|$ por ser radios de la circunferencia. Si ABC es triángulo rectángulo: $\vec{a}\perp\vec{b}$; entonces demostramos que $\vec{a}.\vec{b}=0$.



* Luego:

$$\vec{a}.\vec{b} = (\vec{c}+\vec{s}).(\vec{c}+\vec{r}) = \vec{c}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{r}+\vec{s}.\vec{c}+\vec{s}.\vec{r}$$

* Pero $\vec{s} = -\vec{r} \wedge \vec{c}.\vec{c} = |\vec{c}|^2$

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{c}|^2 + \vec{c}.\vec{r} - \vec{c}.\vec{r} - |\vec{r}|^2 = |\vec{r}|^2 - |\vec{r}|^2 \quad ....(|\vec{c}| = |\vec{r}|)$$

$$\Rightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$$

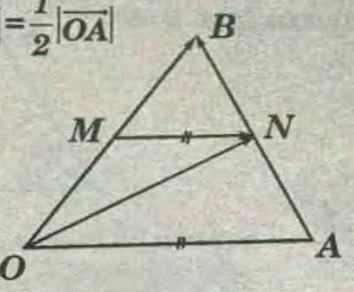
PROBLEMA 165:

Demostrar que el segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo a la base e igual a la mitad de ésta.

RESOLUCION:

* Sean M y N puntos medios de los lados $\overline{OB}$ y $\overline{AB}$; entonces demostraremos que:

$$\overline{MN} \,//\, \overline{OA} \;\; y \;\; |\overline{MN}| = \frac{1}{2}|\overline{OA}|$$



* Se tiene:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} \quad .....(I)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{ON} = \overline{OM} + \overline{MN} \\ \overline{ON} = \overline{OA} + \overline{AN}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{OM} + \overline{MN} = \overline{OA} + \overline{AN} \quad .....(II)$$

* Pero: $\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OB}$ y $\overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

* Luego en *(II)* : $\frac{1}{2}\overline{OB}$ y $\overline{MN} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OB}$

* De *(I)*: $\overline{MN} = \overline{OA} + \left(\frac{\overline{OB} - \overline{OA}}{2}\right) - \frac{1}{2}\overline{OB}$

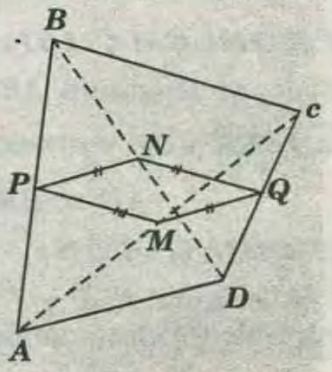
$$\Rightarrow \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{OA} \Rightarrow \overline{MN} \,//\, \overline{OA} \;\; y \;\; |\overline{MN}| = \frac{1}{2}|\overline{OA}|$$

PROBLEMA 166:

Demostrar que los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero y los puntos medios de las diagonales son los vértices de un paralelogramo.

RESOLUCIÓN:

* En la figura , P y Q son puntos medios de los lados opuestos : $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. M y N son puntos medios de la diagonales. Entonces demostramos que $PMQN$ es un paralelogramo o sea:



$$\begin{cases}\overline{PN} \,//\, \overline{MQ} \;\; y \;\; |\overline{PN}| = |\overline{MQ}| \\ \overline{PM} \,//\, \overline{NQ} \;\; y \;\; |\overline{PM}| = |\overline{NQ}|\end{cases}$$

* Luego se tiene:

En ΔABC : Como P y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$; Entonces :

$$\overline{PN} \,//\, \overline{AD} \;\; y \;\; \overline{PN} = \frac{1}{2}|\overline{AD}| \quad .....(I)$$

* En ΔACB : Como M y Q son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$; Entonces :

$$\overline{MQ} \,//\, \overline{AD} \;\; y \;\; \overline{MQ} = \frac{1}{2}|\overline{AD}| \quad .....(II)$$

* De *(I)* y *(II)* se tiene $\overrightarrow{PN} // \overrightarrow{MQ}$ y $|\overrightarrow{PN}|=|\overrightarrow{MQ}|$

* Procediendo análogamente:

$$\overrightarrow{PM} // \overrightarrow{NQ} \text{ y } |\overrightarrow{PM}|=|\overrightarrow{NQ}|$$

* Por lo tanto ***PNQM*** es un paralelogramo.

PROBLEMA 167:

Sean $\vec{a};\vec{b} \in (\mathbb{R}^2-\{0;0\})$ y $x \in (\mathbb{R}-\{0\})$ ¿Cuales de las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas y porque?

I) $Proy_{\vec{a}}(Proy_{\vec{b}}\vec{a})=Proy_{\vec{b}}(Proy_{\vec{a}}\vec{b})$

$\Rightarrow \vec{a}$ es paralelo a $\vec{b}^{\perp}$ $\vee$ $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

II) $\left|Comp_{\vec{a}}(\vec{a}^{\perp}+\vec{b})\right| \le |\vec{b}|$

III) $Proy_{x\vec{b}}\, x\vec{a}=Proy_{\vec{b}}\vec{a}$

IV) $(Proy_{proy_{\vec{b}}\, x\vec{a}}\,(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}^{\perp} \neq 0$; si $\vec{a}.\vec{b} \neq 0$

V) $Proy_{\vec{b}}\, x\vec{a}=Proy_{x\vec{b}}\,\vec{a}$.

RESOLUCION:

I) $Proy_{\vec{a}}(Proy_{\vec{b}}\vec{a})=(\vec{a}.\vec{b})^2\dfrac{\vec{a}}{(|\vec{a}||\vec{b}|)^2}$ .....(α)

$Proy_{\vec{b}}(Proy_{\vec{a}}\vec{b})=(\vec{a}.\vec{b})^2\dfrac{\vec{b}}{(|\vec{a}|\ |\vec{b}|)^2}$ .....(β)

* Si $(\alpha)=(\beta) \Rightarrow (\vec{a}.\vec{b})=0 \Rightarrow \vec{a} // \vec{b}^{\perp}$.

* Por lo tanto *(I)* es ***VERDADERO***.

II) $\left|Comp_{\vec{a}}(\vec{a}^{\perp}+\vec{b})\right|=\left\|\vec{b}\right|cos\,\theta|=|\vec{b}||cos\,\theta| \le |\vec{b}|$

* Por lo tanto *(II)* es ***VERDADERO*** .

III) $Proy_{x\vec{b}}x\vec{a}=\dfrac{x^3}{|x|^2}(\vec{a}.\vec{b})\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}=x(\vec{a}.\vec{b})\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$ .....(ϕ)

$Proy_{\vec{b}}\vec{a}=(\vec{a}.\vec{b})\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$ .....(φ)

* $(\phi) \neq (\varphi)$; por lo tanto *III* en ***FALSA*** .

IV) $\vec{s}=Proy_{\vec{b}}x\vec{a}\,;\vec{s}=\left[(x\vec{a}).\vec{b}\right]\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2} \Rightarrow \vec{a} // \vec{b}$

$\vec{r}=Proy_{\vec{s}}(\vec{a}+\vec{b})\,;\vec{r} // \vec{s} // \vec{b} \Rightarrow \vec{r}.\vec{b}^{\perp}=0;$

* Por lo tanto *IV)* es ***FALSA***.

V) $Proy_{\vec{b}}x\vec{a}=((x\vec{a}).\vec{b})\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}=x(\vec{a}.\vec{b})\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$ .....(ω)

$Proy_{x\vec{b}}\vec{a}=(\vec{a}.x\vec{b})\dfrac{x\vec{b}}{x\vec{b}}=(\vec{a}.\vec{b})\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$ .....(ρ)

* Siendo $(\omega) \neq (\rho)$, entonces *(V)* es ***FALSA***.

PROBLEMA 168:

I) Indicar Justificando, si la siguiente proposición es verdadera o falsa .

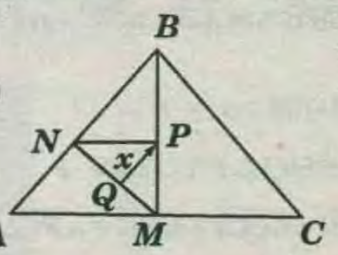
Sean

$\vec{a} \in V_2;\ \vec{b} \in V_2;\ \vec{a} \neq 0;\ \vec{b} \neq 0 \Rightarrow Proy_{\vec{b}}\vec{a}+Proy_{\vec{b}^{\perp}}(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}$

II) En la siguiente figura $\overrightarrow{AC}=(a;0);\ a>0.$

M es punto de $\overrightarrow{AC}$ y $|\overrightarrow{BM}|=b$; unidades. Demostrar que:

$\vec{x}=\dfrac{4a^2b^2}{(a^2+4b^2)^2}\left(\dfrac{a}{2};b\right)$



RESOLUCION:

I) $Proy_{\vec{b}}\vec{a}+Proy_{\vec{b}^{\perp}}(\vec{a}-\vec{b})=Proy_{\vec{b}}\vec{a}+\dfrac{(\vec{a}-\vec{b}).\vec{b}}{|\vec{b}^{\perp}|^2}\vec{b}^{\perp}$

$=Proy_{\vec{b}}\vec{a}+\left(\dfrac{\vec{a}.\vec{b}^{\perp}-\vec{b}.\vec{b}^{\perp}}{|\vec{b}^{\perp}|^2}\right)\vec{b}^{\perp}=Proy_{\vec{b}}\vec{a}+\dfrac{\vec{a}.\vec{b}^{\perp}}{|\vec{b}^{\perp}|^2}\vec{b}^{\perp}$

$=Proy_{\vec{b}}\vec{a}+Proy_{\vec{b}^{\perp}}\vec{a}=\vec{a}$

* Por lo tanto *(I)* es ***VERDADERO*** .

II) Tomando como referencia $A=(0;0) \Rightarrow |\overrightarrow{AM}|=\dfrac{a}{2};|\overrightarrow{BM}|=b$

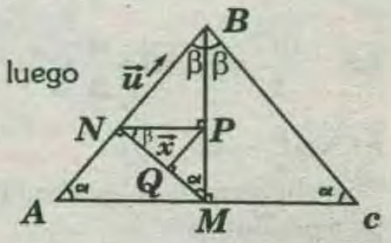
* Trabajando geométricamente : Calculemos $|\vec{x}|$

* $\triangle ANM \sim \triangle BMC$:

$\dfrac{|\overrightarrow{MN}|}{a/2}=\dfrac{a/2}{(\sqrt{a^2+4b^2})/2} \Rightarrow |\overrightarrow{MN}|=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+4b^2}}$

* $\triangle NMP \sim \triangle BMC$:

$\dfrac{|\overrightarrow{PM}|}{|\overrightarrow{MN}|}=\dfrac{a/2}{(\sqrt{a^2+4b^2})/2}$, luego $|\overrightarrow{PM}|=\dfrac{a^2b}{a^2+4b^2}$



* $\triangle PMQ \sim \triangle BMC$:

$\dfrac{|\vec{x}|}{|\overrightarrow{PM}|}=\dfrac{b}{(\sqrt{a^2+4b^2})/2} \Rightarrow |\vec{x}|=\dfrac{2a^2b^2}{(a^2+4b^2)^{3/2}}$

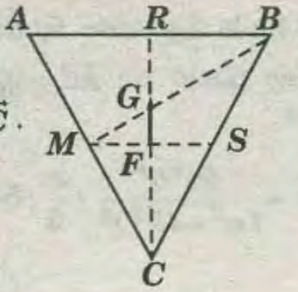
* Por otro lado , $\bar{x} // \overrightarrow{AB} \Rightarrow$ Vector dirección unitario de $\bar{x}$. $\bar{u}=\dfrac{(a/2;b)}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{2}{\sqrt{a^2+4b^2}}(a/2;b)$; Por lo tanto

* el vector x estará dado por :

$$\vec{x}=|\vec{x}|\vec{u}=\frac{4a^2b^2}{(a^2+4b^2)^2}(a/2;b)$$

PROBLEMA 169:

En la figura , ABC es un triángulo equilátero . R ; S y M son puntos medios de los lados $\overline{AB}$; $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente .



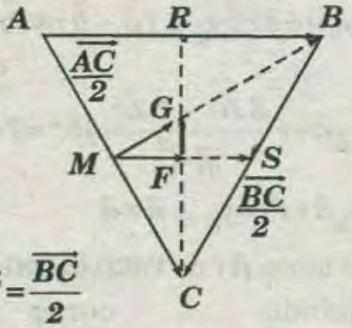
Si $\overrightarrow{MB}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{SC}+n\overrightarrow{FC}$.

hallar m , n y r

RESOLUCIÓN :

$\overrightarrow{MB}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{SC}+n\overrightarrow{FC}$.....$(\alpha)$

* Poniendo todo en función de $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$, tendremos :



$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AC}}{2}$; $\overrightarrow{SC}=\frac{\overrightarrow{BC}}{2}$

$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{MF}$.....$(\beta)$

$\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\frac{\overrightarrow{AC}}{2})$.....$(I)$

$\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MS}=\frac{1}{2}(\frac{\overrightarrow{AB}}{2})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.....$(II)$

* (I), (II) en (β): $\overrightarrow{FG}=\frac{\overrightarrow{AB}}{12}-\frac{\overrightarrow{AC}}{6}$; reemplazando en (α):

$\overrightarrow{AB}-\frac{\overrightarrow{AC}}{2}=m\overrightarrow{AB}+\frac{n}{2}\overrightarrow{BC}+r(\frac{\overrightarrow{AB}}{12}-\frac{\overrightarrow{AC}}{6})$, pero :

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

* Reemplazando e igualando miembros , tendremos las ecuaciones :

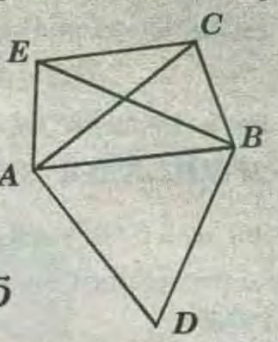
$$1=m-\frac{n}{2}+\frac{r}{12} \quad \text{y} \quad \frac{n}{2}-\frac{r}{6}=-\frac{1}{2}$$

* De donde se obtiene las soluciones paramétricas :

$$r=12m-6 \quad \text{y} \quad n=4m-3$$

PROBLEMA 170 :

En la figura se tiene que $ABCE$ es un trapecio isósceles y ABD es un triángulo equilátero . Sabiendo que $\overline{AC}=\overline{AB}$; que $\overline{EB}$ es perpendicular a $\overline{BD}$, que $A=(2;3)$; $C=(14;19)$.



I) Hallar : $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}$

II) Hallar : donde

$$\overrightarrow{AB}=n\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CB}$$

Siendo M punto medio de $\overline{AD}$

RESOLUCIÓN:

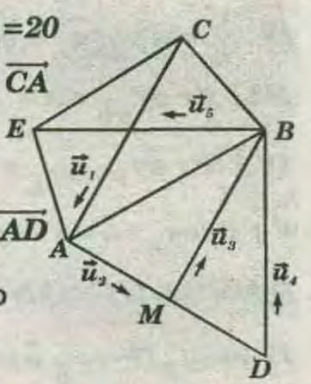
* Cálculo de los vértices del polígono :

$|\overrightarrow{AC}|=|(12;16)|=20$,

* luego $|\overrightarrow{EB}|=|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BD}|=20$

* Vector dirección unidad de $\overrightarrow{CA}$

$\vec{u}_1=\frac{1}{5}(-3;-4)$; $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{AD}$



* Vector dirección unitario de $\overrightarrow{AD}$

$\vec{u}_2=\vec{u}_1^{\perp}=\frac{1}{5}(4;-3)$; por lo tanto

$D=A+20\vec{u}_2 \Rightarrow D=(18;-9)$

* Punto medio de $\overrightarrow{AD}$: $M=\frac{A+D}{2}=(10;-3)$

$\overrightarrow{MB}\,//\,\overrightarrow{AC}\Rightarrow$ El vector direccion unitario de $\overrightarrow{MB}$ es:

$\vec{u}_3=\vec{u}_1=\frac{1}{5}(3;4)$; $|\overrightarrow{MB}|=20\,sen60°=10\sqrt{3}$,

* Por lo tanto:

$B=M+10\sqrt{3}\,\vec{u}_3 \Rightarrow B=(10+6\sqrt{3};-3+8\sqrt{3})$

* vector dirección unitario de $\overrightarrow{DB}$:

$\vec{u}_4=\frac{1}{20}(6\sqrt{3}-8;6+8\sqrt{3})$

* Vector dirección unitario de $\overrightarrow{BE}$:

$\vec{u}_5=\vec{u}_4^{\perp}=\frac{1}{20}(-6-8\sqrt{3};6\sqrt{3}-8)$

* Luego:

$E=B+20\vec{u}_5 \Rightarrow E=(4-2\sqrt{3};14\sqrt{3}-11)$

I) $\overrightarrow{AB}=n\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CB}$: Reemplazando :

$(8+6\sqrt{3};8\sqrt{3}-6)=n(6\sqrt{3};8\sqrt{3})+(6\sqrt{3}-4;8\sqrt{3}-22)$

* Efectuando: $(12;16)=n\sqrt{3};(6,8)\Rightarrow n=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

PROBLEMA 171:

I) Justifique la verdad o falsedad de: $Comp_{\vec{b}^{\perp}}(Proy_{\vec{b}}\vec{a})=0$

II) Demostrar que: $Proy_{\vec{c}}\vec{a} = Proy_{\vec{b}}\vec{a} \Leftrightarrow \vec{c}=r\vec{b}$

III) Si $Proy_{\vec{b}}\vec{a}$ $Proy_{\vec{b}}\vec{a}$ es un número real. ¿Que tipo de ángulo forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

RESOLUCION:

I) Sabemos que: $|\vec{b}|=|\vec{b}^{\perp}|\,.\,\vec{b}.\vec{b}^{\perp}=0$; luego :

$$Comp_{\vec{b}^{\perp}}(Proy_{\vec{b}}\vec{a})=(Proy_{\vec{b}}\vec{a}).\frac{\vec{b}^{\perp}}{|\vec{b}^{\perp}|^2}=(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^4}(\vec{b}.\vec{b}^{\perp})=0$$

VERDADERO

II) Si $\vec{c}=r\vec{b}$:

$$Proy_{\vec{c}}\vec{a}=Proy_{r\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}.(r\vec{b})}{|r\vec{b}|^2}r\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=Proy_{\vec{b}}\vec{a}$$

III) Sea:

$$E=(Proy_{\vec{b}}\vec{a}).(Proy_{\vec{a}}\vec{b})=(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b})(\frac{\vec{b}.\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a})$$

$$E=\frac{(\vec{a}.\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}\vec{a}.\vec{b}=\frac{(\vec{a}.\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}(|\vec{b}|Comp_{\vec{b}}\vec{a})$$

* Haciendo : $r=\frac{(\vec{a}.\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|}\Rightarrow r>0\Rightarrow E=rComp_{\vec{b}}\vec{a}$

* Si $Comp_{\vec{b}}\vec{a}>0\Rightarrow E>0\Rightarrow \vec{a}$ y $\vec{b}$ forman ángulo agudo

* Si $Comp_{\vec{b}}\vec{a}<0\Rightarrow E<0\Rightarrow \vec{a}$ y $\vec{b}$ forman ángulo obtuso

PROBLEMA 172:

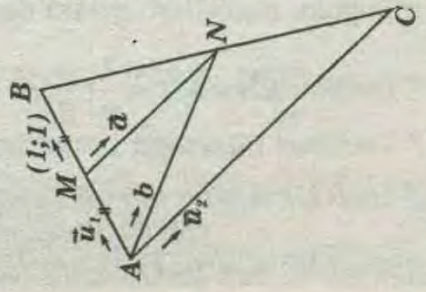
Sea *ABC* un triángulo, si $M=(1;9)$ y $N=(6;2)$ son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ resectivamente $\overline{AB}\,//(1;1)$ y $Proy_{\overline{AN}}\overline{AB}=\frac{8}{5}(3;-1)$. Hallar los vértices del triángulo.

RESOLUCION:

* Vector direcion de $\overline{AB}$: $(1;1)$

$$\Rightarrow \vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1)$$

$$\overline{AB}\,//(1;1)\Rightarrow \overline{AB}=r(1;1)....(\alpha)$$



* Por dato : $Proy_{\overline{AN}}\overline{AB}=\frac{8}{5}(3;-1)\Rightarrow$

un vector dirección de *AN* es : $\vec{b}=(3;-1)$

* Aplicando propiedades:

$$Proy_{\overline{AN}}\overline{AB}=Proy_{\vec{b}}\overline{AB}=Proy_{\vec{b}}r(1;1)$$

* Luego: $r\,Proy_{\vec{b}}(1;1)=\frac{8}{5}(3;-1)\Rightarrow r=8$

$$\Rightarrow|\overline{AB}|=8\sqrt{2}\,;|\overline{AM}|=|\overline{MB}|=4\sqrt{2}$$

* Por lo tanto:

$B=M+4\sqrt{2}\,\vec{u}_1\Rightarrow \boxed{B=(5;13)}$

$A=M-4\sqrt{2}\,\vec{u}_1\Rightarrow \boxed{A=(-3;5)}$

* Por otro lado:

$\overline{MN}=(5;-7)\Rightarrow|\overline{MN}|=\sqrt{74}.\overline{MN}\,//\,\overline{AC}\;\Rightarrow$ Un vector dirección de $\overline{AC}$ es: $\vec{a}=(5;-7)\Rightarrow\vec{u}_2=\frac{1}{\sqrt{74}}(5;-7)$

* Por propiedad geométrica: $|\overline{AC}|=2|\overline{MN}|=2\sqrt{74}$,

* luego: $C=A+2\sqrt{74}\,\vec{u}_2\Rightarrow C=(7;-9)$

PROBLEMA 173:

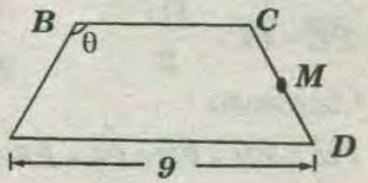
I) Hallar $x\in Q$, tal que : $\vec{a}=(-2x^2-x+6;3x^2+4x-4)$, sea ortogonal consigo mismo.

II) En el trapecio isósceles de la figura, $\theta=120°$, *M* es punto medio de *CD*.

$|Proy_{\overline{AD}}\overline{AB}|=3$

Si $\vec{w}=\overline{AM}+3\overline{AC}$

Hallar: $Comp_{2\overline{AD}}(\vec{w})$



RESOLUCION:

I) Por dato : $\vec{a}\perp\vec{a}\Rightarrow\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2=0$

$$\vec{a}.\vec{a}=(-2x^2-x+6)^2+(3x^2+4x-4)^2=0$$

$$=(x+2)^2(13x^2-24x+13)=0\Rightarrow x=-2$$

II) Tomando como referencia $A=(0;0)$

$D=(0;0)+9(1;0)\;\Rightarrow\; D=(9;0)$

* Vector dirección unitario de $\overline{AB}$:

$\vec{u}_1=(\cos 60°;\,\text{sen}\,60°)=(1/2;\sqrt{3/2})$

* Sea : $\overline{AB}=r\vec{u}_1=r\,(1/2\,;\sqrt{3/2})$

* Del dato :

$$|Proy_{\overline{AD}}\overline{AB}|=|Comp_{\overline{AD}}\overline{AB}|\;\left|\frac{\overline{AD}}{|\overline{AD}|}\right|=3\Rightarrow|Comp_{\overline{AD}}\overline{AB}|=3$$

$$\frac{\overline{AB}.\overline{AD}}{|\overline{AD}|}=\frac{1}{9}r(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}).(9;0)=3\Rightarrow r=6=|\overline{AB}|$$

* Por lo tanto: $B=A+6\vec{u}_1\Rightarrow B=(3;3\sqrt{3})$

$\square ABCD$ es isósceles $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|=6$

* Vector dirección unitario de $|\overrightarrow{DC}|$

$\vec{u}_2=(\cos 120°;\text{sen}\,120°)=(-1/2;\sqrt{3}/2)$

* Luego:

$C=(9;0)+6(-1/2;\sqrt{3}/2)\Rightarrow C=6;3\sqrt{3})$

M es un punto medio de $|\overrightarrow{CD}|\Rightarrow M=\dfrac{C+D}{2}=(\dfrac{15}{2};\dfrac{6\sqrt{3}}{2})$

$\vec{w}=\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{AC}=(\dfrac{15}{2};\dfrac{3\sqrt{3}}{2})+3(6;3\sqrt{3})=(\dfrac{51}{2};\dfrac{9\sqrt{3}}{2})$

$Comp_{2\overrightarrow{AD}}\vec{w}=\dfrac{\vec{w}.\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{1}{9}(\dfrac{51}{2};\dfrac{9\sqrt{3}}{2}).(9;0)$

* Por lo tanto : $Comp_{2\overrightarrow{AD}}\vec{w}=\dfrac{51}{2}$

PROBLEMA 174:

Sean M, N y R los puntos medios de los lados del triángulo ABC y sea P un punto exterior al triángulo. Demostrar que:

$$\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$$

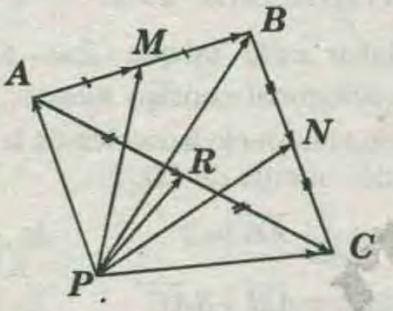
RESOLUCION:

* De la figura:

$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PA}+\dfrac{\overrightarrow{AB}}{2}$

$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PB}+\dfrac{\overrightarrow{BC}}{2}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PC}-\dfrac{\overrightarrow{AC}}{2}$



* Sumando :

$\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC})$

* Del gráfico: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Rightarrow\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$

PROBLEMA 175:

I) Sea $\vec{a}=(\vec{a}_1;\vec{a}_2)\neq\vec{0}$ vector de V_2 demostrar que si: $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}^{\perp}\parallel\vec{b}$

II) Sean $\vec{a};\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores de : $V_2;\vec{a}\neq\vec{0}$. si :

$$\vec{p}=\vec{b}-\frac{\vec{a}(\vec{a}.\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\Rightarrow\vec{p}\perp\vec{a}$$

III) Si $\vec{a};\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores no nulos y $\vec{a}.\vec{c}=0;\vec{b}.\vec{c}^{\perp}=0$. ¿que puede afirma acerca de $\vec{a}$ y $\vec{b}$?. Justifique analíticamente su respuesta.

RESOLUCION:

I) $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow(a_1;a_2).(b_1;b_2)=a_1b_1+a_2b_2=0$ .....(α)

* por dato $\vec{a}\neq\vec{0}\Rightarrow a_1\neq\vec{0}\ \vee\ a_2\neq\vec{0}$

* Si $a_1\neq 0\Rightarrow$ de (α): $b_1=-\dfrac{a_2b_2}{a_1}$

$\vec{b}=(-\dfrac{a_2b_2}{a_1};b_2)=\dfrac{b_2}{a_1}(-a_2;a_1)=(\dfrac{b_2}{a_1})\vec{a}^{\perp}=r\vec{a}^{\perp}$

* Donde : $r=\dfrac{b_2}{a_1}$; Por lo tanto : $\vec{b}\parallel\vec{a}^{\perp}$

II) Como $\vec{a}\neq\vec{0}$, multiplicamos ambos miembros por $\vec{a}$:

$\vec{P}.\vec{a}=\vec{b}.\vec{a}-\dfrac{(\vec{a}.\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}.\vec{a}$; dnde $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2$;

* luego : $\vec{P}.\vec{a}=\vec{b}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}=0\Rightarrow\vec{P}\perp\vec{a}$

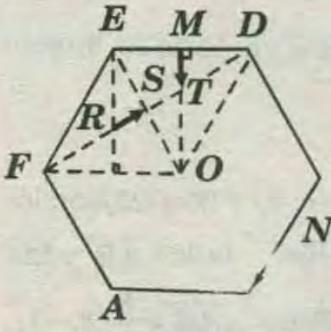
III) Del dato :

$\vec{b}.\vec{c}^{\perp}=0\Rightarrow\vec{b}\parallel\vec{c}\Rightarrow\vec{c}=r\vec{b}$

$\vec{a}.\vec{c}=0\Rightarrow\vec{a}.(r\vec{b})=r(\vec{a}.\vec{b})=0\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$

PROBLEMA 176:

En la figura, $ABCDEF$ es un exágono regular, M y N son puntos medios de $\overrightarrow{ED}$ y $\overrightarrow{CB}$ respectivamente. O es el centro del exágono.



Si $\overrightarrow{RS}=m\overrightarrow{TM}+n\overrightarrow{NB}$

Hallar : $m-n$

RESOLUCIO.

* R y T son Baricentro y Ortocentro a la vez de los triángulos equiláteros EFO y EOD, respectivamente Por propiedad geométrica:

$$|\overrightarrow{RS}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{FS}|\ y\ |\overrightarrow{MT}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{MD}|$$

* Sea: a=lado del exágono, entonces la altura del triángulo equilátero estará dado por $(\dfrac{a}{2}\sqrt{3})$

* Luego: $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{MT}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{a}{2}\sqrt{3})$

* Vectores Dirección Unitarios:

* De $\overrightarrow{NB}$: $\vec{u}_1=(-\cos 60°;-\text{sen}\,60°)=(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

* De $\overrightarrow{TM}$: $\vec{u}_2=(0;1)$

* De $\overrightarrow{RS}$: $\vec{u}_3=(\cos 30°;\operatorname{sen} 30°)=(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2})$

* Por lo tanto:

$\overrightarrow{NB}=\frac{a}{2}(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2});\overrightarrow{TM}=\frac{a}{6}\sqrt{3}(0;1);\overrightarrow{RS}=\frac{a\sqrt{3}}{6}(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2})$

* Reemplazando en el dato y efectuando operaciones se obtiene:

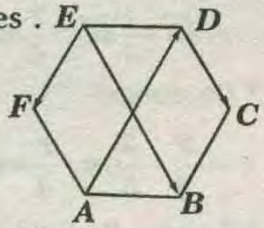
$$m=n=-1\Rightarrow m-n=0$$

PROBLEMA 178:

en la figura adjunta, **ABCDEF** es un hexágono regular cuyo lado mide $(\sqrt{3}-1)$ unidades .

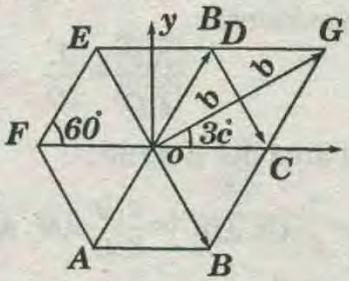
Encontrar:

$Proy_{\overrightarrow{EF}}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{DC})$



RESOLUCION:

* Según la figura definimos los vectores:



$\overrightarrow{EF}=(\cos 60°;-\operatorname{sen}60°)$

$\Rightarrow \overrightarrow{EF}=\frac{a}{2}(-1;-\sqrt{3})$

$\overrightarrow{AD}=2a(\cos 60°;\operatorname{sen}60°)$

$\overrightarrow{AD}=a(1;\sqrt{3})$

$\overrightarrow{EB}=2a(\cos 60°;-\operatorname{sen}60°)\Rightarrow \overrightarrow{EB}=a(1;-\sqrt{3})$

$\overrightarrow{DC}=a(\cos 60°;-\operatorname{sen}60°)\Rightarrow \overrightarrow{DC}=\frac{a}{2}(1;-\sqrt{3})$

Sea: $\overrightarrow{OG}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{DC})=\vec{V}\Rightarrow \vec{V}=\frac{a}{2}(3;\sqrt{3})$

$\Rightarrow Proy_{\overrightarrow{EF}}\vec{V}=(\frac{\vec{V}.\overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{EF}|})\frac{\overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{EF}|}$ .....(I)

* Como $\vec{V}.\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}a^2$ y $a=(\sqrt{3}-1)$; reemplazando valores en (I) y simplificando:

$$Proy_{\overrightarrow{EF}}\vec{V}=\frac{3}{4}(\sqrt{3}-1)(1;\sqrt{3})$$

OTRO MÉTODO :

* En la figura: $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC};-\overrightarrow{DC}\cong\overrightarrow{OE}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}+(-\overrightarrow{DC})\cong 2\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{OE}\cong\overrightarrow{OG}$

$\overrightarrow{OG}=2b(\cos 30°;\operatorname{sen}30°);b=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\overrightarrow{OG}=\frac{\sqrt{3}}{2}a(\sqrt{3};1)$; como $\overrightarrow{EF}=\frac{a}{2}(-1;-\sqrt{3})$ y

$a=(\sqrt{3}-1);Proy_{\overrightarrow{EF}}\overrightarrow{OG}=\frac{3}{4}(\sqrt{3}-1)(1;\sqrt{3})$

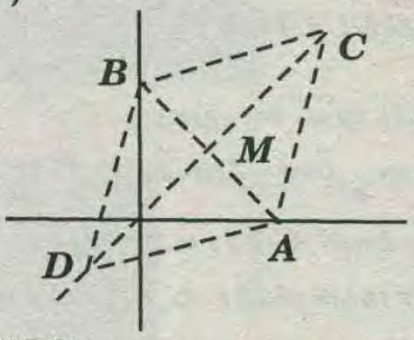
PROBLEMA 179:

En la figura $|\overrightarrow{AB}|=16u,|\overrightarrow{BC}|=17u$, el ángulo **OAB** es $\pi/4$, $\overrightarrow{OC}$ bisectriz del primer cuadrante.

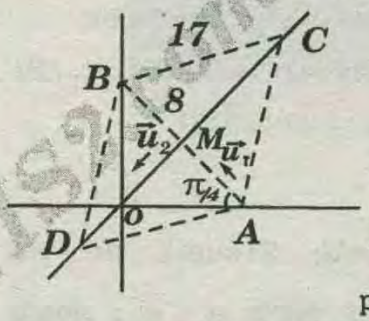
I) Calcular los vértices de los paralelogramos **ABCD**.

II) Si $r\neq 0$ es un número real . Hallar:

$Proy_{r(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AD})}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA})$



RESOLUCION:



vector dirección unitarios de $\overrightarrow{AB}$:

$\vec{u}_1=(\cos 135°;\operatorname{sen}135°)$

* luego :

$\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\vec{u}_1=16(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$

por lo tanto

$A=(0;0)+8\sqrt{2}(1;0)=(8\sqrt{2};0)$
$B=(0;0)+8\sqrt{2}(0;1)=(0;8\sqrt{2})$

vector dirección de $\overrightarrow{DC}$: $\vec{u}_2=\vec{u}_1^{\perp}=(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2})$

M, punto medio de $\overrightarrow{AB}$: $M=\frac{A+B}{2}=(4\sqrt{2};4\sqrt{2})$

$|\overrightarrow{MC}|=\sqrt{17^2-8^2}=15\Rightarrow D=M+15\vec{u}_2\Rightarrow D=(-\frac{7\sqrt{2}}{2};-\frac{7\sqrt{2}}{2})$

* También : $C=M-15\vec{u}_2\Rightarrow C=(\frac{23\sqrt{2}}{2};\frac{23\sqrt{2}}{2})$

$II)\ Proy_{r(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AD})}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA})=\frac{(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}).(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AD})}{|\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AD}|}$;

$\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$

$Proy_{r(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AD})}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA})=\frac{(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{DC})}{|\overrightarrow{DC}|}=\frac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{DC}|}$

$;(\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{DC})$

De (I): $\overrightarrow{BC}=(23\sqrt{2}/2;7\sqrt{2}/2);\overrightarrow{DC}=(15\sqrt{2};15\sqrt{2});|\overrightarrow{DC}|=30$

* reemplazando y efectuando :

$$Proy_{r(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AD})}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA})=\frac{450}{30}=15$$

www.GRATIS2.com

PROBLEMA 180:

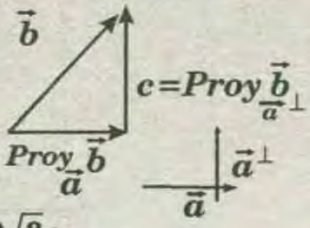
Sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que:

$$\vec{b}=(6;6\sqrt{3}) \;;\; Proy_{\vec{a}^{\perp}}\vec{b}=(-3;3\sqrt{3})$$

$$Camp_{\vec{b}}\vec{a}>0 \;\; y \;\; \vec{a}.\vec{b}=12\sqrt{3};$$

Hallar el vector $\vec{a}$.

RESOLUCION:



* Sea
$\vec{a}=(r;s) \Rightarrow \vec{a}^{\perp}=(-s;r)$
$\vec{c}=Proy_{\vec{a}^{\perp}}\vec{b}=(-3;3\sqrt{3})$

* Como $\vec{b}=(6;6\sqrt{3})$ y $\vec{a}.\vec{b}=12\sqrt{3}$;

$\vec{a}.\vec{b}=(r;s).(6;6\sqrt{3}) \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=6r+6s\sqrt{3}=12\sqrt{3};$

* Entonces : $r+s\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.....(I)

* Pero $\vec{c}$ y $\vec{a}$ son perpendiculares ; entonces:

$\vec{c}.\vec{a}=0 \Rightarrow (-3;3\sqrt{3}).(r;s)=0 \Rightarrow r-s\sqrt{3}=0$.....(II)

*De (I) y (II) : $r=\sqrt{3}\;;s=1; \Rightarrow \vec{a}=(\sqrt{3};1)$

PROBLEMA 181:

Expresar el vector $\vec{c}=(3;-2)$ suma de sus proyecciones ortogonales sobre $\vec{a}$ y $\vec{a}^{\perp}$; siendo $\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1)$

RESOLUCION:

* Se tiene $\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1)\;;\;\vec{a}^{\perp}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1;1)$

$\Rightarrow |\vec{a}|=|\vec{a}^{\perp}|=1$

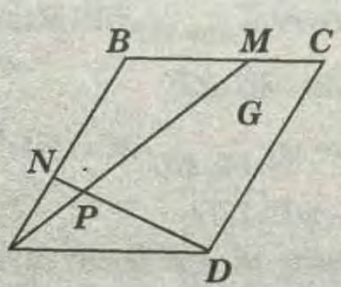
* Nos piden:

$$\vec{c}=Proy_{\vec{a}}\vec{c}+Proy_{\vec{a}^{\perp}}\vec{c} \Rightarrow \vec{c}=\left(\frac{\vec{c}.\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\left(\frac{\vec{c}.\vec{a}^{\perp}}{|\vec{a}|^{\perp}}\right)\frac{\vec{a}^{\perp}}{|\vec{a}|^{\perp}}$$

PROBLEMA 182:

En la figura sea el paralelogramo $ABCD$ de $220\,u^2$ de área.

Si: $\frac{|\overline{BM}|}{|\overline{MA}|}=\frac{1}{3}$ y $\frac{|\overline{AN}|}{|\overline{NB}|}=\frac{2}{3}$



a) En que relación divide

P a $\overline{ND}$ y $\overline{AN}$

b) Calcular el área del

ΔAPD .

RESOLUCION:

* De los datos:

I) $\frac{|\overline{BM}|+|\overline{MC}|}{|\overline{MC}|}=\frac{4}{3} \Rightarrow \overline{MC}=\frac{3}{4}\overline{BC};\; \overline{BN}=\frac{1}{4}\overline{BC}$

II) $\frac{|\overline{AN}|+|\overline{NB}|}{|\overline{NB}|}=\frac{5}{3} \Rightarrow \overline{NB}=\frac{3}{5}\overline{AB}\;;\; \overline{AN}=\frac{2}{4}\overline{AB}$

a) Sea: $\overline{AP}=r\overline{AM}$ y $\overline{NP}=m\overline{AD}$; Pero: $\overline{AP}=\overline{AN}+\overline{NP}$

* entonces: $r\overline{AM}=\frac{2}{5}\overline{AB}+m\overline{ND}$; pero :

$\overline{AM}=\overline{AB}+\overline{BM}=\overline{AB}+\frac{1}{4}\overline{BC}$ y $\overline{AD}=\overline{BC}$

$\Rightarrow r(\overline{AB}+\frac{1}{4}\overline{BC})=\frac{2}{5}\overline{AB}+m(\overline{AD}-\overline{AM}=\frac{2}{5}\overline{AB}+m(\overline{BC}-\frac{2}{5}\overline{AB})$

* De donde:

$r=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}m\;;\;\frac{r}{4}=m \Rightarrow m=\frac{1}{11}\;;\; r=\frac{4}{11}$

* Luego P divide a $\overline{ND}$ y $\overline{AM}$ en las siguientes relaciones:

$$\frac{|\overline{NP}|}{|\overline{PD}|}=\frac{1}{10} \quad y \quad \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PM}|}=\frac{4}{7}$$

b) area del ΔAPD :

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{AP}.\overline{AD}^{\perp}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{4}{11}\overline{AM}.\overline{AD}^{\perp}\right|=\frac{2}{11}\left|(\overline{AB}+\overline{BM}).\overline{AD}^{\perp}\right|$$

$$\Rightarrow S=\frac{2}{11}\left|\overline{AB}.\overline{AD}^{\perp}+\overline{BM}.\overline{AD}^{\perp}\right|=\frac{2}{11}\left|\overline{AB}.\overline{AD}^{\perp}\right|=\frac{2}{11}(220)$$

* Por lo tanto: $S=40\,u^2$

PROBLEMA 183:

Decir cuales de los siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar su respuesta .

a) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores no paralelos y $m\vec{a}+m\vec{b}=r\vec{a}+s\vec{b}$ entonces $m=s$ y $n=r$.

b) $(Proy_{\vec{b}}\vec{a})^{\perp}=Proy_{\vec{b}^{\perp}}\vec{a}^{\perp}$

c) Si $r>0$ entoces $Comp_{\vec{b}^{\perp}}\vec{a}=-Comp_{r\vec{b}}\vec{a}^{\perp}$

d) $\left|\vec{a}^{\perp}+\vec{b}\right|=\left|\vec{b}^{\perp}-\vec{a}\right|$

RESOLUCION:

* Efectuando la igualación:

$(m-r)\vec{a}=(s-n)\vec{b} \Rightarrow$ multiplicando por $\vec{a}$ primero y por $\vec{b}^{\perp}$ después, encontraremos, respectivamente que:

$a=r$ y $s=p \Rightarrow$ Proposición a es $FALSA$.

b) sabemos que:

$$(r\vec{b})^{\perp}=r\vec{b}^{\perp}\;;|\vec{b}|=\left|\vec{b}^{\perp}\right|\;;\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}^{\perp}-\vec{b}^{\perp}$$

* Luego:

$$(Proy_{\vec{b}}\vec{a})^{\perp}=(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b})^{\perp}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}^{\perp}=\frac{\vec{a}^{\perp}.\vec{b}^{\perp}}{|\vec{b}^{\perp}|^2}\vec{b}^{\perp}$$

* Luego:

$(Proy_{\vec{b}}\vec{a})^{\perp}=Proy_{\vec{b}}{}^{\perp}\vec{a}^{\perp}\Rightarrow$ Proposición *b* es ***VERDADERA***

c) Sabemos que si:

$$r>0\Rightarrow|r|=r;|\vec{b}|=|\vec{b}|^{\perp};-\vec{a}^{\perp}.\vec{b}^{\perp}=\vec{a}.\vec{b}^{\perp}$$

$$\Rightarrow -Comp_{r\vec{b}}\vec{a}=-\frac{\vec{a}^{\perp}.(r\vec{b}^{\perp})}{|r\vec{b}|}=-\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}.\vec{b}^{\perp}}{|\vec{b}^{\perp}|}$$

* Entonces:

$-Comp_{r\vec{b}}\vec{a}^{\perp}=Comp_{r\vec{b}^{\perp}}\vec{a}^{\perp}\Rightarrow$ Proposición *c* es ***VERDADERA***

d) Por propiedades

$$\vec{b}=-(\vec{b}^{\perp})^{\perp};(\vec{a}^{\perp}\pm\vec{b}^{\perp})=(\vec{a}\pm\vec{b})^{\perp};|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{b}-\vec{a}|$$

* Luego :

$$|\vec{a}^{\perp}\pm\vec{b}|=|\vec{a}^{\perp}-(\vec{b}^{\perp})^{\perp}|=|(\vec{a}-\vec{b}^{\perp})^{\perp}|=|\vec{a}-\vec{b}^{\perp}|=|\vec{b}^{\perp}-\vec{a}|$$

* Por lo tanto, la proposicion *d* es ***VERDADERA***

PROBLEMA 184:

I) Si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ y $|\vec{a}|=4$; $|\vec{b}|=2$; $|\vec{c}|=5$

Hallar : $(3\vec{b}+\frac{\vec{c}}{2}).\vec{c}$

II) Dados lo vectores $\vec{a}=(2;1)$ $\vec{b}=(3;4)$ tales que:

$\vec{a}=\vec{r}+\vec{s}$ Siendo $\vec{r}\,//\,\vec{b}$ y $\vec{r}\perp\vec{s}$

Encontrar $|\vec{r}-\vec{s}|$

RESOLUCION:

I) Sea $P=(3\vec{b}+\frac{\vec{c}}{2})+\vec{c}=3\vec{b}.\vec{c}=\frac{1}{2}|\vec{c}|^2$ .....(α)

* Del dato: $|\vec{b}+\vec{c}|=|-\vec{a}|=|\vec{a}|\Rightarrow|\vec{b}+\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2$

$$|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=3\vec{b}.\vec{c}=|\vec{a}|^2$$

* Reemplazando valores y efectuando :

$|\vec{b}.\vec{c}|=-\frac{13}{2}$; en .....(α) : $\vec{r}=3(-\frac{13}{2})+\frac{1}{2}(25)\Rightarrow P=-7$

II) $\vec{r}\perp\vec{s}\Rightarrow|\vec{r}-\vec{s}|=|\vec{r}+\vec{s}|$

$\vec{r}+\vec{s}=\vec{a}\Rightarrow|\vec{r}+\vec{s}|=|\vec{a}|=\sqrt{5}\Rightarrow|\vec{r}-\vec{s}|=\sqrt{5}$

PROBLEMA 185:

Un avión vuela en el sentido del vector $\overrightarrow{AB}$. La velocidad del viento es de. ***50 Km/hr***. en el sentido del vector $\vec{V}$. Calcular la proyección de la velocidad del aire en la dirección del aeroplano.

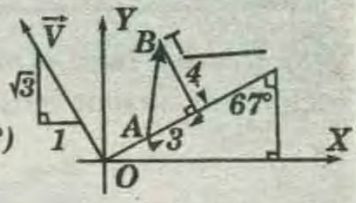
RESOLUCION:

* En la figura : $\phi=\alpha+\theta$

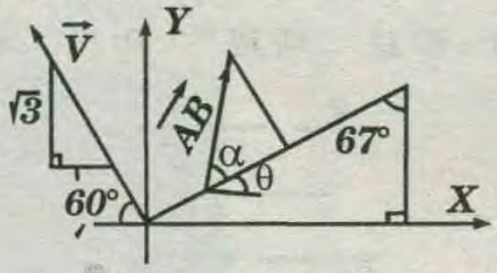
$\phi=37°+23°=60°$

$\vec{V}=50(-\cos 60°;\operatorname{sen}60°)$

$\vec{V}=(-25;25\sqrt{3})$



* Sea $\vec{V}$ vector unitario de $\overrightarrow{AB}$:



$\vec{u}=(\cos\phi;\operatorname{sen}\phi)=(\cos 60°;\operatorname{sen}60°)=(1/2;\sqrt{3}/2)$

$$Proy_{\overrightarrow{AB}}\vec{V}=Proy_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}=(\vec{v}.\vec{u})\vec{u}=(\frac{23}{2};\frac{25}{2}\sqrt{3})$$

PROBLEMA 186:

Los vértices de un paralelogramo son los siguientes puntos en $\mathbb{R}^2$: $0=(0;0)$, $A=(8;2)$ $B=(2;4)$ y C

Determinar el vértice C. Si el problema admite ***3*** o más soluciones, calcular el área del polígono formado por los vértices C.

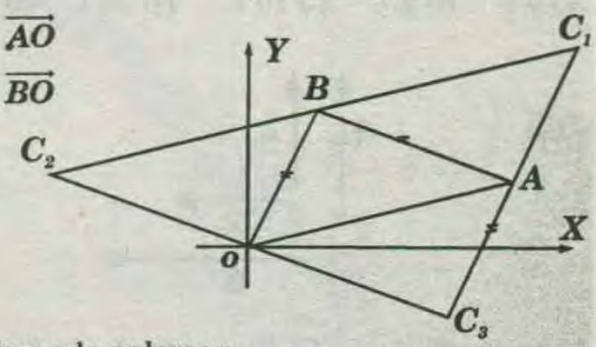
RESOLUCION:

* En la figura mostrada se aprecia ***3*** soluciones. Siendo:

$C_1=A+\overrightarrow{OB}$

$C_2=B+\overrightarrow{AO}$

$C_3=A+\overrightarrow{BO}$



* Reemplazando valores :

$C_1=(8;2)+(2;4)\quad\Rightarrow C_1=(10;6)$

$C_2=(2;4)+(-8;-2)\Rightarrow C_2=(-6;2)$

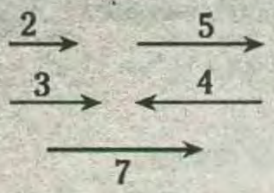
$C_3=(8;2)+(-2;-4)\Rightarrow C_3=(6;-2)$

* Calculo del área :

$$A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{C_1C_2}|.|\overrightarrow{C_1C_3}^{\perp}|=\frac{1}{2}|-16;-4).(8;-4)|=56u^2$$

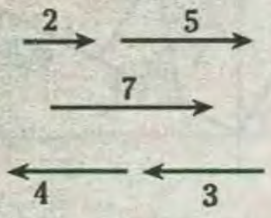
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 En caso, halle el valor de la resultante de los vectores mostrados mostrados:



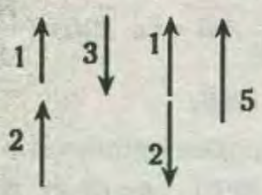
A) 13 B) 13 C) 10 D) 10 E) 8

02



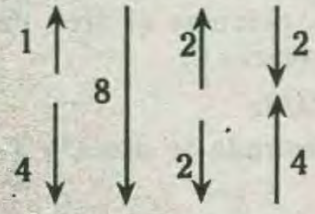
A) 6 B) 6 C) 7 D) 7 E) 4

03



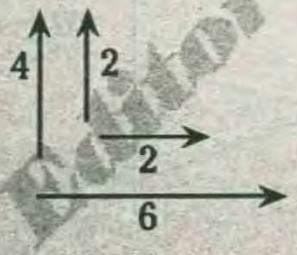
A) 3↓ B) 3↑ C) 4↑ D) 4↓ E) 5↑

04



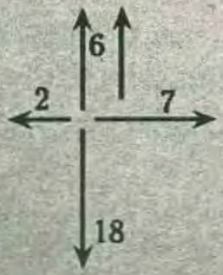
A) 9↓ B) 9↑ C) 10↓ D) 10↑ E) 5↓

05



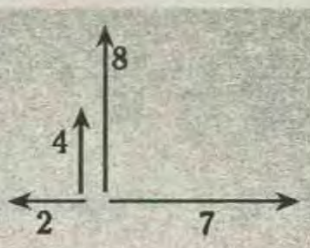
A) 14 B) 6 C) 10 D) 8 E) 9

06



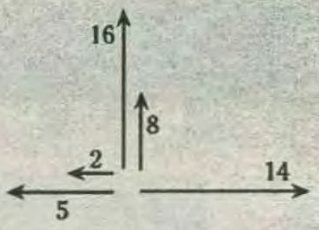
A) 17 B) 8 C) 15 D) 13 E) 11

07



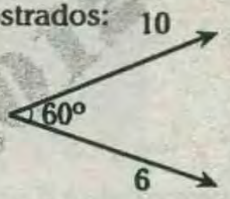
A) 10 B) 11 C) 13 D) 15 E) 16

08



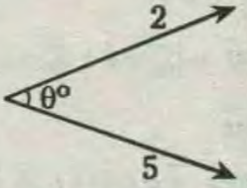
A) 20 B) 25 C) 19 D) 32 E) 40

09 * En cada caso halle el valor de la resultante de los vectores mostrados:



A) 10 B) 16 C) 14 D) 12 E) 18

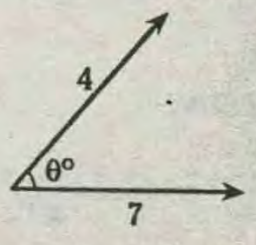
10



$Cos\theta = \frac{7}{20}$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

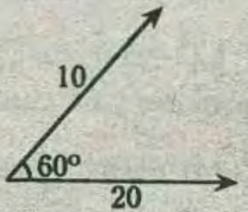
11



$Cos\theta = \frac{5}{8}$

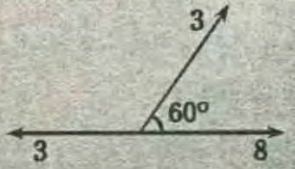
A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

12



A) $5\sqrt{7}$ B) $10\sqrt{7}$ C) 10 D) $8\sqrt{7}$ E) $\sqrt{6}$

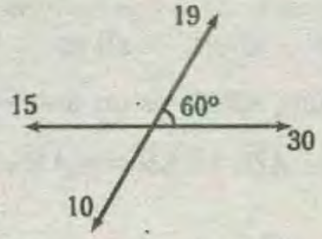
13



A) 2 B) 5 C) 7 D) 9 E) 10

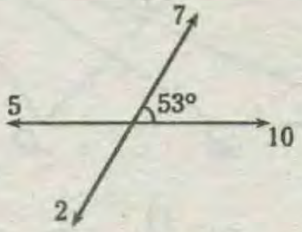
Editorial Rubiños 2012

14



A) 20 B) 21 C) 24 D) 22 E) 19

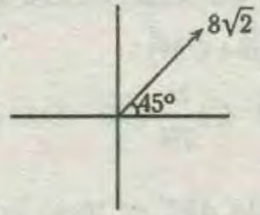
15



A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{5}$ D) $4\sqrt{5}$ E) $5\sqrt{5}$

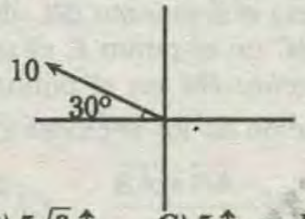
* En cada caso, halle el valor y la dirección de las dos componentes de los vectores mostrados.

16



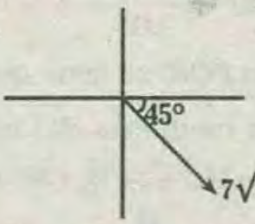
A) 4→ 4↑ B) 6→ 2↑ C) 8↑ 8→ E) 6↑ 6→ E) 7↑ 1→

17



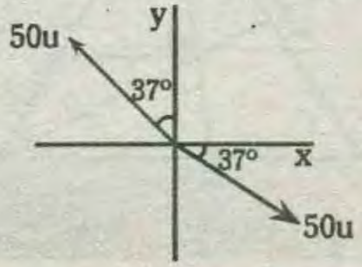
A) 4↑ 6← B) $5\sqrt{3}$↑ 5→ C) 5↑ $5\sqrt{3}$← D) 6↑ 4→ E) 10→ 10↑

18



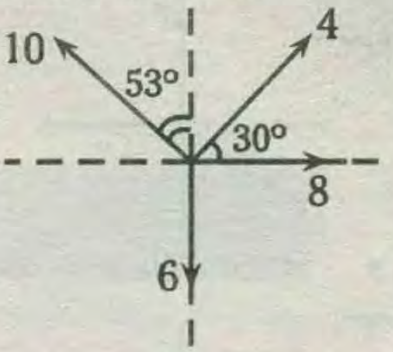
A) 7↑ 7→ B) 7↓ 1→ C) 6↑ 2→ D) 6→ 4↑ E) 7↑ ←

19 Calcular la dirección de la resultante.



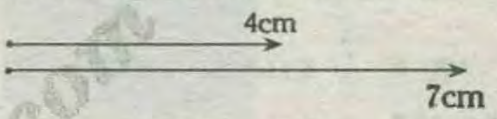
A) 30° B) 37° C) 45° D) 53° E) 60°

20 En el conjunto de vectores mostrados, hallar la dirección del vector resultante.



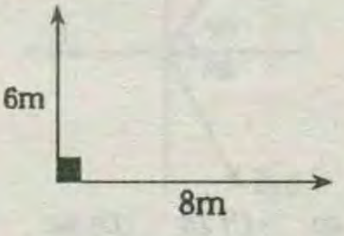
TAREA DOMICILIARIA

01 Hallar la magnitud de la resultante.



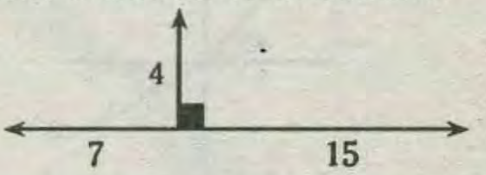
A)2cm B)14 C)10 D)48 E)11

02 Determine el módulo de la resultante e indique su dirección.



A) 10m; ↗ B) 5; ↗ C) 7; ↗ D) 5; ↘ E) 1; ↖

03 Calcular el módulo de la resultante.



A) $\sqrt{5}$ B) 12 C) $2\sqrt{5}$ D) 6 E) $4\sqrt{5}$

04 La resultante máxima de los vectores mide ***16cm*** y su mínima resultante mide ***6cm***.
Hallar el módulo del vector menor.

A) 5cm B) 4 C) 8 D) 11 E) 12

05 La máxima resultante de dos vectores es ***21cm*** y su mínima es ***3cm***. ¿Cuál será la resultante cuando los vectores formen ***90°***?.

A) 10cm B)12 C) 14 D) 15 E) 18

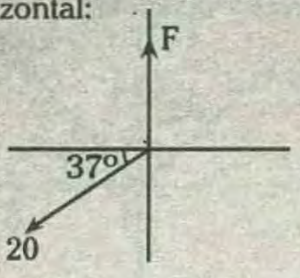
06 ¿Cuál podrá ser la resultante de dos vectores de módulos ***7cm*** y ***17cm***?.

WWW.GRATIS.COM

A) 9cm B) 1 C) 27 D) 21 E) 33

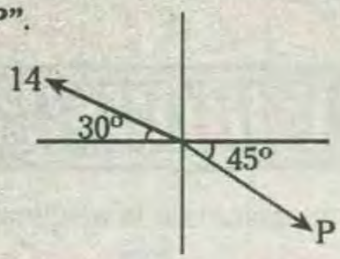
* En cada caso, se sabe que la resultante de los vectores es horizontal:

07 Hallar "F".



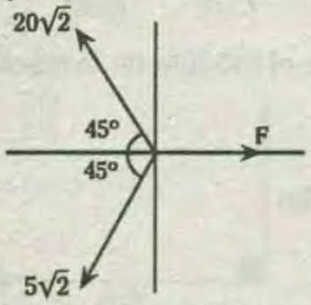
A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

08 Hallar "P".



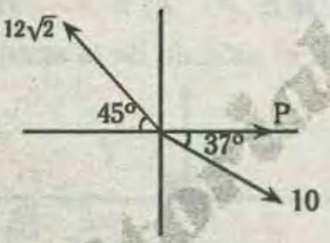
A) 14 B) 7 C) $14\sqrt{2}$ D) 10 E) $7\sqrt{2}$

09 Hallar "F".



A) 20 B) 30 C) 15 D) 25 E) 35

10 Hallar "P".



A) 2 B) 4 C) 9 D) 7 E) 10

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

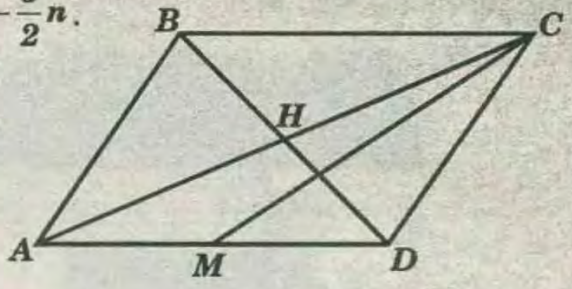
01 Si el vector $\vec{a}=(1;18)$ es expresado como $\vec{a}=(\vec{x}+\vec{y})$ y $\vec{x}\parallel\vec{b}$; $\vec{y}\parallel\vec{c}$ y si $\vec{b}=(-1;4)$; $\vec{c}=(2m;3m)$, halle x.

A) $(-1;4)$ B) $(-2;8)$ C) $(-3;12)$
D) $(3;-12)$ E) $(2;-8)$

02 Dados los vectores $\vec{a}=(1;-1)$; $\vec{b}=(1;2)$ y $\vec{c}=(2;3)$. Si $\vec{c}=r\vec{a}+s\vec{b}$, calcule $9(r^2+s^2)$.

A) 27 B) 18 C) 26 D) 25 E) 15

03 En la figura, $ABCD$ es un paralelogramo, M es punto medio de $\overline{AD}$. Si $\overrightarrow{AH}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{MC}$, calcule $\frac{2}{3}m-\frac{3}{2}n$.



A) $\frac{11}{6}$ B) 2 C) $-\frac{11}{6}$ D) -2 E) $-\frac{13}{6}$

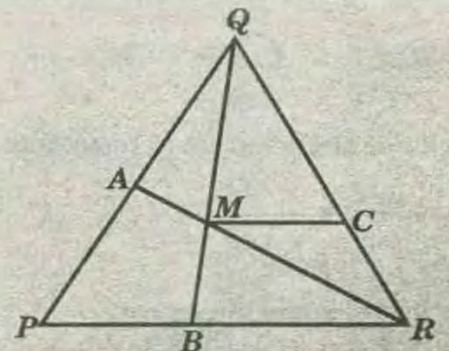
04 Se tiene un exágono regular $ABCDEF$, cuyo lado es de longitud a. M es punto medio de $\overline{EF}$. Calcule $\left|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CM}\right|$.

A) $\frac{a}{2}\sqrt{79}$ B) $\frac{a}{3}\sqrt{79}$ C) $\frac{a}{79}\sqrt{79}$ D) $a\sqrt{79}$ E) $a\sqrt{7}$

05 En un triángulo ABC se traza la mediana CM; $\overline{BN}$ es la mediana del triángulo BCM, luego por M se traza una paralela al segmento BN, dicha paralela interseca al lado AC en el punto F, el segmento AN interseca al segmento FM en el punto T. Halle el vector $\overrightarrow{FT}$ en función de los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{AB}$.

A) $\frac{4\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AB}}{24}$ B) $\frac{-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{8}$ C) $\frac{2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AB}}{24}$
D) $\frac{\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}}{24}$ E) $\frac{2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AB}}{12}$

06 En el triángulo PQR, se tiene que $\overline{MC}\parallel\overline{PR}$ y que $\overline{RA}$ y $\overline{QB}$ son medianas del triángulo. Si se cumple que $\overrightarrow{RM}=s\overrightarrow{MC}+t\overrightarrow{PQ}$, calcule $s+t$.



A) $-\frac{5}{3}$ B) $-\frac{5}{2}$ C) $-\frac{3}{5}$ D) 0 E) $-\frac{11}{3}$

07 Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores no nulos, determine el valor de verdad de:

I) $\vec{a}^{\perp}.\vec{b}^{\perp}=\vec{a}.\vec{b}$

II) $(\vec{a}+\vec{b})^{\perp}=\vec{a}^{\perp}+\vec{b}^{\perp}$

III) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ es siempre un vector unitario.

A) FFF B) FFV C) VVF D) FVV E) VFF

08 Encuentre el valor mínimo de $|\vec{a}|$ si $|\vec{a}|=(3s-1;s-2)$ donde $s\in R$.

A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{\frac{5}{2}}$ D) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ E) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

09 Dados los vectores $\vec{a}=(1;3)$ y $\vec{b}=(x;y)$ si $\vec{a}.\vec{b}=3$ y $\vec{a}-\vec{b}=(1-x;2)$, calcule x^2+y^2.

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) -1

09 Si $\vec{a}=(a_1;a_2)$ y $\vec{b}=\frac{(2;-4)}{3}$ tienen misma dirección pero sentido opuesto. Si $a_1^2+a_2^2=25$, halle a_2-a_1.

A) $3\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{5}$ C) 4 D) 5 E) $3\sqrt{5}$

11 A los lados de un triángulo se asocian los vectores $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$. Si $a=6$; $b=2$ y $|\vec{b}-\vec{a}|=5$, calcule $Comp_{\vec{b}}\vec{a}-Comp_{\vec{a}}\vec{b}$.

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{5}$

12 Si $\vec{a}=(4;-2)$; $proy_{\vec{b}^{\perp}}\vec{a}=(-3;3)$; $Comp_{\vec{b}^{\perp}}\vec{a}>0$, calcule $Comp_{\vec{b}}\vec{a}$

A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) $-\sqrt{2}$ D) -1 E) $2\sqrt{2}$

13 Sean $\vec{m}$ y $\vec{n}$ dos vectores unitarios que forman un ángulo de $60°$, dados los vectores $\vec{a}=3\vec{m}-2\vec{n}$; $\vec{b}=2\vec{m}+\vec{n}$, calcule $Comp_{\vec{b}}\vec{a}$

A) $\frac{7}{2\sqrt{7}}$ B) $2\sqrt{7}$ C) $3\sqrt{7}$ D) $-2\sqrt{7}$ E) $-\frac{7}{\sqrt{7}}$

14 Sean $\vec{m}$ y $\vec{n}$ dos vectores unitarios que determinan un ángulo que mide $53°$. Dados los vectores $\vec{a}=5\vec{m}-6\vec{n}$ y $\vec{b}=3\vec{n}-5\vec{m}$. calcule $Comp_{\vec{b}}\vec{a}$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) -4

15 Sean las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$; de pendientes m_1 y m_2 respectivamente que se intersecan en P. La recta $\mathcal{L}_3$ interseca a $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$; en A y B, respectivamente. $|\overline{PA}|=8$; $|\overline{PB}|=3$ y además $\frac{1}{m_2}-\frac{1}{m_1}=2\sqrt{3}$. Si $m_1.m_2=1$. calcule $|\overline{AB}|$.

A) $4\sqrt{3}$ B) 5 C) $6\sqrt{3}$ D) 7 E) 8

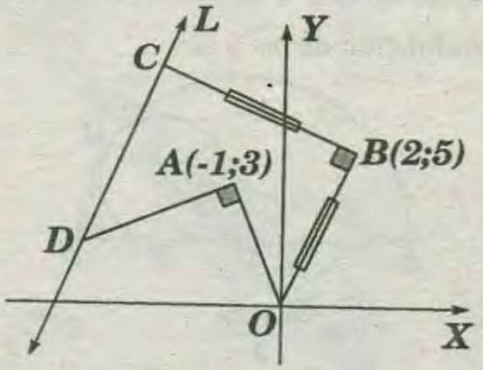
16 En un triángulo ABC, con $B=(3;4)$; $\vec{L}_1$: $\{(1;-1)+t(1;1)\}$ es la bisectriz del ángulo BAC, $\vec{L}_1\cap\overline{BC}=\{Q\}$, $N=(11;0)$ es un punto en la prolongación de $\overline{BC}$ tal que $2\overline{BC}=\overline{BQ}+\overline{BN}$. Calcule la razón entre las longitudes de los lados AB y AC del triángulo.

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{5}$

17 Pedro tiene que ir desde un punto $P(1;6)$ hasta el punto $Q(5;10)$, pero pasando por el río para sacar agua en un cubilete . Si la orilla del río se encuentra en la recta : $L: x-3y+5=0$ ubicar un punto M en la orilla del río de manera que Pedro recorra la mínima distancia.

A) (4;3) B) $\left(2;\frac{7}{3}\right)$ C) (−2;1) D) (1;2)

18 Del gráfico, hallar la ecuación de la recta "L".



A) $3x-y+14=0$ B) $4x-y+18=0$
C) $x-y+6=0$ D) $7x-y+30=0$
E) $5x-y+22=0$

19 Dada la recta : $L:\{P/P=(3;4)+t(1;2), t\in R\}$, hallar la longitud del segmento de ella, cuyos extremos son los puntos que equidistan de los ejes cartesianos.

A) $4\sqrt{2}$ B) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ D) $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ E) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

20 Dadas las rectas :

$L_1 : \{P/P = (1;2) + t\,\vec{a}\,;\, t\in\mathbb{R}\}$

$L_2 : \{P/P=(2;4)+t\vec{a} : t\in\mathbb{R}\}$

Además: $Pr_{\vec{a}}\,\vec{b}=(3;4)$; siendo $\vec{b}$ y $\vec{a}$ no nulos. ¿Cuál es la distancia entre L_1 y L_2?

A) 0,2u B) 0,4u C) 0,6u

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dado los vectores :

$\vec{a}=(1;5)$

$\vec{b}=(-1;2)$

$\vec{c}=(2;-3)$

Calcule : $K=\vec{a}.\vec{b}^{\perp}+\vec{b}.\vec{c}^{\perp}+\vec{c}.\vec{a}^{\perp}$

A) 17 B) – 17 C) 19 D) –19 E) 21

02 En un cuadrado *ABCD* de centro *O*, se traza el cuadrante *BAD* y con diámetro *CD* se traza interiormente una semicircunferencia que interseca al cuadrante en «*P*».

Si : $\overline{OP}=m.\overline{AB}+n.\overline{AD}$

Calcule : «$m+n$»

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

03 En la figura , *P* y *Q* son puntos de tangencia.

Halle $\vec{x}$ en función de $\vec{m}$ y $\vec{n}$

A) $\frac{2\vec{m}+\vec{n}}{2}$ B) $\frac{\vec{m}+2\vec{n}}{2}$ C) $\frac{\vec{m}-\vec{n}}{2}$

D) $\frac{\vec{m}-\vec{n}}{3}$ E) $\frac{\vec{m}-2\vec{n}}{6}$

04 Sean los vectores ortogonales $\vec{a}$ y $\vec{b}$ donde :

$\vec{a}=(6;1+k)$ y $\vec{b}=(2+k;-8)$

Si : $\vec{c}=t\,\vec{a}+s\,\vec{b}$

Donde : $\vec{c}=\left(-\frac{1}{2};-2\right)$

Calcule : $s-t$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{7}{8}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{3}{5}$

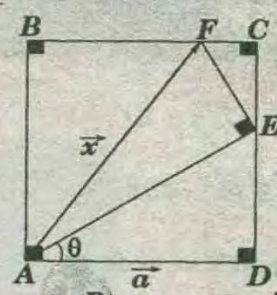
05 Si $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son vectores unitarios y "θ" ángulo que forman. Calcule : $|\vec{x}-\vec{y}|$

A) $Cos\,\theta$ B) Sen C) $Sen\frac{\theta}{2}$ D) $2Sen\frac{\theta}{2}$ E) $2Cos\frac{\theta}{2}$

06 En el cuadrado *ABCD* mostrado, se cumple que:

$\vec{x}=m\,\vec{a}\,n\,\vec{a}^{\perp}$

Hallar : $H=n-m$



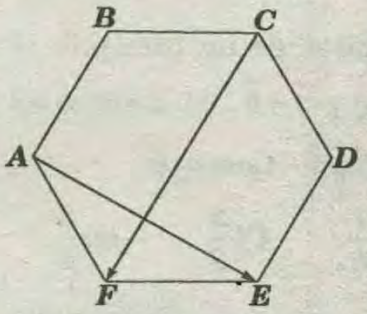
A) $Tan\theta-Tan^2\theta$ B) $Tan\theta+Tan^2\theta$

C) $Tan\theta+Tan^2\theta+Tan^3\theta$ D) $Tan\theta-Tan^2\theta+Tan^3\theta$

E) $Tan\theta-1$

07 Si *ABCDEF* es un exágono regular cuyo lado mide $\sqrt{19}\,u$.

Determinar : $\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CF}\right|$

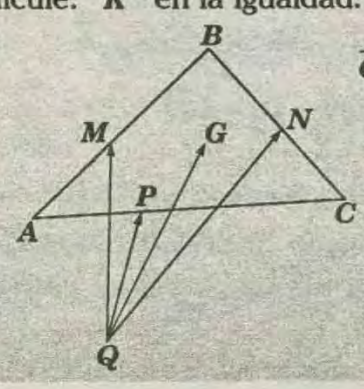


A) $\frac{28}{5}$ B) $\frac{19}{4}$ C) $\frac{19}{3}$ D) $\frac{17}{5}$ E) $\frac{18}{7}$

08 Si en el gráfico : *M; N* y *P* son puntos medios de *AB*; *BC* y *AC* respectivamente ; y «*G*» es el baricentro del triángulo *ABC* .

Calcule: "*K*" en la igualdad.

$\overline{QM}+\overline{QN}+\overline{QP}=K\overline{QG}$



A)3 B)6 C) – 3 D) – 6 E) $\frac{1}{3}$

09 Cada par de vectores : $\vec{a}$; $\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman entre sí un ángulo de $60°$.

Donde : $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2 \wedge |\vec{c}|=6$

Si : $\vec{P}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$,

halle : $|\vec{P}|$

A)10 B) 9 C) 8 D) 2 E) 7

10 Si : $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$; $|\vec{a}|=4$; $|\vec{b}|=2$ y $|\vec{c}|=5$

Halle : $\left(3\vec{b}+\frac{\vec{c}}{2}\right).\vec{c}$

A) –7 B) 14 C) 28 D) –14 E) – 28

11 Señale el área máxima de la región triangular formado por los vectores :

$\vec{a}=(1+Senx : 1+Cosx)$

$\vec{b}=(Cosx ; - Senx)$

A) $(1+\sqrt{2})u^2$ B) $(\sqrt{2-1})u^2$ C) $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)u^2$

D) $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)u^2$ E)2

12 Si : $|Pr_{\vec{b}}\,\vec{a}|=3$ y $|Pr_{\vec{b}^{\perp}}\,\vec{a}|=2$, calcule : $|\vec{a}|$

A)6 B)36 C) $\sqrt{6}$ D)13 E) $\sqrt{13}$

Si : $|\vec{a}|=|\vec{b}|-|\vec{a}-\vec{b}|$

13 ¿Qué se puede afirmar de $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

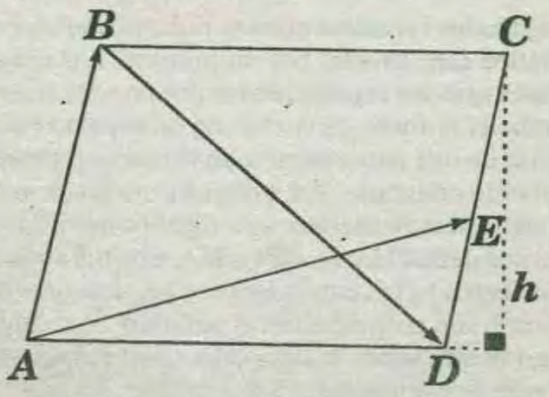
A) $\vec{a}\perp\vec{b}$ B) $\vec{a}\,//\,\vec{b}$ C) $\vec{a}=2\vec{b}$

D) $\vec{a}=2\vec{b}^{\perp}$ E) $\vec{a}^{\perp}=\vec{b}^{\perp}=0$

14 En el paralelogramo de la figura , "E" es punto medio de DC y $m\angle BAD=60°$.

Si : $F=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BD} \wedge \vec{P}=Pr_{\overrightarrow{AD}}\,\vec{F}$

Halle : $|\vec{P}|$ en función de "h"



A) $\sqrt{3}h$ B) $\frac{2\sqrt{3}h}{3}$ C) $\frac{5\sqrt{3}}{6}h$ D) $\frac{3\sqrt{3}}{4}h$ E) $\frac{7\sqrt{3}}{3}h$

15 Sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, tales que :

$\vec{b}=(6;6\sqrt{3}), Pr_{\vec{a}^{\perp}}\,\vec{b}=(-3;3\sqrt{3})$

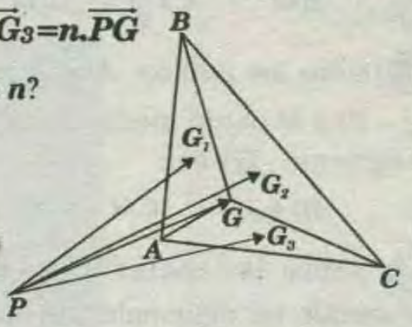
$Comp_{\vec{b}}\,\vec{a}>0 \wedge \vec{a}.\vec{b}=12\sqrt{3}$,

halle el vector $\vec{a}$

A) $(-1;\sqrt{3})$ B)(1;1) C) $(\sqrt{2};\sqrt{2})$ D) $(\sqrt{3};1)$ E) $(-1;1)$

16 De acuerdo al gráfico, G es baricentro del triángulo ABC y G_1, G_2 y G_3 son los baricentros de los triángulos ABG, BCG . Sea además "P" un punto cualquiera del plano, tal que se comprueba que: $\overrightarrow{PG_1}+\overrightarrow{PG_2}+\overrightarrow{PG_3}=n.\overrightarrow{PG}$

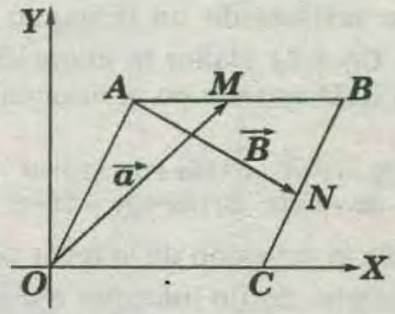
¿Cuál es el valor de n?



A)1 B)3 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E)6

17 En la figura, $OABC$ es un rombo, $A(8;6)$ y M y N son puntos medios de AB y AC respectivamente .

Calcule : $\vec{a}.\vec{b}$



A)20 B)30 C)40 D)50 E)60

18 Dado un conjunto :

$S=\{(x;y)/2x+3y\le 6 , x\ge 0 , y\ge 0\}$

y el punto $P(2;3)$. ¿Cuál de las siguientes rectas separa a P de S?

A) $y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{4}$ B) $y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$

C) $y=\frac{1}{8}x+1$ D) $y=\frac{1}{16}x+\frac{3}{16}$

19 En el plano xy , se tiene las rectas paralelas $y+2x+4=0$ e $y+2x-8=0$. Halle la recta equidistante a ellas contenida en el plano xy.

A)$y+2x-1=0$ B)$y+2x-2=0$ C) $y+2x-\frac{2}{5}=0$

PDF GRATIS.com

D)$y+2x-3=5$ E)$y+2y-5=0$

20 Sea la ecuación vectorial de una recta :

$$L=\{P\in\mathbb{R}^2 / P=(5;1)+t(-1;2) : t\in\mathbb{R}\}$$

Entonces la ecuación cartesiana de la recta es :

A)$2x+y-11=0$ B)$2x+y-9=0$ C)$2x+y-3=0$
D)$3x+y-16=0$ E)$x+y-7=0$

21 Sea las rectas : $L_1: x-y-2=0$; $L_2: x-2y-1=0$ y L_3 con pendiente $m>1$. Si L_1 es la bisetriz del ángulo formado por L_2 y L_3. Hallar : m

A)$\frac{5}{4}$ B)2 C)$\frac{5}{2}$ D)3 E)4

22 Dados los puntos $A=(-2;-3)$; $B=(2;1)$;$C=(4;-9)$ y M punto medio de $\overline{BC}$, la distancia de M al segmento $\overline{AC}$ es :

A)2 B)$2\sqrt{2}$ C)4 D)$4\sqrt{2}$ E)6

23 Sobre las rectas $x+y-4=0$; $x-y=0$ se encuentran las diagonales de un rombo . Si uno de sus vértices es el origen de coordenadas y la medida de una de sus diagonales es igual a la medida del lado del rombo, entonces el área del rombo es :

A)$5\sqrt{3}$ B)$\frac{16}{3}\sqrt{3}$ C)$6\sqrt{3}$ D)$\frac{1}{9}\sqrt{3}$ E)$\frac{14}{3}\sqrt{3}$

24 Los vértices de un triángulo son $A(6;-3)$, $B(4;7)$, $C(-2;1)$ Hallar la ecuación de una revta paralela a BA trazada po el ortocentro del triángulo ABC.

A)$5x-15y-19=0$ B)$15x+6y-11=0$ C)$15x+3y-17=0$
D)$15x-3x-8=0$ E)$15x+3y-25=0$

25 Halle la ecuación de la recta que contiene uno de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles, conociendo el vértice del ángulo recto $C(4;1)$. Y la ecuación de la recta que contiene a la hipotenusa es: $L: 3x-y+5=0$

A)$2x-y-7=0$ B)$2x+y-7=0$ C)$x+y-7=0$
D)$2x+y-9=0$ E)$y+x-7=0$

PRIMERA PRACTICA — GEOMETRÍA VECTORIAL

1) A	2)C	3) C	4) A	5) C	6) D	7) C	8) B	9) C	10) C
11) E	12) B	13) C	14) B	15)D	16) C	17) B	18) B	19) C	20) *
01) E	02) A	03)E	04)A	05) D	6) D	7) *	8) E	9) A	10) B

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)C	2)C	3)C	4)A	5)D	6)E	7)C	8)D	9)D	10)E
11)A	12)A	13)A	14)E	15)D	16)D	17)A	18)E	19)A	20)B

TERCERA PRACTICA — GEOMETRÍA VECTORIAL

1) D	2)B	3) C	4) D	5) D	6) A	7) C	8) A	9) A	10) A
11) C	12) E	13) B	14) C	15)D	16) B	17) E	18) B	19) B	20) A
21) B	22) B	23) B	24)E	25) D					

VECTOR FISICO

Un **vector** es una magnitud caracterizable mediante una magnitud o módulo, una dirección y un sentido. Alternativamente, de un modo más formal y abstracto, un vector es una magnitud representada por una secuencia de números o componentes independientes tales que sus valores sean relacionables de manera sistemática cuando son medidos por diferentes observadores.

EJEMPLO:

La distancia entre dos coches que parten de un mismo sitio no puede quedar determinada únicamente por sus celeridades, esto es, los módulo de sus velocidades. Si éstas son ***30*** y ***40 km/h***, al transcurrir una hora, la distancia entre los mismos podrá ser, entre otras posibilidades:

* De ***10 km***, si los dos coches se mueven en la misma dirección y sentido.

* De ***70 km***, si se mueven en la misma dirección y sentidos contrarios.

* De ***50 km***, si se mueven en direcciones perpendiculares.

Así, la distancia entre los dos coches, no depende sólo de la celeridad de los coches (lo que marca el velocímetro). Es necesario definir la velocidad con carácter vectorial, esto es, como una magnitud definida mediante un **módulo** (celeridad), una **dirección** y un **sentido**.

MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORES

Frente a aquellas magnitudes físicas, tales como la masa, la presión, el volumen, la energía, la temperatura, ... que quedan completamente definidas por un número y las unidades utilizadas en su medida, apareeen otras, tales como el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, el campo eléctrico, ... que no quedan completamente definidas dando un dato numérico, sino que llevan asociadas una dirección y un sentido. Estas últimas magnitudes son llamadas **vectoriales** en contraposición a las primeras que son llamadas **escalares**.

Las magnitudes escalares quedan representadas por el ente matemático más simple; por un número. Las magnitudes vectoriales quedan representadas por un ente matemático que recibe el nombre de vector. En un espacio euclidiano, de no más de tres dimensiones, un vector se representa por un segmento orientado . Así, un vector queda caracterizado por los siguientes elementos: su longitud o **módulo**, siempre positivo por definición; su **dirección**, determinada por una recta (**directriz**) a la cual el vector es paralelo; y su **sentido**, que podrá ser coincidente u opuesto con un sentido predeterminado sobre la dirección antes mencionada. Así pues, podemos enunciar:

Un vector es una magnitud que tienen módulo, dirección y sentido.

PLANO CARTESIANO

CAPITULO 45

OBJETIVOS :

* Estudiar adecuadamente el sistema de ejes coordenados, como establecer la ubicación de un punto en dichos sistema y sus diversas aplicaciones.

* Proveer al alumno de los conocimientos de la Geometría Analítica del plano , necesarios para su formación básica .

* Desarrollar en el alumno el pensamiento lógico, reflexivo y crítico.

* Desarrollar en el alumno la capacidad de observación, análisis, abstracción, generalización y sistematización.

ORIGENES DE LA GEOMETRIA

En el año de ***1637*** publicó *Rene Descartes* ***(1596-1650)*** su *geometrie*, dividida en tres libros, de los cuales dedica el segundo a lo que se ha llamado *Geometría Analítica*, y de la cual se ha dicho, con toda exactitud, que ha hecho época. En ella establece el enlace entre el número y el espacio, y aunque su importancia sólo se evidenció años más tarde, su publicación influyó en forma decisiva en el desarrollo de todas las ramas de las ciencias exactas, específicamente el con la nueva simbólica de preconiza.

Es opinión generalmente admitida entre los matemáticos que la Geometría Analítica brotó completamente elaborada, adulta, de la cabeza de Descartes. Sin embargo, hay discrepancias entre los sabios a este respecto. "Algunos autores han escrito, otros lo han repetido y se repite constantemente, que Descartes es el inventor de la aplicación del Álgebra a la geometría. Esto no es exacto. Se atribuye a Descartes más de lo que pudiera pretender". A pesar del merito indiscutible de este matemático, no pude aceptarse lo que la *géométrie* dice *M. Charles* ***(1793-1880)*** al llamarla criatura generada sin madre, pues con tal afirmación se olvidan demasiado los derechos de sus antecesores, y de *F. Viete* ***(1540-1603)*** en particular, en cuyas obras hay aplicaciones del Álgebra a la Geometría.

ORIGENES DE LAS COORDENADAS

Si se entiende al uso de coordenadas para localizar un punto, los albores de la Geometría Analítica se remontan a *Arquímedes* ***(287-212 a. de J.C.)*** y a *Apolonio de Perga* (siglo II a. de J.C.) y, cerca de 18 siglos después, a *J. Képler* ***(1571-1630)***, pues para el estudio de las cónicas se valían ya, sustancialmente, de las coordenadas (cartesianas) refiriéndose, empero, a ejes intrínsecamente conectados con la curva estudiada.

Algo mejor relacionado con el concepto moderno de las coordenadas se encuentra en un dibujo del siglo ***X*** u ***XI***, de autor desconocido, al hacer el estudio de las trayectorias de los planetas, en el cual representa la latitud y la longitud, respectivamente, como ordenada y abscisa. Este método de representación, que fue adoptado en Astronomía y aún se usaba en el siglo ***XIV***, dio lugar a una obra, notable para aquella época, de *N. Oresme* ***(1323-1382)***, obispo de *Lisieux*, intitulada *Tractatus de latitudinibus formarum*, escrita en 1361. En este trabajo se reconoce la verdadera aparición de la Geometría Analítica, a la vez que un primer germen del concepto de *función* y hasta de *derivada*. Allí se halla la idea de la representación gráfica por medio de coordenadas rectangulares, de las funciones, que Oresme en latín denomina *Formae*. Considera dos magnitudes, llamadas *lonjitudo* y *latitudo*: la primera la considera como variable que depende de la primera. La latitudo puede ser *uniformis* o *difformis*: en el primer caso la gráfica correspondiente es una recta paralela al eje escogido, o sea la latitudo es difformis, puede tenerse una *latitudo secundum se totam difformis*, si la gráfica consta de una línea única, o bien *latitudo secundum partem difformis*, si consta de porciones distintas, algunas de las cuales son rectas paralelas al eje. La actitud de Oresme no es la de un creador de las ideas que expone, pues parece atribuirlas a autores antiguos, para nosotros completamente desconocidos.

ESTUDIO DE LAS CURVAS: PARABOLA, ELIPSE E HIPERBOLA

Si en la Geometría Analítica se considera el estudio particularizado de las tres grandes curvas: parábola, elipse e hipérbola, debería hacerse remontar esta

ciencia a *Menaicmo (siglo IV a. de J.C.)*, a quien se atribuye la invención de dichas curvas, que constituyen lo que se ha denominado la *tríade de Menaicmo.*

En realidad, los nombres con los que se citaban a estas curvas ya existían y fueron creados por los pitagóricos. Estos al resolver el problema que denominaron aplicación de las superficies planas, introdujeron las palabras *parábola, elipse e hipérbola* según que en la aplicación de dichas superficies hubiese igualdad, deficiencia y exceso respectivamente.

Posteriormente a Menaícmo, Arquímedes amplió el campo del estudio de esas tres curvas; Apolonio de Perga concibió las secciones cónicas, determinadas no ya únicamente, según se presume lo había hecho Menaícmo, en un cono recto rectangular, o cono cuyas generatrices opuestas se cortan en ángulo recto, sino como resultantes de la intersección de un plano con un cono circular cualquiera, ya sea rectangular o no.

En la obra de Apolonio, que él denominó Secciones Cónicas, se encuentra la afirmación de que, en el plano, el lugar de un punto (móvil) cuyas distancias a dos puntos fijos dan una suma o una diferencia constante, es una elipse o una hipérbola, que tiene como focos esos puntos fijos.

El mismo Apolonio aclara que una tangente a la elipse deja los dos focos de un mismo lado de dicha tangente, y que en la hipérbola quedan uno de un lado y el otro del otro lado.

La primera propiedad notable relativa a las cónicas, enunciada por Apolonio y que se acaba de citar, fue tomada por *F. de la Hire (1640-1718)* como definición de las curvas que tienen el centro, y de la segunda se ideó la manera de describir la elipse por trazo continuo. Esta construcción la indicó por primera vez el bizantino *Antemio* (siglo *VI*).

Otro gran matemático, *P. de Fermat (1601-1665)*, contemporáneo de Descartes y por éste admirado, había ideado, a su vez, la Geometría Analítica. Sus trabajos relacionados con ella se remontan al año *1629*, es decir, procedieron la publicación de la Géométrie.

Fermat publica una obra llamada introducción al estudio de los lugares planos y sólidos. Esta obra de Fermat, es de gran importancia, pues enseña a interpretar ecuaciones sencillas con dos variables, considerando rectas, elipses, parábolas e hipérbolas.

ORIGENES DE LOS EJES, ABSCISAS, ORDENADAS Y COORDENADAS

Volviendo a Descartes y a su obra, justo es hacer notar que un punto de vista y su técnica, relativamente a la Geometría Analítica, son incomparablemente más adelantados que los de Fernat. Con respecto a la Géométrie, observa *J. E. Montucla (1725-1799)* que "Descartes no ha pretendido componer un trabajo didáctico; se limita a trazar a los matemáticos el camino que han de recorrer, y en su libro no hay ni orden ni desarrollos: sólo son ideas de un hombre de genio, que no sigue la marcha de los espíritus ordinarios".

Pero, aunque en la Géométrie sólo se contenga un primer ensayo de la Geometría Analítica, corresponde al *gran Cartesio* el mérito de haber abierto el camino a nuevos métodos, por lo cual ha sido mirado siempre como una obra que ha hecho época y como un instrumento de investigación incomparable más poderoso que la geometría de los antiguos.

Refiriéndose a la creación de Descartes, escribe el matemático *P. Boutroux (1845-1922)* que su importancia estriba en "*hacer ver cómo en la aplicación sistemática de coordenadas había un método de un poderío y una universalidad desconocidos hasta entonces en la matemática; un método destinado a anular, por la superación, a todos los anteriores; un método que, en colaboración con el concepto de función, debía revolucionar y regenerar todas las ciencias que se hallaban relacionadas con los conceptos del espacio y tiempo*".

Descartes no habla de ejes, ni de abscisas, ni de ordenada, ni de coordenadas. Para la representación de las curvas, escoge una recta, en posición horizontal, que a veces llama diámetro y, para comenzar el cálculo, señala en ella un punto fijo (origen); luego toma puntos en el diámetro, y a cada punto asocia otro u otros, según la línea que estudia; en otras palabras: dada la ecuación de una línea y la elegida una recta como eje y en ella un punto fijo, a cada distancia (abscisa) contada desde el origen corresponde otra distancia (ordenada) en una dirección perpendicular al eje; el extremo del segundo segmento u ordenada, determina un punto de la línea, es decir, el punto de la línea queda localizado cuando no es conocido el punto tomado en el eje.

Descartes no introduce formalmente el segundo eje, el vertical.

Las coordenadas *X, Y* las llama cantidades

indeterminadas y, contrariamente a lo que se hace en la actualidad, toma las abscisas en el sentido vertical y las ordenadas en el horizontal.

"Observase en Descartes que adopta como principio que la ecuación de un lugar geométrico únicamente es válida para el cuadrante para el cual fue establecida. La generalización de sus propiedades a los demás cuadrantes fue asunto que sólo a la larga llegó a considerarse, y no puede atribuirse a ningún geómetra en particular", lo anterior lo afirma *P. Tannery* ***(1843-1901)***.

G. F. de L´Hospiatl ***(1661-1704)***, que publicó el más importante texto de Geometría Analítica, fue quien introdujo realmente los dos ejes, no forzosamente perpendiculares, y atribuyó signos a las coordenadas, según las convenciones aún hoy en día en uso, aunque advierte al lector que se limitará a describir los fenómenos que se verifican dentro del ángulo (cuadrante) de las direcciones positivas de los ejes.

Con respecto a los signos de las coordenadas, merece particular mención *I. Newton* ***(1642-1727)*** por ser el primer matemático que sacó grandes ventajas de la consideración de dichos signos, mereced a lo cual logró grandes simplificaciones. Con el mismo Newton comienza, propiamente, a considerarse la hipérbola como una curva de dos ramas, cosa que no se había hecho antes, pues Apolonio no consideraba ambas ramas como pertenecientes a una misma curva.

Justo es advertir que el considerar de una manera sistemática el signo de los segmentos, así como el de los ángulos, de las áreas, etc., sólo se hizo en época posterior, por *A. F. Mobius* ***(1790-1868)***.

En cuanto a los sucesores de Descartes, y a los que siguieron a Newton, le dieron poco impulso a la Geometría Analítica, y únicamente se esmeraron en aclarar las ideas de esos maestros. Entre los continuadores de la obra de Cartesio, además del marqués de L´Hospital, debe mencionarse al ya citado F. de La Hire. Un adelanto importante que se tiene con este matemático, pues enseña que, con respecto a las coordenadas de un punto, puede tomarse indistintamente una de ellas como variable independiente y la otra como dependiente de la primera, y viceversa. Para entender su expresión, necesita tenerse presenta que llama origen del lugar al origen; que las coordenadas de un punto arbitrario las designa con los nombres de tallo y ramas; que entiende por nudo el pie de la ordenada del punto considerado y que por lugar entiende a toda línea o superficie cuyos puntos todos tienen una misma relación con determinados elementos fijos, Su manera de expresar la indicada propiedad es: Pueden cambiarse las partes del Tallo en Ramas y las Ramas en partes del Tallo, sin cambiar el lugar, el origen ni el ángulo comprendido entre el Tallo y las Ramas.

GEOMETRIA ANALITICA, ORIGENES DE LA TERCERA DIMENSION

Descartes termina el segundo libro de su obra observando que el concepto fundamental de su método puede extenderse del plano al espacio, es decir, mencionó la Geometría Analítica de tres dimensiones, pero nada escribió acerca de ella. *F. van Schooten* el joven ***(1615-1660)***, traductor y comentador de Descartes, fue el que sugirió, en 1657, el uso de coordenadas en el espacio tridimensional.

El que echó los cimientos de la Geometría Analítica de tres dimensiones, fue *A. Parent* ***(1666-1716)***. Enseñó por primera vez a representar una superficie, la de una esfera y otros sólidos, por medio de una ecuación cartesiana, que él llama *équation superficielle*; pero, aunque habla de un punto como origen o punto de referencia, no menciona ni ejes ni planos coordenados.

El que indicó la consideración de los tres ejes coordenados de un sistema cartesiano, es *J. E. Hermann* ***(1678-1733)***. Con él la Geometría Analítica del espacio, entonces incipiente, recibió notable impulso. Considera tres ejes de referencia, y hace observar que un punto cualquiera de cada eje tiene dos de sus coordenadas nulas. Demuestra que toda ecuación de primer grado con tres variables, $ax+by+cz-d=0$, representa un plano; partiendo de ella, deduce las coordenadas de la intersección del plano con cada uno de los ejes cartesianos.

A. C. Clairaut ***(1713-1765)***, amplió la obra de Hermann, que constituyo un verdadero tratado de la Geometría Analítica del espacio, pues, además de determinar tangentes y normales a las curvas alabeadas, hace figurar ecuaciones de planos, ecuaciones de las superficies de la esfera, del paraboloide y, en general, las ecuaciones de las superficies de los sólidos de revolución.

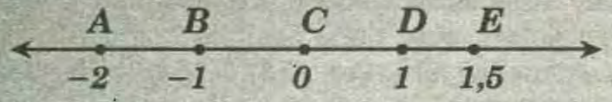
L. Euler ***(1707-1783)*** establece los fundamentos de la Geometría Analítica dèl espacio. Estudia las superficies representadas por las ecuaciones de segundo grado, y hace la reducción de ellas a cinco tipos.

EJE NÚMERICO REAL

Imagine una recta , ubique en ella dos puntos, asígnele a uno de ellos el número cero y al otro, el número uno, con esas características agregadas, la recta es denominada eje numérico real , pues ahora, a cada punto de ella se puede hacer corresponder un número real, las posiciones del cero y del uno determina el sentido positivo de la recta, así:

* En un eje numérico real, cada punto posee una coordenada , la cual es el número real que le

corresponde:

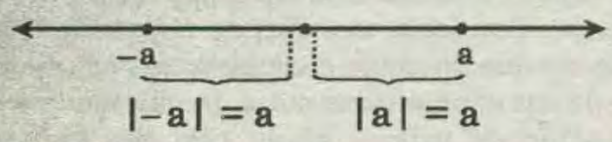


* Coordenada *A:* -2
* Coordenada *B:* -1
* Coordenada *C:* 1

DISTANCIA DE UN PUNTO AL ORIGEN

Si un número real a es la coordenada de un punto A sobre la recta real , para denotar la distancia de A al origen independientemente del sentido se utiliza el símbolo $|a|$.

* El número no negativo de $|a|$ se llama valor absoluto de a.

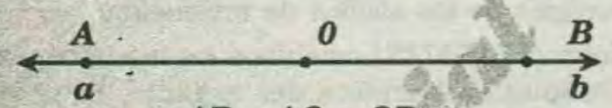


EJEMPLOS:

* Distancia de 8 al origen $|8| = 8$
* Distancia de -5 al origen $|-5| = 5$

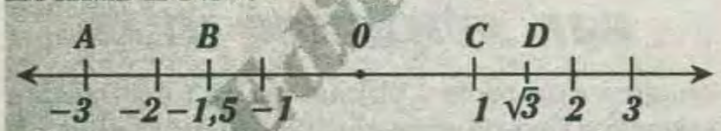
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS UNA RECTA REAL

Dados los puntos de una recta de una distancia entre ellos es igual al valor absoluto de la diferencia de las coordenadas.



$$AB = AO + OB$$
$$\rightarrow |AB| = |b - a|$$

EJEMPLOS :



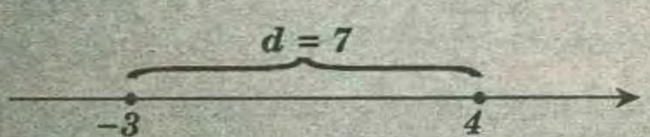
$|AB| = |-1{,}5 - (-3)| = |1{,}5| = 1{,}5$

$|AD| = |\sqrt{3} - (-3)| = |\sqrt{3} + 3| = \sqrt{3} + 3$

$|BC| = |-1{,}5 - 1| = 2{,}5$

* La distancia entre -3 y -4 viene dada por

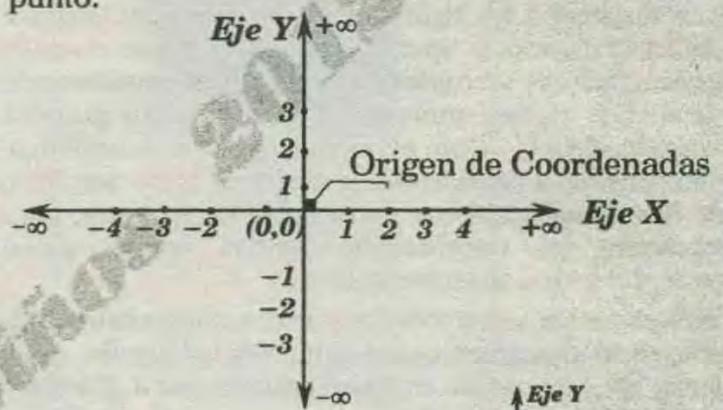
$d = |-3 - 4| = |4 - (-3)| = 7$

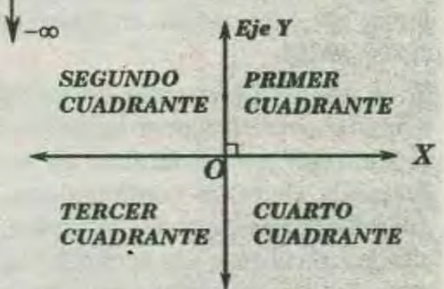


PLANO CARTESIANO

Así como podemos representar los números reales como puntos de la recta real, podemos asociar puntos del plano a los pares ordenados y números reales. Un par ordenado $(x;y)$ de números reales tiene x como primer elemento e y como segundo. El modelo para su representación se llama sistema coordenado rectangular o plano cartesiano. Se construye mediante dos rectas perpendiculares que dividen al plano en cuatro partes llamadas cuadrantes.

Identificamos cada punto del plano por un par ordenado $(x;y)$ de números reales, llamados coordenadas del punto. El número x representa la distancia dirigida desde el eje Y al punto. El número x representa la distancia dirigida desde el eje X al punto.



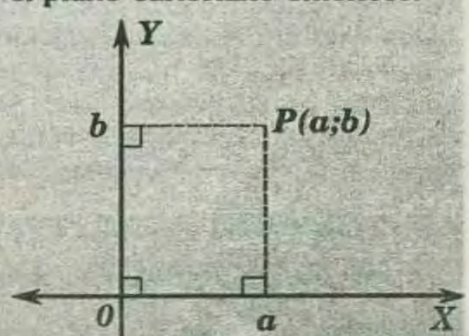


$\overleftrightarrow{X}$: ***Eje de Abscisas***

$\overleftrightarrow{Y}$: ***Eje de Ordenadas***

UBICACIÓN DE UN PUNTO EN EL PLANO CARTESIANO

Sea P un punto en el plano cartesiano entonces:

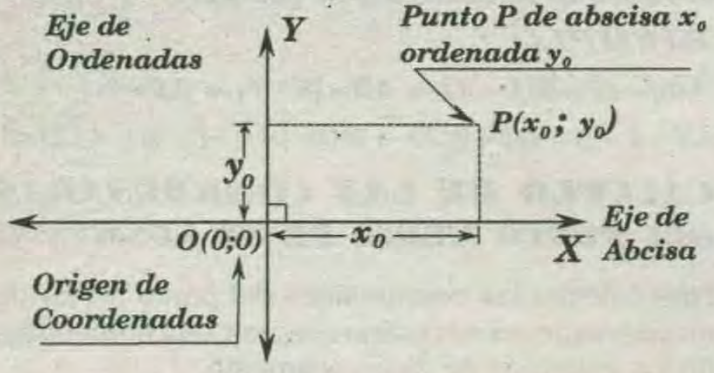


a : abscisa del punto P

Editorial Rubiños 2012

b : ordenada del punto P

$P(a;b)$: punto P de coordenadas $(a;b)$

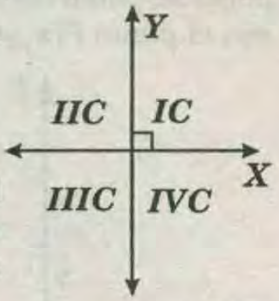


NOTACIÓN DE PAR ORDENADO:

$(x_0;y_0)$ donde

x_0 : es la abscisa

y_0 : es la ordenada



* Los ejes coordenados, en el plano cartesiano cuatro regiones los cuales se denominan cuadrantes, tomado en sentido antihorario, primer cuadrante *(IC)*, segundo cuadrante *(IIC)*, tercer cuadrante *(IIIC)* y cuarto cuadrante *(IVC)*.

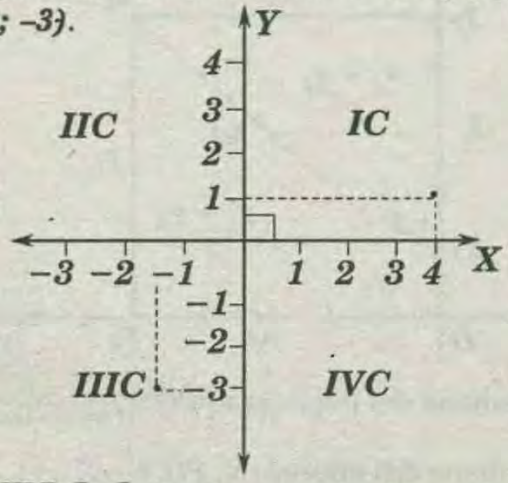
* Al plano cartesiano se denomina también sistema de coordenadas rectangulares o sistema *XY*

* El conjunto de todo los pares ordenados $(x;y)$ se denomina plano numérico y se denota por $\mathbb{R}^2$, así:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x;y) \ / \ x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}\}$$

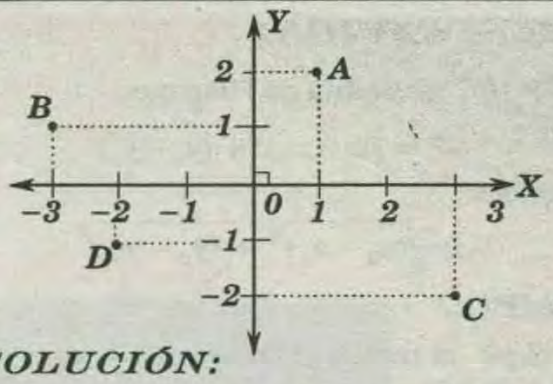
EJEMPLO 1 :

En la figura las coordenadas de P son $(4;1)$ y de Q son $(-2;-3)$.



EJEMPLO 2 :

Del gráfico determinar las coordenadas de A,B,C y D.



RESOLUCIÓN:

* Coordenadas de A: $(1;2)$ * Coordenadas de B: $(-3;1)$

* Coordenadas de C: $(3;-2)$ * Coordenadas de D: $(-2;-1)$

NOTA :

* Si un punto pertenece al eje X, su ordenada es igual a cero. Si un punto pertenece al eje Y, su abscisa es igual a cero.

* Las coordenadas del origen $(0;0)$.

* Los puntos del eje de las "X" tiene coordenada $(x;0)$.

* Los puntos del eje de las "Y" tiene coordenada $(0;y)$.

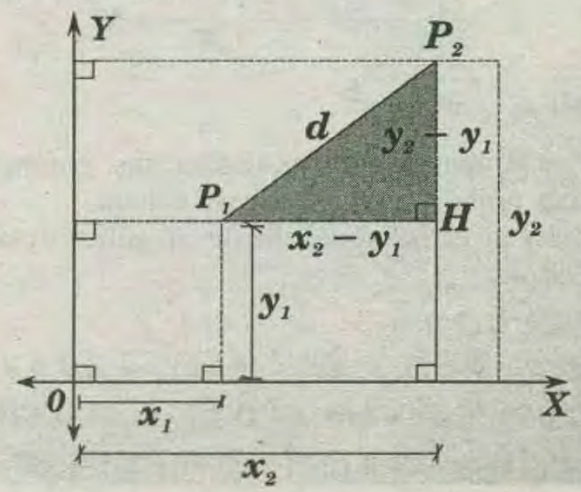
CALCULO DE LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DEL PLANO CARTESIANO

Para poder calcular la distancia entre dos puntos del plano cartesiano se necesita las coordenadas de dicho puntos.

* Sean $P_1(x_1;y_1)$ y $P_2(x_2;y_2)$ dos puntos dados cuales quiera entonces la distancia entre P_1 y P_2 se calcula de la siguiente manera:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

"La distancia entre dos puntos cualesquiera del plano es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de su diferencia de abscisas y su diferencia de ordenadas."



DEMOSTRACIÓN:

* $\triangle P_1HP_2$: Teorema de Pitágoras

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

* Entonces:

$$d=\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EJEMPLO 1 :

Determinar la distancia entre los puntos A y B, si: $A(3;8)$ y $B(2;6)$.

RESOLUCIÓN :

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (8-6)^2} \rightarrow AB = \sqrt{5}$$

EJEMPLO 2 :

Determinar la distancia entre los puntos P y Q.

$P(-2;5)$ y $Q(3;-1)$

RESOLUCIÓN :

$$PQ = \sqrt{(-2-3)^2 + \left(5-(-1)\right)^2}$$

$$\rightarrow PQ = \sqrt{(-5)^2 + (6)^2} = \sqrt{61}$$

EJEMPLO 3 :

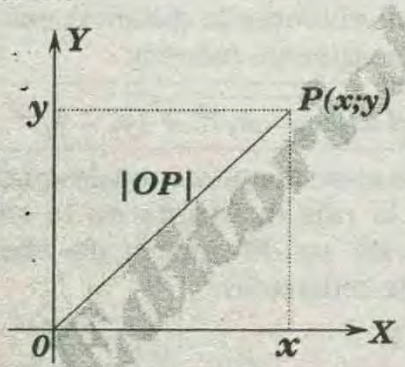
Determinar la distancia entre $A(-3;2)$ y $B(-1;-3)$

RESOLUCIÓN :

$$AB| = \sqrt{(-3-(-1))^2 + (2-(-3))^2} = \sqrt{29}$$

OBSERVACIONES :

La distancia de un punto $P(x;y)$ al origen de coordenadas es:



$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

* Si P_1 y P_2 tienen la mismas abscisas, entonces la distancia entre dichos puntos se calcula tomando el valor absoluto de su diferencia de ordenadas.

EJEMPLO :

$A(5;6) \wedge B(5;2) \rightarrow AB = |6-2| \rightarrow AB = 4$

$C(-3;-2) \wedge D(-3;5) \rightarrow CD = |-1-5| \rightarrow CD = 6$

$E(5;8) \wedge F(5;-2) \rightarrow |EF| = |8-(-2)| \rightarrow EF = 10$

* Si P_1 y P_2 tienen la misma ordenada entonces la distancia entre estos se calcula tomando el valor absoluto de su diferencia de abscisas.

EJEMPLO :

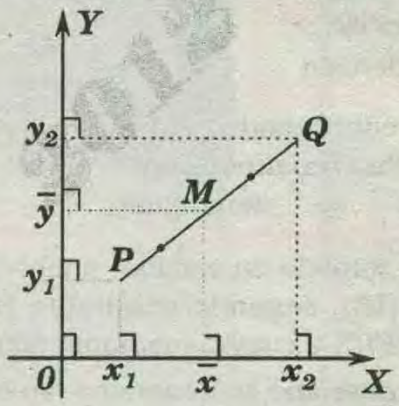
$A(8;-1) \wedge B(1;-1) \rightarrow AB = |8-1| \rightarrow AB = 7$

$C(-4-7) \wedge D(-9;7) \rightarrow CD = |-4-(-9)| \rightarrow CD = 5$

CÁLCULO DE LAS COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Para calcular las coordenadas del punto medio de un segmento, es necesario conocer las coordenadas de los extremos de dicho segmento.

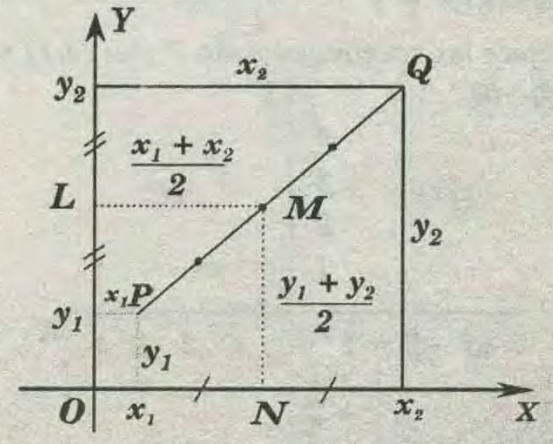
A continuación calcularemos las coordenadas del punto M, punto medio del segmento cuyos extremos son el punto $P(x_1;y_2)$ y el punto $Q(x_2;y_2)$.



$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \left(\frac{x_1+x_2}{2} \; ; \; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$$

DEMOSTRACIÓN :



$\overline{MN}$ mediana del trapecio $x_1\,PQ\,x_2$

$\overline{LM}$ mediana del trapecio $y_1\,PQ\,y_2$

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2} ; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

EJEMPLO 1 :

Determinar las coordenadas del punto medio "P" de un segmento cuyos extremos son: $A(2;-3)$ y $B(4;7)$

RESOLUCIÓN :

* Sea $P(x;y)$ el punto medio de AB, entonces:

$$x = \frac{2+4}{2} = 3 \wedge y = \frac{3+7}{2} = 5 \Rightarrow P = (3;5)$$

EJEMPLO 2 :

El extremo de un segmento es $(1; -9)$ y su punto medio es $P(-1; -2)$. Hallar las coordenadas del otro extremo.

RESOLUCIÓN :

* Sean $(x_2; y_2)$ las coordenadas del extremo que se desea hallar como $P(-1: -2)$ es el punto medio, se cumple que:

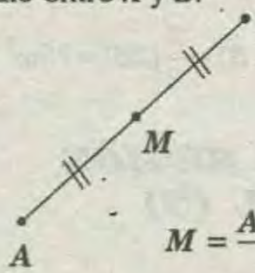
$$-1 = \frac{1+x_2}{2} \rightarrow x_2 = -3$$

$$-2 = \frac{-9+y_2}{2} \rightarrow y_2 = 5$$

* Entonces las coordenadas del otro extremo son: $(-3 ; 5)$

OBSERVACIÓN :

Sean $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$ puntos y "M" el punto medio entre A y B.

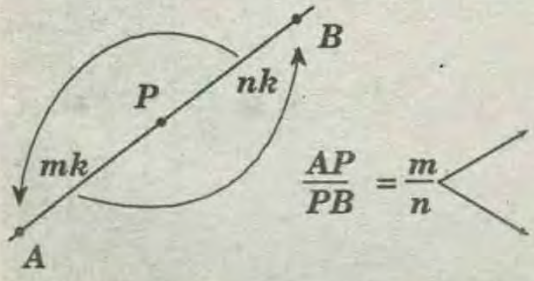


$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(x_1;y_1) + (x_2;y_2)}{2}$$

$$\boxed{M = \left(\frac{x_1+x_2}{2} ; \frac{y_1+y_2}{2} \right)}$$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZON DADA

Sean los puntos A; B y "P" un punto que divida AB en la razón de "m" a "n"



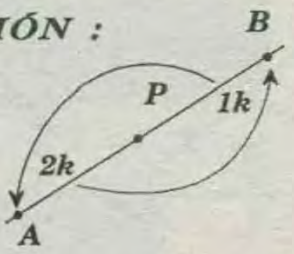
$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n} \quad \overline{AP} = mk \quad \overline{PB} = nk$$

$$\rightarrow P = \frac{nkA+mkB}{nk+mk} \rightarrow \boxed{P = \frac{nA+mB}{n+m}}$$

EJEMPLO 3 :

Si : $A(-4; 2)$; $B(8; 8)$, hallar un punto "P" entre "A" y "B" tal que $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = 2$

RESOLUCIÓN :



* Como :

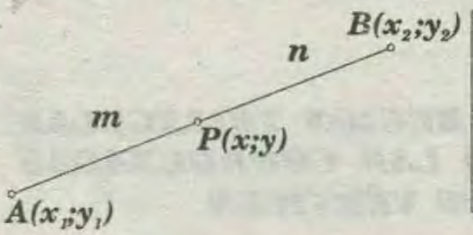
$$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{1} \rightarrow AP = 2k \; ; \; PB = 1k$$

* Luego :

$$P = \frac{1kA + 2kB}{1k + 2k} = \frac{1(-4; 2)}{3} + \frac{2(8;8)}{3}$$

$$\rightarrow P = \frac{(-4; 2)+(16: 16)}{3} = \left(\frac{-4+16}{3} ; \frac{2+16}{3} \right) = (4; 6)$$

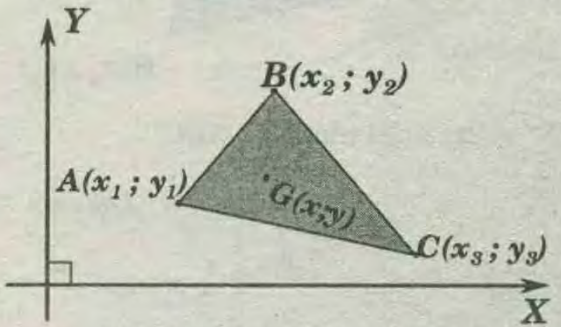
OBSERVACIÓN :



$$\boxed{x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}} \qquad \boxed{y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}}$$

CALCULO DE LAS COORDENADAS DEL BARICENTRO DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

Las coordenadas del baricentro de una región triangular, siempre está, en función de las coordenadas de sus vértices.



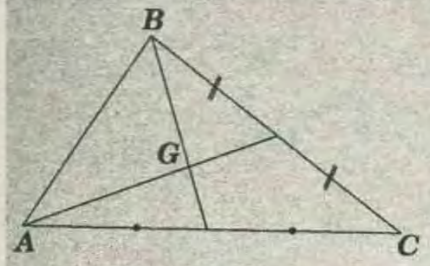
* En la figura, G es baricentro de la región triangular ABC.

* Luego:

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \quad , \quad y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

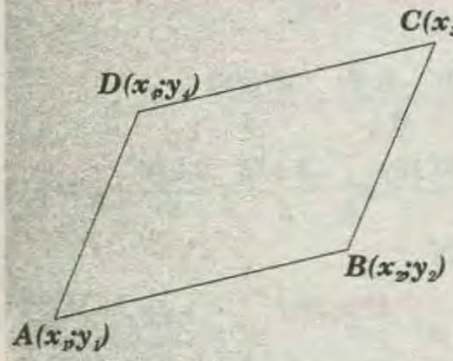
OBSERVACIÓN :

Sean ***A, B*** y ***C*** los vértices de un triángulo entonces las coordenadas del baricentro ***"G"*** del triángulo será:



$$G = \frac{A+B+C}{3}$$

PROPIEDAD DEL PARALELOGRAMO (ABCD)

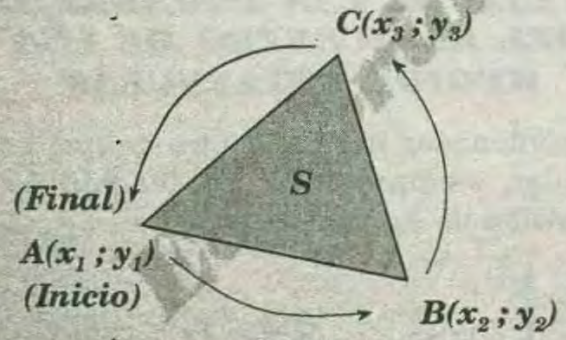


$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4$$

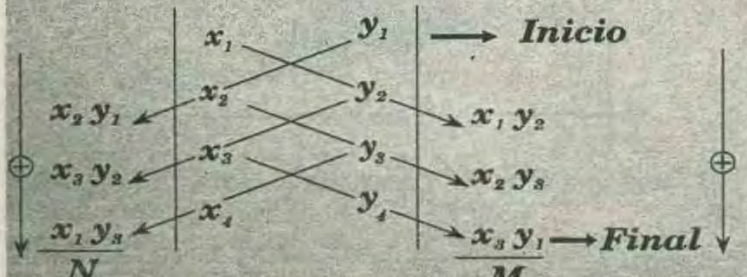
$$y_1 + y_3 = y_2 + y_4$$

ÁREA DE LA REGIÓN TRIANGULAR CONOCIENDO LAS COORDENADAS DE SUS VÉRTICES

* Sean $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$; $C(x_3;y_3)$



* Sea ***"S"*** el área del triángulo ***ABC.***



$$S = \frac{1}{2}|M - N|$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1|$$

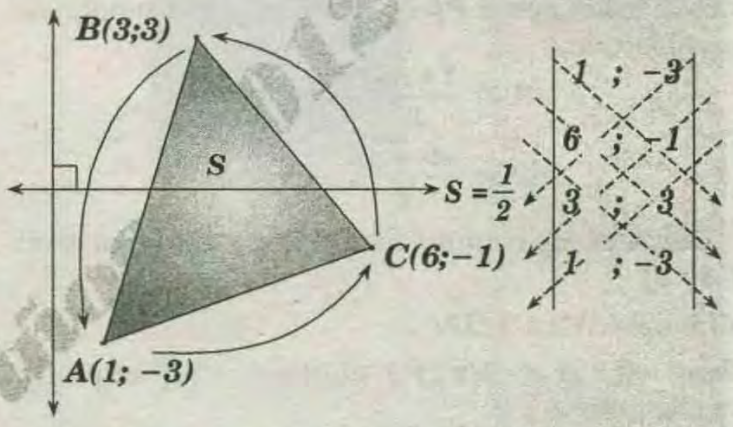
Se observa que se debe ordenar en forma antihoraria, empezando por un vértice (en este caso $A(x_1 ; y_1)$ y terminando con el mismo vértice que se tomo como inicio.

EJEMPLO :

Sean los puntos ***A(1;–3); B(3;3); C(6;–1)***

Determinar el área de la región encerrada que se forma al unir dichos puntos.

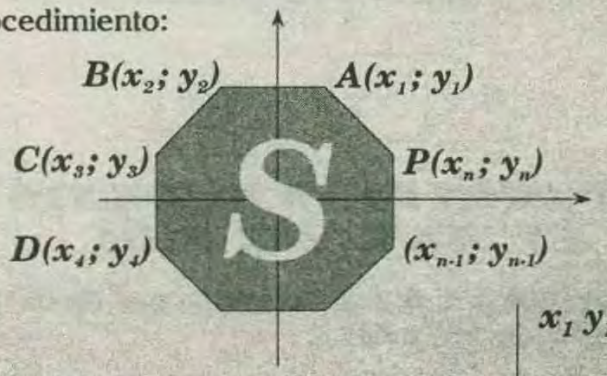
RESOLUCIÓN :



$$\rightarrow S = \frac{1}{2}|-1+18-9+18+3-3| = \frac{1}{2}|26| = 13u^2$$

ÁREA DE UNA REGIÓN POLIGONAL (S)

Procedimiento:



$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

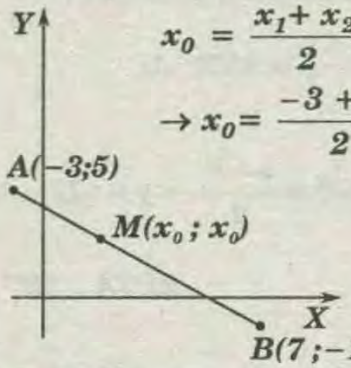
PROBLEMA 1 :

Calcular las coordenadas del punto medio del segmento que tiene por extremos los puntos $A(-3;5)$ y $B(7;-1)$.

A) (2;1) B)(2;3) C) (3;2) D) (1;3) E) (2;2)

RESOLUCIÓN :

* Para el punto medio de AB, aplicamos:



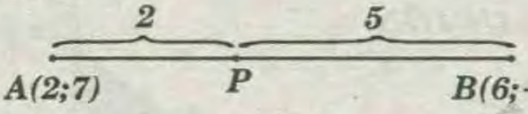
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \; ; \; y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\rightarrow x_0 = \frac{-3+7}{2} = 2 \; ; \; y_0 = \frac{5-1}{2} = 2$$

RPTA : "E"

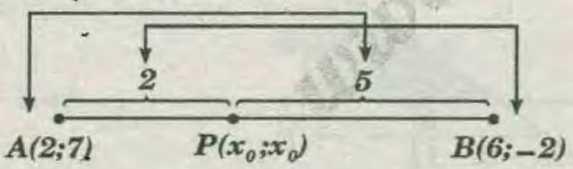
PROBLEMA 2 :

Del segmento mostrado, calcular las coordenadas del punto "P".



A)(3;5) B)3;$\left(\frac{23}{7}\right)$ C)$\left(\frac{22}{7};\frac{31}{7}\right)$ D)(5;7) E)(4;4)

RESOLUCIÓN :



$$x_0 = \frac{2(6)+5(2)}{2+5} = \frac{12+10}{7} = \frac{22}{7}$$

$$y_0 = \frac{2(-2)+5(7)}{2+5} = \frac{-4+35}{7} = \frac{31}{7}$$

$$\rightarrow P(x_0 ; y_0) = P = \left(\frac{22}{7} ; \frac{31}{7}\right)$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

Calcular la distancia máxima del punto $P(11;12)$ exterior a una circunferencia de centro $(3;6)$ y su radio mide $3cm$.

A) 10cm. B) 11 C) 12 D) 13 E)14

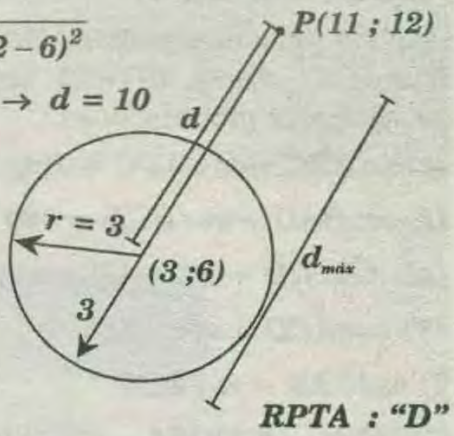
RESOLUCIÓN :

* Se observa:

$$d = \sqrt{(11-3)^2+(12-6)^2}$$

$$\rightarrow d = \sqrt{64+36} \rightarrow d = 10$$

$$\rightarrow d_{max} = 13$$

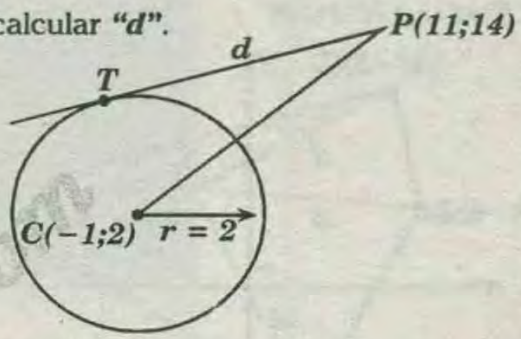


RPTA : "D"

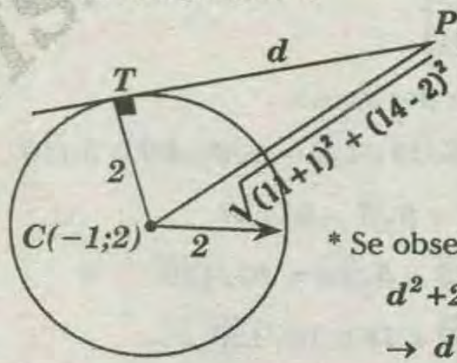
PROBLEMA 4 :

Del gráfico, calcular "d".

A) $\sqrt{217}$
B) $\sqrt{712}$
C) $2\sqrt{71}$
D) 17
E) 22



RESOLUCIÓN :



* Se observa:

$$d^2 + 2^2 = \sqrt{144+144}^2$$

$$\rightarrow d = \sqrt{288-4}$$

$$\therefore d = 2\sqrt{71}$$

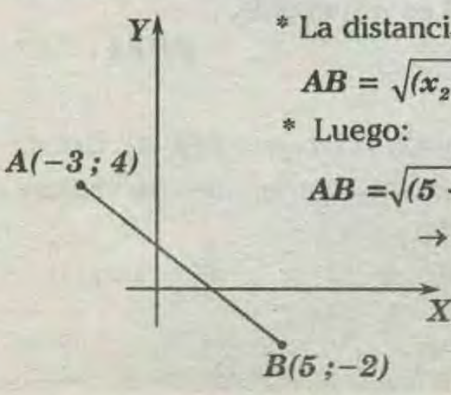
RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

Calcular la distancia entre los puntos $A(-3;4)$ y $B(5;-2)$

A)3 B)5 C)$\sqrt{11}$ D)$\sqrt{10}$ E)10

RESOLUCIÓN :



* La distancia AB, es

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

* Luego:

$$AB = \sqrt{(5+3)^2+(-2-4)^2}$$

$$\rightarrow AB = 10$$

RPTA : "E"

www.GRATIS2.com

PROBLEMA 6 :

Sean los siguientes puntos del plano $A(-5;7)$, $B(-6;2)$, $C(-2;-4)$, $D(10;2)$. Verifique la verdad de las siguientes proposiciones :

I) $m\sphericalangle ABC + m\sphericalangle ADC = 180$

II) $m\sphericalangle BAD + m\sphericalangle BCD = 180$

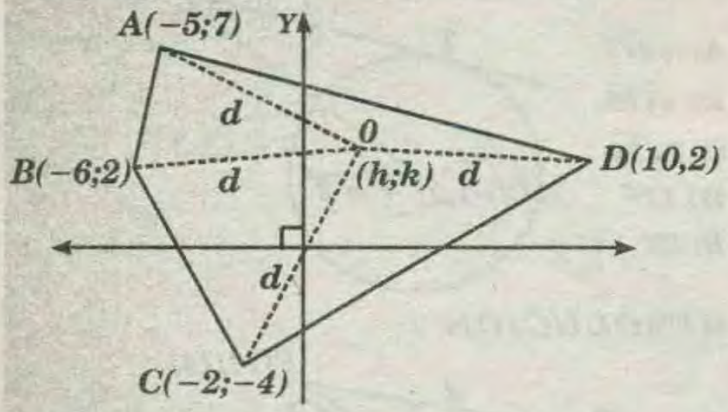
III) $AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD$

IV) $m\sphericalangle ACD = m\sphericalangle ABD$

V) $m\sphericalangle CAB = m\sphericalangle BDC$

A)VVVVV B)VVFFF C)FFFFF D)VVFFV

RESOLUCIÓN :



* Por distancia entre dos puntos :

$AB = \sqrt{26};\ BC = 2\sqrt{13};\ CD = 6\sqrt{5};\ AD = 5\sqrt{10}$

$\Rightarrow AB \times CD = \sqrt{26} \times 6\sqrt{5} = 6\sqrt{130}$

$BC \times AD = 2\sqrt{13} \times 5\sqrt{10} = 10\sqrt{130}$

$AC \times BD = \sqrt{130} \times 16 = 16\sqrt{130}$

* Ahora:

$$6\sqrt{130} + 10\sqrt{130} = 16\sqrt{130}$$

* Cumple el teorema de Ptolomeo :

También por distancia entre dos puntos podemos hallar: $O(h;k)$.

* Donde :

$$H = 2 \text{ y } k = 3 \Rightarrow d = \sqrt{65}$$

El cuadrilátero $ABCD$ es inscriptible.

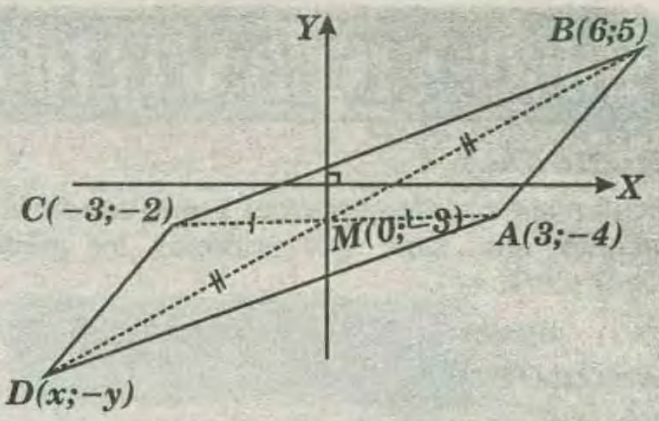
RPTA : "A"

PROBLEMA 7 :

Sea el paralelogramo $ABCD$ tal que : $A(3;-4)$, $B(6;5)$ y $C(-3;-2)$, entonces las coordenadas de vértices D es:

A) $(-6;-10)$ B)$(-6;-11)$ C)$(-5;-11)$
D)$(-5;-12)$ E)$(-6;-14)$

RESOLUCIÓN :



M es punto medio de la diagonales, entonces :

$$M\left(\frac{-3+3}{2};\frac{-2-4}{2}\right) \rightarrow M(0;-3)$$

* Luego :

$$0 = \frac{x+6}{2} \rightarrow x = -6 \Rightarrow -3 = \frac{y+5}{2} \rightarrow y = -11$$

$$\Rightarrow D(-6;-11)$$

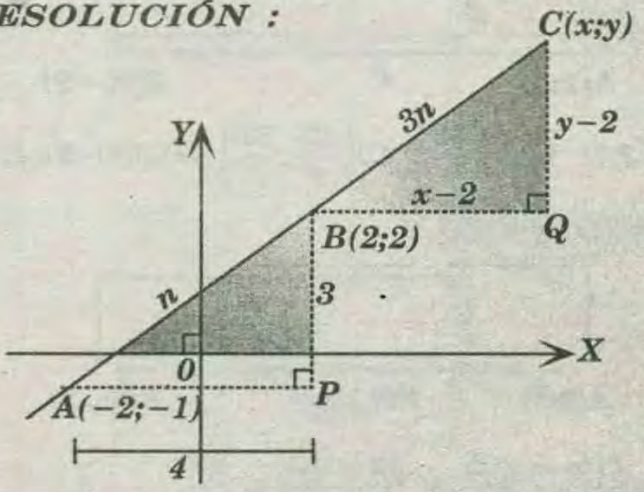
RPTA : "B"

PROBLEMA 8 :

El segmento que une $A(-2;-1)$ con $B(2;2)$ se prolonga hasta C. Si $BC=3AB$. Halle las coordenadas de C.

A)(6;12) B)(10;14) C)(12;8) D)(14;11) E)(10;12)

RESOLUCIÓN :



* $\triangle ABP \sim \triangle BCQ$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{4} = \frac{3n}{n} \rightarrow x - 2 = 12 \rightarrow x = 14$$

$$\frac{y-2}{3} = \frac{3n}{n} \rightarrow y - 2 = 9 \rightarrow y = 11$$

$$\rightarrow C(14;11)$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 9 :

Los puntos $A = (2;3)$; $B = (5;7)$ y $C = (-5;12)$ son los vértices de un triángulo, calcule las coordenadas del baricentro de triángulo.

A)$\left(\frac{5}{3};\frac{25}{3}\right)$ B)$\left(\frac{4}{3};\frac{23}{3}\right)$ C)$\left(\frac{2}{3};\frac{22}{3}\right)$ D)(2;11) E)(−1;7)

RESOLUCIÓN :

* Sean los vértices de un triángulo **ABC**, **A(−1;5)**, **B(4;2)** y **C(0 ;−4)**, por teoría , las coordenadas del baricentro es :

$$\left.\begin{aligned} x=\frac{2+5-5}{3}\rightarrow x=\frac{2}{3}\\ y=\frac{3+7+12}{3}\rightarrow y=\frac{22}{3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow G\left(\frac{2}{3};\frac{22}{3}\right)$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

En un triángulo **ABC**, **A(−1;5)**, **B(4;2)** y **C(0;−4)**, entonces las coordenadas del baricentro es :

A)$\left(2;\frac{3}{2}\right)$ B)$\left(2;\frac{5}{2}\right)$ C)(1;1) D)(2;2) E)(3;3)

RESOLUCIÓN :

* Si las coordenads de los vértices de un triángulo ABC es, **A(−1;5)**,**B(4;2)** y **C(0;−4)**, entonces las coordenadas del baricentro es :

$$\left.\begin{aligned} x=\frac{-1+4+0}{3}\rightarrow x=1\\ y=\frac{5+2-4}{3}\rightarrow y=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow G(1;1)$$

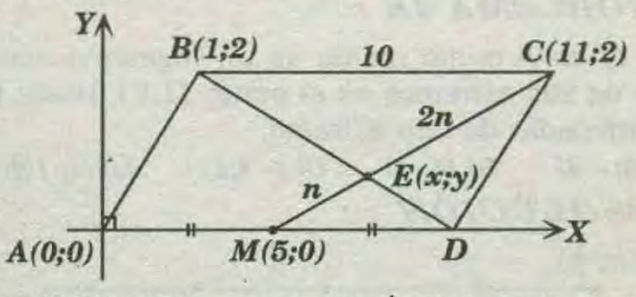
RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

Se tiene paralelogramo **ABCD**, donde **A = (0;0)**, **B=(1;2)**,**C=(11;2)**. Si **M** es punto medio de $\overline{AD}$ y $\overline{CM}\cap\overline{BD}=\{E\}$. Halle las coordenadas de **E**.

A)$\left(7;\frac{2}{3}\right)$ B)$\left(3;\frac{7}{3}\right)$ C)$\left(2;\frac{7}{3}\right)$ D)$\left(7;\frac{3}{2}\right)$

RESOLUCIÓN :



* Por división de un segmento en una razón dada :

$$\left.\begin{aligned} x=\frac{11+(2)(5)}{1+2}\rightarrow x=\frac{21}{3}\rightarrow x=7\\ y=\frac{2+(2)(0)}{1+2}\rightarrow y=\frac{2}{3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow E\left(7;\frac{2}{3}\right)$$

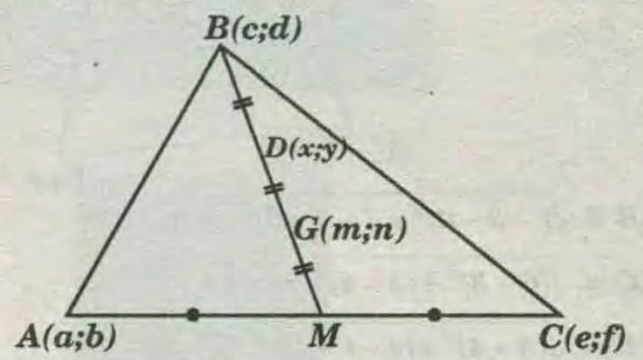
RPTA: "A"

PROBLEMA 12 :

Los puntos **A(a;b)**, **B(c;d)**, **C(e;f)** son los vértices de un triángulo , si **G** es su baricentro y **D** es punto medio de $\overline{BG}$, entonces la ordenada del punto **D**, es

A)$\frac{b+4d+f}{6}$ B)$\frac{b+3d+f}{6}$ C)$\frac{b+2d+f}{6}$

RESOLUCIÓN :



* Por teoría :

$$n=\frac{b+d+f}{3}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$y=\frac{d+n}{2}\Rightarrow 2y=d+n\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

* **(I)** en **(II)**:

$$2y=d+\frac{b+d+f}{3}\Rightarrow y=\frac{b+4d+f}{6}$$

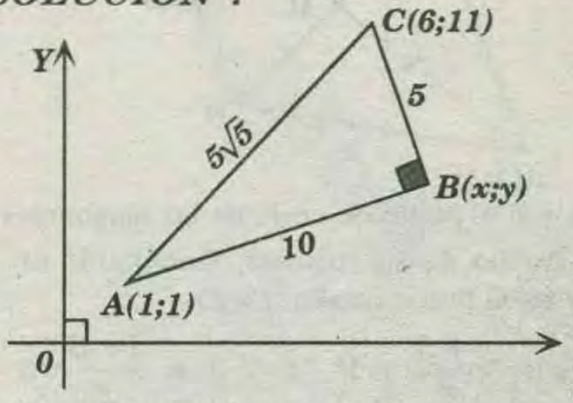
RPTA : "A"

PROBLEMA 13 :

En un triángulo rectángulo **ABC** (recto en **B**), **A(1;1)** y **C(6;11)**. El cateto **BC** mide **5**. Calcule la suma de las coordenadas del punto **B**.

A)16 B)15 C)14 D)17

RESOLUCIÓN :



* Por distancia entre dos puntos :

$$100=(x-1)^2+(y-1)^2$$

$$25=(x-6)^2+(y-11)^2$$

* Resolviendo el sistema : $x=9\ \wedge\ y=7$

$\rightarrow x+y=16$

RPTA: "A"

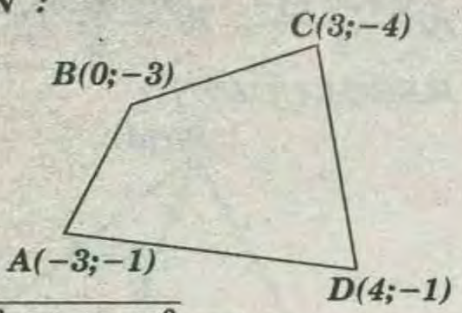
PROBLEMA 14 :

Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son: $A(-3;-1)$, $B(0;3)$, $C(3;4)$ y $D(4;-1)$

A) 40 B) 24 C) $17+2\sqrt{5}$ D) $\sqrt{26}+\sqrt{10}+12$

RESOLUCIÓN :

* De la figura:



* $AB = \sqrt{(-3-0)^2+(-1-3)^2} = 5$

* $BC = \sqrt{(0-3)^2+(3-4)^2} = \sqrt{10}$

* $CD = \sqrt{(3-4)^2+(4-(-1))^2} = \sqrt{26}$

* $DA = \sqrt{(4-(-3))^2+(-1-(-1))^2} = 7$

* El perímetro es igual a:

$$\sqrt{26} + \sqrt{10} + 12$$

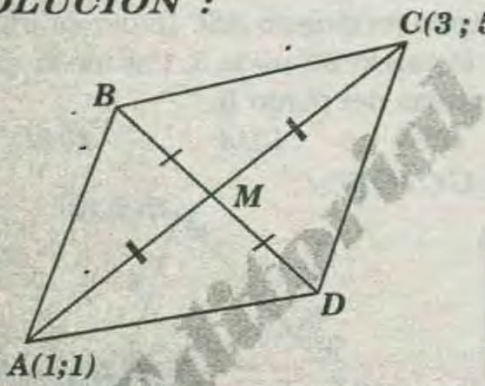
RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

Si dos vértices opuestos de un paralelogramo son: $A(1;1)$ y $C=(3;5)$, ¿cuál es el punto de corte de las diagonales?

A) (2;4) B) (2;3) C) (1;3) D) (2;2) E) (3;3)

RESOLUCIÓN :



* Note que el punto de corte de las diagonales es el punto medio de las mismas. Trabajando en $\overline{AC}$, $M(x;y)$ es el punto medio, luego:

$$x = \frac{1+3}{2} = 2 \quad ; \quad y = \frac{1+5}{2} = 3$$

* O también

$$M = \frac{A+C}{2} = \frac{(1;1)+(3;5)}{2} = \frac{(1+3\,;\,1+5)}{2}$$

$$\Rightarrow M = \left(\frac{4}{2}\,;\,\frac{6}{2}\right) = (2\,;\,3)$$

RPTA : "B"

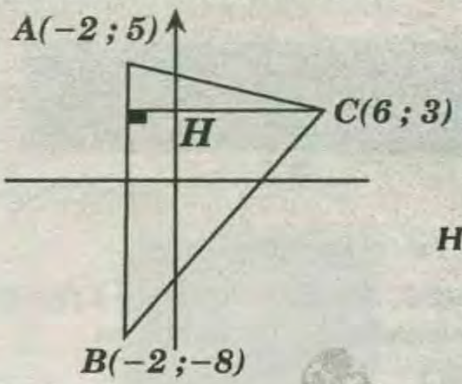
PROBLEMA 16 :

Hallar la altura del triángulo ABC, relativa al lado AB, si $A(-2;5)$; $B(-2;8)$; $C(6;3)$

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

RESOLUCIÓN :

* Graficando adecuadamente:



$H = 6 + 2 = 8$

RPTA : "A"

PROBLEMA 17 :

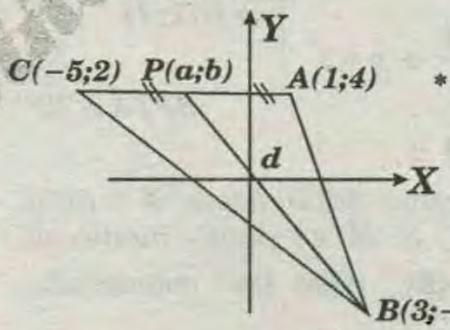
Si los vértices de un triángulo son:

$A=(1;4)$; $B=(3;-9)$; $C=(-5;2)$

Determine la longitud de la mediana trazada desde el punto "B".

A) 11 B) 12 C) 13 D) 15 E) 17

RESOLUCIÓN :



* Se deduce que:

$$a = \frac{-5+1}{2} = -2$$

$$b = \frac{2+4}{2} = 3$$

* Entonces: $d = \sqrt{(3-(-2))^2+(-9-3)^2} = 13$

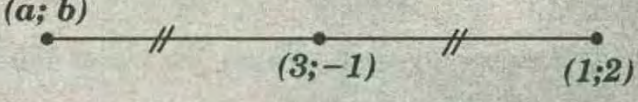
RPTA : "C"

PROBLEMA 18 :

$(3;-1)$ es el punto medio de un segmento donde uno de sus extremos es el punto $(1;2)$. Hallar las coordenadas de otro extremo.

A) (5; − 4) B) (5; 4) C) (− 4;5) D) (1; 1/2)

RESOLUCIÓN :



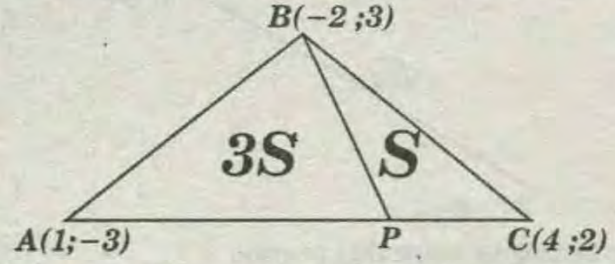
$$3 = \frac{a+1}{2} \rightarrow a = 5-1 = \frac{b+2}{2} \rightarrow b = -4$$

* Entonces en el otro extremo será: $(5;-4)$

RPTA : "A"

PROBLEMA 19 :

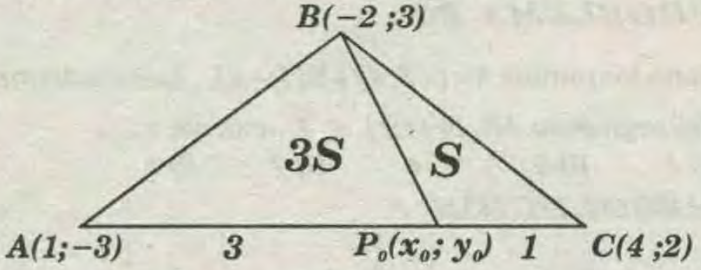
Calcular las coordenadas del punto "P".



A)(2;3) B)$\left(\frac{11}{3};7\right)$ C)$\left(\frac{13}{4};\frac{3}{4}\right)$ D)$\left(\frac{7}{3};\frac{12}{5}\right)$ E)(3;2)

RESOLUCIÓN :

* Si las áreas están en la relación de 3 a 1, también AP y PC están en relación de 3 a 1; así:



$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{3(4)+1(1)}{3+1} = \frac{12+1}{4} = \frac{13}{4} \\ y_0 &= \frac{3(2)+1(-3)}{3+1} = \frac{6-3}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}\right\}$$

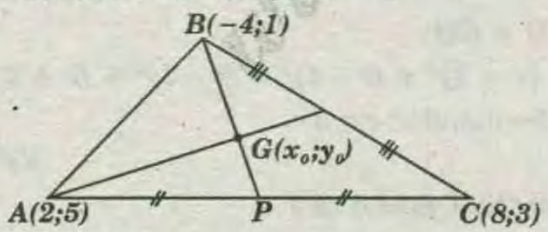
$$\Rightarrow P_0(x_0;y_0) = P\left(\frac{13}{4};\frac{3}{4}\right)$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 20 :

Calcular las coordenadas del punto "G".

A)(1;3)
B) (2;5)
C) (3;7)
D) (2;3)
E) (7;1)



RESOLUCIÓN :

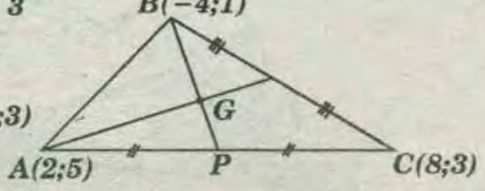
* El punto "G" es baricentro, porque basta con trazar dos medianas para determinar dicho baricentro.

* Se deduce que:

$$x_0=\frac{2+(-4)+8}{3}=\frac{6}{3}=2$$

$$y_0=\frac{5+1+3}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$$\rightarrow G(x_0;y_0) = G(2;3)$$



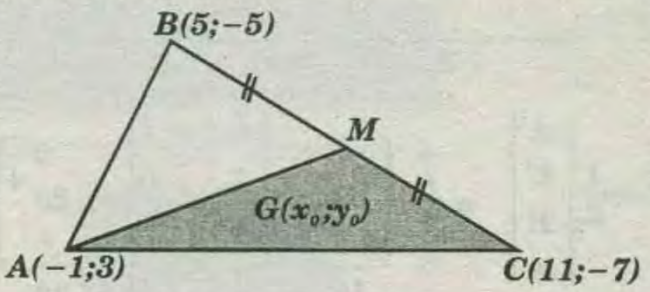
RPTA : "D"

PROBLEMA 21 :

En un triángulo de vértices A(−1;3), B(5; −5) y C(11;−7) se traza la mediana AM. Calcular las coordenadas del baricentro (G) del triángulo AMC.

A)(0;1) B)(5; − 1) C)(4; − 2) D)$\left(6;-\frac{10}{3}\right)$

RESOLUCIÓN :



$$M=\left(\frac{5+11}{2};\frac{-5-7}{2}\right)= M(8;-6)$$

* En el triángulo AMC el punto "G" es su baricentro, por tanto:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{-1+8+11}{3} = \frac{18}{3} = 6 \\ y_0 &= \frac{3-6-7}{3} = -\frac{10}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow G(x_0;y_0) = G\left(6;\frac{-10}{3}\right)$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 22 :

En el triángulo dos de sus vértices son A(1;3) y B(7;1), además su baricentro es G(5;0).¿Cuál es la suma de coordenadas del tercer vértice "C"?.

A)3 B) 5 C) 1 D) 0

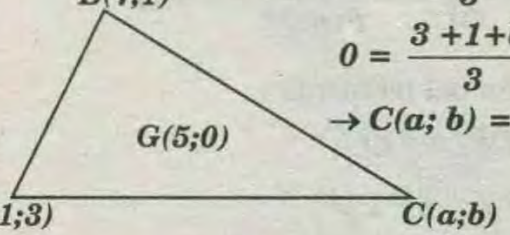
RESOLUCIÓN :

* Se deduce:

$$5 = \frac{1+7+a}{3} \rightarrow a=7$$

$$0 = \frac{3+1+b}{3} \rightarrow b=-4$$

$$\rightarrow C(a;b) = C(7;-4)$$



* Luego:

$$a+b = 7-4 = 3$$

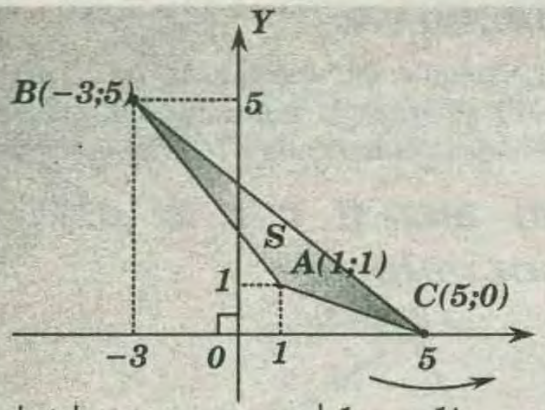
RPTA : "A"

PROBLEMA 23 :

Calcular el área del triángulo cuyos vértices son A(1;1), B(− 3;5) y C(5;0)

A) 32μ^2 B) 5 C) 6 D) 7

RESOLUCIÓN :



$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} A \\ C \\ B \\ A \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ \hline 10 \end{matrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \\ -3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 25 \\ -3 \\ \hline 22 \end{matrix} + \right\}$$

$$\rightarrow S=\frac{22-10}{2}=\frac{12}{2}=6$$

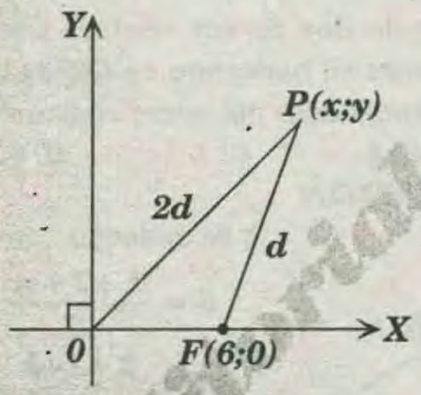
RPTA : "C"

PROBLEMA 24 :

Halle la ecuación de la curva tal que la distancia de cualquier punto de ella al origen de coordenadas y al punto $F=(6;0)$ están en la relación de 2 a 1.

A) $x^2+8y^2=16$ B) $x^2+y^2=8$ C) $x^2-y^2=2$
D) $x-3y=1$ E) $(x-8)^2+y^2=16$

RESOLUCIÓN :



* Por condición del problema :

$\underline{OP}=2PF \Rightarrow \underline{OP^2}=4\underline{PF^2}$

$\Rightarrow x^2+y^2=4\{(x-6)^2+y^2\}$

$\Rightarrow x^2+y^2=4x^2-48x+144+4y^2$

$\Rightarrow 0=3x^2-48x+144+3y^2 \Rightarrow 0=\underline{x^2-16x+48}+y^2$

$\Rightarrow 0=(x-8)^2-64+48+y^2 \Rightarrow (x-8)^2+y^2=16$

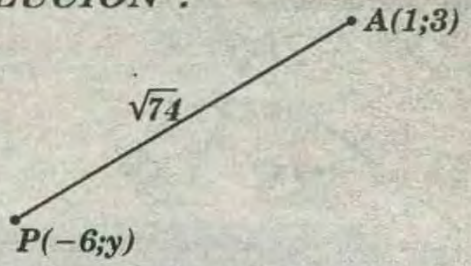
RPTA : "E"

PROBLEMA 25 :

La abscisa de un punto es -6 y si distancia al punto $A(1;3)$ es $\sqrt{74}$. Halle la ordenada del punto.

A) 3 ó −1 B) 2 ó −2 C) 8 ó −2 D) 5 ó −3 E) 6 ó −4

RESOLUCIÓN :



* Por distancia entre dos puntos :

$$74=(1+6)^2+(3-y)^2$$

* Simplificando : $0=y^2-6y-16$
* Factorizando el 2° miembro : $0=(y-8)(y+2)$
* Valores de «y» : 8 ó −2

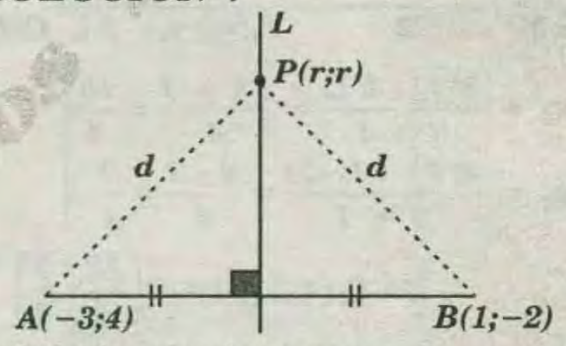
RPTA : "C"

PROBLEMA 26 :

Dado los puntos $A=(-3;4)$ y $B(1;-2)$, $\overline{L}$ es mediatriz del segmento AB. Si $(r;r) \in \overline{L}$, calcule r.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

RESOLUCIÓN :



* Por distancia entre dos puntos :

$d^2=(r+3)^2+(r-4)^2$ .....(I)

$d^2=(r-1)^2+(r+2)^2$ .....(II)

* (I) = (II):

$(r+3)^2+(r-4)^2=(r-1)^2+(r+2)^2$

* Efectuando : $r=5$

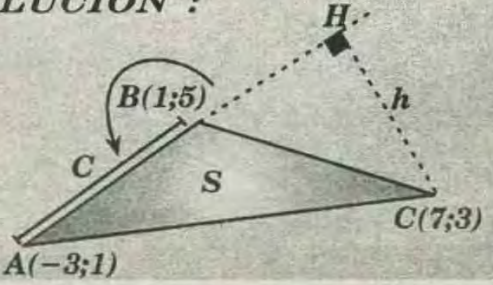
RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

En un triángulo, sus vértices son $A(-3;1)$, $B(1;5)$ y $C(7;3)$, ¿cuál es la longitud de la altura relativa al lado AB?.

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$ E) 62

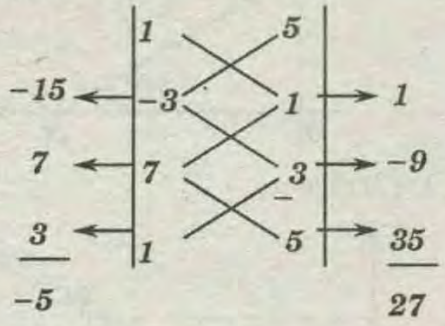
RESOLUCIÓN :



I) Calculamos *AB:*

$$d_{(A;B)}=\sqrt{(-3-1)^2+(1-5)^2} \Rightarrow d_{(A;B)}=4\sqrt{2}=C$$

II) Calculamos *"S":*



$$\rightarrow S=\frac{27-(-5)}{2}=16$$

III) Sabemos que:

$$S=\frac{C\times h}{2} \Rightarrow 16=\frac{4\sqrt{2}\times h}{2} \Rightarrow h=\frac{8}{\sqrt{2}} \Rightarrow h=4\sqrt{2}$$

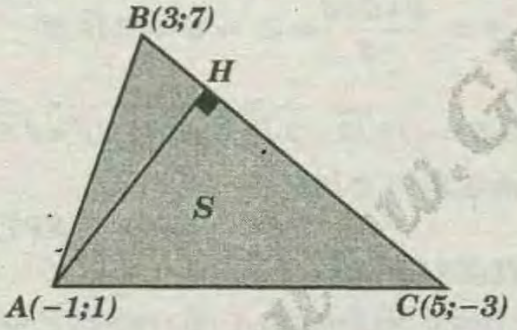
RPTA : "D"

PROBLEMA 28 :

Las coordenadas de los vértices de un triángulo son: *A(−1;1), B(3;7) y C(5;−3).* Calcular la longitud de la altura relativa al lado *BC.*

A)13 B) $\sqrt{17}$ C) $\sqrt{31}$ D) $\sqrt{19}$ E) $\sqrt{26}$

RESOLUCIÓN :



* La longitud de la altura relativa al lado *BC* es *"AH"*, calculamos el área *"S"* aplicando:

$$S=\frac{(base)(altura)}{2}=\frac{(BC)(AH)}{2} \rightarrow AH=\frac{2S}{BC} \ldots\ldots\ldots (I)$$

* Calculamos el área *"S".*

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} A \\ C \\ B \\ A \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} 5+ \\ -9 \\ \underline{-7} \\ -11 \end{matrix}\right.\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -3 \\ 3 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\left.\begin{matrix} 3+ \\ 35 \\ \underline{3} \\ 41 \end{matrix}\right\}$$

$$\rightarrow S=\frac{41-(-11)}{2}=\frac{52}{2}=26$$

* Calculamos *"BC":*

$$BC=\sqrt{(3-5)^2+(7-3)^2}=2\sqrt{26}$$

* Reemplazamos *"S"* y *"BC"* en *(I)*:

$$AH=\frac{2\times 26}{2\sqrt{26}}=\sqrt{26}$$

RPTA : "E"

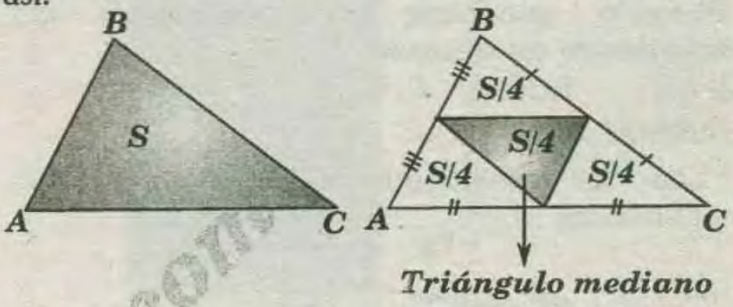
PROBLEMA 29 :

Con los puntos medios de los lados del triángulo cuyos vértices son *A(− 2;4), B(6;8)* y *C(4; − 6)* se construye un triángulo, calcular su área.

A) 13μ² B) 12 C) 20 D) 16,5 E) 14,6

RESOLUCIÓN :

* Recordamos la propiedad de geometría que dice así:



Triángulo mediano

* Calculamos el área *"S"* del triángulo *ABC:*

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} A \\ C \\ B \\ A \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} 16+ \\ -36 \\ \underline{-16} \\ -36 \end{matrix}\right.\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -6 \\ 6 & 8 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}\left.\begin{matrix} 12+ \\ 32 \\ \underline{24} \\ 68 \end{matrix}\right\}$$

$$\rightarrow S=\frac{68-(-36)}{2}=\frac{104}{2}$$

$$\rightarrow S=52$$

* Queremos calcular el área del triángulo mediano *(S/4).*

$$\frac{S}{4}=\frac{52}{4}=13$$

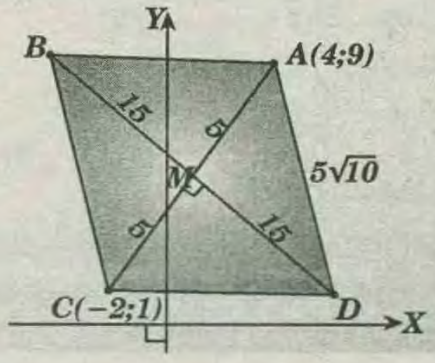
RPTA: "A"

PROBLEMA 30 :

Dado el rombo *ABCD* de lado $\ell=5\sqrt{10}u$ y dos de sus vértices opuestos: *A(4;9)* y *C(−2;1).* Hallar su área en (u^2).

A)100 B) 120 C) 130 D) 150 E) 75

RESOLUCIÓN :



WWW.GRATIS2.COM

* Por distancia entre dos puntos:

$AC^2=(4+2)^2+(9-1)^2 \rightarrow AC = 10$

$\rightarrow AM = MC = 5$

* $\triangle AMD$: $MD^2 = (5\sqrt{10})^2 - 5^2$

$\rightarrow MD = 15 \rightarrow BM = 15$

* Luego:

$$S_{ABCD}=\frac{30\times 10}{2}= 150u^2$$

RPTA: "D"

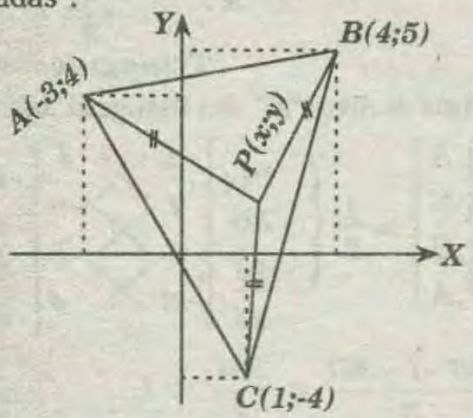
PROBLEMA 31 :

Si $A(-3;4)$, $B(4;5)$ y $C(1;-4)$ son vértices de un triángulo, encontrar las coordenadas del circuncentro del triángulo.

A) (1;1) B) 1;-1) C) (2;-1) D) (-3;-1)

RESOLUCIÓN :

* Sea P el circuncentro del ΔABC y $(x;y)$ sus coordenadas :



* Por propiedad para este punto:

$$d_{\overline{PA}} = d_{\overline{PB}} = d_{\overline{PC}}$$

* Entonces:

$d_{\overline{PA}} = d_{\overline{PC}}$

$\rightarrow \sqrt{(x-(-3))^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-(5))^2}$

* Elevando al cuadrado y simplificando:

$7x + y = 8$ ..... (I)

* También:

$d_{\overline{PA}} = d_{\overline{PC}}$

$\rightarrow \sqrt{(x-(-3))^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-(-4))^2}$

* De donde: $2y - x = 1$ ..... (II)

* Resolviendo (I) y (II): $x = 1, y = 1$

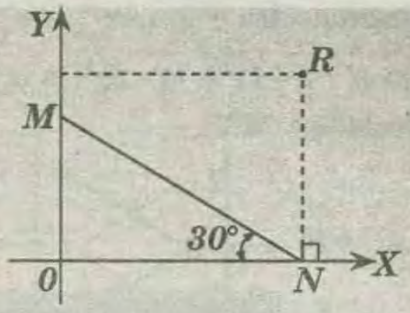
$\rightarrow P = (1;1)$

RPTA : "A"

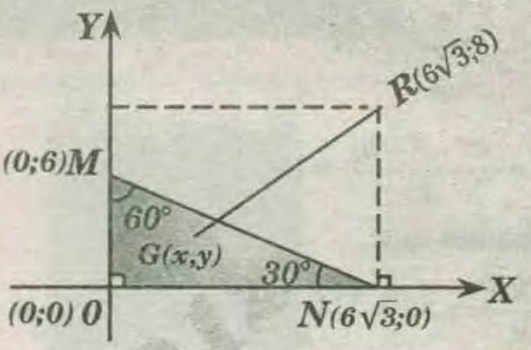
PROBLEMA 32 :

En la figura mostrada las coordenadas del punto R son $(6\sqrt{3};8)$. Hallar la distancia del baricentro de la región triangular MON al punto R.

A) $2\sqrt{21}$
B) $\sqrt{21}$
C) $4\sqrt{21}$
D) 21
E) $2\sqrt{42}$



RESOLUCIÓN :



$d(G,R) = ?$

* El ΔMON es notable $(30°, 60°)$:

$ON = 6\sqrt{3} \Rightarrow OM = 6$

* Las coordenadas de G:

$$x = \frac{0+0+6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$y = \frac{0+0+6}{3} = 2 \rightarrow G = (2\sqrt{3};2)$$

* Luego:

$d(G,R)=\sqrt{(6\sqrt{3}-2\sqrt{3})^2+(8-2)^2}=\sqrt{84}$

$\rightarrow d(G,R) = 2\sqrt{21}$

RPTA: "A"

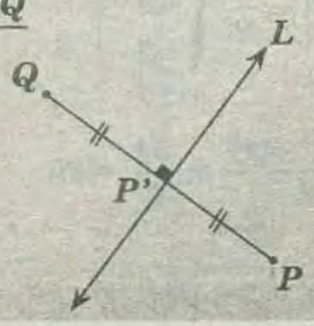
PROBLEMA 33 :

Sea P un punto del espacio, L una recta y P' un punto de L. Si la recta que pasa por P y P' es perpendicular a L, hallar el punto Q, el cual es simétrico de P, respecto a la recta L.

A) $Q = P - P'$ B) $Q = P'P$ C) $Q = 2P' - P$
D) Faltan datos E) Ninguna de las anteriores.

RESOLUCIÓN :

* Como P' es punto medio de $\overline{PQ}$, sus coordenadas serán: $P' = \frac{P+Q}{2}$



* De donde, al despejar: $Q = 2P' - P$

RPTA: "C"

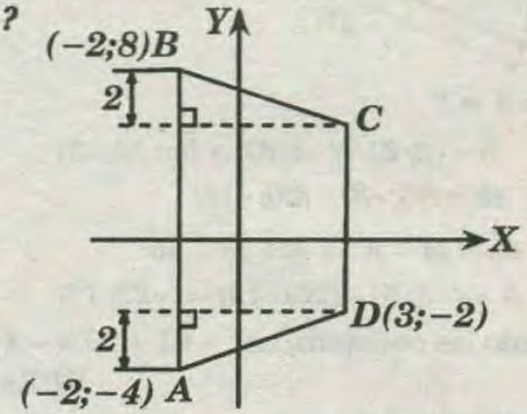
PROBLEMA 34 :

La base mayor de un trapecio isósceles une los puntos $(-2;8)$ y $(-2;-4)$. Uno de los extremos de la base menor tiene por coordenada $(3;-2)$. La distancia o longitud de la base es:

A) 8 B) 6 C) 9 D) 12 E) 10

RESOLUCIÓN :

$CD = ?$



* Se tiene:

$$C = (3;6)$$

$$|\overline{DC}| = \sqrt{[3-3)]^2 + [6-(-2)]^2} \Rightarrow |DC| = 8$$

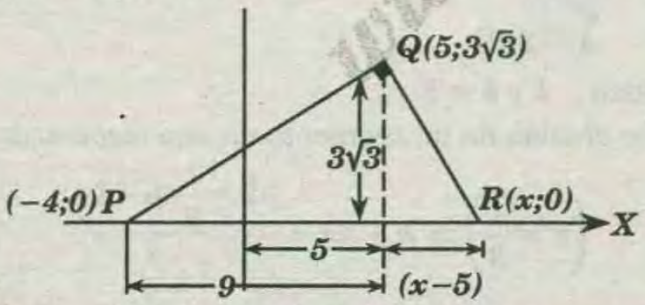
RPTA: "A"

PROBLEMA 35 :

Los puntos $P(-4;0)$; $Q(5;3\sqrt{3})$; $R(x;0)$ son los vértices de un triángulo rectángulo recto en Q. La suma de los valores que indican el perímetro y el área del triángulo es:

A) $18\sqrt{3}+24$ B) $18\sqrt{3}+18$ C) $18+24\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



* Según el gráfico por relaciones métricas:

$$(3\sqrt{3})^2 = 9(x-5) \Rightarrow x = 8$$

* Luego:

$$|\overline{PQ}|^2 = (3\sqrt{3})^2 + 9^2 \rightarrow |\overline{PQ}| = 6\sqrt{3}$$

$$|\overline{PR}| = 9 + x - 5 \rightarrow |\overline{PR}| = 12$$

$$\rightarrow S_{PQR} = \frac{12(3\sqrt{3})}{2} = 18\sqrt{3}$$

* Ahora:

$$\overline{PQ}|^2 = (3\sqrt{3})^2 + (x-5)^2 \Rightarrow |\overline{PQ}| = 6$$

* Entonces :

$$\overline{PQ}|^2 = (3\sqrt{3})^2 + (x-5)^2 \Rightarrow |\overline{PQ}| = 6$$

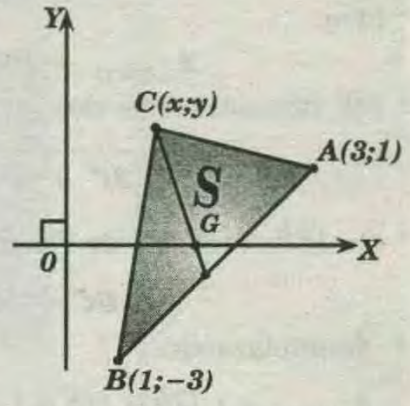
RPTA: "C"

PROBLEMA 36 :

$A(3;1)$, $B(1;-3)$ son las coordenadas de dos vértices de un triángulo de $3m^2$ de área, si el baricentro pertenece al eje de las abscisas. Halle la suma de las coordenadas del vértice C.

A) 7 y 4 B) 6 y 5 C) 3 y 8 D) 2 y 9 E) 1 y 10

RESOLUCIÓN :



* Las coordenadas de "G":

$$G\left(\frac{x+4}{3};\frac{y-2}{3}\right);\ \text{Pero } G \in \overline{ox}$$

$$\rightarrow \frac{y-2}{8} = 0 \rightarrow y = 2$$

* Por dato: $S = 3u^2$

* Pero:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ x & y \\ 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow 3 = \frac{1}{2}|x+y-9-(3y-3x+1)| = |2x-y-5|$$

* Simplificando: $|2x-7| = 3$

* Ahora: $2x-7 = 3 \quad \vee \quad 2x-7 = -3$

$$\Rightarrow 2x = 10 \ \vee \ 2x = 4$$

$$\Rightarrow x = 5 \ \vee \ x = 2$$

* Las coordenadas de C serán: $(5;2) \vee (2;2)$

Suma de coordenadas: 7 ó 4

RPTA: "A"

PROBLEMA 37 :

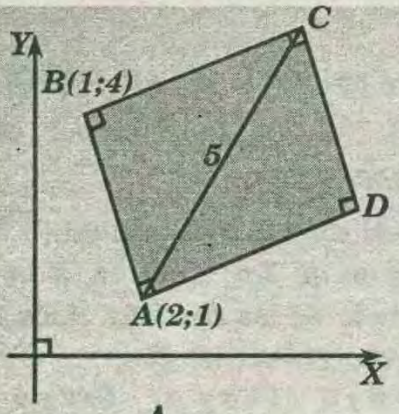
Calcular el área de la región limitada por el rectángulo $ABCD$ siendo: $A=(2;1)$, $B=(1;4)$ y $AC = 5$

A) $22\sqrt{6}u^2$ B) $5\sqrt{6}u^2$ C) $3\sqrt{3}u^2$

D) $3\sqrt{6}u^2$ E) $6\sqrt{5}u^2$

RESOLUCIÓN :

www.CALIS.com



* Piden:

$A_{\square ABCD}$

* Pero:

$$A_{\square ABCD} = (AB)(BC)$$

* Por distancia entre dos puntos.

$$AB = \sqrt{(1-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}u^2$$

* $\triangle ABC$: Teorema de Pitágoras.

$$\rightarrow BC = \sqrt{15}u^2$$

* Reemplazando:

$$A_{\square ABCD} = (\sqrt{10})(\sqrt{15})u^2 \Rightarrow A_{\square ABCD} = 5\sqrt{6}u^2$$

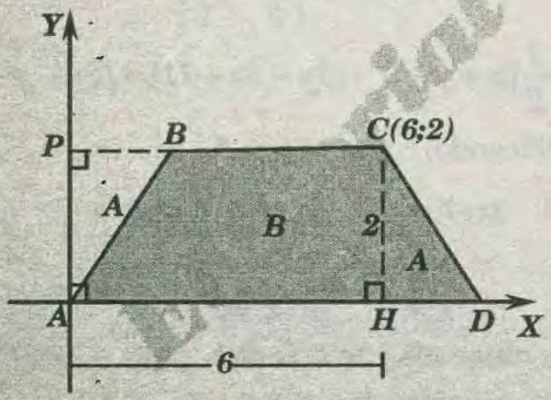
RPTA : "B"

PROBLEMA 38 :

En un trapecio isósceles $ABCD$ $(\overline{BC} // \overline{AD})$, donde $A=(0;0)$ y $C=(6;2)$ calcular el área de la región limitada por el trapecio, siendo $\overline{BC}$ paralelo al eje de abscisas.

A) $8u^2$ B) $16u^2$ C) $10u^2$ D) $12u^2$ E) $24u^2$

RESOLUCIÓN :



* Piden el área de la región $ABCD = S_x$

$$\rightarrow S_x = A + B$$

* Pero:

$$\triangle ABP \cong \triangle CDH$$

$$\rightarrow A\triangle ABP \cong A\triangle CDH$$

$$\rightarrow S_x = S_{\square AHCP} = (6)(2) = 12u^2$$

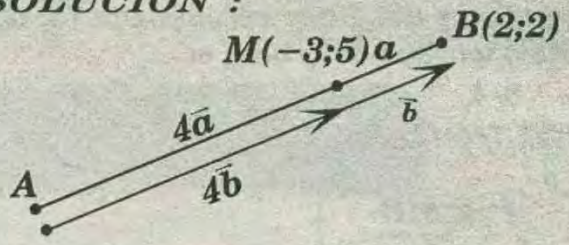
RPTA: "D"

PROBLEMA 39 :

El punto M divide u BA internamente en la razón 1/4. Si $M=(-3;5)$ y $B=(2;2)$, calcule la suma de componentes de A.

A) -6 B) 6 C) 5 D) -5 E) 7

RESOLUCIÓN :



* Piden : $A = ?$

$$\vec{b} = (2;2) - (-3;5) \rightarrow \vec{b} = (5;-3)$$

* Ahora: $4b = 4(5;-3) = (20;-12)$

* Pero: $4\vec{b} = M - A \rightarrow A = M - 4\vec{b}$

$$A = (-3;5) - (20;-12) = (-23;17)$$

* Sumando las coordenadas : $-23 + 17 = -6$

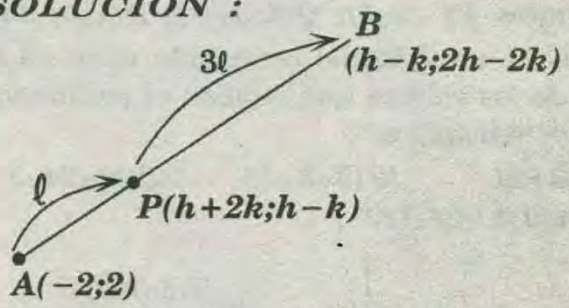
RPTA: "A"

PROBLEMA 40 :

El punto $P=(h+2k;\ h-k)$ divide al segmento AB en la razón $1/3$. Si $A=(-2;\ 2)$ y $B = (h-k;\ 2k-2k)$, calcule h y k.

A) 3/2 y $-3/2$ B) 4/7 y 4/9 C) 7/4 y $-5/4$
D) 7/6 y $-5/4$ E) 7/5 y $-6/7$

RESOLUCIÓN :



* Piden : h y $k = ?$

* Por división de un segmento en una razón dada :

$$\left(r = \frac{1}{3}\right) \Rightarrow h + 2k = \frac{-2 + \frac{1}{3}(h-k)}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$4h + 8k = -6 + h - k$$

$$3h + 9k = -6 \rightarrow h + 3k = -2 \ldots\ldots (I)$$

$$h + k = \frac{2 + \frac{1}{3}(2h-2k)}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$4h - 4k = 6 + 2h - 2k$$

$$2h - 2k = 6 \rightarrow h - k = 3 \ldots\ldots\ldots (II)$$

* De (I) y (II):

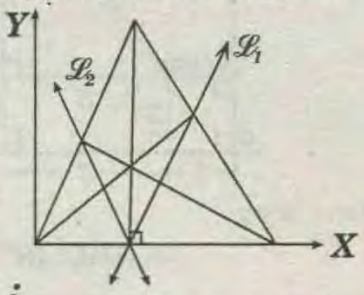
$$h=\frac{7}{4} \quad y \quad k=\frac{-5}{4}$$

RPTA: "C"

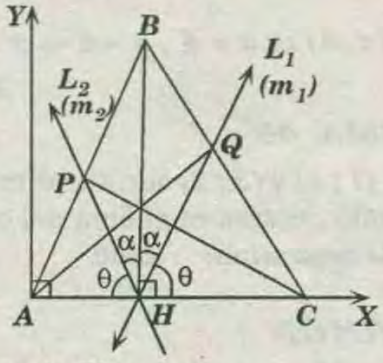
PROBLEMA 41 :

Del gráfico , m_1 y m_2 son pendientes de. $\overrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overrightarrow{\mathscr{L}_2}$ respectivamente . Indique la relación correcta.

A) $m_1m_2=1$
B) $m_1+m_2=0$
C) $m_1m_2=-1$
D) $m_1m_2=2$
E) $m_1-m_2=0$



RESOLUCIÓN :



* Por teorema de Blanchet :

$$m\sphericalangle PHB = m\sphericalangle BHQ = \alpha$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle PHA = m\sphericalangle QHC = \theta$$

$$m_{L_1} = m_1 = tg\theta \text{.....(I)}$$

$$m_{L_2} = m_2 = -tg\theta \text{.....(II)}$$

* (I) + (II): $m_1 + m_2 = tg\theta - tg\theta$

$\rightarrow m_1 + m_2 = 0$

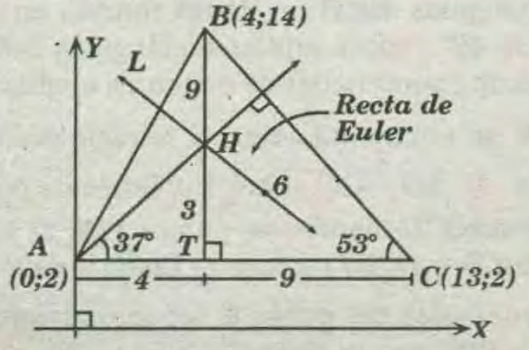
RPTA: "B"

PROBLEMA 42 :

Dado el triángulo ABC, $A=(0;2)$; $8=(4;14)$ y $C=(13;2)$. Halle la ecuación de la recta de Euler de dicho triángulo .

A) $5x+3y-10=0$ B) $5x-3y+10=0$ C) $5x-3y+5=0$
D) $3x-5y+13=0$ E) $3x-5y-13=0$

RESOLUCIÓN :



$$G: \frac{(0;2)+(4;14)+(13;2)}{3}$$

$$G=\left(\frac{17}{3};6\right); HT=3 \rightarrow H=(4;5)$$

$$m_L=\frac{6-5}{\frac{17}{3}-4} \rightarrow m_L=\frac{3}{5}$$

$L: y-y_1=m(x-x_1)$; $H=(4;5)=(x_1;y_1)$

$$L: y-5=\frac{3}{5}(x-4)$$

$$L: 3x-5y+13=0$$

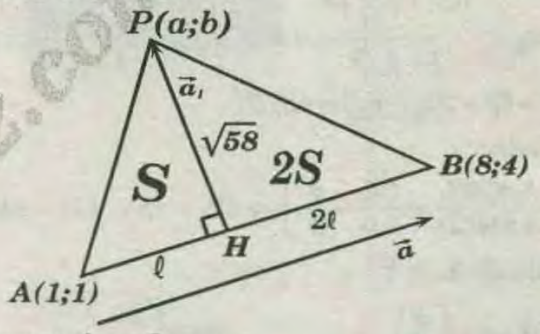
RPTA : "D"

PROBLEMA 43 :

Dado los puntos $A(1;1)$; $B(8;4)$; $P(a;b)$, se traza $\overline{PH} \in \overline{AB}, (H \in \overline{AB})$ El área de la región PHB es al área de la región PHA como 2 es a 1 ; $PH=\sqrt{58}$ y P pertenece al primer cuadrante. Calcule $a+b$.

A) 12 B) 10 C) 9 D) 83/9 E) 28/3

RESOLUCIÓN :



* Piden: $a+b=?$

$$\frac{A_{\Delta PHB}}{A_{\Delta PHA}}=\frac{1}{2}=\frac{HB}{AH}$$

* Calculo de H :

$$x_0=\frac{1+\frac{1}{2}(8)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{10}{3} \Rightarrow y_0=\frac{1+\frac{1}{2}(4)}{1+\frac{1}{2}}=2 \Rightarrow H=\left(\frac{10}{3};2\right)$$

$\vec{a}=(8;4)-(1;1) \rightarrow a=(7;3) \wedge |\vec{a}|=\sqrt{58}$

$\rightarrow \overrightarrow{HP}=\vec{a}^{-1}=(-3;7)=P-H$

$(-3;7)=P-\left(\frac{10}{3};2\right) \rightarrow P=\left(\frac{1}{3};9\right)=(a;b)$

$$\rightarrow a+b=\frac{28}{3}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 44 :

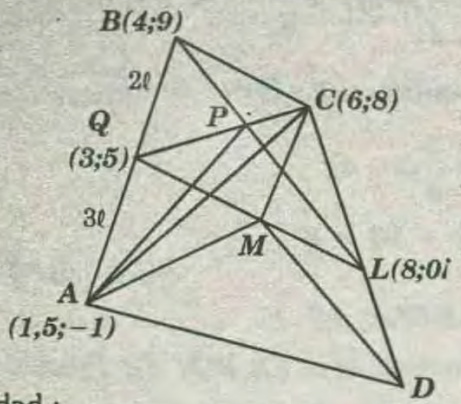
Dado el cuadrilátero $ABCD$, $A(1,5;-1)$; $B(4;9)$; $C(6;8)$; $D(9,5;-6)$, en $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos Q y L respectivamente , tal que la razón de áreas de las regiones, BPC y APC es $2/3$ respectivamente. Si $\overline{BL} \cap \overline{QC}=\{P\}$. en $\overline{QL}$ se ubica el punto M y la relación de las áreas de las regiones AMC, MCL y MLD son de 6; 4 y 3 respectivamente ;

WWW.GRATIS2.COM

halle las coordenadas del punto M.

A) (5; 3) B) (5; 2) C) (6; 1) D) (6; 2) E) (7; 2)

RESOLUCIÓN :



* Propiedad :

$$\frac{A\Delta BPC}{A\Delta APC}=\frac{BQ}{AQ}=\frac{2}{3}\Big\}\Rightarrow BQ=2\ell \wedge AQ=3\ell$$

* Calculo de $Q = ?$

$$x_0=\frac{1,5+\left(\frac{3}{2}\right)4}{1+1,5}=3\ ;\quad y_0=\frac{-1+\frac{39}{2}}{1+1,5}=5$$

$$\rightarrow Q=(x_0;\ y_0)=(3;5)$$

* Propiedad:

$$\frac{A\Delta CML}{A\Delta MLD}=\frac{CL}{LD}=\frac{4}{3}\Big\}\Rightarrow CL=4k \wedge LD=3k$$

* Calculo de L = ?

$$x_0=\frac{9,5+6\times\left(\frac{3}{4}\right)}{1+\left(\frac{3}{4}\right)}=8 \wedge y_0=\frac{-6+8\left(\frac{3}{4}\right)}{1+\left(\frac{3}{4}\right)}=0\Big\}\Rightarrow L(8;0)$$

* Propiedad : $\frac{A\Delta QCM}{A\Delta MCL}=\frac{QM}{ML}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

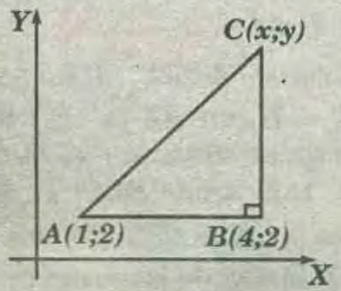
* Calculo de M= ?

$$x_0=\frac{3+8\left(\frac{3}{2}\right)}{1+\left(\frac{3}{2}\right)}=6 \wedge y_0=\frac{5+0\left(\frac{3}{2}\right)}{1+\left(\frac{3}{2}\right)}=2$$

RPTA: "D"

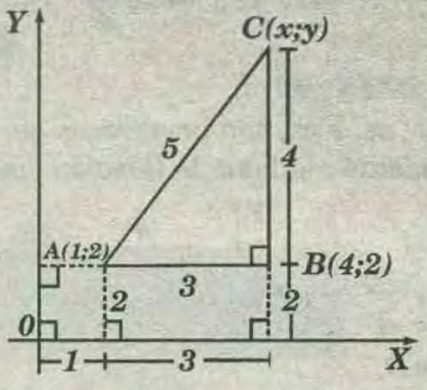
PROBLEMA 45 :

En la gráfica , si $AC = 5$, la suma de las coordenadas de C es :



A)4 B)10 C)8 D)6 E)9

RESOLUCIÓN :



* Piden : $x+y$

$\triangle ABC$: $BC=4$

* Luego :

$$C(x;y)=(4;6)\Rightarrow x=4\ ,\ y=6\rightarrow x+y=10$$

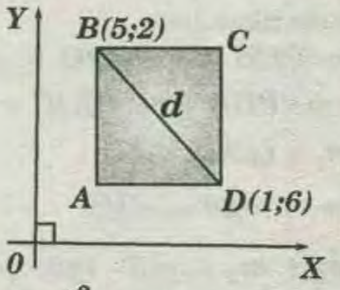
RPTA: "B"

PROBLEMA 46 :

Si los puntos $(1\ ;\ 6)$ y $(5\ ;\ 2)$ son los vértices opuestos de un cuadrado , entonces el área del cuadrado es:

A)no se puede determinar B)50 C)4
D)16 E)8

RESOLUCIÓN :



* Piden : $S_{ABCD}=\frac{d^2}{2}$

* Distancia entre los puntos B y D :

$$d=\sqrt{(1-5)^2+(6-2)^2}=4\sqrt{2}$$

* En (I) : $S_{ABCD}=16$

RPTA :"D"

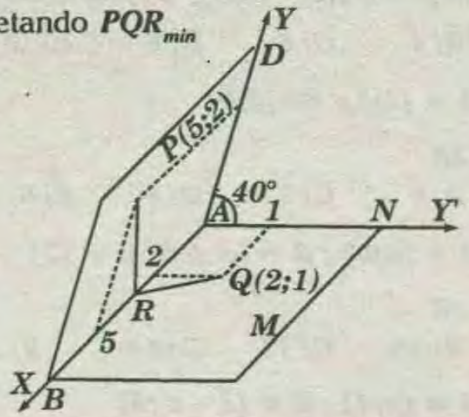
PROBLEMA 47 :

Los rectángulos $ABCD$ y $ABMN$ forman un ángulo diedro de $40°$; sobre ambos rectángulos definimos sistemas de coordenadas de origen en el vértice A,tal que $\overline{AB}$ se encuentra sobre el semieje positivo de abscisas ; y $\overline{AD}$, $\overline{AN}$ sobre los semiejes positivos de ordenadas. Tomamos los puntos $P(5;\ 2)$ sobre el plano $ABCD$ y $Q(2;1)$ sobre el plano $ABMN$. Halle las coordenadas del punto R sobre $\overline{AB}$ tal que la distancia PRQ sea mínima.

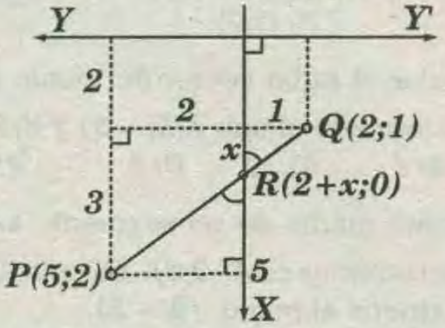
A)(3;0) B)(4 cos20° ; 0) C)(5; 0)
D)(6;0) E)(4sen20°; 0)

RESOLUCIÓN :

* Interpretando PQR_{min}



* Para que la distancia *PQR* sea mínima giramos una de las caras de manera que *P, R* y *Q* sean colineales.



* Se observa : $\frac{3}{3}=\frac{x}{1}\Rightarrow x=1$

* Luego : $R=(3\ ;\ 0)$

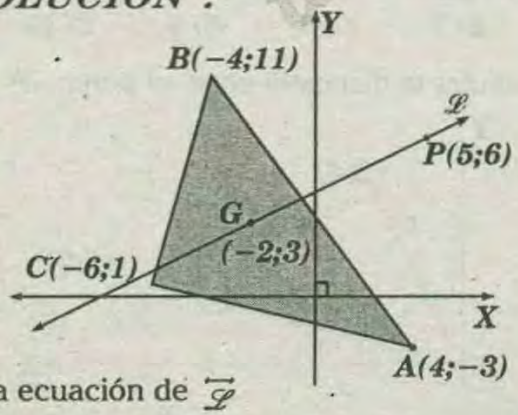
RPTA :"A"

PROBLEMA 48 :

La ecuación de la recta que pasa por $P(5;6)$ y por el baricentro del triángulo con vértices en los puntos $A(4;-3)$, $B(-4;11)$ y $C(-6;1)$, es :

A) $7x+3y-27=0$ B) $3x+7y-27=0$
C) $-3x+7y-27=0$ D) $-7x+3y+27=0$

RESOLUCIÓN :



Piden la ecuación de $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$

* Datos :

$A=(4;-3)$ $B=(-4;11)$ $C=(-6;1)$ $D=(5;6)$

Sea *G* baricentro de la región triangular *ABC*, por teorema

$$G=\frac{A+B+C}{3}\rightarrow G=(-2;3)$$

Al conocer las coordenadas de dos puntos de $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$, la ecuación de $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ es: $\overleftrightarrow{\mathcal{L}};\frac{y-6}{x-5}=\frac{3-6}{-2-5}$

$$\overleftrightarrow{\mathcal{L}};7y-42=3x-15\rightarrow\overleftrightarrow{\mathcal{L}};3x+7y-27=0$$

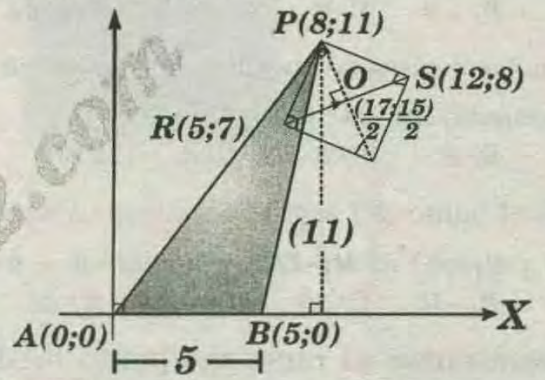
RPTA :"C"

PROBLEMA 49 :

Dados los siguientes puntos $A=(0;0)$, $B=(5;0)$, $R(5;7)$, $S(12;8)$, sabiendo que el segmento $\overline{RS}$ es la diagonal de un cuadrado , halle un punto *P* en el perímetro de dicho cuadrado para que el triángulo *ABP* tenga área máxima . ¿Cuál es el valor del área máxima?

A)22,5 B)17,5 C)48,0 D) $2,5\sqrt{15125}$ E)27,5

RESOLUCIÓN :



* Se pide : $S_{\Delta ABP}$

Como el área de la región triangular debe ser máxima, entonces la longitud de la altura debe ser máxima, entonces *P* se debe ubicar en el vértice del cuadrado.

* Por vectores :

$$\overline{RO}=\left(\frac{17}{2}-5;\frac{15}{2}-7\right)\Rightarrow\overline{RO}=\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{RP}=\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)\Rightarrow\overline{RP}=(3;4)$$

$$P=R+(3;4)=(5;7)+(3;4)\Rightarrow P=(8;11)$$

* Luego : $S_{\Delta ABP}=\frac{5\times11}{2}=27,5$

RPTA : "E"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda :

I) $(3;-2)\in IC$
II) $(-1;-8)\in IIIC$
III) $(0;-3)\in$ eje «X»

IV) $(0;1) \in$ eje «Y»

A) FFVV B) FVFV C) VFFF
D) FVVV E) VFVV

02 ¿Qué punto está más cerca del origen?.

A) $(-4;-3)$ B) $(2;0)$ C) $(2;-3)$
D) $(1;-1)$ E) $(5;12)$

03 Si el radio vector del punto $T(x-6;3)$ es 5, hallar «x».

A) 10 B) 2 C) -8 D) 6 E) a y b

04 Señale la distancia entre $P(-1;3)$ y $Q(2;4)$.

A) $\sqrt{8}$ B) $\sqrt{6}$ C) 2 D) $\sqrt{10}$ E) 1

05 Si la distancia entre $A(-1;2)$ y $B(x;3)$ es , calcular «x».

A) -4 B) -2 C) 2 D) a y b E) a y c

06 Hallar la suma de coordenadas del punto medio del segmento AB , si : $A(-3;2)$ y $B(7;6)$.

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

07 Si el punto del segmento cuyos extremos son $P(5;3)$ y $Q(a;b)$ es $M(-7;2)$, calcular «$a+b$».

A) 16 B) -18 C) 20 D) -22 E) 24

08 Determinar el radio del punto medio del segmento formado al unir los puntos $A(-5;1)$ y $B(3;5)$

A) $2\sqrt{3}$ B) 4 C) $\sqrt{10}$ D) 3 E) $\sqrt{5}$

09 El punto medio de un segmento es $M(1;2)$ si uno de los extremos es $A(3;5)$ hallar la distancia del otro extremo al punto $C(2;3)$.

A) 5 B) 6 C) $5\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{3}$

10 En un paralelogramo, tres vértices consecutivos son $A(1;1)$, $B(5;-1)$, $C(7;3)$. Calcular la suma de coordenadas del cuarto vértice.

A) 2 B) 0 C) 6 D) 8 E) 10

11 Calcular la suma de coordenadas del punto medio del segmento AB, si : $A(3;7)$ y $B(-6;4)$.

A) 4 B) -2 C) 8 D) -3 E) 1

12 Si el punto del segmento cuyos extremos son $L(-3;7)$ y $N(a;b)$ es $M(-8;0)$. Calcular «$b-a$».

A) -7 B) -13 C) 6 D) -20 E) -6

13 Si : $A=(6;8)$ y «O» el orden de coordenadas. Calcular OA.

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

14 Si: $OA=\sqrt{13}$; $A=(x;3)$; O: origen calcular «x».

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

15 Si: $A=(1;3)$; $B=(5;0)$

Calcular AB.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

16 Si : $A=(a;b)$; $B=(a+9;b+12)$

Calcular AB.

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

17 Si : $A=(x;4)$; $B=(2-x;8)$

Calcular las coordenadas del punto medio de $\overline{AB}$.

A) (1;6) B) (2;3) C) (3;3)
D) (1;7) E) (2;7)

18 Calcular el radio vector del punto medio del segmento formado al unir $A(0;-3)$ y $B(8;9)$.

A) 5 B) 4 C) 10 D) 8 E) 7

19 El punto medio de un segmento es $M(1;2)$ y uno de los extremos es $A(-2;3)$. Calcular la distancia del otro extremo al punto $(0;-2)$.

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

20 En un paralelogramo tres vértices consecutivos son $A(2;-1)$, $B(0;1)$ y $C(3;7)$. Halle la suma de coordenadas del cuarto vértice.

A) 2 B) 5 C) 12 D) 15 E) 10

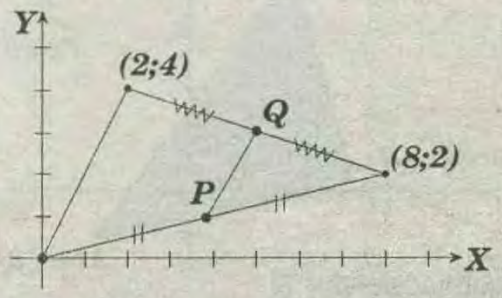
TAREA DOMICILIARIA

01 Si : $A=(-9;-2)$; $B=(-3;6)$

Calcular : AB.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

02 Calcular la distancia entre el punto «P» y «Q».



A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) 3

03 Señale la abscisa de un punto P, cuya ordenada es 3, sabiendo que dista 13 unidades del punto $(1;-2)$.

A) -12 B) -11 C) 13 D) b y c E) a y c

04 Dados los vértices consecutivos de un paralelogramo *(–2; 2), (1; –3)* y *(4; –5)*. Calcular la diferencia de las coordenadas del cuarto vértice.

A) 6 B) 8 C) 2 D) 1 E) 3

05 En u triángulo *ABC* de coordenadas *A(1;1)*, *B(3;4)* y *C(5;0)*. Hallar la longitud de la mediana $\overline{AM}$.

A) $\sqrt{10}$ *B) 7 C) 8 D) 9 E) 3*

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

I) $(-3;1) \in$ *eje «X»* *II)* $(2;1) \in IC$

II)) $(-\sqrt{5};2) \in IIC$ *IV)* $(3;0) \in$ *eje «Y»*

A) FVVF B)FFFF C) FFVF D) FVFF E)VFFV

02 ¿Qué punto está más alejado del origen?

A) $(7;24)$ *B)* $(5;12)$ *C)* $(-\sqrt{99};1)$

D) $(-20;2\sqrt{69})$ *E)* $(13;10)$

03 El radio vector del punto $Z(x-2;x)$ es $2\sqrt{5}$. Calcular *«x»*

A) 4 B)2 C)–2 D) a y c E)a y b

04 Señale la distancia entre el punto $A(-\sqrt{3};0)$ y $B(0;\sqrt{78})$.

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) $\sqrt{71}$

05 Calcular la distancia entre los puntos:

$P(x+7;x-1)$ y $Q(2+x;x-3)$

A)3 B) $\sqrt{29}$ *C)19 D)* $\sqrt{19}$ *E)3*

06 Señale la abscisa de un punto *«P»* cuya ordenada es *3*, sabiendo que dista *13u* del punto *(1; –2)*

A) –12 B) –11 C) 13 D) b y c E)a yc

07 *(3;1)* es el punto medio de un segmento donde uno de sus extremos es el punto *(1;2)*. Calcular las coordenadas del otro extremo.

A) (5;–4) B) (5;4) C) (–4;5) D)(1;1/2) E) (2;–1)

08 Calcular el perímetro del triángulo limitado por los puntos: *P(0;0); Q(25;0); R(9;12).*

A) 50 u B) 55 u C) 65 u D) 70 u E) 60 u

09 Dado un triángulo rectángulo isósceles *ABC* (recto en *B)*. Calcular la suma de las coordenadas positivas del vértice *«C»* siendo *A=(1;1)* y *B=(5;4).*

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E)14

10 Calcular la relación entre *AP* y *PB* siendo *«P»* el punto de intersección del eje *«Y»* con *AB; A=(–2;1)* y *B(3;7)*

A) $\frac{1}{2}$ *B)* $\frac{2}{3}$ *C)* $\frac{3}{4}$ *D)* $\frac{4}{5}$ *E)* $\frac{3}{2}$

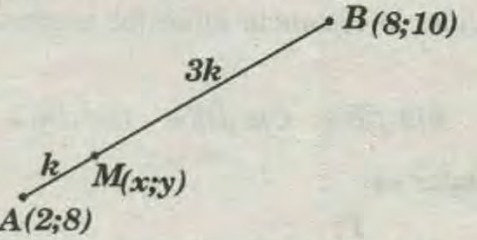
11 Los puntos medios de los lados de un triángulo son *(1;1); (3;5)* y *(–1;3)*. Calcule la suma de coordenadas del baricentro del triángulo.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12 Los vértices de un triángulo *ABC* son *A=(1;4), B=(3;–9) y C(–5;1)* determinar la longitud de la mediana relativa a lado *BC.*

A)$\sqrt{35}$ *B)*$4\sqrt{40}$ *C)*$\sqrt{68}$ *D)12 E)13*

13 De la figura; calcular: $x+y$.



A) 7 B) 9 C) 11 D) 12 E) 14

14 Calcular el área del triángulo, de vértices *A(2;9), B(–1;0), C(14;–5).*

A) 20 u² B) 40 u² C)60 u² D)80 u² E) 100 u²

15 Los puntos *(–10;–6), (–4;–6), (4;3)* determinan un triángulo; calcular su área.

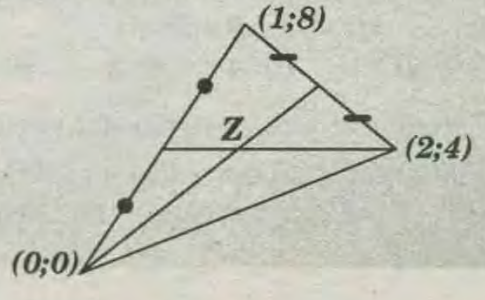
A) 54 B) 48 C) 32 D) 27 D) 18

16 Los vértices de un triángulo son *P(3;2), Q(–2;0)* y *R(a;b).* Si su baricentro es *(1/3;–2/3)*,hallar *«a–b»*.

A) 0 B) 4 C) –4 D) 2 E) –2

17 Hallar las coordenadas del punto *«Z».*

A) (1;5)
B) (2;4)
C) (1;2)
D) (–2;4)
E) (1;4)



18 Dado un segmento $\overline{AB}$ donde $A=(4;-3)$. Si su punto medio es $(0;3)$; calcular las coordenadas de B

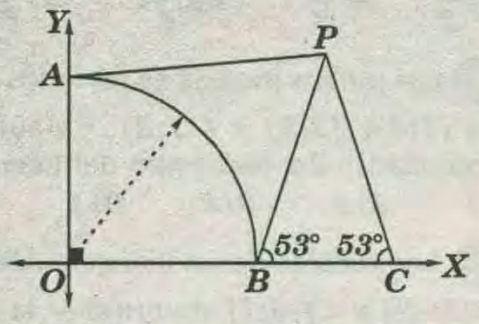
A) $(-4;9)$ B) $(9;-2)$ C) $(0;9)$ D) $(4;9)$ E) $(9;4)$

19 $A(3;-1)$ es el punto medio de un segmento donde uno de sus extremos es el punto $(1;2)$; calcular las coordenadas del otro extremo.

A) $(5;-4)$ B) $(5;4)$ C) $(-4;5)$ D) $(1;1/2)$ E) $(2;-1)$

20 Del gráfico, calcule AP, si $OB=BC=6$.

A) $4\sqrt{5}$
B) $3\sqrt{15}$
C) $\sqrt{65}$
D) $\sqrt{85}$
E) $\sqrt{95}$



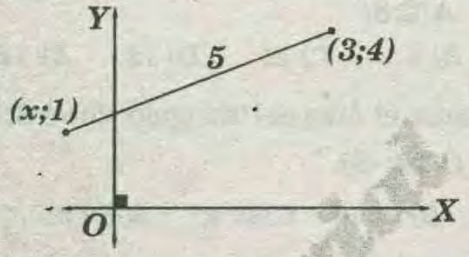
TAREA DOMICILIARIA

01 Calcular la distancia entre los puntos $A(6;9)$ y $B(8;15)$

A) $2\sqrt{5}\,u$ B) $2\sqrt{10}\,u$ C) $2\sqrt{15}\,u$ D) $4\sqrt{10}\,u$ E) $4\sqrt{5}\,u$

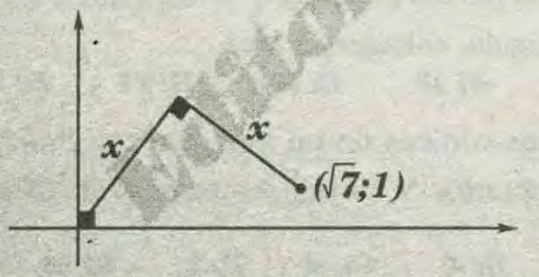
02 Calcular «x»

A) 5
B) 6
C) 7
D) -1
E) 9



03 Calcular «x»

A) 2
B) 4
C) 6
D) 7
E) 8



04 Señale la suma de las coordenadas del punto medio de un segmento cuyos extremos son los puntos: $A=(7;-2)$ y $B=(3;-8)$

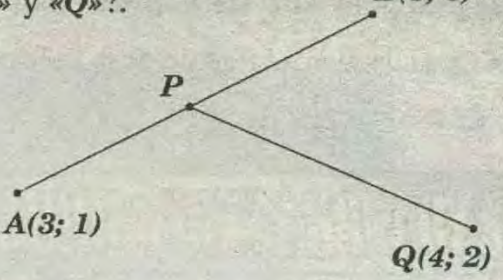
A) 0 B) 1 C) -1 D) 2 E) -2

05 Calcular el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $(4;9)$ y $(6;13)$.

A) $(5;10)$ B) $(5;11)$ C) $(11;5)$ D) $(10;5)$ E) $(5;12)$

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si en la figura: $\frac{AP}{3}=\frac{PB}{2}$; ¿cuál es la distancia entre «P» y «Q»?.



A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$ D) $\sqrt{6}$ E) $3\sqrt{2}$

02 Si los vértices de un triángulo son $A(-5;-1)$, $B(-1;9)$ y $C(9;-2)$, ¿cuál su baricentro «G»?.

A) $(2;1)$ B) $(-1;-2)$ C) $(1;6)$ D) $(1;2)$ E) $(3;6)$

03 Calcular el área de triángulo cuyos vértices son:

$A(-1;1)$, $B(1;5)$ y $C(7;-1)$.

A) 9 B) 18 C) 8 D) 36 E) 12

04 Si dos vérices de un triángulo son $A(-1;5)$ y $B(5;-1)$, además su baricentro es $G(4;3)$, ¿cuál es la suma de coordenadas del tercer vértice?.

A) 3 B) 12 C) 26 D) 4 E) 13

05 Calcular el baricentro del triángulo cuyos vértices son : $A(-3;-4)$, $B(3;-1)$ y $C(0;8)$.

A) $(-1,0)$ B) $(2;0)$ C) $(0;1)$ D) $(-2;-1)$ E) $(3;2)$

06 Calcular el área del triángulo cuyos vértices son

$A(5;-3)$, $B(0;5)$ y $C(1;1)$.

A) $5\,u^2$ B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

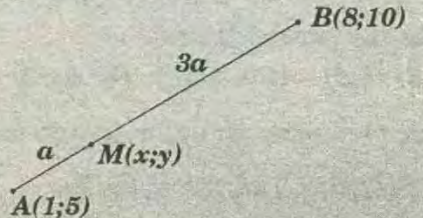
07 Señale el punto «P» que divide al segmento de extremos $A(5;7)$ y $B(-1;1)$ en la proporción de 2 a 1. («P» está más cerca de «B»).

A) $(2;3)$ B) $(-1;1)$ C) $(1;3)$ D) $(2;-3)$ E) $(-2;3)$

08 Dado el segmento $AB = A\,(-2;2)$ y $B = (3;7)$. Ubicar un punto «P» tal que $AP = 5PB$. Calcular la diferencia de las coordenadas de «P».

A) 6 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

09 De la figura ; calcular $x + y$.



A) 7 B) 11 C) 14 D) 9 E) 12

10 Calcular el área del triángulo, de vértices $A(2;9)$, $B(-1,0)$, $C(14;5)$.

A) $20\ u^2$ B) $60\ u^2$ C) $100\ u^2$ D) $40\ u^2$ E) $80\ u^2$

11 Calcular el área de un triángulo donde dos de sus vértices son $A(0;0)$, $B(6;6)$ y donde la intersección de las medianas es $(4/3;4)$.

A) $21\ u^2$ B) $23u^2$ C) $25\ u^2$ D) $22\ u^2$ E) $24\ u^2$

12 Sean los puntos $A(1,1)$ y $B(7;4)$ los extremos del segmento $\overline{AB}$. Calcular las coordenadas del punto «P» tal que $\frac{BP}{AP}=2$.

A) $(2;5)$ B) $(3;2)$ C) $(-5;-2)$ D) $(-5;-2)$ E) $(5;-2)$

13 Si los vértices de un triángulo son : $A(0;0)$, $B(-1;7)$ y $C(3;5)$, ¿cuál es la longitud de la altura relativa al lado BC?.

A) $26\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}$ D) $13\sqrt{5}$ E) $2,6\sqrt{5}$

14 Calcular la altura del triángulo ABC , relativa al lado $\overline{AB}$, si $A = (-2;5)$; $B = (-2;-8)$ y $C= (6;3)$.

A) $8\ u$ B) $7\ u$ C) $6\ u$ D) $5\ u$ E) $4\ u$

15 Calcular el área de un cuadrilátero determinado por los puntos $(4;3)$, $(-3;1)$, $(-4;2)$, $(5;-1)$.

A) 28 B) 56 C) 14 D) 20 E) 30

16 En el segmento AB, $A(-2;2)$ y $B(3;7)$ ubicar un punto P tal que $AP = 5BP$. Calcular la diferencia de las coordenadas del punto P.

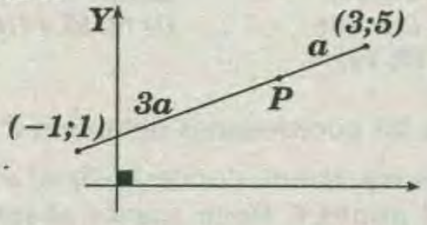
A) 6 B) 3 C) 2 D) 4 E) 5

17 Dado $A(3;2)$ y $B(13;17)$, calcular , las coordenadas de «M». Si $M \in AB$ y $AM=\frac{3}{5}AB$.

A) $(9;11)$ B) $(8;10)$ C) $(6;9)$ D) $(8;12)$ E) $(7;11)$

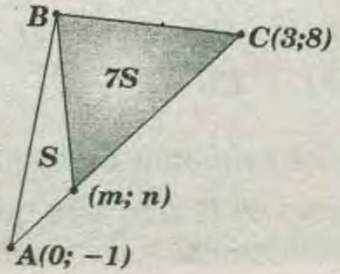
18 Calcular P.

A) $(2;2)$
B) $(3;4)$
C) $(4;2)$
D) $(2;7)$
E) $(2;4)$



19 Del gráfico , calcular : $2(m + n)$.

A) 1
B) 2
C) 4
D) 6
E) 8



20 Los vértices de un triángulo son : $A(0;1)$, $B(a;a+1)$ y $C(a;3)$. Hallar el área máxima del triángulo.

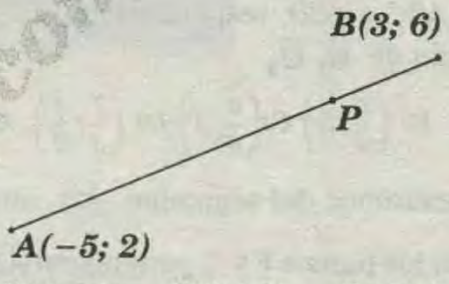
A) $7\ u^2$ B) 5 C) 3

TAREA DOMICILIARIA

01 Señale el punto «P» que divide al segmento de extremos $A(-3;0)$ y $B(-4;12)$ en la proporción de 2 a 3. («P» está más cerca de «A»).

A) $(1;3)$ B) $\left(-\frac{17}{5};\frac{24}{5}\right)$ C) $\left(-\frac{1}{5};\frac{4}{5}\right)$ D) $\left(-3;\frac{1}{5}\right)$ E) $(0;1)$

02 Del segmento mostrado calcular las coordenadas del punto «P» , si : $\frac{AP}{3}=PB$

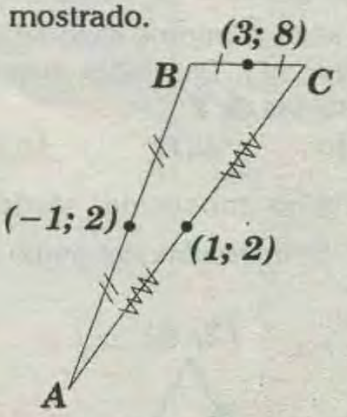


A) $(0;4)$ B) $(-1;2)$ C) $(-2;3)$ D) $(1;5)$ E) $(0;7)$

03 Hallar el baricentro de un triángulo cuyos vértices son: $A(-2;4)$, $B(0;-6)$ y $C(-7;11)$.

A) $(-3;3)$ B) $(-3;4)$ C) $(4;-3)$
D) $(1;2)$ E) $(-2;3)$

04 En la siguiente figura calcular el baricentro del triángulo ABC mostrado.



A) $(-1;3)$ B) $(1;4)$ C) $(4;-1)$ D) $(2;3)$ E) $(1;3)$

05 Calcular el área de la región triangular ABC.

Si: $A = (1,1)$; $B = (4;6)$; $C = (8;2)$

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Con centro en el punto $(5; 3)$ se dibuja una circunferencia que es tangente al eje de ordenadas en el punto A e intersecta al eje de abscisas en los puntos B y C. Calcular el área de la región triangular ABC

A) $8u^2$ B) $12u^2$ C) $14u^2$ D) $16u^2$ E) $20u^2$

02 Si: $A(-2; 0)$; $B(0; 2)$; $C(6; 2)$, se trazan las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ intersectándose en P. Calcular la suma de las distancias de P a los puntos A; B y C

A) $3\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{10}$ C) $4\sqrt{6}$ D) $8\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{34}$

03 Los vértices de un cuadrilátero son $A(-3; 4)$; $B(3; 6)$; $C(6; 2)$ y $D(0; -6)$. Se traza la diagonal $\overline{AC}$ y se determinan los baricentros G_1 y G_2 de los triángulos ABC y ACD, respectivamente. Calcular el punto medio de $\overline{G_1 G_2}$

A) $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ B) $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$ C) $\left(\frac{5}{4}; 1\right)$ D) $\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{2}\right)$ E) $\left(\frac{5}{3}; \frac{3}{2}\right)$

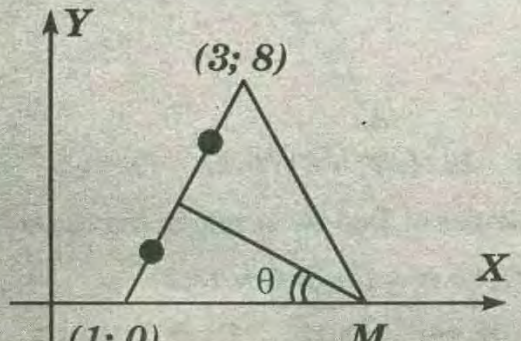
04 Los extremos del segmento $\overline{AB}$ son $A(-3; 3)$ y $B(6; 6)$. Si los puntos F y G pertenecen $\overline{AB}$ tal que: $\frac{AF}{FB}=\frac{1}{2}$ y $\frac{BG}{GA}=\frac{1}{3}$ calcular el punto medio de $\overline{FG}$

A) $\left(\frac{7}{8}; \frac{15}{8}\right)$ B) $\left(\frac{15}{8}; \frac{37}{8}\right)$ C) $\left(\frac{13}{8}; \frac{27}{8}\right)$
D) $\left(\frac{11}{4}; \frac{25}{4}\right)$ E) $\left(\frac{23}{4}; \frac{35}{4}\right)$

05 Hallar un punto P en el segmento AB, cuyas coordenadas sean números enteros consecutivos; $A(-1; 2)$ y $B(11; 11)$. Dar como respuesta la suma de las coordenadas de P

A) 8 B) 10 C) 12 D) 13 E) 15

06 En la figura mostrada, siendo $Tg\theta = 2/5$, determine las coordenadas del punto M



A) (4; 0) B) (8; 0) C) (9; 0) D) (10; 0) E) (12; 0)

07 Se tiene el cuadrado $ABCD$, de vértices $A(-1; 5)$ y $C(3; 2)$. Calcular el área del cuadrado $ABCD$

A) $12\ u^2$ B) $12{,}5\ u^2$ C) $5\ u^2$ D) $25\ u^2$ E) $10\ u^2$

08 El lado diferente de un triángulo isósceles tiene por extremos: $A(2; -1)$ y $B(-1; 2)$. Si los lados iguales miden $\sqrt{17}$ hallar el vértice opuesto al lado diferente.

A) (-2; 2) B) (2; 2) C) (3; 3) D) (-3; 3) E) (1;1)

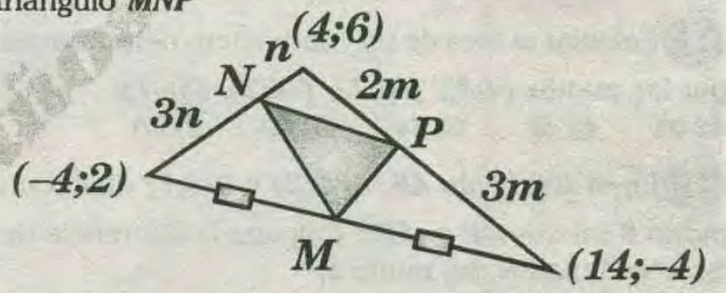
09 Dado el triángulo ABC, donde $A(1; 1)$; $B(5; 7)$ y $C(6; 8)$, calcular la mediana relativa al lado AB

A) 3 B) 6 C) 5 D) 8 E) 10

10 Dados los puntos $A(2; 2)$ y $B(5; -2)$ encontrar sobre el eje de abscisas el punto M más cercano al origen tal que el ángulo AMB sea recto. Indicar la suma de sus coordenadas

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 3

11 Determine las coordenadas del baricentro del triángulo MNP



A) (5; 3) B) (6; 3) C) (3; 6) D) (2; 5) E) (5; 2)

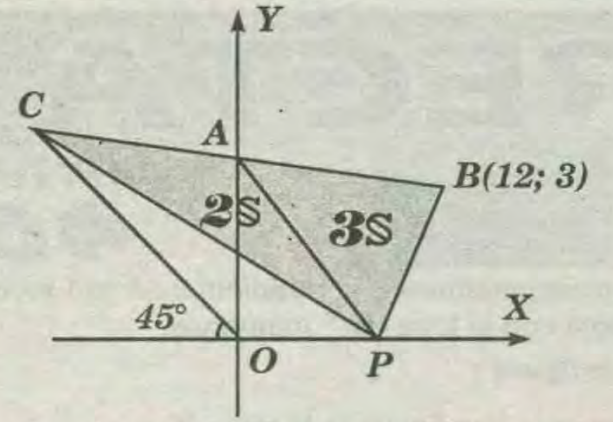
12 Dados los puntos $A(2; 5)$ y $B(14; 17)$, determine las coordenadas de los puntos que trisecan al segmento $\overline{AB}$.

A) (5; 9) y (10; 13) B) (6; 9) y (12; 15)
C) (8; 10) y (10; 13) D) (6; 9) y (10; 13)
E) (6; 9) y (12; 14)

13 Hallar las coordenadas del punto C, si ABC es un triángulo equilátero, donde $A(-3; 4)$ y $8(-3; -2)$. Además el punto C tiene mayor abscisa que el punto A

A) $(-\sqrt{3}; 1)$ B) $(-3+\sqrt{3}; 2)$ C) $(-3+3\sqrt{3}; 1)$
D) $(1; \sqrt{3})$ E) $(-1; -\sqrt{3})$

14 En el esquema mostrado, determine las coordenadas de P, si se sabe que el trayecto $\overline{APB}$ es el menor posible



A) (4; 0) *B) (6; 0)* *C) (8; 0)* *D) (7; 0)* *E) (9; 0)*

15 Los puntos $P(7; 3)$ y $Q(5; 1)$ son los puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo *ABC*. Siendo el baricentro del triángulo el punto $G(5; 3)$, determine la suma de los cuadrados de las medianas del triángulo *ABC*

A) 36 *B) 72* *C) 81* *D) 120* *E) 144*

16 Determine las coordenadas de un punto *P* que equidiste de los puntos $A(2; 7)$; $B(-4; 3)$ y $C(6; 3)$

A)(1; 2) *B)(2; –1)* *C)(1/2; 1)* *D) (2; 1)* *E) (1; 1/2)*

17 Dados los puntos $P(3; -5)$ y $R(-3; 1)$, halle las coordenadas de un punto *Q* de modo que los tres sean colineales y además el área del triángulo *POQ* sea de $12\ u^2$ (*O* es el origen de coordenadas)

A) (–3; 5) y (15; –17) *B) (–8; 7) y (15; –15)*
C) (–9; 7) y (10; –13) *D) (–3; 5) y (12; –15)*
E) (–9; 7) y (15; –17)

18 Se tiene el triángulo *ABC* donde $A(3; 2)$, $B(7; 10)$ y $C(2; 8)$. Además *M* es un punto del lado *AB* de tal manera que las áreas de los triángulos *ACM* y *CMB* están en la relación de *1* a *3*. Calcular $\overline{CM}$

A) $\sqrt{20}$ *B)* $\sqrt{17}$ *C)* $\sqrt{15}$ *D)* $\sqrt{21}$ *E)* $\sqrt{12}$

19 Determinar los valores positivos de *p* y *q* para que las dos ecuaciones:

$px-7y+18=0 \ \wedge \ 8x-qy+9p=0$ representen la misma recta

A) $p = 4; q = 14$ *B)* $P = 4; q = 2$ *C)* $P = 6; q = 8$
D) $P = 6; q = 4$ *E)* $p=2; q=12$

20 Calcular el área del círculo cuyo centro es $(-4;-5)$ tangente a la recta:

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{-3}=1$$

A) $4\pi u^2$ *B)* $8\pi u^2$ *D)* $16\pi u^2$ *C)* $10\pi u^2$ *E)* $25\pi u^2$

PRIMERA PRACTICA					PLANO CARTESIANO				
1) D	2)D	3) D	4) E	5) A	6) A	7) B	8) C	9) C	10) C
11) B	12) C	13) A	14) B	15)C	16) D	17) E	18) A	19) C	20) C
01) D	02) A	03) E	04)A	05) A					

SEGUNDA PRACTICA					PLANO CARTESIANO				
1) *	2)*	3) *	4) *	5) *	6) D	7) A	8) E	9) C	10) B
11) D	12) C	13) D	14) C	15)D	16) *	17) *	18) A	19) A	20) D
01) B	02) D	03) B	04)A	05) B					

TERCERA PRACTICA					PLANO CARTESIANO				
1) D	2)B	3) C	4) D	5) C	6) A	7) C	8) B	9) C	10) E
11) B	12) A	13) D	14) D	15)A	16) D	17) D	18) A	19) C	20) *
01) C	02) B	03) C	04)C	05) B					

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA									
1)B	2)E	3)A	4)B	5)E	6)E	7)B	8)C	9)C	10)A
11)E	12)D	13)C	14)C	15)E	16)A	17)E	18)A	19)A	20)D

COORDENADAS POLARES

Las coordenadas polares en el plano, debe decirse que dichas coordenadas fueron inventadas en *1691* por *Jacobo Bernoulli (1654-1705)*, pues antes se habían usado para el estudio de las espirales solamente. El apelativo Analítica es posterior a Descartes. Aparece en la edición que de las obras de Newton hizo *S. Horsley* en *1779*, con el nombre de *Geometría Analytica, sive specimina artis analyticae*, es decir, Geometría Analítica, o especímenes del arte analítico.

Débese al marqués de L´Hospital la introducción de la palabra origen, y son de *G. G. Leibniz (1646-1716)* las palabras abscisa y ordenada (en el sentido que se les da actualmente) y coordenadas. La palabra parámetro, aplicada a ecuaciones paramétricas, fue usada por este mismo autor. Arquímedes ya usaba las palabras eje, vértice y diámetro. Con esta última indicaba los ejes de simetría de la elipse y el de la parábola, como recta dada. El mismo Arquímedes usaba también la expresión diámetros conjugados, pero la teoría relacionada con ellos es, tal vez, de fecha anterior.

La palabra asíntota aparece usada por *Autolico* (cerca del año *320* a. de J. C.), pero sólo llega a ser un término propiamente técnico con Apolonio, el cual consideraba como una recta cuya distancia a la curva disminuye constantemente. El primero que consideró las asíntotas como rectas tangentes cuyo punto de tangencia se halla en el infinito, fue *G. Désargues (1593-1661)*.

Por último, débese a Képler el haber introducido la palabra foco que, en el caso de la elipse, le fue sugerida por la observación de que los rayos luminosos o caloríficos que parten de uno de los focos de esa curva, son reflejados por ella en tal forma que pasan por el otro foco.

LA RECTA

CAPITULO 46

OBJETIVOS :

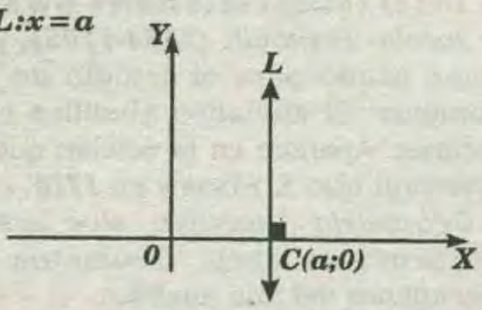
Conocer la definición , propiedades y aplicaciones de la recta escalar como vectorial , así como saber resolver problemas contextualizados con ella.

LINEA RECTA

Es un conjunto de puntos de modo que si tomamos dos puntos diferentes cualesquiera la pendiente siempre será igual.

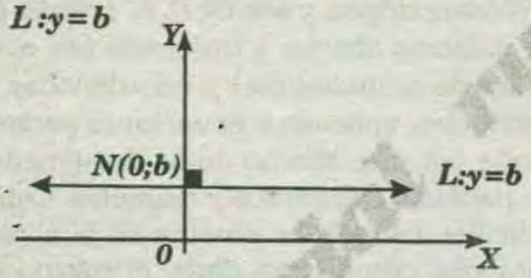
Si una recta L es perpendicular al eje X en el punto

$C(a;0) \Rightarrow L: x=a$



Si una recta L es perpendicular al eje Y en el punto

$N(0;b) \Rightarrow L: y=b$

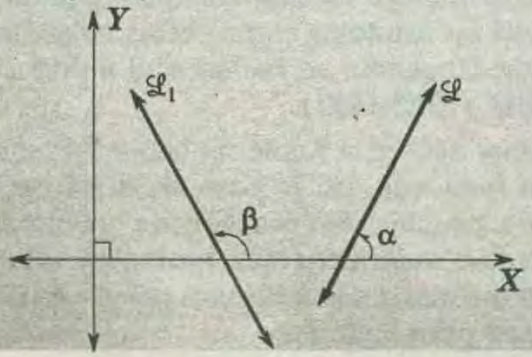


Nota :

* La ecuación del eje X es : $y=0$
* La ecuación del eje Y es : $x=0$

PENDIENTE DE UNA RECTA

Se denomina pendiente de una recta a la tangente trigonométrica de la medida del ángulo formado por la recta y el eje X .



Convencionalmente la pendiente de una recta se denota con la letra "m" minúscula.

En la figura :

* Sea m la pendiente de la recta $\mathscr{L}$.

Luego: $\boxed{m = \tan\alpha}$

Si $\alpha < 90^\circ$; entonces m es positiva.

* Sea: m_1 la pendiente de la recta $\mathscr{L}_1$.

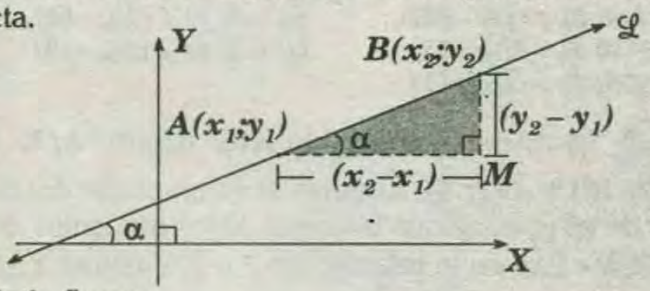
Luego: $\boxed{m_1 = \tan\beta}$

Si $\beta > 90^\circ$; entonces m_1 es negativa

* Las rectas horizontales tienen una inclinación de 0° y su pendiente es cero.
* Las rectas verticales tienen una inclinación de 90° y no poseen pendiente.

CÁLCULO DE LA PENDIENTE :

La pendiente de una recta puede ser calculado conociendo las coordenadas de dos puntos de dicha recta.



* En la figura:

Sea la recta $\mathscr{L}$ cuya pendiente es m.

Luego: $m = Tan\alpha$

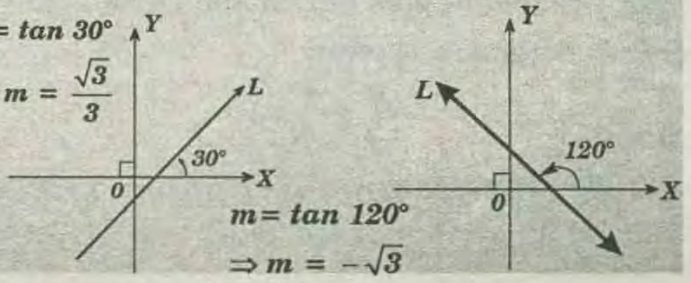
* En el $\triangle AMB$: $Tan\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

* Entonces: $\boxed{m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

EJERCICIO 1:

$m = \tan 30^\circ$

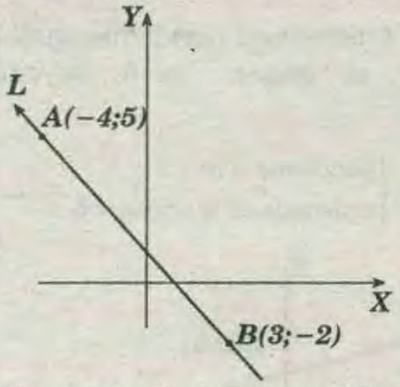
$\Rightarrow m = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$



EJERCICIO 2 :

Calcular la pendiente de la recta que pasa por las puntas $A(-4;5)$ y $B(3;-2)$

RESOLUCIÓN :



* Para el cálculo de la pendiente de la recta L, aplicamos: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \dfrac{5+2}{-4-3}$

* Luego: $m = -1$

EJERCICIO 3 :

Calcular la pendiente de la recta "L" que pasa por los puntos $P_1(2;-3)$ y $P_2(5;6)$.

RESOLUCIÓN :

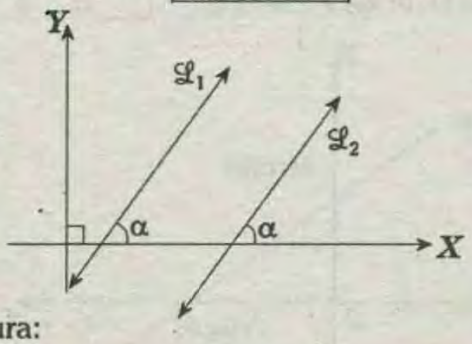
$$m = \frac{6-(-3)}{5-2} = \frac{9}{3} = 3$$

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

1) Dos rectas paralelas poseen la misma inclinación y si no son verticales , se pueden decir que tienen la misma pendiente:

$L_1 // L_2$, entonces:

$$\boxed{m_{L_1} = m_{L_2}}$$

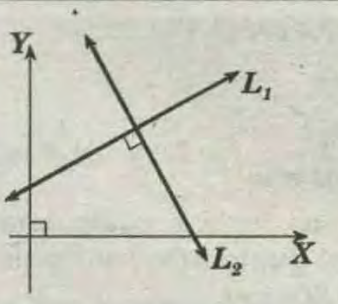


En la figura:

Si: $L_1 // L_2 \rightarrow m_1 = m_2$

m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas L_1 y L_2 respectivamente.

2) En el caso de que dos rectas sean perpendiculares, si ninguna de ellas es vertical, se cumple que; el producto de sus pendientes es -1.

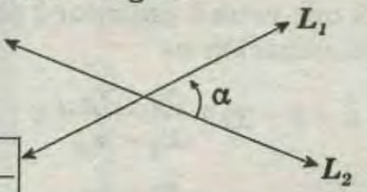


Si $L_1 \perp L_2$, entonces:

$$\boxed{m_{L_1} \times m_{L_2} = -1}$$

CÁLCULO DEL ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Conociendo las pendientes de las rectas que forman el ángulo puede calcular dicho ángulo.



$$\boxed{Tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}}$$

m_1 es la pendiente de la recta final (L_1) y m_2 es la pendiente de la recta inicial (L_2). Denominamos a L_1 ***Recta Final***, porque de acuerdo con la figura el lado final del ángulo está en L_1 , lo mismo sucede con L_2.

EJERCICIO 4 :

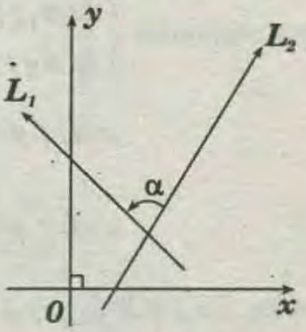
Calcular el ángulo agudo formado por dos rectas cuyas pendientes son : -2 y 3

RESOLUCIÓN :

* Sea :

$m_1 = -2$ y $m_2 = 3$

* Entonces:



$$Tan\alpha = \frac{-2-3}{1+(-2)(3)} \Rightarrow Tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$$

ECUACIONES DE UNA RECTA

Una recta L cualquiera queda definida o determinada si se conocen 2 datos : 2 puntos ; o un punto y una pendiente.

A) FORMA PUNTO PENDIENTE :

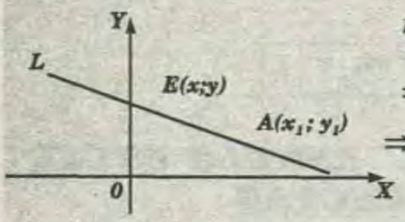
Si una recta L pasa por el punto $A(x_1; y_1)$ y su pendiente es m su ecuación es $L: y - y_1 = m(x - x_1)$

DEMOSTRACIÓN :

Datos originales

$$\begin{cases} A(x_1;y_1) \\ \text{pendiente} = 'm' \end{cases} \Rightarrow L: y - y_1 = m(x - x_1)$$

Dibujaremos una recta L cualquiera y sobre ella dibujaremos el punto $A(x_1; y_1)$ y un punto en la forma general $E(x; y)$.



$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\Rightarrow m(x - x_1) = y - y_1$$

$$\Rightarrow \boxed{L: y - y_1 = m(x - x_1)}$$

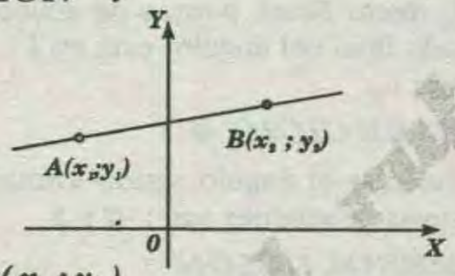
B) RECTA QUE PASA POR 2 PUNTOS :

Si una recta L pasa por 2 puntos $A(x_1;y_1)$ y $B(x_2; y_2)$ su ecuación es

$$L: y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$ o también

$$L: y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2)$$

DEMOSTRACIÓN :



Datos originales $\begin{cases} A(x_1;y_1) \\ A(x_2;y_2) \end{cases}$

$$\Rightarrow L: y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow L: y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2)$$

De $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$ Hallamos la pendiente :

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Conocemos ahora la pendiente de L y tomaremos un punto cualquiera o A o B ; nosotros tomaremos el punto B.

Ahora tenemos 2 datos :

$$B(x_2;y_2) \text{ y } m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

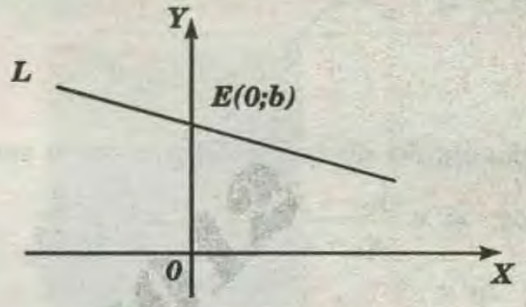
Como tenemos un punto y la pendiente podremos apoyarnos en la primera fórmula : $y - y_1 = m(x - x_1)$

Reemplazando : $\boxed{y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2)}$

C) ECUACION DE UNA RECTA CONOCIENDO SU PENDIENTE Y SU ORDENADA AL ORIGEN :

Si una recta L tiene una pendiente igual a m y su ordenada en el origen es b, su ecuación es $L: y = mx + b$

$$\text{Demostración : } \begin{cases} \text{pendiente} = m \\ \text{ordenada en el origen} = b \end{cases} \Rightarrow L: y = mx + b$$



Conocemos ahora el punto $E(0;b)$ y la pendiente m

Como tenemos un punto y la pendiente podremos apoyamos en la primera fórmula: $y - y_1 = m(x - x_1)$

* Reemplazando:

$$\Rightarrow y - b = m(x - 0) \Rightarrow y - b = mx \Rightarrow y = mx + b$$

D) FORMA SIMÉTRICA :

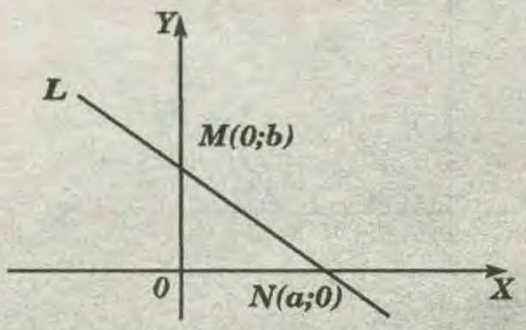
Si una recta L corta al eje X en el punto $N(a;0)$ y corta al eje Y en el punto $M(0;b)$ su ecuación es

$$L: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

DEMOSTRACIÓN:

Datos originales

$$\begin{cases} \text{corta en el eje } X: N(a;0) \\ \text{corta en el eje } Y: N(0;b) \end{cases} \Rightarrow \boxed{L: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$



Conocemos ahora 2 puntos : $N(a;0)$ y $M(0;b)$

$\Rightarrow$ Podemos apoyarmos en la primera fórmula , en la segunda o en la tercera.

Nosotros nos apoyaremos en la tercera fórmula , para lo cual hallaremos la pendiente : $m = \frac{-b}{a}$

$$\Rightarrow L: y=mx+b$$

* Reemplazando :

$$L: y=\frac{-b}{a}x+b \Rightarrow ay=-bx+ab \Rightarrow bx+ay=ab$$

$$\Rightarrow \frac{ax}{ab}+\frac{ay}{ab}=\frac{ab}{ab} \Rightarrow \boxed{L: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1} \qquad L.q.q.d$$

E) FORMA GENERAL DE UNA RECTA :

La ecuación de cualquier recta se puede escribir en forma lineal $\boxed{L: Ax+By+C=0}$

Analicemos los coeficientes A ; B ; C:

I) Si $A\neq 0; B\neq 0; C\neq 0: L: Ax+By+C=0$; esta ecuación la incribimos así: $y = mx+b$

$$L: By=-Ax-C \Rightarrow y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{m=-\frac{A}{B}} \wedge \boxed{b=-\frac{C}{B}}$$

II) Si $A\neq 0; B\neq 0; C\neq 0: L: Ax+By=0$;está ecuación la incribimos así : $y = mx+b$

$$L: By=-Ax \Rightarrow y=-\frac{A}{B}x \Rightarrow \boxed{m=-\frac{A}{B}} \wedge \boxed{b=0}$$

Es decir la recta L pasa por el origen de coordenadas siempre que esta recta L no tenga término independiente .

III) Si $A\neq 0; B=0; C\neq 0: L: Ax+C=0$

$$L: x=-\frac{C}{A} \Rightarrow L \text{ es } \perp \text{al eje } X$$

IV) Si $A=0; B\neq 0; C\neq 0: L: By+C=0$

$$L: y=-\frac{C}{B} \Rightarrow L \text{ es } \perp \text{al eje } Y$$

RELACIONES ENTRE DOS RECTAS COPLANARES

Supongamos que tenemos dos rectas cualesquiera:

$L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ y $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$

Estas *2* rectas pueden tomar diferentes posiciones relativas , tales como :

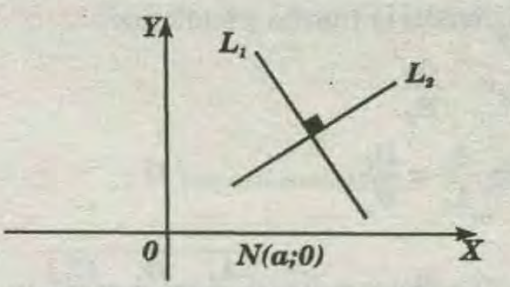
A) Rectas perpendiculares *B)* Rectas paralelas

C) Rectas coincidentes *D)* Rectas oblícuas

Analizamos cada uno de estos casos.

A) RECTAS PERPENDICULARES :

Si *2* rectas son perpendiculares sus pendientes son la una igual a la inversa negativa de la otra.



$$\boxed{m_1=-\frac{1}{m_2}}$$

Si ambas están en la forma general :

$$L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$$

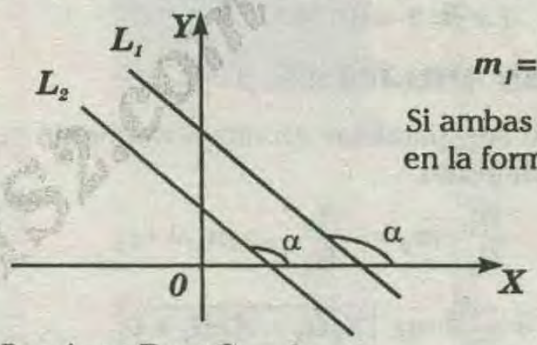
$$L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$$

$$\Rightarrow m_1m_2=-1$$

$$\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right)=-1 \Rightarrow \boxed{A_1A_2+B_1B_2=0}$$

B)RECTAS PARALELAS :

Si *2* rectas son paralelas sus pendientes son iguales.



$$m_1=m_2$$

Si ambas rectas están en la forma general :

$$L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$$

$$L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$$

$$\Rightarrow m_1=m_2 \Rightarrow \frac{-A_1}{B_1}=-\frac{A_2}{B_2} \Rightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}}$$

Es decir los coeficientes de x y de y son proporcionales.

C) RECTAS COINCIDENTES :

Dos rectas son coincidentes si tienen por lo menos un punto común y la misma pendiente.

Es decir se trata de la misma recta o están superpuestas.

$$\left.\begin{aligned} L_1: A_1x+B_1y+C_1=0 \\ L_2: A_2x+B_2y+C_2=0 \end{aligned}\right\} \text{Rectas coincidentes}$$

I) Como L_1 y L_2 deben tener por lo menos un punto en común :

$$L_1: A_1x+B_1y+C_1=0 \Rightarrow \text{haciendo } y=0 \Rightarrow x=\frac{-C_1}{A_1}$$

$$L_2: A_2x+B_2y+C_2=0 \Rightarrow \text{haciendo } y=0 \Rightarrow x=\frac{-C_2}{A_2}$$

$$\Rightarrow \frac{-C_1}{A_1}=\frac{-C_2}{A_2} \Leftrightarrow \frac{C_1}{C_2}=\frac{A_1}{A_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

II) Como L_1 y L_2 tienen la misma pendiente :

$$m_1=-\frac{A_1}{B_1};\ m_2=-\frac{A_2}{B_2}$$

$$\Rightarrow \frac{-A_1}{B_1}=\frac{-A_2}{B_2}\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

* comparando *(I)* y *(II)* resulta : $\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}}$

EJEMPLO:

$L_1: x+2y-3=0$ y $L_2: 3x+6y-9=0$ son coincidentes es decir son iguales , por lo tanto debe cumplir la propiedad que hemos deducido :

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{-3}{-9}$$

Si son coincidentes , $L_1=L_2$ lo que no significa que podemos igualar los coeficientes :

$$1\neq 3;\ 2\neq 6;\ -3\neq -9\ .$$

D) RECTAS OBLÍCUAS :

Si 2 rectas no son paralelas en algún momento se cortarán en un punto.

$$m_1=-\frac{A_1}{B_1};m_2=-\frac{A_2}{B_2}\ \Rightarrow m_1\neq m_2$$

$$\frac{-A_1}{B_1}\neq\frac{-A_2}{B_2}\Leftrightarrow \boxed{A_1B_2-A_2B_1\neq 0}$$

EJEMPLO:

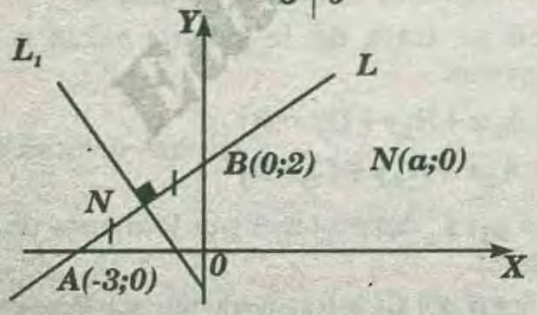
Se tiene la recta $L: 2x-3y+6=0$ que corta a los ejes X e Y en los puntos A y B respectivamente.

Una recta L_1 pasa por el punto medio de $\overline{AB}$ y es perpendicular a la recta L. Hallar la ecuación de L_1.

RESOLUCION :

$L: 2x-3y+6=0$

x	y
0	2
-3	0



Como $N(a;b)$ es punto medio de $\overline{AB}$:

$$a=\frac{-3+0}{2}=\frac{-3}{2}\ ;\ b=\frac{0+2}{2}=1\Rightarrow N(-3/2;1)$$

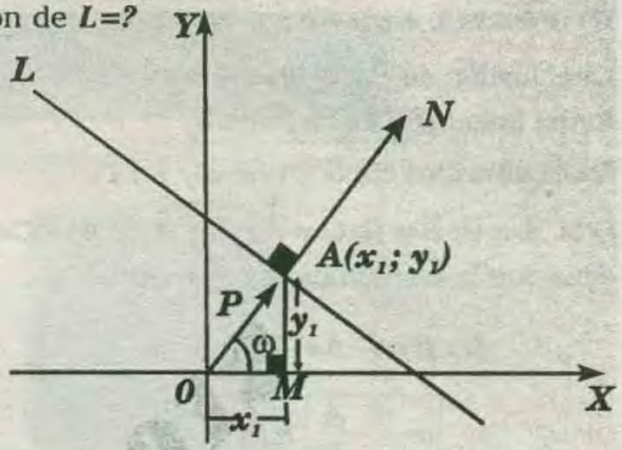
* Como $L_1\perp L\Rightarrow m_{L_1}m_L=-1\Rightarrow m_1\left(\frac{2}{3}\right)=-1\Rightarrow m_1=\frac{-3}{2}$

La ecuación de L_1: $y-y_1=m(x-x_1)$

FORMA NORMAL DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Es la ecuación de una recta L , en función de su normal y del ángulo ω de la normal medido en sentido antihorario.

Ecuación de L=?



$P=|\overrightarrow{OA}|\Rightarrow P=\#$ positivo

$0°\leq\omega<360°\ \wedge\ L\perp N$

* Ecuación de L :

$L: y-y_1=m(x-x_1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$

* En el $\triangle OMA$:

$$Cos\omega=\frac{x_1}{P}\Rightarrow PCos\omega=x_1\ldots\ldots\ldots(II)$$

$$Sen\omega=\frac{y_1}{P}\Rightarrow PSen\omega=y_1\ldots\ldots\ldots(III)$$

* como $L\perp N\Rightarrow m_Lm_N=-1$

$$m(Tan\omega)=-1\Rightarrow m=-\frac{1}{Tan\omega}=-Cot\omega$$

$$\Rightarrow m=-\frac{Cos\omega}{Sen\omega}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(IV)$$

* De *(II)*, *(III)*, *(IV)* en *(I)*:

$$L: y-PSen\omega=-\frac{Cos\omega}{Sen\omega}(x-PCos\omega)$$

$$L: ySen\omega-PSen^2\omega=xCos\omega+PCos^2\omega$$

$$L: xCos\omega+ySen\omega-PSen^2\omega-pCos^2\omega=0$$

$$L: xCos\omega+ySen\omega-P(Sen^2\omega+Cos^2\omega)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{L: xCos\omega+ySen\omega-P=0}$$

NOTA :

Si una recta L pasa por el origen; $P=0$. Entonces la variación del ángulo ω será : $0°\leq\omega<180°$

REDUCCIÓN A LA FORMA NORMAL

Vamos a deducir una fórmula que nos permita pasar una recta L de la forma general a la forma normal.

$$\overbrace{L: Ax+By+C=0}^{\text{FORMA GENERAL}} \Rightarrow \overbrace{L: xCos\omega+ySen\omega-P=0}^{\text{FORMA GENERAL}}$$

Por coincidencia : $\frac{Cos\omega}{A}=\frac{Sen\omega}{B}=\frac{-P}{C}=K$

k= constante

$Cos\ \omega = kA$ .....(I)

$Sen\ \omega = kB$ .....(II)

$-P = kC$ .....(III)

* (I) y (II) al cuadrado : $Cos^2\omega=k^2A^2$

$Sen^2\ \omega=k^2B^2$

* Sumando :

$$Sen^2\omega + Cos^2\omega=k^2A+k^2B^2 \Rightarrow 1= k^2(A^2+B^2)$$

$$\frac{1}{A^2+B^2}=k^2 \Rightarrow \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=k$$

* En (I) : $cos w=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$

* En (II) : $sen w=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$

* En (III) : $-p=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$

$$L: \frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{L: \frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0}$$

Signo del radical :

i) Si $C \neq 0$: El radical y C son de signo contrario.

ii) Si $C=0$: El radical y B son de igual signo.

iii) Si $C=0$; $B=0$: El radical y A son de igual signo.

Explicación del signo del radical:

*1)*Nos fijamos en la ecuación *(III)*; k y C deben ser de signos diferentes por que P es un valor positivo.

*2)*Nos fijamos en la ecuación *(II)*: k y B deben ser de igual signo.Como $C=0$, la recta L pasa por el origen , $P=0$ entonces $0° \leq \omega < 180°$; entonces $Sen\omega$ es positivo ya que solo se considera el *I* y *II* cuadrante.

3) Nos fijamos en la ecuación *(I)*: k y A deben ser de igual signo. Como $B=C=0$ en *(II)* $Sen\omega=0$

$\Rightarrow \omega = 0°$ y en *(I)*: $Cos\omega=1$

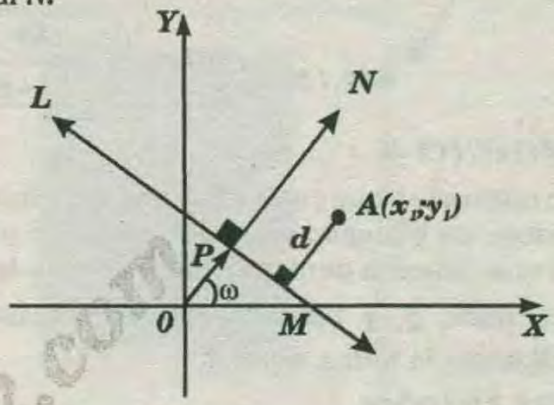
DISTANCIA DE UNA RECTA A UN PUNTO

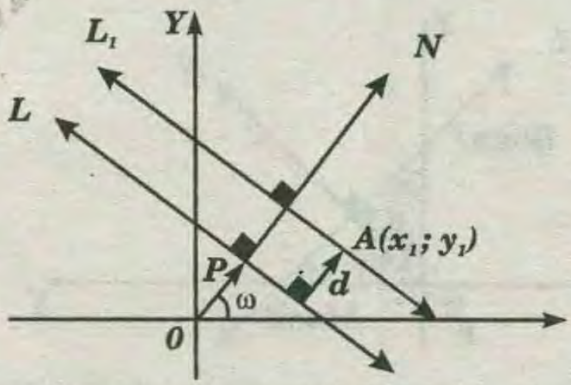
a) Distancia dirigida de una recta a un punto:

Queremos deducir una fórmula que nos permita hallar la distancia perpendicular de la recta L al punto A. d=?

Datos conocidos $\begin{cases} L: Ax+By+C=0 \\ A(x_1;y_1) \end{cases}$

Para hallar d trazaremos por $A(x_1;y_1)$ una recta L_1 que es paralela a L y perpendicular a la recta normal N.





Ecuación de $L: xCos\ \omega + ySen\ \omega - P = 0$

Ecuación de L_1: $xCos\omega + ySen\omega -(P+d) = 0$

L_1: $xCos\ \omega + ySen\ \omega -P - d = 0$

$$A(x_1;y_1) \in L_1 : x_1Cos\omega+y_1Sen\omega-P-d=0$$

* Ahora reemplazaremos en *(I)* los valores hallados para $Cos\omega$; $Sen\omega$ y P en la demostración anterior:

$$d=\frac{Ax_1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By_1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}}$$

El signo del radical es igual a la demostración anterior Si la recta L no pasa por el origen:

d es positiva. si el origen y el punto A están en lados opuestos de la recta L.

d es negativa , si el origen y el punto A están del

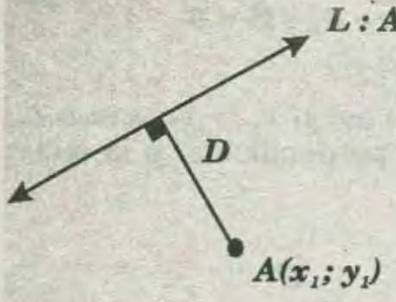
LIBROS GRATIS2.com

mismo lado de la recta L. Si la recta L pasa por el origen:

d es positiva , si el punto A está arriba de la recta L.

d es negativa , si el punto A está debajo de la recta L.

b) Distancia no dirigida de una recta a un punto:

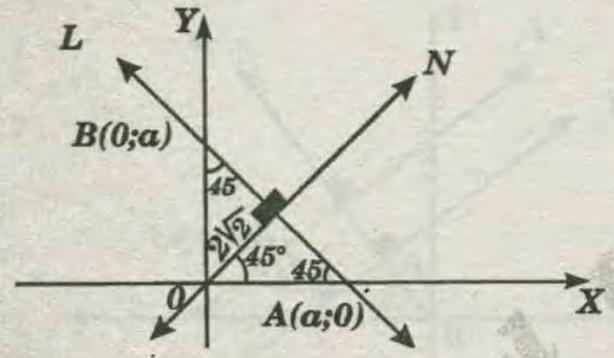


$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

EJERCICIO 5 :

Se tiene una recta L que corta a los semiejes positivos, formándose un triángulo isósceles. Desde el origen se traza una distancia perpendicular a la recta L; está distancia mide $2\sqrt{2}$ unidades. Hallar la ecuación de L utilizando la forma normal.

RESOLUCION :



De la figura se observa : $w=45°\ ;\ p=2\sqrt{2}$ Utilizando la forma normal para hallar la ecuación de L:

$L: x\cos w + y\operatorname{sen} w - p = 0 \Rightarrow L: x\cos 45° + y\operatorname{sen} 45° - 2\sqrt{2}=0$

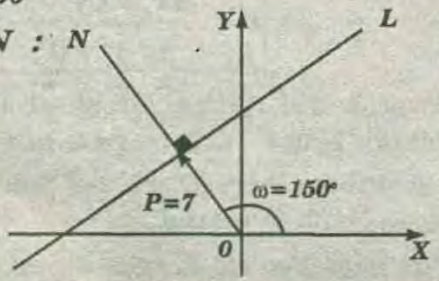
$$\Rightarrow L: x\frac{\sqrt{2}}{2}+y\frac{\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}=0 \Rightarrow L: x\sqrt{2}+y\sqrt{2}-4\sqrt{2}=0$$

$$\Rightarrow L: 2x+2y-8=0 \Rightarrow \boxed{L: x+y-4=0}$$

EJERCICIO 6 :

Hallar la ecuación de una recta L que está a 7 unidades del origen , si su normal tiene un ángulo de inclinación de $150°$

RESOLUCIÓN :



Utilizando la forma normal para hallar la ecuación de L: $L: x\cos\omega + y\operatorname{Sen}\omega - P = 0$

$$L: x\cos 150° + y\operatorname{Sen} 150° - 7 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Como: $\operatorname{sen}150° = \operatorname{sen}(180° - 30°) = \operatorname{sen}30° = \frac{1}{2}$

* Como: $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

* En $(I): L: -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-7=0 \Rightarrow \boxed{L: \sqrt{3}x-y+14=0}$

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

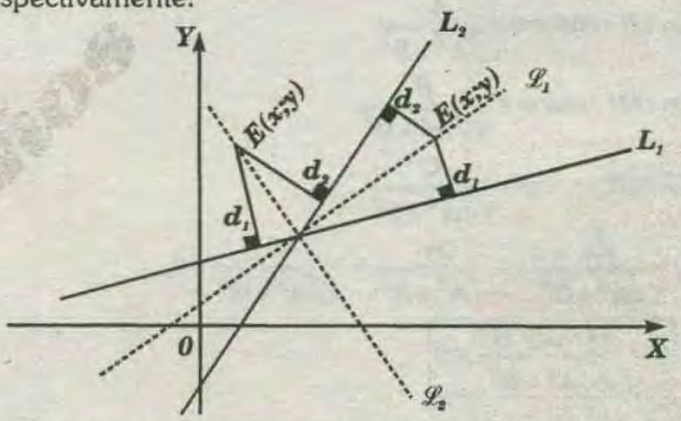
Se tiene 2 rectas cuyas pendientes son diferentes por lo tanto se cortan :

$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Hemos trazado las bisectrices de los ángulos formados por L_1 y L_2.

Sea $E(x;y)$ un punto cualquiera sobre alguna de las bisectrices $\mathscr{L}_1$ ó $\mathscr{L}_2$ y sea d_1 y d_2 la distancia perpendicular del punto E a las rectas L_1 y L_2 respectivamente.



Por definición las distancias d_1 y d_2 son numéricamente iguales , por lo tanto : $|d_1| = |d_2|$

Aplicando distancia no dirigida de un punto a una recta :

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

Con esta fórmula podemos hallar las ecuaciones de las bisectrices. $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$,

HALLANDO LA ECUACIÓN DE $\mathscr{L}_1$: En este caso E y el origen se encuentran en lados opuestos de L_1 por lo tanto d_1 es positiva. Para d_2 E y el origen están en lados opuestos de L_2, así d_2 es también positiva, por lo tanto tendremos : $d_1 = d_2$.

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

HALLANDO LA ECUACIÓN DE $\mathscr{L}_2$:

En este caso E y el origen se encuentran en lados opuestos de L_1 por lo tanto $d_1$es positiva. Para d_2 E y el origen están del mismo lado de L_2 así d_2 es negativa, por lo tanto tendremos : $d_1=d_2$.

$$\boxed{\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2}}}$$

EJERCICIO 7 :

Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas L_1.

$L_1: 3x-3y+2=0$ y $L_2: x+y-2=0$.

RESOLUCIÓN :

* Como nos piden las ecuaciones de las 2 bisectrices usaremos las distancias no dirigidas de un punto a una recta:

$$\frac{|3x-3y+2|}{\sqrt{9}+9}=\frac{|x+y+-2|}{\sqrt{1}+1}$$

$$|3x-3y+2| = 3|x+y-2|$$

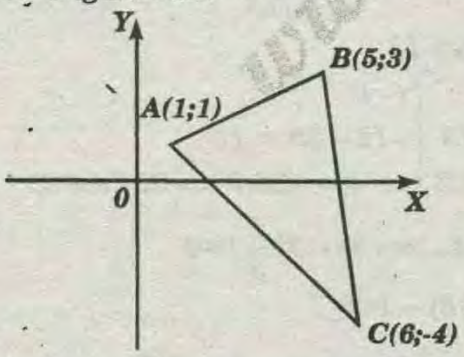
$(+)$ $(+)$

$(-)$

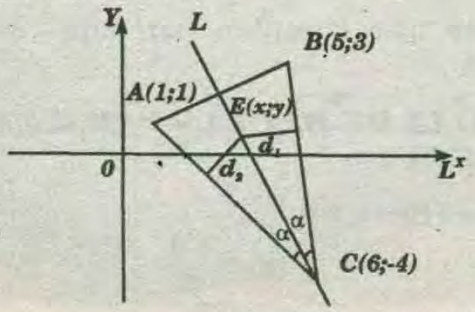
$(+)$ $(+)$	$(-)$ $(+)$
$3x-3y+2=x+y-2$	$-3x+3y-2=3(x+y-2)$
$\Rightarrow 2x-4y+4=0$	$\Rightarrow -3x+3y-2=3x+3y-6$
$\Rightarrow x-2y+2=0$	$\Rightarrow 0=6x-4$
	$\frac{2}{3}=x \Rightarrow$ es una recta vertical

EJERCICIO 8 :

Dada la siguiente figura , hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo ACB.



RESOLUCIÓN :



Como nos piden la ecuación de una bisectriz usaremos distancias dirigidas del punto $E(x\ ;\ y)$ a las rectas $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$L: -d_1=+d_2$ .....(I)

* $d_1=d(E;\overrightarrow{BC})$ $\wedge$ * $d_2=d(E;\overrightarrow{AC})$

* HALLANDO LA ECUACIÓN DE $\overrightarrow{BC}$:

Datos: $B(5;3)$; $C(6;-4)$; $m=-7$

Ecuación de $\overrightarrow{BC}$: $y-3=-7(x-5)$

Ecuación de $\overrightarrow{BC}$: $7x+y-38=0$

* HALLANDO LA ECUACIÓN DE $\overrightarrow{AC}$:

Datos: $A(1;1)$; $C(6;-4)$; $m=-1$

Ecuación de: $\overrightarrow{AC}$: $y-1=-(x-1)$

Ecuación de $\overrightarrow{AC}$: $x+y-2=0$

$$\Rightarrow d_1 = d(E;\overrightarrow{BC})=\frac{7x+y-38}{\sqrt{49+1}}=\frac{7x+y-38}{5\sqrt{2}} \text{.....(II)}$$

$$\Rightarrow d_2 = d(E;\overrightarrow{AC}) = \frac{x+y-2}{\sqrt{1+1}}=\frac{x+y-2}{\sqrt{2}} \text{.....(III)}$$

$\Rightarrow$ (II) y (III) en (I) :

$$\frac{-(7x+y-38)}{5\sqrt{2}}=\frac{x+y-2}{\sqrt{2}} \Rightarrow -7x-y+38=5(x+y-2)$$

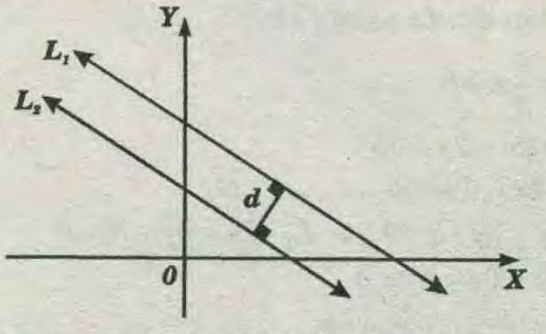
$$\Rightarrow \boxed{L: 2x+y-8=0}$$

DISTANCIA ENTRE RECTAS PARALELAS

En la siguiente figura se tienen dos rectas paralelas :

$$L_1 : Ax+By+C_1=0 \Rightarrow m_1=\frac{-A}{B}$$

$$L_2 : Ax+By+C_2=0 \Rightarrow m_2=\frac{-A}{B}$$



* Queremos encontrar una fórmula que nos permita hallar la distancia de L_1 a L_2, es decir :

$$d = d(L_1;L_2) = ?$$

* Para hallar la $d(L_1;L_2)$, procederemos así :

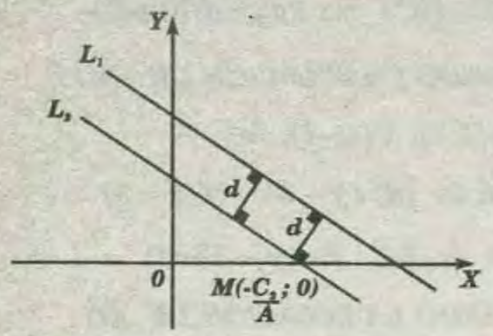
* Hallaremos donde L_2 corta al eje X:

$L_2 : Ax + By + C_2 = 0$

$y=0 \Rightarrow Ax + B(0)+C_2 = 0$

$x=-\frac{C_2}{A} \Rightarrow M\left(-\frac{C_2}{A};0\right)$

Observaremos la figura :



$d = d(M;L_1) = d(L_1;L_2)$

$$\Rightarrow d=d(M;L_1)=\left|\frac{A\left(-\frac{C_2}{A}\right)+B(0)+C_1}{\sqrt{A_2+B_2}}\right| \Rightarrow \boxed{d=(L_1;L_2)=\frac{C_1-C_2}{\sqrt{A_2+B_2}}}$$

EJERCICIO 9 :

Hallar la ecuación de una recta L equidistante de L_1: $2x - 3y + 8 = 0$ y de L_2: $4x - 6y - 5=0$.

RESOLUCIÓN :

$L_1 : 2x-3y+8=0$

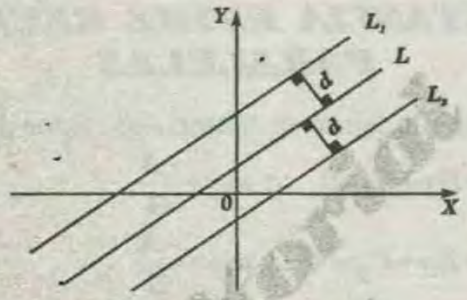
x	y
0	8/3
−4	0

$L_2 : 4x-6y-5=0$

x	y
0	−5/6
5/4	0

$m_{L_1} = 2/3$

$m_{L_2} = 2/3 \quad \Rightarrow L // L_1 // L_2 : M_{L_1} = 2/3$



Ecuación de: $L: y=mx+b$

$L : y=\frac{2}{3}x+b$

$L : 0=2x-3y+3b$

$L: 0=4x-6y+6b$.....(I)

$L_1: 2x-3y+8=0 \Rightarrow L_1 : 4x-6y+16=0$

$L_2: 4x-6y-5=0$

$$d=(L_1;L_2)=\frac{|-5-16|}{\sqrt{16+36}}=\frac{21}{2\sqrt{13}} \Rightarrow d(L_1;L)=\frac{21}{4\sqrt{13}}$$

$$*\frac{|6b-16|}{\sqrt{16+36}}=\frac{21}{4\sqrt{13}} \Rightarrow \frac{|6b-16|}{2\sqrt{13}}=\frac{21}{4\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow |6b-16|=\frac{21}{2} \quad |12b-32|=21$$

(+)	(−)
$12b-32=21$	$-12b+32=21$
No cumple $\Rightarrow b=\frac{53}{12}$	$b=\frac{11}{12}$

* En (I) : $L: 4x-6y+6\left(\frac{11}{12}\right)=0$

$L: 8x-12y+11=0$

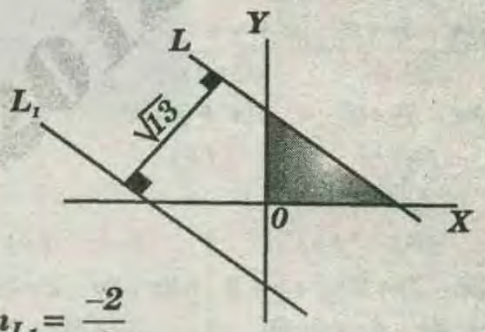
EJERCICIO 10 :

Una recta L dista de la recta L_1: $2x + 3y +12 = 0$ $\sqrt{13}$ unidades. Hallar el área del triángulo formado por L y los semiejes positivos.

RESOLUCIÓN :

$L_1 : 2x+3y+12=0$

x	y
0	−4
−6	0



$$L//L_1: m_L = m_{L_1} = \frac{-2}{3}$$

Ecuación de $L: y=mx+b$

$L : y=\frac{-2}{3}x+b$

$L : 2x+2y-3b=0$.....(I)

$$d(L_1;L)=\sqrt{13} \Rightarrow \frac{|12+3b|}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$$

$|12+3b|=13$

(+)	(−)
$12+3b=13$	$-12-3b=13$
$\Rightarrow b=1/3$	$\Rightarrow b=-25/3$ ⇒ NO CUMPLE

* En (I): $L: 2x+3y-3(\frac{1}{3})=0$

$\Rightarrow L: 2x+3y-1=0$

FAMILIA DE RECTAS

Son rectas que cumplen con una condición geométrica .

A) FAMILIA DE RECTAS PARALELAS A UNA RECTA :

Dato: $L: Ax+By+C=0$

$$m_L=\frac{-A}{B}$$

Editorial Lumbreras

Ecuación de todas las rectas paralelas a $L: y=mx+b$

$$y=\frac{-A}{B}x+b$$

$$L: Ax+By-Bb=0$$

Ecuación de la familia de rectas paralelas a L:

$$Ax+By+k=0$$

B) FAMILIA DE RECTA PERPENDICULARES A UNA RECTA :

Dato : $L: Ax+By+C=0$

$$m_L=\frac{-A}{B}$$

Ecuación de todas las rectas perpendiculares a L:

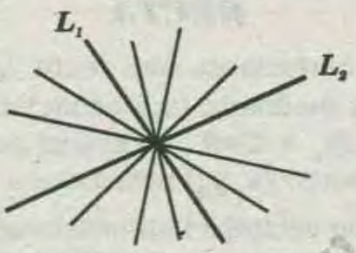
$$y=mx+b$$

$$\Rightarrow y=\frac{B}{A}x+b \Rightarrow 0=Bx-Ay+Ab$$

Ecuación de la familia de rectas perpendiculares a $L: Bx-Ay+K=0$

C) FAMILIA DE QUE PASAN POR LA INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS:

$$datos\begin{cases}L_1=A_1x+B_1y+C_1=0\\L_2=A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$$



Ecuación de todas las rectas pasan por

$$L_1\cap L_2: L_1+kL_2=0$$

k = Número real cualquiera

Familia de rectas que pasan por

$$L_1\cap L_2: A_1x+B_1y+C_1+k(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

EJERCICIO 11 :

Usando familia de rectas , hallar la ecuación de una recta L_1 que pasa por $E(1;2)$ y es paralela a $L: 2x-3y+1=0$

RESOLUCIÓN :

* Familia de rectas paralelas a L:

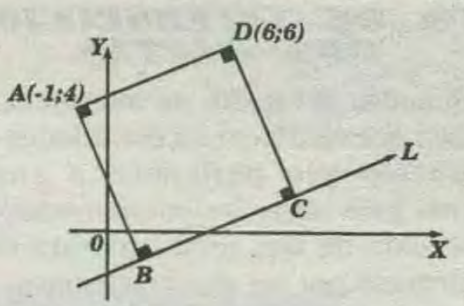
$L_1: 2x-3y+k=0$.....(I)

$E(1;2)\in L_1 \; 2(1)-3(2)+k=0 \Rightarrow k=4$

* En (I): $L_1: 2x-3y+4=0$

EJERCICIO 12 :

En la siguiente figura , hallar la ecuación de la recta L. El cuadrado $ABCD$ tiene un lado de longitud $\sqrt{29}$



RESOLUCIÓN :

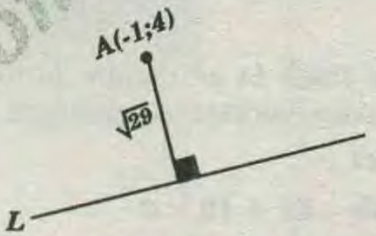
$\overrightarrow{AD} // L : m_{\overrightarrow{AD}}=\frac{2}{5}$

* Ecuación de $\overrightarrow{AD}$: $y-6=\frac{2}{5}(x-4)$

* Ecuación de $\overrightarrow{AD}$: $2x-5y+22=0$

* Familia de rectas // a $\overrightarrow{AD}$: $L: 2x-5y+k=0$.....(I)

* Usando la fórmula de la distancia de un punto a una recta :



$$d(A;L)=\sqrt{29} \Rightarrow \frac{|2(-1)-5(4)+k|}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}$$

$$\Rightarrow |-22+k|=29 \Rightarrow k=-7$$

$$\Rightarrow \text{En } (I): L: 2x-5y-7=0$$

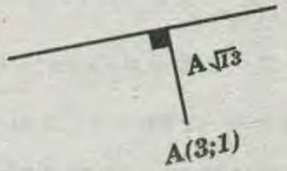
EJERCICIO 13 :

Usando familia de rectas , hallar la ecuación de una recta L_1 que es perpendicular a la recta $L: 3x+2y+6=0$. La distancia de L_1 , al punto $A(3;1)$ es $2\sqrt{13}$ unidades. (El término independiente de L_1 es un número positivo).

RESOLUCIÓN :

* Tenemos la recta $L: 3x+2y+6=0$.

* Familia de recta perpendiculares a L :



$L_1: 2x-3y+k=0$.....(1)

$$\Rightarrow d(A;L_1)=2\sqrt{13} \Rightarrow \frac{|2(3)-3(1)+k|}{\sqrt{13}}=2\sqrt{13}$$

$$\Rightarrow |3+k|=26 \Rightarrow k=23$$

$$\Rightarrow En\ (I): L: 2x-3y+23=0$$

WWW.GRATIS2.com

PUNTO DE INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS

Las coordenadas del punto de intersección de dos rectas tienen que satisfacer las ecuaciones de ambas rectas, puesto que pertenece a ambas. Por consiguiente para hallar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas bastará resolver el sistema formado por las dos ecuaciones.

EJERCICIO 14 :

Hallar las coordenadas del punto intersección de las rectas : $y = 2x-3$ y $3x + 2y - 6 = 0$

RESOLUCIÓN :

$$y = 2x - 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$3x + 2y - 6 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* De *(I)en (II)* : $3x + 2(2x-3)-6 = 0$

$$\rightarrow x = \frac{12}{7}$$

→ Punto de intersección $(x\,;y)=\left(\frac{12}{7};\frac{3}{7}\right)$

NOTAS:

* Cuando se tiene la ecuación de una recta, se despeja "y" para calcular la pendiente.

EJEMPLO :

* Sea : $L = 3y - 6x + 10 = 0$

Se tiene: $3y = 6x - 10$

$$\rightarrow y = 2x - \frac{10}{3} \Rightarrow y = 2x + \left(\frac{-10}{3}\right)$$

$$\begin{cases} m = 2 \rightarrow \text{Pendiente} \\ 0\,;\left(-\frac{10}{3}\right) \rightarrow \text{Intercepto con "y"} \end{cases}$$

* Si un punto $(a;b)$ pertenece una recta "L"de ecuación: $Ax+By+C=0$, entonces debe satisfacer su ecuación, es decir:

$$(a;b) \in L : Ax + By + C = 0 \rightarrow \boxed{Aa + Bb + C = 0}$$

EJERCICIO 15 :

El punto $(a\,;5)$ pertenece a la recta de ecuación:

$2x - 3y - 12 = 0$

Calcular el valor de "a".

RESOLUCIÓN :

$(a\,;5) \in L : 2x - 3y - 12 = 0 \rightarrow 2a - 3(5) - 12 = 0$

$$\Rightarrow 2a - 15 - 12 = 0 \Rightarrow 2x = 27 \Rightarrow a = \frac{27}{2}$$

MÉTODO PARA GRAFICAR UNA RECTA

Para graficar una recta, calculamos los interceptos con los ejes coordenados, para eso hacemos $(x=0)$ e$(y=0)$ en la ecuación, obteniendo los interceptos luego la recta pasa por esos puntos.

EJERCICIO 16 :

Graficar la recta cuya ecuación es $2x - 3y - 6 = 0$

RESOLUCIÓN :

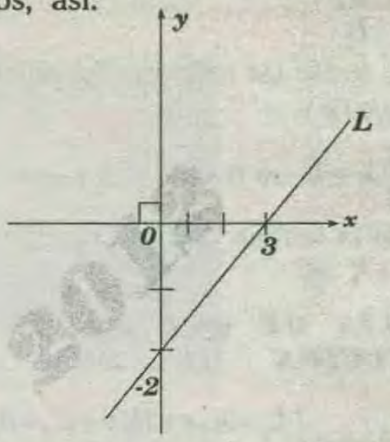
* $x=0$ *en* $2x - 3y - 6 = 0 \Rightarrow 2(0) - 3y - 6 = 0$

$\Rightarrow -3y = 6 \Rightarrow y = -2$ *Intercepto con el eje Y*

* $y = 0$ *en* $2x - 3y - 6 = 0 \Rightarrow 2x - 3(0) - 6 = 0$

$\Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$ *Intercepto con el eje X*

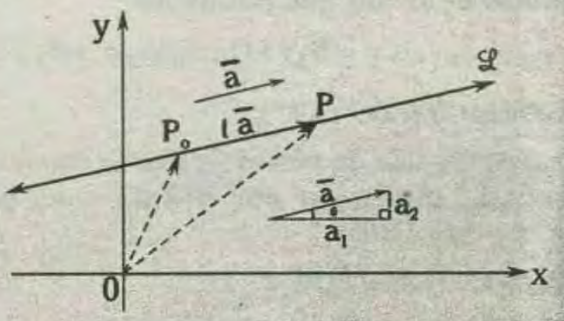
* Ubicamos los interceptos en los ejes y trazamos la recta por ellos, así:



ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

En el plano cartesiano, una recta $\mathcal{L}$ puede ser representado mediante una ecuación lineal de la forma $Ax_0 + By_0 + C=0$, en el cual para todo valor de x_0 y y_0 el punto $(x_0;y_0)$ pertenece a dicha recta.

* En el espacio vectorial bidimensional o $\mathbb{R}^2$ dicha recta $\mathcal{L}$ puede ser representado por la ecuación de la forma $\vec{P} = \vec{P}_0 + t\vec{a}\ ;\ t \in \mathbb{R}$ donde P_0 es el punto de paso , a es un vector paralelo a la recta ‹ y t es un escalar.



* En la figura :

En el ◺ : $\tan\theta = \frac{a_2}{a_1}$

* Pero: $\tan\theta = m$

$$\rightarrow m = \frac{a_2}{a_1}$$ *m: es pendiente de* $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$

* Luego: $\overleftrightarrow{\mathcal{L}} = \{P = (x;y) \in R^2 / \overrightarrow{P} = \vec{P}_0 + t\vec{a}\ ;\ t \in R\}$

* También:

$\overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{a} \rightarrow \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a}$

$\vec{P} - \vec{P_0} = t\vec{a}$

$\vec{\mathscr{L}} : \vec{P} - \vec{P_0} + t\vec{a}, t \in \mathbb{R}$

" ecuación vectorial de la recta"

* Donde: $\vec{P}_0 = (x_0 ; y_0) \wedge \vec{a} = (a_1 ; a_2)$

EJEMPLO:

Hallar la ecuación cartesiana y vectorial de la recta que pasa por $P_0=(-2;3)$ y en la dirección $\mu = (2;5)$.

RESOLUCIÓN :

* Ecuación vectorial:

$\vec{\mathscr{L}} = \{(-2 ; 3) + t(4 ; 5) / t \in \mathbb{R}\}$

$\rightarrow \vec{\mathscr{L}} = \{(-2 + 4t ; 3 + 5t) / t \in \mathbb{R}\}$

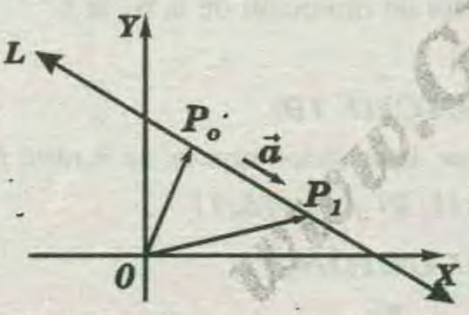
* Ecuación Cartesiana:

$\vec{\mathscr{L}} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / ((x + 2; y - 3) ; (-5 ; 4)) = 0\}$

$\rightarrow \vec{\mathscr{L}} = \{(x,y \in \mathbb{R}^2 / -5(x+2) + 4(y-3) = 0\}$

$\rightarrow \vec{\mathscr{L}} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / -5x + 4y - 22 = 0\}$

Línea recta en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ nace de nuestra realización intuitiva de que una recta está determinada por un punto P_0 y una dirección $\vec{a}$ ($\vec{a}$ es un vector no nulo) :



Siendo P_0 su origen y P_1 su extremo de $\vec{a}$, entonces:

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_0}$$

Donde : $\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{P_0} \wedge \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{P_1}$

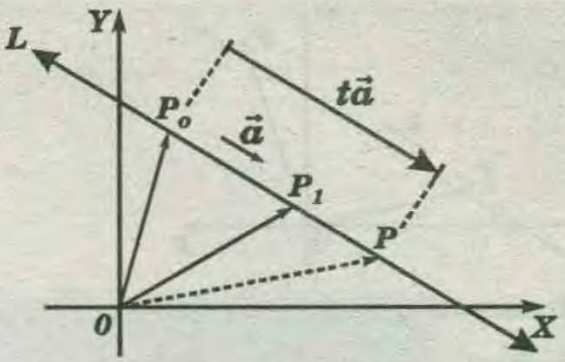
Son radios vectores , o vectores de posición .

* $P_0=(x_0; y_0) \wedge P_1=(x_1; y_1)$

* $\overrightarrow{P_0}=(x_0; y_0) \wedge \overrightarrow{P_1}=(x_1; y_1)$

Los elementos del espacio vectorial bidimensional se llamarán ***"vectores"*** o ***"puntos"*** .

Ahora , sea P un punto cualesquiera la recta L; veamos el gráfico .



Si: $P \in L \Rightarrow (\vec{P} - \vec{P}_0)$ es paralelo al vector $\vec{a} = \vec{P}_1 - \vec{P}_0$ por lo tanto : $\vec{P} - \overrightarrow{P_0} = t(\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_0})$

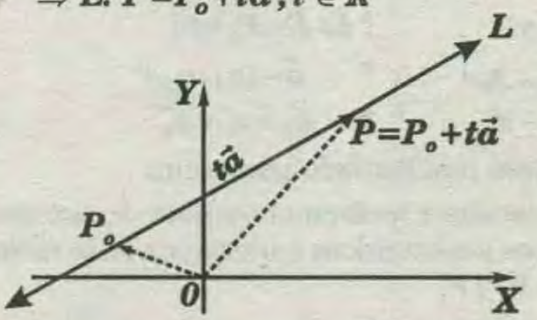
Osea : L : $\vec{P} = \overrightarrow{P_0} + t(\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_0}); t \in \mathbb{R}$

ECUACIÓN PARAMÉTRICA VECTORIAL ORDINARIA DE LA RECTA

Dado un punto P_0 un vector no nulo $\vec{a}$, la recta L que pasa por P_0 y es paralela el vector $\vec{a}$ es el conjunto :

$$L = \left\{P \in \mathbb{R}^2 / P = P_0 + t\vec{a} ; t \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\Rightarrow L: P = P_0 + t\vec{a} ; t \in \mathbb{R}$$



Donde :

* "t" es un número real
* "t" es llamado parámetro
* P_0: es un punto de paso de la recta L paralela al vector $\vec{a}$.
* $\vec{a}$ es llamado vector diferencial de L .
* $P=(x; y)$

EJERCICIO 17 :

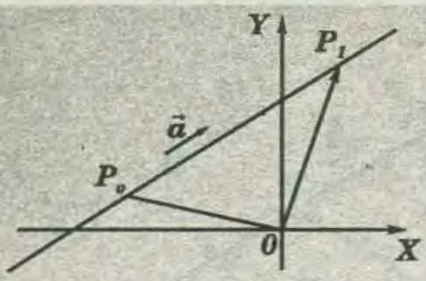
Determinar la ecuación paramétrica vectorial de la recta L que pasa por los puntos

$$P_0=(-4; 2) \text{ y } P_1=(2; 5)$$

RESOLUCIÓN :

* En primer lugar ubicamos los puntos en el plano cartesiano :

WWW.GRATIS2.COM



* Luego trazamos los vectores de posición $\overrightarrow{P_o}$ y $\overrightarrow{P_1}$.

Es decir : $\overrightarrow{P_o}=(-4;2)$ y $\overrightarrow{P_1}=(2;5)$

$\Rightarrow \overrightarrow{P_1}-\overrightarrow{P_o}=(2;5)-(-4;2) \Rightarrow \overrightarrow{P_1}-\overrightarrow{P_o}=(6;7)$

Luego : $L: \overrightarrow{P}=(-4;2)+t(6;7),\ t \in \mathbb{R}$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA

Si un punto $P \in L$, P_o es un punto de paso de L, y $\vec{a}$ su vector direccional , entonces se tienen las ecuaciones :

$$L:\begin{cases} x=x_o+t(x_1-x_o) \\ y=y_o+t(y_1-y_0) \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$

Donde :

* $P=(x;y)$
* $L: P=P_o+t\vec{a}$
* $P_o=(x_o;y_o)$
* $\vec{a}=(a_1;a_2)$
* $a_1=x_1-x_o$
* $a_2=y_1-y_o$
* t=número real llamado parámetro .

Estas ecuaciones reciben el nombre de sistemas de ecuaciones parámetricas cartesianos de la recta que pasa por P_o y P_1 .

EJERCICIO 18:

Determinar el sistema de ecuaciones parámetricas cartesianas de la recta que pasa por los puntos $P_o=(-1;3)$ y $P_1=(4;1)$

RESOLUIÓN :

* Recordemos las ecuaciones parámetricas de una recta:

$$L:\begin{cases} x=x_o+t\,a_1 \\ y=y_o+t\,a_2 \end{cases};\ t \in \mathbb{R}$$

* Luego: $a_1=4-(-1) \Rightarrow a_1=5$

$a_2=1-3 \Rightarrow a_2=-2$

* Reemplazando obtenemos : $L:\begin{cases} x=-1+5t \\ y=3-2t \end{cases}$

ECUACIÓN SIMÉTRICA DE LA RECTA

Es denominada la *FORMA SIMÉTRICA* de la ecuación de las rectas L que pasa por $P_o=(x_o;y_o)$ y tiene direccional $\vec{a}=(a_1;a_2)$.

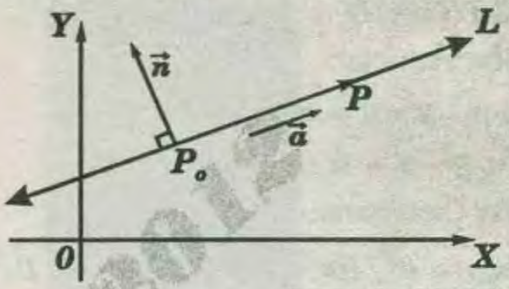
$$\frac{x-x_o}{a_1}=\frac{y-y_o}{a_2}$$ Ecuación Canónica

$(a_1 \neq 0;\ a_2 \neq 0)$

ECUACIÓN NORMAL DE LA RECTA

Un vector $\vec{n}$ y una recta :

$L: \{P=P_o+t\vec{a}\}$ se dice que son ortogonales si y sólo si $\vec{a}$ y $\vec{n}$ son ortogonales .



$$L: \boxed{\vec{n}(\overrightarrow{P}-\overrightarrow{P_o})=0}$$

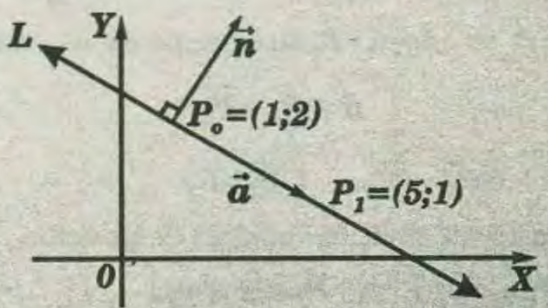
Donde :

* $\vec{n}$: vector normal a la recta
* $P \in L$
* P_o : Punto de paso de L
* $\vec{a}$: vector de dirección de la recta L
* $\vec{a}^{\perp}=\vec{n}$

EJERCICIO 19:

Determinar la ecuación normal de la recta L que pasa por $P_o=(1;2)$ y $P_1=(5;1)$

RESOLUCIÓN :



Si $\vec{a}$ es el vector de dirección , entonces :

$\vec{a}=\overrightarrow{P_1}-\overrightarrow{P_o} \Rightarrow \vec{a}=(5;1)-(1;2)$

$\vec{a}=(5-1;1-2) \Rightarrow \vec{a}=(4;-1)$

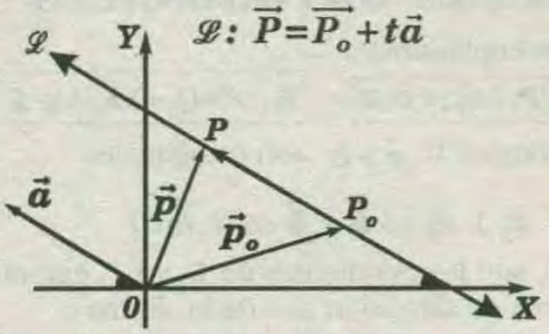
$\Rightarrow \vec{n}=(1;4)$

* Luego la ecuación normal de L es :

$$L: (1;4)[P-(1;2)]=0$$

PUNTOS QUE ESTÁN SOBRE UNA RECTA

Sea la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $P_o=(x_o\,;y_o)$ y que es paralela al vector no nulo $\vec{a}=(h;k)$. Si: $P=(x\,;y)$ es un punto cualquiera que esta sobre $\mathcal{L}$ si y sólo si el vector $\vec{P}-\vec{P}_o$ es paralelo al vector $\vec{a}$, esto es: $\vec{P}-\overrightarrow{P_o}=t\vec{a}$.



Esta ecuación se puede escribir de la forma:

$$\boxed{\mathcal{L}:\,(x\,;y)=(x_o\,;y_o)+t(h\,;k),\ t\in\mathbb{R}}$$

El sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas correspondientes de L es:

$$\mathcal{L}:\begin{cases}x=x_o+th\\ y=y_o+tk\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

EJERCICIO 20 :

Determinar los elementos de la recta :

$$\mathcal{L}:\begin{cases}x=-2+3t\\ y=4-t\end{cases};\ t\in\mathbb{R}$$

RESOLUCIÓN

Se puede escribir de la forma:

$\mathcal{L}:\,(x;y)=(-2+3t\,;4-t);\ t\in\mathbb{R}$

$\mathcal{L}:\,(x;y)=(-2;4)+t(3;-1);\ t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow P_o=(-2;4)\ \wedge\ \vec{a}=(3;-1)$

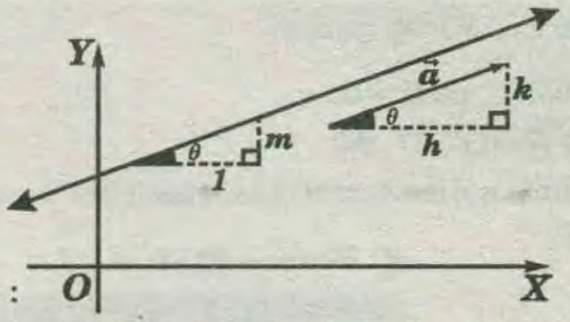
* Es decir la recta L pasa por el punto $(-2;\ 4)$ y es parálela al vector: $\vec{a}=(3;-1)$

PENDIENTE DE UNA RECTA

Si L es una recta no vertical, cuya ecuación vectoriales es:

$$\mathcal{L}:\,P=P_o+t(h;\,k);\ t\in\mathbb{R}$$

donde: $\vec{a}=(h;k)$ es el vector de dirección de L, con $h\neq 0$. entonces la pendiente "m" de la recta L. está dada por: $m=\dfrac{k}{h}$



Donde:

* θ es la medida del ángulo de inclinación de $\mathcal{L}$.

* $\theta\in[0\,;\pi>$ * $m=tg\theta$

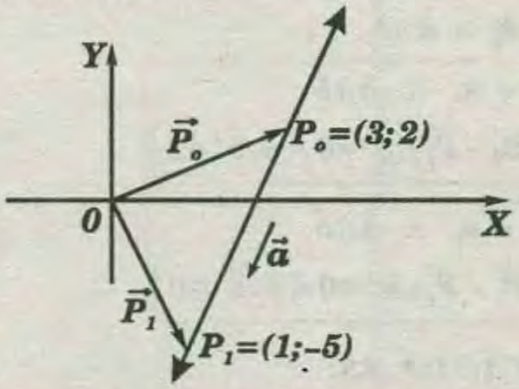
Entonces podemos afirmar que m es la pendiente de una recta L si y sólo si $(1;\,m)$, o bien $(1;\,k/h)$, es un vector de dirección de L. Por esto la ecuación se puede escribir de la forma:

$$\mathcal{L}:\boxed{P=P_0+t\,(1;m)},\ t\in\mathbb{R}$$

EJERCICIO 21 :

Determinar la pendiente de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por los puntos $P_0=(3\ ;\ 2)$ y $P_1=(1;-5)$ y obtener la ecuación paramétrica vectorial de la forma $\mathcal{L}:\,P=P_o+t(1;\,m),\ t\in\mathbb{R}$ que describa esta recta.

RESOLUCIÓN :



* El vector de dirección de la recta buscada es:

$$\vec{a}=\overrightarrow{P_1}-\overrightarrow{P_o}=(1;-5)-(3\,;2)=(-2\,;-7)$$

* Luego su pendiente de la recta $\mathcal{L}$ será:

$$m=\frac{-7}{-2}\Rightarrow m=\frac{7}{2}$$

* Ahora como $P_0=(3;\,2)\in\mathcal{L}$. entonces una ecuación paramétrica vectorial de la recta $\mathcal{L}$ es:

$$\mathcal{L}:\,P=(3;\,2)+t(2;7),t\in\mathbb{R}$$

RECTAS PARALELAS

Dos rectas en el plano :

$$\boxed{\mathcal{L}_1:\,P=P_0+t\vec{a}};\ t\in\mathbb{R};\ \boxed{\mathcal{L}_2:\,P=Q_0+k\vec{b}};\ k\in\mathbb{R},$$

son paralelas si y sólo si sus vectores de dirección son paralelos.

WWW.GRATIS2

* Esto es : $\mathscr{L}_1 // \mathscr{L}_2 \Rightarrow \vec{a} // \vec{b}$

* Es decir : $\vec{a}.\vec{b}^{\perp}=0$

EJERCICIO 22:

Determinar si las rectas cuyas ecuaciones vectoriales se dan :

$$\mathscr{L}_1: P=(5;-2)+t(-1;3)$$
$$\mathscr{L}_2: P=(-1;2)+k(7;-21)$$

son paralelas .

RESOLUCIÓN :

* Si: $\mathscr{L}_1 // \mathscr{L}_2 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}^{\perp}=0$

* Pero :

$$\vec{a}=(-1;3);\ \vec{b}=(7;-21) \Rightarrow \vec{b}^{\perp}=(21;7)$$

* Luego:

$$(-1;3).(21;7)=0 \Rightarrow (-1)(21)+(3)(7)=0 \Rightarrow -21+21=0$$

Efectivamente se cumple . Luego: $L_1 // L_2$.

RECTAS COINCIDENTES

Si $\boxed{\mathscr{L}_1: P=P_1+t\vec{a}} \wedge \boxed{\mathscr{L}_2: P=P_2+k\vec{b}}$, entonces $\mathscr{L}_1$ es coincidente con $\mathscr{L}_2$, o bien : $\mathscr{L}_1=\mathscr{L}_2$.

$\Leftrightarrow P_2 \in \mathscr{L}_1 \wedge \vec{a} // \vec{b}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{* Si : } P_1 \in \mathscr{L}_2 \ \wedge\ \vec{a} // \vec{b} \\ \Rightarrow \left[(\overrightarrow{P_2}-\overrightarrow{P_1}).\vec{b}^{\perp}=0 \wedge \vec{a}.\vec{b}^{\perp}=0\right]\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{* Si : } P_2 \in \mathscr{L}_1 \ \wedge\ \vec{a} // \vec{b} \\ \Rightarrow \left[(\overrightarrow{P_2}-\overrightarrow{P_1}).\vec{a}^{\perp}=0 \wedge \vec{a}.\vec{b}^{\perp}=0\right]\end{array}}$$

EJERCICIO 23:

Determinar si las rectas cuyas ecuaciones vectoriales se dan :

$$\mathscr{L}_1: P=(0;-3)+t(1;-4)$$
$$\mathscr{L}_2: P=(-1;1)+k(-3;12)$$

Son coincidentes .

RESOLUCIÓN :

* De las ecuaciones vectoriales , sus vectores de dirección son :

* De $\mathscr{L}_1 \Rightarrow \vec{a}=(1;-4)$

* De $\mathscr{L}_2 \Rightarrow \vec{b}=(-3;12) \Rightarrow \vec{b}^{\perp}=(-12;-3)$

* Luego:

$$\vec{a}.\vec{b}^{\perp}=(1;-4).(-12;-3) \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}^{\perp}=-12+12=0$$

* Efectivamente $\vec{a}.\vec{b}^{\perp}=0 \Rightarrow \vec{a} // \vec{b}$ y $\mathscr{L}_1 // \mathscr{L}_2$

* Además : $P_1=(0;-3) \wedge P_2=(-1;1) \Rightarrow \overrightarrow{P_2}-\overrightarrow{P_1}=(-1;4)$

* Ahora si $P_1 \in \mathscr{L}_2$.

$$\Rightarrow (-1;4).(-3;12)^{\perp}=0 \Rightarrow (-1;4).(-12;-3)=0 \Rightarrow 12-12=0$$

* Análogamente si $P_2 \in \mathscr{L}_1$

$$\Rightarrow (-1;4).(1;-4)^{\perp}=0$$

* Luego las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son coincidentes es decir :

$\mathscr{L}_1=\mathscr{L}_2$

RECTAS ORTOGONALES

Dos rectas coplanares :

$$\boxed{\mathscr{L}_1: P=P_1+t\vec{a};t \in \mathbb{R}} \wedge \boxed{\mathscr{L}_2: P=Q_1+k\vec{b};k \in \mathbb{R}}$$

son ortogonales si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales

* Esto es $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$

Si m_1 y m_2 son las pendientes de L_1 y L_2 , entonces, sus vectores de dirección son de la forma :

$$\left[\vec{a}=(1;m_1) \ \wedge\ \vec{b}=(1;m_2)\right] \Rightarrow m_1.m_2=-1$$

EJERCICIO 24:

Determinar si las rectas cuyas ecuaciones vectoriales se dan :

$$\mathscr{L}_1: P=(3;5)+t(-1;7)$$
$$\mathscr{L}_2: P=(2;0)+k(7;1)$$

Son perpendiculares .

RESOLUCIÓN :

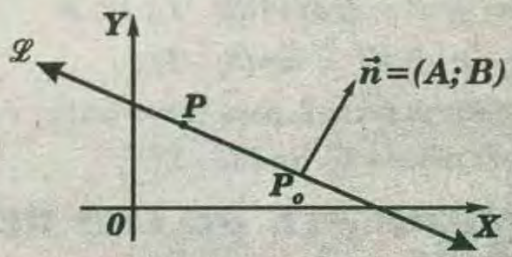
* De $\mathscr{L}_1: \vec{a}=(-1;7)$ $\wedge$ * De $\mathscr{L}_2: \vec{b}=(7;1)$

$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=(-1;7).(7;1) \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=-7+7 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$$

* Luego : $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2$

ECUACIÓN GENERAL DE UNA RECTA

$$\mathscr{L}: Ax+By+c=0 \ ;\ A^2+B^2 \neq 0$$



Del gráfico :

$(\overrightarrow{P}-\overrightarrow{P_o}).\vec{n}=0$ (ECUACIÓN NORMAL DE LA RECTA $\mathscr{L}$)

Donde :

* $\vec{n}=(A;B)$ es un vector normal a la recta $\mathscr{L}$.

* $P_o=(x_o;y_o) \in \mathscr{L}$ * $P=(x;y) \in \mathscr{L}$ * $(A \text{ y } B) \in \mathbb{R}$

* De la ecuación coordenadas de la recta $\mathcal{L}$:

$$\vec{P}\,.\,\vec{n}=\vec{P_o}\,.\,\vec{n}$$

* Reemplazando sus coordenadas de cada vector :

$$(x\,;\,y).(A\,;\,B)=(x_o\,;\,y_o).(A;B)$$

$$\Rightarrow Ax+By=Ax_o+By_o$$

* Haciendo : $\underbrace{Ax_o+By_o}_{\text{número}}=-C$

$$\Rightarrow Ax+By+C=0\,;\,A^2+B^2\neq 0$$

NOTAS:

* Si $\vec{n}=(A;B)$ es un vector normal a una recta $\mathcal{L}$, entonces : $\vec{a}=(-B;A)$ es un vector de dirección de $\mathcal{L}$.

* Luego su pendiente de la recta $\mathcal{L}$ es :

$$m=-\frac{A}{B}\,;\ \text{si}\ B\neq 0$$

* En geometría vectorial, partiendo de la, ecuación normal de la recta proporciona un método rápido para hallar la ***ECUACIÓN GENERAL*** de una recta $\mathcal{L}$ si se conoce un punto de paso P_o y el vector normal $\vec{n}$ haciendo : $\boxed{\vec{P}\,.\,\vec{n}=\vec{P_o}\,.\,\vec{n}}$

EJERCICIO 25:

Determinar la ecuación general de la recta que pasa por el punto $P_o=(-1;3)$ y que tiene como vector de dirección a $\vec{a}=(1;-3)$.

RESOLUCIÓN :

Si: $\vec{a}=(1;-3)\Rightarrow\vec{n}=(3;1)$

* Ahora si $P=(x;y)\in\mathcal{L}$

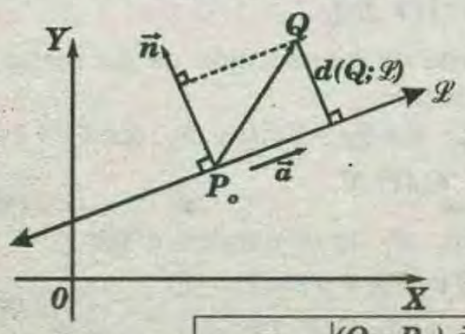
* Entonces :

$$(\vec{P}-\vec{P_o}).\vec{n}=0\ \Rightarrow\vec{P}\,.\,\vec{n}=\vec{P_o}\,.\,\vec{n}$$

$$(x;y).(3;1)=(-1;3).(3;1)$$

$$\Rightarrow 3x+y=-3+3\Rightarrow\mathcal{L}:\ 2x+y=0$$

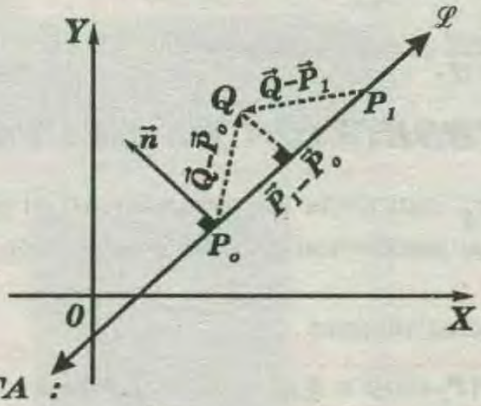
DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA DADA



$$\boxed{d(Q;\mathcal{L})=\frac{|(Q-P_o).\vec{n}|}{|\vec{n}|}}$$

La distancia que separa al punto Q de la recta $\mathcal{L}$ no depende de la elección de un punto particular P_o sobre L . sino puede ser otro punto como P_1 , por ello se cumple

$$\boxed{\frac{|(\vec{Q}-\vec{P_o}).\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|(\vec{Q}-\vec{P_1}).\vec{n}|}{|\vec{n}|}}$$

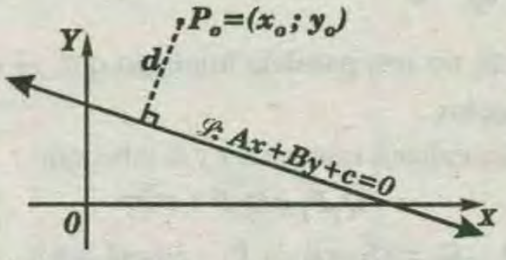


NOTA :

Si : $P_o=(x_o;y_o)$ y $\mathcal{L}: Ax+by+c=0$

entonces: $\boxed{d(P_o;\mathcal{L})=\frac{|Ax_o+By_o+c|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$

Siendo: $A\neq 0\,;\,B\neq 0$



Donde :

* $d=d(P_o;\mathcal{L})$: distancia del punto P_o a la recta $\mathcal{L}$. cuya ecuación es $Ax+By+C=0$.

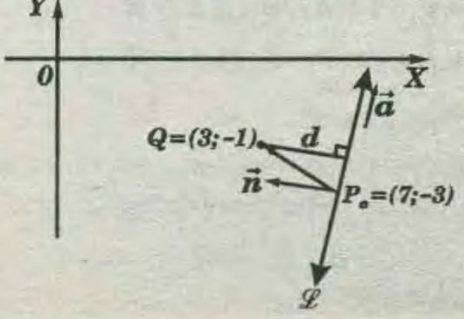
EJERCICIO 26:

Determinar la distancia que separa al punto $Q=(3;-1)$ de la recta que pasa por el punto $P_o=(7;-3)$ y cuya pendiente es $1/3$.

RESOLUCIÓN:

Por dato : $m=\frac{1}{3}\Rightarrow\vec{a}=(3\,;1)$

es el vector direccional de $\mathcal{L}$.



* Luego: $\vec{n}=\vec{a}^{\perp} \Rightarrow \vec{n}=(-1;3)$

* Por lo tanto : $d(Q;\mathcal{L})=\dfrac{|(\vec{Q}-\vec{P_o}).\vec{n}|}{\vec{n}}$

* Reemplazando :

$$d(Q;\mathcal{L})=\frac{|[(3;-1)-(7;-3)].(-1;3)|}{\sqrt{1+9}} \Rightarrow d(Q;\mathcal{L})=\frac{|(-4;2).(-1;3)|}{\sqrt{10}}$$

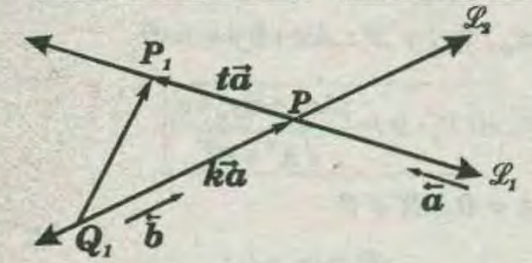
$$\Rightarrow d(Q;\mathcal{L})=\frac{|4+6|}{\sqrt{10}} \Rightarrow d(Q;\mathcal{L})=\sqrt{10}u$$

INTERSECCIÓN DE RECTAS

Si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son recta no paralelas en el plano , entonces se intersectan en uno y solamente en un punto.

Sean las rectas secante .

$$\boxed{\mathcal{L}_1=\{P_1+t\vec{a}/t\in R\}} \wedge \boxed{\mathcal{L}_2=\{Q_1+k\vec{b}/k\in R\}}$$



Si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no son paralela implican que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son paralelos .

* Entonces existen números t y k tales que :

$$\overrightarrow{Q_1P_1}=\overrightarrow{Q_1P}+\overrightarrow{PP_1}$$

o sea : $P_1-Q_1=k\vec{b}+t\vec{a} \Rightarrow P_1-t\vec{a}=Q_1+k\vec{b}$

* Por lo tanto , el punto : $P=P_1-t\vec{a}=Q_1+k\vec{b}$

pertenece tanto a $\mathcal{L}_1$ como $\mathcal{L}_2$, y es el punto de intersección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

NOTA:

Para calcular el punto de intersección de dos rectas secantes $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ cuyas ecuaciones vectoriales son:

$$\mathcal{L}_1=\{P_o+t\vec{a}/t\in R\} \text{ y } \mathcal{L}_2=\{P_1+r\vec{b}/r\in R\}$$

existen varios métodos uno de ellos es al siguiente :

Si : $P=(x_o+y_o)+t(a_1;a_2);\ t\in R$

$P=(x_1+y_1)+r(b_1;b_2);\ r\in R$

tal que $P\in\mathcal{L}_1$ y $P\in\mathcal{L}_2$

En primer lugar se debe verificar si $\mathcal{L}_1$ no es paralela a $\mathcal{L}_2$ y para ello se debe cumplir que :

$$\vec{a}\,.\,\vec{b}^{\perp}\neq 0$$

Si: es así, entonces :

$$(x_o;y_o)+t(a_1;a_2)=(x_1;y_1)+r(b_1;b_2)$$

De donde se debe hallar t y r .

En forma general , tenemos :

$$* \ t=\frac{b_2(x_1-x_o)-b_1(y_1-y_o)}{a_1.b_2-a_2.b_1};t\in R$$

$$* \ r=\frac{a_2(x_1-x_o)-a_1(y_1-y_o)}{a_1.b_2-a_2.b_1};r\in R$$

Luego se reemplaza estos valores en cualquiera de las dos ecuaciones vectoriales, obteniendo de esta manera las coordenadas de $P=(x;y)$.

EJERCICIO 28 :

Hallar las coordenadas del punto de intersección de las rectas :

$$\mathcal{L}_1=\{(2;-3)+t(4;-2)/t\in R\}$$

$$\mathcal{L}_2=\{(-2;1)+r(-1;-2)/r\in R\}$$

RESOLUCIÓN :

En primer lugar verificamos si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ nos son paralelos , para lo cual se debe cumplir que :

$$\vec{a}\,.\,\vec{b}\neq 0$$

Pero: $\vec{a}=(4;-2)\ ;\vec{b}=(-1;-2) \Rightarrow \vec{b}^{\perp}=(2;-1)$

$$\vec{a}\,.\,\vec{b}^{\perp}=(4;-2)\,.\,(2;-1)$$

$$\vec{a}\,.\,\vec{b}^{\perp}=8+2 \Rightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b}^{\perp}=10\neq 0$$

Lo cual que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son secantes . R

Ahora hallamos t o r cualquiera de ellos es suficiente, veamos :

$$t=\frac{(-2)(-2-2)-(-1)[1-(-3)]}{(4)(-2)-(-2)(-1)};t\in R$$

Simplificando : $T=-6/5$.

Reemplazando este valor en $\mathcal{L}_1$:

$$P=(2;-3)+(-\frac{6}{5})(4;-2) \Rightarrow P=(-\frac{14}{5};-\frac{3}{5})$$

EJERCICIO 29:

Hallar el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son :

$$\mathcal{L}_1:\ x+3y-7=0 \text{ y } \mathcal{L}_2:\ 2x+y+1=0$$

RESOLUCIÓN

A simple vista, $\mathcal{L}_1$ no es paralela a $\mathcal{L}_2$.

$$(x+3y;2x+y)=(7;-1)$$

$$(x;2x+(3y;y)=(7;-1)$$

$$x(1;2)+y(3;1)=(7;-1)$$

Ahora para eliminar x o y, multiplicamos ambos miembros por $(1;2)^{\perp}$ o $(3;1)^{\perp}$ respectivamente.

Pero : $(1;2)^{\perp}=(-2;1)$ y $(3;1)^{\perp}=(-1;3)$

Entonces :

$$\underbrace{x(1;2).(-2;1)}_{0}+y(3;1).(-2;1)=(7;-1).(-2;1)$$

$$y(-6+1)=(-14-1) \Rightarrow y=3$$

Luego este valor de $y=3$ reemplazamos en cualquiera de las dos ecuaciones :

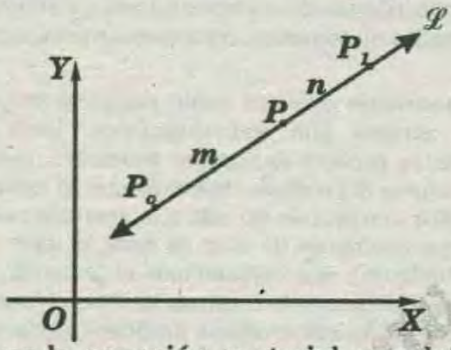
$$x+3(3)-7=0 \Rightarrow x=-2$$

En consecuencia ; las coordenadas del punto de intersección $P=(x;y)$ es :

$$P=(-2;3)$$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

Sea P un punto cualquiera sobre la reta $\mathcal{L}$ que pasa por los puntos P_o y P_1 y que divide al segmento $\overrightarrow{P_oP_1}$ en la razón $r=\frac{m}{n}$, es decir : $\frac{P_oP}{PP_1}=\frac{m}{n}$



Entonces la ecuación vectorial que define al punto P es :

$$\vec{P}=\frac{n}{m+n}\vec{P_o}+\frac{m}{m+n}\vec{P_1} \; ; \; m \neq -n$$

OBSERVACIONES :

1) Si m y n tienen el mismo signo, es decir : $\frac{m}{n}>0$, entonces P es interior al segmento $\overrightarrow{P_oP_1}$.

2) Si m y n tienen signos diferentes , es decir $\frac{m}{n}<0$, entonces el punto P es exterior al segmento $\overrightarrow{P_oP_1}$, y ocurre que :

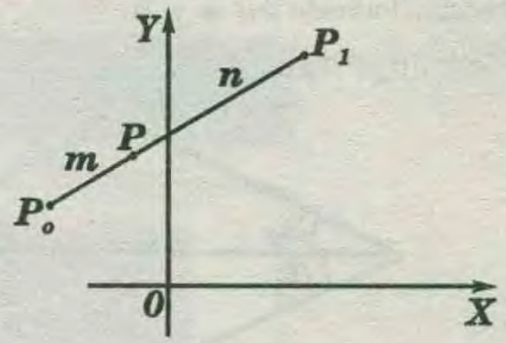
a) Si $\left|\frac{m}{n}\right|<1$, entonces P estará más cerca de P_o.

b) Si $\left|\frac{m}{n}\right|>1$ entonces P estará más cerca de P_1.

EJERCICIO 30:

Dados los puntos $P_o=(-3;3)$ y $P_1=(2;8)$, hallar las coordenadas del punto P que divide al segmento $\overrightarrow{P_oP_1}$ en la razón $r=\frac{2}{3}$.

RESOLUCIÓN :



Por dato :

$$\frac{m}{n}=\frac{2}{3} \Rightarrow m=2;\; n=3 \text{ y } m+n=5$$

Ahora como $\frac{m}{n}=\frac{2}{3}>0$, entonces el punto P estará entre P_o y P_1.

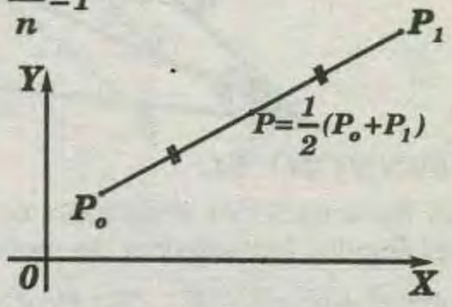
Luego en la ecuación vectorial que define el punto P.

$$P=\frac{3}{5}(-3;3)+\frac{2}{5}(2;8) \Rightarrow P=(-\frac{9}{5};\frac{9}{5})+(\frac{4}{5};\frac{16}{5})$$

$$P=(-\frac{9}{5}+\frac{4}{5};\frac{9}{5}+\frac{16}{5}) \Rightarrow P=(-1;5)$$

CONSECUENCIA :

Si P es punto medio de $\overrightarrow{P_oP_1}$, es decir $P_oP_1=PP_1 \Rightarrow \frac{m}{n}=1$



Luego : $\vec{P}=\frac{1}{2}(\vec{P_o}+\vec{P_1})$

OBSERVACIONES :

Son las ecuaciones vectoriales de dos rectas no verticales, entonces el ángulo formado por $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es el ángulo formado por sus vectores de dirección $\vec{a}$ y $\vec{b}$ respectivamente , y se determina mediante la fórmula :

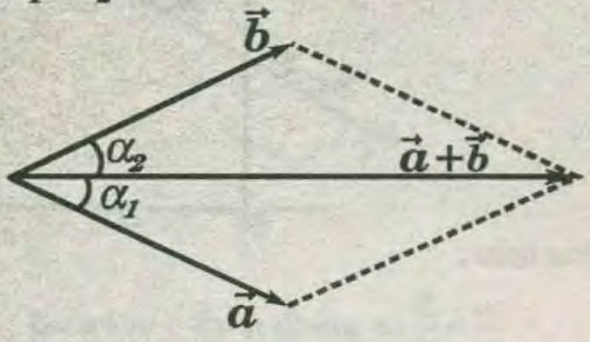
$$Cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

Si : $\vec{a}.\vec{b}>0 \Rightarrow cos\theta>0 \Rightarrow \theta$ es agudo

Si : $\vec{a}.\vec{b}<0 \Rightarrow cos\theta<0 \Rightarrow \theta$ es obtuso

2) Si : $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ y $\vec{a} \neq \vec{b}$, entonces: $(\vec{a}+\vec{b})$ es la bisectriz del ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

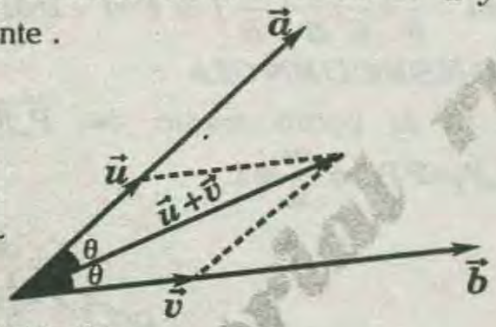
Es decir : $\alpha_1=\alpha_2$



3) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores no necesariamente de igual magnitud es y no paralelos, entonces el vector suma $\vec{u}+\vec{v}$ sigue la dirección de la bisectriz del ángulo formado por $\vec{a}+\vec{b}$, donde :

$$\vec{u}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad y \quad \vec{v}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Son vectores unitarios en la bisectriz de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ respectivamente .

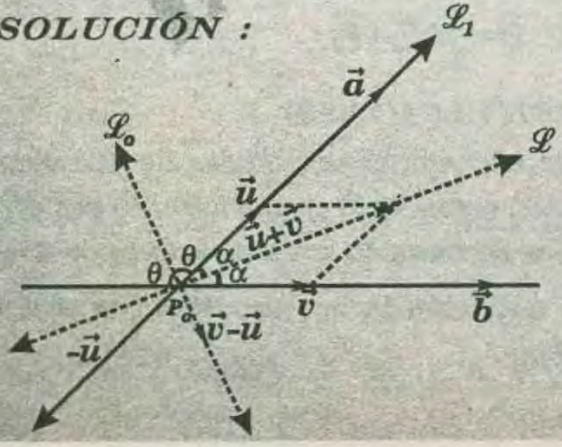


EJERCICIO 31:

Hallar las ecuaciones vectoriales de las bisectrices de los ángulos formado por las rectas :

$\mathcal{L}_1: P=P_o+t\vec{a}\ ; t \in \mathbb{R} \quad \mathcal{L}_2: P=P_o+k\vec{a}\ ; k \in \mathbb{R}$

RESOLUCIÓN :



Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_o$ las bisectrices .

No olvidemos además que el paralelogramo determinando por los vectores unitarios .

$$\vec{u}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad y \quad \vec{v}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

es un rombo .

Luego la ecuación de la bisectriz $\mathcal{L}$ es :

$$\mathcal{L}: P=P_o+t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right); t \in \mathbb{R}$$

La ecuación de la bisectriz $\mathcal{L}_o$ X es :

$$\mathcal{L}_o: P=P_o+r\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right); r \in \mathbb{R}$$

HISTORIA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Existe una cierta controversia sobre la verdadera paternidad de este método. Lo único cierto es que se publica por primera vez como «Geometría analítica», apéndice al *Discurso del método*, de Descartes, si bien se sabe que Pierre de Fermat conocía y utilizaba el método antes de su publicación por Descartes. Aunque Omar Khayyam ya en el siglo XI utilizará un método muy parecido para determinar ciertas intersecciones entre curvas, es imposible que alguno de los citados matemáticos franceses tuvieran acceso a su obra.

El nombre de *geometría analítica* corrió parejo al de *geometría cartesiana*, y ambos son indistinguibles. Hoy en día, paradójicamente, se prefiere denominar *geometría cartesiana* al apéndice del *Discurso del método*, mientras que se entiende que *geometría analítica* comprende no sólo a la geometría cartesiana (en el sentido que acabamos de citar, es decir, al texto apéndice del *Discurso del método*), sino también todo el desarrollo posterior de la geometría que se base en la construcción de ejes coordenados y la descripción de las figuras mediante funciones algebraicas o no hasta la aparición de la geometría diferencial de Gauss (decimos «paradójicamente» porque se usa precisamente el término «geometría cartesiana» para aquello que el propio Descartes bautizó como «geometría analítica»). El problema es que durante ese periodo no existe una diferencia clara entre geometría analítica y análisis matemático esta falta de diferencia se debe precisamente a la identificación hecha en la época entre los conceptos de función y curva, por lo que resulta a veces muy difícil intentar determinar si el estudio que se está realizando corresponde a una u otra rama.

La geometría diferencial de curvas sí que permite un estudio mediante un sistema de coordenadas, ya sea en el plano o en el espacio tridimensional. Pero en el estudio de las superficies, en general, aparecen serios obstáculos. Gauss salva dichos obstáculos creando la geometría diferencial, y marcando con ello el fin de la geometría analítica como disciplina. Es con el desarrollo de la geometría algebraica cuando se puede certificar totalmente la superación de la geometría analítica.

Es de puntualizar que la denominación de *analítica* dada a esta forma de estudiar la geometría provocó que la anterior manera de estudiarla (es decir, la manera axiomático-deductiva, sin la intervención de coordenadas) se terminara denominando, por oposición, geometría sintética, debido a la dualidad análisis-síntesis.

Actualmente el término *geometría analítica* sólo es usado en enseñanzas medias o en carreras técnicas en las que no se realiza un estudio profundo de la geometría.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Calcular la ecuación de una recta que pasa por los puntos $A(4;-3)$ y $B(7;9)$.

A) $x-y-8=0$ B) $4x-y-19=0$ C) $x=y$

RESOLUCIÓN :

* Primero calculamos la pendiente que pasa por los puntos $A(4;-3)$ y $B(7:9)$:

$$m=\frac{9-(-3)}{7-4}=\frac{12}{3}=4$$

* Segundo, reemplazamos la pendiente "m" y el punto conocido $A(4;-3)$ en la ecuación punto pendiente, así:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

$$\Rightarrow 4=\frac{y-(-3)}{x-4}\ ;\ \text{despejando: } 4x-y-19=0$$

* Si reemplazamos como el punto conocido a $B(7;9)$ la ecuación resulta la misma.

$$4=\frac{y-9}{x-7}\Rightarrow 4x-y-19=0$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 2 :

Calcular la pendiente de la recta cuya ecuación es:

$$3x-4y-12=0$$

A) 1 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

RESOLUCIÓN :

* Recordemos que de:

$Ax+By+C=0$, su pendiente es: $m=-\frac{A}{B}$

* Luego en el problema:

$$3x-4y-12\Rightarrow m=-\frac{3}{-4}\Rightarrow m=\frac{3}{4}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

Las rectas $L_1: 2x-3y+5=0$ y $L_2: ax+4y-10=0$ son paralelas, calcular el valor de "a":

A) -1 B) $-8/3$ C) 2 D) 1 E) 4

RESOLUCIÓN :

* De los datos:

$$L_1: 2x-3y+5=0\Rightarrow m_1=-\frac{2}{-3}\Rightarrow m_1=\frac{2}{3}$$

$$L_2: ax+4y-10=0\Rightarrow m_2=-\frac{a}{4}$$

* Como $L_1 // L_2\Rightarrow m_1=m_2$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}=-\frac{a}{4}\Rightarrow a=-\frac{8}{3}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

Hallar la pendiente de una recta que pasa por $(2;-2)$ y $(-1;4)$.

A) 1 B) -2 C) 0 D) 2 D) 3

RESOLUCIÓN :

* Sea $P_1(2;-2)$ y $P_2(-1;4)$; entonces

$$m=\frac{4-(-2)}{(-2)-(1)}=\frac{6}{-3}\Rightarrow m=-2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 5 :

Dos rectas se intersectan formando un ángulo de $135°$, sabiendo que la recta final tiene pendiente igual a -3. Calcular la pendiente de la recta final.

A) 1 B) 2 C) 0 D) 8 E) $\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

Sea: m_1 = pendiente inicial y

m_2 = pendiente final $=-3$

* Entonces:

$$Tan135°=-\frac{3-m_1}{1+(-3)m_1}\Rightarrow -1=\frac{-3-m_1}{1-3m_1}$$

$$\Rightarrow -1+3m_1=-3-m_1\Rightarrow m_1=-2/4$$

$$\Rightarrow m_1=-\frac{1}{2}$$

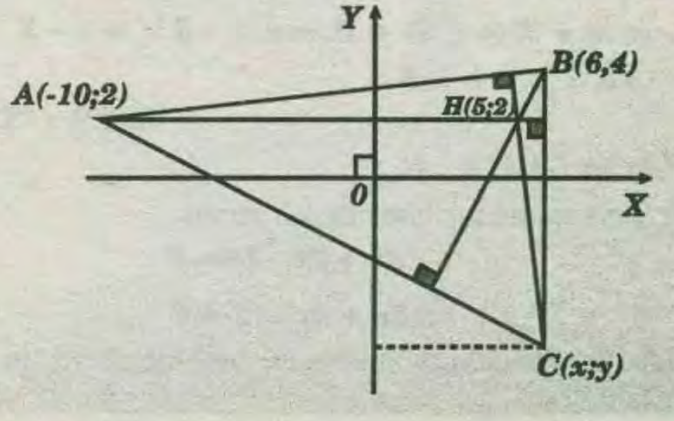
RPTA : "E"

PROBLEMA 6 :

Dos vértice de un triángulo son los puntos $(-10;2)$ y $(6;4)$. Si el ortocentro del triángulo es el punto $(5;2)$, entonces las coordenadas del tercer vértice del triángulo es :

A) $(4;-4)$ B) $(5;-5)$ C) $(6;-6)$ D) $(7;-7)$ E) $(8;-8)$

RESOLUCIÓN:



$m_{\overline{BH}} = \frac{4-2}{6-5} = 2 \Rightarrow m_{\overline{AC}} \times 2 = -1$

$m_{\overline{AC}} = -\frac{1}{2}$

$\overline{AC}: y - 2 = -\frac{1}{2}(x+10)$

$\Rightarrow y = -\frac{x}{2} - 5 + 2 \Rightarrow y = -\frac{x}{2} - 3 \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$

$\overline{BC}: \quad x = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$

* (II) en (I):

$y = -\frac{6}{2} - 3 \rightarrow y = -6$

$\rightarrow C(6;-6)$

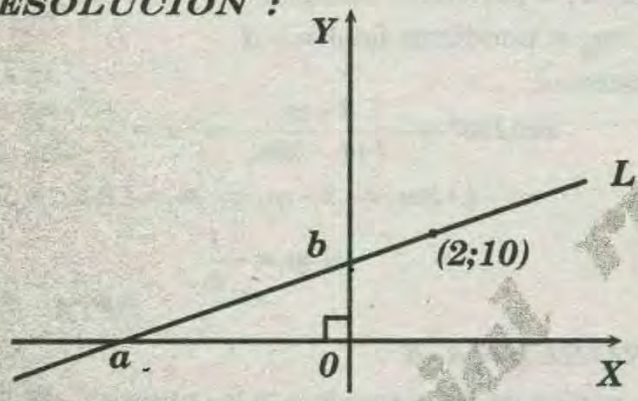
RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

La suma de las longitudes de los segmentos que una recta L determina sobre los ejes es **3.** Si además la recta pasa por el punto **(2;10)**, halle la ecuación de la recta **L.**

A) $\frac{y}{14} - \frac{x}{11} = 1$ B) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{5} = 1$ C) $\frac{x}{-3} + \frac{y}{6} = 1$ D) B y C

RESOLUCIÓN :



* Dato :

$a + b = 3 \rightarrow b = 3 - a \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$

* Ecuación simétrica de la recta :

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \; ; \; (2;10) \in L \Rightarrow \frac{2}{a} + \frac{10}{b} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$

* De (I) y (II): $a^2 + 5a + 6 = 0$

$\Rightarrow (a+3)(a+2) = 0 \Rightarrow a = -3 \vee a = -2$

$\Rightarrow b = 6 \vee b = 5$

RPTA : "D"

PROBLEMA 8 :

Se tiene las ecuaciones de las rectas

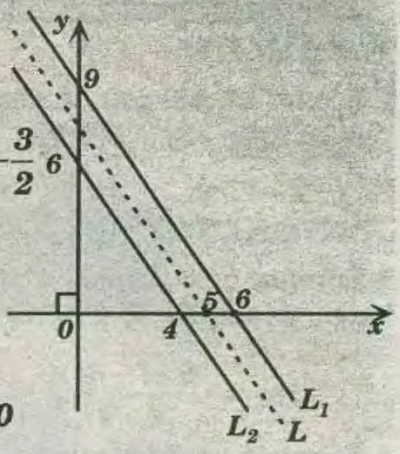
$L_1: 3x + 2y - 18 = 0$

$L_2: 3x + 2y - 12 = 0$

Halle la ecuación de la recta L_3 que equidista de la recta L_1 y L_2.

A) $3y+2y - 12=0$ B) $3x+2y+15=0$ C) $3y+2y - 8=0$
D) $3x+2y+12=0$ E) $3x+2y - 15=0$

RESOLUCIÓN :



* Si: $L \parallel L_1 \parallel L_2$ Þ

$m = m_1 = m_2 = -\frac{3}{2}$

* Ahora :

$L: y - 0 = \frac{-3}{2}(x-5)$

$2y = -3x + 15$

$L: 3x + 2y - 15 = 0$

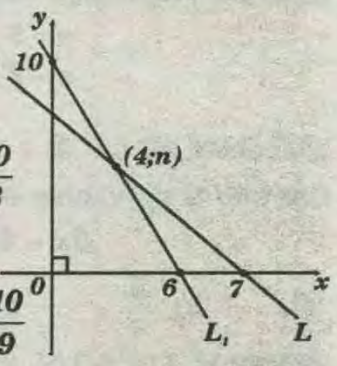
RPTA : "E"

PROBLEMA 9 :

Halle la ecuación de una recta que intercepta el eje positivo de las x un segmento de longitud igual a **7**, que pase además por el punto de abscisa $x=4$, perteneciente a la recta : $5x + 3y = 30$

A) $10x - 9y + 70 = 0$ B) $9x + 10y - 70 = 0$
C) $10x + 9y - 70 = 0$ D) $9x - 10y + 70 = 0$

RESOLUCIÓN :



Dato: $L_1: 5x + 3y - 30 = 0$

$(4;n) \in L_1$

$\Rightarrow 5(4) + 3n = 30 \rightarrow n = \frac{10}{3}$

* Ahora : $L: y - 0 = (x - 7)$

* Pero :

$m = \frac{\frac{10}{3} - 0}{4 - 7} \rightarrow m = -\frac{10}{9}$

* Reemplazando : $y = -\frac{10}{9}(x-7)$

$\Rightarrow 9y = -10x + 70$

$L: 10x + 9y - 70 = 0$

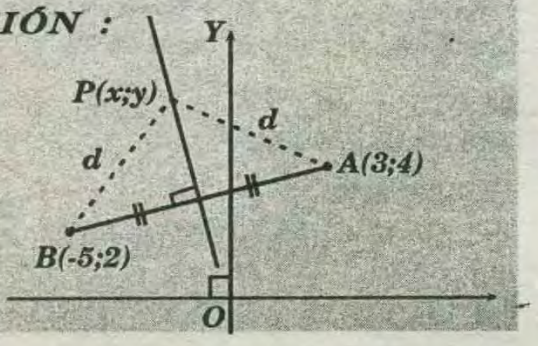
RPTA : "C"

PROBLEMA 10:

Dados los puntos **A(3;4)** y **B(– 5;2)**, hallar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los puntos **A** y **B.**

A) $x = -4y - 1$ B) $y = 3x - 1$ C) $y = 4x + 2$ D) $y = 4x + 3$

RESOLUCIÓN :



* Por teorema de la mediatriz de un segmento :

$$PA = PB = d$$

* Por distancia entre dos puntos :

$d^2 = (x+5)^2 + (y-2)^2$ .....(I)

$d^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$ .....(II)

* (I)=(II):

$(x+5)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$

$\Rightarrow 10x + 25 - 4y + 4 = 6x + 9 - 8y + 16$

$\Rightarrow 16x + 4y + 4 = 0$

$\Rightarrow 4x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -4y - 1$

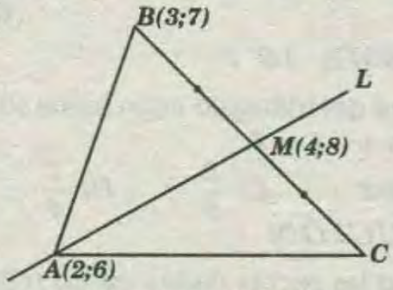
RPTA : "A"

PROBLEMA 11 :

Los vértices de un triángulo son los puntos $A=(2;6)$; $B(3;7)$ y $C(5,9)$, halle la ecuación de la recta que contiene a la mediana relativa al lado BC.

A) $x - y + 4 = 0$ B) $x + y + 4 = 0$
C) $x - y - 4 = 0$ D) $x - y + 2 = 0$

RESOLUCIÓN :



* Coordenadas del punto $M(4;8)$:

Pendiente de L : $m = \frac{8-6}{4-2} = 1$

* Ahora : $L: y - 6 = (1)(x-2)$

$L: 0 = x - y + 4$

RPTA : "A"

PROBLEMA 12 :

Una recta pasa por los puntos $(2;3)$ y $(6;8)$ y $(10;b)$. Hallar el valor de b.

A) 13 B) 8 C) 7 D) -6 E) 5

RESOLUCIÓN :

* Como la recta pasa por los puntos $(2;3)$ y $(6;8)$ entonces su pendiente es:

$$m = \frac{8-3}{6-2} \rightarrow m = \frac{5}{4} \quad \text{..... (I)}$$

* Como la recta pasa por $(2;3)$ y $(10;b)$ entonces su pendiente es:

$$m = \frac{b-3}{10-2} \rightarrow m = \frac{b-3}{8} \quad \text{.....(II)}$$

* De (I) y (II) : $\frac{b-3}{8} = \frac{5}{4} \rightarrow b = 13$

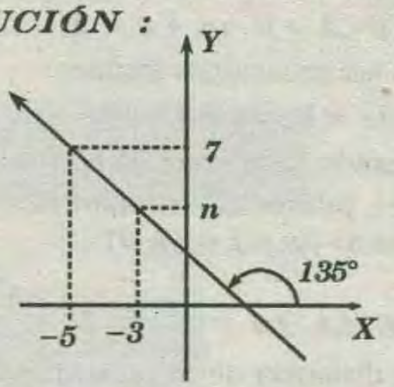
RPTA : "A"

PROBLEMA 13 :

En el ángulo del inclinación de una recta mide $135°$, si pasa por los puntos $(-3;n)$ y $(-5;7)$. Hallar el valor de n.

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) -1

RESOLUCIÓN :



* Como el ángulo de inclinación mide $135°$ entonces la pendiente es:

$$m = tg135° \rightarrow m = -1$$

* Conociendo dos puntos de la recta también se puede hallar la pendiente:

$$m = \frac{7-n}{-5-(-3)} \rightarrow m = \frac{7-n}{-2}$$

* Luego para $m = -1$, se obtendrá:

$$-1 = \frac{7-n}{-2} \Rightarrow 2 = 7 - n \Rightarrow n = 5$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 14 :

Si las rectas $L_1: 2x - 5y + 7 = 0$ y $L_2: (2a+1)x - 3y + 5 = 0$ son perpendiculares, calcular el valor de "a".

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{19}{7}$ E) $-\frac{17}{4}$

RESOLUCIÓN :

* De los datos:

$$L_1: 2x - 5y + 7 = 0 \rightarrow m_1 = -\frac{2}{-5} \Rightarrow m_1 = \frac{2}{5}$$

$$L_2: (2a+1)x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow m_2 = \frac{2a+1}{3}$$

* Como :

$L_1 \perp L_2 \rightarrow m_1 \times m_2 = -1$

$$\rightarrow \frac{2}{5} \times \frac{(2a+1)}{3} = -1 \Rightarrow 2(2a+1) = -15$$

$$\Rightarrow 4a + 2 = -15 \Rightarrow a = -\frac{17}{4}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 15 :

Calcular las coordenadas del punto de intersección de dos rectas cuyas ecuaciones son:

$L_1: 2x - y - 6 = 0$ y $L_2 : x + y - 3 = 0$.

www.GRATIS2.com

A) (3;1) B) (3;0) C) (5;2) D) (7;1) E)(8;–1)

RESOLUCIÓN :

* De las ecuaciones:

$L_1 : 2x - y - 6 = 0 \rightarrow 2x + y = 6$

$L_2 : x + y - 3 = 0 \rightarrow x + y = 3$

* Sumando las ecuaciones resulta:

$3x = 9 \rightarrow x = 3$

* Reemplazando en la segunda ecuación: $y = 0$

* Luego el punto de intersección tiene por coordenadas $A: (x; y) = (3; 0)$

RPTA : "B"

PROBLEMA 16 :

Calcular la distancia de la recta $3x+4y+4 = 0$, al punto $(1; 2)$.

A)1 B)2 C)3 D)5 E)7

RESOLUCIÓN :

* Según la fórmula el punto $(x_1; y_1)$ es $(1;2)$. Reemplazamos los valores en la fórmula dada y obtenemos:

$$d = \frac{|3(1) + 4(2) + 4|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 15 \rightarrow d = 3$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 17 :

Calcula la distancia del punto $P(7;-3)$ a la recta:

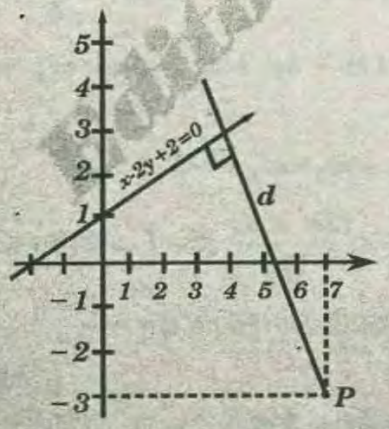
$x - 2y + 2 = 0.$

A) $3\sqrt{2}$ B) $5\sqrt{5}$ C) $\sqrt{7}$ D) $3\sqrt{5}$ E) $\sqrt{5}$

RESOLUCIÓN :

* Utilizando la fórmula, tendremos:

$$d = \frac{|(7) - 2(-3) + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|7 + 6 + 2|}{\sqrt{5}}$$



* Finalmente:

$$d = \frac{15}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \rightarrow d = 3\sqrt{5}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 18 :

Hallar el área del triángulo formado por los ejes coordenados y la recta : $y = 3x - 12$.

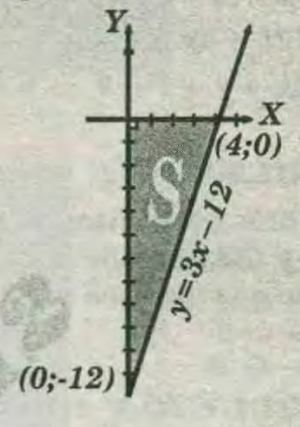
A) $24u^2$ B) 18 C) 20 D) 15 E) 32

RESOLUCIÓN :

* Hallamos x , si $y = 0 \rightarrow 3x - 12 = 0 \rightarrow x = 4$

* Luego, calculamos y para $x = 0$

$y = 3(0) - 12 = -12$



S = Área del triángulo

$$= \frac{4 \times 12}{2} = 24u^2$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 19 :

Hallar el área del triángulo cuyo lados son las rectas: $x = 0 \wedge x + y - 1 = 0.$

A)$1\mu^2$ B)2 C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) 4

RESOLUCIÓN :

* Graficando las rectas dadas en un mismo sistema cartesiano, tenemos que calcular las coordenadas de los puntos A; B y C.

* Así: $A(0;0)$

* Las coordenadas de B, se obtienen intersectando las rectas: $x + y - 1 = 0 \wedge x = 0$

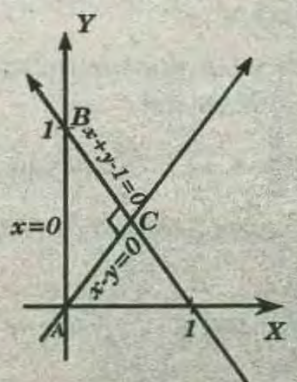
* Esto es:

$x = 0 \rightarrow 0 + y - 1 = 0 \quad y = 1 \rightarrow B(0;1)$

* Las coordenadas de C se obtienen intersectando las rectas:

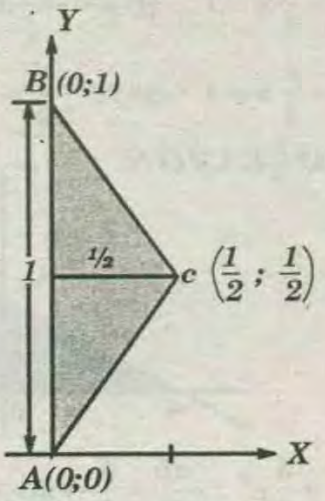
$x + y - 1 = 0 \wedge y = x$

* Es decir:



$$y + y - 1 = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2} \rightarrow C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

* A continuación graficamos una vez más el triángulo, pero esta vez con la indicación de sus respectivos vértices:



Área del triángulo

$$=\frac{1\times\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}u^2$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 20 :

Si el punto $(4;a)$ pertenece a la recta :

$L: 3x-5y+15=0$. Calcular el valor de "a".

A) 1 B) 2 C) 6,3 D) 5,4 E) 10

RESOLUCIÓN :

* Si $(4;a) \in L: 3x-5y+15=0 \rightarrow 3(4)-5a+15=0$

$$12-5a+15=0$$

$$\rightarrow -5a=-27 \Rightarrow a=\frac{27}{5} \Rightarrow a=5,4$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 21 :

La recta L_1: $3x-4y-10=0$ es paralelo a la recta "L_2" que pasa por el punto $A(2;-3)$, calcular su ecuación:

A) $3x-y-1=0$ B) $3x+4y+1=0$ C) $3x-4y-18=0$

RESOLUCIÓN :

* De: $L_1: 3x-4y-10 \rightarrow m_1=-\frac{3}{-4}=\frac{3}{4}$

* Como: $L_1 \parallel L_2 \rightarrow m_2=m_1=\frac{3}{4}$

* Calculamos la ecuación de "L_2" reemplazando m_2 y $A(2;-3)$ en:

$$m_2=\frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{y-(-3)}{x-2} \Rightarrow 3x-4y-18=0$$

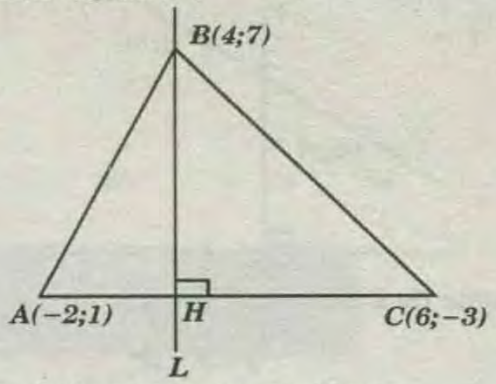
RPTA : "C"

PROBLEMA 22 :

Los vértices de un triángulo son los puntos $A=(-2;1)$; $B=(4;7)$; $C=(6;-3)$. Halle la ecuación de la recta que contiene a la altura BH.

A) $2x-y-1=0$ B) $x+y+7=0$ C) $x-y+2=0$
D) $3x+y-1=0$ E) $2x+y+10=0$

RESOLUCIÓN :



Pendiente de la recta que contiene a

$$\overline{AC}: m_{\overline{AC}}=\frac{-3-1}{6+2}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \rightarrow m=2$$

* Ecuación de L: $L: y-7=(2)(x-4)$

$$L: 0=2x-y-1$$

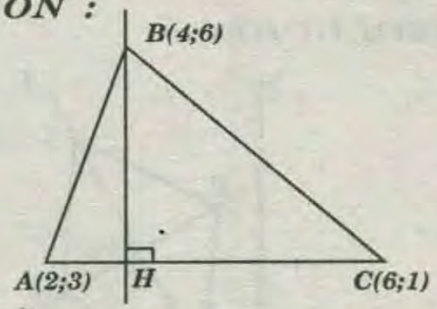
RPTA : "A"

PROBLEMA 23 :

Los vértices de un triángulo son los puntos $A(2;3)$, $B(4;6)$, $C(6;1)$. Halle la ecuación de la recta que contiene a la altura relativa al lado AC.

A) $y=x-2$ B) $y=x+2$ C) $y=2x-2$
D) $y=2x+2$ E) $y=x$

RESOLUCIÓN :



* Pendiente de $\overleftrightarrow{AC}$:

$$K=\frac{1-3}{6-2}=-\frac{1}{2}$$

* Pendiente de L : $m=2$

* Ecuación de L: $L: y-6=(2)(x-4)$

$$\Rightarrow L: y=2x-2$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 24 :

Dadas las rectas L_1 y L_2:

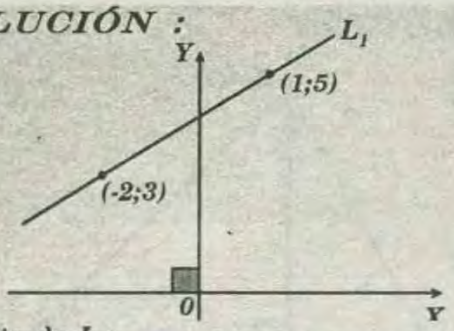
L_1: Pasa por los puntos $(-2;3)$ y $(1;5)$

L_2: $2ax-(a+3)y=5$

Si $\overline{L_1}$ es perpendicular a $\overline{L_2}$. Halle : $a-1$

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{16}{7}$ C) $-\frac{2}{7}$ D) $-\frac{16}{7}$ E) $\frac{3}{7}$

RESOLUCIÓN :



* Pendiente de L_1: $m_1=\frac{5-3}{1+2}=\frac{2}{3}$

* Pendiente de L_2: $\left[\frac{2a}{a+3}\right]$

* Por teoría; si $L_1 \perp L_2$: $\left[\frac{2a}{a+3}\right]\left(\frac{2}{3}\right)=-1$

* Efectuando : $a=-\frac{9}{7}\Rightarrow a-1=-\frac{16}{7}$

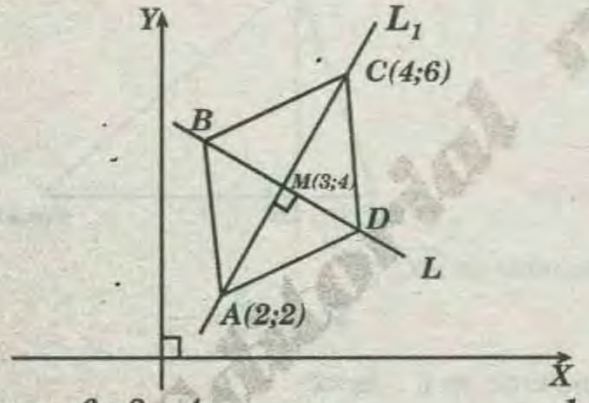
RPTA : "D"

PROBLEMA 26 :

Se tiene el rombo **ABCD**, donde **A =(2;2)** y **C= (4;6)**. Calcule la ecuación de la recta que contiene a la diagonal **BD**.

A) $x+2y-3=0$ **B)** $x+2y-7=0$
C) $x+2y+11=0$ **D)** $x+2y-11=0$
E) $x+y-3=0$

RESOLUCIÓN :



$$m_1=\frac{6-2}{4-2}=\frac{4}{2}=2\Rightarrow m(2)=-1\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$$

* Ecuación : de L : $L:\ y-4=-\frac{1}{2}(x-3)$

$$\Rightarrow L:\ 0=x+2y-11$$

RPTA : "D"

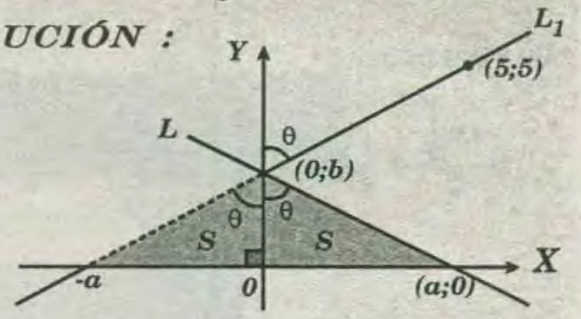
PROBLEMA 27 :

Un rayo de luz que parte de **(5; 5)** indique en un espejo plano que está sobre el eje **Y** . Si el rayo reflejado forma con los ejes coordenadas en el primer cuadrante un triángulo de $\frac{5}{8}u^2$ de área , halle la ecuación cartesiana del rayo reflejado.

A) $y=-\frac{5}{4}x-1$ **B)** $y=-\frac{4}{5}x+1$ **C)** $y=-\frac{4}{5}x-1$

D) $y=-\frac{5}{4}x+1$ **E)** $y=-\frac{4}{5}x-2$

RESOLUCIÓN :



* Dato :

$$S=\frac{5}{8}\mu^2\Rightarrow\frac{ab}{2}=\frac{5}{8}\rightarrow ab=\frac{5}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

* Ecuación simétrica de la recta L_1: $L_1:-\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Como $(5;5)\in L_1\ \Rightarrow -\frac{5}{a}+\frac{5}{b}=1\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$

* Resolviendo: **(I)** y **(II)**:

$$b=1\ \wedge\ a=\frac{5}{4}\Rightarrow m_L=-\frac{1}{\frac{5}{4}}\rightarrow m_L=-\frac{4}{5}$$

* Luego la ecucación de la recta L es :

$$L:\ y-1=-\frac{4}{5}(x-0)\Rightarrow L:\ y=-\frac{4}{5}x+1$$

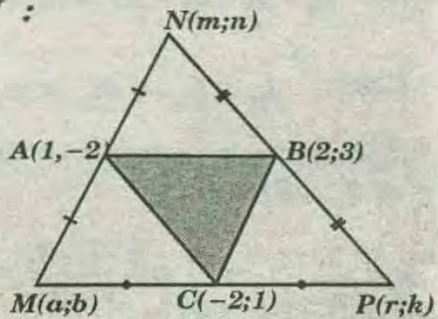
RPTA : "B"

PROBLEMA 28:

Dado el vértice **A(1; – 2); B(2;3)** y **C(– 2;1)** son los vértice del triángulo mediano del triángulo **MNP**. Halle la suma de la abscisa y de la ordenada de uno de los vértices del triángulo **MNP**.

A) -7 **B)** -3 **C)** -2 **D)** 0 **E)** 4

RESOLUCIÓN :



* Sabemos que :

$A(1;-2)=\left(\frac{a+m}{2};\frac{b+n}{2}\right)$	$B(2;3)=\left(\frac{m+r}{2};\frac{n+k}{2}\right)$	$C(-2;1)=\left(\frac{a+r}{2};\frac{b+k}{2}\right)$

* Resolviendo el sistema :

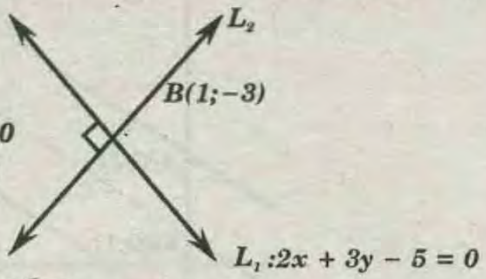
$a=-3\ ;\ b=-4\ ;\ m=5\ ;\ n=0\ ;\ r=-1$
$k=1\rightarrow a+b=-3-4=-7$

RPTA : "A"

PROBLEMA 29 :

Del gráfico mostrado, calcular la ecuación de "L_2".

A) $x-y=0$
B) $x+y+5=0$
C) $3x-2y-9=0$
D) $x-2y+7=0$
E) $x+y+7=0$



RESOLUCIÓN :

* De: $L_1: 2x+3y-5=0 \rightarrow m_1=-\frac{2}{3}$

* Como: $L_1 \perp L_2 \rightarrow m_1 \times m_2=-1$

$$\rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)\times m_2=-1 \Rightarrow m_2=\frac{3}{2}$$

* Calculamos la ecuación de "L_2" reemplazando "m_2" y $B(1;-3)$ en:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow \frac{3}{2}=\frac{y-(-3)}{x-1} \Rightarrow 3x-2y-9=0$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 30 :

La recta L_1: $x-y-6=$ es perpendicular a la recta "L_2" que pasa por el punto $M(1;2)$. Calcular las coordenadas del punto de intersección de dichas rectas.

A) (1;0) B) (2;1) C) (0;2) D) (3;1) E) $\left(\frac{9}{2};-\frac{3}{2}\right)$

RESOLUCIÓN :

$$L_1: x-y-6=0 \rightarrow m_1=-\frac{1}{-1}=1$$

* Como : $L_2 \perp L_1 \rightarrow m_1 \times m_2=-1$

$$\Rightarrow (1)\times m_2=-1 \Rightarrow m_2=-1$$

* Calculamos la ecuación de "L_2" reemplazando "m_2" y $M(1;2)$ en:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow -1=\frac{y-2}{x-1} \rightarrow L_2: x+y-3=0$$

* Para calcular el punto de intersección de dichas rectas resolvemos sus ecuaciones en forma simultánea: $L_1: x-y=6$

$$L_2: x+y=3$$

* Sumando resulta: $2x=9 \rightarrow x=\frac{9}{2}$

* Restando resulta: $-2y=3 \rightarrow y=-\frac{3}{2}$

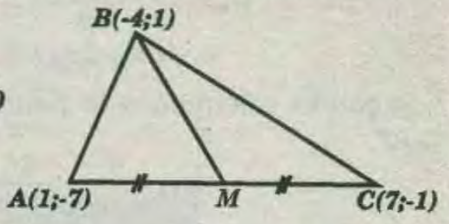
* El punto de intersección es: $(x;y)=\left(\frac{9}{2};-\frac{3}{2}\right)$

RPTA : "E"

PROBLEMA 31 :

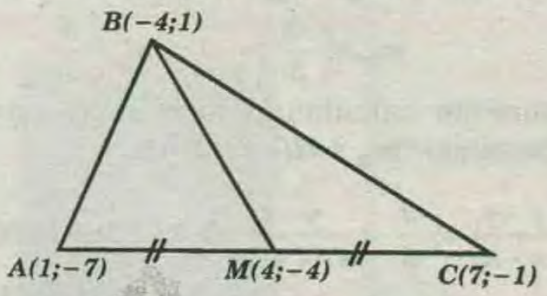
Calcular la ecuación de la mediana "BM".

A) $5x-y+12=0$
B) $5x+8y+12=0$
C) $8x-5y-12=0$
D) $x-y+1=0$



RESOLUCIÓN :

* Calculamos las coordenadas del punto medio "M" así:



$$x_M=\frac{1+7}{2}=4 \wedge y_M=\frac{-7-1}{2}=-4$$

$$\rightarrow M(x_M;y_M)=M(4;-4)$$

* Calculamos la pendiente de "BM" así:

$$m_{BM}=\frac{-4-1}{4-(-4)}=\frac{-5}{8}$$

* Elegimos como punto conocido a $M(4;-4)$ y luego reemplazamos en:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

$$\rightarrow -\frac{5}{8}=\frac{y-(-4)}{x-4} \rightarrow 5x+8y+12=0$$

RPTA: "B"

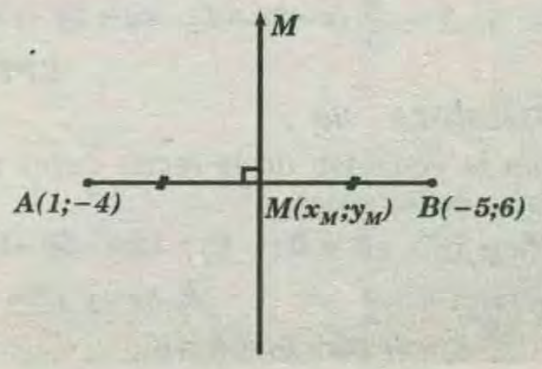
PROBLEMA 32 :

Calcular la ecuación de mediatriz del segmento cuyos extremos son: $A(1;-4)$ y $B(-5;6)$

A) $3x-5y+11=0$ B) $x+y-5=0$
C) $x-5y=0$ D) $x+y=0$

RESOLUCIÓN :

* La mediatriz es una recta perpendicular al segmento "AB" que pasa por su punto medio.



* Primero calculamos las coordenadas del punto medio "M".

$$x_M=\frac{1-5}{2}=\frac{-4}{2}=-2 \wedge y_M=\frac{-4+6}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$\Rightarrow M(x_M ; y_M)=M(-2;1)$$

* Segundo calculamos la pendiente del segmento "AB".

$$m_{AB}=\frac{6-(-4)}{-5-1}=\frac{10}{-6}=-\frac{5}{3}$$

* Como "L_M" es perpendicular a $\overline{AB}$ se debe cumplir que:

$$m_M \times m_{AB}=-1$$

$$m_M \times \left(\frac{-5}{3}\right)=-1 \Rightarrow m_M=\frac{3}{5}$$

*Finalmente calculamos la ecuación de "L_M" reemplazando "m_M y $M(-2;1)$" en:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow \frac{3}{5}=\frac{y-1}{x-(-2)} \rightarrow 3x-5y+11=0$$

RPTA: "A"

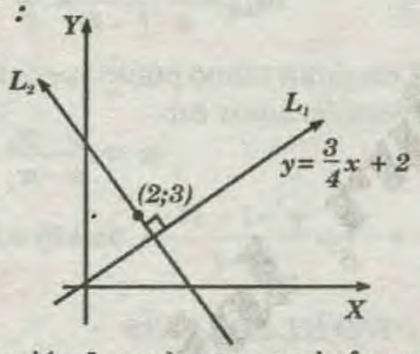
PROBLEMA 33 :

Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2;3)$ y es perpendicular a la recta : $3x-4y+8=0$

A) $4x+3y-17=0$ B) $3x-y+1=0$

C) $3x+4y+17=0$

RESOLUCIÓN :



* Para calcular la ecuación L_2 podemos usa la forma punto-pendiente:

$L_2: y-y_1=m(x-x_1)$

* De $L_1 : y=\frac{3}{4}x+2 \Rightarrow m_1=\frac{3}{4}$

* Como:

$$L_2 \perp L_1 \rightarrow m_2 m_1=-1 \Rightarrow m_2=-\frac{4}{3}$$

$$L_2 : y-3=-\frac{4}{3}(x-2) \Rightarrow L_2 : 4x+3y-17=0$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 34 :

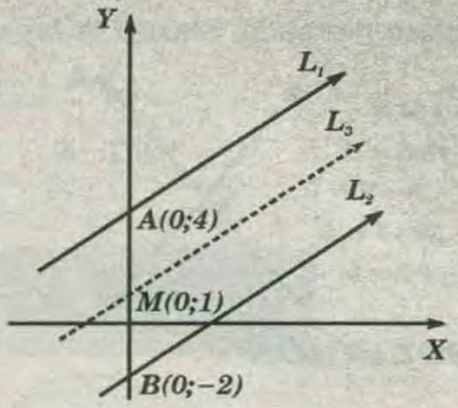
Calcular la ecuación de la recta. cuyos puntos equidistan de las rectas:

$L_1 : 12x-5y+20=0$ $L_2 : 12x-5y-10=0$

A) $5x-12y+5=0$ B) $3x-y+7=0$

C) $12x-5y+5=0$

RESOLUCIÓN :



* Piden: L_3

* Las rectas paralelas tienen igual pendiente.

$$L_1 : y=\frac{12}{5}x+4 \rightarrow A(0;4)$$

$$L_2 : y=\frac{12}{5}x-2 \rightarrow B(0;2)$$

* El punto medio de $\overline{AB}$, $M(0;1)$ equidista de L_1 y L_2

$$\rightarrow L_3 : y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-1=\frac{12}{5}(x-0)$$

$$\Rightarrow L_3 : 12x-5y+5=0$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 35 :

Se desea hallar la ecuación de una recta, que interceptando sobre el eje positivo de las x un segmento de longitud igual a 7 unidades, pase además por el punto de abscisa $x=4$,

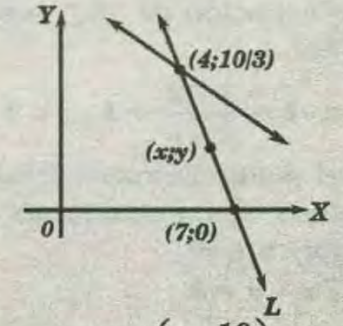
$$5x+3y=30$$

A) $10x+9y-70=0$ B) $9x+10y-70=0$

C) $10x+y-60=0$ D) $x+9y-70=0$

RESOLUCIÓN :

* La ordenada de la recta: $5x+3y=30$, corresponde a: $x=4$, es: $5(4)+3y=30$



$$\rightarrow y=\frac{10}{3}$$

* Luego, el punto es: $\left(4;\frac{10}{3}\right)$

* Para la ecuación de la recta L, pedida:

$$\frac{y-0}{x-7}=\frac{0-\frac{10}{3}}{7-4} \rightarrow 10x+9y-70=0$$

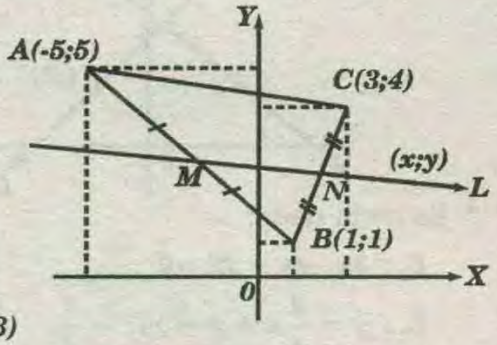
RPTA : "A"

PROBLEMA 36 :

Los vértices del triángulo rectángulo *ABC* son los puntos *A = (–5 ; 5), B =(1;1) y C=(3;4)*. Si *L* es la recta que por los puntos medios de los catetos de este triángulo, y si *(x;y)* es un punto en *L*, entonces *x* é *y*, verifican la ecuación.

A) 8y = 22 – x *B) 8y = 22 + x* *C) 8y = 26 – x*
D) 8y = 26 + x *E) 6y = 7 + 4x*

RESOLUCIÓN :



* Coordenadas de *M*:

$$\left(\frac{-5+1}{2}\ ;\ \frac{5+1}{2}\right) \rightarrow M = (-2;3)$$

* Para *N* : $\left(\frac{1+3}{2}\ ;\ \frac{1+4}{2}\right) \rightarrow N = \left(2\ ;\ \frac{5}{2}\right)$

* Si *(x;y)* es un punto genérico de *L*, para la pendiente:

$$\frac{y-3}{x-(-2)} = \frac{\frac{5}{2}-3}{2-(-2)} \rightarrow 8y = 22 - x$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 37 :

Si *A(7;9), B(– 5; – 7)* y *C(12 ; – 3)* son los vértices de un triángulo , entonces la ecuación de la mediatriz del lado $\overline{AB}$ es:

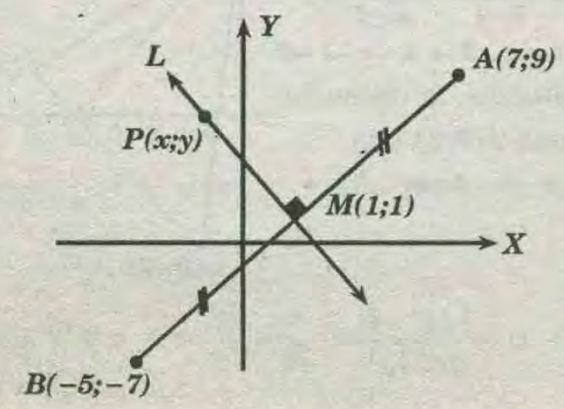
A) 3x + 4y + 7 = 0 *B)3x + 4y – 7 = 0*
C) 3x – 4y + 7 = 0 *D) 3x+4y – 7 = 0*

RESOLUCIÓN :

* No es necesario graficar *C*.

* Las coordenadas de *M*:

$$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{7+-5}{2}\ ;\ \frac{9+-7}{2}\right) \Rightarrow M = (1;1)$$



* La pendiente de $\overline{AB}$: $m_1 = \frac{9-(-7)}{7-(-5)} = \frac{4}{3}$

* Luego, la pendiente de *L*: $m = -\frac{1}{m_1} \rightarrow m = -3/4$

* Finalmente, para la ecuación *L* : $\frac{y-1}{x-1} = \frac{-3}{4}$

$\rightarrow 3x + 4y - 7 = 0$

RPTA : "B"

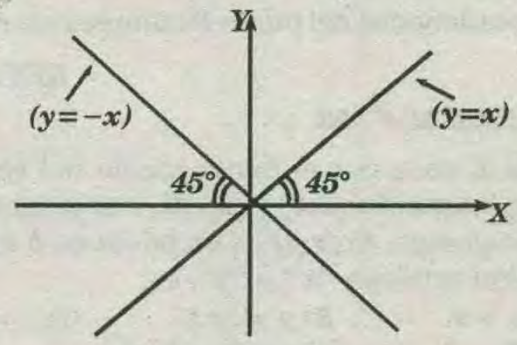
PROBLEMA 38 :

Si un punto sobre la recta *3x +5y =15* equidista de los ejes coordenados, entonces el punto mencionado puede encontrarse:

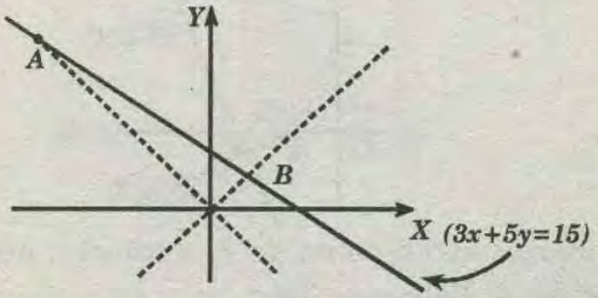
A) En ninguno de los cuadrantes.
B) En el cuadrante I solamente.
C) Solamente en los cuadrantes I y II.
D) Únicamente en los cuadrantes I, II y III.
E) En cada uno de los cuadrantes.

RESOLUCIÓN :

* Recordemos: Los puntos que equidistan de los ejes coordenados, pertenecen a las rectas, que bisecan los ángulos determinados por cada par de semieje:



* Luego, para el problema de los puntos de la recta: *3x+5y=15*, que equidistan de los ejes coordenados, son las intersecciones de ésta con las representadas anteriormente:



* Como vemos:

A ∈ *II* cuadrante y *B* ∈ *I* cuadrante.

RPTA : "C"

PROBLEMA 39 :

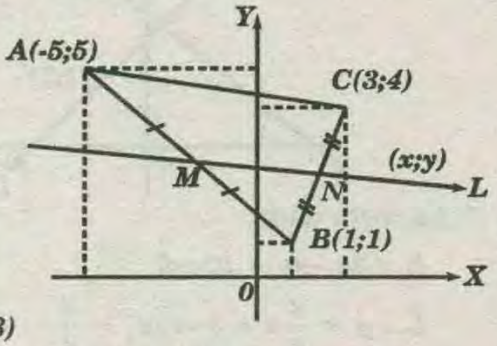
En la figura: *A((– 3;4), B(– 4;3), P(x;y)* se encuentra en la bisectriz del ángulo *AOB*, luego la relación que verifican *"x"* e *"y"* (entre sí) será:

PROBLEMA 36 :

Los vértices del triángulo rectángulo *ABC* son los puntos *A = (–5 ; 5), B =(1;1) y C=(3;4)*. Si *L* es la recta que por los puntos medios de los catetos de este triángulo, y si *(x;y)* es un punto en *L*, entonces *x* é *y*, verifican la ecuación.

A) 8y = 22 – x *B) 8y = 22 + x* *C) 8y = 26 – x*
D) 8y = 26 + x *E) 6y = 7 + 4x*

RESOLUCIÓN :



* Coordenadas de *M:*

$$\left(\frac{-5+1}{2}\ ;\ \frac{5+1}{2}\right) \rightarrow M = (-2;3)$$

* Para *N* : $\left(\frac{1+3}{2}\ ;\ \frac{1+4}{2}\right) \rightarrow N = \left(2\ ;\ \frac{5}{2}\right)$

* Si *(x;y)* es un punto genérico de *L*, para la pendiente:

$$\frac{y-3}{x-(-2)} = \frac{\frac{5}{2}-3}{2-(-2)} \rightarrow 8y = 22 - x$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 37 :

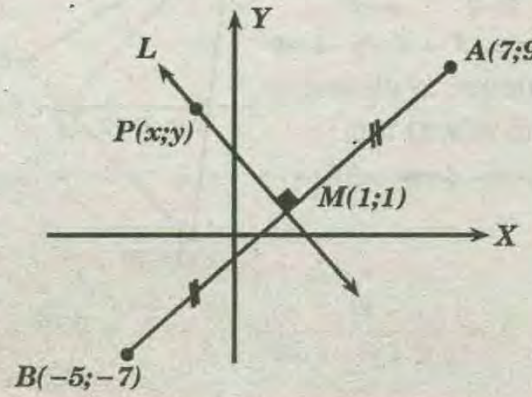
Si *A(7;9), B(– 5; – 7)* y *C(12 ; – 3)* son los vértices de un triángulo , entonces la ecuación de la mediatriz del lado $\overline{AB}$ es:

A) 3x + 4y + 7 = 0 *B)3x + 4y – 7 = 0*
C) 3x – 4y + 7 = 0 *D) 3x+4y – 7 = 0*

RESOLUCIÓN :

* No es necesario graficar *C.*
* Las coordenadas de *M*:

$$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{7+-5}{2}\ ;\ \frac{9+-7}{2}\right) \Rightarrow M = (1;1)$$



* La pendiente de $\overline{AB}$: $m_1 = \frac{9-(-7)}{7-(-5)} = \frac{4}{3}$

* Luego, la pendiente de *L:* $m = -\frac{1}{m_1} \rightarrow m = -3/4$

* Finalmente, para la ecuación *L* : $\frac{y-1}{x-1} = \frac{-3}{4}$

$$\rightarrow 3x + 4y - 7 = 0$$

RPTA : "B"

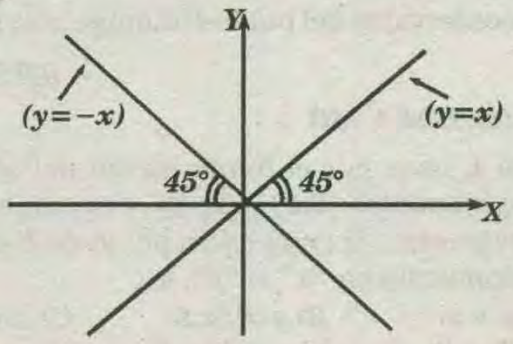
PROBLEMA 38 :

Si un punto sobre la recta *3x +5y =15* equidista de los ejes coordenados, entonces el punto mencionado puede encontrarse:

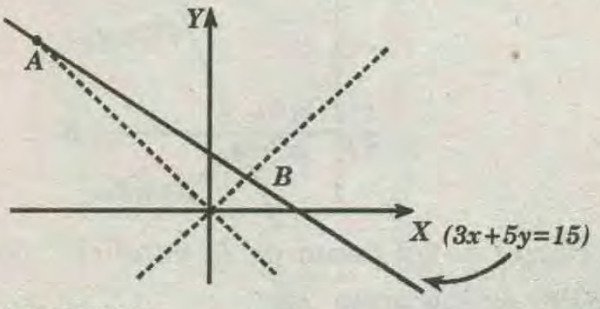
A) En ninguno de los cuadrantes.
B) En el cuadrante I solamente.
C) Solamente en los cuadrantes I y II.
D) Únicamente en los cuadrantes I, II y III.
E) En cada uno de los cuadrantes.

RESOLUCIÓN :

* Recordemos: Los puntos que equidistan de los ejes coordenados, pertenecen a las rectas, que bisecan los ángulos determinados por cada par de semieje:



* Luego, para el problema de los puntos de la recta: *3x+5y=15*, que equidistan de los ejes coordenados, son las intersecciones de ésta con las representadas anteriormente:



* Como vemos:

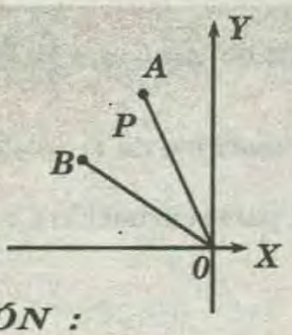
A ∈ *II* cuadrante y *B* ∈ *I* cuadrante.

RPTA : "C"

PROBLEMA 39 :

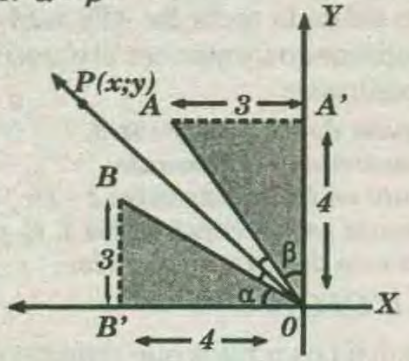
En la figura: *A((– 3;4), B(– 4;3), P(x;y)* se encuentra en la bisectriz del ángulo *AOB*, luego la relación que verifican *"x"* e *"y"* (entre sí) será:

A) $4x-3y=0$
B) $x+y=0$
C) $4x+3y=0$
D) $3x+4y=0$
E) $x+y=0$



RESOLUCIÓN :

* Como los triángulos rectángulos $AA'O$ y $BB'O$, son congruentes: $\alpha=\beta$



* Entonces, $\overline{OP}$ es bisectriz del ángulo $A'OB'$. $\overline{OP}$ pertenece a la recta: $x+y=0$
* Las coordenadas del punto P cumple esta relación.

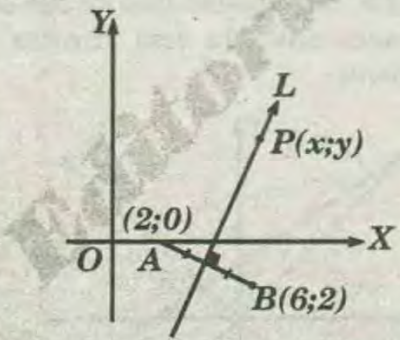
RPTA : "E"

PROBLEMA 40 :

La recta L pasa por el punto medio del segmento que une los puntos $(2;0)$ y $(6;-2)$, y es perpendicular a este segmento. Si $(x;y)$ es un punto de L entonces la relación verifican "x" e "y", es:

A) $y=x+9$ B) $y=2x\,6$ C) $y=x-5$
D) $y=2x-9$ E) $y=2x-8$

RESOLUCIÓN :



* Si $P(x;y)$ es un punto de L, entonces, por ser mediatriz de segmento $\overline{AB}$:

$$d_{\overline{PA}} = d_{\overline{PB}}$$

$$\sqrt{y^2+(x-2)^2} = \sqrt{(y+2)^2+(x-6)^2}$$

* Elevando al cuadrado y simplificando, queda:

$$y=2x-9$$

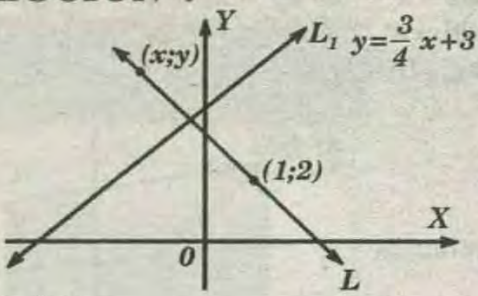
RPTA : "D"

PROBLEMA 41 :

La recta que pasa por el punto $(1;2)$ y es perpendicular a la recta: $3x-4y+12=0$ tiene por ecuación:

A) $3x\ 2y+1=0$ B) $2x+y-8=0$
C) $4x+3y-10=0$ D) $6x+3y-12=0$

RESOLUCIÓN :



* La recta dada:

$$L_1: 3x-4y+12=0$$

$$L_1: y=\frac{3}{4}x+3 \rightarrow m_1=\frac{3}{4}$$

* Como L es perpendicular a L_1: $m=-\dfrac{1}{m_1}$

$\rightarrow m=-\dfrac{4}{3}$ es la pendiente de L.

* Luego, para la ecuación de L : $\dfrac{y-2}{x-1}=\dfrac{4}{3}$
* De donde: $4x+3y-10=0$

RPTA : "C"

PROBLEMA 42 :

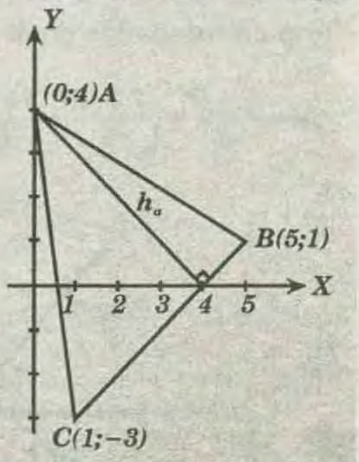
Determina la altura trazada desde A al lado BC del triángulo ABC, cuyos vértices son:

$$A(0;4)\ ,\ B(5;1)\ y\ C(1;-3).$$

A) 4 B) $3\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$ D) 8 E) 6

RESOLUCIÓN :

* De acuerdo con el gráfico, se trata de calcular la distancia del punto A a la recta que pasa por B y C.
* Luego: determinaremos la ecuación de la recta que pasa por B y C, así:



$$\frac{y-1}{x-5}=\frac{1-(-3)}{5-1} \rightarrow \frac{y-1}{x-5}=1$$

$$\rightarrow y-1=x-5 \rightarrow x-y-4=0$$

* Finalmente, la distancia del punto $A(0;4)$ a la recta: $x-y-4=0$, será:

$$h_a=\frac{|-4-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \rightarrow h_a=4\sqrt{2}$$

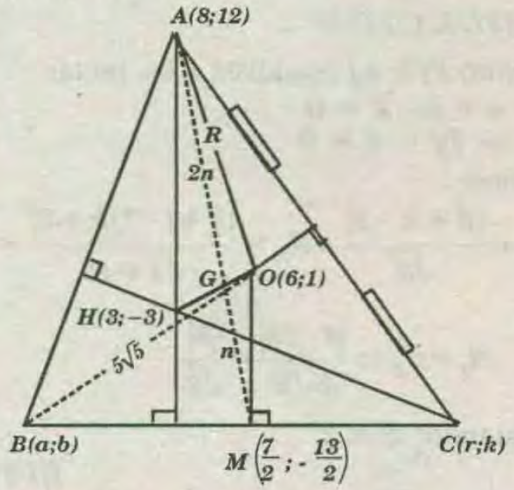
RPTA : "C"

PROBLEMA 43 :

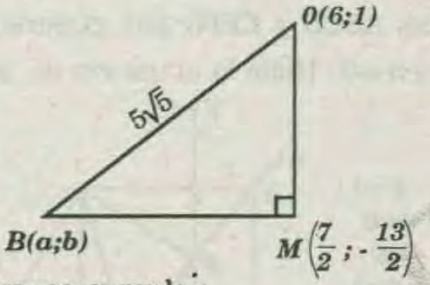
Dado el vértice $A(8;12)$ de un triángulo, su ortocentro $H(3;-3)$ y su circuncentro $O(6;1)$. Calcule las coordenadas de los otros dos vértices.

A)(−4 ; −3)(11; −8) B)(−4;3) y (11;8) C)(−3;4) y (8;11)
D)(−4;6) y (−9;11) E)(−4; −4)y(11; −9)

RESOLUCIÓN :



$$R^2=(8-6)^2+(12-1)^2 \rightarrow R=5\sqrt{5}$$



* De la figura, se cumple :

$$\underbrace{m_{\overline{BM}}}\times\underbrace{m_{\overline{OM}}}=-1\Rightarrow\left(\frac{2b+13}{2a-7}\right)(3)=-1$$

* Simplificando : $a+3b+16=0$ .....(I)

* Por distancia entre dos puntos :

$$(5\sqrt{5})^2=(a-6)^2+(b-1)^2 \text{.....(II)}$$

* De (I) y (II): $b=-9 \Rightarrow a=11$

$b=4 \Rightarrow a=-4$

* Las coordenadas de los otros dos vértices es:

$(-4;-4)$ y $(11;-9)$

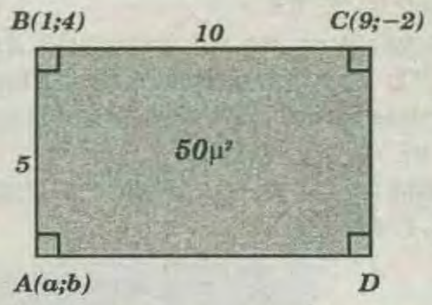
RPTA: "E"

PROBLEMA 44 :

El área de una región rectangular $ABCD$ es $50u^2$, si las coordenadas de B y C son $(1;4)$ y $(9;-2)$ respectivamente , halle las coordenadas positivas del vértice A.

A)(3; 8) B)(2; 8) C)(4; 8) D)(4;10) E)(2;10)

RESOLUCIÓN :



$$BC^2=(9-1)^2+(-2-4)^2 \Rightarrow BC=10$$

* Por dato : $AB\times 10=50$

$\Rightarrow AB=5$

$\Rightarrow 5^2=(a-1)^2+(b-4)^2$ .....(I) También:

$$\underbrace{m_{\overline{AB}}}\times\underbrace{m_{\overline{BC}}}=-1\Rightarrow\frac{4-b}{1-a}\times\frac{-2-4}{9-1}=-1$$

* Simplificando : $3b=4a+8$ .....(II)

* Resolviendo (I) y (II); los valores positivos de la coordenadas del vértice A es : $A(4;8)$

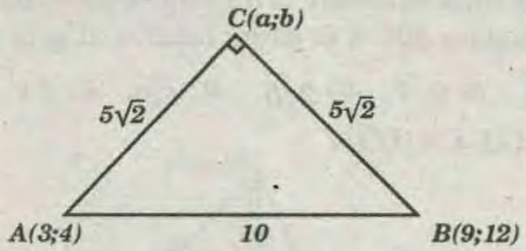
RPTA : "C"

PROBLEMA 45 :

Sea ABC un triángulo rectángulo isósceles , si las coordenadas de la hipotenusa A y B son $(3;4)$ y $(9;12)$ respectivamente ,halle las coordenadas del tercer vértice.

A)(5;10) B)(10;5) C)(2;5) D)(11;2) E)(5;11)

RESOLUCIÓN :



* Por distancia entre dos puntos :

$$(5\sqrt{2})^2=(a-3)^2+(b-4)^2 \text{.....(I)}$$

* Producto de pendientes :

$$\underbrace{m_{\overline{AC}}}\times\underbrace{m_{\overline{BC}}}=-1\Rightarrow\frac{b-4}{a-3}\times\frac{b-12}{a-9}=-1 \text{.....(II)}$$

* De (I) y (II):

$3a+4b-50=0$ .....(III)

$0=b^2-16b+55$

$b \quad -11$

$b \quad -5$

* Si : $b=11 \Rightarrow a=2$

$b=5 \Rightarrow a=10 \rightarrow C(10;5)$

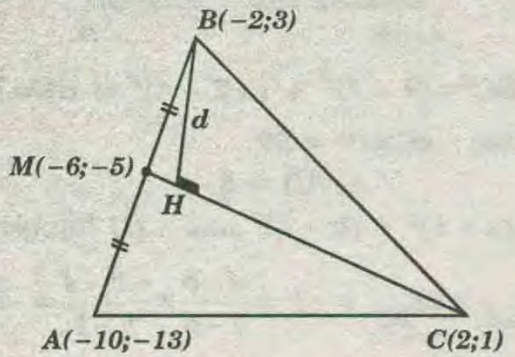
RPTA: 'B"

PROBLEMA 46 :

Dado los vértices de un triángulo $A(-10;-13)$, $B(-2;3)$, $C(2;1)$ y la mediana CM. La longitud de la perpendicular trazada del vértice B a la mediana CM mide (en u):

A)2 B)3 C)4 D)5 E)6

RESOLUCIÓN :



* De la figura : $m_{\overline{MC}} = \frac{1+5}{2+6} = \frac{3}{4}$

* Ahora : $\overline{MC} : y-1 = \frac{3}{4}(x-2) \Rightarrow \overline{MC} : 0 = 3x-4y-2$

* Luego : $d = \frac{|3(-2)+(-4)(3)-2|}{\sqrt{3^2+4^2}} \rightarrow d = 4$

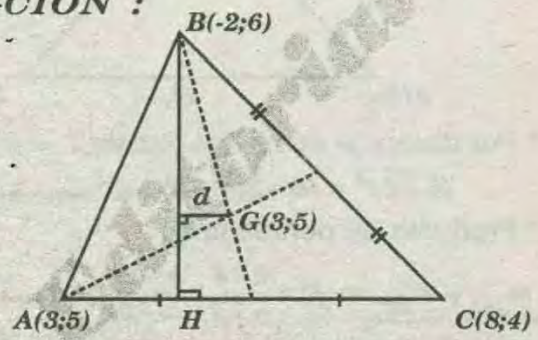
RPTA : "C"

PROBLEMA 47 :

Los vértices de un triángulo son $A(3;5)$, $B(-2;6)$ y $C(8;4)$. Halle la distancia trazada desde el baricentro del triángulo ABC a la altura relativa al lado AC.

A) $2\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{7}$ C) $2\sqrt{5}$ D) $\sqrt{26}$ E) $3+\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN :



* De la figura.:

$$m_{\overline{AC}} = \frac{4-5}{8-3} = -\frac{1}{5}$$

* Como $\overline{BH} \perp \overline{AC} \Rightarrow \left(-\frac{1}{5}\right)(m_{\overline{BH}}) = -1$

$$m_{\overline{BH}} = 5$$

* Ahora : $\overline{BH} : y-6 = 5(x+2) \Rightarrow \overline{BH} : 0 = 5x-y+16$

* Luego: $d = \frac{|5(3)+(-1)(5)+16|}{\sqrt{5^2+1}}$

* Simplificando:

$$d = \sqrt{26}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 48 :

Halle el valor de K tal que el punto $P(2;k)$ sea equidistante a las rectas L_1: $x+y-2=0$ y L_2: $x-7y=-2$

A) 4 B) 1 C) 0 D) −1 E) 2

RESOLUCIÓN :

Si el punto $P(2;k)$ equidista a las rectas

L_1: $x+y-2=0$

L_2: $x-7y+2=0$

Se cumple :

$$d_1 = \frac{|2+k-2|}{\sqrt{2}} \wedge d_2 = \frac{|2+(-7)k+2|}{\sqrt{1+49}} = \frac{|4-7k|}{\sqrt{50}}$$

* Pero :

$$d_1 = d_2 \Rightarrow \frac{|4-7k|}{5\sqrt{2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

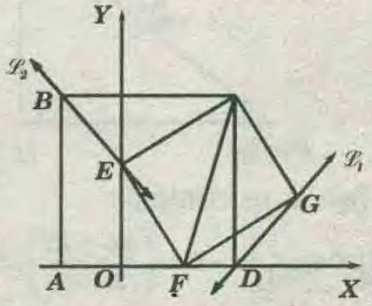
* Efectuando: $k = 2$

RPTA : "E"

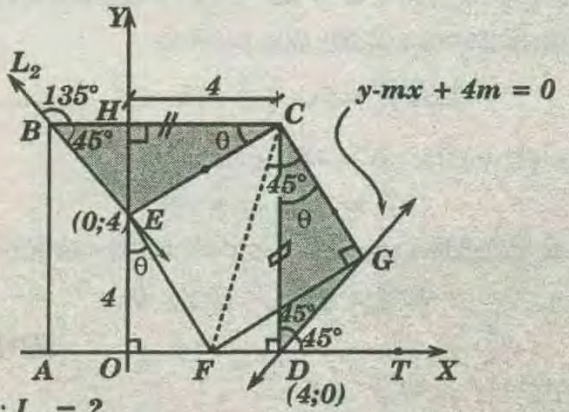
PROBLEMA 49 :

Del gráfico, $ABCD$ y $CEFG$ son cuadrados y Si $\overline{\mathscr{L}_1}$ $y-mx+4m=0$. Halle la ecuación de $\overline{\mathscr{L}_2}$.

A) $2x+y-4=0$
B) $x-y-4=0$
C) $x+y-4=0$
D) $2x-y+4=0$
E) $x+2y+4=0$



RESOLUCIÓN :



* Piden : $L_2 = ?$

$\triangle CFDG$: Inscriptible :

$\rightarrow m\sphericalangle GDT = m\sphericalangle FCG = 45°$

$m_{L_1} = tg45° = 1 \quad \rightarrow y = mx-4m$

$\rightarrow y = x-4$

* Para $y=0 \rightarrow x=4 \Rightarrow D=(4;0)$

* $\Delta BEC \cong \Delta DGC$ (LAL)

$\rightarrow m\sphericalangle CBE = m\sphericalangle CDG = 45° \Rightarrow m_{L_2} = tg135° = 1$

* $\triangle CHE \cong \triangle EOF \rightarrow EO = HC = 4$

$\rightarrow E = (0;4)$

$L_2 : y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y - 4 = -1(x - 0)$

$\Rightarrow L_2 : x + y - 4 = 0$

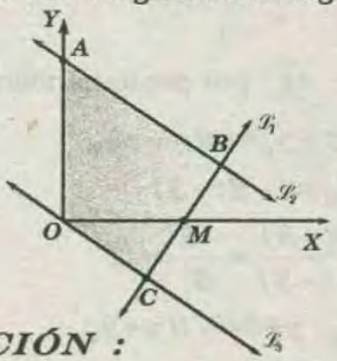
RPTA : "C"

PROBLEMA 50 :

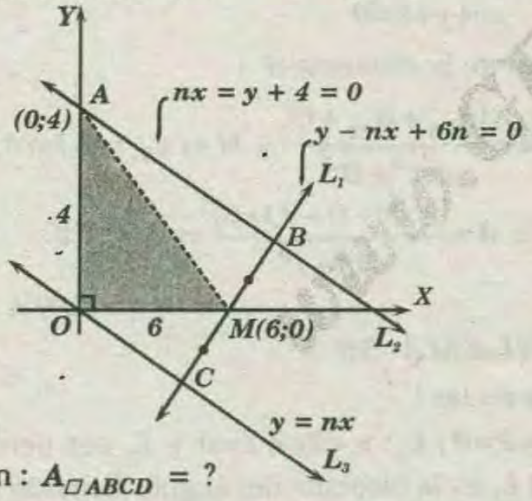
Según el grático , $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$: $y - nrx + 6m = 0$ $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ $nx - y + 4 = 0$; $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_3}$: $nx = y$; $BM = MC$.

Calcule el área de la región cuadrangular $OABC$.

A) 12
D) 24
C) 18
D) mn
E) 6mn



RESOLUCIÓN :



* Piden : $A_{\square ABCD} = ?$

$m_{L_3} = m_{L_2} \rightarrow L_3 // L_2$

* Propiedad : $A_{\square ABCD} = 2_{A\Delta AMO}$

* Para L_1:

Si $y = 0 \rightarrow x = 6 \Rightarrow M = (6; 0)$

* Para L_2 :

Si $x = 0 \rightarrow y = 4 \Rightarrow A = (0; 4)$

$$A_{\square ABCD} = 2\times\left(\frac{4\times 6}{2}\right)$$

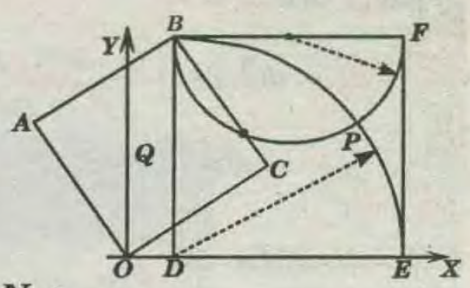
$\Rightarrow A_{\square ABCD} = 24$

RPTA : "B"

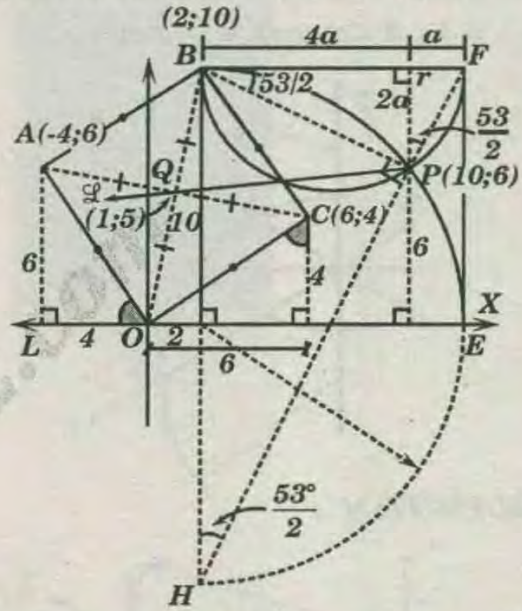
PROBLEMA 51 :

Del gráfico $OABC$ y $DBFE$ son cuadrados, Q es centro del cuadrado $OABC$ y $A=(-4;G)$. Halle la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{PQ}$.

A) $x+9y+4-1=0$
D) $x-9y+40=0$
C) $x-9y+22=0$
D) $x+9y-44=0$
E) $x-9y+44=0$



RESOLUCIÓN :



Piden:

$\overleftrightarrow{PQ} = ?$

$$Q = \frac{A+C}{2} = \frac{O+B}{2} \rightarrow Q = (1,5) \text{ y } B = (2;10)$$

$$m\sphericalangle PHB = \frac{53°}{2} \wedge m\sphericalangle PBF = \frac{53°}{2}$$

*Se nota : $5a = 10 \rightarrow a = 2 \Rightarrow P = (10;6)$

$$m_{\overleftrightarrow{PQ}} = \frac{6-5}{10-1} = \frac{1}{9}$$

$$L : y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow L : y - 5 = \frac{1}{9}(x - 1)$$

$\Rightarrow L : x - 9y + 44 = 0$

RPTA : "E"

PROBLEMA 52 :

Calcule la distancia de coordenadas a la de la recta $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$, si $\overleftrightarrow{\mathcal{L}} : \{(0;5) + t(2;1) / t \in \mathbb{R}\}$

A) $2\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $\sqrt{10}$ D) $\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN :

$$m = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}$$ Punto de paso : $(0;5)$

LIBRO GRATIS2.COM

$$\rightarrow L: y-5=\frac{1}{2}(x-0)$$

$$L: x-2y+10=10$$

* Piden : $d(0;L)=?$

$$d(0;L)=\frac{|10-2(0)+10|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$$

$$\rightarrow d(0;L)=2\sqrt{5}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 53 :

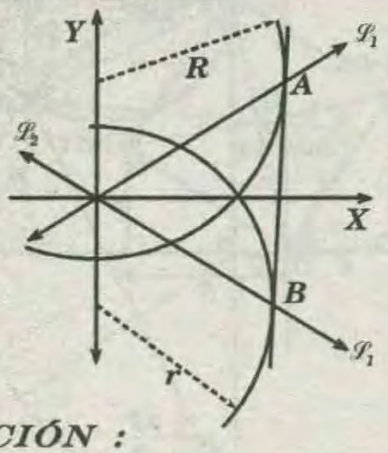
Según el gráfico calcule la razón de pedientes de . $\overline{\mathscr{L}_1}$ y $\overline{\mathscr{L}_2}$, si A y B son puntos de tangencia .

A) $-\frac{r}{R}$

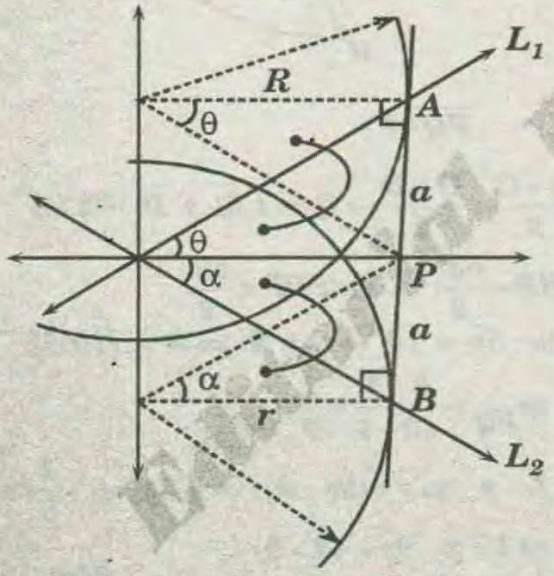
B) $\frac{2r}{R}$

C) $\frac{2r}{R}$

D) $\frac{2R}{r}$



RESOLUCIÓN :



* Piden: $\frac{m_1}{m_2}=?=\frac{tg\theta}{-tg\theta}$

* Propiedad: $AP=PB=a$

$$Tg\theta=\frac{a}{R} \quad y \quad Tg\alpha=\frac{a}{r}$$

$$\rightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{\frac{a}{R}}{-\frac{a}{r}} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2}=-\frac{r}{R}$$

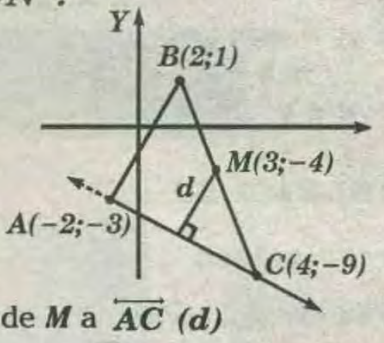
RPTA : "A"

PROBLEMA 54 :

Dados los puntos $A=(-2;-3)$ $B=(2;1)$,$C=(4;-9)$ y M punto medio de $\overline{BC}$. La distancia de M al segmento $\overline{AC}$ es

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C)4 D) $4\sqrt{2}$ E) 6

RESOLUCIÓN :



* Piden: distancia de M a $\overleftrightarrow{AC}$ (d)

$\Rightarrow M$ es punto medio de $\overline{BC}$

$M=(3;-4)$

* Ecuación de $\overline{AC}$ por punto pendiente

$$L_{\overline{AC}}: y-y_0=m(x-x_0)$$

$$(x_0-y_0)=(-2;-3)$$

$$m=\frac{-9(-3)}{4-(-2)}=\frac{-6}{6}=-1$$

$$\Rightarrow L_{\overline{AC}}: y+3=-1(x+2)$$

$$x+y+5=0$$

* Calculo de la distancia d :

$$d=\frac{|A_{x_0}+B_{y_0}+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \wedge M=(x_0:y_0)=(3;-4)$$

$$\Rightarrow d=\frac{|1(3)+1(-4)+5|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Rightarrow d=2\sqrt{2}$$

RPTA : "B"

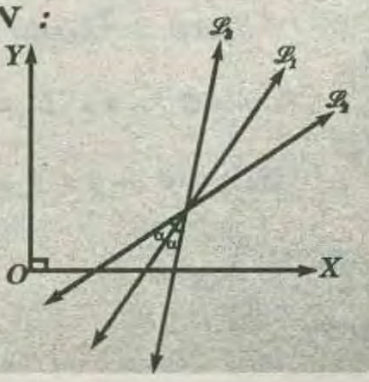
PROBLEMA 55 :

Sean las rectas :

$L_1: x-y-2=0$; $L_2: x-2y-1=0$ y L_3 con pendiente $m>1$. Si L_1 es la bisectriz del ángulo formado por L_2 y L_3 halle m.

A)5/4 B)2 C)5/2 D)3 E)4

RESOLUCIÓN :



* Piden $m=?$ (pendiente de $\overrightarrow{\mathscr{L}_3}$)

* Dato : $\mathscr{L}_1 : x-y-2 \Rightarrow (m_1=1)$

$$\mathscr{L}_1 : x-2y-1=0 \left(m_2=\frac{1}{2}\right)$$

* Por ángulo entre dos rectas :

$$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{m-1}{1+(m)(1)}=\frac{1-1/2}{1+(1)\left(\frac{1}{2}\right)} \rightarrow m=2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 56 :

Dadas las rectas

L_1 : pasa por los puntos $(-2;3)$, $(1;5)$

L_2: $2ax-(a+3)y=5$

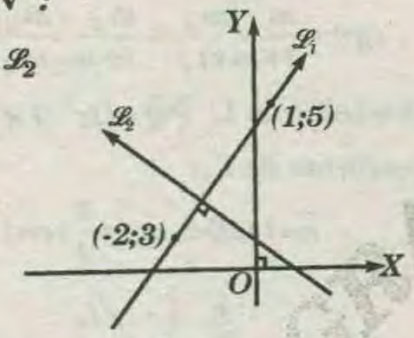
Si L_1 es perpendicular a L_2 , halle $(a+1)$

A) $-9/7$ B) $-2/7$ C) $4/7$ D) $-3/7$ E) $2/7$

RESOLUCIÓN :

* Condición : $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2$

$\Rightarrow m_1 \times m_2 = -1$



* Luego :

$$\mathscr{L}_1 : m_1=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow m_2=-\frac{3}{2}$$

* Siendo :

$$\mathscr{L}_2 : 2ax-(a+3)y=5 \Rightarrow \mathscr{L}_2 : y=\left(\frac{2a}{a+3}\right)x-\frac{5}{a+3}$$

* Pero :

$$m_2=\frac{2a}{a+3}; -\frac{3}{2}=\frac{2a}{a+3} \rightarrow a=-\frac{9}{7}$$

* Piden :

$$a+1=-\frac{9}{7}+1=-\frac{2}{7}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 57 :

El punto $A(3;9)$ es uno de los vértices del triángulo ABC y las ecuaciones de dos de sus medianas son

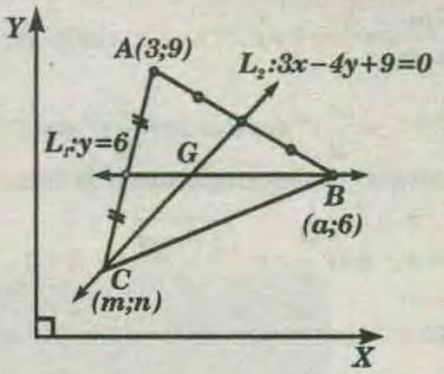
$$L_1 : y-6=0 \; ; \; L_2 : 3x-4y+9=0$$

Determine las coordenadas de los otros dos vértices.

A) B (4 ; 6) y C(2; 4) B) B (1 ; 6) y C(3; 2)

C) B (6 ; 6) y C(1; 1) D) B (11; 6) y C(1; 3)

RESOLUCIÓN :



* G es baricentro de la región triangular ABC.

* G: $L_1 \cap L_2$, desarrollando las ecuaciones

$G=(5;6)$

$$6=\frac{n+9+6}{3} \Rightarrow n=3$$

$$C \in L_2 \Rightarrow 3(m)-4(3)+9=0 \Rightarrow m=1$$

* Además : $5=\frac{1+3+a}{3} \rightarrow a=11 \Rightarrow B(11;6)$

RPTA : "D"

PROBLEMA 58 :

Desde el punto $(6;-4)$ se trazan las rectas L_1 y L_2 con pendientes negativas. El ángulo de inclinación de L_1 es mayor que el ángulo de inclinación de L_2. La recta L_1 determina sobre la parte positiva del eje Y un segmento de $2u$. La recta L_2 determina sobre el eje X un segmento de $\frac{38}{7}u$.

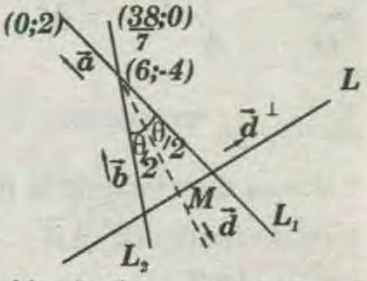
Determinar la ecuación de la recta L que no cruza el cuarto cuandrante tal que forma con L_1 y L_2 un triángulo isósceles, con base en L, de área $15u^2$.

RESOLUCION :

* Pendiente y vector dirección de L_1 .

$$m_1=\frac{2-(-4)}{0-6}=-1$$

$$\Rightarrow \vec{a}=(1;-1)$$



* Pendiente y vector dirección de L_2

$$m_2=\frac{0-(-4)}{38/7-6}=-7 \Rightarrow \vec{b}=(1;-7)$$

* Calculo de la bisectriz :

$$\vec{D}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;-1)+\frac{1}{\sqrt{50}}(1;-7)=\frac{6}{\sqrt{50}}(1;-2)$$

* Vector dirección de la bisectriz $\vec{d}=(1;-2)$

* Ángulo entre L_1 y L_2 :

$tg\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{3}{4}\Rightarrow\theta=37°$; sea r=lado del Δ isósceles,

por lo tanto : $S=\frac{1}{2}r^2 sen\theta\Rightarrow 15=\frac{1}{2}r^2 sen37°\Rightarrow r=5\sqrt{2}$

* Sea h: altura correpondiente a la base .

$$h=r\cos\frac{\theta}{2}=r\sqrt{\frac{1+\cos}{2}}\Rightarrow h=3\sqrt{5}$$

* Punto de intersección de L con la bisectriz :

$$H=(6;4)+h\frac{\vec{a}}{|\vec{d}|}=(6;-4)+3\sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}}(1;-2)\Rightarrow M=(9;-10)$$

* Vector dirección de L: $\vec{d}^{\perp}=(2;1)$

* por lo tanto:

Ecuación vectorial de L:

$$L=\{M+a\vec{d}^{\perp}\}=\{(9;-10)+s(2;1)/s\in\mathbb{R}\}$$

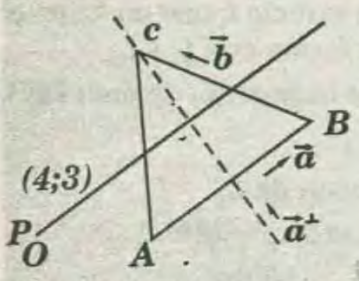
PROBLEMA 59 :

Sea ABC un triángulo isósceles de lados iguales $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

$A=(5;2)$; $B=(13;8)$. $L=\{P_0+t\vec{a}/t\in\mathbb{R}\}$ contiene a los puntos medios de los lados medios $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

$|\overline{AC}|=5\sqrt{5}$; Hallar la distancia de $P_o=(-12;-\frac{9}{2})$ a la recta que contiene el lado $\overline{BC}$ del triángulo .

RESOLUCION :



* Dato : $|\overline{AC}|=5\sqrt{5}$

* Pendiente de $\overline{AB}$:

$$M=\frac{8-2}{13-5}=\frac{3}{4}$$

* Vector dirección de $\overline{AB}$:

$\vec{a}=(4;3)$, entonces:

* Vector dirección de la mediatriz $\vec{a}^{\perp}=(-3;4)$

* Punto medio de $\overline{AB}$:

$$M=\frac{A+B}{2}=(9;5)\Rightarrow|\overline{AM}|=\frac{1}{2}|\overline{AB}|=\frac{1}{2}|(8;6)|$$

$$\Rightarrow|\overline{AM}|=5\ ;\ |\overline{CM}|^2=|\overline{AC}|^2-|\overline{AM}|^2\Rightarrow|\overline{CM}|=10$$

* Punto C : $C=(9;5)+10\frac{1}{5}(-3;4)\Rightarrow C=(3;13)$

* Vector dirección de $\overline{BC}$: $\vec{b}$

$$\overline{BC}=(-10;5)=5(-2;1)\Rightarrow\vec{b}=(-2;1);\vec{b}^{\perp}=(-1;-2)$$

* Distancia de P_o a $\overline{BC}$:

$$d=\left|Comp_{\vec{b}^{\perp}}\overline{P_0B}\right|=\left|\frac{\overline{P_0B}\cdot\vec{b}^{\perp}}{|\vec{b}^{\perp}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|(25;\frac{25}{2}).(-1;-2)\right|$$

* Finalmente: $d=10\sqrt{5}\,u$

PROBLEMA 60 :

Las rectas L_1; L_2 y L_3 determinan un triángulo rectangulo. $L_1\perp L_2$ en $P=(4;1)$. La bisectriz del ángulo recto corta a L_3 en el punto $Q=(5;-6)$ Además, la ecuación de la bisectriz del ángulo que forman $\overrightarrow{PQ}$ y uno de los lados del triángulo es:

$L_4=\{(5;-6)+t(4;3)/t\in\mathbb{R}\}$. Determinar el área del triángulo formado por las rectas L_1; L_2 y L_3.

RESOLUCION :

* Sea L la recta que contiene a PQ Sean: m; m_1; m_2; m_3 y m_4 las pendientes de L ; L_1; L_2; L_3 y L_4 respectivamente .

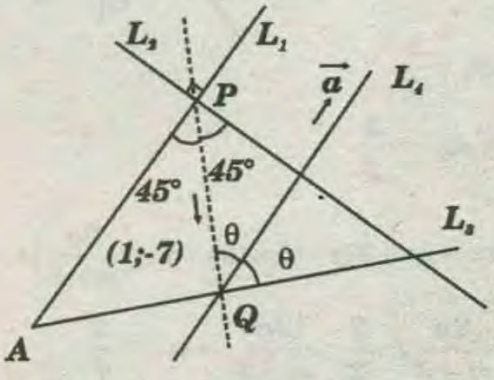
$\sphericalangle$ entre L y L_4 = $\sphericalangle$ entre L_3 – L_4

$$tg\theta=\frac{m-m_4}{1+mm_4}=\frac{m_4-m_3}{1+m_3m_4}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

* Pendiente de L: $\overrightarrow{PQ}=(1;-7)$; $m=-7$

* Pendiente de L_4 :

$$\vec{a}=(4;3)\Rightarrow m_4=\frac{3}{4};en(I):m_3=-\frac{73}{161}$$



* Ángulo entre L_2 y L:

$$Tg45°=\frac{m_2-m}{1+mm_2}\Rightarrow m_2=-\frac{3}{4};m_1=-\frac{1}{m_2}\Rightarrow m_1=\frac{4}{3}$$

* Ecuaciones vectoriales de L_1; L_2 y L_3

$L_1=\{(4;1)+t(3;4)/t\in\mathbb{R}\}$

$L_2=\{(4;1)+r(-4;3)/r\in\mathbb{R}\}$

$L_3=\{(5;-6)+s(-161;73)/s\in\mathbb{R}\}$

$L_1\cap L_3=A(290/863;-3353/863)$

$L_2\cap L_3=B(4980/191;-2971/191)$

$\overrightarrow{AP}=1054/863\ (3;4)$; $\overrightarrow{PB}=1054/191\ (4;-3)$

* Área del triángulo formado por L_1; L_2 y L_3 :

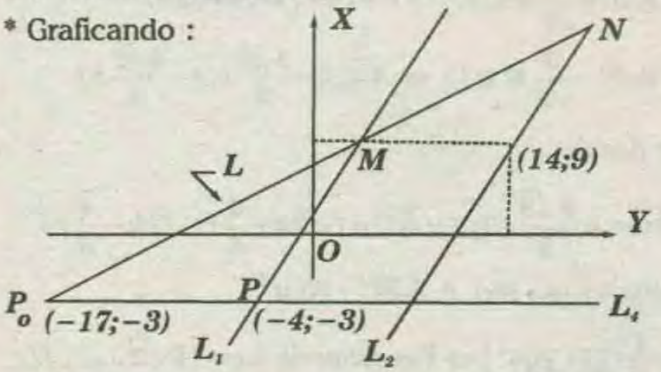
$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}^{\perp}\right|=\frac{1}{2}\frac{(1054)^2}{(863)(191)}|(3;4).(3;4)|=84,245\,u^2$

PROBLEMA 61 :

Sean las rectas L_1 y L_2 de pendiente $\frac{12}{5}$ que pasan por $(-4;-3)$ y $(14;9)$ respectivamente. Sean la rectas L_3 y L_4 paralelas al eje X tal que $d(L_3;L_4)=12$, $P_0=(-17;-3)\in L_4$ y L_3 no corta al tercer cuadrante. Las $L_1;L_2;L_3$ y L_4 forman un cuadrilátero. Si L es otra recta de pendiente positiva que pasa por P_0 tal que forma un triángulo isósceles con L_1 y L_4 cortando en los puntos M y N a las rectas L_1 y L_2 respectivamente. Hallar los puntos de división M y N.

RESOLUCION :

* Graficando :



* Sea: $P=(-4;-3)$; L_1 y L_4 forman un triángulo isósceles.

* Lado de un triángulo isósceles: $\left|\overrightarrow{P_0P}\right|=|(13;0)|=13$

* Vector dirección de L_1 : $\vec{u}_1=\frac{1}{13}(5;12)$

* Punto M :

$$M=(-4;-3)+13(1/13)(5;12)\Rightarrow M=(1;9)$$

* Ecuación vectorial de L :

vector dirección de L : $\overrightarrow{P_0M}=6(3;2)\Rightarrow \vec{a}=(3;2)$

* Luego : $L=\{(1;9)+t(3;2)/t\in\mathbb{R}\}$

* Ecuación vectorial de L_2 :

$L_2=\{(14;9)+r(5;12)/r\in\mathbb{R}\}$

$N=L\cap L_2\Rightarrow$ intersectando L y L_2

$(1;9)+t(3;2)=(14;9)+r(5;12)\Rightarrow r=1$

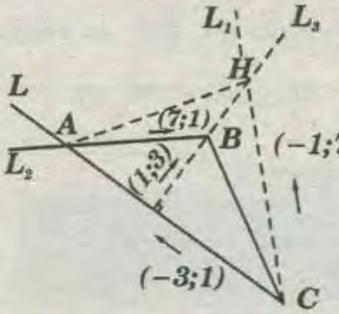
$\Rightarrow N=(14;9)+(5;12)\Rightarrow N=(19;21)$

PROBLEMA 62 :

Sea ABC un triángulo. El lado $\overline{AC}$ mide $3\sqrt{10}\,u$ y se encuentra sobre la recta L: $x+3y+2=0$. Si el ortocentro del triángulo es $H=(3;5)$ y $Proy_{\overline{AB}}\overrightarrow{BH}=\frac{1}{5}(7;1)$

Hallar los vértices del triángulo ABC.

RESOLUCION :



* Por dato :

$Proy_{\overline{AB}}\overrightarrow{BH}=\frac{1}{5}(7;1)\Rightarrow$ vector dirección de $\overrightarrow{AB}=(7;1).....(I)$

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow$ vector dirección de $\overrightarrow{CH}=(7;1)^{\perp}=(-1;7)$

* Ecuación de L_1 recta que pasa por C y H.

$$L_1=\{(3;5)+t(-1;7)/t\in\mathbb{R}\}$$

* De la ecuación dada, tendremos :

$\frac{x-(-2)}{-3}=\frac{y-0}{1}$; de donde:

$P_0=(-2;0)$; $\vec{a}=(-3;1)\Rightarrow L=\{(-2;0)+r(-3;1)/r\in\mathbb{R}\}$

$C=L\cap L_1\Rightarrow$ Igualando ecuaciones y efectuando:

* También:

$A=(4;-2)+3\sqrt{10}\frac{1}{\sqrt{10}}(-3;1)\Rightarrow$ $\boxed{C=(4;-2)}$ ....(II) $\boxed{A=(-5;1)}$ ....(III)

* Sea L_2 la recta que pasa por A y B ; de (I) y (III)

$$L_2=\{(-5;1)+s(7;1)/s\in\mathbb{R}\}$$

* Sea L_3 la recta que pasa por B y H. $L_3\perp L\Rightarrow$ El vector dirección de L_3 es el ortogonal del vector dirección de L; Luego ; la ecuación vectorial de L_3 será:

$$L_3=\{(3;5)+w(1;3)/w\in\mathbb{R}\}$$

$B=L_2\cap L_3\Rightarrow$ igualando ecuaciones y resolviendo:

$$B=(2;2)$$

PROBLEMA 63 :

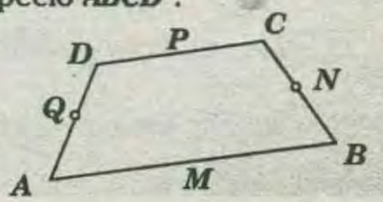
$M=(\frac{11}{2};\frac{7}{2})$; $N=(8;6)$; $P=(\frac{9}{2};\frac{13}{2})$ y $Q=(2;4)$

Son los puntos medios de , los lados del trapecio $ABCD$. (Ver figura)

$\left|\overrightarrow{DC}\right|=\sqrt{10}$. Hallar :

$I)\ Proy_{\overline{AC}}\overrightarrow{PN}-Proy_{\overline{DB}}\overrightarrow{MN}$

$II)$ El área del trapecio $ABCD$.

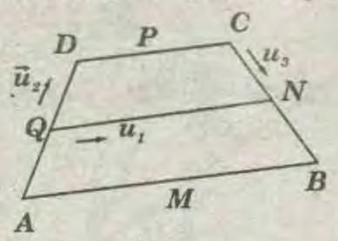


RESOLUCION :

I) Calculo de los vértices C y D:

$\overrightarrow{DC} \parallel \overrightarrow{QN} \Rightarrow$ un vector dirección de $\overrightarrow{DC}$ es $(6;2)$

$\Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3;1)$



* Por dato : $|\overrightarrow{DC}| = \sqrt{10}$

* Luego:

$C = P - \frac{\sqrt{10}}{2}\vec{u}_1 \Rightarrow C = (6;7)$	$D = P - \frac{\sqrt{10}}{2}\vec{u}_1 \Rightarrow D = (3;6)$

* Calculo de los vértices A y B:

$$\overrightarrow{QD} = (1;2) \Rightarrow |\overrightarrow{QD}| = |\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{5}$$

* Vector dirección de $\overrightarrow{AD}$

$$\vec{b} = (1;2) \Rightarrow \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1;2) \Rightarrow A = Q - \sqrt{5}\vec{u}_2 \Rightarrow A = (1;2)$$

* Por lo tanto: $\overrightarrow{CN} = (2;-1) \Rightarrow |\overrightarrow{CN}| = |\overrightarrow{NB}| = \sqrt{5}$

* Vector dirección de $\overrightarrow{BC}$

$$\vec{c} = (2;-1) \Rightarrow \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2;-1) \Rightarrow B = N + \sqrt{5}\vec{u}_3 \Rightarrow B = (10;5)$$

$$\overrightarrow{PN} = (\frac{7}{2};\frac{1}{2}); \overrightarrow{AC} = (5;5); \overrightarrow{MN} = (\frac{5}{2};\frac{5}{2}) \text{ y } \overrightarrow{DB} = (7;-1)$$

* Reemplazando y efectuando :

$$Proy_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{PN} - Proy_{\overrightarrow{DB}}\overrightarrow{MN} = (-\frac{3}{5};\frac{9}{5})$$

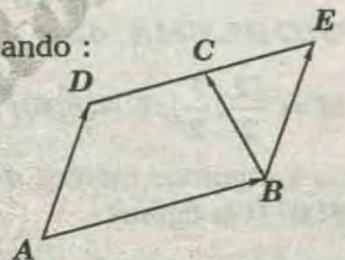
II) Área del trapecio $ABCD$:

$$A = \left|\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}^{\perp}\right| - \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}^{\perp}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} = (9;3), \overrightarrow{BC} = (-7;1), \overrightarrow{AD} = (2;4)$$

* Reemplazando y efectuando :

$$A = 30 - \frac{30}{2} = 15\,u^2$$



PROBLEMA 64 :

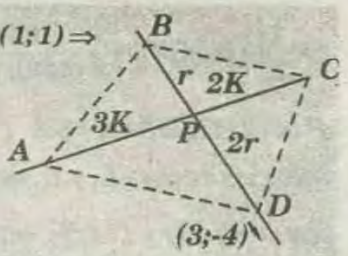
El punto $P=(2;5)$ divide al segmento $\overrightarrow{AC}$ en la razón 3 es a 2 y al segmento $\overrightarrow{BD}$ en la razón 1 es a 2. Si:

$Proy_{\overrightarrow{BD}}\overrightarrow{BC} \parallel (3;-4), Proy_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} \parallel (1;1), \frac{|\overrightarrow{PC}|}{|\overrightarrow{BP}|} = \frac{\sqrt{2}}{5}$

área $\Delta ABC = 35u^2$ y área de $\Delta ADC = 70\,u^2$.

RESOLUCIÓN :

* De los datos: $Proy_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} \parallel (1;1) \Rightarrow$



Un vector dirección de $\overrightarrow{AC}$ es $(1;1)$

$Proy_{\overrightarrow{BD}}\overrightarrow{BC} \parallel (3;-4) \Rightarrow$ Un vector dirección de $\overrightarrow{BD}$ es $(3;-4)$

* Por lo tanto , del gráfico tendremos :

$$D = (2;5) + \frac{2}{5}r(3;-4) \Rightarrow D = (2+\frac{6}{5}r; 5-\frac{8}{5}r)$$

$$B = (2;5) - \frac{1}{5}r(3;-4) \Rightarrow B = (2-\frac{3}{5}r; 5+\frac{4}{5}r)$$

$$C = (2;5) + \frac{2}{\sqrt{2}}k(1;1) \Rightarrow C = (2+\sqrt{2}k; 5+\sqrt{2}k)$$

$$A = (2;5) - \frac{3}{\sqrt{2}}k(1;1) \Rightarrow A = (2-\frac{3\sqrt{2}}{2}k; 5-\frac{3\sqrt{2}}{2}k)$$

* De donde:

$$\overrightarrow{AC} = k\frac{5\sqrt{2}}{2}(1;1); \overrightarrow{BC} = (\sqrt{2}k+\frac{3}{5}r; \sqrt{2}k-\frac{4}{5}r)$$

* Luego: Area del $\Delta ABC : 35\,u^2$

$$35 = \frac{1}{5}\left|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}^{\perp}\right| \Rightarrow \text{Resolviendo } kr = 10\sqrt{2} \ldots\ldots (I)$$

Por dato : $\left|\frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{BP}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{2k}{r} \Rightarrow \frac{k}{r} = \frac{\sqrt{2}}{10} \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$

* De *(I)* y *(II)*: $k = \sqrt{2}$; $r = 10$; reemplazando en A; B; C y D:

$$A = (-1;2), B = (-4;13), C = (4;7) \text{ y } D = (14;-11) \ldots\ldots (III)$$

* Vectores dirección de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AD}$ respectivamente

$$\overrightarrow{AB} = (-3;11), \overrightarrow{BC} = (-4;13), \overrightarrow{CD} = (10;-18), \overrightarrow{AD}\,(15;-13)$$

* Por lo tanto, las ecuaciones de las rectas pedidas serán:

$$L_{\overrightarrow{AB}} = \{(-1;2) + t(-3;11) / t \in \mathbb{R}\}$$

$$L_{\overrightarrow{BC}} = \{(-4;13) + r(8;-6) / r \in \mathbb{R}\}$$

$$L_{\overrightarrow{CD}} = \{(4;7) + s(10;-18) / s \in \mathbb{R}\}$$

$$L_{\overrightarrow{AD}} = \{(14;-11) + w(15;-13) / w \in \mathbb{R}\}$$

PROBLEMA 65 :

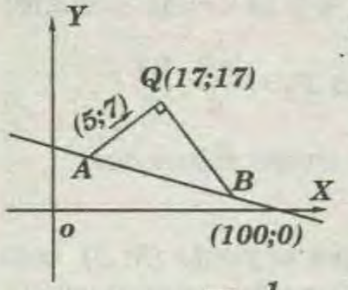
Sea $L : x + 31y - 100 = 0 \wedge Q = (17;17) \in L$. Si A y B son dos puntos en L que forman con Q un triángulo rectángulo AQB recto en Q y donde :

$$Proy_{\overrightarrow{AQ}}\overrightarrow{AB} = (10;14)$$

I) Hallar A y B

II) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por A; B y Q

RESOLUCION :



I) Por ser ABQ un triángulo rectángulo:

$Proy_{\overrightarrow{AQ}}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AQ}=(10;14)$

$|\overrightarrow{AQ}|=2\sqrt{74}$; Punto A :

$$A=(17;17)=2\sqrt{74}\,\frac{1}{\sqrt{74}}(5;7)$$

* Efectuando : $A=(7;3)$

* Transformando la ecuación de L :

$\frac{x-100}{-31}=\frac{y}{1}$; $P_0=(100;0)$; $\vec{a}=(-31;1)\Rightarrow$ Ecuación Vectorial. de L es: $L\{(100;0)+r(-31;1)/r\in\mathbb{R}\}$

*ecuación vectorial de la recta que pasa por Q y B:

$L_1=\{(17;17)+t(-7;5)/t\in\mathbb{R}\}$; $(\overrightarrow{AQ}\perp\overrightarrow{QB})$

$B=L\cap L_1$; Igualando ecuaciones y efectuando:

$$B=(38;2)$$

II) ecuanción de la circunferencia que pasa por A, B y Q

* Punto medio de $\overrightarrow{AB}$:

$$M=(\frac{38+7}{2};\frac{2+3}{2})=(\frac{45}{2};\frac{5}{2})$$

* Radio: $r=|\overrightarrow{AM}|=\frac{1}{2}|(-31;1)|=\frac{1}{2}\sqrt{962}$

$$\mathscr{C}=(x-\frac{45}{2})^2+(y-\frac{5}{2})^2=(\frac{1}{2}\sqrt{962})^2$$

PROBLEMA 66 :

Sea la recta L, dada por la ecuación: $ax+by=c$ determinar las rectas que contienen a los puntos Q, que distan de la recta k unidades.

RESOLUCION :

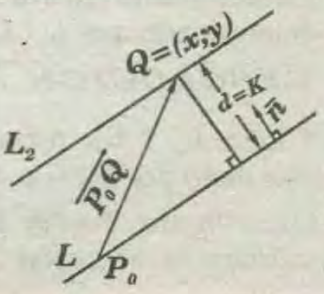
* Sean :

$Q=(x;y)$ punto genérico de la recta pedida L_1 .

$\vec{n}$ =Normal a L ; $\vec{n}=(a;b)$.

$\Rightarrow|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\Rightarrow P_0=L\cap X\Rightarrow P_0=(\frac{c}{a};a)$



* Luego : $\overrightarrow{P_0Q}=(x;y)-(\frac{c}{a};0)=(x-\frac{c}{a};y)$

* De la figura :

$$d=\left|Comp_{\vec{n}}\overrightarrow{P_0Q}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{P_0Q}.\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=k;\ k>0$$

$$d=\left|\frac{(x-\frac{c}{y};y).(a;b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=k\Rightarrow|ax+by-c|=k\sqrt{a^2+b^2}$$

* Por valor absoluto: $\pm(ax+by-c)=k\sqrt{a^2+b^2}$

* Por lo tanto existen dos soluciones :

$$L_1: ax+by=k\sqrt{a^2+b^2}+c$$

$$L_2: ax+by=c-k\sqrt{a^2+b^2}$$

PROBLEMA 67 :

Determinar k , para que la distancia del punto $(2;k)$ a la recta $L=\{(2-s;s);s\in\mathbb{R}\}$ sea 1 .

RESOLUCION :

* Procediendo análogamente a la solución anterior se obtiene :

$$k=\sqrt{2}\ ;\ k=-\sqrt{2}$$

PROBLEMA 68 :

Dadas las rectas:

$$L_1=\{(3;6)+t(1;2)/t\in\mathbb{R}\}$$

$$L_2=\{(0;3)+s(1;-1)/s\in\mathbb{R}\}$$

Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de L_1 y L_2 y que forma con los ejes coordenados positivos un triángulo de área igual a $4u^2$

RESOLUCION :

* Calculemos la intersección .

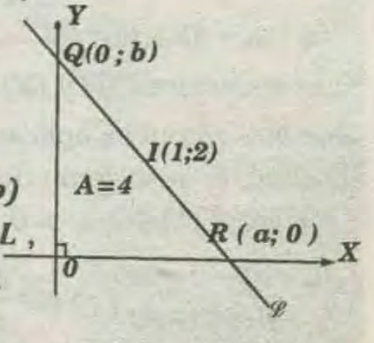
* Sea $I=L_1\cap L_2$; entonces :

$(3;6)+t(1;2)=(0;3)+s(1;-1)$

$\Rightarrow s=1\wedge t=-2.$

$\Rightarrow I=(0;3)+1(1;-1)$

$\Rightarrow I=(1;2)$



*Sean: $Q=(0;b)$ y $R=(a;b)$ puntos que pertenecen a L, recta pedida, entonces su ecuacion simétrica es:

$L:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; como $I\in L$; $L:\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$.....(I)

* Pero $A=4$, entonces $A=\frac{1}{2}ab=4\Rightarrow a=\frac{8}{b}$;

* reemplazando en *(I)* :

$$L:\frac{1}{(\frac{8}{b})}+\frac{2}{b}=1\Rightarrow b^2-8b+16=0$$

$$\Rightarrow (b-4)^2=0\Rightarrow b=4\Rightarrow a=2\Rightarrow R=(2;0)$$

* Con los puntos I y R definimos la recta, buscada;

$$L=\{I+r\overrightarrow{IR};r\in R\};\overrightarrow{IR}=R-I=(2;0)-(1;2)=(1;-2)$$

* Entonces : $L=\{(1;2)+r(1;-2);\ r\in R\}$

PROBLEMA 69 :

Si las distancia entre la rectas :

$L_1=\{(a;5)+t(3;4)/\ t\in R\}$ y $L_2=\{(4;b)+s(-3;-4)/\ s\in R\}$ es 4 unidades; y el punto $(5;\ b-5)$ dista 6 unidades de L_1 encontrar $(a\ ;\ b)$

RESOLUCION :

* Sea $P=(a;\ b)$ el par pedido :

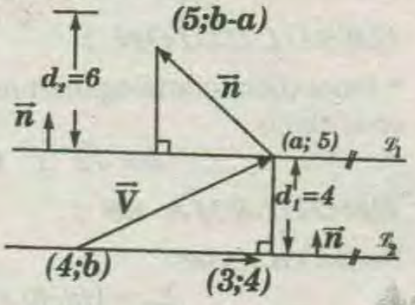
* De la figura :

$$d_1=\left|Comp_{\vec{n}}\vec{V}\right|=4$$

donde:

$$\vec{V}=(a\ ;\ 5)-(4\ ;\ b)$$

$$\vec{V}=(a-4;\ 5-b)$$



$$\vec{n}\perp(L_1//L_2)\Rightarrow\vec{n}=(4;-3);|\vec{n}|=5$$

$$\Rightarrow d_1=\left|\vec{V}.\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=4\Rightarrow\left|(a-4;5-b).(4;-3)\frac{1}{5}\right|=4$$

* Efectuando : $|4a-3b-1|=20$ .....*(I)*

* También:

$$d_2=\left|Comp_{\vec{n}}\vec{r}\ \right|=4$$

$$\vec{r}=(5;\ b-a)-(a;5)=(5-a;\ b-a-5)$$

$$\Rightarrow d_2=\left|(5-a;b-a-5).(4;-3)\frac{1}{5}\right|=6$$

$$\Rightarrow |-a-3b+35|=30.....(II)$$

* Las ecuaciones *(I)* y *(II)* son de la forma: $|c|=20$ y $|d|=30$, entónces aplicando la definición de valor absoluto, se resolverán de la siguiente manera:

* ***PRIMER CASO***: $c>0\ ,\ d>0\Rightarrow c=20\ ,\ d=30$

$$\left.\begin{matrix}4a-3b-1=20\\-a-3b+35=30\end{matrix}\right\}\Rightarrow a=\frac{26}{5},b=\frac{-1}{25};P_1=(\frac{26}{5};\frac{-1}{15})$$

* ***SEGUNDO CASO***: $c<0,\ d>0\Rightarrow -c=20\ ,\ d=30$

$$\left.\begin{matrix}-(4a-3b-1)=20\\(-a-3b+35)=30\end{matrix}\right\}\Rightarrow P_2=(\frac{-14}{5};\frac{39}{15})$$

* ***TERCER CASO***: $c>0,\ d<0\Rightarrow c=20\ ,\ -d=30$

$$\left.\begin{matrix}(4a-3b-1)=20\\-(-a-3b+35)=30\end{matrix}\right\}\Rightarrow P_3=(\frac{86}{5};\frac{239}{15})$$

* ***CUARTO CASO***: $c<0\ ,\ d<0\Rightarrow -c=20\ ,\ -d=30$

$$\left.\begin{matrix}-(4a-3b-1)=20\\-(-a-3b+35)=30\end{matrix}\right\}\Rightarrow P_4=(\frac{46}{5};\frac{93}{5})$$

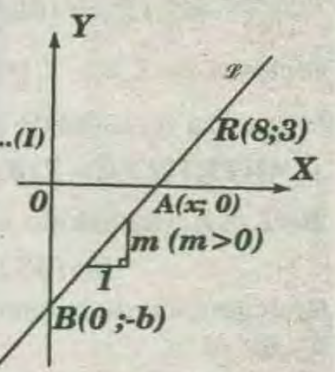
En consecuencias existen cuatro soluciones.

PROBLEMA 70 :

L es una recta que pasa por el punto $(8;\ 3)$, cuya intersección con el eje Y es negativa, cuya pendiente es positiva y que determina con los ejes coordenados, un triángulo cuyo perímetro es 12 unidades. Encontrar la ecuación vectorial, paramétrica y simétrica de L .

RESOLUCION :

* Sea : $R=(8;\ 3)$



$$B=L\cap Y\ ,B=(0,-b),b>0$$

$$L=\{(8;3)+t(8\ ;\ 3)+b)/t\in R\}.....(I)$$

$$A=L\cap X\Rightarrow A=(\frac{8b}{3+b};0)$$

$$\Rightarrow P=OA+AB+BQ=12$$

$$\frac{8b}{3+b}+\sqrt{(\frac{8b}{3+b})^2+b^2}+b=12$$

* De donde: $b^3+18b^2-9b-162=0$

$$(b-3)(b+3)(b+18)=0\Rightarrow b=3>0$$

* En *(I)*: $L:\{(8;3)+t(8;6)/t\in R\}$: Ecuación vectorial

* Ecuación paramétrica :

$$L:\begin{cases}x=8+8t\\y=3+6t\end{cases}$$

* Ecuacion simétrica : $L:\frac{x-8}{8}=\frac{y-3}{6}$

PROBLEMA 71 :

Sean : $L_1:\ 2x-y+1=0$

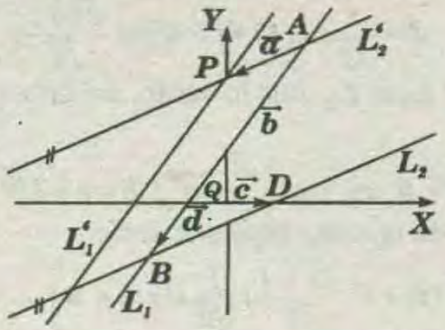
$L_2:\ x-2y-1=0$

Hallar el punto P eje y tal que las paralelas a L_1 y L_2 que pasan por P determinan con L_1 y L_2 un paralelogramo cuya área es igual al área del triángulo determinado. por L_1 ; L_2 y el eje X .

RESOLUCION :

* Sean L_1' y L_2' rectas paralelas a L_1 y L_2 como L_2 esta dado por $L_2:-x+2y=-1$: $L_2';-x-2y=k$,

En la figura, $P=(0;\ b)$ y como $P\in L_2$,Entonces satisface la ecuación :



L_2': $0+2(b)=k \Rightarrow k=2b \Rightarrow L_2'$: $-x+2y=2b$

* Calculo de A : $A=L_1 \cap L_2'$. Entonces :

$$\left.\begin{array}{l} L_1: -2x+y=1 \\ L_2': -x+2y=2b \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{2}{3}b-\frac{2}{3}; y=\frac{4}{3}b-\frac{1}{3}$$

* luego : $A=\frac{1}{3}(2b-2;4b-1)$

* Cálculo de B: $B=L_1 \cap L_2$

$$\left.\begin{array}{l} L_1: -2x+y=1 \\ L_2: -x+2y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=-1; y=-1 \Rightarrow =(-1;-1)$$

* Cálculo de Q : $Q \in$ al eje X , entonces :

L_2': $-x+2(0)=2b \Rightarrow x=-b; \Rightarrow Q=(-2b;0)$

* Cálculo de D: D pertenece al eje X; entonces:

L_2: $-x+2(0)=-1 \Rightarrow x=1; \Rightarrow D=(1;0)$

*** CÁLCULO DE LOS VECTORES :**

* Con los puntos obtenidos y de acuerdo a la figura, tenemos :

$\vec{a}=\overrightarrow{AP}=P-A$; $\vec{a}=\frac{1}{3}(2-2b;1-b)$.....(I)

$\vec{b}=\overrightarrow{AB}=B-A$; $\vec{b}=\frac{1}{3}(-1-2b;-2-4b)$.....(II)

$\vec{c}=\overrightarrow{QD}=D-Q$; $\vec{c}=(1+2b;0)$.....(III)

$\vec{d}=\overrightarrow{QB}=B-Q$; $\vec{d}=(2b-1;-1)$.....(IV)

*** CÁLCULO DE LAS AREAS :**

* Sean: A_1 : Área del paralelogramo.

A_2 : Área del triángulo.

* Entonces :

$A_1=\left|\vec{a}.\vec{b}^{\perp}\right|$; de (II): $\vec{b}^{\perp}=\frac{1}{3}(2+4b;-1-2b)$

$$\Rightarrow A_1=\left|\frac{1}{3}(2-2b;1-b).\frac{1}{3}(2+4b;-1-2b)\right|$$

* Efectuando y simplificando :

$A_1=\frac{1}{3}|1+b-2b^2|$.....$(\alpha)$

$A_2=\frac{1}{2}(\vec{c}.d^{\perp})$ de (IV): $d^{\perp}=(1;2b-1)$

$$\Rightarrow A_2=\frac{1}{2}|(1+2b;0).(1;2b-1)|$$

* Efectuando y simplificando:

$A_2=\frac{1}{2}|1+2b|$.....(β)

*Como : $A_1=A_2 \Rightarrow \frac{1}{3}|1+b-2b^2|=\frac{1}{2}|1+2b|$

*De donde : $\frac{1}{3}(1+b-2b^2)=\frac{1}{2}(1+2b) \Rightarrow 4b^2+4b+1=0$

$\Rightarrow b_1=b_2=-\frac{1}{2}$, valores descartados en (β) ó

ó $\frac{1}{3}(1+b-2b^2)=-\frac{1}{2}(1+2b) \Rightarrow \begin{cases} b_1=\frac{5}{2} \\ b_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow b=\frac{5}{2}; \Rightarrow P=(0;\frac{5}{2})$

PROBLEMA 72 :

Encontrar la medida del ángulo obtuso entre las rectas L_1 y L_2. además hallar la intersección de las mismas

$L_1=\{(-6;3)+t(3;1)/\ t \in \mathbb{R}\} \wedge L_2=\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y=2x+10\}$

RESOLUCION :

* Definiendo vectorialmente :

$L_2=\{(0;10)+r(1;2); r \in \mathbb{R}\}$

*Sea : $I=L_1 \cap L_2 \Rightarrow I=(-3;4)$

* Sean: θ el ángulo buscado : $\vec{a}=(3;1)$, $\vec{b}=(1;2)$.

* Entonces :

$|\vec{a}||\vec{b}|=\cos\theta=\vec{a}.\vec{b} \Rightarrow \sqrt{10}\sqrt{5}\cos\theta=(3;1).(1;2)=5$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}; \theta=45° \Rightarrow \theta=135°$$

PROBLEMA 73 :

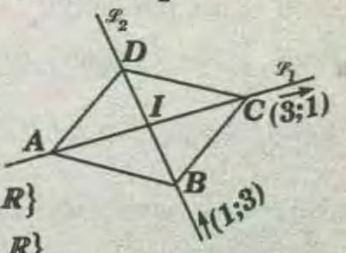
Sea el paralelogramo cuyas vértices son: $A=(-1;6)$, $B=(2;3)$, C y D. Además $\overrightarrow{AC}$ es paralelo a $(3;1)$, $\overrightarrow{DB}$ es ortogonal a $(-3;1)$. Encontrar los vértices C y D. Además su área.

RESOLUCION :

* Sea $\overrightarrow{AC} // (3;1), \overrightarrow{AC} \subset L_1$

$\overrightarrow{DB} \perp (-3;1) \Rightarrow \overrightarrow{DB} // (1;3)$ $DB \subset L_2$

* Entonces:



$L_1=\{(-1;6)+t(3;1), t \in R\}$

$L_2=\{(2;3)+r(1;3), r \in R\}$

* Sea :

$I = L_1 \cap L_2 \Rightarrow I=(5;12)$

$C = A+2\overrightarrow{AI}$, $C:(-1;6)+2(6;6) \Rightarrow C=(11;18)$

$D = B+2\overrightarrow{BI}$, $D=(2;3)+2(2;9) \Rightarrow C=(8;21)$

* Cálculo del área:

$\overrightarrow{AD}=D-A=(8;21)-(-1;6) \Rightarrow \overrightarrow{AD}=(9;15)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(2;3)-(-1;6)=(3;-3) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(3;3)$

$A_{\square}=\left|\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}^{\perp}\right|=|(9;15).(3;3)|=72 \Rightarrow A=72\ u^2$

PROBLEMA 74 :

Sea $\vec{v}$ un vector que sigue la dirección positiva del eje Y, tal que $|\vec{v}|=5$. Sea L_1: $x-y+12=0$; L_2 y L_3 rectas con pendientes m_1; m_2 y m_3 respectivamente, de modo que : $m_1 > m_2 > m_3$. Si se sabe ademas que los ángulos :

$$\sphericalangle(\vec{v},L_1)=\sphericalangle(L_1,L_2)=\sphericalangle(L_2,L_3)$$

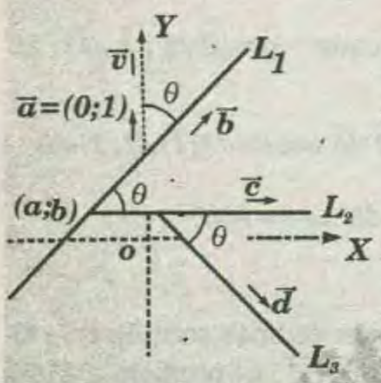
Hallar :

I) $Proy_{L_1}\vec{v}+Proy_{L_2}(Proy_{L_1}\vec{v})+Proy_{L_3}(Proy_{L_2}(Proy_{L_1}\vec{v}))$

II) La ecuacion de la recta bisectriz del ángulo agudo entre L_2 y L_1

RESOLUCION :

* Graficando según los datos :



$\vec{v}=|\vec{v}|(0;1)=(0;5)$

L_1 sigue la dirección $\vec{b}=(1;1)$

* Por lo tanto: $\theta=45°$

* Luego: los vectores dirección de L_2 y L_3 serán respectivamente:

$\vec{c}=(1;0)$ y $\vec{d}=(1;-1)$

* Luego :

$*\ Proy_{L_1}\vec{v}=Proy_{\vec{b}}\vec{v}=\frac{\vec{v}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} \Rightarrow Proy_{L_1}\vec{v}=\frac{5}{2}(1;1).....(\alpha)$

$*\ Proy_{L_2}(Proy_{L_1}\vec{v})=Proy_{\vec{c}}(\frac{5}{2}(1;1))=\frac{5}{2}(1;0).....(\beta)$

$*\ Proy_{L_3}(Proy_{L_2}(Proy_{L_1}\vec{v}))=Proy_{\vec{d}}(\frac{5}{2}(1;0))=\frac{5}{4}(1;-1)....(\gamma)$

* Por lo tanto, haciendo:

$E)\ Proy_{L_1}\vec{v}+Proy_{L_2}(Proy_{L_1}\vec{v})+Proy_{L_3}(Proy_{L_2}(Proy_{L_1}\vec{v}))$

* Reemplazando $(\alpha);(\beta)\ y\ (\gamma)$ en $E=\frac{5}{4}(5;1)$:

II) El vector dirección de la recta bisectriz del (L_1, L_2) será :

$$\vec{d}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1)+(1;0)=(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Sea $(a;b)\ L_1 \cap L_2$ por lo tanto, se deberá cumplir que:

$a-b+12=0 \Rightarrow$ para $a=a$; $b=s+12$; luego la ecuación de la recta bisectriz será:

$$D=\left\{(s;s+12)+t(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}})/\ s;t\in\mathbb{R}\right\}.....Rpta.$$

PROBLEMA 75 :

Sea $ABCD$ un cuadrilátero, donde $P=(4;8)\in\overrightarrow{AD}$ y tal que $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PD}|}=\frac{2}{3}$; sabiendo que:

$Proy_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{PC}//(2,3)$;

$Proy_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{PB}//(1;-\frac{2}{3})$ y $Proy_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{PD}//(3;1)$ y $B=(12;1)$

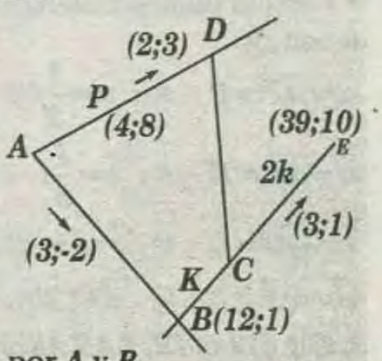
Si el lado $\overrightarrow{BC}$ se prolonga (en la misma dirección) a la derecha de C; se encuentra en un punto $E=(39;10)$ resultado ser C un punto que divide a $\overrightarrow{BE}$ en la razón de 1 a 2. Hallar:

I) La ecuación vectorial de la recta que contiene las vértices D y C

II) Un punto R sobre $\overrightarrow{PC}$ de modo que el ΔBRC sea recto en R

RESOLUCION :

Graficando usando los datos:



Por dato: C divide a $\overrightarrow{BE}$ en razon de 1 a 2

$$C=\frac{2}{2+1}B+\frac{1}{2+1}E$$

$\Rightarrow C=(21;4)$

* Sea L_1 la recta que pasa por A y D

* Sea L_2 la recta que pasa por A y B

$L_1=\{(4;8)+t(2;3)\}$; $L_2=\{(12;1)+s(3;-2)\}$

$A=L_1\cap L_2 \Rightarrow$ Igualando ecuación $A=(\frac{42}{13};\frac{89}{13})$

* También:

$P=\frac{3}{5}A+\frac{2}{5}D \Rightarrow$ Reemplazando valores : $D=(\frac{134}{26};\frac{253}{26})$

$\overrightarrow{DC}=\frac{1}{26}(412;-149) \Rightarrow L_{\overrightarrow{DC}}=\{(21;4)+v(412;-149)/v\in\mathbb{R}\}$

PROBLEMA 76 :

Los puntos $A=(6;-6)$; B ; C y D son vértices de un paralelogramo, siendo $\overrightarrow{AB}=(1;7)$ una de sus

diagonales y $Proy_{3\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. Se toma un punto interno P del paralelogramo, de modo que $\overrightarrow{AP}=(1;4)$. $Proy_{\frac{19}{9}\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BP}=-\frac{3}{5}(2;4)$

Hallar la ecuación general de la recta L que tiene como normal al vector $\overrightarrow{PD}$ y que divide al segmento $\overrightarrow{PD}$ en la razón de 1 a 2.

NOTA :

El punto C se encuentra a la izquierda y por debajo del punto B.

RESOLUCION :

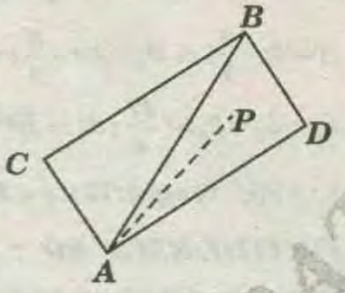
* De los datos:

$\overrightarrow{AB}=B-A\Rightarrow(1;7)=B-(6;6)\Rightarrow B=(7;1)$

$\overrightarrow{AP}=P-A\Rightarrow(1;4)=P-(6;-6)\Rightarrow P=(7;-2)$

$\overrightarrow{BC}\,//\,(2;4)\Rightarrow$ Vector dirección de $\overrightarrow{BC}$: $\vec{a}=(1;2)$

$Proy_{3\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow$



El paralelogramo es recto en C

Sea L_1: recta que pasa por A y C.

Sea L_2: recta que pasa por C y B.

$L_1=\{(6;-6)+t(-2;1)\}$

$L_2=\{(7;1)+r(1;2)\}$

$C=L_1\cap L_2\Rightarrow C=(4;-5)$

* Por lo tanto :

$\overrightarrow{BC}=(-3;-6)\Rightarrow|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AD}|=3\sqrt{5}$

$\Rightarrow D=(6;6)+3\sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}}(1;2)\Rightarrow D=(9;0)$

$\overrightarrow{PD}=D-P=(2;2)\Rightarrow$ El vector dirección de la recta perpendicular a $\overrightarrow{PD}$ es: $\vec{a}=(-1;1)$; Sea N: Punto de intersección de la recta pedida con $\overrightarrow{PD}$ y que divida a éste en la relación 1 a 2.

$$N=\frac{2}{3}(7;-2)+\frac{1}{3}(9;0)\Rightarrow N=(\frac{23}{3};-\frac{4}{3})$$

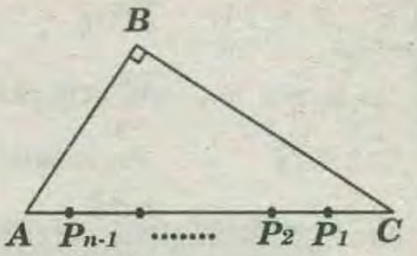
* Ecuación vectorial de la recta pedida:

$$L=\left\{(\frac{23}{3};-\frac{4}{3})+w(-1;1)/w\in R\right\}$$

PROBLEMA 77 :

En un triángulo ABC, recto en B, la hipotenusa de 50 unidades longitud es dividida en n partes iguales por los puntos $P_1; P_2;....P_{n-1}$. Calcular.

$|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BP}_1+\overrightarrow{BP}_2+.....+\overrightarrow{BP}_{n-1}|$



NOTA : Considera n como dato .

Además : $1+2+3+.....+n=\frac{n(n+1)}{2}$

RESOLUCION :

* Haciendo:

$|\vec{R}|=|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BP}_1+\overrightarrow{BP}_2+.....+\overrightarrow{BP}_{n-1}|$

* Sea: $k\vec{a}$ = Proyección del vector $\overrightarrow{BK}_k$ sobre $\overrightarrow{AB}$. $(k=1;2;.....n)$

*Sea: $k\vec{b}$ =Proyección del vector $\overrightarrow{BP}_{N-k}$ sobre $\overrightarrow{BC}\cdot(k=1;2;.....n)$

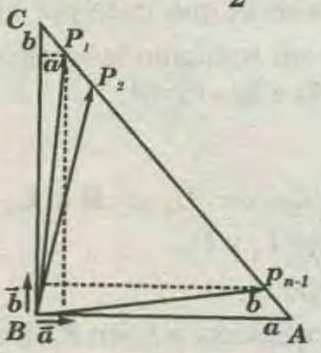
* Graficando adecuadamente :

ΔABC es rectángulo, luego:

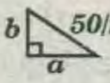
$$|\vec{R}|^2=(\sum_1^n k\vec{a})^2+(\sum_1^n k\vec{b})^2$$

$$\Rightarrow|\vec{R}|^2=(\vec{a}\frac{n(n+1)^2}{2})+(\vec{b}\frac{(n(n+1)}{2})^2$$

$$\Rightarrow|\vec{R}|^2=(\frac{n(n+1)}{2})^2(a^2+b^2).....(\alpha)$$



Por dato: $|\overrightarrow{AC}|=50u.;|\overrightarrow{AC}|$ está dividida en n partes iguales. La longitud de cada uno de ellos será: $50/n$.



$\Rightarrow a^2+b^2=(\frac{50}{n})^2$

* Reemplazando en (α) y efectuando:

$$R=25\,(n+1)$$

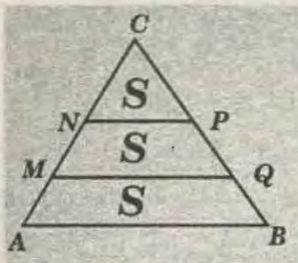
PROBLEMA 78 :

Se tiene el triángulo ABC. $A=(0;0)$; $B=(18;0)$ y $C=(6;12)$. Hallar las ecuaciones de dos rectas paralelas al lado $\overrightarrow{AB}$. de tal manera que éstas dividan al triángulo en tres áreas iguales.

RESOLUCION :

$\Delta CNP\sim\Delta ABC$: $\frac{3S}{S}=\frac{|\overrightarrow{AC}|^2}{|\overrightarrow{CN}|^2}\Rightarrow|\overrightarrow{CN}|=2\sqrt{15}$

Copia GRATIS



Vector direccion de $\overrightarrow{AC}:\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=(6;12)\Rightarrow\vec{b}=(1;2)$

Por lo tanto :

$$N=C-|\overrightarrow{NC}|\vec{u}_{\vec{b}}=(6;12)+\frac{2\sqrt{15}}{5}(1;2)$$

$$\Rightarrow N=(6-2\sqrt{3};\ 12-4\sqrt{3})$$

$*\Delta CQM\ \sim\ \Delta ABC$

$$\frac{3S}{2S}=\frac{|\overrightarrow{AC}|^2}{|\overrightarrow{CM}|^2}\Rightarrow|\overrightarrow{CM}|^2=2\sqrt{30}\ \ldots.(\overrightarrow{AC}=\sqrt{180})$$

* Luego :

$$M=C-|\overrightarrow{CM}|\vec{u}_{\vec{b}}=(6;12)-2\sqrt{30}\,\frac{1}{5}(1;2)$$

$$\Rightarrow M=(6-2\sqrt{6};12-4\sqrt{6})$$

* Vector dirección de $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}=(18;0)=18(1;0)\Rightarrow\vec{a}=(1;0)$$

$\overrightarrow{AB}\ //\ \overrightarrow{NP}\ //\ \overrightarrow{MQ}\Rightarrow$ los vectores dirección de c/u.es $\vec{a}=(1;0)$

$$L_{NP}=\{(6-2\sqrt{3};12-4\sqrt{3})+t(1;0)/t\in\mathbb{R}\}$$

$$L_{MQ}=\{(6-2\sqrt{6};12-4\sqrt{6})+r(1;0)/r\in\mathbb{R}\}$$

PROBLEMA 79 :

Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $R=(8;-6)$ y forma un triángulo isósceles con las rectas $L_1: y=3$ y $L_2: 3x+2y-12=0$

RESOLUCION :

*R cumple con la ecuación de $L_2\Rightarrow R\in L_2$

Resolviendo las ecuaciones de L_1 y L_2.

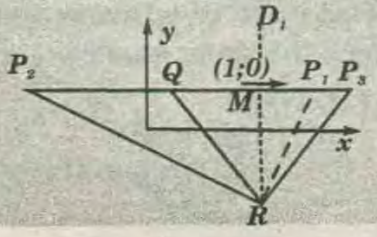
Hallamos : $L_1\cap L_2=Q=(2;3)$

Sea L la recta buscada, que intersecta a L_1 en P_1. De acuerdo al enunciado del problema, nos encontramos frente a dos alternativas de solución:

1) que $\overrightarrow{RQ}$ sea uno de los lados iguales del triángulo isósceles:

* Tenemos *3* casos para :

$$|\overrightarrow{RQ}|=|\overrightarrow{RP_1}|=|\overrightarrow{RP_2}|=|\overrightarrow{QP_3}|=3\sqrt{13}$$



* Luego :

a) $P_1=Q+|\overrightarrow{RQ}|(1;0)$ | $P_1=(2+3\sqrt{13};3)$

b) $P_2=Q-|\overrightarrow{RQ}|(1;0)$ | $P_2=(2-3\sqrt{13};3)$

c) La recta bisectriz del $\sphericalangle QRP_3$ será mediatriz de $\overrightarrow{QP_3}$, en M. $D_1=\{(8;-6)+t(0;1)\}$

$L_1=\{(2;3)+r(1;0)\}\Rightarrow D_1\cap L_1=M=(8;3)$

$\Rightarrow\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{MP_3}=(6;0)$

* Por lo tanto: $P_3=M+\overrightarrow{MP_3}\Rightarrow P_3=(14;3)$, luego:

$\overrightarrow{RP_1}=3(\sqrt{13}-2;3)\Rightarrow L'=\{(8;-6)+m(\sqrt{13}-2;3)/m\in\mathbb{R}\}$...rpta.

$\overrightarrow{RP_2}=3(-\sqrt{13}-2;3)\Rightarrow L''=\{(8;-6)+n(-\sqrt{13}-2;3)/n\in\mathbb{R}\}$...rpta.

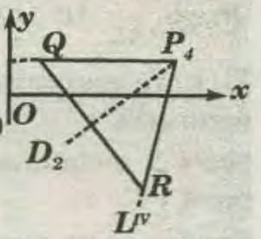
$\overrightarrow{RP_3}=3(2;3)\Rightarrow L'''=\{(8;-6)+p(2;3)/p\in\mathbb{R}\}$...rpta.

2) que $\overrightarrow{RQ}$ sea lado desigual del triángulo isósceles P_4 se encontrará en la mediatriz D_2 de $\overrightarrow{QR}$. Sea $N=$ punto medio de $\overrightarrow{QR}$:

$$N=(5;-\frac{3}{2})\Rightarrow D_2=\left\{(5;-\frac{3}{2})+w(3;2)\right\}$$

$$L_1\cap L_2=P_4=(\frac{47}{4};3)\Rightarrow\overrightarrow{RP_4}=3(\frac{5}{4};3)$$

$L''=\{(8;-6)+q(5;12)/r\in\mathbb{R}\}$.... rpta.



PROBLEMA 80 :

Un punto del plano se representa como :

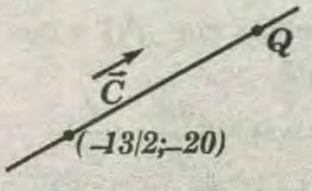
$Q=(-\frac{13}{2};-20)+3\vec{c}$. Si $\vec{b}=(1;1)$, $\vec{c}^{\perp}.(\vec{a}-\vec{b})=0$; $\vec{a}=(3;5)$

$$Comp_{(\vec{a}+\vec{b})}\vec{c}=4\sqrt{13}\ \wedge\ Proy_{(\vec{a}+\vec{b})}\vec{c}=r(12;-8)+\vec{c}$$

Determinar la ecuación vectorial de la recta L que pasa por Q y es paralela a la bisectriz del ángulo formado por $(\vec{a}-\vec{b})$ y $(\vec{a}+\vec{b})$

RESOLUCION :

* De los datos tendremos:



$\vec{a}-\vec{b}=(2;4)$

$\vec{a}+\vec{b}=(4;6)$

$\vec{c}^{\perp}.(\vec{a}-\vec{b})=\vec{c}^{\perp}.(2;4)=0$

Luego :

$\vec{c}\,//(2;4)//(1;2)\Rightarrow\vec{c}=k=(1;2)$

* Además :

$$Proy_{(\vec{a}+\vec{b})}\vec{c}=Comp_{(\vec{a}+\vec{b})}\vec{c}\left[\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}\right]=\frac{4\sqrt{13}(4;6)}{|(4;6)|}=r(12;-8)+\vec{c}$$

* Luego: $(8;12)=r(12;-8)+k(1;2)$

* De donde : $r=\frac{1}{8}\ ;k=\frac{13}{2}\Rightarrow\vec{c}=(\frac{13}{2};13)$

* Por lo tanto:

$$Q=(-\frac{13}{2};-20)+3(\frac{13}{2};13) \Rightarrow Q=(13;19)$$

* Vector dirección de la bisectriz formado por $(\vec{a}-\vec{b})$ y $(\vec{a}+\vec{b})$

$$\vec{d}=\frac{(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}-\vec{b}|}+\frac{(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{(2;4)}{\sqrt{20}}+\frac{(4;6)}{\sqrt{52}}=(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{13}})$$

* Ecuación Vectorial de L :

$$L=\{Q+t\vec{d}\}=\left\{(13;19)+t(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{13}})/t\in\mathbb{R}\right\}$$

PROBLEMA 81 :

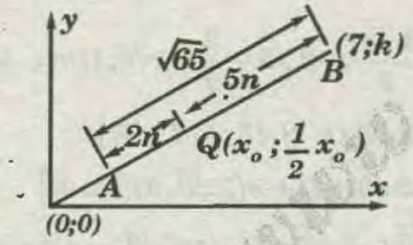
$Q=(x_o;\frac{1}{2}x_o)$ es el punto de división de un segmento $\overline{AB}$ en razón de 2 a 5 . Si la longitud del segmento és $\sqrt{65}$ y uno de sus extremos es $B=(7;k)$, hallar:

I) El otro extremo A del segmento y el punto Q, si la recta que contiene al segmento pasa por el origen de coordenadas.

NOTA : El punto A se encuentra por debajo de B y $x_o\neq 0$.

II) Hallar la ecuación de la recta que pasa por Q y es ortogonal a $\overline{AB}$

RESOLUCION :



* Por dato: El origen de coordenadas, A y B se encuentran contenidas en la recta L.

* Pendiente de L:

$$m_L=\frac{(1/2)x_o}{x_o}=\frac{k}{7}\Rightarrow k=\frac{7}{2}$$

* Vector dirección de L: $m_L=\frac{1}{2}\Rightarrow \vec{a}=(2;1)$

* Punto A :

$$A=B-\sqrt{65}\frac{(2;1)}{\sqrt{5}}\Rightarrow A=(7-2\sqrt{13};\frac{7}{2}-\sqrt{13})$$

* De la figura :

$$7n=\sqrt{65}\Rightarrow 5n=\frac{5}{7}\sqrt{65}$$

$$\Rightarrow Q=B-5n\frac{(2;1)}{\sqrt{5}}\Rightarrow Q=(7-\frac{10}{7}\sqrt{13};\frac{7}{2}-\frac{5}{7}\sqrt{13})$$

* Ecuación Vectorial de la recta pedida :

$$L_1=\{Q+r\,a\,/r\in\mathbb{R}\}$$

$$L_1=\left\{(7-\frac{10}{7}\sqrt{13};\frac{7}{2}-\frac{5}{7}\sqrt{13})+r(-1;2)/r\in\mathbb{R}\right\}$$

PROBLEMA 82 :

En un triángulo ABC, el lado $\overline{BC}$ mide $5\sqrt{10}$ unidades la mediatriz del lado $\overline{AC}$ en el punto $P=(-3;-5)$ y la prolongación de $\overline{BC}$ en $Q=(15;-21)$. Si C es punto medio del segmento $\overline{BQ}$ y $Proy_{\overline{QP}}\overline{QB}=6(3;4)$.

I) Hallar los vértices del triángulo ABC

II) La ecuación general de la recta que pasa por P y es ortogonal a $\overline{BC}$

NOTA : La abscisa del punto A es positiva

RESOLUCION :

* Sea M la intersección de la bisectriz con $\overline{AB}$. por dato:

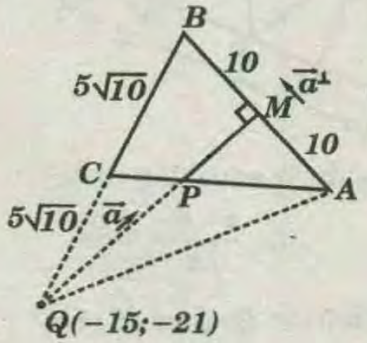
$$Proy_{\overline{QP}}\overline{QB}=6(3;4)=\overline{QM}$$

* Entonces : $|\overline{QM}|=30$

* Vector dirección de $\overline{QM}$: $\vec{a}=(3;4)$

$$M=Q+|\overline{QM}|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\Rightarrow M=(3;3)$$

* Además : $|\overline{QB}|=10\sqrt{10}$; $|\overline{QM}|=30$



En $\triangle QMB$:

$$|\overline{MB}|^2=|\overline{QB}|^2=|\overline{QM}|^2\Rightarrow|\overline{MB}|=10$$

* Por lo tanto :

$$|\overline{MB}|=|\overline{MA}|=10$$

* Cálculo de los vértices del ΔABC

$$B=M+10\frac{\vec{a}^{\perp}}{|\vec{a}^{\perp}|}=(3;3)+10\frac{(-4;3)}{|(-4,3)|}\Rightarrow B=(-5;9)$$

$$A=M-10\frac{\vec{a}^{\perp}}{|\vec{a}^{\perp}|}=(3;3)-10\frac{(-4;3)}{|(-4;3)|}\Rightarrow A=(11;-3)$$

$$C=\frac{B+Q}{2}=\frac{(-5;9)+(-15;-21)}{2}\Rightarrow C=(-10;-6)$$

* calculo de la ecuación de la recta

Vector direrción de la recta que contiene a $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC}=(-5;-15)=-5(1;3)\Rightarrow \vec{b}=(1;3)$$

Vector dirección de la recta $\perp a\ \overrightarrow{BC}$: $\vec{b}^{\perp}=(-3;1)$

* Ecuación vectorial de la recta pedida:

$$L=\{P+t\vec{b}^{\perp}/t\in\mathbb{R}\}$$

$$L=\{(-3;-5)+t(-3;1)/t\in\mathbb{R}\}$$

PROBLEMA 83 :

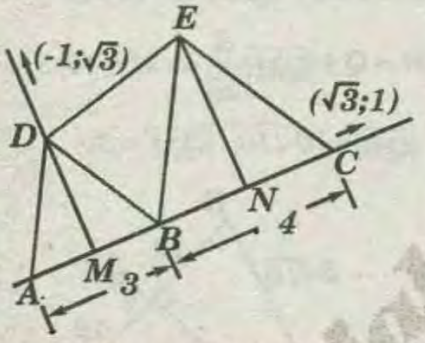
Sobre la recta $L: x-\sqrt{3}y-8=0$ se toman los puntos $A; C$ y $B=(2;-2\sqrt{3})$ $A; B$ y C de izquierda a derecha, tal que $|\overrightarrow{AB}|=3$ unidades y $|\overrightarrow{AB}|=4$ unidades.

A un mismo lado de la recta se construyen los triángulos equiláteros *ADB* y *BEC*, de modo que la recta que contiene al lado $\overrightarrow{CE}$ tiene pendiente negativa.

I) Hallar las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados del cuadrilátero *ADEC*

II) Hallar el área de dicho cuadrilátero.

RESOLUCION:



* Transformando la ecuación dada :

$$L:\frac{x-8}{\sqrt{3}}=\frac{y}{1}\Rightarrow$$

Vector dirección de L: $\vec{a}=(\sqrt{3};1)$

PUNTO C :

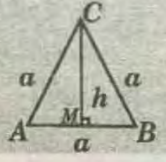
$$C=B+4\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\Rightarrow C=(2+2\sqrt{3};-2\sqrt{3}+2)$$

PUNTO A :

$$A=B-3\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\Rightarrow A=(2-\frac{3\sqrt{3}}{2};-2\sqrt{3}-\frac{3}{2})$$

"En un triángulo equilátero de lado "*a*", su altura estará dada por la siguiente relación:"

$$h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$$



Además: "En cada triángulo equilátero, su altura respectiva pasa por el punto medio de su base".

*punto medio de *AB: M*

$$M=\frac{A+B}{2}\Rightarrow M=(2-\frac{3\sqrt{3}}{4};-2\sqrt{3}-\frac{3}{4})$$

*punto medio de *BC: N*

$$N=\frac{B+C}{2}\Rightarrow N=(2+\sqrt{3};-2\sqrt{3}+1)$$

ALTURAS :

Correspondiente a $\overrightarrow{AB}$: $|\overrightarrow{MD}|=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

Correspondiente a $\overrightarrow{BC}$: $|\overrightarrow{NE}|=\frac{4}{2}\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

PUNTO D :

$$D=M+|\overrightarrow{MD}|\frac{\vec{a}^{\perp}}{|\vec{a}^{\perp}|}\Rightarrow D=(2-\frac{3}{2}\sqrt{3};-2\sqrt{3}+\frac{3}{2})$$

PUNTO E:

$$E=N+|\overrightarrow{NE}|\frac{\vec{a}^{\perp}}{|\vec{a}^{\perp}|}\Rightarrow E=(2;-2\sqrt{3}+4)$$

* Por lo tanto:

$$\overrightarrow{AD}=3(0;1);\ \overrightarrow{AC}=\frac{7}{2}(\sqrt{3};1);\ \overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}(3\sqrt{3};5);$$

$$\overrightarrow{EC}=2(\sqrt{3};-1)$$

I) Las ecuaciones de las rectas respectivas a los lados serán:

$$L_{AD}=\{(2-\frac{3\sqrt{3}}{2};-2\sqrt{3}-\frac{3}{2})+r(0;1)/r\in\mathbb{R}\}$$

$$L_{AC}=\{(2;-2\sqrt{3})+t(\sqrt{3};1)/t\in\mathbb{R}\}$$

$$L_{DE}=\{(2;-2\sqrt{3}+4)+s(3\sqrt{3};5)/s\in\mathbb{R}\}$$

$$L_{EC}=\{(2+\sqrt{3};-2\sqrt{3}+2)+w(\sqrt{3};-1)/w\in\mathbb{R}\}$$

II) ÁREA DEL CUADRILÁTERO :

$A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}|+\frac{1}{2}|\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{EC}|$;reemplazando valores:

$$A=\frac{1}{2}|3|\left|\frac{7}{2}\right|(0;1).(\sqrt{3};1)|+\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\right||2||(3\sqrt{3};5).(\sqrt{3};-1)|$$

* Efectuando : $A=\frac{21}{4}+2\ \Rightarrow\ A=\frac{29}{4}u^2$

PROBLEMA 84 :

Sea *ABC* un triángulo rectángulo, recto en *B*. Sobre los lados $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AB}$ se toman los puntos *P* y *Q* respectivamente, de modo que $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BQ}|$ y $|\overrightarrow{QP}|=|\overrightarrow{PC}|$.

Si: $P=(2;7-5\sqrt{3})$; $d(P,Q)=6$, $Proy_{\overrightarrow{AB}}\ \overrightarrow{AC}=4(\sqrt{3};1)$ y la ordenada de *B* mayor que la ordenada de *C*.

Hallar los vértices del triángulo ABC.

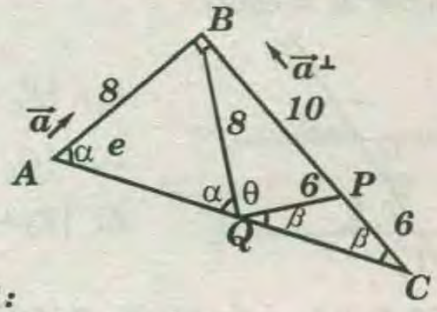
RESOLUCION :

* Por ser $\Delta\, ABC$ un triángulo rectángulo, se cumple que $Proy_{\overline{AB}}\overline{AC}=4(\sqrt{3};1)=\overline{AB}\Rightarrow|\overline{AB}|=8$ Además

Vector dirección de $\overline{AB}$: $\vec{a}=(\sqrt{3};1)$; Luego:

Vector dirección de $\overline{BC}$: $\vec{a}^{\perp}=(-1;\sqrt{3})$; Luego:

Graficando :



* En el $\Delta\, ABC$:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=90^{\circ}\\ \alpha+\beta+\theta=180^{\circ}\end{array}\right\}\theta=90^{\circ}$$

* Luego : $\triangle BQP$ es recto en Q :

$$|\overline{BP}|^2=|\overline{BQ}|^2+|\overline{QP}|^2=8^2+6^2$$

* De donde: $|\overline{BP}|=10$

Punto B : $B=P+|\overline{BP}|\dfrac{\vec{a}^{\perp}}{|\vec{a}^{\perp}|}\Rightarrow B=(-3;7)$

Punto C : $C=P-|\overline{PC}|\dfrac{\vec{a}^{\perp}}{|\vec{a}^{\perp}|}\Rightarrow C=(5;7-8\sqrt{3})$

Punto A : $A=B-|\overline{AB}|\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\Rightarrow A=(-3-4\sqrt{3};3)$

PROBLEMA 85 :

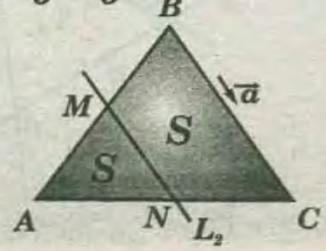
Sean A; $B=(2;4)$ y C los vértices de un triángulo.

Si $Proy_{\overline{BC}}\overline{AB}=(\dfrac{2}{5};-\dfrac{1}{5})$; la recta $L_1: y=3$ pasa por los puntos A y C y la recta $L_2: 2x+y-8=0$ divide al triángulo ABC en dos triángulos de áreas iguales. Hallar el área del $\Delta\, ABC$.

RESOLUCION :

* Por dato :

$Proy_{\overline{BC}}\overline{AB}=(\dfrac{2}{5};-\dfrac{1}{5})$; Vector dirección de $\overline{BC}$: $\vec{a}=(2;-1)$



Pendiente $L_{\overline{BC}}$: $m_{\overline{BC}}=-\dfrac{1}{2}$ de la ecuación de L_2 se obtiene : $m_2=-\dfrac{1}{2}$

* Luego: $L_2\ //\ \overline{BC}$, entonces resolviendo las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}L_2: 2x+y-8=0\\ L_1: \quad y=3\end{array}\right\}\text{Se obtiene } L_1\cap L_2=N=(\frac{5}{2};3)$$

$$\left.\begin{array}{l}L_{\overline{BC}}: \dfrac{y-4}{x-2}=-\dfrac{1}{2}\\ L_1: \quad y=3\end{array}\right\}\text{Se obtiene } L_1\cap L_{\overline{BC}}=C=(4;3)$$

* Luego: $|\overline{NC}|\left|(4;3)-(\dfrac{5}{2};3)\right|\Rightarrow|\overline{NC}|=\dfrac{3}{2}$

* Haciendo: $|\overline{AN}|=L\Rightarrow|\overline{AC}|=L+\dfrac{3}{2}$ .....(α)

* Por relación de áreas :

$$\frac{Area(ABC)}{Area(ANM)}=\frac{(L+3/2)^2}{L^2}=\frac{2S}{S}$$

* De donde se obtiene: $L=\dfrac{3}{2}(\sqrt{3}+1)$

* En (α): $|\overline{AC}|=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}+3$; Por lo tanto:

$A=C-|\overline{AC}|\,(1;0)\Rightarrow A=(1-\dfrac{3\sqrt{2}}{2};3)$

$\overline{BC}=(-2;1)\quad ;\quad \overline{AC}=(3+\dfrac{3}{2}\sqrt{2};0)$

$Area(ABC)=\dfrac{1}{2}|\overline{BC}.\overline{AC}|\Rightarrow Area(ABC)=3+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\,u^2$

PROBLEMA 86 :

Sean las rectas $L_1=\{(0;3)+t(2+3)\}$, L_2 paralela al vector $(-1;5)$, L_3 ortogonal a L_1 en $(2;6)$.

Hallar la intersección de L_2 y L_3 si L_2 pasa por $(4;9)$

RESOLUCION :

$$L_2\cap L_3=(5;4)$$

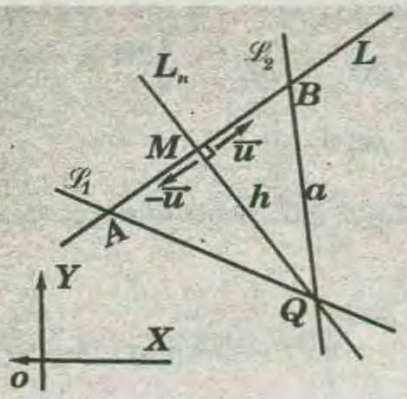
PROBLEMA 87 :

Del punto $Q=(6;2)$ se trazan dos rectas L_1 y L_2 de tal modo que con la recta L que pasa por $(0;1)$ y vector normal $(-2;1)$ determinan un triángulo equilátero. Calcular los vértices del Δ equilátero y el área del mismo .

RESOLUCION :

* La ecuación de la recta L estará dada por:

$$L:[P-(0;1)].(-2;1)=0\Rightarrow L: 2x-y+1=0$$



Sea L_n una recta perpendicular a L y que pasa por $Q=(6;2)$, entonces :

$L_n=\{(6;2)+r(-2;1)/r\in\mathbb{R}\}$ ó $L_n=x+2y-10=0$

Sea M punto medio de $\overline{AB}$, entonces $M=L\cap L_n$;

* Luego :

$$\left.\begin{array}{l}L:\ 2x-y+1=0\\ L:x+2y-10=0\end{array}\right\}\Rightarrow x=\frac{8}{5};y=\frac{21}{5}$$

$$\Rightarrow M=(\frac{8}{5};\frac{21}{5})$$

* Cálculo de la área :

Sea : a = lado del triángulo ; h = altura

A = área del triángulo ; entonces $A=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$$\Rightarrow h=d(Q.L)=\frac{|2(6)-1(2)+1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{11}{\sqrt{5}}$$

Como $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a\Rightarrow a=\frac{22}{\sqrt{15}}$; Luego :

$$A=(\frac{22}{\sqrt{15}})^2\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow A=\frac{121}{15}\sqrt{3}\ u^2$$

* Cálculo de los vértices :

Sea $\vec{u}$ un vector unitario paralelo a la recta L; entonces

$\vec{u}\,//\,(1;2)\Rightarrow\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{5}}(1;2)$ como $B\in L$ y M es punto medio, entonces:

$$B=M+\frac{1}{2}\vec{u}\Rightarrow B=\frac{1}{5}(8;21)+\frac{11}{\sqrt{5}\sqrt{15}}(1;2)$$

$$\Rightarrow B=\frac{1}{5\sqrt{3}}(8\sqrt{3}+11;21\sqrt{3}+22)$$

* Para determinar el vértice A, procedemos análogamente entonces :

$$A=M+\frac{a}{2}(-\vec{u})\Rightarrow A=\frac{1}{5}(8;21)+\frac{11}{\sqrt{5}\sqrt{15}}(1;2)$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{5\sqrt{3}}(8\sqrt{3}-11;21\sqrt{3}-22)$$

* Finalmente el tercer vértice es $Q\ (6;2)$

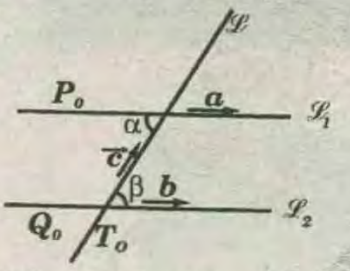
PROBLEMA 88 :

Demostrar que si dos rectas paralelas son intersectas por una secante, entonces los ángulos alternos son congruentes.

RESOLUCION :

* Sean: L ; la secante. $L_1\,//\,L_2$

* Entonces de la figura :



L_1: $\{P_0+t\vec{a}/t\in\mathbb{R}\}$

L_2: $\{Q_0+s\vec{b}/s\in\mathbb{R}\}$

L: $\{T_0+r\vec{c}/r\in\mathbb{R}\}$

* Como $L_1\,//\,L_2\Rightarrow\vec{a}=k\vec{b};k>0$; consideremos ángulos alternos internos .

* Si α es ángulo determinado por $-\vec{a}$ y $-\vec{c}$; y β es el ángulo que determina los vertices $\vec{b}$ y $\vec{c}$; entonces:

$$\cos\alpha=\frac{(-\vec{a}).(-\vec{c})}{|\vec{a}|\ |\vec{c}|}=\frac{\vec{a}.\vec{c}}{|\vec{a}|\ |\vec{c}|}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{(k\vec{b}).\vec{c}}{|k\vec{b}|\ |\vec{c}|}=\frac{k\vec{b}.\vec{c}}{k|\vec{b}|\ |\vec{c}|}$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\vec{b}.\vec{c}}{|\vec{b}|\ |\vec{c}|}=\cos\beta\Rightarrow\alpha=\beta$$

* Como $\alpha=\beta$, entonces los ángulos alternos son congruentes.

PROBLEMA 89 :

Hallar el área del triángulo determinado por las rectas L_1; L_2 y L_3; sabiendo que :

L_1:Pasa por el punto $(1;\ 4)$ y es ortogonal al vector $(3;\ 5)$

L_2: Pasa por el punto $(6;1)$ y es paralela a la recta L :

L: $5x-2y-3=0$

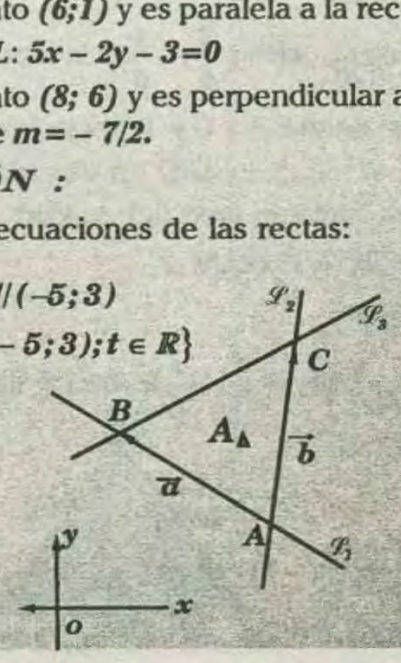
L_3: Pasa por el punto $(8;\ 6)$ y es perpendicular a una recta de pendiente $m=-7/2$.

RESOLUCIÓN :

* Calculemos las ecuaciones de las rectas:

Si $L_1^{\perp}\ (3;5)\Rightarrow L_1\,//\,(-5;3)$

$\Rightarrow L_1:\{(1;4)+t(-5;3);t\in\mathbb{R}\}$



Si $L_2 // L \Rightarrow L_2 \perp (5;-2) \Rightarrow L_2 // (2;5)$; entonces :

$L_2 : \{(6;1) + r(2;5); r \in \mathbb{R}\}$

* Sea L_4 una recta de pendiente

$$m = \frac{-7}{2} \Rightarrow L_4 // (1; \frac{-7}{2});$$

* Luego: $L_3 : \{(8;6) + s(7;2); s \in \mathbb{R}\}$

Calculo de los vértices del triángulo : Los vértices quedan determinadas por las intersecciones de las rectas , las cuales las hallamos igualando las ecuaciones de las rectas :

* Para el vértice A :

$A = L_1 \cap L_2$; entonces :

$$(1;4) + t(-5;3) = (6;1) + r(2;3)$$
$$\Rightarrow (1 - 5t; 4 + 3t) = (6 + 2r; 1 + 5r)$$

* Igualando componentes y resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 1 - 5t = 6 + 2r \\ 4 + 3t = 1 + 5r \end{array}\right\} \Rightarrow r = 0 \ ; \ t = -1$$

* Reemplazando $r = 0$ en L_2; entonces :

$$A = (6;1) + 0(2;5) \Rightarrow A = (6 \ ; \ 1)$$

* Para el vértice B :

$B = L_1 \cap L_3$; entonces igualamos las ecuaciones :

$$(1;4) + t(-5;3) = (8;6) + s(7;2)$$

* De donde al igualar componentes y resolver se obtiene:

$$s = -1; \ t = 0; B = (1;4) + 0(-5;3) \Rightarrow B = (1;4)$$

* Para el vértice C :

$C = L_2 \cap L_3$; procediendo análogamente:

$L = \{P_0 + (t - t_0)V / t \in R\}$

$(6;1) + r(2;5) = (8;6) + s(7;2)$

entonces : $s = 0; \ r = 1; \Rightarrow C = (8;6)$

* Cálculo de los vectores

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1;4) - (6;1) = (-5;3)$

$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = C - A = (8;6) - (6;1) = (2;5) \Rightarrow \vec{b}^{\perp} = (-5;2)$

* Cálculo del área :

$$A = \frac{1}{2}|\vec{a} . \vec{b}^{\perp}| \Rightarrow A = \frac{1}{2}|(-5;3);(-5;2)| \Rightarrow A = \frac{31}{2}u^2$$

PROBLEMA 90 :

Si la velocidad V de una partícula es un vector constante y si la partícula parte de P_0 en el instante t_0, la posición P de la partícula en el instante t es $P_0 + (t - t_0)V$/ la trayectoria :

$L = \{P_0 + (t - t_0)V / t \in \mathbb{R}\}$ se llama trayectoria de la partícula.

La partícula P, tiene una velocidad $V_1 = (100; 300)$ y comienza en el origen en el tiempo $t = 0$, Una segunda partícula P_2 tiene una velocidad $V_2 = (50; -30)$ y parte de $(0; 270)$ en el tiempo $t = 0$.

I) ¿Donde se intersectan las trayectorias de las dos partículas?

II) ¿Chocan las particulas?

III) ¿En que instante debe dejar la partícula P_1 el origen para que choque con P_2?

RESOLUCION :

* Sean L_1 y L_2 las traryectoria de las particulas L_1 y L_2 respectivas, entonces :

$$L_1 = \{(0;0) + (t_1 - 0)(100;300)\}$$
$$\Rightarrow L_1 = \{(0;0) + t_1(100;300)\}$$
$$L_2 = \{(0;270) + (t_2 - 0)(50;-30)\}$$
$$\Rightarrow L_2 = \{(0;270) + t_2(50;-30)\}$$

I) $I = L_1 \cap L_2$:

Igualando las ecuaciones de las rectas se obtiene :

$t_1 = 3/4 \, u$; u : unidad de tiempo

$t_2 = 3/2 \, u$

* Por lo tanto: $I = (75 ; 225)$

II) Siendo $t_1 \neq t_2$ según *(I)*, entonces las partículas no llegan a chocar .

III) entonces las chocan cuando $t_1 + t_0 = t_2$

* Luego :

$$t_1 + t_0 = t_2 - t_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow t_0 = 0; 75u$$

En consecuencia, P_1 choca con P_2 deja el origen o punto de partida $0,75$ unidades de tiempo después que lo hizo P_2.

PROBLEMA 91 :

Dada la recta $L: x + y - 15\sqrt{2} = 0$ y la circunferencia $\mathscr{C} = (x - 10\sqrt{2})^2 + (y - 5\sqrt{2})^2 = 25$. Si L_1 y L_2 son dos rectas paralelas de pendiente negativa , tangentes a $\mathscr{C}$ y tales que cada una de ellas forma con L un ángulo agudo θ donde : $\tan\theta = 3/4$.

Hallar las ecuaciones vectoriales de L_1 y L_2.

RESOLUCIÓN :

* Transformando la ecuación dada :

$$\frac{x}{1} = \frac{y - 15\sqrt{2}}{-7} ; \vec{a} = (1;-7); m = -7$$

$\Rightarrow L_1 \cap L_2=(7;3)$

Sea L_3 la recta pedida con pendiente m_3

* Por dato :

$$m_3=\frac{3-0}{7-2m_3} \Rightarrow m_3=3 \quad ó \quad m_3=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ aplicando : $m=(y-y_o)/(x-x_o)$ y efectuando operaciones : L_3 : $3x-y-18=0$; L_3 : $x-2y-1=0$

SOLUCIÓN VECTORIAL :

Sean :

$L_1:\{(0;-5/3)+t(3;2)/t\in\mathbb{R}\}$ y $L_2:\{(0;13/2)+r(2;-1)/r\in\mathbb{R}\}$ intersectando ambas rectas , igualando sus ecuaciones:

$(0;-5/3)+t(3;2)=(0;13/2)+r(2;-1)\Rightarrow L_1\cap L_2=(7;3)$

Sea m_3 la pendiente de la recta buscada . Por dato, un punto de esta recta es $(2m_3; 0)$, por lo tanto :

$$m_3=\frac{3-0}{7-2m_3} \Rightarrow m_3=3; m_3=1/2$$

* Ecuación de la recta buscada :

$L_3:\{(7;3)+s(1;3)/s\in\mathbb{R}\}$ ó $L_3:\{(7;3)+w(1;3)/w\in\mathbb{R}\}$

PROBLEMA 95 :

En el sistema x' y' la recta $L : 2x-y=6$ (dada en coordenadas xy) tiene pendiente $m'=-3$. Si L pasa por un punto A, el cual tiene coordenadas $(4; 2)$ en el sistema xy y $(3\sqrt{2};\sqrt{2})$ en el sistema $x'y'$, hallar las coordenadas del vector de traslación P_o.

NOTA : El vector $\vec{u}$ de rotación de coordenadas debe tener la primera componente negativa.

RESOLUCION :

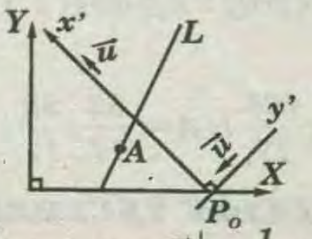
* Ecuación de transformación :

$$(x;y)=P_o+x'\vec{u}+y'\vec{u}^{\perp}$$

* por dato : $m'=-3 \Rightarrow \vec{a}=(1;-3)$

* en el sistema xy : $\vec{a}=(1;2)$

* relacionando : $\vec{a}=1\vec{u}+(-3)\vec{u}^{\perp}=(1;2)$



* Se obtiene : $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1;1) \Rightarrow \vec{u}^{\perp}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1;-1)$

* Por lo tanto :

$$(4;2)=P_o+3\sqrt{2}\frac{(-1;1)}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\frac{(-1;-1)}{\sqrt{2}} \Rightarrow P_o=(8;0)$$

PROBLEMA 96 :

Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas : $x+y-1=0$ y $2x-y+1=0$. Demostrar, además , que son perpendiculares entre sí.

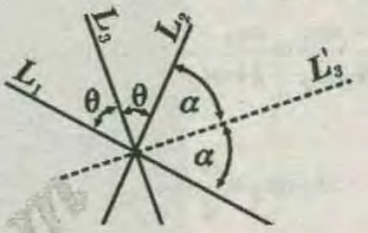
RERSOLUCIÓN :

* Sean : $L_1 : x+y-1=0 \Rightarrow m_1=-1$

$L_2 : 2x-y+1=0 \Rightarrow m_2=1$

* Sea θ el ángulo que forma la bisectriz con cada una de las rectas dadas . entonces :

$$tg\theta=\frac{m_1-m_3}{1+m_1m_3}=\frac{m_3-m_2}{1+m_2m_3}$$



* Reemplazando valores y efectuando :

$$m_3^2+6m_3-1=0 \Rightarrow m_3=-3\pm\sqrt{10}$$

* Resolviendo las ecuaciones de L_1 y L_2 se obtiene :

$$L_1\cap L_2=(0;1)=A$$

* Por lo tanto las ecuaciones de la a bisectrices que pasan por $(0; 1)$ y de pendiente m_3 son :

$$m_3=-3+\sqrt{10}=\frac{y-1}{x} \Rightarrow y=(-3+\sqrt{10})x+1$$

$$m_3=-3-\sqrt{10}=\frac{y-1}{x} \Rightarrow y=(-3-\sqrt{10})x+1$$

* Para demostrar que las bisectrices son perpendiculares entre sí es necesario que el producto de sus pendientes sea igual a -1; Luego :

$$(-3+\sqrt{10})(-3-\sqrt{10})=-1$$

Entonces las bisectrices son perpendiculares entre sí.

RESOLUCIÓN VECTORIAL :

Se tienen :

$L_1=\{(0;1)+t(1;-1)\}$; $L_2=\{(0;1)+r(1;2)\}$;$(t;s)\in R$

Un punto de la bisectriz será : $L_1\cap L_2=(0;1)$

Sea $\vec{a}$, vector direccional de la bisectriz :

$$\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;-1)+\frac{1}{\sqrt{5}}(1;2)=\frac{1}{\sqrt{10}}(\sqrt{5}+\sqrt{2};2\sqrt{2}-\sqrt{5})$$

* Ecuaciones de las bisectrices :

$L_i=\{(0;1)+s(\sqrt{5}+\sqrt{2};2\sqrt{2}-\sqrt{5})/s\in R\}$

$L_e=\{(0;1)+w(\sqrt{5}-2\sqrt{2};\sqrt{5}+\sqrt{2})/w\in R\}$

* Determinamos la perpendicularidad de las

bisectrices; para ésto , el producto escalar de sus vectores direccionales debe ser igual a cero.Luego:

$(\sqrt{5}+\sqrt{2};2\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{5}-2\sqrt{2};\sqrt{5}+\sqrt{2})=$

$(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{5})=0 \Rightarrow L_i \perp L_e$

PROBLEMA 97 :

Determinar la ecuación de una recta que pase por el punto $M(-2;3)$ y sea perpendicular a la bisectriz interior del triángulo de vértice $A=(0;0)$; $B=(4;8)$; $C=(6;2)$ relativa al vértice B.

RESOLUCIÓN :

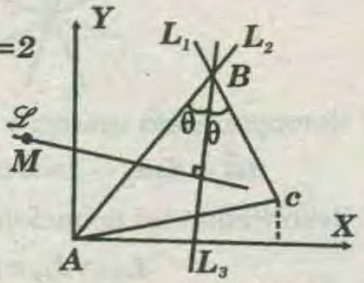
* Sea L_3 la bisectriz de pendiente m_3

* De la figura :

$$tg\,\theta=\frac{m_1-m_3}{1+m_1m_3}=\frac{m_3-m_2}{1+m_2m_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* donde :

$$m_1=\frac{8-2}{4-6}=-3\,;m_2=\frac{8}{4}=2$$



* Reemplazando en (I) y efectuando se obtiene :

$$m_3=7\pm5\sqrt{2}$$

* Por lo tanto la bisectriz interior tendrá como pendiente: $m_3=7\pm5\sqrt{2}$

* Sea $\underline{m}$ la pendiente de la recta pedida (L) :

* Por dato :

$$L \perp L_3 \Rightarrow m\,m_3=-1 \Rightarrow m=\frac{-1}{7+5\sqrt{2}}=7-5\sqrt{2}$$

* Finalmente , la ecuación de la recta que pasa por $(-2;3)$, de pendiente $m=7-5\sqrt{2}$ es :

$$7-5\sqrt{2}=\frac{y-3}{x+2} \Rightarrow (7-5\sqrt{2})x-y+17-10\sqrt{2}=0$$

RESOLUCIÓN VECTORIAL :

Sea $\vec{b}$ el vector dirección de la bisectriz , entonces $\vec{b}$ es el vector dirección de la recta que pasa por M.

$$\vec{b}=\frac{1}{\sqrt{5}}(1;2)+\frac{1}{\sqrt{10}}(-1;3)=\frac{1}{\sqrt{10}}(\sqrt{2}-1;2\sqrt{2}+3)$$

entonces : $\vec{b}^{\perp}=(-2\sqrt{2}-3;\sqrt{2}-1)$

$\Rightarrow$ Ecuación de la recta pedida :

$$L=\{(-2;3)+t(-2\sqrt{2}-3;\sqrt{2}-1)/t\in\mathbb{R}\}$$

PROBLEMA 98 :

Determinar las coordenadas de los vértices de un cuadrado $ABCD$, sabiendo que los vértices A y B pertenecen a la recta L , de ecuación :

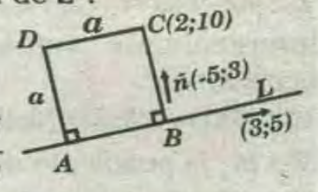
$$\frac{1}{3}(x-2)=\frac{1}{5}(y-4), \quad y \quad C=(2;10).$$

Se sabe además que $x_A<x_B$ y $x_C<x_B$

(x_A; x_B; x_C son las abscisas o primeras componentes de los puntos A; B y C respectivamente).

RESOLUCIÓN :

* Transformando la ecuación de L :



$$L: 5x-3y+2=0 \Rightarrow m_L=\frac{5}{3}$$

* La distancia de C a L será igual al lado del cuadrado, entonces :

$$a=\frac{|5(2)-3(10)+2|}{\sqrt{34}}=\frac{18}{\sqrt{34}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$\overline{CD} \perp L \Rightarrow m_{CD}m_L=-1 \Rightarrow m_{CD}=-\frac{3}{5}=\frac{y_D-10}{x_D-2} \ldots\ldots (II)$$

$$(x_D;y_D)\in L \Rightarrow 5x_D-3y_D+2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

* efectuando (II) y (III) se obtiene : $x_D=79/17$; $y_D=143/17$

$$\Rightarrow 10-y_A=\frac{5}{3}(2-x_A) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV)$$

* Además :

$$a^2=324/34=(10-y_A)^2+(2-x_A)^2 \ldots\ldots (V)$$

* (IV) en (V) , se obtiene : $x_A=7/17$; $y_A=125/17$

también ,

$$(x_B;y_B)\in L \Rightarrow 5x_B-3y_B+2=0 \ldots\ldots\ldots (VI)$$

$$AB \perp L \Rightarrow m_{AB}=-\frac{3}{5}=\frac{(125/17)-y_B}{(7/17)-x_B} \ldots\ldots (VII)$$

* De (VI) y (VII) : $x_B=52/17$; $y_B=98/17$

* Luego :

$$D=(\frac{7}{17};\frac{125}{17})\,;A=(\frac{52}{17};\frac{98}{17}) \quad y \quad B=(\frac{79}{17};\frac{143}{17})$$

RESOLUCIÓN VECTORIAL :

De la ecuación simétrica obtenemos la ecuación vectorial de L :

$$L:\{(2;4)+t(3;5)/t\in\mathbb{R}\} \Rightarrow \vec{n}=(-5;3)$$

$d(C;L)$: Lado del cuadrado , entonces

$$d(C;L)=\frac{|(2-2;10-4).(-5;3)|}{\sqrt{25+9}}=\frac{18}{\sqrt{34}}$$

$$A=(2;10)+\frac{18}{\sqrt{34}}\cdot\frac{1}{\sqrt{34}}(-3;-5)=(\frac{7}{17};\frac{125}{17})$$

$$D=(2;10)+\frac{18}{\sqrt{34}}\cdot\frac{1}{\sqrt{34}}(5;-3)=(\frac{79}{17};\frac{143}{17})$$

$$B=(\frac{79}{17};\frac{143}{17})+\frac{18}{\sqrt{34}}\cdot\frac{1}{\sqrt{34}}(-3;-5)=(\frac{52}{17};\frac{98}{17})$$

PROBLEMA 99 :

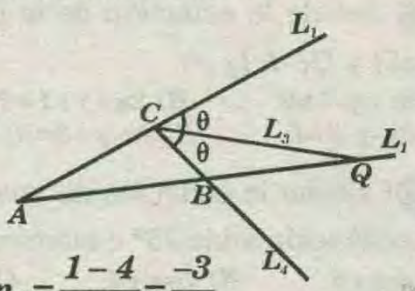
Los vértices de un triángulo ABC son $A(-6;-2)$, $B(6;1)$ y $C(2;4)$. Se traza la bisectriz del ángulo exterior correspondiente al ángulo interno ACB.

La bisectriz corta a la prolongación del lado $\overline{AB}$ en el punto Q. Hallar las coordenadas de Q.

RESOLUCION :

A) MÉTODO CARTESIANO :

* De la figura :



$$m_1=\frac{4+2}{2+6}=\frac{3}{4}\ ;\ m_2=\frac{1-4}{6-2}=\frac{-3}{4}$$

* Sea L_3 , la bisectriz , luego :

$$tg\,\theta=\frac{m_1-m_3}{1+m_1m_3}=\frac{m_3-m_4}{1+m_4m_3}$$

* Reemplazando y resolviendo : $m_3=0$

* Ecuación de la bisectriz : $y-4=0\Rightarrow y=4$

Intersección de la bisectriz con la prolongación de AB :

$$m_{AB}=\frac{1+2}{6+6}=\frac{1}{4}=\frac{y-1}{x-6}\Rightarrow \overrightarrow{AB}: 4y-x+2=0$$

Como $L_3: y=4\Rightarrow$ resolviendo $Q=\overrightarrow{AB}\cap L_3=(18;4)$

B) MÉTODO VECTORIAL :

$$\overrightarrow{AB}=(12;3)\ ;\ \overrightarrow{AC}=(8;6)\ ;\overrightarrow{CD}=(4;-3)$$

Sea $\vec{a}$,el vector direccional de la bisectriz entonces

$$\vec{a}=\vec{u}_1+\vec{u}_2=\frac{(8;6)}{10}+\frac{(4;-3)}{5}=\frac{8}{5}(1;0)\Rightarrow \vec{u}_3=(1;0)$$

* Ecuación de la Bisectriz :

$$L_3:\{(2;4)+t(1;0)/t\in\mathbb{R}\}.....(\theta)$$

$$AB\subset L_2\Rightarrow L_2=\{(6;1)+s(12;3)/s\in\mathbb{R}\}....(\beta)$$

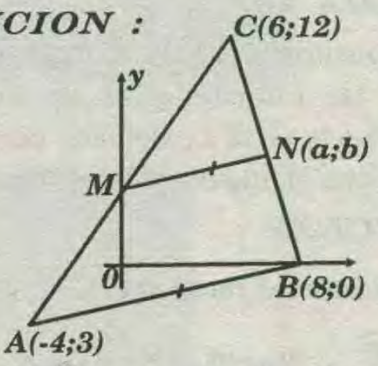
* De (θ) y (β): $t=16\ ;\ s=1\Rightarrow Q=L_3\cap L_2=(18;4)$

PROBLEMA 100 :

Se tiene el triángulo $A(-4;-3)\ ;\ B(8;0)\ ;\ C(6;12)$. Por el punto $M(0;3)$,efectuado en el lado AC, se traza una paralela a AB que corta a BC en N . Determinar las coordenadas de N.

En los vértices A; B y C se aplican fuerzas de 10 ; 20; 30 kilos , respectivamente , hallar el centro de gravedad.

RESOLUCION :



* Sea $N=(a;b)$

* Por ser $MN//AB$, entonces tienen la misma pendiente :

$$\frac{b-3}{a-0}=\frac{0+3}{8-4}\Rightarrow 4b-12=a$$

$BC//NC$, luego : $\frac{12-0}{6-8}=\frac{12-b}{6-a}\Rightarrow 6a+b=48$

* Resolviendo ambas ecuaciones :

$$a=\frac{36}{5};b=\frac{24}{5}\Rightarrow N=(\frac{36}{5};\frac{24}{5})$$

MÉTODO VECTORIAL :

Sean :

$$\mathscr{L}_{AB}=\{(8;0)+t(12;3)/t\in\mathbb{R}\}$$

$$\mathscr{L}_{BC}=\{(8;0)+r(2;-12)/r\in\mathbb{R}\}$$

$MN//AB\Rightarrow \mathscr{L}_{BC}=\{(0;3)+q(12;3)/q\in\mathbb{R}\}$

$N=BC\cap MN$, luego

$$(8;0)+r(2;-12)=(0;3)+q(12;3)$$

* resolviendo:

$$r=-2/5\ ;\ q=3/5$$

$$\Rightarrow N=(8;0)+(-2/5)(2;-12)=(\frac{36}{5};\frac{24}{5})$$

•CÁLCULO DEL CENTRO DE GRAVEDAD:

Sea P el punto pedido , entonces sus coordenadas están dadas por :

$$P=\frac{aA+bB+cC}{a+b+c};\ a\ ;\ b\ \text{y}\ c\ \text{son positivos}$$

donde A ; B y C son los vértices y a ; b y c sus respectivas cargas , entonces :

$$P=\frac{10(-4;-3)+20(8;0)+30(6;12)}{10+20+30}\Rightarrow P=(5;\frac{11}{2})$$

* Por lo tanto , los puntos de tangencia serán :

$$T_1=A+3r\vec{u}_1=(4;7)+3\sqrt{5}\,\frac{1}{\sqrt{5}}(-2;10)$$

$$\Rightarrow T=A-3r\vec{u}_2=(4;7)-3\sqrt{5}\,\frac{1}{5\sqrt{5}}(11;2)=(\frac{-13}{5};\frac{29}{5})$$

PROBLEMA 101 :

Dados los puntos $A(1;\ 1)$ y $B(9;\ 7)$ se pide determinar las coordenadas de un punto C, perteneciente a la recta L , definida por la ecuación $y=x-6$; tal que el ángulo ACB sea un ángulo recto

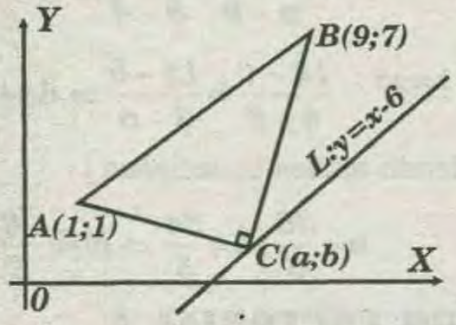
RESOLUCIÓN :

* Por el anunciado es recto $\sphericalangle C$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow m_{BC}m_{AC}=-1$$

$$(\frac{7-b}{9-a})(\frac{b-1}{a-1})=-1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$c(a;b)\in L\Rightarrow b=a-6\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$



* Resolviendo (I) y (II) se obtiene :

$$a=10\ ;\ b=4\ \text{ó}\ a=5\ ;\ b=-1$$

* Por lo tanto :

$$C=(10;\ 4)\ \text{ó}\ C=(5;-1)$$

RESOLUCIÓN VECTORIAL:

Sean : M , punto medio de $AB\Rightarrow M=(5;4)$

$C=(a;\ b)$, vértice del ángulo recto del $\triangle ACB$

$$\Rightarrow |MB|=|MC|\Rightarrow |(9-5;7-4)|=|(a-5;b-4)|$$

de donde :

$$(5-a)^2+(4-b)^2=25\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$(a;b)\in L\Rightarrow b=a-6$; reemplazando en (I) :

finalmente :

$$c=(10;\ 4)\ \text{ó}\ c=(5;-1)$$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular la pendiente de una recta cuya ecuación es: $2x+19y-k=0$

A) $19/k$ B) $k/19$ C) $-2/k$ D) $(9/5)^{-1}$ E) $-(9,5)^{-1}$

02 Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $(5;3);\ (5;7)$

A) $x+y=5$ B) $y=5$ C) $y=-5$ D) $x=5$ E) $x=-5$

03 Calcular las coordenadas del punto de intersección de las rectas:

$$L_1: 2x+3y+5=0\ \text{ y }\ L_2: x-y-5=0$$

A) $(2;-3)$ B) $(2;3)$ C) $(1;-2)$
D) $(-3;-1)$ E) $(3;-1)$

04 Señale la ecuación de la recta que pasa por $P(1;5)$ y $Q(-1;1)$

A) $2x+y-7=0$ B) $2x+y+1=0$ C) $2x-y-4=0$
D) $2x-y-3=0$ E) $2x-y+3=0$

05 Calcular la ecuación de una recta cuyo ángulo de inclinación mide 45° e intersecta al eje Y en $(0;4)$

A) $y=x+5$ B) $y=x+4$ C) $y=x+3$
D) $y=x+3$ E) $y=x+1$

06 Las intersecciones de una recta con los ejes son $(0;6)$ y $(-5;0)$, calcular la ecuación.

A) $\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1$ B) $\frac{x}{-5}+\frac{y}{6}=1$ C) $\frac{x}{6}-\frac{y}{5}=1$

07 Determinar la ecuación de una recta, que pasa por el punto $A(-6;3)$ y tiene un ángulo de inclinación de 45°.

A) $x+y+3=0$ B) $2x-y-3=0$ C) $x-y+3=0$
D) $3x-y+3=0$ E) $x-y-3=0$

08 Los interceptos que una recta determina sobre los ejes X e Y son 2 y -3 respectivamente. Hallar la ecuación de dicha recta.

A) $x+2y+5=0$ B) $3x-2y-6=0$ C) $x-y+5=0$
D) $-3x-2y+6$ E) $3x+2y+6=0$

09 Determinar la ecuación de la mediatriz del segmento que une los puntos $A(-3;2)$ y $B(1;6)$

A) $x+y-3=0$ B) $x-y+3=0$ C) $x+y-7=0$
D) $2x-y-3=0$ E) $2x-y-3=0$

10 Los vértices de un triángulo son $A(-2;1)$, $B(4;7)$ y $C(6;-3)$. Determinar la ecuación de la recta que

pasa por el vértice A y es paralela a $\overline{BC}$.

A) $2x+y+8=0$ B) $3x+y+16=0$ C) $5x+y+9=0$
D) $x+y+10=0$ E) $4x+2y+9=0$

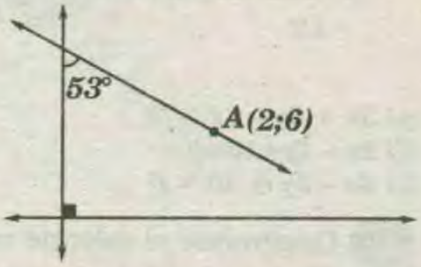
11 Calcular el área de un triángulo rectángulo formado por los ejes coordenados y la recta cuya ecuación es: $5x+4y+20=0$

A) $12u^2$ B) $18u^2$ C) $15u^2$ D) $10u^2$ E) $9u^2$

12 Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3;1)$ y tal que la distancia del punto $B(-1;1)$ a la recta es $2\sqrt{2}$ u.

A) $x+y=3$ B) $x-y=3$ C) $x+y=4$
D) $x+y=2\sqrt{2}$ E) $x+y=4\sqrt{2}$

13 Calcular la ecuación de la recta $\overline{L}$.



A) $y+2x-10=0$
B) $4y+3x-30=0$
C) $3y+4x-10=0$
D) $y+x-5=0$
E) $5y+x-2=0$

14 Determinar los puntos $(x;y)$ de la recta que pasa por $(1;-1)$ y $(-2;2)$. Dar como respuesta su ecuación característica.

A) $3y+2x=2$ B) $x-y=0$ C) $2y+4=3x$
D) $y-2x=0$ E) $y+x=0$

15 Se tiene un triángulo ABC en el cual las coordenadas de su vértices son $A(2;2)$, $B(4;4)$ y $C(3;6)$. Calcular la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela al lado $\overline{AC}$.

A) $y=4x$ B) $y=4x-10$ C) $y=4x-12$

16 Determinar el valor de "k" para que la recta $kx+3y-3=0$, sea paralela a la recta de ecuación:

$$18x+(k+3)y+1=0$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 9

17 Calcular "n" para que las rectas se intersecten en un mismo punto. $L_1: 2x-3y+8=0$

$L_2: 3x+7y+7=0$ $L_3: 2nx-3ny-12=0$

A) -4 B) -5 C) -6 D) -1 E) -2

18 Calcular la pendiente de la recta que pasa por $(1;0)$ y forma un ángulo de 53° con la recta $3x-y-4=0$.

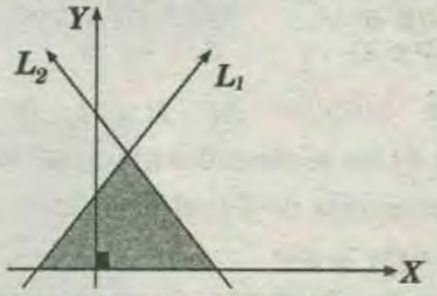
A) 3 B) $\frac{13}{9}$ C) $-\frac{13}{9}$ D) $\frac{13}{11}$ E) -3

19 La base mayor de un trapecio isósceles tiene por extremos a los puntos $(-2;8)$ y $(-2;-4)$. Uno de los extremos de la base menor está en el punto $(3;-2)$. Calcular el área del trapecio.

A) 44 u^2 B) 40 u^2 C) 50 u^2 D) 48 u^2 E) 56 u^2

20 Si $\overline{L}_1: y=x+2$ y $\overline{L}_2: y=-2x+5$

A) 25/4
B) 29/4
C) 23/4
D) 27/5
E) 27/4



TAREA DOMICILIARIA

01 Dada la recta "L" con ecuación $3x+4y-4=0$ y el punto $P(-2;-5)$, encontrar la distancia más corta de P a la recta L.

A) 2,5 u B) 3,0 u C) 4,5 u D) 5,5 u E) 6,0 u

02 Calcular k para que las rectas $\overline{L}_1$ y $\overline{L}_2$ sean paralelas. $\overline{L}_1: x+2y-6=0$ y $\overline{L}_2: y=-kx+t-3$

A) 1/3 B) 1/4 C) 1/2 D) 1/6 E) 1/8

03 Hallar el punto simétrico del punto $A(4;6)$ con respecto a la recta $x+y-4=0$.

A) $(-3;3)$ B) $(-2;2)$ C) $(-2;0)$
D) $(0;-2)$ E) $(-3;-2)$

04 Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3;1)$ y tal que la distancia del punto $(0;0)$ a la recta es $1u$. Además esta recta no debe pasar por el tercer cuadrante.

A) $x=3$ B) $x+y=6$ C) $y=3$
D) $2x-3y=6$ E) $x+4y=12$

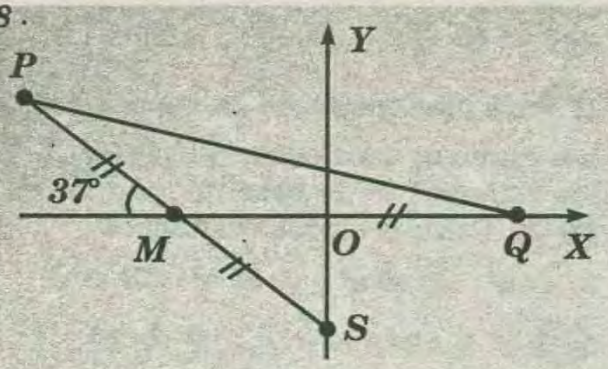
05 Calcular el área del triángulo que forma la recta $x+y-3=0$, con los ejes del sistema de coordenadas.

A) 5/2 B) 7/2 C) 9/2 D) 13/2 E) 15/2

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Del gráfico mostrado, determine las coordenadas del punto P, si la distancia de P a Q es

de $2\sqrt{178}$.

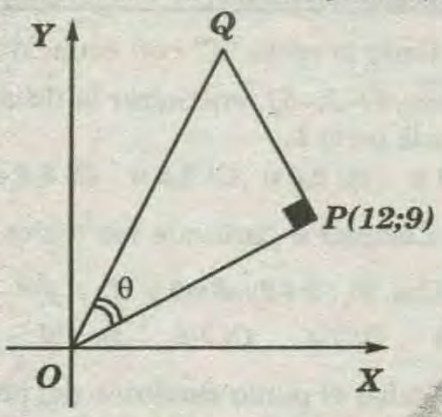


A) (–12; 6) B) (–16; 6) C) (–14; 8)
D) (–12; 8) E) (–10; 4)

02 Siendo $A(-1;\sqrt{7})$, $B(-1;5+\sqrt{7})$ y $C(x;0)$ los vértices del triángulo ABC, determine las coordenadas de C, sabiendo que $m\sphericalangle ABC = 53°$ y $m\sphericalangle BCA = 45°$.

A) (3; 0) B) (5; 0) C) (6; 0) D) (4; 0) E) (7; 0)

03 Determine las coordenadas de Q en la figura, si $Tg\theta = \frac{2}{3}$.



A) (7; 15) B) (8; 16) C) (6; 17)
D) (7; 16) E)(6; 15)

04 Determine las coordenadas de un punto del primer cuadrante tal que equidiste de $A(0;2) \wedge B(6;0)$, sabiendo además que subtiende sobre $\overline{AB}$ un ángulo recto.

A) (2; 3) B) (4; 4) C) (2; 4) D) (4; 5) E) (3; 4)

05 En un paralelogramo $ABCD$ se tiene que $A(3;5)$, $C(17;13)$ y el punto de intersección de la diagonal BD con el segmento CM (M punto medio de AD) tiene por coordenadas $(11;9)$. Determine la distancia desde el vértices B a este punto.

A) 1 B) 2 C) 3 D)4 E)5

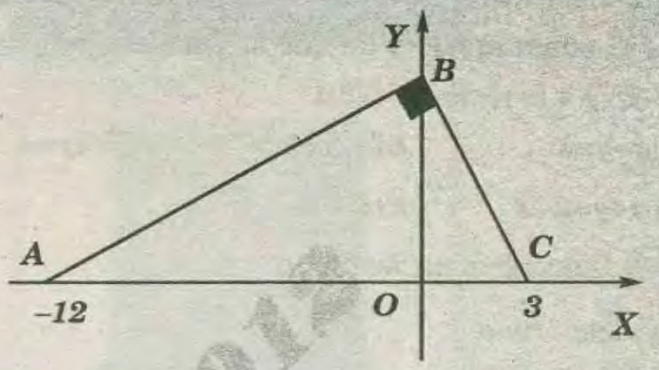
06 De los puntos que se indican, cuál pertenece a la recta: $4x - 3y - 24 = 0$

A) (0; 8) B) (–6; 0) C) (3; 4)
D) $\left(4; -\frac{8}{3}\right)$ E) $\left(\frac{3}{4}; 7\right)$

07 Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-2;3)$ y $(3;-4)$.

A) $7x + 5y - 1 = 0$ B) $5x + 7y - 11 = 0$
C) $7x + y + 11 = 0$ D) $3x + 5y - 9 = 0$
E) $2x - y + 7 = 0$

08 De la figura adjunta, hallar la ecuación de la recta que pasa por el baricentro del triángulo AOB y el circuncentro del triángulo BOC.



A) $3x + 5y - 11 = 0$ B) $2x - 11y + 30 = 0$
C) $2x - 7y + 13 = 0$ D) $3x - 5y + 9 = 0$
E) $4x - 5y + 16 = 0$

09 Determinar el valor de verdad:

( ) Si dos rectas son paralelas, tienen el mismo ángulo de inclinación.

( ) Si dos rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes es -1.

( ) La pendiente de una recta oblicua es negativa.

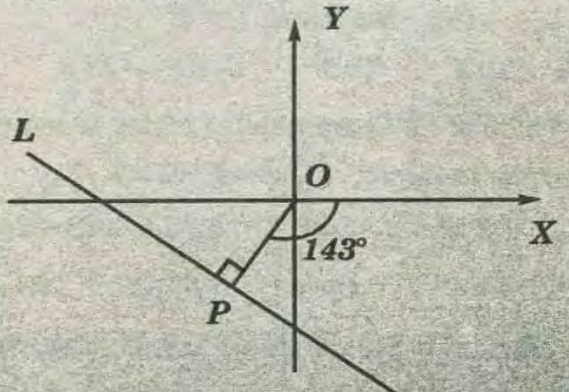
A) VVV B) FFF C) VFV D)VVF E) VFF

10 Qué representa gráficamente la ecuación:

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y - 24 = 0$$

A) Dos rectas perpendiculares.
B) Dos rectas paralelas.
C) Dos rectas secantes.
D) Una recta y un punto.
E) Sólo una recta.

11 Hallar la ecuación de la recta L, si $OP = 12$.



A) $\frac{x}{-15} + \frac{y}{-20} = 1$ B) $\frac{x}{-20} + \frac{y}{-15} = 1$ C) $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} = 1$

D) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-3}=1$ E) $\frac{x}{20}+\frac{y}{-15}=1$

12 Hallar las coordenadas del punto de intersección de las rectas:

$L_1: 3x-5y+12=0$ y $L_2: x-2y-6=0$

A) (–24; 36) B) (–36; –18) C) (28; 32)
D) (–54; –30) E) (46; –25)

13 Si las rectas $3^n x - 12y + 9 = 0$ y $18x - 2^n y + 6 = 0$ son paralelas, calcular su pendiente.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{9}{4}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{27}{16}$

14 Los extremos de un segmento son $A(-6; -8)$ y $B(4; -2)$. Hallar la ecuación de la mediatriz.

A) $4x - 3y - 12 = 0$ B) $3x - 5y - 20 = 0$
C) $3x + 4y + 12 = 0$ D) $5x + 3y + 20 = 0$
E) $2x + y - 5 = 0$

15 Hallar el simétrico del punto $(3; 6)$ respecto de la recta $y + x - 6 = 0$.

A) (0; 3) B) (1; 2) C) (1; 3) D) (–1; 3) E) (–1;2)

16 Dadas las rectas L_1: $4x+3y-11=0$ y L_2: $8x+6y+15=0$, si A pertenece a L_1 y B pertenece a L_2 tal que $\overline{AB}$ es perpendicular a L_1, hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto medio de $\overline{AB}$ y es paralela a L_2

A) $4x + 3y - 7 = 0$ B) $4x + 3y - 3 = 0$
C) $8x + 6y - 7 = 0$ D) $8x + 6y - 3 = 0$
E) $16x+12y-7=0$

17 Hallar el menor área del pentágono formado por los puntos de intersección de las rectas: $x - 6 = 0$; $x + 2 = 0$; $y - 10 = 0$ e $y - 4x - 10 = 0$.

A) $32u^2$ B) $48u^2$ C) $96\ u^2$ D) $54\ u^2$ E) $72\ u^2$

18 Los vértices de un triángulo son $A(-4; -1)$, $B(3; 6)$ y $C(7; 4)$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por su baricentro y es perpendicular al lado mayor.

A) $11x + 5y - 37 = 0$ B) $11x - 5y - 23 = 0$
C) $5x + 11y - 29 = 0$ D) $5x - 11y + 28 = 0$
E) $7x - 3y - 26 = 0$

19 Dadas las rectas L_1 y L_2 cuya intersección es $(-3; -2)$. Si la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo que forman dichas rectas es $3x - By + 1 = 0$, hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo obtuso formado por dichas rectas.

A) $4x + 3y + 18 = 0$ B) $12x + 3y + 12 = 0$
C) $5x - y - 13 = 0$ D) $x + 3y + 9 = 0$
E) $4x+y+14=0$

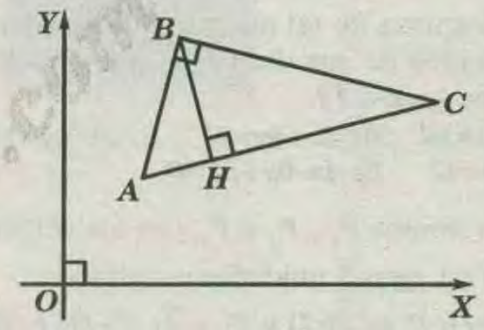
20 El ángulo de inclinación de dos rectas paralelas es α (agudo). Si una de ellas pasa por $(a; b)$ y la otra por $(h; k)$, hallar la distancia entre dichas rectas.

$0<a<h$ y $0<k<b$

A) $(h-a)\text{Sen}\alpha + (b-k)\text{Cos}\alpha$
B) $(h+a)\text{Sen}\alpha + (b+k)\text{Cos}\alpha$
C) $(h-a)\text{Cos}\alpha + (b-k)\text{Sen}\alpha$
D) $(h+a)\text{Cos}\alpha + (b-k)\text{Sen}\alpha$
E) $(a-h)\text{Sen}\alpha + (k-b)\text{Cos}\alpha$

TERCERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Según el gráfico, $m\sphericalangle ACB = 30°$. Calcule la suma de abscisas de A y C si la abscisa en el punto H es 5, además la proyección de $\overline{AC}$ sobre el eje de abscisas mide $8\ u$.



A) 8 B) 10 C) 14 D) 16 E) 18

02 Si L es una recta no paralela a los ejes coordenadas, y contiene los puntos $(2;2)$, $(0;q)$; $(p;0)$ siendo $p \neq 0$ y $q \neq 0$, calcule el valor de $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$.

A) 1 B) 2 C) 4 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

03 Calcule la medida del ángulo que forman las rectas L_1, con pendiente K, y L_2 con pendiente $\frac{K-1}{K+1}$

A) 60° B) 90° C) 120° D) 135° E) 150°

04 Determine para qué valores de a, la recta $L: (a+2)x+(a^2-9)y+3a^2-8a-5=0$ es paralela al eje X y paralela al eje Y.

A) $a=-2$; $a=\pm 3$ B) $a=2$; $a=\pm 3$ C) $a=2$; $a=3$
D) $a=\sqrt{3}$; $a=-2$ E) $a=-2; 0=6$

05 Halle la ecuación de la recta que contiene al origen y que interseca a las rectas $x-y=3$; $y=2x+4$ en A y B respectivamente de tal manera que el origen es punto medio de AB.

A) $2y=x$ B) $x-y=1$ C) $2x=y$
D) $2x+y=0$ E) $2x-y=1$

06 Halle la ecuación de la recta que contiene uno de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles conociendo el vértice del ángulo recto $C=(4;1)$ y la ecuación de la recta que contiene a la hipotenusa es $3x-y+5=0$.

A) $2x-y=7$ B) $2x+y=9$ C) $2y+x=7$
D) $2x+y=7$ E) $x+y-7=0$

07 Se tiene los puntos $A=(-2;3)$ y $B=(12;3)$ y la recta $L: y-x-12=0$. Calcule las coordenadas de un punto P de dicha recta de tal forma que $AP+PB=28$, además P pertenece al primer cuadrante.

A) $(6;18)$ B) $(3;15)$ C) $(2;14)$
D) $(1;13)$ E) $(4;16)$

08 Halle la ecuación de la trayectoria de un móvil que se desplaza de tal manera que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(2;-2)$ y $(4;1)$ es igual a 12.

A) $2x+3y=10$ B) $4x+6y=21$ C) $2x-3y=11$
D) $4x-6y=21$ E) $4x-6y+21=0$

09 Los puntos P_1, P_2 y P_3 son los vértices de un triángulo de área 5 unidades cuadradas.

Si $P_1=(4;1)$; $P_2=(-3;3)$ y $P_3 \in \overleftrightarrow{L}$, $L: (1;1).(x;y)=0$, halle las coordenadas de P_3

A) $(1;1)$ B) $(1;-1)$ C) $(-5;5)$
D) $(5;5)$ E) $(-5;1)$

10 Se tiene una circunferencia tangente al eje de las abscisas, cuyo centro es el punto $(7;1)$. Determine la ecuación de la recta tangente de mayor inclinación a dicha circunferencia trazada desde el punto $(2;6)$.

A) $3x+4y-30=0$ B) $3x+4y-10=0$ C) $3x-4y-23=0$
D) $5x-8y-30=0$ E) $x+y-3=0$

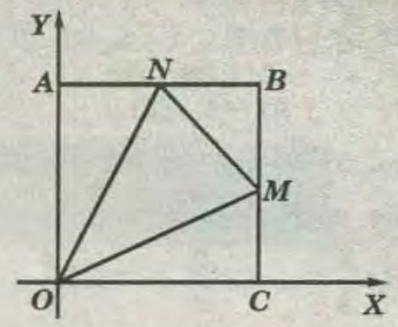
11 Se lanza una partícula P desde el punto $(-2;5)$, para que intercepte a otra partícula, de trayectoria $L: 3x-4y+6=0$. Si el movimiento de P es rectilíneo con rapidez constante de 2 *unid/s*, calcule el mínimo tiempo en qúe P lograría su objetivo.

A) 4 s B) 3 s C) 1 s D) 2 s E) *No se puede determinar*

12 Sea $B=(2a\sqrt{3}\,;2a)$ y A un punto que pertenece a la recta $\mathscr{L}$: $x=\sqrt{3}(y-2a)$. Calcule las coordenadas de A (dé una de las respuestas) si $m\sphericalangle OAB=90°$ y O es origen de coordenadas.

A) $(0;3a)$ B) $(a;\sqrt{3}a)$ C) $(a\sqrt{3};3a)$
D) $(a\sqrt{3};3a)$ E) $(a\sqrt{3};a\sqrt{3})$

13 En el gráfico $OABC$ es un cuadrado, en el cual el área de la región ONM es al área de la región OMC como 2 es a 1. Calcule la ecuación de la recta OM, si $AN=NB$.



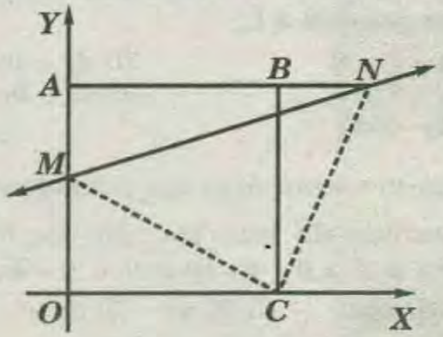
A) $2x-5y=0$ B) $2x-3y=0$ C) $x-y+1=0$
D) $3x-5y=0$ E) $2x+5y=0$

14 Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(a\,;b)$ y por la intersección de las rectas

$$L_1: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\,;\ L_2: \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$$

A) $b^2x-a^2y-a^2b-ab^2=0$ B) $bx-ay-ab-ab^2=0$
C) $b^2x-a^2y-a^2b+ab^2=0$ D) $a^2x-b^2y-a^2b-ab^2=0$
E) $ax+by+ab=0$

15 Según el gráfico determine la ecuación de la recta que pasa por M y N, si $m\sphericalangle MCN=90°$; además $OABC$ es un cuadrado de lado $8{,}5\ u$ y $AM=5u$.



A) $5x-12y+42=0$ B) $5x+12y-42=0$ C) $12x-5y+42=0$
D) $12x+5y-42=0$ E) $6x+5y-21=0$

16 La medida de la inclinación de dos rectas es θ, una de ellas pasa por el punto $(p\,;q)$ y la otra por el punto $(h\,;k)$. Calcule la distancia entre dichas rectas.

A) $(h-p)\operatorname{sen}\theta-(k-q)\cos\theta$ B) $(h+p)\operatorname{sen}\theta+(k+q)\cos\theta$
C) $(h+p)\operatorname{sen}\theta-(k+q)\cos\theta$ D) $(h-p)\cos\theta-(k-q)\operatorname{sen}\theta$
E) $(2h+p)\cos\theta-(k-2q)\operatorname{sen}\theta$

17 Dados los puntos $A=(9\,;1)$ y $B=(3\,;4)$ las distancias respectivas a la recta $\overleftrightarrow{L}\{(3;4)+t(4;3)\}$; $t\in\mathbb{R}$. son a y b. Calcule $k=a+b$.

A) 0 B) 6 C) 12 D) 3 E) 4

18 L es una recta que contiene al punto $(8; 3)$ cuya intersección con el eje de ordenadas es negativa y cuya pendiente es positiva. L determina con los ejes coordenados una región triangular de 12 unidades de perímetro. Encuentre la ecuación vectorial y la ecuación con las coordenadas al origen L.

A) $L: \{(8;3)+t(4;3)\}t \in \mathbb{R}$; $L: \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

B) $L: \{(4;0)+t(4;3)\}t \in \mathbb{R}$; $L: \frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$

C) $L: \{(8;3)+t(-4;3)\}t \in \mathbb{R}$; $L: \frac{x}{4}-\frac{y}{4}=1$

D) $L: \{(8;3)+t(4;3)\}t \in \mathbb{R}$; $L: \frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$

E) $L: \{(0;-3)+t(4;-3)\}t \in \mathbb{R}$; $L: \frac{x}{6}-\frac{y}{4}=1$

19 Los lados de un rectángulo son tales que dos de ellos distan $3\sqrt{2}$ unidades del puntos $Q=(-3;5)$ y los otros distan $5\sqrt{2}$ unidades de Q y la medida de la inclinación de estos últimos lados es $\frac{\pi}{4}$ radianes. Determinar la ecuación vectorial de una recta que contenga a uno de los lados, tal que su ordenada al origen sea máxima.

A) $L: \{(2;0)+t(1;1)\}t \in \mathbb{R}$

B) $L: \{(5;3)+t(1;1)\}t \in \mathbb{R}$

C) $L: \{(7;7)+t(1;1)\}t \in \mathbb{R}$

D) $L: \{(-8;10)+t(1;1)\}t \in \mathbb{R}$

E) $L: \{(-6;2)+r(-1;1)\}r \in \mathbb{R}$

20 Dadas las rectas L_1: $(0;1)+t(2;1)$ y L_2:$(2;3)+s(1;2)$, halle la ecuación vectorial de una de las bisectrices del ángulo formado por dichas rectas.

A) $-\frac{1}{5}(1;3)+t(1;3)/t \in \mathbb{R}$ B) $\frac{1}{5}(1;3)+t(1;3)/t \in \mathbb{R}$

C) $(1;3)+t(1;3)/t \in \mathbb{R}$ D) $-(1;3)+t(1;3)/t \in \mathbb{R}$

E) $\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)+t(1;3)/t \in \mathbb{R}$

PRIMERA PRACTICA — LA RECTA

1) E	2)D	3) A	4) E	5) B	6) B	7) C	8) C	9) B	10) C
11) D	12) A	13) B	14) E	15)C	16) D	17) A	18) C	19) C	20) E
01) E	02) C	03) C	04)C	05) C					

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

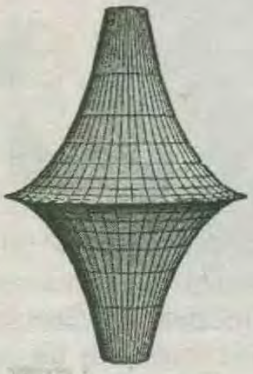
1)B	2)D	3)C	4)B	5)D	6)D	7)A	8)B	9)C	10)C
11)A	12)D	13)C	14)D	15)A	16)E	17)D	18)A	19)A	20)A

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1)C	2)E	3)D	4)A	5)D	6)B	7)B	8)B	9)C	10)A
11)D	12)A	13)A	14)C	15)A	16)A	17)B	18)D	19)D	20)E

GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

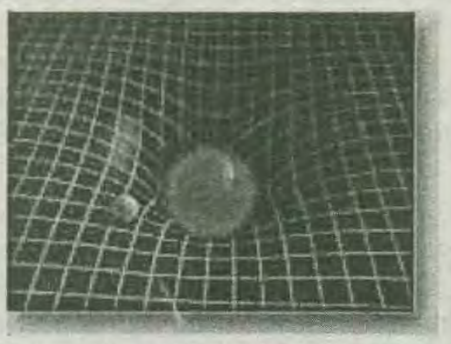
Así como la geometría elíptica rechaza la existencia de paralelas, la geometría hiperbólica rechaza la unicidad de la paralela a una recta pasando por un punto exterior a ella.



Como habíamos comentado, en esta nueva geometría la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es menor que 180°. Esta geometría es la que se ven obligados a aplicar los habitantes de una pseudoesfera

Puede parecer absurdo puesto que ¿Quién puede vivir en una pseudoesfera? Nosotros mismos, la teoría de la relatividad de Einstein, asegura que el espacio donde vivimos está curvado de tal manera que es la geometría hiperbólica la que debemos aplicar en él.

A modo de ejemplo: Newton entendía la gravitación como una acción de *fuerzas*. Dos masas (imaginemos dos esferas) ejercen entre sí una fuerza que se «mueve» (figurativamente hablando) a lo largo de la recta que pasa por sus centros. Para Einstein la gravedad se debe a una «curvatura» del espacio – tiempo. Para él toda masa produciría una distorsión en el espacio por el cual nosotros nos «deslizaríamos».



Imaginemos una cama bien extendida, su superficie se asemeja a una superficie euclidiana, plana. Si sobre esa superficie se apoya una bola de plomo, deja de ser plana para transformarse en «curva». Cualquier objeto que se encuentre sobre la sábana cerca de la bola se deslizará hacia él por efecto de la curvatura. En el caso del espacio – tiempo, la Tierra, por ejemplo, curvaría nuestro espacio de manera que cuando soltamos un objeto, se deslizaría por «esa curvatura» hacia el suelo.

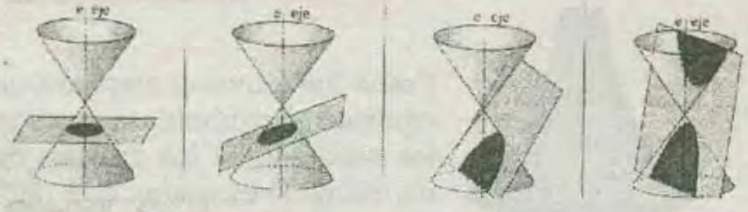
CIRCUNFERENCIA

CAPITULO 47

OBJETIVOS :

Conocer la definición , propiedades y aplicaciones de la circunferencia , así como saber resolver problemas contextualizados con ella.

INTRODUCCIÓN :



¿Quién fue el primero en estudiar las cónicas? Una de las primeras personas en estudiar las secciones cónicas fue Menaechmus (Menecmo) de Grecia, alumno de Eudoxio, como consecuencia de su interés en el problema de construir con regla y compás un cubo de volumen doble al de un cierto cubo dado; esto sucedió en el siglo ***IV*** a. ***C***. Probablemente, Menecmo encontró algunas propiedades de las secciones cónicas, como las asíntotas de la hipérbola, aunque no existe ningún documento que lo demuestre. En el mismo siglo el geómetra Euclides escribió 4 libros sobre las secciones cónicas, de los cuales ninguno se conserva en la actualidad. Según Pappus de Alejandría, Aristeo (contemporáneo de Euclides) trabajó las cónicas y las llamó: sección del cono rectángulo, sección del cono acutángulo y sección del cono obtusángulo (parábola, elipse e hipérbola actual). Pero, al igual que ocurre con los cuatro libros de Euclides, no se conservan documentos de esos trabajos.

El primer tratado escrito que se conserva sobre las secciones cónicas es debido a Apolonio de Perga. En sus 8 libros Apolonio estudia las propiedades geométricas de las secciones cónicas. Las figuras que se van a estudiar, todas ellas conocidas con el nombre genérico de cónicas, se pueden obtener como intersección de una superficie cónica con un plano.

Previamente a este trabajo existían estudios elementales sobre determinadas intersecciones de planos perpendiculares a las generatrices de un cono, obteniéndose elipses, parábolas o hipérbolas según que el ángulo superior del cono fuese agudo, recto u obtuso, respectivamente. Si bien no disponía de la Geometría Analítica todavía, Apolonio hace un tratamiento de las cónicas que se aproxima mucho a la misma. Los resultados obtenidos por Apolonio sobrevivieron sin cambios hasta que Fermat y Descartes, en una de las primeras aplicaciones de la Geometría Analítica (Fermat y Descartes se pueden considerar los fundadores de la Geometría Analítica), retomaron el problema llegando a su casi total estudio, haciendo siempre la salvedad de que no manejaban coordenadas negativas, con las restricciones que esto impone. La contribución de cada uno reside esencialmente en el reconocimiento de que una ecuación dada con dos incógnitas puede considerarse como la determinación de una curva plana con respecto a un sistema de coordenadas. El estudio analítico de Descartes ofrece un aspecto puramente algebraico y se sirve de las ecuaciones de las cónicas para deducir propiedades referentes a las curvas y a su construcción geométrica. Por otro lado, Fermat deduce las ecuaciones de la recta, la circunferencia y todas las secciones cónicas.

Se llegó a la segunda cumbre en la geometría clásica Griega alrededor de los ***200*** a. ***C***. con el trabajo sobre las secciones cónicas de Apolonio ***(262–190 a.C.)***. Desde un interés puramente matemático, las secciones cónicas han evolucionado hasta su utilidad en muchos y variados contextos. Es, por supuesto, de principal importancia el que se incluyeran en las descripciones del movimiento planetario de Kepler al inicio del siglo ***XVII*** ; y más tarde por Newton al final del siglo ***XVII*** cuando, en uno de los mayores adelantos en la ciencia, el dedujo de su ley de gravitación que la forma de la órbita de los planetas era una elipse. Las aplicaciones de las cónicas son abundantes. Por ejemplo, las propiedades de reflexión de la elipse son aprovechadas en la destrucción de los cálculos renales y también las de la parábola en las antenas parabólicas. Para realizar ciertos movimientos mecánicos en de los robots, se necesitan engranes elípticos. La hipérbola es aprovechada en navegación (navegación hiperbólica, sistemas Navegadores Decca).Sin apenas darnos cuenta,de muchas maneras las secciones cónicas son parte de nuestra vida diaria.

El tamaño de una elipse particular es atribuido a la figura concreta. La forma abstracta en lo que uno debe pensar como el «alma» de la figura, para la elipse está caracterizada por la excentricidad, que es lo que mide qué tan aplanada está.

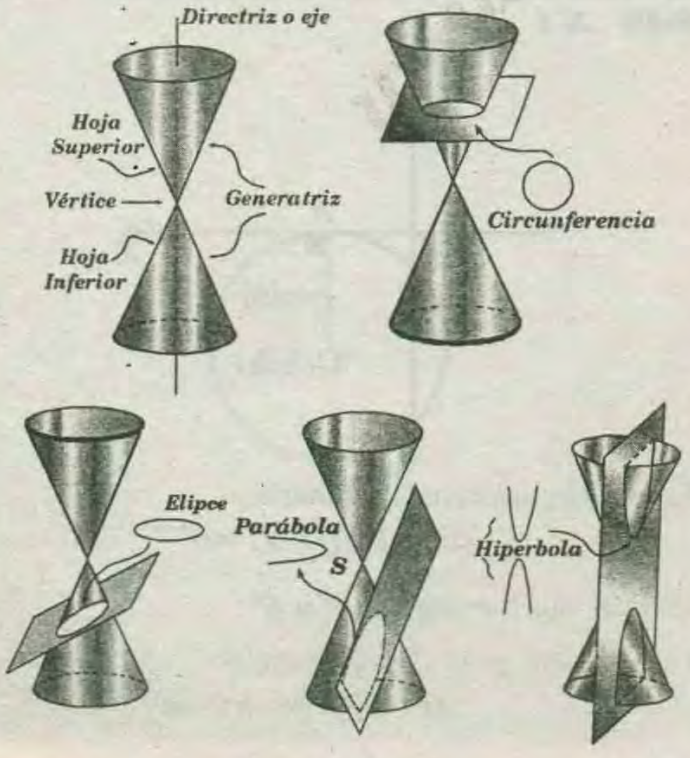
Platón *(427.348 a.C.)* asumió como realidad la suposición de que tales formas tenían una vida independiente en el mundo de las ideas. Sin embargo, el gran filósofo natural Aristóteles *(384-322* a.C.), quien fue el más importante sucesor y alumno de Platón, distinguió entre el mundo real y el mundo de las ideas. Esto es, entre otras cosas, debido la discriminación entre lo concreto y lo abstracto que las matemáticas de todos los tiempos posteriores se han sentido en gran deuda con los Griegos.

SECCIONES CÓNICAS

Llamamos superficie cónica de revolución a la superficie engendrada por una línea recta que gira alrededor de un eje manteniendo un punto fijo sobre dicho eje; mientras que denominamos simplemente Cónica a la curva obtenida al cortar esa superficie cónica con un plano. Las diferentes posiciones de dicho plano nos determinan distintas curvas: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.

La intersección de un plano con un cono circular recto de dos hojas es una curva denominada sección cónica.

Dependiendo del modo de cómo el plano interseca al cono, se generan las curvas y circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.



CIRCUNFERENCIA :

Si el plano es perpendicular a la directriz y no pasa por el vértice , entonces la intersección del plano con el vértice es una circunferencia.

ELIPSE :

Si el plano cortante no es paralelo a una generatriz ni a la directriz y no pasa por el vértice del cono , entonces la intersección es una elipse.

PARÁBOLA :

Cuando el plano cortante es paralelo a una generatriz y no para por el vértice, entonces lo interseca formando una parábola.

HIPÉRBOLA :

Si el plano secante es paralelo a la directriz del cono y no pasa por el vértice, entonces genera una hipérbola.

LUGAR GEOMÉTRICO

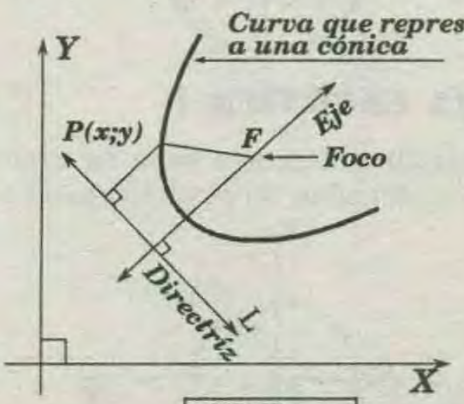
Se define un lugar geométrico a un conjunto de puntos que cumplen una misma propiedad.

Ejemplo de algunos lugares geométricos:

* ***La bisectriz de un ángulo***
* ***La mediatriz de un segmento***
* ***La circunferencia***
* ***La superficie esférica, etc.***

Las cónicas, son denominadas lugares geométricos, porque todos sus puntos cumplen una misma propiedad. El cual es, el cociente de la distancia de cada uno de sus puntos ***P(x;y)*** a una recta fija ***ℒ*** denominada directriz y a un punto fijo denominado foco ***"F"*** que no pertenece a la directriz es siempre una constante e denominada excentricidad de la cónica.

EXCENTRICIDAD DE UNA CÓNICA



* En la figura:

$$\frac{d(P;F)}{d(P;L)} = e$$

La constante **e** se denomina excentricidad del lugar geométrico, y determina la forma y tipo de las curvas que se definen bajo estas condiciones:

Si : $e = 0$, entonces la cónica es una circunferencia.

Si : $e = 1$, entonces la cónica es una parábola.

Si: $e < 1$, entonces la cónica es una elipse.

Si: $e > 1$, entonces la cónica es una hipérbola.

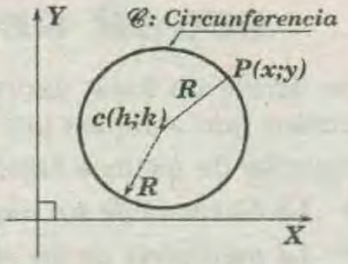
LA CIRCUNFERENCIA

Es un lugar geométrico de todos los puntos de un plano que están a una misma distancia de otro punto fijo del mismo plano denominado centro.

ECUACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA

Sea $P(x;y)$ un punto del plano XY cuya distancia constante a otro punto fijo $C(h;k)$ es R, luego; la ecuación de la circunferencia es:

$\mathscr{C}: (x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$, así:



En la figura:

* Centro : $C(h; k)$
* Radio : R
* Punto genérico: $P(x; y)$
* Entonces por distancia entre dos puntos:

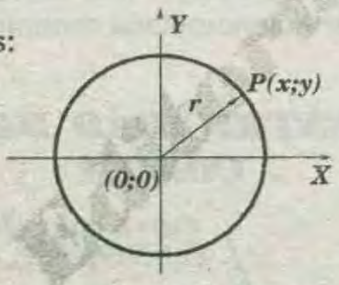
$$\boxed{\mathscr{C}: (x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2}$$

ECUACIÓN ORDINARIA DE LA CIRCUNFERENCIA.

* Cuando el centro de las circunferencia está en el origen de coordenadas, la ecuación es:

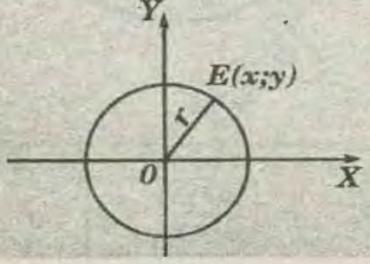
$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$ .....ECUACIÓN CANÓNICA

* Su grafica es:



I) FORMA CANÓNICA :

es cuando la circunferencia tiene su centro en el origen de coordenadas. Su ecuación es $x^2 + y^2 = r^2$



DEMOSTRACIÓN :

* Tomamos sobre la circunferencia un punto cualquiera $E(x;y)$.

$$\Rightarrow |\overrightarrow{OE}| = r$$

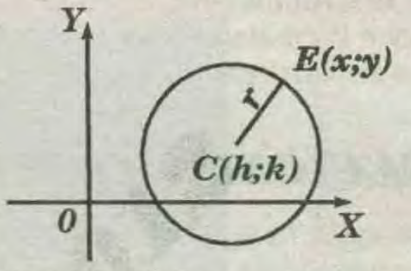
$$\sqrt{x^2+y^2} = r$$

Elevando al cuadrado ambos miembros: $x^2+y^2=r^2$

II) FORMA ORDINARIA :

Es cuando la circunferencia tiene su centro en el punto $c(h;k)$.

Su ecuación es : $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$



DEMOSTRACIÓN :

* Tomamos sobre la circunferencia un punto cualquiera $E(x;y)$.

$$\Rightarrow |\overrightarrow{CE}| = r$$

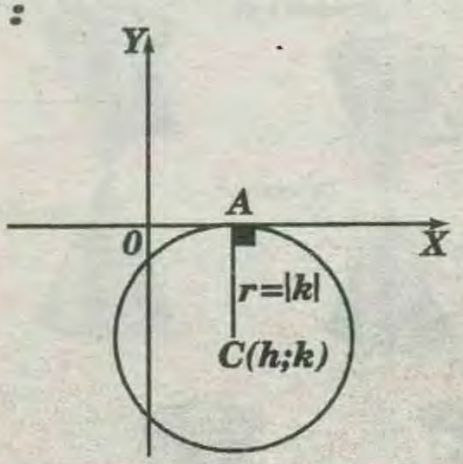
$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$

* Elevando al cuadrado ambos miembros :

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

ECUACIONES PARTICULARES DE LA CIRCUNFERENCIA

A) CIRCUNFERENCIA TANGENTE AL EJE X :



Es una circunferencia ordinaria :

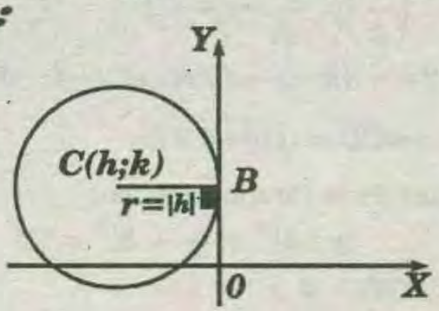
$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

Cumple que : $r = |k| \Rightarrow r^2 = k^2$

La ecuación de la Circunferencia :

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

B) CIRCUNFERENCIA TANGENTE AL EJE Y:



* Es una circunferencia ordinaria :

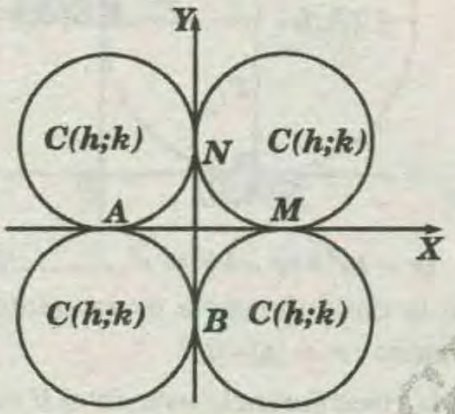
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

* Cumple que $r=|h| \Rightarrow r^2=h^2$

La ecuación de la circunferencia es :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=h^2$$

C) CIRCUNFERENCIA TANGENTE A LOS EJES COORDENADOS :



* Es una circunferencia ordinaria :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

* Cumple que $r=|h|=|k| \Rightarrow r^2=h^2=k^2$

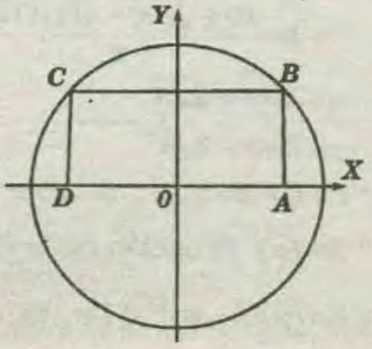
La ecuación de la Circunferencia :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=h^2=k^2$$

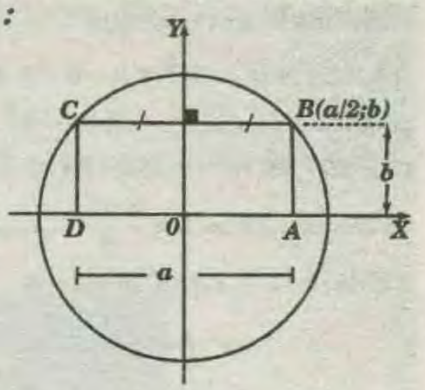
Cuando una circunferencia es tangente a los ejes se encontrará enmarcada en un determinado cuadrante.
Si está en el primer cuadrante se cumplirá que : $h=k$
Si está en el segundo cuadrante se cumplirá que: $h=-k$
Si está en el tercer cuadrante se cumplirá que: $h=k$
Si está en el cuarto cuadrante se cumplirá que: $h=-k$

EJERCICIO 1:

En la siguiente figura hallar el perímetro del rectángulo. Se sabe que el área del rectángulo es $100\ u^2$ y que el radio de la circunferencia es 10.



RESOLUCIÓN :



Perímetro $\square = ?$

Perímetro $=2a+2b=?$

Ecuación de la circunferencia :

$x^2+y^2=100.....(\alpha)$

$B\left(\frac{a}{2};b\right) \in$ circunferencia: $\frac{a^2}{4}+b^2=100$

$\Rightarrow a^2+4b^2=400$

$\Rightarrow a^2=400-4b^2.....(I)$

* Por dato : Area del $\square=100 \Rightarrow ab=100$

$\Rightarrow a=\frac{100}{b}.....(II)$

* (II) en (I) :

$$\left(\frac{100}{b}\right)^2=400-4b^2 \Rightarrow \frac{10000}{b^2}=400-4b^2$$

$$\Rightarrow 10000=400b^2-4b^4 \Rightarrow 2500=100b^2-b^4$$

$$\Rightarrow 0=b^4-100b^2+2500$$

b^2 — -50

b^2 — -50

$\Rightarrow b^2=50 \Rightarrow b=5\sqrt{2}$

* En (II): $a=\frac{100}{5\sqrt{2}}=\frac{20}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=10\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ perímetro: $2a+2b=20\sqrt{2}+10\sqrt{2}=30\sqrt{2}$

EJERCICIO 2 :

Determinar la ecuaciónde la circunferencia que pasa por los puntos $A(2;2)$ y $B(8;0)$. El centro de la circunferencia está en la recta $L: 3x+7y+2=0$.

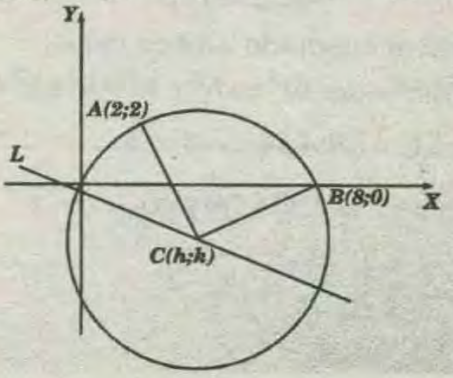
RESOLUCION :

$L: 3x+7y+2=0$

x	y
0	$-2/7$
$-2/3$	0

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.....(\alpha)$

$\Rightarrow |\overline{CA}|=|\overline{CB}| \Rightarrow \sqrt{(h-2)^2+(k-2)^2}=\sqrt{(h-8)^2+k^2}$



* Elevando al cuadrado :

$(h-2)^2+(k-2)^2=(h-8)^2+k^2$

$\Rightarrow h^2-4h+4+k^2-4k+4=h^2-16h+64+k^2$

$\Rightarrow -4h-4k+8=-16h+64 \Rightarrow 12h=4k+56$

$\Rightarrow 3h=k+14 \Rightarrow h=\dfrac{k+14}{3}$.....(I)

* $C(h;k) \in L: 3h+7k+2=0$

$\Rightarrow h=\dfrac{-7k-2}{3}$.....(II)

*(I)=(II): $\dfrac{k+14}{3}=\dfrac{-7k-2}{3}$

$\Rightarrow k+14=-7k-2 \Rightarrow 8k=-16 \Rightarrow k=-2$

* En(I): $h=\dfrac{-2+14}{3} \Rightarrow h=4 \Rightarrow C(4;-2)$

$\Rightarrow$ radio: $r=|\overline{CB}|=\sqrt{(8-4)^2+(0+2)^2}=\sqrt{20}$

$\Rightarrow$ En(α): $(x-4)^2+(y+2)^2=20$

EJERCICIO 3 :

Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen y es tangente a la recta $L: 4x-3y-18=0$ en el punto $A(0;-6)$.

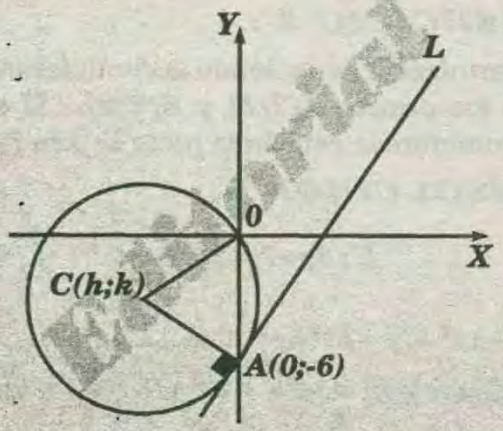
RESOLUCIÓN :

$L: 4x-3y-18=0$	x	y
	0	-6
	4,5	0

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.....(α)

$\Rightarrow |\overline{CO}|=|\overline{CA}|$

$\Rightarrow \sqrt{h^2+k^2}=\sqrt{h^2+(k+6)^2}$.



* Elevando al cuadrado ambos lados :

$h^2+k^2=h^2+(k+6)^2 \Rightarrow h^2+k^2=h^2+k^2+12k+36$

$\Rightarrow 0=12k+36 \Rightarrow -3=k$

* De la figura : $L \perp \overline{CA}$: $m_L m_{\overline{AC}}=-1$

$\Rightarrow \left(\dfrac{4}{3}\right)\left(\dfrac{k+6}{h}\right)=-1$

* Como: $k=-3$

$\left(\dfrac{4}{3}\right)\left(\dfrac{-3+6}{h}\right)=-1$

$\Rightarrow 12=-3h \Rightarrow -4=h \Rightarrow C(-4;-3)$

$\Rightarrow$ radio $\Rightarrow =\overline{CO}=\sqrt{16+9}=5$

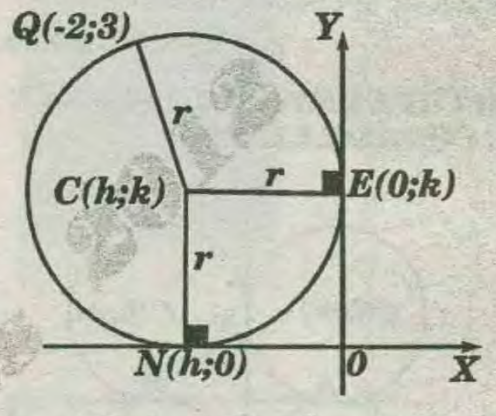
$\Rightarrow$ Ecuación de la Circunferencia :

$(x+4)^2+(y+3)^2=25$

EJERCICIO 4 :

Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $Q(-2;3)$ y es tangente a los ejes coordenados. Se sabe que el radio es menor que 5.

RESOLUCIÓN :



$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.....(α)

* Como la circunferencia es tangente a los ejes coordenados : $r=|h|=|k|$

* Como la circunferencia esta en el II cuadrante:

$h=-k$ .....(I)

* De la figura :

$|\overline{CQ}|=|\overline{CE}| \Rightarrow \sqrt{(h+2)^2+(k-3)^2}=\sqrt{h^2}$

* Elevando al cuadrado ambos lados :

$(h+2)^2+(k-3)^2=h^2$

$\Rightarrow h^2+4h+4+k^2-6k+9=h^2$

$\Rightarrow k^2-6k+4h+13=0$.....(II)

* (I) en (II) : $k^2-6k+4(-k)+13=0$

$\Rightarrow k^2-10k+13=0$

$\Rightarrow k=\dfrac{10\pm\sqrt{100-4(1)(13)}}{2}=\dfrac{10\pm4\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow k=5\pm2\sqrt{3}$

$\Rightarrow k=5-2\sqrt{3}$

* En (I): $h=2\sqrt{3}-5 \Rightarrow r=|k|=|5-2\sqrt{3}|=5-2\sqrt{3}$

* En (α): Ecuación de la circunferencia

$\left(x-(2\sqrt{3}-5)\right)^2+\left(y-(5-2\sqrt{3})\right)^2=(5-2\sqrt{3})^2$

ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

La ecuación general de la circunferencia se obtiene al desarrollarse la forma ordinaria :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$\Rightarrow x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2hx-2ky+\underbrace{h^2+k^2-r^2}_{F}=0$$

* Generalizando :

$$\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0}$$

$$\Rightarrow D=-2h\ ;\ E=-2k\ ;\ F=h^2+k^2-r^2$$

Ahora vamos a deducir unas fórmulas que nos permitan hallar el centro y el radio de la circunferencia cuando tenemos la ecuación general. Para hacer esta deducción pasaremos de la forma general a la forma ordinaria.

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\Rightarrow (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$\Rightarrow x^2+Dx+y^2+Ey=-F$$

$$\left(x^2+Dx+\frac{D^2}{4}\right)+\left(y^2+Ey+\frac{E^2}{4}\right)=-F+\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x \quad \frac{D}{2} \quad y \quad \frac{E}{2}$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(D^2+E^2-4F)} \quad .....(I)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow -h=\dfrac{D}{2}\Rightarrow h=-\dfrac{D}{2}\\ -k=\dfrac{E}{2}\Rightarrow k=-\dfrac{E}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{C(h;h)=C\left(-\frac{D}{2};-\frac{E}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{r^2=\frac{1}{4}(D^2+E^2-4F)}$$

NOTA :

Si queremos usar estas fórmulas para hallar el centro y el radio de una circunferencia escrita en su forma general , debemos aseguramos que los coeficientes de los términos cuadrados sean $+1$.

EJERCICIO 5 :

Determinar el centro y el radio de las circunferencias:

1) $2x^2+2y^2+12x-18y-34=0$

2) $x^2+y^2-2x+10y+6=0$

RESOLUCIÓN :

1) $2x^2+2y^2+12x-18y-34=0$

* Dividiremos toda la ecuación $\div 2$:

$$x^2+y^2+6x-9y-17=0$$

* Ahora si podremos usar las fórmulas deducidas :

$$\Rightarrow C\left(-3;\frac{9}{3}\right)\wedge r^2=\frac{1}{4}(36+81-4(-17))$$

$$\Rightarrow r^2=\frac{185}{4}\Rightarrow r=\frac{\sqrt{185}}{2}$$

2) $x^2+y^2-2x+10y+6=0$

Como los coeficientes de los cuadrados son $+1$, podemos aplicar las fórmulas.

$$\Rightarrow C(1;-5)\wedge r^2=\frac{1}{4}(4+100-4(6))$$

$$\Rightarrow r^2=\frac{1(80)}{4}\Rightarrow r=2\sqrt{5}$$

La gráfica de la ecuación *(I)* no siempre es una circunferencia , sino que se presentan *3* casos :

A) Si el radio $r>0$ la gráfica es una circunferencia de centro y el radio $C\left(-\frac{D}{2};-\frac{E}{2}\right)$ y el radio :

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$$

B) Si el radio $r=0$, la gráfica es un punto de coordenadas.

$$C\left(-\frac{D}{2};-\frac{E}{2}\right)$$

C) Si el radio $r<0$, la gráfica no existe.

DETERMINACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA SUJETA A TRES CONDICIONES DADAS

♠ Para hallar la ecuación de la circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ necesitamos conocer tres constantes $h\ ;\ k\ ;r$.

♠ Para hallar la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ necesitamos conocer tres constantes $D;E;F$.

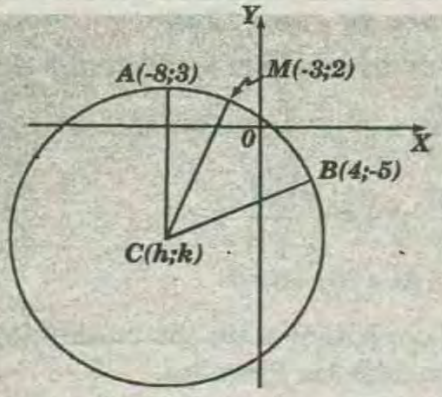
Como la ecuación de la circunferencia se puede escribir en su forma ordinaria o en su forma general, podemos decir que la ecuación de la circunferencia queda determinada con tres condiciones independientes.

Una circunferencia también queda determinada por tres cualesquiera de sus puntos.

EJERCICIO 6 :

Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-8;3)$, $B(4;-5)$, $M(-3;2)$.

RESOLUCIÓN :



$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ .....(α)

$|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CM}|$

$\Rightarrow \sqrt{(h+8)^2+(k-3)^2} = \sqrt{(h+3)^2+(k-2)^2}$

* Elevando al cuadrado ambos lados :

$(h+8)^2+(k-3)^2 = (h+3)^2+(k-2)^2$

$\Rightarrow h^2+16h+64+k^2-6k+9 = h^2+6h+9+k^2-4k+4$

$\Rightarrow 16h-6k+73 = 6h-4k+13 \Rightarrow 10h-2k+60=0$

$\Rightarrow 5h-k+30=0$

$\Rightarrow 5h+30 = k$ .....(I)

$|\overrightarrow{CM}| = |\overrightarrow{CB}|$

$\Rightarrow \sqrt{(h+3)^2+(k-2)^2} = \sqrt{(h-4)^2+(k+5)^2}$

* Elevando al cuadrado ambos miembros :

$(h+3)^2+(k-2)^2=(h-4)^2+(k+5)^2$

$\Rightarrow h^2+6h+9+k^2-4k+4 = h^2-8h+16+k^2+10k+25$

$\Rightarrow 6h-4k+13=-8h+10k+41 \Rightarrow 14h-28 = 14k$

$\Rightarrow h-2 = k$.....(II)

* (I) = (II): $5h+30 = h-2$

$\Rightarrow 4h = -32 \Rightarrow h = -8$

* En (II) : $k = -10 \Rightarrow C(-8;-10)$

radio $\Rightarrow r=|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{(-8+3)^2+(-10-2)^2} = 13$

$\Rightarrow$ En (α): Ecuación de la Circunferencia :

$(x+8)^2+(y+10)^2 = 169$

TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA

Vamos a ver dos métodos para hallar las ecuaciones de las tangentes a una circunferencia.

I) PRIMER MÉTODO :

Se basa en la propiedad que dice que si unimos el centro de la circunferencia con el punto de tangencia se forma un ángulo de $90°$.

A) SI SE CONOCE EL PUNTO DE TANGENCIA

usamos el concepto que el producto de pendiente es -1: $m_1 m_2 = -1$

B) SI NO SE CONOCE EL PUNTO DE TANGENCIA :

* Se conoce un punto de la recta tangente.

I) Se usará la fórmula punto pendiente:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

II) Después se usará la distancia del centro a la tangente igual al radio: $d(c;T)=r$

C) SE CONOCE LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE :

I) Se usará la fórmula punto : $y = mx+b$

II) Después se usará la distancia del centro a la tangente igual al radio: $d(c;T) = r$

II) SEGUNDO MÉTODO :

MÉTODO DEL DISCRIMINANTE

Este método del discriminante sirve para resolver problemas sobre tangente a ***cualquier cónica*** , es un método general.

PROCEDIMIENTO :

1) { A una de las dos ecuaciones le debe faltar un dato

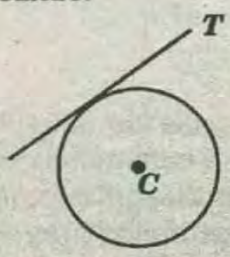
* Ecuación de la circunferencia.

* Ecuación de la tangente.

2) Intersectar: circunferencia $\cap$ tangente

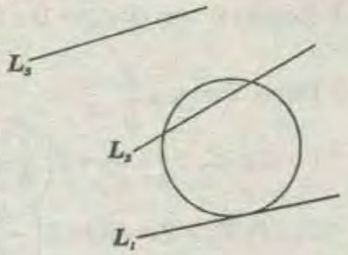
3) A la ecuación que resulta de la intersección , le aplicaremos el discriminante: $b^2-4ac=0$

4) Al aplicar el discriminante , hallaremos el valor que estamos buscando.



Ahora explicaremos porque cuando una circunferencia y una recta son tangentes se cumple siempre que discriminante es *'cero'*, porque el discriminante no puede ser mayor que cero , porque no puede ser menor que cero. La circunferencia es una ecuación de segundo grado, como lo es $ax^2+bx+c=0$. Si quisiéramos determinar la naturaleza de las soluciones de esta ecuación se analiza el discriminante :

◆ Si el $b^2 - 4ac > 0$: significa que hay dos soluciones reales y diferentes. Con referencia al gráfico de la izquierda la circunferencia y la recta tienen ***dos puntos*** en común (L_2).



◆ Si el $b^2 - 4ac < 0$: significa que hay dos soluciones imaginarias , es decir , no hay solución real. Con referencia al gráfico superior de la izquierda la circunferencia y la recta no ***tiene puntos*** en común (L_3).

◆ Si el $b^2 - 4ac = 0$: significa que hay dos soluciones reales pero iguales , es decir hay una solución. Con referencia al gráfico anterior la circunferencia y la recta tienen ***un punto*** en común (L_1).

EJERCICIO 8 :

Se tiene la circunferencia $x^2+y^2-4x-6y+8=0$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto $A(3;1)$.

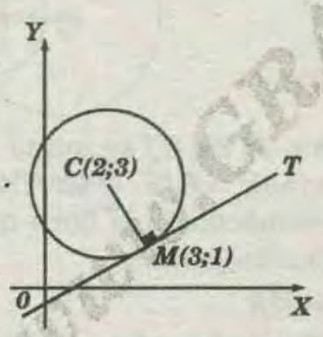
RESOLUCIÓN :

$x^2+y^2-4x-6y+8=0$

$\Rightarrow C(2;3)$

$r^2=\frac{1}{4}(16+36-4(8))$

$\Rightarrow r=\sqrt{5}$



Ecuación de T=?

* Como conocemos el punto de tangencia aplicaremos:

$T \perp \overrightarrow{CM} : m_T\, m_{\overrightarrow{CM}} = -1 \Rightarrow m_T\left(\frac{2}{-1}\right) = -1 \Rightarrow m_T = \frac{1}{2}$

Ecuacion de $T: y-1=\frac{1}{2}(x-3) \Rightarrow T: x-2y-1=0$

EJERCICIO 9 :

Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-2x+10y+6=0$ que son perpendiculares a la recta $L: x-2y+8=0$.

RESOLUCIÓN :

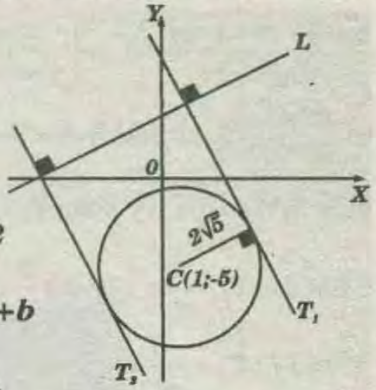
$x^2+y^2-2x+10y+6=0 \Rightarrow C(1;-5)$

$r^2=\frac{1}{4}(4+100-4(6)) \Rightarrow r=2\sqrt{5}=4,5$

$L: x-2y+8=0$

x	y
0	4
-8	0

Ecuaciones de T_1 y T_2=?



$L \perp T_1 \Rightarrow m_L m_{T_1} = -1$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right) m_{T_1} = -1 \Rightarrow m_{T_1} = -2$

* Ecuación de T_1: $y=mx+b$

T_1: $y=-2x+b$

T_1: $2x+y-b=0$.....(I)

* Aplicando la distancia de un punto a una recta :

$d(C;T_1) = r \Rightarrow d(C;T_1) = 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow \frac{|2(1)-5-b|}{\sqrt{4+1}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow |-3-b| = 10$

(+)	(-)
$-3-b=10$	$3+b=10$
$\rightarrow -13=b$	$\rightarrow b=7$

* Como b es donde las tangentes cortan al eje Y : T_1 corta al eje Y en un punto positivo , luego para $T_1: b=7$; entonces para $T_2: b=-13$

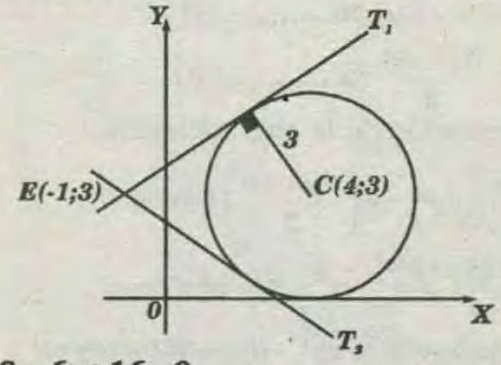
* En (I): T_1: $2x+y-7=0$

T_2: $2x+y+13=0$

EJERCICIO 10 :

Desde el punto $E(-1;3)$ se trazan rectas tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-8x-6y+16=0$. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes.

RESOLUCIÓN :



$x^2+y^2-8x-6y+16=0$

$C(4;3)$

$r^2=\frac{1}{4}(64+36-4(16)) \Rightarrow r=3$

* Ecuaciones de T_1 y T_2 = ?

$T_1: y-3=m(x+1)$

$\Rightarrow T_1: 0=mx-y+3+m$ .....(I)

* Aplicando la distancia de un punto a una recta :

$d(C;T_1)=r$

$$\frac{|m(4)-3+3+m|}{\sqrt{m^2+1}}=3 \Rightarrow \left(\frac{|5m|}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2=(3)^2$$

$$\Rightarrow \frac{25m^2}{m^2+1}=9 \Rightarrow 25m^2=9m^2+9 \Rightarrow 16m^2=9 \Rightarrow m=\pm\frac{3}{4}$$

Para $T_1: m=\frac{3}{4}$ ∧ Para $T_2: m=-\frac{3}{4}$

* En $(I): T_1: \frac{3}{4}x-y+3+\frac{3}{4}=0 \Rightarrow T_1: 3x-4y+15=0$

* En $(I): T_2: \frac{-3}{4}x-y+3-\frac{3}{4}=0 \Rightarrow T_2: 3x+4y-9=0$

EJERCICIO 11:

Hallar las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-6x+4y=0$, que son paralelas a la recta $L: 2x-3y+12=0$. Usar el método del discriminante.

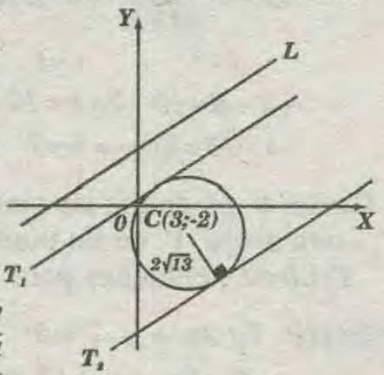
RESOLUCIÓN :

$$x^2+y^2-6x+4y=0$$

$$\Rightarrow C(3;-2)$$

$$r^2=\frac{1}{4}(36+16-4(0))$$

$$\Rightarrow r=\sqrt{13}$$



$L: 2x-3y+12=0$

x	y
0	4
-6	0

* Ecuaciones de T_1 y T_2 = ?

$$L \parallel T_1 \parallel T_2 : m_L=m_{T_1}=m_{T_2}=\frac{2}{3}$$

$$T_1: y=mx+b \Rightarrow T_1: y=\frac{2}{3}x+b$$

$$\Rightarrow T_1: 0=2x-3y+3b \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* De (I): $\frac{3y-3b}{2}=x \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$

* en la ecuacion de la circunferencia :

$$\left(\frac{3y-3b}{2}\right)^2+y^2-6\left(\frac{3y-3b}{2}\right)+4y=0$$

$$\Rightarrow \frac{9y^2-18y+9b^2}{4}+y^2-9y+9b+4y=0$$

$$\Rightarrow 9y^2-18by+9b^2+4y^2-36y+36b+16y=0$$

$$\Rightarrow 13y^2+y(-18b-20)+36b+16y=0$$

* Por ser tangentes : $b^2-4ac=0$

$$(-18b-20)^2-4(13)(36b+9b^2)=0$$

$$\Rightarrow 324b^2+720b+400-1872b-468b^2=0$$

$$\Rightarrow -144b^2-1152b+400=0 \Rightarrow -36b^2-288b+100=0$$

$$\Rightarrow -9b^2-72b+25=0 \Rightarrow 9b^2+72b-25=0$$

$$3b \times +25 \Rightarrow b=\frac{-25}{3}$$

$$3b \times -1 \Rightarrow b=\frac{1}{3}$$

* Como b es donde las tangentes cortan al eje Y :

* Para T_1: $b=\frac{1}{3}$ * Para T_2: $b=\frac{-25}{3}$

* En $(I): T_1: 2x-3y+3\left(\frac{1}{3}\right)=0 \Rightarrow T_1: 2x-3y+1=0$

* En $(I): T_2: 2x-3y+3\left(\frac{-25}{3}\right)=0 \Rightarrow T_2: 2x-3y-25=0$

FAMILIA DE CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR LA INTERSECCIÓN DE DOS CIRCUNFRENCIAS DADAS

Consideramos dos circunferencias diferentes :

$$C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$$

$$C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$$

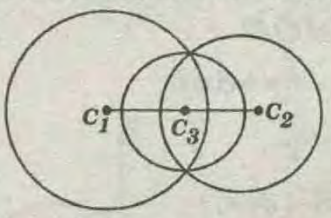
La ecuación de la familia de circunferencias que pasan por la intersección de C_1 y C_2 es : $C_1+kC_2=0$.

$$\boxed{x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0} \ldots (I)$$

Donde k = número real cualquiera.

NOTA :

Los centros de una familia de circunferencias son colineales.



Si $k=-1$: En (I) se forma la ecuación de una recta llamada «EJE RADICAL» que es una recta perpendicular a la línea que une los centros de las circunferencias.

* En (I):

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1-1(x^2+y^2+D^2x+E^2y+F^2)=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1-x^2-y^2-D_2x-E_2y-F_2=0$$

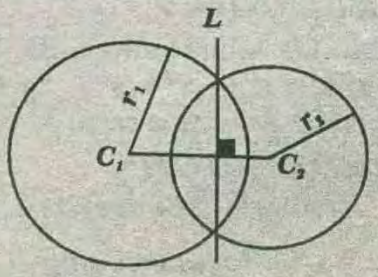
$$\Rightarrow D_1x-D_2x+E_1y-E_2y+F_1-F_2=0$$

* Eje radical : $x(D_1-D_2)+y(E_1-E_2)+F_1-F_2=0$

CIRCUNFERENCIAS SECANTES :

* L, es el eje radical.

* $d(C_1;C_2)<r_1+r_2$.

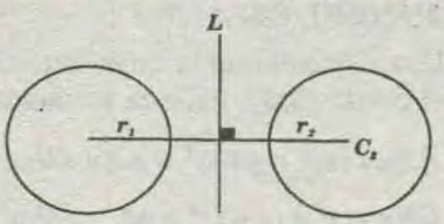


CIRCUNFERENCIAS EXTERIORES :

* L es el eje radical ; L corta al segmento $\overline{C_1C_2}$ en su

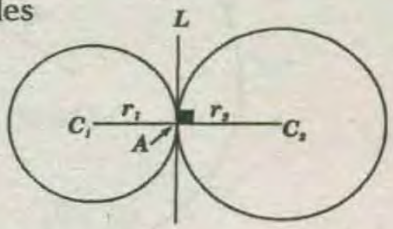
punto medio.

* $d(C_1;C_2) < r_1 + r_2$



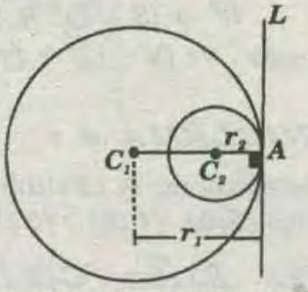
CIRCUNFERENCIAS TANGENTES EXTERIORES :

* L, es el eje radical.
* C_1; A ; C_2 son colineales
* $d(C_1; C_2) = r_1 + r_2$



CIRCUNFERENCIAS TANGENTES INTERIORES :

* L, es el eje radical
* C_1;C_2, A son colineales
* $d(C_1;C_2) = r_1 - r_2$



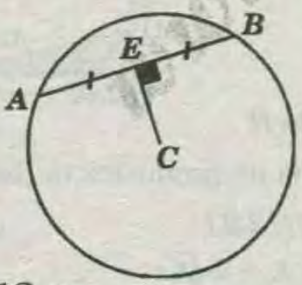
PROPIEDAD :

En cualquier problema de circunferencia donde haya una cuerda , se podrá usar la siguiente propiedad:

$\overrightarrow{AB}$ = cuerda

Dato: E , es punto medio de $\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CE}$



EJERCICIO 12 :

Determinar la ecuación de la circunferencia C_2 cuyo centro esta en el eje X y es una tangente exterior a la circunferencia C_1: $x^2 + y^2 - 6x - 12y - 16 = 0$ en el punto $A(-3;1)$.

RESOLUCIÓN :

$C_1: x^2+y^2-6x-12y-16=0$

$\Rightarrow x^2-6x+y^2-12y=16$

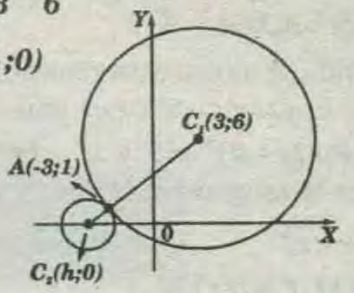
$\Rightarrow (x^2-6x+9)+(y^2-12y+36)=16+9+36$

$C_1:(x-3)^2+(y-6)^2=61 \Rightarrow C_1(3,6) \wedge r_1=\sqrt{61}$

Como son tangentes exteriores :C_2 ;A;C_1 son colineales :

$m_{\overline{C_2A}} = m_{\overline{CA_1}} \Rightarrow \frac{-1}{h+3} = \frac{5}{6} - 6 = 5h+15$

$\Rightarrow \frac{-21}{5} = h \Rightarrow C(\frac{-21}{5};0)$



$\Rightarrow$ radio $\Rightarrow r_2 = |\overrightarrow{C_2A}| = \sqrt{(\frac{-21}{5}+3)^2+1} = \sqrt{\frac{36}{25}+1} \Rightarrow r_2 = \sqrt{\frac{61}{25}}$

Ecuacion de C_2: $\left(x+\frac{21}{5}\right)^2 + y^2 = \frac{61}{25}$

EJERCICIO 13 :

Se tienen las circunferencias C_1: $x^2+y^2-3x-6y+10=0$ y C_2: $x^2+y^2=5$ que son tangentes exteriores. Hallar la ecuación de la circunferencia C_3 que es tangente a C_1 y C_2 en su punto común y C_3 pasa por el punto $A(7;2)$.

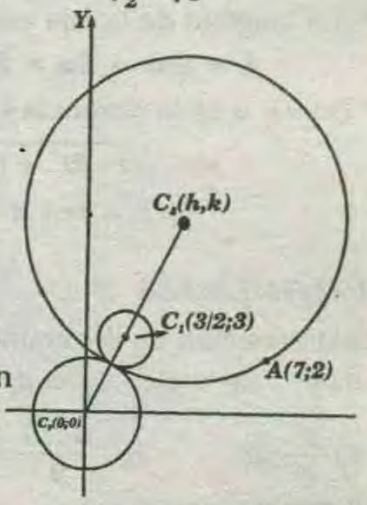
RESOLUCIÓN :

$C_1 : x^2+y^2-3x-6y+10=0 \quad C_2 : x^2+y^2=5$

$\Rightarrow C_1\left(\frac{3}{2};3\right) \quad \Rightarrow C_2(0;0)$

$r_1 = \frac{1}{4}(9+36-4(10)) \quad r_2 = \sqrt{5}$

$\Rightarrow r_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$



Como la circunferencia C_3 pasa por la intersección C_1 y C_2 usaremos familias de circunferencias:

C_3: $C_1 + k\,C_2 = 0$

$C_3 : x^2+y^2-3x-6y+10+k(x^2+y^2-5)=0$

Como $A(7;2) \in C_3$

$49+4-21-12+10+k(49+4-5)=0 \Rightarrow 30+k(48)=0 \Rightarrow k=-\frac{5}{8}$

* Reemplazando el valor de 'k' en la ecuación C_3:

$C_3 : x^2+y^2-3x-6y+10-\frac{5}{8}(x^2+y^2-5)=0$

$\Rightarrow \boxed{C_3 : 3x^2+3y^2-24x-48y+105=0}$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Una banda se ajusta estrechamente alrededor de dos círculos cuyas ecuaciones son :

$(x+4)^2+(y-2)^2=9$ y $x^2-10x+y^2-8y+32=0$.

¿Cuál es la longitud de la banda?

A) $3\pi+\sqrt{17}$ B) $6\pi+2\sqrt{85}$ C) $\pi+\sqrt{13}$

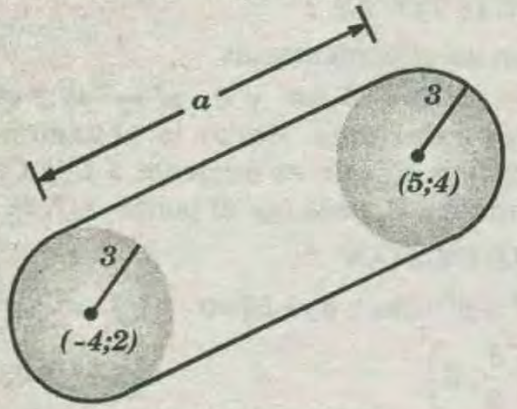
RESOLUCIÓN :

* La primera tiene su centro en $(-4\,;\,2)$ y su radio mide 3.

* En la segunda determinamos su centro y radio:

$$(x^2-10x+\ldots)+(y^2-8y\ldots)=-32$$

$$\rightarrow (x-5)^2+(y-4)^2=9$$



* En el centro es $(5;\,4)$, el radio 3.

* La longitud de la faja está dado por:

$$L=2\pi r+2a=2\pi\times 3+2a$$

* Donde a es la distancia entre centros :

$$a=\sqrt{(4-2)^2+(5+4)^2}=\sqrt{85}$$

$$\rightarrow L=6\pi+2\sqrt{85}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 2 :

Si la ecuación de la circunferencia es :

$x^2+y^2-3x+5y-14=0$, entonces su radio mide:

A) $\frac{5}{4}\sqrt{10}$ B) $\frac{5\sqrt{10}}{2}$ C) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Completando cuadrados:

$$x^2-3x+\frac{9}{4}+y^2+5y+\frac{25}{4}=14+\frac{9}{4}+\frac{25}{4}$$

$$\rightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{90}{4}$$

$$\rightarrow R^2=\frac{90}{4}\rightarrow R=\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

RPTA : "C"

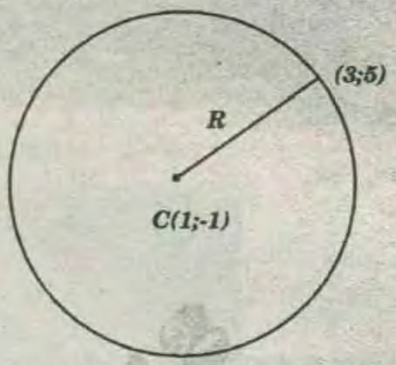
PROBLEMA 3 :

Una circunferencia cuyo centro es $(1;-1)$ pasa por el punto $(3;5)$, halle la ecuación.

A) $(x+11)^2+(y+1)^2=2\sqrt{10}$ B) $(x-1)^2+(y+1)^2=2\sqrt{10}$

C) $(x+1)^2+(y+1)^2=40$ D) $(x-1)^2+(y+1)^2=40$

RESOLUCIÓN :



* Por distancia entre dos puntos :

$$R^2=(3-1)^2+(5+1)^2\Rightarrow R^2=40$$

* Luego : $\mathscr{C}: (x-1)^2+(y+1)^2=40$

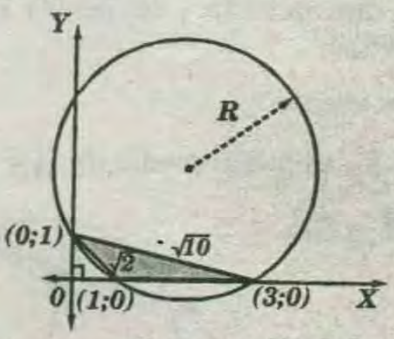
RPTA : "D"

PROBLEMA 4 :

La longitud de la circunferencia , que pasa por los puntos $(3;0)$, $(1\,;0)$, $(0\,;1)$ es :

A) 2π B) $\sqrt{2}\pi$ C) $2\sqrt{5}\pi$ D) $\sqrt{3}\pi$ E) $3\sqrt{3}\pi$

RESOLUCIÓN :



* Piden $\ell=2\pi R$

* Por teorema de productos de lados

$$\sqrt{2}\times\sqrt{10}=(1)(2R)$$

$$\Rightarrow R=\sqrt{5}\rightarrow L_o=2\sqrt{5}\pi$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 5 :

La ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(-2\,;1)$ y es tangente a la recta $3x-2y-6=0$ en el punto $(4;3)$, tiene como ecuación a :

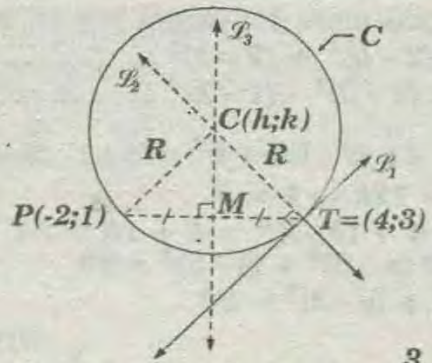
A) $(x+1)^2+y^2=65$

B) $x^2+(y-5)^2=20$

C) $(x+2)^2+(y-11)^2=100$

D) $\left(x+\frac{2}{7}\right)^2+\left(y-\frac{41}{7}\right)^2=\frac{1300}{49}$

RESOLUCIÓN :



$$\mathcal{L}_1 : 3x-2y-6=0 \Rightarrow m_1=\frac{3}{2}$$

$$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Rightarrow (m_1)(m_2)=-1 \Rightarrow m_2=-\frac{2}{3}$$

$$\mathcal{L}_2 : y-3y=-\frac{2}{3}(x-4)$$

$$2x+3y=17 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$m_{\overline{PT}}=\frac{3-1}{4-(-2)}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow m_{L_3}=-3$$

* Por punto medio: $M=(1;2)$

$$\mathcal{L}_3 : y-2=-3(x-1)$$

$$3x+y=5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

$$C=\{\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3\}$$

* De (I) y (II): $C=\left(-\frac{2}{7};\frac{41}{7}\right)$

* Pero: $R=d(C;P)=\frac{\sqrt{1300}}{7}$

$$\rightarrow \left(x+\frac{2}{7}\right)^2+\left(y-\frac{41}{7}\right)^2=\frac{1300}{49}$$

RPTA :"D"

PROBLEMA 6 :

Halle en el primer cuadrante el área de la región no conexa , de una sola pieza , limitada por la curvas $(a>0)$

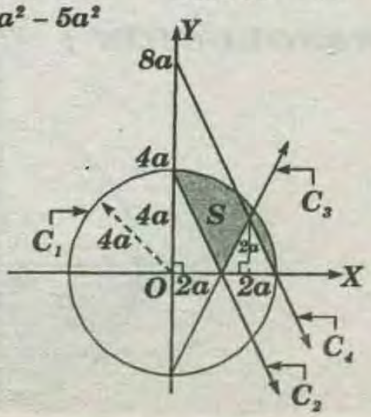
$C_1: x^2+y^2=(4a)^2$; $C_2: y=-2x+4a$;

$C_3: y=2x-4a$; $C_4: y=-2x+8a$

A) $8\pi a^2-2a^2$ B) $16\pi a^2-6\pi^2$ C) $12\pi a^2-5a^2$

D) $4\pi a^2-6a^2$ E) $16\pi a^2-5a^2$

RESOLUCIÓN :



$C_1: x^2+y^2=(4a)^2$

$C_2: y=-2x+4a$

$C_3: y=2x-4a$

$C_4: y=-2x+8a$

$C_3 \cap C_4 = (3a\ ;\ 2a)$

* S : área de la región pedida

$$S=\frac{\pi(4a)^2}{4}-\frac{(4a)(2a)}{2}-\frac{(2a)(2a)}{2} \rightarrow S=4\pi a^2-6a^2$$

RPTA :"D"

PROBLEMA 7 :

Halle la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas $L_1: x+2y+1=0$ y $L_2: 2x+y-1=0$ y que es perpendicular a la cuerda común de las circunferencias $C_1: x^2+y^2+3x=0$ y $C_2: x^2+y^2+3y=0$.

A) $2x+y-1=0$ B) $y-2x+3=0$ C) $2y+x+1=0$

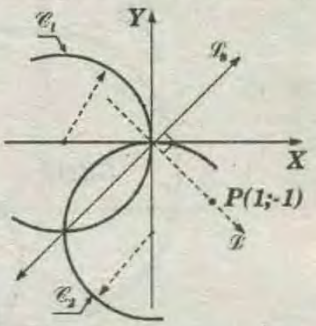
D) $x-y-2=0$ E) $y+x=0$

RESOLUCIÓN :

* Datos: $\mathcal{L}_1: x+2y+1=0 \ \wedge \ \mathcal{L}_2: 2x+y-1=0$

$\mathcal{C}_1: x^2+y^2+3x=0 \ \wedge \ \mathcal{C}_2: x^2+y^2+3y=0$

* Piden ecuación de $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ que pasa por $P=\overleftrightarrow{\mathcal{L}}_1 \cap \overleftrightarrow{\mathcal{L}}_2$ tal que $P=\overleftrightarrow{\mathcal{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathcal{L}}_s$.



* Hallando $P=\overleftrightarrow{\mathcal{L}}_1 \cap \overleftrightarrow{\mathcal{L}}_2$

$$y=\frac{-x-1}{2}=1-2x \Big\} \begin{matrix} x=1 \\ y=-1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow P=(1;-1)$$

* Hallando la ecuación $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}_s$.

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{C}_1: x^2+y^2+3x=0 \\ \mathcal{C}_2: x^2+y^2+3x=0 \end{matrix}\right\} \mathcal{L}_s: y=x$$

* Como $\overleftrightarrow{\mathcal{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathcal{L}}_s$ la pendiente de $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ es -1 $(m=-1)$

Ecuación punto-pendiente

$$y-y_o=m(x-x_o) \Rightarrow y-(-1)=-1(x-1)$$

$$\rightarrow \overleftrightarrow{\mathcal{L}}: y+x=0$$

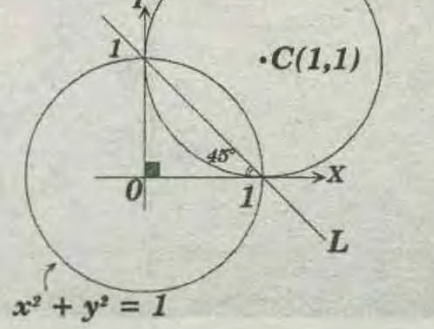
RPTA :"E"

PROBLEMA 8 :

Sean las curvas C_1, C_2 de ecuaciones $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2-2x-2y+1=0$, halle la ecuación de la recta que pasa por la intersecciones de C_1 y C_2.

A) $x+2y=1$ B) $x+y=1$ C) $x-y=3$ D) $x=5$ E) $x-3y=2$

RESOLUCIÓN :



$C_2: x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

$\Rightarrow C_2: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow C(1;1)\ y\ R = 1$

* Luego : $L: y - 0 = (-1)(x-1) \Rightarrow L: x + y = 1$

RPTA : "B"

PROBLEMA 9 :

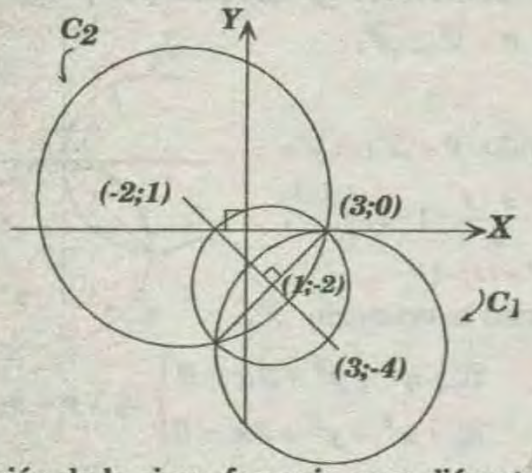
Dadas las circunferencias $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 8y - 1 = 0$ y $C_2: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$, halle la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es la cuerda común de las circunferencias dadas.

A) $x^2 + y^2 + 3x - 2y - 6 = 0$ B) $x^2 + y^2 + 2y - 7 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$

RESOLUCIÓN :

* Dadas:

$C_1: x^2 + y^2 - 6x + 8y - 1 = 0$
$C_1: (x-3)^2 + (y+4)^2 = 26 \Rightarrow C_1(3;-4)$
$C_2: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$
$C_2: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 16 \Rightarrow C_2(-2;1)$



* Ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es la cuerda común de las circunferencias dadas :

$\mathscr{C}: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$
$\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$

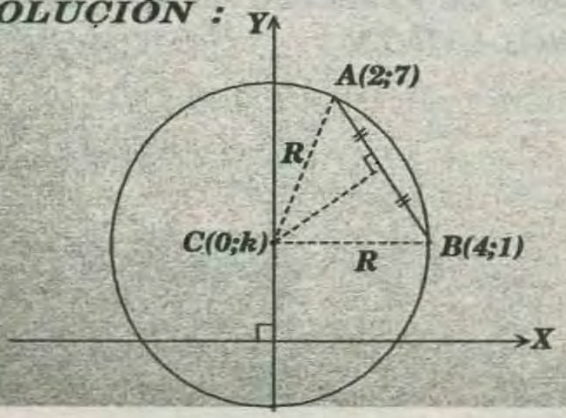
RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

Halle la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el eje Y, y una cuerda cuyos extremos son los puntos $A(2;7)$ y $B(4;1)$.

A) $x^2 + y^2 = 20$ B) $(x-3)^2 + y^2 = 20$
C) $x^2 + (y-3)^2 = 20$ D) $x^2 + (y-5)^2 = 20$

RESOLUCIÓN :



* Por distancia entre dos puntos :

$R^2 = (2-0)^2 + (7-k)^2$ .....(I)
$\Rightarrow R^2 = (4-0)^2 + (1-k)^2$ .....(II)

* (I)=(II): $4 + 49 - 14k + k^2 = 16 + 1 - 2k + k^2$

$\Rightarrow 36 = 12k \rightarrow k = 3$
$\Rightarrow R^2 = 4 + (7-3)^2 = 4 + 16 = 20$

* Luego : $\mathscr{C}: (x-0)^2 + (y-3)^2 = 20$
$\Rightarrow \mathscr{C}: x^2 + (y-3)^2 = 20$

RPTA : "C"

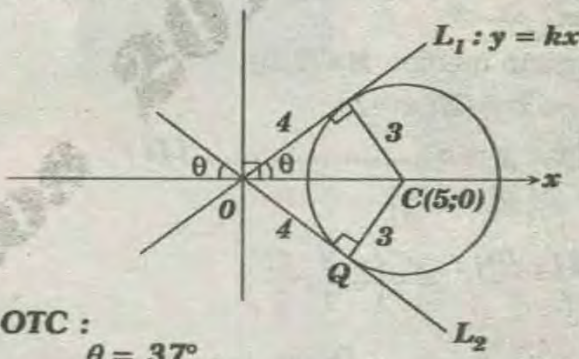
PROBLEMA 11 :

Halle la ecuación de la circunferencia :

$x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ y la recta : $y = kx$, si dicha recta es tangente a la circunferencia. Calcule los valores de k.

A) $\pm\frac{1}{2}$ B) $\pm\frac{4}{2}$ C) $\pm\frac{1}{3}$ D) $\pm\frac{3}{4}$ E) $\pm\frac{3}{5}$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle OTC$:

$\theta = 37°$
$\Rightarrow m_1 = \frac{3}{4} \wedge m_2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow K = \pm\frac{3}{4}$

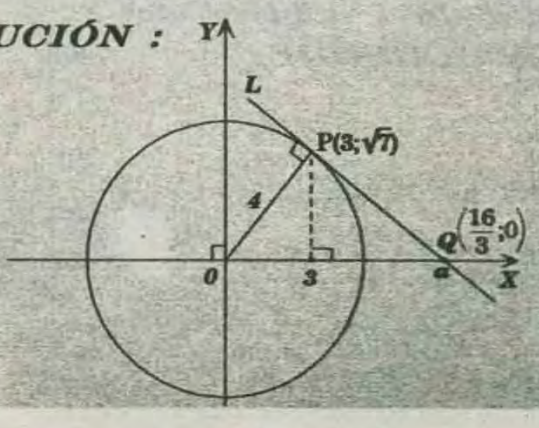
RPTA : "D"

PROBLEMA 12 :

Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$, el punto $P\left(3;\sqrt{7}\right)$ pertenece a la circunferencia. Halle la ecuación de la recta tangente a la circunferencia trazada por el punto P.

A) $7y = -3\sqrt{7}x + 16\sqrt{7}$ B) $7y = -2\sqrt{7}x + 15\sqrt{7}$
C) $6y = -3\sqrt{3}x + 16\sqrt{7}$ D) $7y = -3\sqrt{7}x + 9\sqrt{7}$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle OPQ$:

$$4^2 = 3a \rightarrow a = \frac{16}{3} \Rightarrow m = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

* Ecuación de la recta L:

$$L: y - 0 = -\frac{3\sqrt{7}}{7}\left(x - \frac{16}{3}\right) \Rightarrow 7y = -\frac{\cancel{3}\sqrt{7}}{\cancel{3}}(3x - 16)$$

$$\Rightarrow L: 7y = -3\sqrt{7}x + 16\sqrt{7}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 13 :

Una circunferencia $10u$ de radio pasa por el origen e intercepta al eje X en un punto que resulta ser el punto de tangencia de esta circunferencia con una recta de pendiente igual a $\frac{3}{4}$. Halle la suma de las coordenadas del centro de la circunferencia.

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 18

RESOLUCIÓN :

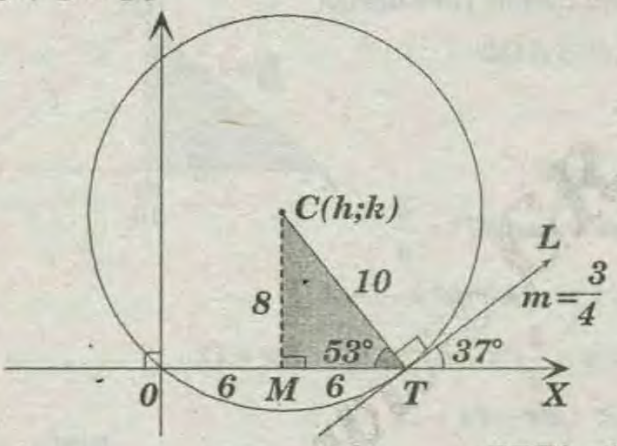
$\triangle CMT$ notable aproximado :

Si $CT = 10 \Rightarrow CM = 8$ y $OM = MT = 6$

* Luego :

$$C(h;k) = C(6;8)$$

$$\rightarrow 6 + 8 = 14$$



RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

Determinar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación en forma general es :

$$x^2 + y^2 + 10x - 4y + 25 = 0$$

RESOLUCIÓN :

* Primero agrupamos los términos:

$$(x^2 + 10x + ...) + (y^2 + 4y + ...) = -25$$

* Ahora completamos los cuadrados:

$$(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 4y + 4) = -25 + 25 + 4$$

$$(mitad)^2 \qquad (mitad)^2$$

* Finalmente: hemos obtenido la ecuación en su forma canónica y vemos que el centro es $(-5\ ;2)$ y el radio es 2.

$$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

PROBLEMA 15 :

Hallar el valor de k para que la ecuación : $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$ represente una circunferencia de radio 7.

A) 8 B) –6 C) –12 D) 10 E) –8

RESOLUCIÓN :

* Ordenando:

$$x^2 + 8x + y^2 + 10y + k = 0$$

$$\rightarrow \underline{x^2 - 8x - 16} + \underline{y^2 + 10y + 25} + k = 165 + 25$$

$$\rightarrow ((x-4)^2 + (y+5)2 = 41 - k$$

* Luego se debe cumplir:

$41 - k = (7)^2$, de donde $41 - k = 49$

* Finalmente: $k = 41 - 49 \rightarrow k = -8$

RPTA : "E"

PROBLEMA 16 :

Halle la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $(-1;4)$ y es tangente a la recta que pasa por los puntos $A(3;-2)$ y $B(-9;3)$

A) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 8$ B) $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 16$
C) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 6$ D) $(x+3)^2 + (y-6)^2 = 8$

RESOLUCIÓN :

* La ecuación será de la forma:

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = R^2 \quad \text{.....(I)}$$

* Pero como pasa por $A(3;-2)$ y $B(-9;3)$, su pendiente será:

$$m = \frac{3+2}{-9-3} = -\frac{5}{12}$$

* Luego la ecuación de la recta:

$$y + 2 = -\frac{5}{12}(x - 3)$$

$$\rightarrow \mathcal{L}: 5x + 12y + 9 = 0$$

* Ahora consideramos la distancia del centro de la circunferencia a la recta tangente, es decir "R":

$$R = \frac{|5(-1) + 12(4) + 9|}{25 + 144} = 4$$

* Reemplazando en (I):

$$\mathcal{C}: (x+1)^2 + (y-4)^2 = 16$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 17 :

Una circunferencia para por los puntos $(2;3)$ y $(-1;1)$ y cuyo centro está situado en la recta :

$$x - 3y - 11 = 0$$

A) $x^2 + y^2 + 7x + 5y - 14 = 0$ B) $x^2 + y^2 - 7x - 5y + 14 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 5x + 7y - 6 = 0$ D) $x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$

RESOLUCIÓN :

* Como la circunferencia $\mathscr{C}$ para por los puntos $(2;3)$ y $(-1;1)$; entonces se cumplirá:

$(2-h)^2+(3-k)^2=(-1-h)^2+(1-k)^2=R^2$.....(I)

* Donde el centro $C(h;k)$ de $\mathscr{C} \in L$, con lo que : $(h;k) \in L: x-3y-11=0$, entonces:

$h-3k-11=0$.....(II)

* Resolviendo el sistema (I) y (II) : $h=\frac{7}{2} \wedge k=-\frac{5}{2}$

* Remplazando en (I):

$$R^2=\left(2-\frac{7}{2}\right)^2+\left(3+\frac{5}{2}\right)^2 \rightarrow R^2=\frac{130}{4}$$

* Finalmente la ecuación de $\mathscr{C}$, será:

$$\mathscr{C}=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{130}{4}$$

$\rightarrow \mathscr{C}: x^2+y^2-7x+5y-14=0$

RPTA : "D"

PROBLEMA 18 :

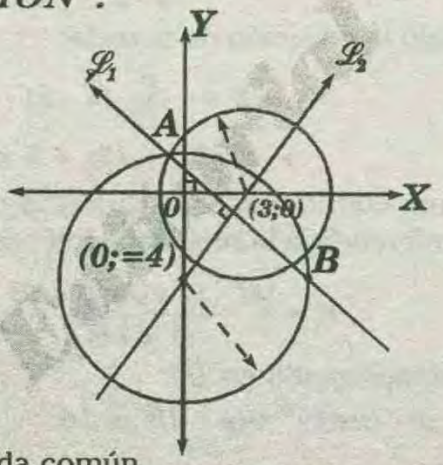
Determine la ecuación de la recta ortogonal a la cuerda común de las circunferencias.

$\mathscr{C}_1: x^2+y^2+8y=64$

$\mathscr{C}_2: x^2+y^2-6y=16$

A) $y=-\frac{3}{4}x+4$ B) $y=\frac{3}{4}x-4$ C) $y+4=\frac{4}{3}x$

RESOLUCIÓN :



$\overline{AB}$ es la cuerda común

$\mathscr{L}_2$ es una de las ortogonales a la cuerda $\overline{AB}$ Para calcular $\mathscr{L}_2$,observamos los centros de las circunferencias :

$\mathscr{C}_1: (x-0)^2+(y+4)^2=(4\sqrt{5}^2)$

$\mathscr{C}_2: (x-3)^2+(y+0)^2=5^2$

* Luego con los centros $(0;-4)$ y $(3;0)$, tenemos:

$\mathscr{L}_2: y+4=\frac{4}{3}x$

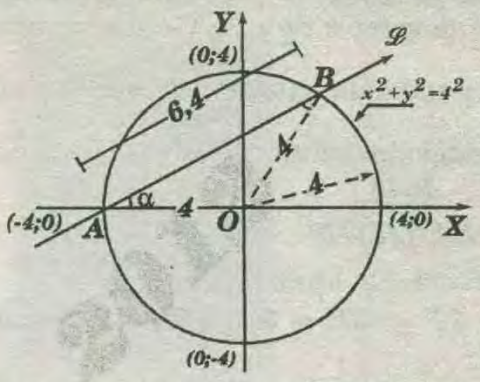
RPTA : "C"

PROBLEMA 19 :

Una recta con pendiente positiva que pasa por el punto $(-4;0)$ determina en la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=16$ una cuerda de $6,4u$ de longitud. Halle la ecuación de la recta.

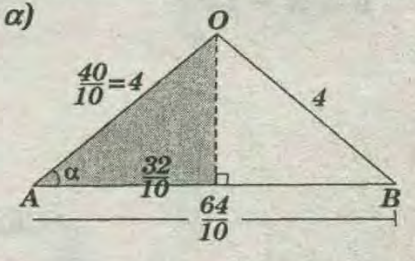
A) $3x-4y+3=0$ B) $3x-4y+12=0$ C) $3x-4y+6=0$
D) $3x-2y+12=0$ E) $2x+3y+6=0$

RESOLUCIÓN :



* Para calcular la ecuación de $\overline{\mathscr{L}}$ solo falta conocer la pendiente $(m=\tan\alpha)$

En ,el $\triangle AOB$



$\alpha=37°$

$\Rightarrow m=\tan 37°=\frac{3}{4}$

$\overline{\mathscr{L}}: (y-0)=m(x-(-4))$

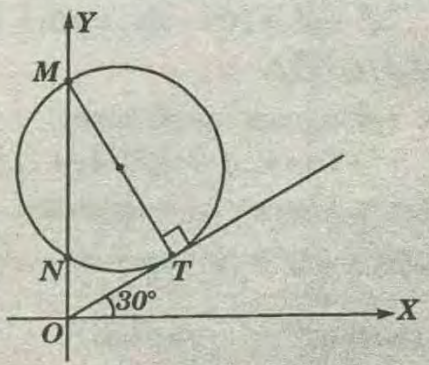
$\overline{\mathscr{L}}: y=\frac{3}{4}(x+4) \Rightarrow 4y=3x+12$

$\rightarrow \mathscr{L}: 3x-4y+12=0$

RPTA :"B"

PROBLEMA 20 :

Encuentre la ecuación de la circunferencia mostrada en el grÁfico , si $MN=6\sqrt{3}u$, T es punto de tangencia.



A) $x^2+y^2-8x-10\sqrt{3}\ y+48=0$

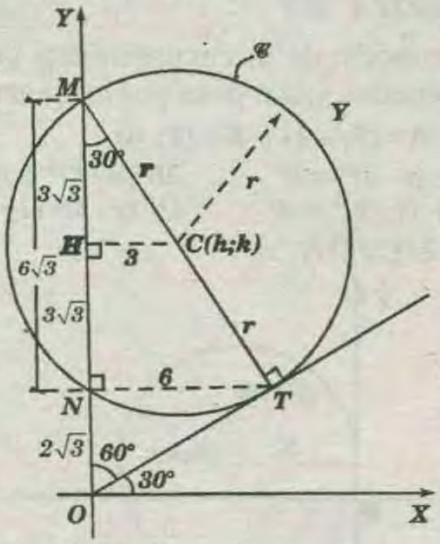
B) $x^2+y^2+6x+10\sqrt{3}\ y+48=0$

C) $x^2+y^2+6x-10\sqrt{3}\,y+48=0$

D) $x^2+y^2-6x+10\sqrt{3}\,y+48=0$

E) $x^2+y^2-6x-10\sqrt{3}\,y+48=0$

RESOLUCIÓN :



* Piden ecuación de $\mathscr{C}$

* Sea el centro $C(h;k)$ y radio r :

$\mathscr{C}: (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ .....(I)

* En O : $m\sphericalangle MOT=60°$

* Como $m\sphericalangle MTO=90° \rightarrow \overline{MT}$: diámetro

* Al trazar $\overline{TN}$, sabemos que $m\sphericalangle MNT=90°$

$\triangle MNT$: notable de $30°$ y $60°$

$\rightarrow NT=6$ y $MT=12 \rightarrow r=6$ .....(II)

* Al trazar $\overline{CH} \perp \overline{MN}(H \in \overline{MN})$, $\overline{CH}$:

base media $\triangle MNT \rightarrow CH=3$ y $MH=HN=3\sqrt{3}$

$\triangle NOT$: notable de $30°$ y $60°$

$\rightarrow NO=2\sqrt{3}$

$h=3$ y $k=5\sqrt{3}$ .....(III)

* Al reemplazar (II) y (III) en (I) :

$\mathscr{C}: (x-3)^2+(y-5\sqrt{3})^2=6^2$ y operar

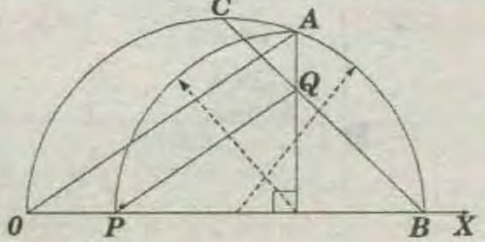
$\rightarrow \mathscr{C}: x^2+y^2-6x-10\sqrt{3}y+48=0$

RPTA : "E"

PROBLEMA 21 :

Del gráfico $\overline{OA}//\overline{PQ}$, $\overline{OA}=(3\sqrt{3};3)$ y $\overline{BC}=(a;b)$. Calcule ab.

A) 12
B) -12
C) 10
D) -10
E) 8



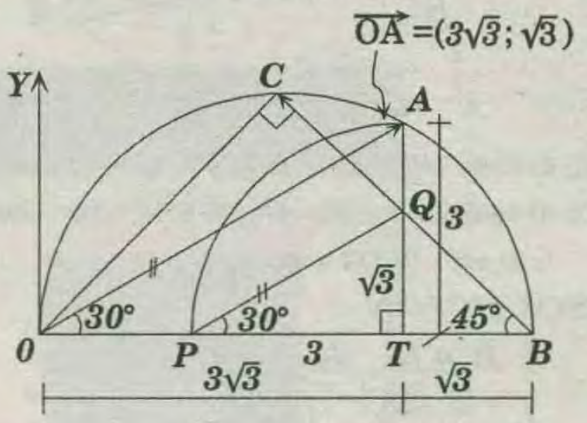
RESOLUCIÓN :

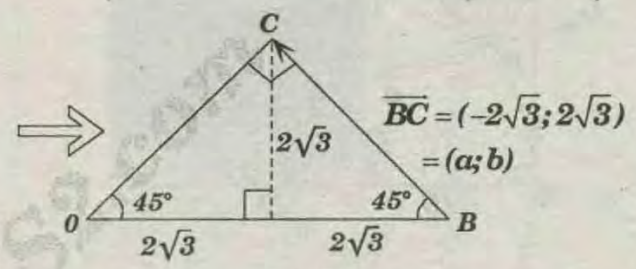
$OT=3\sqrt{3}$, $AT=3=PT$

$3^2=3\sqrt{3}(TB) \rightarrow TB=\sqrt{3}$

* $\triangle QTB$ (NOT 45°) :

$m\sphericalangle QBP=45°$





$\rightarrow a=-2\sqrt{3} \wedge b=2\sqrt{3} \} \Rightarrow ab=-12$

RPTA : "B"

PROBLEMA 22 :

Dado el punto $N=(2;4)$ y la circunferencia $C: (x-2)^2+(y-4)^2=25$. Determine el área del triángulo cuyos vértices son N y las intersecciones de C con el eje de abscisas .

A) 8 B) 9 C) 10 D) 10 E) 12

RESOLUCIÓN :

$\mathscr{C}: (x-2)^2+(y-4)^2=25$

* Se deduce :

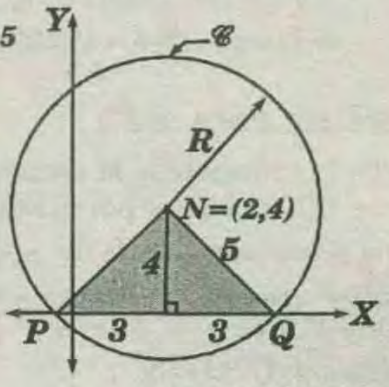
centro = (2;4)

radio = 5u

* Se pide :

$S_{\triangle PQN}=\dfrac{(6)(4)}{2}$

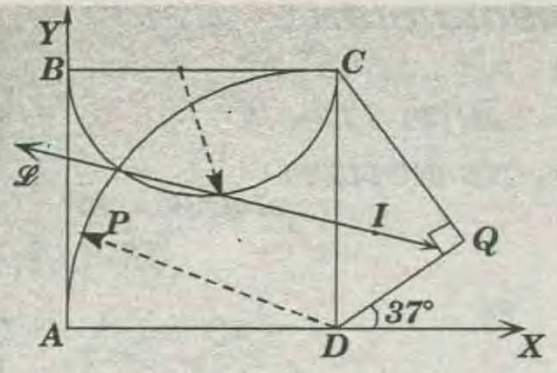
$\Rightarrow S_{\triangle PQN}=12u^2$



RPTA : "E"

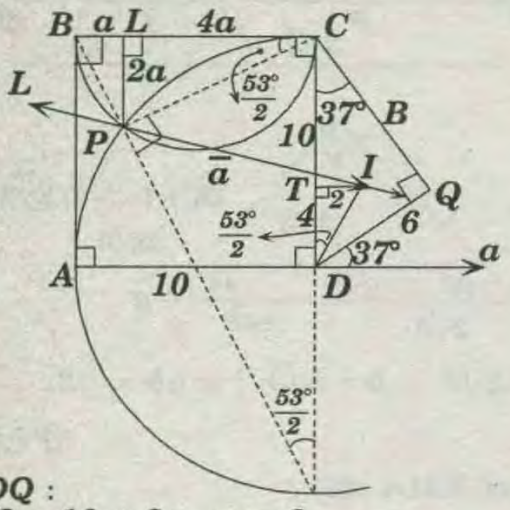
PROBLEMA 23 :

Del gráfico , $ABCD$ es un cuadrado, I es incentro del triángulo CQD y $\overrightarrow{AD}=(10;0)$. Halle la ecuación vectorial de $\overrightarrow{\mathscr{L}}$



A) $\{(2;6)+t(5;1)/t\in\mathbb{R}\}$ B) $\{(-1;2)+t(2;6)/t\in\mathbb{R}\}$
C) $\{(2;6)+t(2;10)/t\in\mathbb{R}\}$ D) $\{(2;6)+t(-10;-2)t\in\mathbb{R}\}$
E) $\{(-1;2)+t(-2;1)/t\in\mathbb{R}\}$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle CDQ$:

$6+8=10+2r \rightarrow r=2$

$\rightarrow IT=2$ y $TD=4$

$I=(10+2;4)=(12;4)$

$5a=10 \rightarrow a=2 \rightarrow P=(2;6)$

$\overline{PI}=\bar{a}=(12;4)-(2,;6)\Rightarrow \bar{a}=(10;-2)$

* Piden: L

$L:(x;y)=P+t\bar{a}/t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow L:(x;y)=(2;6)+t(-10;-2)/t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow L(x;y)=(2;6)+t(-10;-2)/t\in\mathbb{R}$

RPTA : "D"

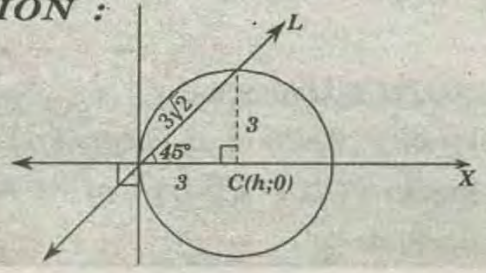
PROBLEMA 24 :

Hallar la ecuación de la circunferencia de centro en el eje "X", que pasa por el origen y determina en la recta $y=x$ una cuerda de $3\sqrt{2}$ de longitud.

A) $x^2+y^2-6x=0$ B) $x^2+y^2-6y=0$ C) $x^2+y^2-4x=0$
D) $x^2+y^2+6x=0$ E) $x^2+y^2-4x=0$

RESOLUCIÓN :

* Graficando:



$C(h;0)=C(3;0)\rightarrow h=3 \wedge k=0$

* Ecuación de la circunferencia:

$(x-3)^2+(y-0)^2=3^2\rightarrow x^2+y^2-6x=0$

RPTA : "A"

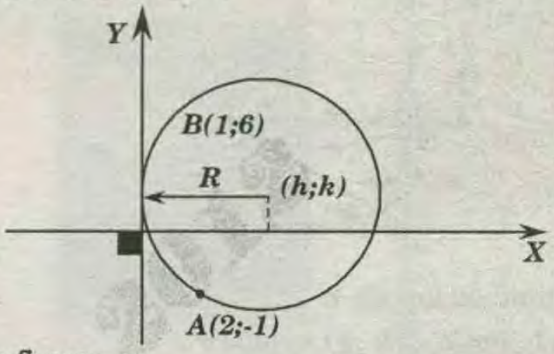
PROBLEMA 25 :

Halle la ecuación de la circunferencia tangente al eje de ordenadas y que pasa por los puntos:

$A=(2;-1)$ y $B=(1;6)$

A) $(x-5)^2+(y-3)^2=5^2$ B) $(x-3)^2+(y-5)^2=5^2$
C) $(x-5)^2+(y-2)^2=5^2$ D) $(x-3)^2+(y-5)^2=3^2$

RESOLUCIÓN :



* De la figura:

$(1-h)^2+(6-k)^2=(2-h)^2+(-1-k)^2=h^2$

* Simplificando:

$h=7k-16$ .....(I)

* Pero:

$(1-h)^2+(6-k)^2=h^2$.....(II)

* De (I) y (II):

$k^2-26k+69=0$

$k \quad -23$

$k \quad -3$

$\rightarrow (h-23)(k-3)=0\rightarrow k=3$

$\rightarrow h=5$

* En consecuencia: $\mathscr{C}:(x-5)^2+(y-3)^2=5^2$

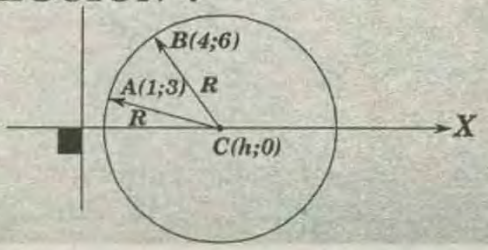
RPTA : "A"

PROBLEMA 26 :

Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está contenido el eje X y que pasa por los puntos $A=(1;3)$ y $B(4;5)$.

A) $(x-3)^2+y^2=13$ B) $(x-7)^2+y^2=45$
C) $(x-4)^2+y^2=18$ D) $(x-2)+y^2=20$

RESOLUCIÓN :



* De la figura:

$$R^2 = (1-h)^2 + 3^2 = (4-h)^2 + 6^2$$

* Simplificando: $h = 7$ Ù $k = 0$

* Ahora: $R^2 = (1-7)^2 + 9 \rightarrow R^2 = 45$

* En consecuencia: $\mathscr{C} = (x-7)^2 + y^2 = 45$

RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

Sean los puntos $A = (-3;0)$; $B = (3;4)$ y $C = (5;0)$. Determinar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC .

A) $(x-1)^2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}$ B) $(x-1)^2 + \left(y-\frac{1}{4}\right) = \frac{65}{2}$

C) $(x+1)^2\left(y\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}$ D) $(x-1)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}$

RESOLUCIÓN :

* Sabemos por teoría que; el circuncentro equidista de los vértices de un triángulo, entonces se cumple:

$$R^2 = \underbrace{(-3-h)^2 + k^2} = (3-h)^2 + (4-h)^2 = \underbrace{(5-h)^2 + k^2}$$

* Simplificando, lo indicado:

$$h = 1 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

* Ahora:

$$R^2 = (-3-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow R^2 = \frac{65}{4}$$

* En consecuencia, la ecuación de la circunferencia será:

$$\mathscr{C} = (x-1)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}$$

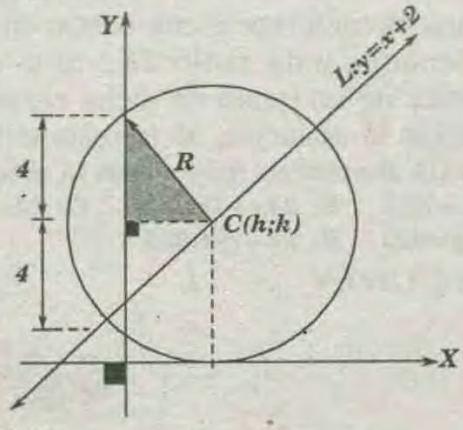
RPTA : "B"

PROBLEMA 28 :

Una circunferencia de centro A , es tangente al eje "X" y determina en la parte positiva del eje "Y" un segmento de $8u$, si $y=x+2$ contiene a A, Hallar la longitud del radio.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN :



* De la figura:

$$C(h;k) \in L \rightarrow k = h + 2 \text{ ..... (I)}$$

* Por Pitágoras:

$$R^2 = 4^2 + h^2 = k^2 \text{ ..... (II)}$$

* Reemplazando (I) en (II):

$$(h+2)^2 = 16 + h^2 \rightarrow h = 3 \Rightarrow R = 5$$

RPTA : "C"

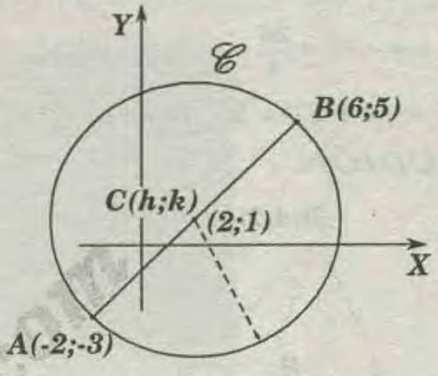
PROBLEMA 29 :

Calcular la ecuación de la circunferencia; donde uno de sus diámetros tiene por extremos los puntos a $A(-2;-3)$ y $B(6;5)$.

A) $x^2 + y^2 + 5 = 0$ B) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 27 = 0$

C) $x^2 + y^2 - = 0$

RESOLUCIÓN :



Si $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia, entonces el punto medio de $\overline{AB}$, es el centro de dicha circunferencia .

$$\rightarrow \mathscr{C} : (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(h;k) : h = \frac{-2+6}{2} = 2 \Rightarrow k = \frac{-3+5}{2} = 1$$

* Radio: $r = CB$

$$r = \sqrt{(6-2)^2 + (5-1)^2} \Rightarrow r = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \mathscr{C}; (x-2)^2 + (y-1)^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \mathscr{C} : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 27 = 0$$

RPTA : "B"

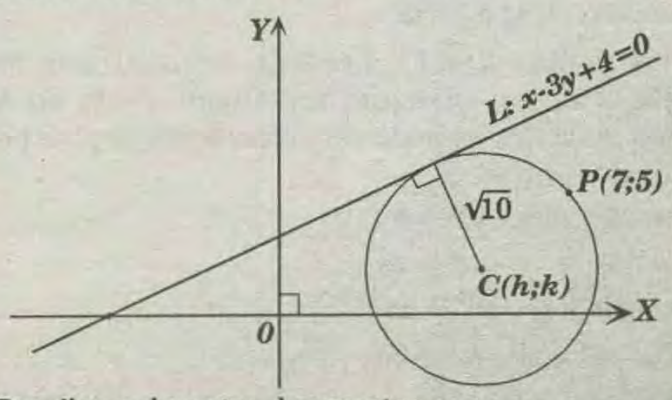
PROBLEMA 30 :

Una circunferencia de radio $\sqrt{10}$ que pasa por $P(7;5)$ y es tangente a $x - 3y + 4 = 0$.

Calcule la suma de las coordenadas del centro de la circunferencia.

A)8 B)9 C)10 D)11 E)12

RESOLUCIÓN :



* Por distancia entre dos puntos :

$$10 = (7-h)^2 + (5-k)^2 \ldots\ldots\ldots (I)$$

$$\sqrt{10} = \frac{|h-3k+4|}{\sqrt{10}} \rightarrow 10 = |h-3k+4| \ldots\ldots\ldots (II)$$

* De *(I)* y *(II)*: $k = 1 \Rightarrow h = 9$
* Luego: $h + k = 10$

RPTA : "C"

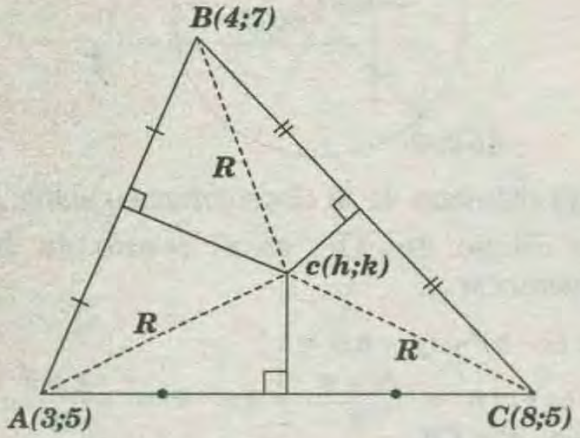
PROBLEMA 31 :

Los vértices de un triángulo son *(3;5), (4;7)* y *(8;5)*. Halle la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo.

A) $\left(x-\frac{11}{2}\right)^2 + (y-5)^2 = \frac{25}{4}$ B) $(x-8)^2 + \left(y-\frac{11}{2}\right)^2 = 5$

C) $(x-11)^2 + (y+5)^2 = 25$ D) $(x+11)^2 + (y-5)^2 = 25$

RESOLUCIÓN :



* Por distancia entre dos puntos :

$$R^2 = (h-4)^2 + (k-7)^2 = (h-3)^2 + (k-5)^2 = (h-8)^2 + (k-5)^2$$

* Resolviendo :

$$h = \frac{11}{2} \wedge K = 5 \Rightarrow C(h;k) = C\left(\frac{11}{2};5\right)$$

$$\Rightarrow R^2 = \left(\frac{11}{2}-4\right)^2 + (5-7)^2 \Rightarrow R^2 = \frac{25}{4}$$

* Luego :

$$\mathscr{C}: \left[x-\frac{11}{2}\right]^2 + (y-5)^2 = \frac{25}{4}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 32 :

Si los puntos $K(4;1)$, $L(14;1)$, $N((a;b)$, son los vértices de un triángulo rectángulo recto en N, entonces la ecuación de circunferencia que pasa por estos tres puntos es :

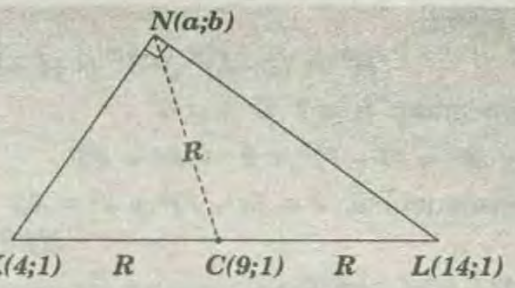
A) $(x-1)^2 + (y-9)^2 = 9$

B) $(x-9)^2 + (y-1)^2 = 16$

C) $(x-1)^2 + (y-9)^2 = 25$

D) $(x-9)^2 + (y-1)^2 = 25$

RESOLUCIÓN :



$$R^2 = (14-9)^2 + (1-1)^2 \rightarrow R^2 = 25 \rightarrow R = 5$$

* Luego: $C: (x-9)^2 + (y-1)^2 = 25$

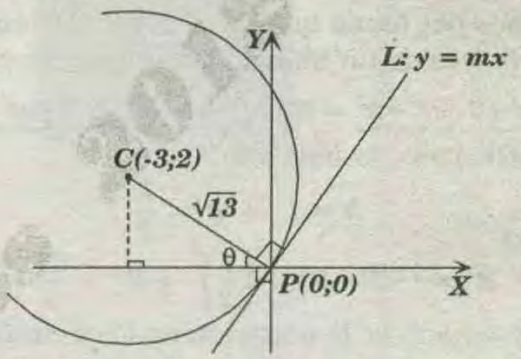
RPTA : "D"

PROBLEMA 33 :

Halle la ecuación de la recta tangente en $P(0;0)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$

A) $3x - 2y = 0$ B) $2x - 3y = 0$ C) $x - 2y = 0$

RESOLUCIÓN :



$$\mathscr{C}: x^2 - 6x + y^2 - 4y = 0$$

$$\mathscr{C}: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 13 \Rightarrow C(-3;2)$$

* Ahora :

$$Tg\theta = -\frac{2}{3} \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)(m) = -1 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

* Luego :

$$L: y = \frac{3}{2}x$$

$$L: 3x - 2y = 0$$

RPTA : "A"

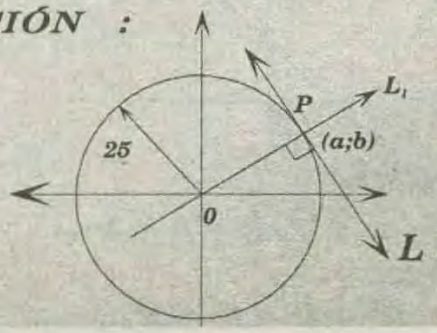
PROBLEMA 34 :

Se tiene una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y de radio *25* . Si la suma de componentes de un punto de dicha circunferencia es *31*, calcule la ecuación de la recta tangente en ese punto (la abscisa es mayor que la ordenada) .

A) $x + 7y = 625$ B) $24x + 7y = 625$ C) $24x - y = 625$

D) $24x - 7y = 625$ E) $7x - 7y = 625$

RESOLUCIÓN :



* Piden: $L = ?$

* Dato : $(a > b)$

$$a + b = 31 \quad y \quad a^2 + b^2 = 25^2$$

$$m_{L_1} \times m_L = -1 \rightarrow mL = \frac{24}{7}$$

* Resolviendo :

$$a = 24 \quad y \quad b = 7 \rightarrow P = (24;7)$$

$$M_{L_1} = \frac{b-0}{a-0} = \frac{b}{a} \rightarrow M_{L_1} = \frac{7}{24}$$

$$L : y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 7 = -\frac{24}{7}(x - 24)$$

$$\Rightarrow L : 24x + 7y = 625$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 35 :

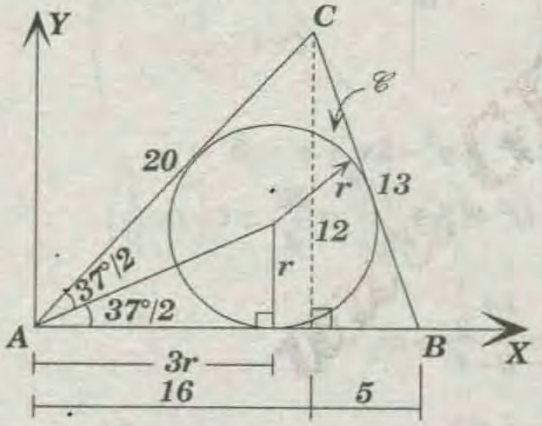
Dado el triángulo ABC, $A(0;0)$; $B(21;0)$; $BC=13$; $AC=20$. Halle la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC .

A) $(x^2 - 14)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 = \left(\frac{11}{3}\right)^2$

B) $(x^2 - 14)^2 + \left(y - \frac{13}{5}\right)^2 = \left(\frac{13}{5}\right)^2$

C) $(x - 14)^2 + \left(y - \frac{14}{3}\right)^2 = \left(\frac{14}{3}\right)^2$

RESOLUCIÓN :



* Piden : ℓ

$$A_{\Delta ABC} = \frac{(24)(12)}{2} = \left(\frac{21 + 13 + 20}{2}\right) r \Rightarrow r = \frac{14}{3}$$

$\mathscr{C}$: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$

$\mathscr{C}$: $(x-3r)^2 + (y-r)^2 = r^2$

$\mathscr{C}$: $(x-14)^2 + \left(y - \frac{14}{3}\right)^2 = \left(\frac{14}{3}\right)^2$

RPTA : "C"

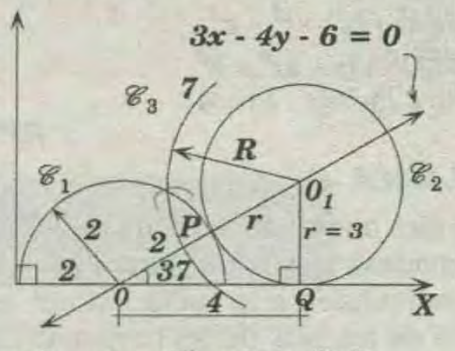
PROBLEMA 36 :

Del gráfico , P y Q son punto de tangencia y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: $3x - 4y - 6 = 0$, halle la ecuación de la circunferencia ortogonal a $\mathscr{C}_1$ y concéntrica con $\mathscr{C}_2$

A) $x^2+y^2+10x+4y+32=0$ B) $x^2+y^2+10x-4y+32=0$

C) $x^2+y^2-10x-4y+32=0$ D) $x^2+y^2-12x-6y+24=0$

RESOLUCIÓN :



* Para: $y = 0 \rightarrow x = 2 \Rightarrow 0 = (2;0)$

$$m_L = \frac{3}{4} \rightarrow m\sphericalangle POQ = 37$$

$$\rightarrow Sen37° = \frac{3}{5} = \frac{r}{r+2} \rightarrow r = 3$$

$\mathscr{C}_3$ es ortogonal a $\mathscr{C}_1$.

$$\rightarrow 2^2 + R^2 = (OO_1)^2 = 52$$

$$\Rightarrow R^2 = 21$$

* $\mathscr{C}_3$: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$

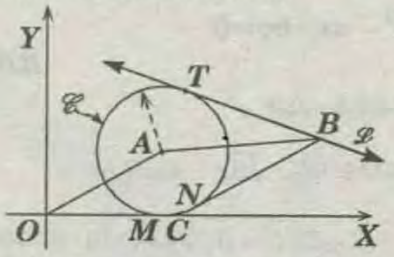
$$(x-6)^2 + (y-3)^2 = 21$$

* de $\mathscr{C}_3$: $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 24 = 0$

RPTA : "D"

PROBLEMA 37 :

Del gráfico, M, N y T sun puntos de tangencia $OABC$ en un rombo y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: $x+\sqrt{3}y=4+4\sqrt{3}$. Halle la ecuación de la circunferencia $\mathscr{C}$.

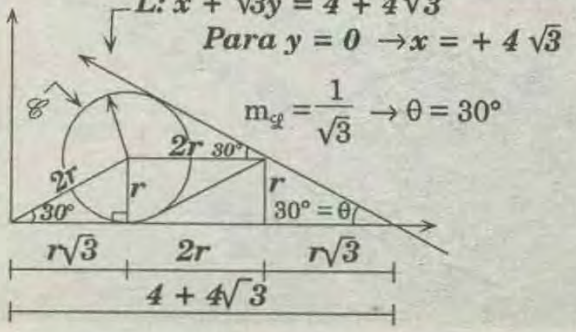


A) $x^2 + y^2 - 4\sqrt{3}x + 4y + 12 = 0$

B) $x^2 + y^2 - 4\sqrt{3}x - 2y - 12 = 0$

C) $x^2 + y^2 - 4\sqrt{3}x - 4y + 12 = 0$

RESOLUCIÓN :



$2r(\sqrt{3}+1)=4(\sqrt{3}+1) \rightarrow r=2$

$C:(x-h)^2+(y-12)^2=r^2$

$\mathscr{C}:(x-r\sqrt{3})^2+(y-r)^2=r^2$

$\mathscr{C}:(x-2\sqrt{3})^2+(y-2)^2=2^2$

$\rightarrow x^2+y^2-4\sqrt{3}-4y-12=0$

RPTA : "B"

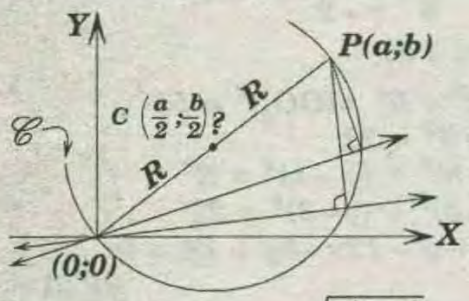
PROBLEMA 38 :

Una recta gira apoyándose en un punto fijo (origen de coordenadas). Desde un punto $P(a;b)$ se trazan las perpendiculares a la recta . ¿Cuál es el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares?

A) $x^2+y^2+ax-by=0$ B) $x^2+y^2+ax+by+a^2=0$

C) $x^2+y^2-ax-by=0$ D) $x^2+y^2-ax+by=0$

RESOLUCIÓN :



$2R=\sqrt{a^2+b^2} \rightarrow R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

$\mathscr{C}:\ (x-h)^2+(y-k)^2=R^2$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2$$

$\rightarrow \mathscr{C}: x^2+y^2-ax-by=0$.

RPTA : "«C"

PROBLEMA 39 :

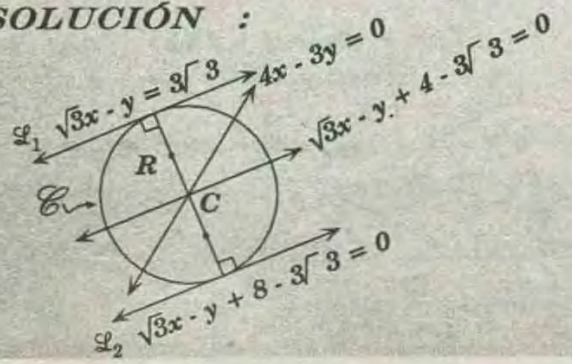
Dadas las rectas $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}: \sqrt{3}x-y=3\sqrt{3}$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}: \sqrt{3}x-y+8-3\sqrt{3}=0$ halle la ecuación de la circunferencia tangente a estas rectas, cuyo centro pertenece a la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}: 4x-3y=0$.

A) $x^2+y^2-6x-8y-21=0$ B) $x^2+y^2+6x+8y-21=0$

C) $x^2+y^2-6x+8y-21=0$ D) $x^2+y^2-6x-8y+21=0$

RESOLUCIÓN :



$$C=\begin{cases}4x-3y=0\\ \sqrt{3}x-y+4-3\sqrt{3}=0\end{cases} \rightarrow C(3;4)$$

$$d(C;4)=R \rightarrow \frac{\left|\sqrt{3}\times 3-4-3\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}}=R$$

$R=2$

$\mathscr{C}:\ (x-h)^2+(y-k)^2=R^2$

$(x-3)^2+(y-4)^2=2^2$

$\mathscr{C}: x^2+y^2-6x-8y+21=0$

RPTA : "D"

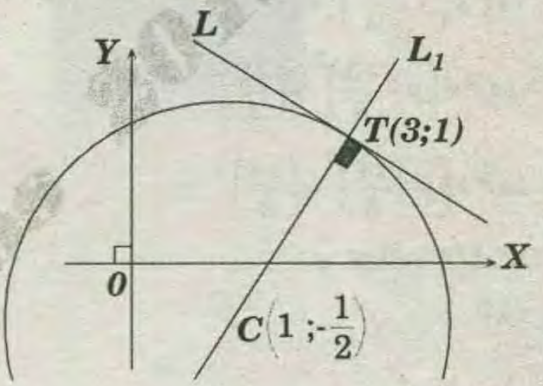
PROBLEMA 40 :

Halle la ecuación de la recta tangente en a la circunferencia $x^2+y^2-2x+y=5$ en el punto de tangencia $T(3;1)$

A) $3x+4y=5$ B) $4x+2y=1$ C) $3x+4y=15$

D) $4x+3y=15$ E) $5x+3y=4$

RESOLUCIÓN :



$\mathscr{C}: x^2+y^2-2x+y=5$

$$\mathscr{C}:(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4} \Rightarrow C\left(1;-\frac{1}{2}\right)$$

$$m_1=\frac{1+\frac{1}{2}}{3-1} \rightarrow m_1=\frac{3}{4}$$

* Pero :

$$\left(\frac{3}{4}\right)(m)=-1 \rightarrow m=-\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow L: y-1=-\frac{4}{3}(x-3)$$

$$\Rightarrow L: 4x+3y=15$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 41 :

Halle la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(0;2)$ y es tangente a la recta $L_1: 2x+y=0$ en el origen.

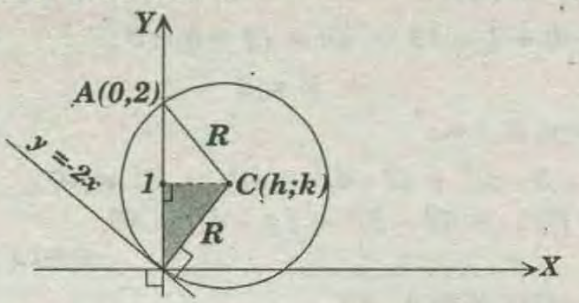
A) $(x-1)^2+(y+3)^2=10$

B) $(x-2)^2+(y-1)^2=5$

C) $(x-2)^2+(y-3)^2=25$

D) $(x+1)^2+(y-2)^2=15$

RESOLUCIÓN :



* De la figura : $R^2 = h^2 + 1 = h^2 + (2-k)^2$
* De donde : $k^2 - 4k + 3 = 0$

$\Rightarrow k = 1 \wedge h = 2$

* Luego : $\mathscr{C}: (x-2)^2 + (y-1)^{12} = 5$

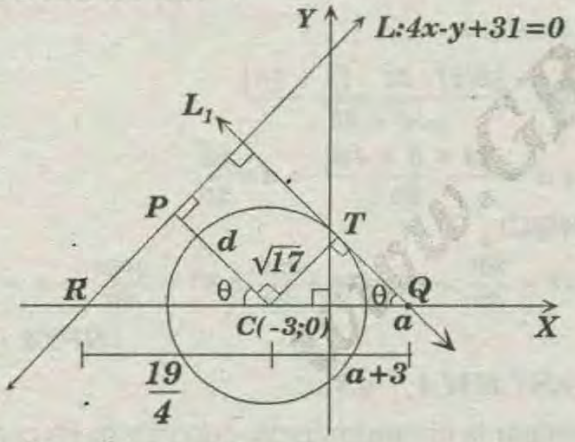
RPTA : "B"

PROBLEMA 42 :

Halle una de las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $C: x^2+y^2+6x-8=0$, que son perpendiculares a la recta $L: 4x^2 + y - 31 = 0$

A) $x - 4y + 20 = 0$ B) $x + 4y - 20 = 0$
C) $x + 4y - 14 = 0$ D) $x + 4y + 16 = 0$

RESOLUCIÓN :

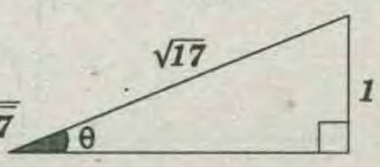


$\mathscr{C}: x^2 + y^2 + 6x - 8 = 0$
$\mathscr{C}: (x+3)^2 + y^2 = 17$
$C(-3;0)$

$$d = \frac{|4(-3)+(-1)(0)+31|}{\sqrt{4^2+1}} \rightarrow d = \frac{19}{\sqrt{17}}$$

* $\triangle RPC$:

$$Cos\theta = \frac{\frac{19}{\sqrt{17}}}{\frac{19}{4}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$



$$Sen\theta = \frac{\sqrt{17}}{a+3} = \frac{1}{\sqrt{17}} \rightarrow 17 = a+3 \Rightarrow a = 14$$

* Por otro lado : $L: y = 4x + 31 \Rightarrow m = 4$

* Ahora :

$$(4)(m_1) = -1 \rightarrow m_1 = -\frac{1}{4}$$

* Luego:

$$y - 0 = -\frac{1}{4}(x - 14)$$

$$\Rightarrow L_1: x + 4y - 14 = 0$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 43 :

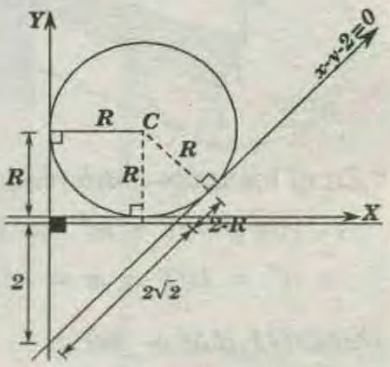
Hallar la ecuación de la circunferencia tangente al eje "X" y a las rectas: $x = 0$, $x - y = 2$; si el centro está en el primer cuadrante.

A) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 2 = 0$
B) $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 8 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 8 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 8 = 0$

RESOLUCIÓN :

* Por tangentes:

$R + 2 = 2 - R + 2\sqrt{2}$
$\rightarrow 2R = 2\sqrt{2} \rightarrow R = \sqrt{2}$



* Luego :

$c(h;k) \rightarrow$ centro
$(h;k) = (\sqrt{2};\sqrt{2})$

* Ecuación de la circunferencia ejemplo :

$\mathscr{C}: (x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2$
$\rightarrow x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 + y^2 - 2y\sqrt{2} + 2 = 2$
$\rightarrow \mathscr{C}: x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 2 = 0$

RPTA : "A"

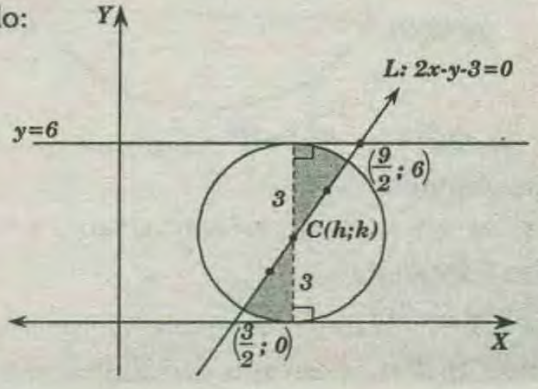
PROBLEMA 44 :

Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $2x - y - 3 = 0$ y es tangente al eje "X" y a la recta $y = 6$

A) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ B) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$
C) $(x-1)^2 + (x-3)^2 = 9$ D) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$

RESOLUCIÓN :

* Graficando:



* Por teoría: $(h; k) = (3; 3)$

$\rightarrow : \mathscr{C}\ (x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$

RPTA : "D"

PROBLEMA 45 :

Se tiene las ecuaciones de la circunferencia :

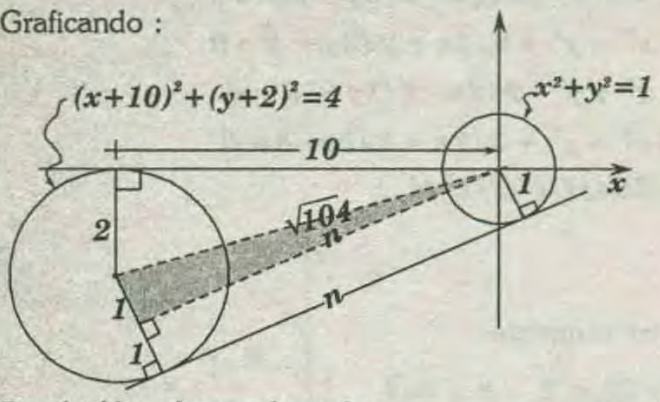
$b_1: x^2+y^2 = 1;\ b_2: x^2 + y^2 + 20x + 4y + 100 = 0$

Halle la longitud de la tangente común externa a las dos circunferencias.

A) $\sqrt{108}$ B) $\sqrt{109}$ C) $\sqrt{105}$ D) $\sqrt{103}$ E) $\sqrt{104}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* En el triángulo sombreado:

$(\sqrt{104})^2 = 1 + n^2 \Rightarrow 104 - 1 = n$

$\Rightarrow n^2 = 103 \Rightarrow n = \sqrt{103}$

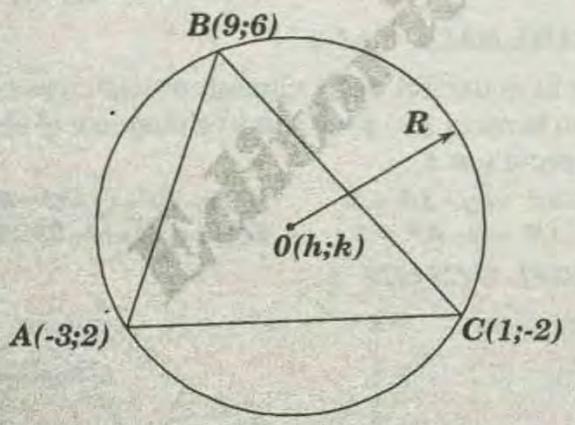
RPTA : "D"

PROBLEMA 46 :

Sea el triángulo ABC inscrito en una circunferencia $A(-3;2)$, $B(9;6)$, $C(1;-2)$. Halle la ecuación de la circunferencia.

A) $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 40$ B) $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 40$
C) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 40$ D) $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 40$

RESOLUCIÓN :



$\mathscr{C} : (x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$ ..... (I)

* Se cumple:

$(-3-h)^2 + (2-k)^2 = (9-h)^2 + (6-k)^2 = (1-h)^2 + (-2-k)^2$

* Simplificando:

$3h + k = 13$ ..... (II)

$k = h + 1$ ..... (III)

* (III) en (II):

$3h + h + 1 = 13 \rightarrow 4h = 12 \rightarrow h = 3$

$\rightarrow k = 4$

* Como $A \in \mathscr{C}$:

$\rightarrow (-3-3)^2 + (2-4)^2 = R^2 \rightarrow R^2 = 40$

* En (I): $\mathscr{C}: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 40$

RPTA : "C"

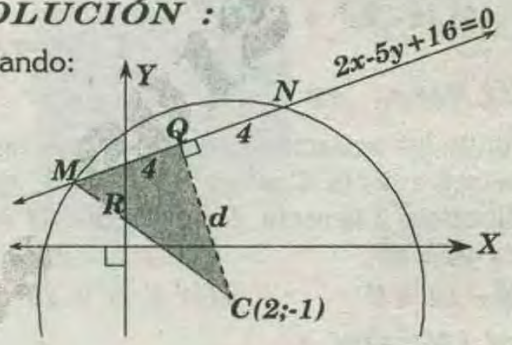
PROBLEMA 47 :

El punto $(2; -1)$ es el centro de una circunferencia que intercepta a la recta $2x-5y+16=0$ determinando una cuerda cuya longitud es igual a $8u$. Calcular la medida del radio de la circunferencia.

A) $\frac{15}{\sqrt{29}}$ B) $\frac{18}{\sqrt{29}}$ C) $\frac{20}{\sqrt{29}}$ D) $\frac{33}{\sqrt{29}}$ E) $\frac{35}{\sqrt{29}}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando:



* Por teoría:

$$d = \frac{|2(2) - 5(-1) + 16|}{\sqrt{4+25}}$$

$$\rightarrow d = \frac{|4+5+16|}{29} \rightarrow d = \frac{25}{29}$$

* $\triangle MQC$:

$$R^2 = 4^2 + \frac{25^2}{29} \Rightarrow R^2 = 16 + \frac{625}{29} \Rightarrow R^2 = \frac{1089}{29} \Rightarrow R = \frac{33}{\sqrt{29}}$$

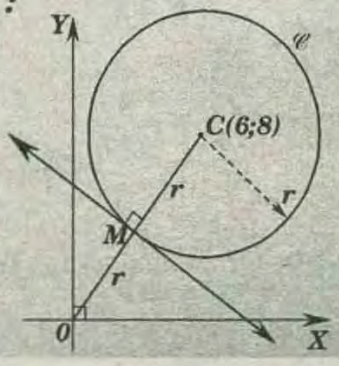
RPTA : "D"

PROBLEMA 48 :

Determinar la circunferencia, con centro en el punto $C(6;8)$, que la tangente a la mediatriz de $\overline{OC}$. Siendo O el origen de coordenadas.

A) $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 3^2$ B) $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 4^2$
C) $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 5^2$ D) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$

RESOLUCIÓN :



* Piden la ecuación de $\mathscr{C}$.

$$\mathscr{C}: (x-6)^2 + (y-8)^2 = r^2$$

* Por dato:

$\overline{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{OC}$, tangente a la circunferencia

$\rightarrow 2r = OC = 10$ .....(por distancia)

$\rightarrow r = 5$

$\rightarrow \mathscr{C}: (x-6)^2 + (y-8)^2 = 5^2$

RPTA : "C"

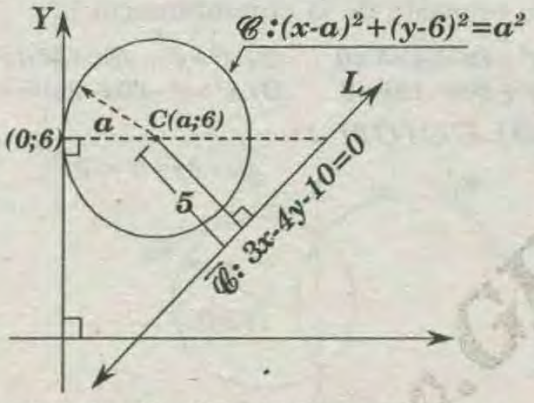
PROBLEMA 49 :

Determinar la ecuación de la circunferencia, ubicada en el primer cuadrante tangente al eje de ordenadas en el punto $(0;6)$ y cuyo centro se encuentra a 5 unidades de la recta $3x - 4y - 10 = 0$.

A) $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 3^2$
B) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 3^2$
C) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 3^2$

RESOLUCIÓN :

* Piden: ecuación de la circunferencia $\mathscr{C}$.



* Dato: el centro $\mathscr{C}$ dista de $\overline{\mathscr{L}}$ 5 unidades

$$\rightarrow 5 = \frac{|3(a) - 4(6) - 10|}{5} \quad \text{.....(propiedad de la distancia de un punto a la derecha)}$$

$$\rightarrow 25 = |3a - 34|$$

* Para que $\mathscr{C}$ pertenezca al primer cuadrante:

$$3a - 34 = -25 \rightarrow a = 3 \Rightarrow \mathscr{C}: (x-3)^2 + (y-6)^2 = 3^2$$

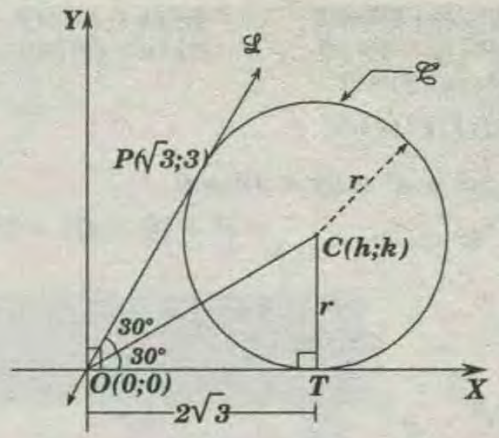
RPTA : "A"

PROBLEMA 50 :

Determinar la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje de abscisas y a una recta ‹ en el punto P. Si además dicha recta contiene al origen y $P=(\sqrt{3};3)$.

A) $(x-\sqrt{3})^2 + (y-2)^2 = 4$
B) $(x-2\sqrt{3})^2 + (y-2)^2 = 4$
C) $(x+2\sqrt{3})^2 + (y-2)^2 = 4$
D) $(x-\sqrt{3})^2 + (y-2)^2 = 4$

RESOLUCIÓN :



* Piden: $\mathscr{C}: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

* Notamos que: $m \sphericalangle POT = 60°$

* También: $OP = OC = \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2 + (3-0)2} = 2\sqrt{3}$

* OTC (Notable $30°$ y $60°$) :

$$h = 2\sqrt{3}\ ;\ k = r = 2$$

$$\rightarrow \mathscr{C}: (x-2\sqrt{3})^2 + (y-2)^2 = 4$$

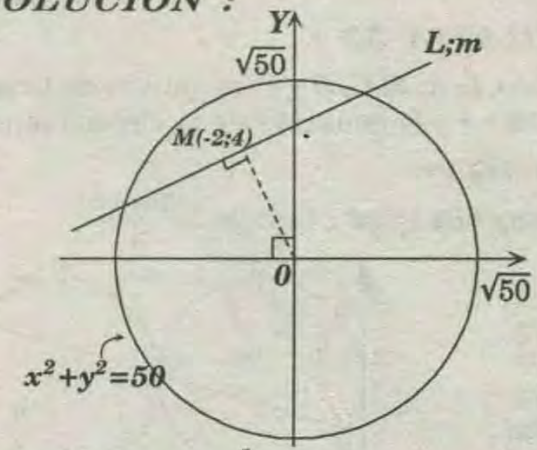
RPTA : "B"

PROBLEMA 51 :

La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 50$. El punto medio de una cuerda de ésta circunferencia es el punto $P(-2;4)$. Halle la ecuación de la recta que contiene a dicha cuerda :

A) $x - 2y + 10 = 0$ B) $x + 2y - 10 = 0$ C) $x + 2y + 5 = 0$
D) $x - 2y - 5 = 0$ E) $x + y + 10 = 0$

RESOLUCIÓN :



$\overline{OM}$: $y = -2x \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

* Luego: $L: y - 4 = \frac{1}{2}(x+2)$

$$L: x - 2y + 10 = 0$$

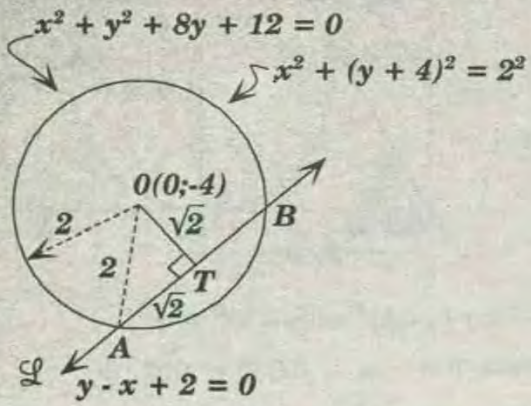
RPTA : "A"

PROBLEMA 52 :

Halle la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es la cuerda determinada por la recta $y - x + 2 = 0$ en la circunferencia $x^2 + y^2 + 8y + 12 = 0$.

A) $(x-3)^2+(y+4)^2=25$ B) $(x-4)^2+(y-3)^2=6$
C) $(x-6)^2+(y-6)^2=9$ D) $(x-1)^2+(y+3)^2=4$
E) $(x+1)^2+(y+3)^2=2$

RESOLUCIÓN :



$$d(0:L)=\frac{|-4-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}=OT$$

$AT=TB=\sqrt{2}=r$

$m_L=1\rightarrow m_L m_{\overline{OT}}=-1\rightarrow m_{\overline{OT}}=-1$

$\overline{OT}$:

$$y-(-4)=-1(x-0)\rightarrow x+y+4=0$$

$$T=\begin{cases}x-x+2=0\\x+y+4=0\end{cases}\rightarrow T=(-1:-3)=(h;k)$$

$\mathscr{C}$: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x+1)^2+(y-(-3))^2=\sqrt{2}^2$

$\rightarrow \mathscr{C}: (x+1)^2+(y+3)^2=2$

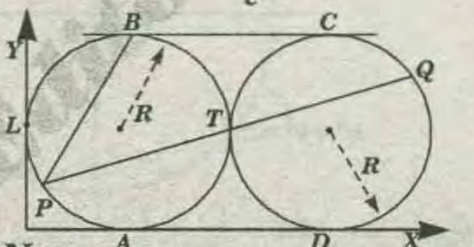
RPTA : "E"

PROBLEMA 53 :

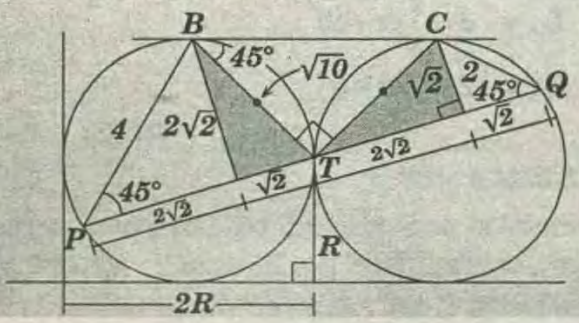
Del gráfico, L, A, B, C, D y T son puntos de tangencia $CQ=2$, $PB=4$ y la ecuación de la circunferencia de diámetro $\overline{PQ}$ es:

$x^2+y^2+ax+by+c=0$. Calcule $\dfrac{\sqrt{5}(a+b)}{c}$

A) 20/7
B) -30/7
C) -15/7
D) -10/7
E) -30/41



RESOLUCIÓN :



$m\widehat{BT}=90^\circ\rightarrow BT=R\sqrt{2}=\sqrt{10}$

$\rightarrow R=\sqrt{5}$

$T=(2R-R)^2=(2\sqrt{5};\sqrt{5})=(h;k)$

$\mathscr{C}$: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-2\sqrt{5})^2+(y-\sqrt{5})^2=(3\sqrt{2})^2$

$x^2+y^2-4\sqrt{5}x-2\sqrt{5}y+7=0$

* Comparando : $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$a=-4\sqrt{5}$; $b=-2\sqrt{5}$ y $c=7$

* Piden :

$$\sqrt{5}\frac{(a+b)}{c}=?=\sqrt{5}\frac{(-4\sqrt{5}-2\sqrt{5})}{7}\Rightarrow\sqrt{5}\frac{(a+b)}{c}=-\frac{30}{7}$$

RPTA : "B"

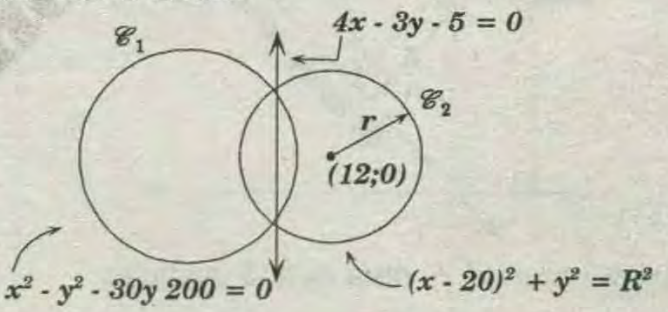
PROBLEMA 54 :

La circunferencia $\mathscr{C}_1$ tiene por ecuación:

$x^2+y^2-30y+200=0$ y $\mathscr{C}_2$ tiene centro $(20;0)$, el eje radical de ambos tiene por ecuación $4x-3y-5=0$. Halle la ecuación de la circunferencia $\mathscr{C}_2$.

A) $x^2+y^2+4x-5y+5=0$ B) $x^2+y^2-40x+250=0$
C) $x^2+y^2+20x-195=0$ D) $x^2+y^2-20x-250=0$

RESOLUCIÓN :



$$\mathscr{C}_1:\ \left.\begin{matrix}x^2+y^2-30y+200=0\\x^2+y^2-40x+400-R^2=0\end{matrix}\right\}(-)\text{da el eje radical}$$

$\mathscr{C}_2$: $40x-30y+200-400+R^2=0$

$$\rightarrow 4x-3y+20-40+\frac{R^2}{10}=10$$

*Comparando : $4x-3y-5=0$

$$\rightarrow 20-40+\frac{R^2}{10}=-5\rightarrow R^2=150$$

$\rightarrow \mathscr{C}_2=x^2+y^2-40x+400-150=0$

$\mathscr{C}_2: x^2+y^2-40x+250=0$

RPTA : "B"

PROBLEMA 55 :

Se tienen dos circunferencias ortogonales $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ tal que

$\mathscr{C}_1: x^2+y^2-6x-4y-3=0 \wedge \mathscr{C}_2: x^2+y^2+6x-2y+a=0$.

Calcular: a.

A) -19 B) -7 C) -11 D) -3 E) -13

RESOLUCIÓN :

$\mathscr{C}_1$: $x^2+y^2-6x-4y-3=0$

$(x-3)^2+(y-2)^2=4^2=r^2\ ;\ 0_1=(3;2)$

$\mathscr{C}_2$:

$x^2+y^2+6x-2y+a=0$

$(x+3)^2+(y-1)^2=R^2\ ;\ 0_2=(-3;1)$

$$d(0_1 0_2)=\sqrt{(3-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{37}$$

$$[d(0_1 0_2)]^2=R^2+r^2 \rightarrow \sqrt{37}^2=R^2+4^2$$

$$\rightarrow R^2=21$$

$\mathscr{C}_2$:

$(x+3)^2+(y-1)^2=21$

$x^2+y^2+6x-2y-11=0$

$\rightarrow a=-11$

RPTA : "C"

PROBLEMA 56 :

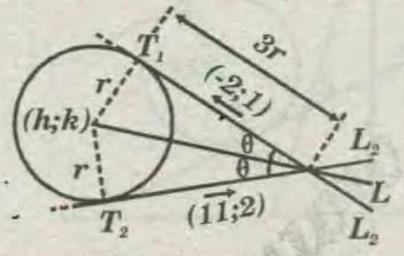
$\mathscr{C}$ es una circunferencia cuyo radio es $r\ (r>0)$, cuyo centro tiene coordenadas enteras $(-2;6)\in\mathscr{C}$ y $(-1;9)\in\mathscr{C}$. Desde el punto $A=(4;7)$ se trazan rectas tangentes a $\mathscr{C}$. de tal manera que A dista $3r$ unidades de cada punto de tangencia.

I) Encontrar la ecuación de $\mathscr{C}$:

II) Los puntos de tangencia.

RESOLUCIÓN :

* Sea $(h;k)$, el centro de $\mathscr{C}$.



* Luego :

$$|(h+2;k-6)|=|(h+1;k-9)|=r\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

* Aplicamos Pitágoras , encontramos que la distancia de A al centro de $\mathscr{C}$ está dada por $r\sqrt{10}$, luego :

$$|(h-4;k-7)|=r\sqrt{10}=|(h+2;k-6)|\sqrt{10}\ldots\ldots\ldots(II)$$

* De (I) se obtiene : $k=7-\dfrac{h}{3}$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(III)$

(III) en (II):

$$|(h-4;-h/3)|=\sqrt{10}|(h+2;1-h/3)|$$

* Operando : $15h^2+62h+51=0$, de donde :

$h=-3\Rightarrow k=8\ ;r=\sqrt{5}$ (Por condición del Prob.)

$$\Rightarrow \mathscr{C}=\{(x;y)/(x+3)^2+(y-8)^2=5\}$$

*** CÁLCULO DE LOS PUNTOS DE TANGENCIA :**

Sean : $m\ ;\ m_1$ y m_2 , las pendientes de $L;\ L_1$ y L_2 respectivamente.

$$m=\frac{7-8}{4+3}=-\frac{1}{7}\ ;\ tg\,\theta=\frac{r}{3r}=\frac{1}{3}=\frac{m-m_1}{1+mm_1}=\frac{m_2-m}{2+mm_2}$$

* Efectuando : $m_1=-1/2\ ;\ m_2=2/11$

*Vectores direccionales de L_1 y L_2 respectivamente:

$$\vec{a}_1=(1;-1/2)\Rightarrow \vec{u}_1=\frac{1}{5}(-2;1)$$

$$\vec{a}_2=(1;2/11)\Rightarrow \vec{u}_2=\frac{1}{5\sqrt{5}}(11;2)$$

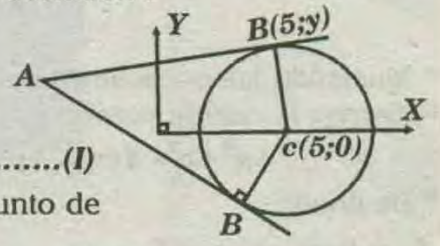
PROBLEMA 57 :

Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(-5\ ;\ 4)$ a la circunferencia :

$$x^2+y^2-10x+7=0$$

RESOLUCIÓN :

* Transformamos la ecuación :



$(x-5)^2+y^2=18$ $\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$

* Sea $B=(x;\ y)$ un punto de tangencia.

* De la Figura : $AB\perp\overrightarrow{BC}$

$$\Rightarrow m_{AB}m_{BC}=-1\Rightarrow\left(\frac{y-4}{x+5}\right)\left(\frac{y}{x-5}\right)=-1\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

* Resolviendo (I) y (II) encontramos :

$$x=2\ \wedge\ y=-3\ ;\ x=\frac{142}{29}\ \wedge\ y=\frac{123}{29}$$

* Cálculo de las tangentes :

$$\frac{y+3}{x-2}=\frac{4+3}{-5-2}\Rightarrow x+y+1=0$$

$$\frac{y-4}{x+5}=\frac{(123/29)-4}{(142/29)+5}=41y-x-169=0$$

OTRO MÉTODO :

* Sea $T: y=mx+b$, la recta tangente ;

$$(-5;4)\in T\Rightarrow 4=-5m+b\ \Rightarrow\ b=5m+4$$

$\Rightarrow y=mx+5m+4$; además : $(x-5)^2+y^2=18$

* luego : $(x-5)^2+(mx+5m+4)^2=18$

$$(1+m^2)x^2+(10m^2+8m-10)x+(25m^2+40m+23)=0$$

* Condición de tangencia : Discriminante = 0 ; entonces :

$$(10m^2+8m-10)^2-4(1+m^2)(25m^2+40m+23)=0$$

* Efectuando operaciones :

$$41m^2+40m-1=0\Rightarrow m_1=\frac{1}{41}\ ;\ m_2=-1$$

* Ecuaciones de las tangente :

$T_1=\{(-5;4)+t(41;1)/t\in R\}$; $T_2=\{(-5;4)+r(1;-1)/r\in R\}$

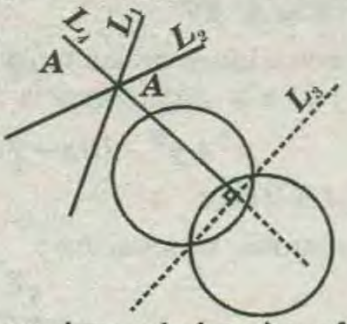
PROBLEMA 58 :

Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas $2x-y+5=0$ y $x-y+4=0$ y que es perpendicular a la cuerda común de las circunferencias : $x^2+y^2-4y=0$ y $x^2+y^2-4x=0$

RESOLUCIÓN .

* Sean L_1 y L_2, las rectas dadas , entonces :

$L_1 \cap L_2=A=(-1;3)$



* Igualando las ecuaciones de las circunferencias , hallemos la cuerda común L_3 , luego :

$$x^2+y^2-4y=x^2+y^2-4x$$

* De donde :

$L_3 : y=x \Rightarrow m_3=1$ .....(I)

* Sea L_4 , la recta pedida , luego por dato :

$L_4 \perp L_3 \Rightarrow m_4 m_3=-1$.....(II)

* De (I) en (II): $m_4=-1=\dfrac{y-3}{x+1}$

* finalmente : $L_4 : x+y-2=0$

RESOLUCIÓN VECTORIAL :

* Sean :

$L_1:\{(0;5)+t(1;2)\}$ y $L_2=\{(0;4)+r(1;1)\}t;r \in \mathbb{R}$

$L_1 \cap L_2=A=(-1;3)$

* Intersectamos las circunferencias (igualando sus ecuaciones).

$$x^2+y^2-4y=x^2+y^2-4x \Rightarrow y=x \text{ ó}$$

$$L=\{(0;0)+S(1;1)/S \in \mathbb{R}\}$$

* Sea L_3 , la recta buscada ($L_3 \perp L$, por dato)

$\Rightarrow \vec{b}=(-1;1)$ es un vector dirección de L_3.

$$\Rightarrow L_3=\{(-1;3)+w(-1;1)/w \in \mathbb{R}\}$$

PROBLEMA 59:

Dada la recta $L: 7x+y-15\sqrt{2}=0$ y la circunferencia $\mathscr{C}$.

$\mathscr{C} : (x-10\sqrt{2})^2+(y-5\sqrt{2})^2=25$ Si L_1 y L_2 son dos rectas paralelas negativa ,tangente a $\mathscr{C}$ y tales que cada una de ellas forma con L un ángulo θ donde $tg\theta=\dfrac{3}{4}$. Hallar las ecuaciones vectoriales de L_1 y L_2.

RESOLUCIÓN :

* De la ecuación de la recta L se tiene :

$L : y=-7x+15\sqrt{2} \Rightarrow m=-7$.....(I)

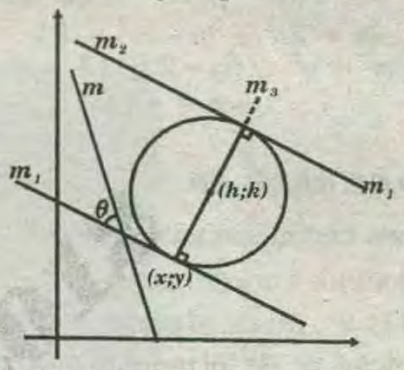
Sean m_1 y m_2 pendientes de L_1 y L_2 respectivamente

* Por dato : $L_1 // L_2 \Rightarrow m_1=m_2$

* ángulo entre L_1 y L :

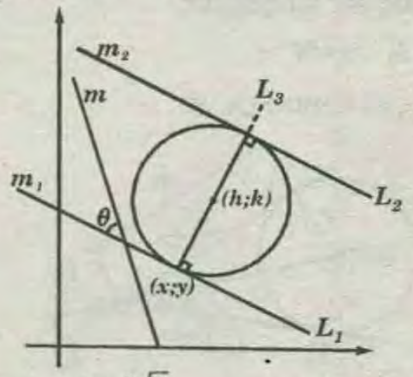
$$tg\theta=\frac{m_1-m}{1+m_1 m}=\frac{3}{4} \text{.....(II)}$$

* (I) en (II) : se obtiene : $m_1=m_2=-1$



* Sea L_3 perpendicular a L_1 y L_2 y pasa por el centro del círculo y cuya pendiente es $m_3=1$

* Sea $(x; y)$, punto de intersección entre L_3 y el círculo



$(x;y) \in L_3 : m_3=1=\dfrac{y-5\sqrt{2}}{x-10\sqrt{2}} \Rightarrow (x-10\sqrt{2})=(y-5\sqrt{2})$.....(III)

$(x;y) \in \mathscr{C}$: $(x-10\sqrt{2})^2+(y-5\sqrt{2})^2=25$.....(IV)

* (III) en (VI) : $2(x-10\sqrt{2})^2=25$

* De donde : $x_1=\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$ y $x_2=\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$

* En (I) : $y_1=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ y $y_2=\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$

* Los puntos de intersección serán :

$$\left(\frac{15\sqrt{2}}{2};\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } \left(\frac{25\sqrt{2}}{2};\frac{15\sqrt{2}}{2}\right)$$

* Ecuaciones vectoriales de las rectas :

$L=\{x;y+t(1;m)/t \in R\}$

$$L_1=\left\{\left(\frac{15\sqrt{2}}{2};\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)+t(1;-1)/t \in R\right\}$$

$$L_2=\left\{\left(\frac{25\sqrt{2}}{2};\frac{15\sqrt{2}}{2}\right)+r(1;-1)/r \in R\right\}$$

PROBLEMA 60 :

Hallar la ecuación de la circunferencia con centro sobre la recta $7x+9y-9=0$ y tangente a :

$$L_1: 3x-4y=31 \text{ y a } L_2: 5x+12y+79=0$$

(La circunferencia no corta al eje Y)

RESOLUCIÓN :

* Llevando a la forma vectorial las ecuaciones dadas , tendremos:

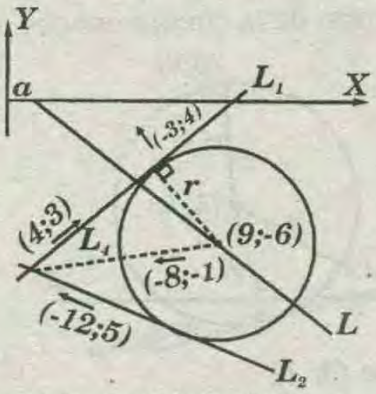
$L=\{(0;1)+t(9;-7)\}$; $L_1=\{(0;-31/4)+r(4;3)\}$

$L_2=\{(0;-79/12)+s(-12;5)\}$ donde $\{t;r\ y\ s\}\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow L_1\cap L_2=(1;-7)$

* El centro de $\mathscr{C}$ se hallará sobre la bisectriz del $\sphericalangle$ fomado por L_1 y L_2. vector direccional de la bisectriz:

$$\vec{b}=\frac{(4;3)}{2}+\frac{(-12;5)}{13}\Rightarrow \vec{u}=\frac{(-1;8)}{\sqrt{65}}$$



* Ecuaciones de las bisectrices .

$$L_3=\{(1;-7)+q(-1;8)/q\in\mathbb{R}\}$$

$$L_4=\{(1;-7)+w(-8;-1)/w\in\mathbb{R}\}$$

* Centros :

$L_3\cap L=C_1=(0;1)$.....(I)

$L_4\cap L=C_2=(9;-6)$.....(II)

* Por condición del problema descartamos (I) :

radio :

$$L=\frac{(-8;-1).(-3;4)}{|(-3;4)|}=4\Rightarrow \mathscr{C}=\{(x-9)^2+(y+6)^2=16\}$$

PROBLEMA 61 :

Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados están sobre las rectas .

$L_1: x-2y+11=0$; $L_2: 3x-y-2=0$; $L_3: 7x+y+2=0$

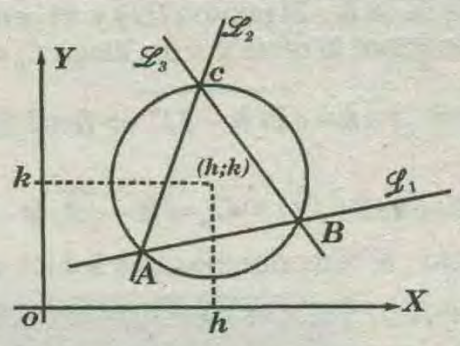
RESOLUCIÓN :

* Resolviendo las dos primeras ecuaciones encontramos:

$L_1\cap L_2=A(3;7)$

* Análogamente : $L_1\cap L_3=B(-1;5)$

$L_2\cap L_3=C(0;-2)$



* Sea $(h;k)$ el centro de la circunferencia circunscrita, del cual los puntos A; B y C equidista entonces cumple :

$$r^2=(h-3)^2+(k-7)^2=(h+1)^2+(k-5)^2=(h-0)^2-(k-2)^2$$

* Resolviendo: $h=3$; $k=2$; $r^2=25$

* Por lo tanto la ecuación pedida será :

$$(x-3)^2+(y-2)^2=25 \ \vee\ x^2+y^2-6x-4y-12=0$$

* RESOLUCIÓN VECTORIAL :

$L_1=\{(0;11/2)+t(2;1)\}$; $L_2=\{(0;-2)+r(1;3)\}$

$L_3=\{(0;-2)+(1;-2)\}$;$(s;t\ y\ r)\in\mathbb{R}$

* Vértice del triángulo :

$L_1\cap L_2=A=(3;7)$, $L_1\cap L_3=B=(-1;5)$, $L_2\cap L_3=C=(0;-2)$

* Sean M y N ; puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, entonces:

$M=(1;0)$, $N=(-1/2;3/2)$

$\overline{AB}=(-4;-2)\Rightarrow \overline{AB}^{\perp}=(2;-4)$; $\overline{BC}=(1;7)\Rightarrow \overline{BC}^{\perp}=(7;1)$

* Por lo tanto las ecuaciones de las ecuaciones de las mediatrices de AB y BC son respectivamente :

$$M_1=\{(1;6)+w(2;-4)/w\in\mathbb{R}\}$$

$$M_2=\{(-1/2;3/2)+q(7;1)/q\in\mathbb{R}\}$$

* Son C_o centro de la circunferencia , luego :

$$C_o=M_1\cap M_2=(3;2)\ ;\ r=|3-3;7-2|=5$$

$$\Rightarrow \mathscr{C}=\{(x;y)/(x-3)^2+(y-2)^2=25\}$$

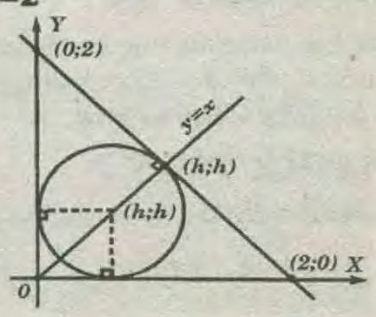
PROBLEMA 62:

Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a los ejes coordenados X^+e Y^+ y además que sea tangente a la recta L .

$$L: x+y=2$$

RESOLUCIÓN:

* El triángulo que se genera es rectángulo e isósceles, entonces la circunferencia será tangente en el punto



medio de la recta L. El punto $(1;1)$ y el centro C_o se encontrarán sobre la recta $y = x$, luego $C_o = (h ; h)$.

* De la figura $r=h=\sqrt{2(h-1)^2} \Rightarrow h=2 \pm \sqrt{2}$

* Luego :

$C_o=(2+\sqrt{2};2+\sqrt{2})$ ó $C_o=(2-\sqrt{2};2-\sqrt{2})$

* Por lo tanto , le encontramos dos soluciones :

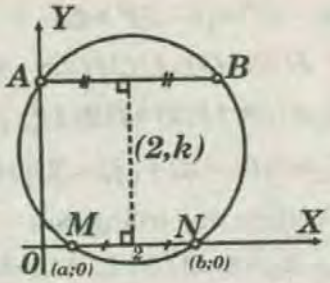
$[x-(2+\sqrt{2})]^2+[y-(2+\sqrt{2})]^2=(2+\sqrt{2})^2$

$[x-(2-\sqrt{2})]^2+[y-(2-\sqrt{2})]^2=(2-\sqrt{2})^2$

PROBLEMA 63 :

Encontrar las coordenadas del centro de una circunferencia que pasa por los puntos $A=(0; 8)$ y $B=(4; 8)$ y que corte al eje de las abscisa y según una cuerda de longitud igual a 3 unidades.

RESOLUCIÓN :



* Sabemos que : «El centro de una circunferencia se encuentra en la mediatriz de una de sus cuerdas» .Entonces , el centro estará en la recta $x=2$ mediatriz de $\overrightarrow{AB}$.

* Luego el centro será : $(2; k)$.

* Sea $\overrightarrow{MN}$ la cuerda de 3 unidades .

* Por ser $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{MN}$, cuerdas paralelas.

* Entonces la mediatriz de AB es , a su vez , mediatriz de $\overrightarrow{MN}$.

* Luego : $b-a=3$

$\frac{a+b}{2}=2$ de donde : $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{7}{2}$

A y M equidistar del centro , luego :

$$x^2=2^2+(k-8)^2=(2-\frac{1}{2})^2+k^2 \Rightarrow k=\frac{263}{64}$$

* Finalmente : $(h;k)=(2;\frac{263}{64})$

PROBLEMA 64 :

Hallar la ecuación de le circunferencia que tiene su centro $C_o=(-5;-4)$ y es tangente a la circunferencia $x^2+y^2-28x-10y+13=0$.

RESOLUCIÓN :

* Transformando la ecuación dada, tendremos :

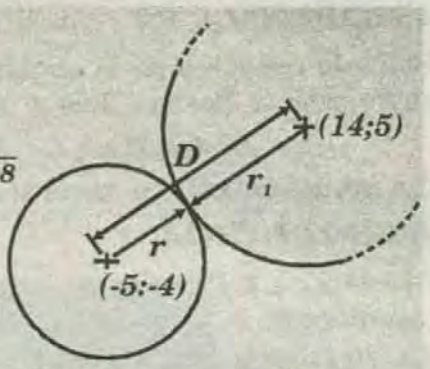
$$(x-14)^2+(y-5)^2=208=r_1^2$$

* De la figura :

$D=\sqrt{19^2+9^2}=\sqrt{442}$

$\Rightarrow r=D-r_1=\sqrt{442}-\sqrt{208}$

$r^2=650-104\sqrt{34}$



* Por lo tanto la ecuación del círculo será :

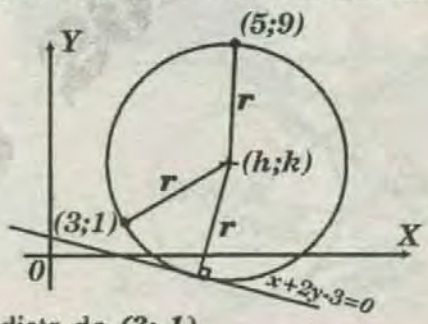
$$(x+5)^2+(y+4)^2=650-104\sqrt{34}$$

PROBLEMA 65 :

Hallar las ecuaciones de una circunferencia que pasa por los puntos $(3;1)$; $(5;9)$ y es tangente a la recta cuye ecuación es : $x+2y-3=0$

RESOLUCIÓN :

* Sea $(h;k)$ el centro de la circunferencia .



$(h; k)$ equidista de $(3; 1)$ $(5; 9)$ y de la recta $x+2y-3=0$; entonces :

$r=\sqrt{(h-3)^2+(k-1)^2}$ .....(I)

$r=\sqrt{(h-5)^2+(k-9)^2}$ .....(II)

$r=\frac{|h+2k\alpha-3|}{\sqrt{5}}$.....(III)

* Igualando (I) y (II) se obtiene : $h=24-4k$.....(IV)

* Igualando (II) y (III):

$4h^2+k^2-24h+2k-4hk+41=0$ .....(V)

* De (IV) en (V) : $81k^2-766k+1769=0$

* Resolviendo :

$k_1=\frac{383+10\sqrt{34}}{81}$; $h_1=\frac{412-40\sqrt{34}}{8}$

$k_2=\frac{383-10\sqrt{34}}{81}$; $h_2=\frac{412+40\sqrt{34}}{81}$

$\Rightarrow$ en (III) : $r_1=\frac{935+20\sqrt{34}}{81\sqrt{5}}$; $r_2=\frac{935-20\sqrt{34}}{81\sqrt{5}}$

* Por lo tanto , existen dos soluciones :

$$C_1:(x-\frac{412-40\sqrt{34}}{81})^2+(y-\frac{383+10\sqrt{34}}{81})^2=(\frac{935-20\sqrt{34}}{81\sqrt{5}})^2$$

$$C_1:(x-\frac{412+40\sqrt{34}}{81})^2+(y-\frac{383-10\sqrt{34}}{81})^2=(\frac{935+20\sqrt{34}}{81\sqrt{5}})^2$$

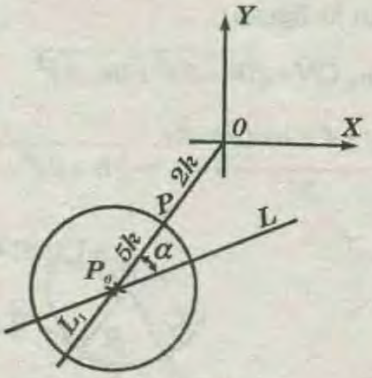
PROBLEMA 66 :

Hallar la ecuación de una circunferencia $\mathscr{C}$ cuyo centro P_o se encuentra sobre la recta L :

$3x-4y-30=0$. el punto P que pertenece a $\mathscr{C}$ divide al segmento $\overrightarrow{OP}_o$ en la relación $2/5$. El segmento $\overrightarrow{OP}_o$ forma con la recta L un ángulo α tal que Tag$\alpha=3/4$ (O es el origen de coordenadas) .

RESOLUCIÓN :

$$\mathbb{L}=\left\{(0;-\frac{30}{4})+t(4;3)/t\in\mathbb{R}\right\};m=\frac{3}{4}$$



* Sea L_1, la recta que contiene a $\overrightarrow{OP}_o$.

* Por lo tanto : $tag\alpha=\dfrac{m_1-3/4}{1+\frac{3}{4}m_1}=\dfrac{3}{4}$

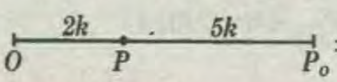
* Resolviendo : $m_1=\dfrac{24}{7}$, luego :

$$L_1=\{(0;0)+r(7;24)/r\in\mathbb{R}\}$$

* Centro de $\mathscr{C}$:

$$P_0=L\cap L_1=(\frac{-14}{5};\frac{-48}{5});|\overrightarrow{OP}_0|=\left|\frac{14}{5};\frac{48}{5}\right|=10$$

P divide el segmento $\overrightarrow{OP}_0$ en la relación $2/5$:



$\Rightarrow 2k+5k=10\Rightarrow k=\dfrac{10}{7}$

radio de $\mathscr{C}$:

$$r=|P_O-P|=5k=5\times\frac{10}{7}=\frac{50}{7}$$

$$\Rightarrow\mathscr{C}=\left\{(x;y)/(\frac{x+14}{5})^2+(y+\frac{48}{5})^2=(\frac{50}{7})^2\right\}$$

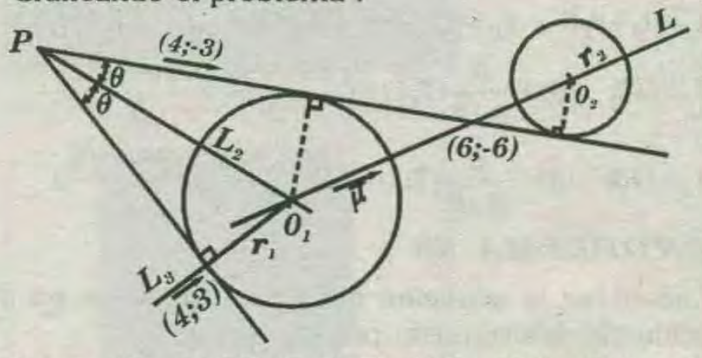
PROBLEMA 67 :

C_1 y C_2 son circunferencias tales que el radio C_1 es el doble del radio C_2 . La recta T es tangente simultáneamente a C_1 y C_2; $(-10;6)\in T$ y la recta L de los centros corta a T en el punto $(6;-6)$ y la recta $R=\{(3t-28;2-4t)/t\in\mathbb{R}\}$ es tangente a C_1 en el punto cuya ordenada es -14.

Encontrar : $I)T\cap C_1$ $\quad II)L\cap C_2$

RESOLUCIÓN :

* Graficando el problema :



* Vector direccional de $T:\vec{a}=(16;-12)=4(4;-3)$

$$\Rightarrow T\{=(6;-6)+s(4;-3)/s\in\mathbb{R}\}$$

* Ecuación vectorial de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}=\{(-28;2)+t(3;-4)/t\in\mathbb{R}\}$$

* Intersectando : $T\cap\mathbb{R}=P=(-58;42)$

Cálculo de la bisectriz L_2 del $\sphericalangle$ formado por R y T.

Vector direccional de la bisectriz :

$$\vec{u}_t+\vec{u}_r=\frac{1}{5}(4;-3)+(3;-4)\Rightarrow\vec{a}=\frac{7}{5}(1;-1)$$

* Luego : $L_2=\{(-58;42)+r(1;-1)/r\in\mathbb{R}\}$

Sea: L_3 la recta perpendicular a R, que pasa por $(x;-14)$

$$\Rightarrow L_3=\{(x;-14)+w(4;3)/w\in\mathbb{R}\}$$

$$(x;-14)\in\mathbb{R}\Rightarrow(x;-14)=(-28;2)+t(3;-4)$$

* De donde : $x=-28+3t$; $-14=2-4t\Rightarrow t=4$

* luego : $x=-16\Rightarrow(x;-14)=(-16;-14)$

* Reemplazando en L_3 e intersectando con L_2; encontraremos el centro de C_1:

* Por lo tanto : $L_2\cap L_3=0_1=(-8;-8)$

radio de C_1 : $r_1=|(-8+16;-8+14)|=10$

$$T\cap C_1=0_1+10\vec{u}_1^{\perp}=(-8;-8)+10(\frac{3}{5};\frac{4}{5})=(-2;0)$$

* Cálculo del centro de C_2 : (0_2)

* Por dato : $r_2=\dfrac{r_1}{2}=5$

* Sea $0_2=(m;n)\Rightarrow$ aplicando la definición de componente .

$$\frac{(6-m;-6-n).(-3;-4)}{5}=5\Rightarrow 3m+4n=19.....(I)$$

* Ecuación vectorial de L .

(pasa por $(6;-6)$ y $(-8;-8)$).

$L=\{(6;-6)+q(7;1)/q\in R\}$; $0_2\in L: (m;n)=(6;-6)+q(7;1)$

* Efectuando :

$m=48+7n$ ..... (II)

* De (I) y (II): $0_2=(m;n)=(13;-5)$

Intersectado L con C_2 ; sean I_1 e I_2 las intersecciones:

$I_1=0_2+r_2\vec{u}$; $I_2=0_2-r_2\vec{u}$; Luego :

$$I_1=(13;-5)+\frac{5}{5\sqrt{2}}(7;1)=(\frac{26+7\sqrt{2}}{2};\frac{-10+\sqrt{2}}{2})$$

$$I_2=(13;-5)-\frac{5}{5\sqrt{2}}(7;1)=(\frac{26-7\sqrt{2}}{2};\frac{-10-\sqrt{2}}{2})$$

PROBLEMA 68 :

Encontrar la ecuación del círculo inscrito en el triángulo determinado por las rectas:

$L_1: 2x-3y+21=0$; $L_2: 3x-2y-6=0$; $L_3: 2x+3y+9=0$

RESOLUCIÓN VECTORIAL :

$L_1=\{(0;7)+t(3;2)/t\in R\}$; $P_o'=(0;7)$; $\vec{n}_1=(-2;3)$

$L_2=\{(0;-3)+r(2;3)/r\in R\}$; $P_o''=(0;-3)$; $\vec{n}_2=(3;-2)$

$L_3=\{(0;-3)+s(-3;2)/s\in R\}$; $P_o'''=(0;-3)$; $\vec{n}_3=(-2;-3)$

* Sea $C(h;k)$, centro de la circunferencia .

* Luego :

$r=Comp_{\vec{n}_1}(P_o'-C)=Comp_{\vec{n}_2}(P_o''-C)=Comp_{\vec{n}_3}(P_o'''-C)$

$$\frac{(-h;7-h).(-2;3)}{\sqrt{13}}=\frac{(-h;-3-k).(3;-2)}{\sqrt{13}}=\frac{(-h;-3-k).(-2;-3)}{\sqrt{13}}$$

$\Rightarrow 2h-3k+21=-3h+2k+6=2h+3k+9$

* Resolviendo: $C=(h;k)=(-1;2)$; $r=\sqrt{13}$

$\Rightarrow \mathscr{C}=\{(x;y)/(x+1)^2+(y-2)^2=13\}$

PROBLEMA 69 :

El centro de una circunferencia está sobre la recta $2x+y+3=0$, pasa por el punto $(3;1)$ y es tangente a la recta $4x-3y-14=0$. Hallar su ecuación .

RESOLUCION:

* Sea $(h;k)$ centro de la circunferencia, entonces como pertenece a la recta L_1: se cumple :

$2h+k+3=0$ ..... (I)

$(h;k)$ equidista de $(3;1)$ y L_2 :

$$r=\sqrt{(h-3)^2+(k-1)^2}=\frac{4h-3k-14}{5} \quad \text{..... } (II)$$

* Resolviendo (I) y (II) se obtiene .

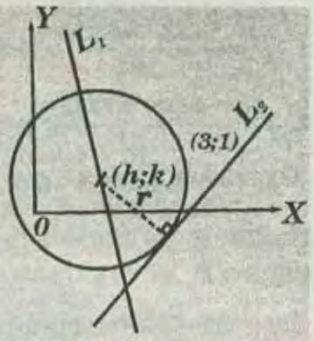
$h_1=-12; k_1=21$; $r_1=25$

$h_2=-2; k_2=1$; $r_2=5$

* Por lo tanto existen 2 soluciones :

$(x+12)^2+(y-21)^2=625$

$(x+2)^2+(y-1)^2=25$



RESOLUCIÓN VECTORIAL :

* Sea $(h;k)$, centro de la circunferencia :

$(h;k)\in L_1 \Rightarrow 2h+k+3=0$ ..... (I)

$L_1=\{(0;-3)+t(1;-2)/t\in R\}$

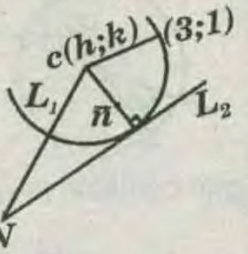
$L_2=\left\{(0;-\frac{14}{3})+r(3;4)/r\in R\right\}$; $\vec{n}=(4;-3)$

Sea $N=L_1\cap L_2 \Rightarrow N=(1/2;-4)$

* Según la figura :

$r=Com_{\vec{n}}\overrightarrow{CN}=\sqrt{(h-3)^2+(k-1)^2}$

$$\frac{(\frac{1}{2}-h;-4-k).(4;-3)}{5}=\sqrt{(h-3)^2+(k-1)^2}$$



* De donde : $\frac{14-4h+3k}{5}=\sqrt{(h-3)^2+(k-1)^2}$ ..... (II)

$\Rightarrow (h_1;k_1)(-12;21).r_1=25$; $(h_2;k_2)=(-2;1); r_2=5$

* Finalmente : $\mathscr{C}_1=\{(x;y)/(x+12)^2+(y-21)^2=625\}$

$\mathscr{C}_2=\{(x;y)/(z+2)^2+(y-1)^2=25\}$

PROBLEMA 70 :

Sea L: $x+31y-100=0$ y $Q=(17;17)\in L$. Si A y B son dos puntos en L que forman con Q un triángulo AQB recto en Q y donde :

$$PROY_{\overline{AQ}}\overrightarrow{AB}=(10;14)$$

I) Hallar A y B

II) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por A; B y Q

RESOLUCION :

I) Sean: $A=(a_1;a_2)$ y $B=(b_1;b_2)$

Por ser $\triangle AQB$, recto en Q, se cumple :

$$Proy_{\overline{AQ}}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AQ}=(10;14)$$

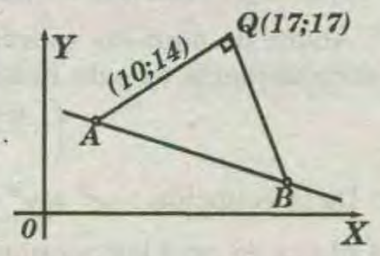
* de la gráfica : $(17-a_1,17-a_2)=(10;14)$

* Igualando pares : $a_1=7\ ;\ a_2=3$

* Sea m_1, la pendiente de AQ y m_2 la pendiente de

$$m_1=\frac{17-a_2}{17-a_1}=\frac{17-3}{17-7}=\frac{7}{5}$$

$$\overrightarrow{AQ}\perp\overrightarrow{QB}\Rightarrow m_2=-\frac{5}{7}$$



$$m_2=-\frac{5}{7}=\frac{b_2-17}{b_1-17}\Rightarrow 5b_1+7b_2-204=0.....(I)$$

* Por otro lado, $L: x+31y-100=0$

$$(b_1b_2)\in L\Rightarrow b_1+31b_2-100=0.....(II)$$

* De (I) y (II): $b_1=38\ ;\ b_2=2$

* Por lo tanto : $A=(7;3)\ ;\ B=(38;2)$

*II)*Centro de la circunferencia que pasa por $A;\ B$, y Q

$$(h;k)=\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right)=\left(\frac{45}{2};\frac{5}{2}\right)$$

$$r^2=\left(7-\frac{45}{2}\right)^2+\left(3-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{962}{4}$$

* La ecuación de la circunferencia será :

$$\left(x-\frac{45}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{962}{4}$$

ó: $x^2+y^2-45x-5y+272=0$

PROBLEMA 71 :

Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $x+3y-2=0$, en el punto $(-1\ ;\ 1)$ y que pase por el punto $(3;\ 5)$.

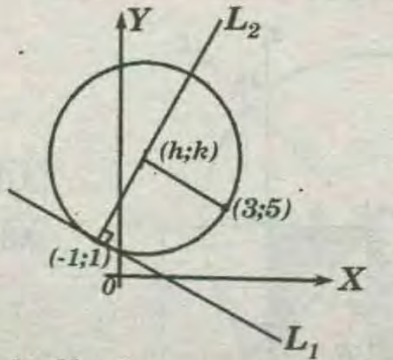
RESOLUCIÓN :

Sea L_1 la recta dada $\Rightarrow m_1=\frac{-1}{3}$

* De la figura :

$(h;\ k)$ y $(-1;\ 1)$ pertenecen a L_2, de pendiente m_2 , perpendicular a L_1 , entonces :

$$m_1m_2=-1\Rightarrow m_2=3=\frac{k-1}{h+1}$$



De donde: $k=3h+4$ ..... (I)

$(3;\ 5)$ y la recta L_1 ; equidistan de $(h;\ k)$, luego :

$$r^2=(h-3)^2+(k-5)^2=\left(\frac{h+3k-2}{\sqrt{10}}\right)^2.....(II)$$

* (I) en (II): $(h-3)^2+(3h-1)^2=10(h+1)^2$

*Resolviendo : $h=0\ ;\ k=4\Rightarrow r=\frac{|0+3(4)-2|}{\sqrt{10}}=\frac{10}{\sqrt{10}}$

* Finalmente , la ecuación buscada será :

$$x^2+(y-4)^2=10$$

PROBLEMA 72 :

Hallar la ecuación de una circunferencia de radio $r=\sqrt{18}$ que es tangente a la circunferencia : $x^2+y^2+4x-10y+21=0$ en el punto $(-4;7)$

RESOLUCIÓN :

* De la figura :

$$m=\frac{k-7}{h+4}=\frac{7-5}{-4+2}\Rightarrow k=3-h.....(I)$$

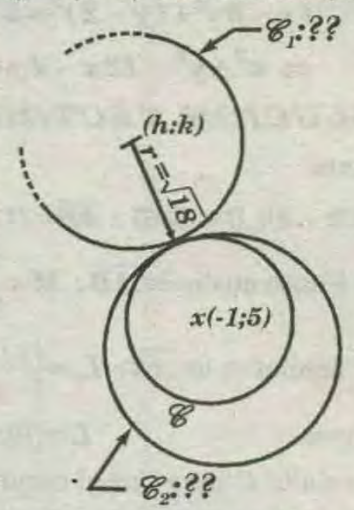
* Por dato del problema :

$$r^2=18^2=(h+4)^2+(k-7)^2.....(II)$$

* De (I) y (II) :

$h_1=-7;\ k_1=10$

$h_2=-1;\ k_2=4$



$(x+7)^2+(y-10)^2=18$ ó $(x+1)^2+(y-4)^2=18$

SOLUCIÓN VECTORIAL :

* Ecuación de la circunferencia dada :

$$\mathscr{C}:(x+2)^2+(y-5)^2=8\Rightarrow c=(-2;5)$$

* Los centros de las circunferencias buscadas estarán sobre la recta L que para por $(-4;\ 7)$ y $c(-2;\ 5)$.

Vector dirección de L: $=2(-1;1)\Rightarrow\vec{u}=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

* Centro de la circunferencia tangente exterior :

$$C_1=(-4;7)+\sqrt{18}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=(-7;10)$$

* Centro de la circunferencia , a la cual es tangente de circunferencia dada (por tener menor radio)

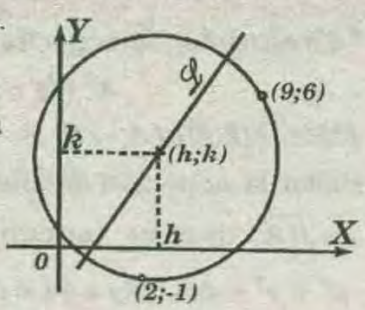
$$C_2=(-4;7)-\sqrt{18}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=(-1;4)$$

$\mathscr{C}_1=(x+7)^2+(y-10)^2=18\ ;\ \mathscr{C}_2=(x+1)^2+(y-4)^2=18$

PROBLEMA 73 :

Hallar la ecuación de la circunfrencia que pasa por los puntos : $(2\ ;-1)$; $(9;6)$; y cuyo centro está en la recta: $x-3y=0$.

RESOLUCIÓN



* Sea $(h;k)$ al centro de la circunferencia .

* Como $(h;k)\in$ a la recta, entonces :

$h-3k=0$ .....(I)

* Los puntos dados equidistan del centro $(h;\ k)$, luego se tiene :

$$(2-h)^2+(-1-k)^2=(9-h)^2+(6-k)^2=r^2\ .....(II)$$

* Resolviendo (I) y (II): $h=6;\ k=2\ ;\ r=5$

* Finalmente , la ecuación de la circunferencia será:

$$(x-6)^2+(y-2)^2=5^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-12x-4y+15=0$$

SOLUCIÓN VECTORIAL :

* Sean:

$A=(2;-1);\ B=(9;6)\ ;\ \overline{AB}=7(1;1)\Rightarrow \overline{AB}^{\perp}=7(-1;1)$

M : Punto medio de $\overline{AB}$; $M=\frac{1}{2}(A+B)=\left(\frac{11}{2};\frac{5}{2}\right)$

L_1 : Mediatriz de $\overline{AB}$; $L_1=\left\{(\frac{11}{2};\frac{5}{2})+t(-1;1)/t\in\mathbb{R}\right\}$

Además : $L=\{(0;0)+r(3;1)/r\in\mathbb{R}\}$

* Por dato, L pasa por el centro de la circunferencia; además este centro es un punto de la mediatriz de la cuerda , $\overline{AB}$.

* Igualando las ecuaciones de L_1 y L :

$$L_1\cap L=C=(6;2)\Rightarrow r=|(9-6;6-2)|=5$$

$$\Rightarrow \mathscr{C}=\left\{(x;y)/(x-6)^2+(y-2)^2=25\right\}$$

PROBLEMA 74 :

Dado una circunferencia de ecuación : $x^2+y^2+Ux+Ny+I=0$ y una recta de ecuación $Ax+By+C=0$. Demostrar que el sistema de curvas $x^2+y^2+Ux+Ny+I+k(Ax+By+C)=0$ se compone de todas las circunferencias dadas y es perpendicular a la recta dada.

RESOLUCIÓN :

* De la ecuación :

$$x^2+y^2+Ux+Ny+I+k(Ax+By+C)=0$$

$$x^2+y^2+(u+kA)x+(N+kB)y+I+kC=0$$

* Ahora de aquí las coordenadas del centro de la circunferencia de esta familia :

$$\left(-\frac{u+kA}{2};\frac{N+kB}{2}\right)$$

* De la ecuación : $x^2+y^2+ux+Ny+I=0$

* Ahora de aquí las coordenadas de su centro :

$$\left(-\frac{u}{2};-\frac{N}{2}\right)$$

* Sea m la pendiente que pasa por los puntos centros de las coordenadas que se acaban de hallar . entonces :

$$m=\frac{-\frac{N+kB}{2}+\frac{N}{2}}{-\frac{u+kA}{2}+\frac{u}{2}}\Rightarrow m=\frac{-\frac{kB}{2}}{-\frac{kA}{2}}\Rightarrow m=\frac{B}{A}$$

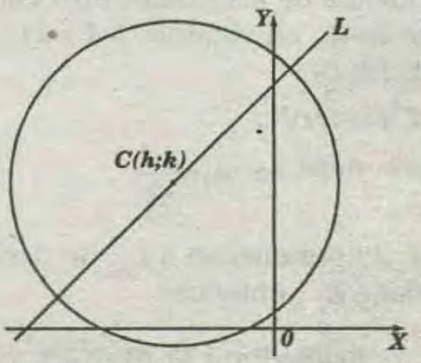
* Sea m_1 la pendiente de la recta : $Ax+By+C=0$.

* Entonces : $m_1=-\frac{A}{B}$

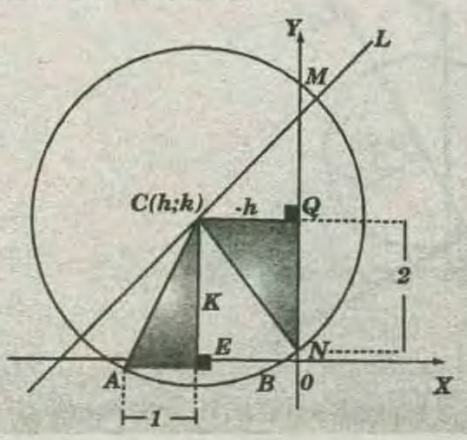
* Luego : $m\times m_1=(\frac{B}{A})\times(-\frac{B}{A})\Rightarrow m\times m_1=-1$

PROBLEMA 75 :

En la siguiente figura hallar el centro del circunferencia , sabiendo que el centro esta en la recta $L: x-y+4=0$ y que esta circunferencia corta al eje X y al eje Y formándose cuerdas de 2 y 4 unidades respectivamente.



RESOLUCION :



$|\overrightarrow{AB}|=2$

$|\overrightarrow{NM}|=4$

* El centro $C(h;k)$ se proyecta las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{NM}$ formandose los puntos E y Q repectivamente

En el $\triangle NCQ$: Por pitágoras :

$$r^2=(-h)^2+4 \Rightarrow r^2=h^2+4 \quad \ldots\ldots(I)$$

* En el $\triangle ACE$: Por pitágoras :

$$r^2=k^2+1 \quad \ldots\ldots(II)$$

* (I)=(II):

$$h^2+4=k^2+1 \Rightarrow h^2=k^2-3 \quad \ldots\ldots(III)$$

* De la figura: $C(h;k) \in L: h-k+4=0$

$$h=k-4 \quad \ldots\ldots(VI)$$

* (VI) en (III): $(k-4)^2=k^2-3$

$$\Rightarrow k^2-8k+16=k^2-3 \Rightarrow -8k+16=-3 \Rightarrow \frac{19}{8}=k$$

* En (VI) $h=\frac{19}{8}-4$

$$\Rightarrow h=\frac{-13}{8} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{-13}{8};\frac{19}{8}\right)}$$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el origen del plano coordenado y además es tangente a la recta: $x-y+4=0$

A) $x^2+y^2=4$ B) $x^2+y^2=8$ C) $x^2+y^2=12$
D) $x^2+y^2=16$ E) $x^2+y^2=20$

02 Se tiene una circunferencia con centro en el eje X, tangente a la recta: $x-12=0$; y pasa por el punto $(4;4)$. Hallar la ecuación de dicha circunferencia.

A) $x^2+y^2-14x+24=0$ B) $x^2+y^2-8x+12=0$
C) $x^2+y^2+8x-16=0$ D) $x^2+y^2+14x-24=0$
E) $x^2+y^2-10x+16=0$

03 Calcular la longitud de la tangente trazada desde el punto $(7;2)$ a la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2+y^2-6x+2y+1=0$$

A) $3\,u$ B) $\sqrt{15}\,u$ C) $4\,u$ D) $\sqrt{20}\,u$ E) $5\,u$

04 Calcular el área del sector circular formado por el semieje positivo de las abscisas, la circunferencia: $x^2+y^2=144$ y la recta $y=\sqrt{3}x$

A) $28\pi u^2$ B) $26\pi u^2$ C) $24\pi u^2$
D) $144\pi u^2$ E) $169\pi u^2$

05 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(3;1)$ y $B(-1;3)$, sabiendo que su centro está situado en la recta: $3x-y-2=0$

A) $(x-2)^2+(y-4)^2=5$ B) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$
C) $(x+2)^2+(y-8)^2=10$ D) $(x-1)^2+(y-1)^2=5$
E) $(x-3)^2+(y-7)^2=36$

06 Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene como diámetro a la porción de la recta:

$$L: 2x-3y+12=0$$

comprendida en el segundo cuadrante.

A) $(x+3)^2+(y+2)^2=13$ B) $(x-3)^2+(y-2)^2=13$
C) $(x+3)^2+(y+1)^2=13$ D) $(x+3)^2+(y-2)^2=13$
E) $(x-3)^2+(y-1)^2=13$

07 Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(6;0)$ y cuyo radio es igual a la distancia del punto $(-3;7)$ a la recta: $4x+2y-11=0$.

A) $20x^2+20y^2+240y-639=0$ B) $20x^2+20y^2+240y+639=0$
C) $20x^2+20y^2+240x-639=0$ D) $20x^2+20y^2-240x+639=0$
E) $20x^2+20y^2+240x+639=0$

08 Determinar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo determinado por los puntos $A(1;1)$; $B(1;-1)$ y $C(2;0)$

A) $(x-1)^2+y^2=1$ B) $(x+1)^2+y^2=1$ C) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$
D) $x^2+(y-1)^2=1$ E) $x^2+y^2=1$

09 Determinar la ecuación del diámetro de la circunferencia:

$x^2+y^2-4x-6y-17=0$ que es perpendicular a la recta:

$$L: 5x-2y-13=0$$

A) $2x+5y-19=0$ B) $5y-2x+19=0$ C) $2x+5y+11=0$
D) $2x-5y+11=0$ E) $5y-2x+19=0$

10 Determine la ecuación de una circunferencia tangente a los semiejes positivos y cuyo centro está en la recta: $L: 3y-2x-4=0$

A) $x^2+y^2-8x-8y+16=0$
B) $x^2+y^2-4x-4y+16=0$
C) $x^2+y^2-4x-4y+8=0$
D) $x^2+y^2-8x-8y+8=0$
E) $x^2+y^2-16x-16y+32=0$

11 Determinar la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y tangente al segmento $\overline{AB}$, si $A(0;15)$ y $B(4;12)$

A) $x^2+y^2=81$ B) $x^2+y^2=100$ C) $x^2+y^2=144$
D) $x^2+y^2=196$ E) $x^2+y^2=225$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)A	2)E	3)C	4)C	5)E	6)B	7)A	8)D	9)E	10)D

PARABOLA

CAPITULO 48

OBJETIVOS :

* Conocer la definición , propiedades y aplicaciones de la parábola , así como saber resolver problemas contextualizados con ello.

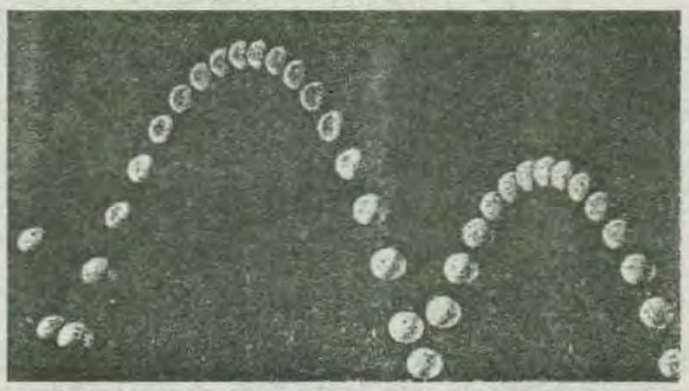
INTRODUCCION :

Se llaman cuvas cónicas a todas aquellas que se obtienen cortando un cono con un plano. Debido a su origen las curvas cónicas se llaman a veces secciones cónicas.

El matemático griego Apolonio *(262-190 A.C.)* de Perga (antigua ciudad del Asia Menor) fue el primero en estudiar detalladamente las curvas cónicas. Apolonio descubrió que las cónicas se podían clasificar en tres tipos: elipses, hipérbolas y parábolas.

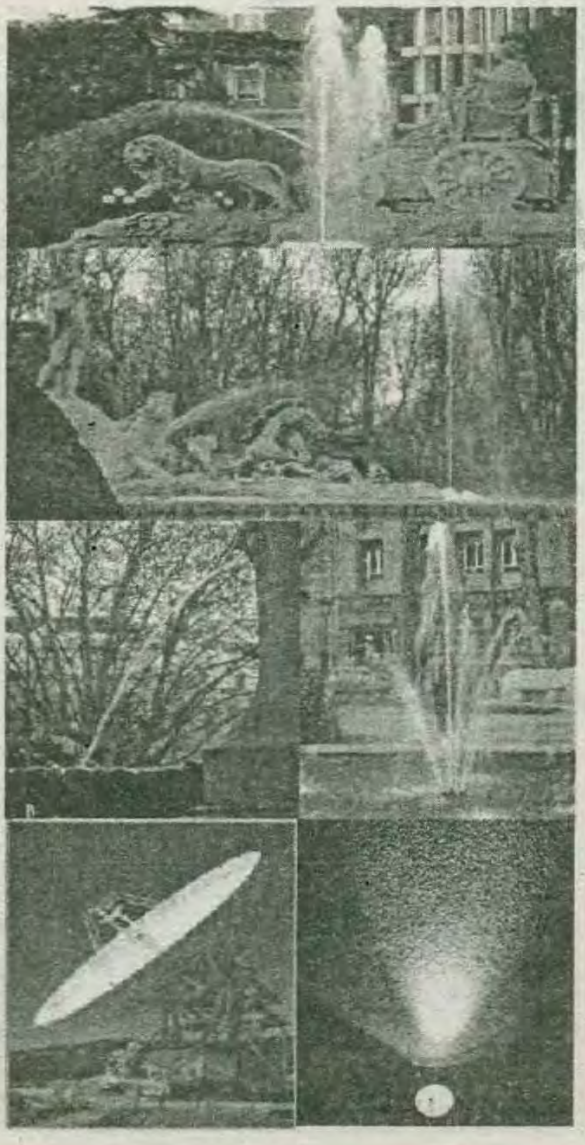
Las elipses son las curvas que se forman cortando un cono con un plano que solo toca uno de los mantos del cono y no es paralelo a una de sus aristas. Las hipérbolas son las curvas que se forman al cortar un cono con un plano que tocas los dos mantos del cono. Las parábolas son las curvas que se forman al cortar un cono con un plano paralelo a una de sus aristas. Apolonio demostró que las curvas cónicas tienen muchas propiedades interesantes. Algunas de esas propiedades son las que se utilizan actualmente para definirlas. En la página construcción se estudian las definiciones de las curvas cónicas como lugares geométricos, que son las más utilizadas en las matemáticas modernas. Quizás las propiedades más interesantes y útiles que descubrió Apolonio de las cónicas son las llamadas propiedades de reflexión. Si se construyen espejos con la forma de una curva cónica que gira alrededor de su eje, se obtienen los llamados espejos elípticos, parabólicos o hiperbólicos, según la curva que gira. Apolonio demostró que si se coloca una fuente de luz en el foco de un espejo elíptico, entonces la luz reflejada en el espejo se concentra en el otro foco. Si se recibe luz de una fuente lejaña con un espejo parabólico de manera que los rayos incidentes son paralelos al eje del espejo, entonces la luz reflejada por el espejo se concentra en el foco. Esta propiedad permite encender un papel si se coloca en el foco de un espejo parabólico y el eje del espejo se apunta hacia el sol. Existe la leyenda de que Arquímedes *(287-212 A.C.)* logró incendiar las naves romanas durante la defensa de Siracusa usando las propiedades de los espejos parabólicos. En el caso de los espejos hiperbólicos, la luz proveneinte de uno de los focos se refleja como si viniera del otro foco. En la página reflexión se estudian las propiedades de reflexión de las cónicas. En el siglo *XVI* el filósofo y matemático René Descartes *(1596-1650)* desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones. Este método es la llamada Geometría Analítica. En la Geometría Analítica las curvas cónicas se pueden representar por ecuaciones de segundo grado en las variables x e y. En la página ecuaciones de las cónicas se presentan las ecuaciones más sencillas de las curvas cónicas que corresponden a las que tienen su centro o, en el caso de la párábola, su vértice, en el centro y su eje de simetría coincide con uno de los ejes coordenados. Quizás el resultado más sorprendente de la Geometría Analítica es que todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables representan secciones cónicas. Este hecho es el tema de la página sobre la ecuación general de segundo grado en dos variables. En excentricidad y directriz se presentan las ecuaciones generales de las cónicas expresadas en términos de la excentricidad, la distancia del foco a la directriz y el ángulo del eje de simetría. Sin lugar a dudas las cónicas son las curvas más importantes que la geometría ofrece a la física. Por ejemplo, las propiedades de reflexión son de gran utilidad en la óptica. Pero sin duda lo que las hace más importantes en la física es el hecho de que las órbitas de los planetas alrededor del sol sean elipses y que, más aún, la trayectoria de cualquier cuerpo sometido a una fuerza gravitatoria es una curva cónica. El astrónomo alemán Johannes Kepler *(1570-1630)* descubrió que las órbitas de los planetas alrededor del sol son elipses que tienen al sol como uno de sus focos. Más tarde el célebre matemático y físico inglés Isaac Newton *(1642-1727)* demostró que la órbita de un cuerpo alrededor de una fuerza de tipo gravitatorio es siempre una curva cónica. Una manera sencilla de resumir la importancia de las curvas cónicas es mencionar los nombres de los principales personajes cuyo trabajo ha estado relacionado con las cónicas: Apolonio, Arquímedes, Kepler, Descartes y Newton.

Cualquier cuerpo lanzado al aire de forma oblicua u horizontal descrive un movimiento parabólico bajo la acción de la gravedad. Por ejemplo es el caso de una pelota que se desplaza rotando.



Fotografía estroboscópica de una pelota de tenis que se desplaza hacia la derecha, botando contra el suelo. Podemos distinguir dos arcos parabólicos. También vemos como el tamaño del arco se va haciendo más pequeño, la pelota cada vez bota a menor altura, debido a la pérdida de energía que experimenta en cada colisión.

También, es caso de los chorros y las gotas de agua que salen de los caños de las numerosas fuentes que podemos encontrar en las ciudades. El desplazamiento bajo la acción de la atracción gravitatoria de la Tierra permite obtener bonitos arcos parabólicos.



Ahora, detengámonos un poco más en la parábola. Nos la encontramos, sobre todo , en ciertos fenómenos interesantes de reflexión: del sonido, de ondas electromagnéticas y de la luz, como caso particular de onda electromagnética.

Pero aparece también en la Mecánica. Veamos algunos ejemplos:

La parábola es la curva que adopta un cable que tenga que soportar una carga, un peso, uniformemente distribuido . La catenaria es la curva que adopta un cable sostenido por sus extremos debido a su propio peso. Por otro lado, la curva que adopta el cable es una parábola cuando, despreciando su propio peso, es una carga uniformemente distribuida la que soporta. En el puente colgante, los cables, además de su propio peso, tienen que soportar el de la plataforma.

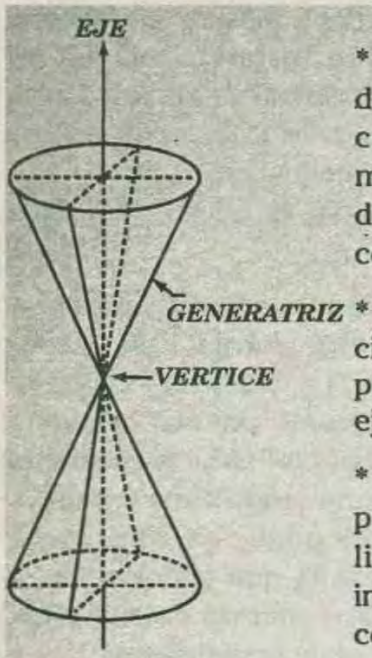
Por ello, la forma exacta que adoptan los cables es una «combinación» de la catenaria y la parábola. La diferencia entre ambas curvas es muy pequeña. De hecho, los ingenieros suponen en sus cálculos que es una parábola, dada la simplicidad de su ecuación frente a la ecuación de la catenaria.

Una de las propiedades más importantes de las formas parabólicas es que cualquier rayo que incida de forma paralela al eje de la parábola rebota en su superficie pasando por el foco. La parábola sirve para concentrar los rayos de luz en un punto, el foco, en el caso de la cocina solar, o las radiaciones electromagnéticas, en general, en las antenas parabólicas. Pero también sirve, como en el caso del faro de un coche, para conseguir que la luz que sale del foco se concentre en un haz más o menos cerrado.

CONSIDERACIONES PRELIMINARES SOBRE LAS CÓNICAS

La palabra cónica se deriva de la palabra cono , que es una figura geométrica que es generada por una recta que se mueve de tal manera que siempre pasa por una curva plana dada fija y por un punto fijo que no está contenido en el plano de la curva fija dada.

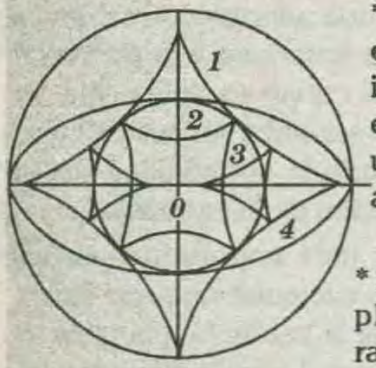
La recta móvil se llama generatriz y la curva fija dada se llama directriz y el punto fijo se llama vértice de la superficie cónica. El vértice divide a la superficie cónica en dos porciones cada una de las cuales se llama hoja o rama de la superficie cónica.



* Las cónicas , abreviación de secciones cónicas , son curvas que se obtienen mediante la intersección de un cono circular recto con un plano.

* Estas cónicas son circunferencias cuando el plano es perpendicular al eje del cono.

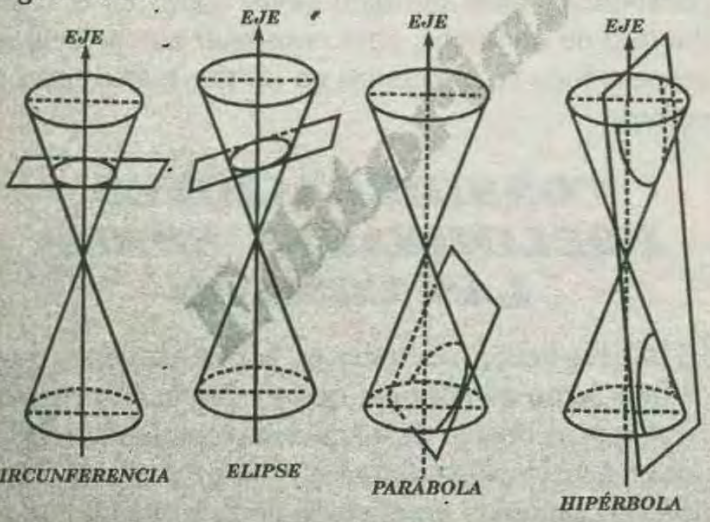
* Son elipses cuando el plano está inclinado ligeramente, pero solo intersecta a una rama del cono .



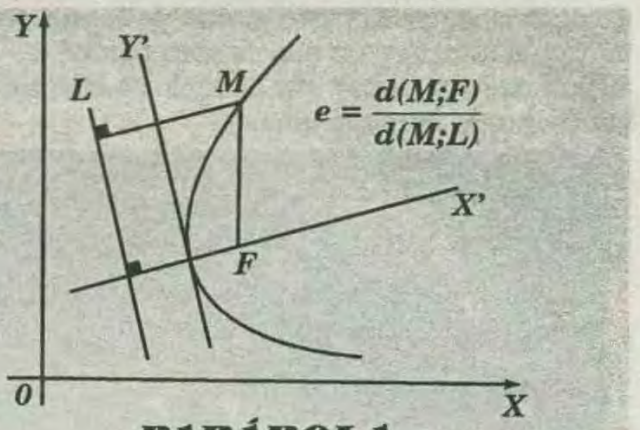
* Son parábolas cuando el plano aún más inclinado, de modo que es paralelo a solamente a una generatriz e intersecta a una rama del cono.

* Son hipérbolas cuando el plano intersecta ambas ramas del cono.

Si el plano contiene al vértice , la intersección del plano y el cono es un punto , una línea o un par de líneas que se cortan. Estas se llaman cónicas degeneradas.

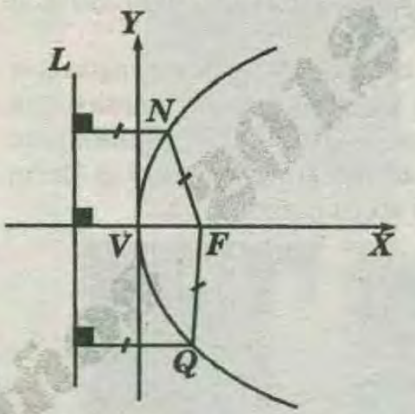


Todas las cónicas tienen una propiedad común que es satisfecha por sus puntos , y es el cociente de la distancia de estos puntos a un punto fijo *F* llamado foco entre la distancia de los puntos a una recta fija *L* llamada directriz es una constante «*e*» denominada ***excentricidad de la cónica***.



PARÁBOLA

Es el lugar geométrico de los puntos , donde cada punto equidista de una recta llamada directriz y un punto llamado foco



Por difinicion:

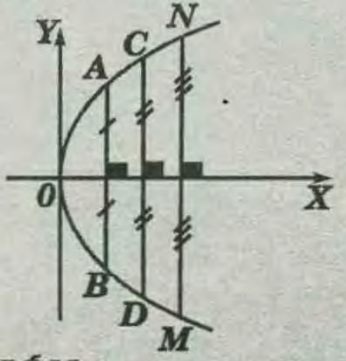
$$|\overline{NF}| = d(N;L)$$

$$|\overline{QF}| = d(Q;L)$$

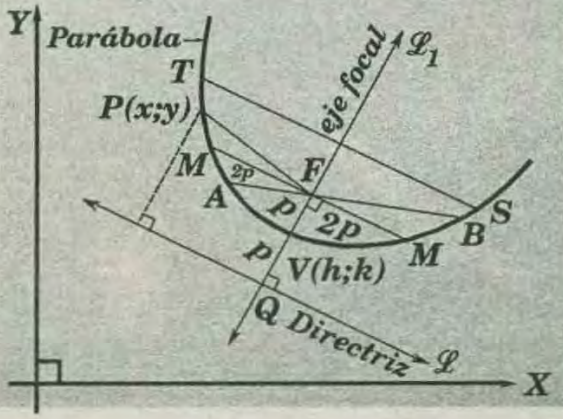
Excentridad:

$$e = \frac{|\overline{NF}|}{d(N;L)} = 1$$

Toda las cónicas son simétricas con respecto a sus ejes de simetría , es decir si se trata de una cuerda perpendicular al eje de simetría , la cuerda quedará dividida en dos partes iguales.



DEFINICIÓN :



* Dada la recta fija **L** , denominada directriz y un punto fijo **"F"**, denominado foco que no pertenece a dicha recta.

* Se define la parábola, como el lugar geométrico del conjunto de puntos $P(x;y)$, que equidista del foco **"F"** y la recta **L**.

SEGÚN LA DEFINICIÓN:

"F" es un punto fijo (Foco), **L** es una recta directriz y $P(x;y)$ es un punto cualquiera de coordenadas genéricas x e y de la parábola, luego:

$$\boxed{d(P;F) = d(P;\overleftrightarrow{\mathscr{L}})}$$

* Por definición de cónica:

$$\boxed{\frac{d(P;F)}{d(P;\overleftrightarrow{\mathscr{L}})} = e}$$

* Luego:

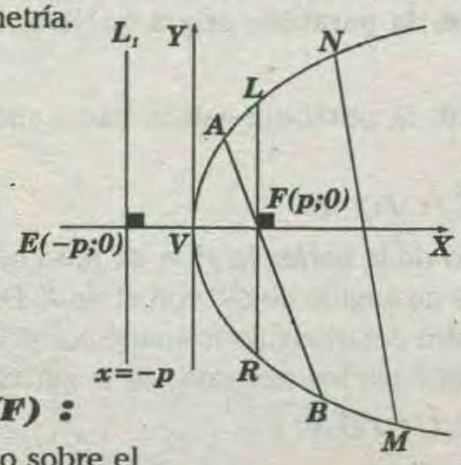
$e=1$, donde e es la excentricidad de la parábola.

ELEMENTOS ASOCIADOS A LA PARÁBOLA

* Foco : F
* Directriz : $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$
* Eje Focal : L_1
* Vértice : $V(h;k)$
* Lado recto : $\overline{MM'}(MM' = 4p)$
* Parámetro : $p(VF = VQ = p)$
* Cuerda Focal : $\overline{AB}$
* Cuerda : $\overline{TS}$

VÉRTICE (V):

Es el punto donde se intersecta la parábola con el eje de simetría.



FOCO (F) :

Es el punto sobre el eje de simetría a $|p|$ unidades del vértice.

EJE DE SIMETRÍA : Es una recta que pasa por el foco , por el vértice y es perpendicular a la directríz.

DIRECTRIZ (L_1) :Es una recta perpendicular al eje de simetría y que está a $|P|$ unidades del vértice opuesto al foco.

CUERDA : Es un segmento que une dos puntos de la cuerda $(\overline{AB};\overline{LR};\overline{NM})$

CUERDA FOCAL : Es una cuerda que pasa por el foco $(\overline{AB};\overline{LR})$.

LADO RECTO : Es una cuerda focal perpendicular al eje de simetría $(\overline{LR})$.

RADIO VECTOR : Es un segmento que une el foco con un punto de la parábola $(\overline{FA};\overline{FB};\overline{FL};\overline{FR})$

* La longitud del Lado Recto de cualquier parábola es $|4p|$.

ECUACIONES DE LA PARÁBOLA

Las diversas formas de la ecuación cartesiana de una parábola, depende de la ubicación del eje focal, con respecto a los ejes coordenados.

A) PRIMERA FORMA (CANÓNICA) :

Es cuando la parábola tiene su vértice en el origen y su eje de simetría en el eje X

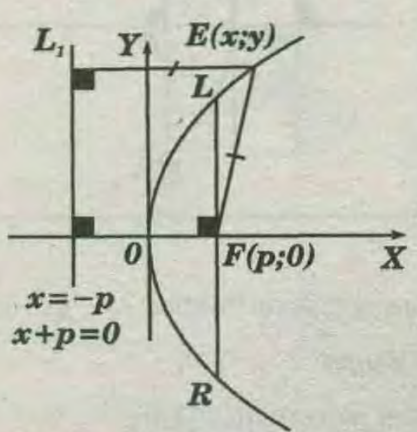
Por definición:

$$|EF| = d(E;L_1) \Rightarrow \sqrt{(x;p)^2 + y^2} = |x+p|$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x;p)^2 + y^2}\right)^2 .= \left(|x+p|\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$\Rightarrow y^2 - 2px = 2px \Rightarrow \boxed{y^2 = 4px}$$



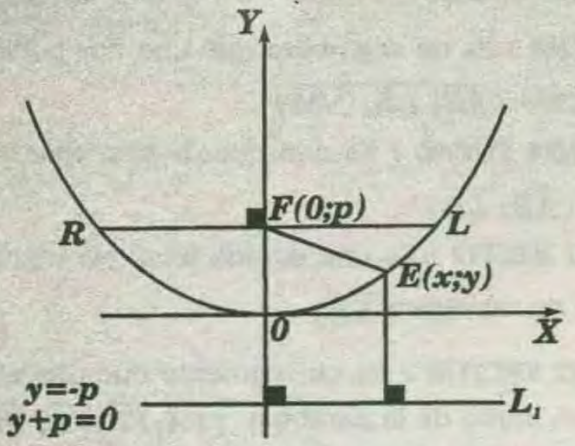
Longitud del lado recto = $|4p|$.

Si $p>0$, la parábola estará hacia la derecha de su vértice.

Si $p < 0$, la parábola estará hacia la izquierda de su vértice.

B) SEGUNDA FORMA (CANÓNICA) :

Es cuando la parábola tiene su vértice en el origen y su eje de simetría en el eje Y



* Por definición :

$|EF| = d(E;L_1)$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y-p)^2} = |x+p| \Rightarrow \left(\sqrt{(x^2+(y-p)^2}\right)^2 = (|x+p|)^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2py+p^2 = y^2+2py+p^2 \Rightarrow x^2-2py = 2py$$

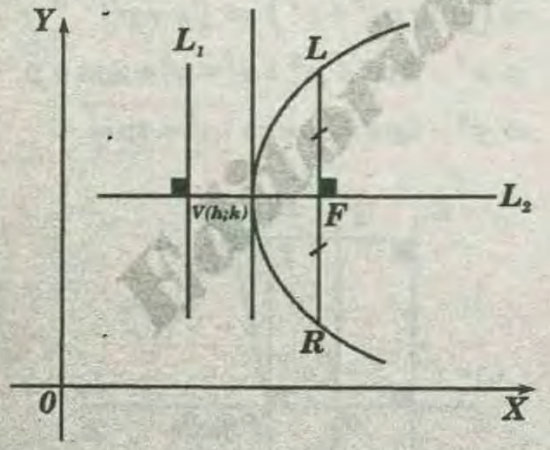
$$\Rightarrow \boxed{x^2 = 4py}$$

Longitud del lado recto $= |4p|$.

Si $p > 0$, la parábola estará hacia arriba de su vértice.
Si $p < 0$, la parábola estará hacia abajo de su vértice.

C) TERCERA FORMA (ORDINARIA):

Es cuando la parábola tiene su vértice en el punto $V(h;k)$ y su eje de simetría es paralelo al eje X.



* Parábola horizontal ordinaria: $(y-k)^2 = 4p(x+h)$
* Foco : $F(h+p;p)$
* Longitud del lado recto : $|4p|$.
* Ecuación de la directriz : $L_1: x = h - p$
* Ecuación del eje de simetría: $L_2: y = k$

Coordenadas de los extremos del lado recto :

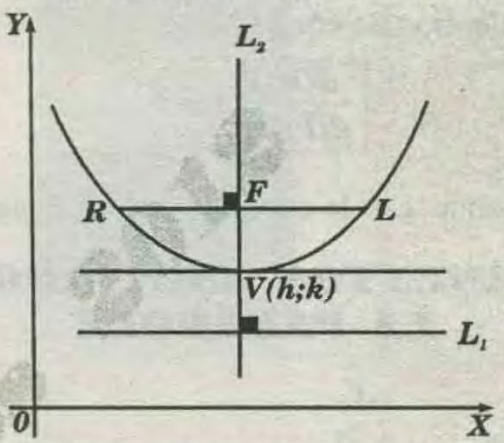
$$\begin{cases} L(h+p;\ k+|2p|) \\ R(h+p;\ k-|2p|) \end{cases}$$

♠ Si $p>0$, la parábola estará hacia la derecha de su vértice.

♠ Si $p < 0$, la parábola estará hacia la izquierda de su vértice.

D) CUARTA FORMA (ORDINARIA):

Es cuando la parábola tiene su vértice en el punto $V(h;k)$ y su eje de simetría es paralelo al eje Y



* Parábola vertical ordinaria: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
* Foco: $F(h;k+p)$
* Longitud del lado recto: $|4p|$.
* Ecuación de la directriz: $L_1: y = k - p$
* Ecuación del eje de simetría : $L_2: x = h$
* Coordenadas de los extremos del lado recto :

$$\begin{cases} L(h+|2p|;\ k+p) \\ R(h-|2p|;\ k+p) \end{cases}$$

♠ Si $p >0$, la parábola estará hacia arriba de su vértice.

♠ Si $p <0$, la parábola estará hacia abajo de su vértice.

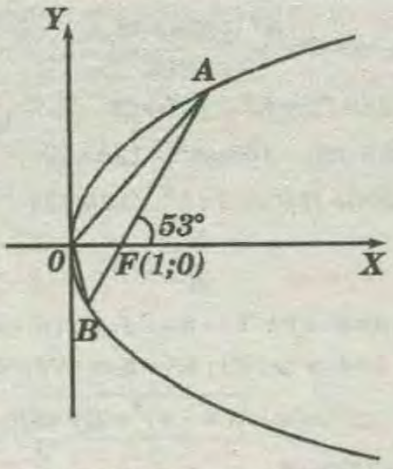
EJERCICIO 1:

Por el foco de la parábola $y^2 = 4x$ pasa una cuerda que forma un ángulo de $53°$ con el eje X. Determinar el baricentro del triángulo formado por el vértice de la parábola y por los extremos de la cuerda.

RESOLUCIÓN :

$$y^2 = 4x \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$y^2 = 4px \Rightarrow 4p = 4 \Rightarrow p = 1$$



Baricentro del $\Delta\, OAB$ necesitamos conocer las coordenadas de los vértices del triángulo , es decir nos faltaría conocer los puntos A y B . Observamos que A y B son puntos comunes a la cuerda $\overline{AB}$ y a la parábola.

* Datos de la cuerda $\overline{AB}$: $F(1;0) \wedge m = tg53° = \frac{4}{3}$

* Ecuación de $\overline{AB}$: $y-0=\frac{4}{3}(x-1) \Rightarrow 3y=4x-4$

Ecuación de $\overline{AB}$: $0=4x-3y-4$ .....(II)

A y B : $\overline{AB} \cap$ parábola: De (II):

$$\frac{3y+4}{4}=x \text{.....(III)}$$

* (III) en (I):

$$y^2=4\left(\frac{3y+4}{4}\right) \Rightarrow y^2=3y+4$$

$$y^2-3y-4=0$$

$$y \quad -4$$
$$y \quad 1$$

$\Rightarrow y=4 \Rightarrow$ En $(III): x=4 \Rightarrow A(4;4)$

$\Rightarrow y=-1 \Rightarrow$ En $(III): x=\frac{1}{4} \Rightarrow A(\frac{1}{4};-1)$

Baricentro del

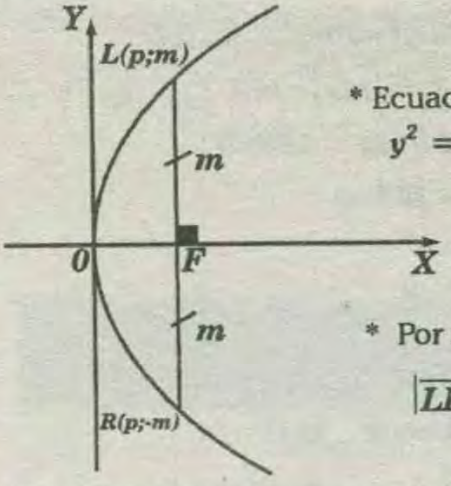
$$\Delta OAB:\ G(x';y'):\ x'=\frac{1}{3}\left(0+4+\frac{1}{4}\right)=\frac{17}{12}$$

$$y'=\frac{1}{3}(0+4-1)= \Rightarrow \boxed{G\left(\frac{17}{12};1\right)}$$

EJERCICIO 2 :

Demostrar que la longitud del lado recto de la parábola $y^2 = 4px$, es igual a $|4p|$

RESOLUCIÓN :



* Ecuación de la parábola:

$$y^2 = 4px$$

* Por simetría :

$$|\overrightarrow{LF}| = |\overrightarrow{RF}| = m$$

* De la figura: $L(P, m) \in$ parábola :

$$m^2 = 4pp \Rightarrow m^2 = 4p^2 \Rightarrow m=2p$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{LR}| = 2m = 2(2p) = 4p \quad \Rightarrow |\overrightarrow{LR}| = |4p|$$

EJERCICIO 3 :

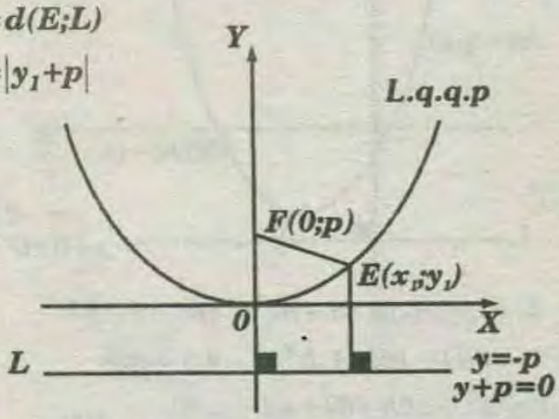
Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $E(x_1 ; y_1)$ de la parábola $x^2 = 4py$ es igual a $|y_1+p|$.

RESOLUCIÓN :

Aplicando la definición de parábola :

$|\overrightarrow{FE}| = d(E;L)$

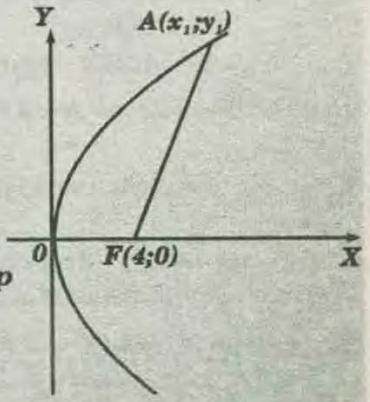
$|\overrightarrow{FE}| = |y_1+p|$



EJERCICIO 4 :

Determinar en la parábola $y^2=16x$, los puntos cuyos radios vectores son iguales a 13.

RESOLUCIÓN :



$y^2=16x$.....(I)

$\Rightarrow y^2=4px \Rightarrow 16 = 4p \Rightarrow 4=p$

* Por dato : $|\overrightarrow{AF}|=13$

$$\left(\sqrt{(x_1-4)^2+y_1^2}\right)^2=(13)^2$$

$\Rightarrow (x_1-4)^2+y_1^2=169$.....(I)

WWW.GRATIS2.COM

$A(x_1;y_1) \in$ parábola $y_1^2=16x_1$.....(II)

*(II) en (I): $(x_1-4)^2+16x_1=169$

$\Rightarrow x_1^2-8x+16+16x_1-169=0$

$x_1^2-8x_1-153=0$

$x_1 \quad 17$

$x_1 \quad -9$

$\Rightarrow x_1=-17$ No cumple

$\Rightarrow x_1=9 \Rightarrow$ En (II): $y_1=\pm 12$

$\Rightarrow A=(9;12) \wedge A'=(9;-12)$

EJERCICIO 5 :

Una parábola pasa por $N(-2;4)$ y $M(8;-1)$, su directriz es $y=-6$. Hallar la ecuación de la parábola si el vértice es diferente de N y M.

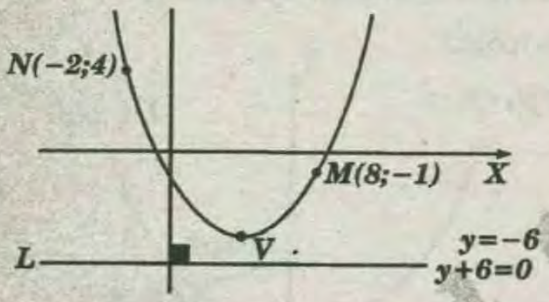
RESOLUCIÓN :

$(x-h)^2=4p(y-k)$.....(α)

$N(-2;4) \in$ parábola $(-2-h)^2=4p(4-k)$

$\Rightarrow 4+4h+h^2=16p-4pk$

$\Rightarrow \dfrac{h^2+4h+4-16p}{-4p}=k$.....(I)



$M(8;-1) \in$ parábola $(8-h)^2=4p(-1-k)$

$\Rightarrow 64-16h+h^2=-4p-4pk$

$\Rightarrow \dfrac{h^2-16h+64+4p}{-4p}=k$.....(II)

* (I)=(II):

$\dfrac{h^2-4h+4-16p}{-4p}=\dfrac{h^2-16h+64+4p}{-4p}$

$\Rightarrow h^2+4h+4-16p=h^2-16h+64+4p$

$\Rightarrow 20h=60+20p \Rightarrow h-3=p$.....(III)

* Por ser parábola vertical ordinaria: $\begin{cases} y=k-p \\ y=-6 \end{cases}$

$\Rightarrow k-p=-6 \Rightarrow h+6=p$.....(IV)

*(III)=(IV): $h-3=k+6 \Rightarrow h-9=k$.....(V)

*(III)=(I): $\dfrac{h^2+4h+4-16(h-3)}{-4(h-3)}=k$

$\Rightarrow \dfrac{h^2+4h+4-16(h-3)}{-4h-12}=k \Rightarrow \dfrac{h^2-12h+52}{-4h+12}=k$...(VI)

*(V)=(VI): $h-9=\dfrac{h^2-12h+52}{-4h+12}$

$\Rightarrow (h-9)(-4h+12)=h^2-12h+52$

$\Rightarrow -4h^2+12h+36h-108=h^2-12h+52$

$\Rightarrow 0=5h^2-60h+160 \Rightarrow 0=h^2-12h+32$

$h \quad -8$

$h \quad -4$

$\Rightarrow h-8=0 \Rightarrow h=8 \Rightarrow$ En (V): $k=-1 \Rightarrow V(8;-1)$ No cumple

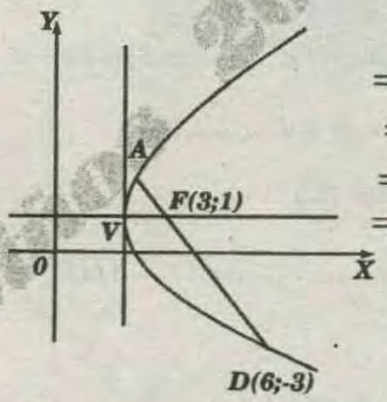
$\Rightarrow h-4=0 \Rightarrow h=4 \Rightarrow$ En (V): $k=-5 \Rightarrow V(4;-5)$ en (IV) $p=1$

$\Rightarrow$ En (α): $\boxed{(x-4)^2=4(y+5)}$

EJERCICIO 6 :

Hallar la ecuación y la longitud de la cuerda focal de la parábola $y^2-4x-2y+9=0$. La cuerda focal pasa por el punto $D(6;n)$ que pertenece a la parábola $(n<0)$.

RESOLUCIÓN :



$y^2-4x-2y+9=0$....(I)

$\Rightarrow (y-k)^2=-4p(x-k)$

$\Rightarrow y^2-2y+1=4x-9+1$

$\Rightarrow (y-1)^2=4x-8$

$\Rightarrow (y-1)^2=4(x-2)$

$\Rightarrow V(2;1) \wedge \underline{4p=4 \Rightarrow p=1}$

$D(6;n) \in$ parábola: $n^2-24-2n+9=0$

$n^2-2n-15=0$

$n \quad -5$

$n \quad 3$

$\Rightarrow n=5$ No cumple $n=-3 \Rightarrow D(6;-3)$

* Cuerda focal: $\overline{AD}$: Datos: $F(3;1) \wedge D(6;-3)$; $m=-\dfrac{4}{3}$

* Ecuación de: $\overline{AD}$: $y-1=-\dfrac{4}{3}(x-3)$

* Ecuación de $\overleftrightarrow{AD}$: $4x+3y-15=0$

A y D cuerda $\overleftrightarrow{AD} \cap$ parábola:

$y^2-4x-2y+9=0$.....(I)

$4x+3y-15=0$.....(II)

* De (II): $x=\dfrac{15-3y}{4}$.....(III)

*(III) en (I): $y^2-4\left(\dfrac{15-3y}{4}\right)-2y+9=0$

$\Rightarrow y^2-15+3y-2y+9=0 \Rightarrow y^2+y-6=0$

$y \quad 3$

$y \quad -2$

$\Rightarrow y=-3 \Rightarrow$ En $(III): x=6 \Rightarrow D(6;-3)$

$\Rightarrow y=2 \Rightarrow$ En $(III): x=\frac{9}{4} \Rightarrow A(\frac{9}{4};2)$

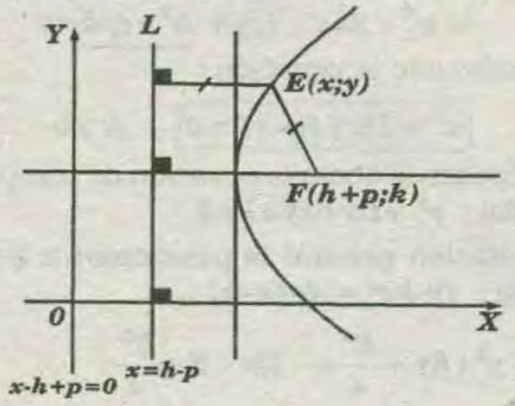
$$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{\left(\frac{9}{4}-6\right)^2+(2+3)^2}=\sqrt{\left(\frac{-15}{5}\right)^2+25}=\frac{25}{4}$$

EJERCICIO 7 :

Demostrar que la ecuación de una parábola horizontal ordinaria es : $(y-k)^2=4p(x-h)$

RESOLUCIÓN :

* Tomaremos sobre la parábola un punto cualquiera $E(x;y)$ y aplicaremos la definición de la parábola:



$|\overrightarrow{EF}|=d(E;L)$

$\Rightarrow \sqrt{[x-(h+p)]^2+(y-k)^2}=|x-h+p|$

$\Rightarrow \left(\sqrt{[x-(h+p)]^2+(y-k)^2}\right)^2=(|x-(h-p|))^2$

$x^2-2(h+p)x+(h+p)^2+y^2-2ky+k^2=x^2-2(h-p)x+(h-p)^2$

$\Rightarrow x^2-2hx-2px+h^2+2hp+p^2+y^2-2ky+k^2=x^2-2hx+2px+h^2-2ph+p^2$

$\Rightarrow -2px+2hp+y^2-2ky+k^2=2px-2ph \Rightarrow y^2-2ky+k^2=4px-4ph$

$\Rightarrow \boxed{(y-k)^2=4p(x-h)}$

EJERCICIO 8 :

Determinar la ecuación de una parábola que pasa por los puntos $A(4;-2)$ y $B(-2;4)$, si la recta $L: y=-4$ pasa por el vértice de esta parábola.

RESOLUCIÓN :

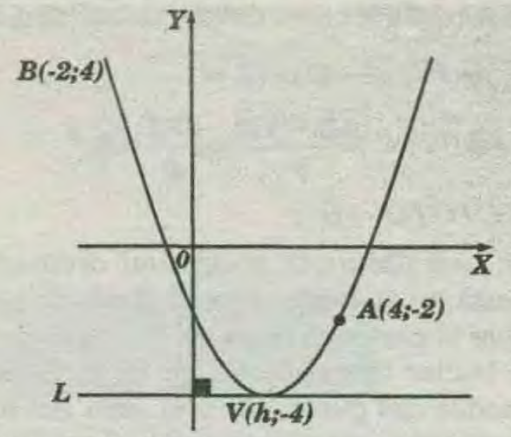
$(x-h)^2=4p(y-k)$ De la figura: $k=-4$

* Ecuación de la parábola: $A(4;-2) \in$ parábola :

$(x-h)^2=4p(y+4).....(I)$

$\Rightarrow (4-h)^2=4p(-2+4)$

$16-8h+h^2=8p \Rightarrow \frac{h^2-8h+16}{8}=p.....(I)$



$B(-2;4) \in$ parábola :

$(-2-h)^2=4p(4+4) \Rightarrow 4+4h+h^2=32p$

$\Rightarrow \frac{h^2+4h+4}{32}=p.....(II)$

* (I) = (II): $\frac{h^2-8h+16}{8}=\frac{h^2+4h+4}{32}$

$4(h^2-8h+16)=h^2+4h+4$

$\Rightarrow 4h^2-32h+64=h^2+4h+4$

$3h^2-36h+60=0 \Rightarrow h^2-12h+20=0$

$h \quad -10$

$h \quad -2$

$$\Rightarrow \begin{cases} * \ h-10=0 \Rightarrow h=10 \wedge k=-4 \Rightarrow V(10;-4) \Rightarrow p=\frac{9}{2} \\ * \ h-2=0 \Rightarrow h=2 \wedge k=-4 \Rightarrow V(2;-4) \Rightarrow p=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ En $(I): (x-10)^2=18(y+4)$

$\Rightarrow$ En $(I): (x-2)^2=2(y+4)$

EJERCICIO 9 :

Determinar la ecuación de la parábola que tiene su vértice en $V(-2;1)$ y cuyos extremos del lado recto son $(0;0)$ y $(-4;0)$. Hallar también el área del triángulo formado por el vértice de la parábola y los extremos del lado recto.

RESOLUCIÓN :

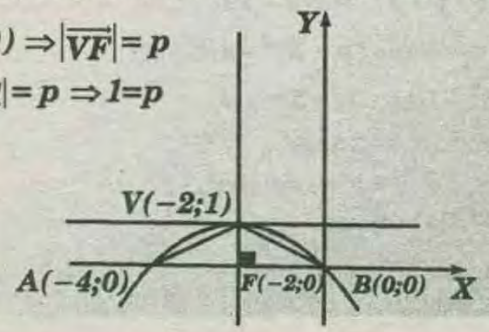
$(x-h)^2=4p(y-k)$

$\Rightarrow (x+2)^2=4p(y-1).....(\alpha)$

* El foco , es punto medio del lado recto $\overrightarrow{AB}$:

$F(-2;0) \Rightarrow |\overrightarrow{VF}|=p$

$\Rightarrow |0-1|=p \Rightarrow 1=p$



GRATIS2.com

* Como la parábola esta debajo del vértice : $p=-1$

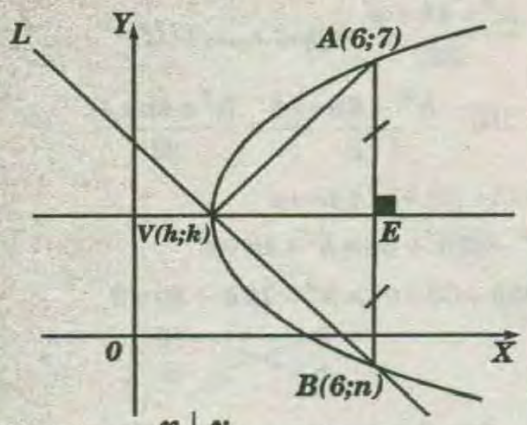
* En (α): $(x+2)^2=-4(y-1)$

$\Rightarrow$ Area $\Delta ABV=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{VF}}{2}=\dfrac{4\times1}{2}=2u^2$

EJERCICIO 10 :

Se tiene una parábola horizontal ordinaria cuyo vértice esta en la recta $L: x+y-5=0$. Se sabe que $p=1$ y que la parábola pasa por los puntos $A(6;7)$ y $B(6;n)$. Hallar la ecuación de la parábola y las coordenadas del punto B y el área del triángulo formado por el vértice de la parábola y los puntos A y B $(h>0)$.

RESOLUCIÓN :



$L: x+y-5=0$

x	y
0	5
5	0

$(y-k)^2=4p(x-h)\Rightarrow(y-k)^2=4(x-h)$ .....(α)

$V(h;k)\in L: h+k-5=0\Rightarrow h=5-k$ .....(I)

$A(6;7)\in$ parábola : $(7-k)^2=4(6-h)$

$49-14k+k^2=24-4h\Rightarrow k^2-14k+4h+25=0$ ...(II)

* (I) en (II): $k^2-14k+4(5-k)+25-=0$

$\Rightarrow k^2-14k+20-4k+25=0\Rightarrow k^2-18k+45=0$

$h\ -15$

$h\ -3$

$\Rightarrow k=15\Rightarrow$ En $(I): h=-10\Rightarrow V(-10;15)\Rightarrow$ no cumple

$k=3\Rightarrow$ En $(I): h=2\Rightarrow V(2;3)$

$\Rightarrow$ en $(\alpha): (y-3)^2=4(x-2)$

$B(6;n)\in$ parábola $(n-3)^2=4(6-2)$

$\Rightarrow (n-3)^2=16\Rightarrow n-3=\pm4$

$\Rightarrow n-3=4\Rightarrow n=7\Rightarrow$ no

$\wedge n-3=-4\Rightarrow n=-1\Rightarrow B(6;-1)$

$\Rightarrow$ Area $\Delta VAB=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{VE}}{2}=\dfrac{8\times4}{2}=16u^2$

ECUACIÓN GENERAL DE UNA PARÁBOLA

La ecuación general de una parábola resulta del desarrollo de la forma ordinaria.

* Forma ordinaria de una parábola de eje horizontal:

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$
$$\Rightarrow y^2-2ky+k^2=4px-4ph$$
$$\Rightarrow y^2-4px-2ky+\underline{k^2+4ph}=0$$

* Generalizando la ecuación :

$$\boxed{y^2+Dx+Ey+F=0};\ D\neq0$$

* Forma ordinaria de una parábola de eje vertical :

$$(x-h)^2=4p(y-k)$$
$$\Rightarrow x^2-2hx+h^2=4py-4pk$$
$$\Rightarrow x^2-2hx-4py+\underline{h^2+4pk}=0$$

* Generalizando la ecuación :

$$\boxed{x^2+Dx+Ey+F=0}\ ;\ E\neq0$$

1) Analizaremos ahora la ecuación de una parábóla horizontal ; $y^2+Dx+Ey+F=0$

Esta ecuación general la pasaremos a su forma ordinaria : $(y-k)^2=4p(x-h)$

$$\Rightarrow y^2+Ey+\frac{E^2}{4}=-Dx-F+\frac{E^2}{4}$$
$$\Rightarrow\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=-Dx+\frac{E^2-4F}{4}\ .....(I)$$
$$\Rightarrow\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=-D\left(x-\frac{E^2-4F}{4D}\right).....(II)$$

◆ Si $D\neq0$. la ecuación (II) representa a una parábola horizontal ordinaria.

◆ Si $D=0$, la ecuación (I) queda así :

$$\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{E^2-4F}{4}$$

◆ Si $\dfrac{E^2-4F}{4}>0$, representa dos rectas horizontales

◆ Si $\dfrac{E^2-4F}{4}=0$, representa dos rectas horizontales coincidentes .

◆ Si $\dfrac{E^2-4F}{4}<0$ representa un conjunto vacío.

2) Analizaremos también la ecuación general de la parábola vertical.

$$x^2+Dx+Ey+F=0$$

Esta ecuación general la pasaremos a su forma ordinaria: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$$\Rightarrow x^2+Dx+\frac{D^2}{4}=-Ey-F+\frac{D^2}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{D}{2}\right)^2=-Ey+\frac{D^2-4F}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{D}{2}\right)^2=-E\left(y-\frac{D^2-4F}{4E}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (II)$$

♣ Si $E \neq 0$, la ecuación *(II)* representa a una parábola horizontal ordinaria.

♣ Si $E=0$, la ecuación *(I)* queda así :

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2=\frac{D^2-4F}{4}$$

♣ Si $\frac{D^2-4F}{4}>0$ representa dos rectas verticales .

♣ Si $\frac{D^2-4F}{4}=0$ representa dos rectas horizontales coincidentes

♣ Si $\frac{D^2-4F}{4}<0$ representa un conjunto vacío.

EJERCICIO 11 :

¿Qué ecuaciones de las expuestas a continuación determinan una parábola , una recta horizontal , una recta vertical , dos rectas horizontales ,rectas verticales, el conjunto vacío? de ser una parábola determinar p y el vértice.

a) $x^2-4x+8y+28=0$ *b)* $y^2-8y+7=0$
c) $x^2-2x+5=0$ *d)* $x^2+4x-21=0$
e) $y^2+8y+16=0$ *f)* $x^2-6x+9=0$
g) $y^2+6y-2x+11=0$

RESOLUCIÓN :

a) $x^2-4x+8y+28=0 \Rightarrow x^2-4x+4=-8y-28+4$

$(x-2)^2=-8(y+3) \Rightarrow$ Es una parábola vertical ordinaria de vértice $V(2;-3)$ y $p=-2$

b) $y^2-8y+7=0 \Rightarrow y^2-8y+16=-7+16$

$\Rightarrow (y-4)^2=9 \Rightarrow y-4=\pm 3 \Rightarrow y-4=3 \Rightarrow y=7$

$y-4=-3 \Rightarrow y=1$. Son dos rectas horizontales.

c) $x^2-2x+5=0 \Rightarrow x^2-2x+1=-5+1 \Rightarrow (x-1)^2=-4$

Es el conjunto vacío o no existe figura geométrica .

d) $x^2+4x-21=0 \Rightarrow x^2+4x+4=21+4$

$\Rightarrow (x+2)^2=25 \Rightarrow x+2=\pm 5$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=5 \Rightarrow x=3 & \text{ó} \\ x+2=-5 \Rightarrow x=-7 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Son dos rectas verticales.

e) $y^2+8y+16=0 \Rightarrow y^2+8y+16=-16+16$

$\Rightarrow (y+4)^2=0 \Rightarrow y=-4$

$\Rightarrow$ Es una recta horizontal .

f) $x^2-6x+9=0 \Rightarrow x^2-6x+9=-9+9$

$\Rightarrow (x-3)^2=0 \Rightarrow x=3$

$\Rightarrow$ Es una recta vertical.

g) $y^2+6y-2x+11=0 \Rightarrow y^2+6y+9=2x-11+9$

$\Rightarrow (y+3)^2=2x-2 \Rightarrow (y+3)^2=2(x-1)$

$\Rightarrow$ Es una parábola horizontal ordinaria de vértice.

$$V(1;-3) \quad \text{y} \quad p=\frac{1}{2}$$

EJERCICIO 12 :

Determinar la ecuación de la parábola cuyo eje es horizontal y que pasa por los puntos $A(3;3)$, $B(6;5)$, $C(6;-3)$.

RESOLUCIÓN :

* Sea la parábola de eje de simetría horizontal:

$y^2+Dx+Ey+F=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$

$A(3;3) \in$ parábola : $9+3D+3E+F=0 \ldots\ldots\ldots (I)$

$B(6;5) \in$ parábola : $25+6D+5E+F=0 \ldots\ldots\ldots (II)$

$C(6;-3) \in$ parábola : $9+6D-3E+F=0 \ldots\ldots\ldots (III)$

* De *(I)*: $F=-3E-3D-9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV)$

* *(IV)* en *(II)*: $25+6D+5E-3E-3D-9=0$

$\Rightarrow 16+3D+2E=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (V)$

* *(IV)* en *(III)*: $9+6D-3E-3E-3D-9=0$

$\Rightarrow 3D-6E=0 \Rightarrow D-2E=0 \ldots\ldots\ldots (VI)$

* De *(V)* y *(VI)*:

$$+\begin{cases} 16+3D+2E=0 \\ D-2E=0 \end{cases}$$

$$16+4D=0 \Rightarrow D=-4$$

* En *(VI)*: $E=-2$

* En *(IV)*: $F=9$

$\Rightarrow$ En *(I)* : $y^2-4x-2y+9=0$

EJERCICIO 13 :

Determinar la ecuación de una recta L que pasa por el foco de la parábola $2x^2-8x-3y-4=0$, si la pendiente de L es igual a 4 veces la longitud de lado recto .

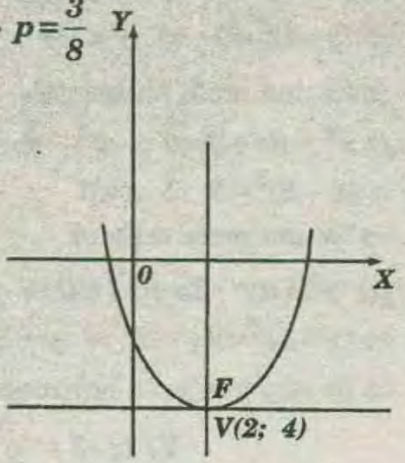
RESOLUCIÓN :

$2x^2-8x-3y-4=0 \Rightarrow (x-h)^2=4p(y-k)$

$\Rightarrow 2x^2-8x=3y+4 \Rightarrow 2(x^2-4x+4)=3y+4+8$

$\Rightarrow 2(x-2)^2=3(y+4) \Rightarrow (x-2)^2=\frac{3}{4}(y+4)$

$\Rightarrow V(2;-4) \wedge 4p=\frac{3}{2} \Rightarrow p=\frac{3}{8}$



Por ser una parábola vertical:

$$F(h;k+p)=F\left(2;\frac{-39}{8}\right) \wedge m=4\left(\frac{3}{2}\right)=6$$

* Ecuación de la recta L :

$$y+\frac{29}{8}=6(x-2) \Rightarrow 8y+29=48x-96$$

$$\Rightarrow \boxed{L: 0=48x-8y-125}$$

EJERCICIO 14 :

Se tiene la parábola $y^2-nx-10y+41=0$. Si se sabe que el foco es $F(5;5)$ y que n es un número positivo menor que 7; hallar el valor de n y la longitud del lado recto.

RESOLUCIÓN :

$y^2-nx-10y+41=0 \Rightarrow (y-k)^2=4p(x-h)$

$\Rightarrow y^2-10y+25=nx-41+25 \Rightarrow (y-5)^2=n(x-\frac{16}{n})$

$\Rightarrow V\left(\frac{16}{n};5\right) \Rightarrow 4p=n \Rightarrow p=\frac{n}{4}$ .....(I)

* Por ser una parábola horizontal :

$$F(h+p;k)=F\left(\frac{16}{n}+\frac{n}{4};5\right)$$

* Por dato del problema el foco es $F(5;5)$:

$$F(5;5)=F\left(\frac{16}{n}+\frac{n}{4};5\right)$$

* Igualando las abscisas :

$$5=\frac{16}{n}+\frac{n}{4} \Rightarrow 20n=64+n^2 \Rightarrow 0=n^2-20n+64$$

n — -16
n — -4

$\Rightarrow n=16$ no cumple

$n=4$

* En (I) : $p=1 \Rightarrow |\overrightarrow{LR}|=|4p|=4$

TANGENTES A UNA PARÁBOLA

Vamos a ver dos métodos para hallar las ecuaciones de las tangentes a una parábola .

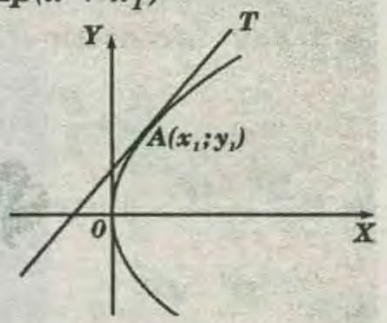
I) PRIMER MÉTODO :

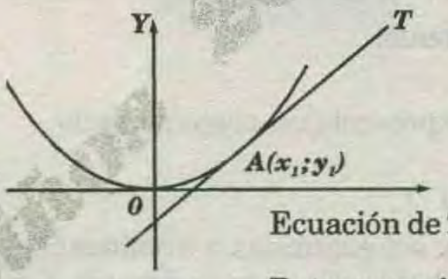
Cuando se conoce el *punto de tangencia* .

A) CASO 1: Usando fórmulas para cada tipo de ecuación :

Ecuación de $T=?$ Datos conocidos $\begin{cases} y^2=4px \\ A(x_1;y_1) \end{cases}$

Ecuación de T : $y_1y=2p(x+x_1)$





Ecuación de $T=?$

Datos conocidos $\begin{cases} x^2=4py \\ A(x_1;y_1) \end{cases}$

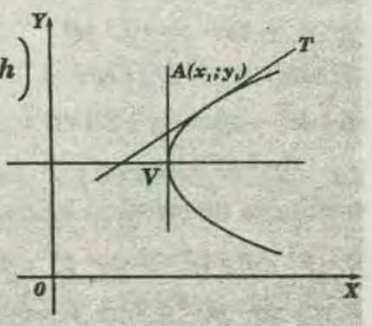
Ecuación de T : $x_1x=2p(y+y_1)$

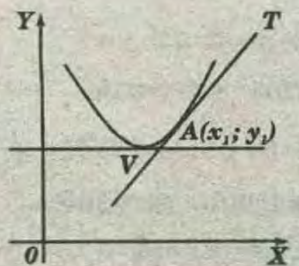
Ecuación de $T=?$

Datos conocidos $\begin{cases} (y-k)^2=4p(x-h) \\ A(x_1;y_1) \end{cases}$

Ecuación de T :

$(y_1-k)(y-k)=4p\left(\frac{x+x_1}{2}-h\right)$





Ecuación de $T=?$

Datos conocidos $\begin{cases} (y-h)^2=4p(x-k) \\ A(x_1;y_1) \end{cases}$

Ecuación de T :

$(x_1-h)(x-h)=4p\left(\frac{y+y_1}{2}-h\right)$

B) CASO 2 : Usando traslación de ejes :

http://www.rubinos.com 2012

Cuando se conoce el punto de tangencia y se desea hallar la tangente a una cónica se puede aplicar traslación de ejes al punto de tangencia y aplicar la propiedad estudiada en dicho capítulo .

PROCEDIMIENTO :

1) Al inicio tenemos los siguientes datos :

* Ecuación de la parábola .

* *Punto de tangencia* .

2) Aplicaremos una traslación de ejes al punto de tangencia.

3) Después de la traslación la ecuación quedará así:

$x'^2+Dx'+Ey'=0$ (Si es una parábola vertical)

$y'^2+Dx'+Ey'=0$ (Si es una parábola horizontal)

4) La tangente en el punto de tangencia será:

$$T: Dx'+Ey'=0$$

5) Como ya tenemos la ecuación de la tangente T pero en el sistema final , deberemos pasar está ecuación al sistema inicial .

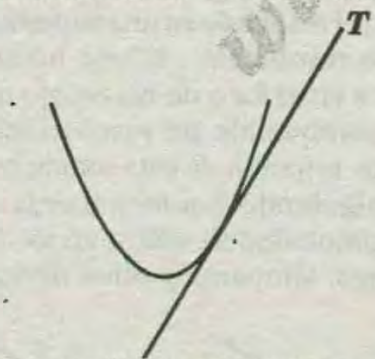
II) SEGUNDO MÉTODO :

MÉTODO DEL DISCRIMINANTE :

Este método del discriminante sirve para resolver problemas sobre tangentes a cualquier cónica ; es un método general.

PROCEDIMIENTO :

1) Ecuación de la parábola
Ecuación de la tangente
} A una de las ecuaciones le debe faltar *1* dato



2) Intersectar : parábola $\cap$ tangente.

3) A la ecuación que resulta de la intersección, le aplicaremos el discriminante $b^2-4ac=0$.

4) Al aplicar el discriminante , hallaremos el valor que deseamos obtener.

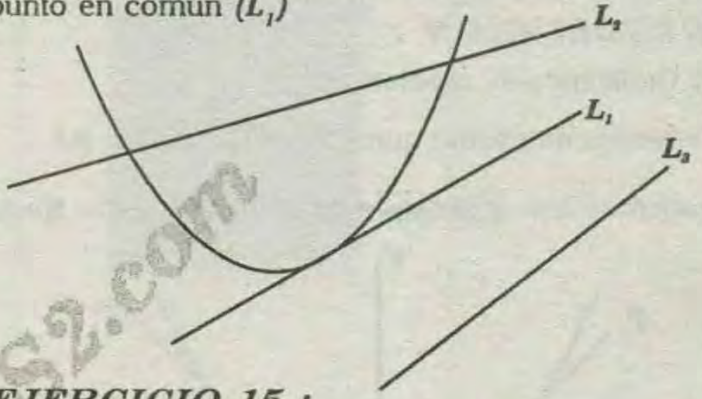
La parábola es una ecuación de segundo grado,como lo es $ax^2+bx+c=0$.

Si quisiéramos determinar la naturaleza de las soluciones de esta ecuación , deberemos analizar el discriminante :

◆ Si el $b^2-4ac>0$: significa que hay dos soluciones reales y diferentes. Con relación al gráfico , la parábola y la recta tienen dos puntos en común (L_2).

◆ Si el $b^2-4ac<0$: significa que hay dos soluciones imaginarias , es decir no hay solución real . Con relación al gráfico , la parábola y la recta no tiene un punto común (L_3).

◆ Si el $b^2-4ac=0$: significa que hay dos soluciones reales pero iguales , es decir una solución. Con relación al gráfico , la parábola y la recta tienen un punto en común (L_1)



EJERCICIO 15 :

Hallar la ecuación de la tangente y la normal a la parábola $x^2-6x+5y-11=0$ en el punto $E(-2;-1)$.

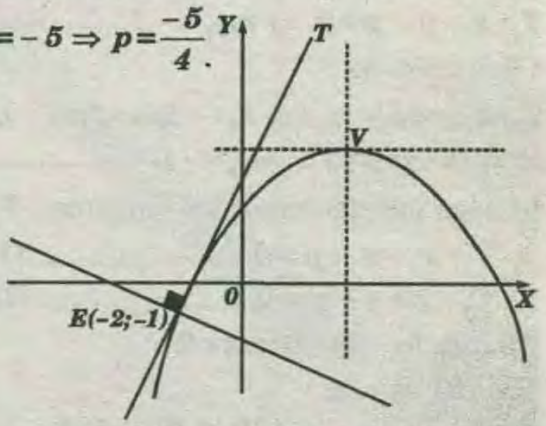
RESOLUCIÓN :

$x^2-6x+5y-11=0 \Rightarrow (x-h)^2=4p(y-k)$

$\Rightarrow x^2-6x+9=-5y+11+9 \Rightarrow (x-3)^2=-5y+20$

$\Rightarrow (x-3)^2=-5(y-4)$

$V(3;4) \Rightarrow 4p=-5 \Rightarrow p=\frac{-5}{4}$.



* Como se conoce la ecuación de la parábola y su punto de tangencia ; para hallar la ecuación de la tangente podemos usar la fórmula :

$$T: (x_1-h)(x-h)=4p\left(\frac{y+y_1}{2}-k\right)$$

$$\Rightarrow T: (-2-3)(x-3)=4\left(\frac{-5}{4}\right)\left(\frac{y-1}{2}-4\right)$$

$$\Rightarrow T: 2x-y+3=0 \Rightarrow m_T=2$$

www.GRATIS2.com

Datos de la normal : $E(-2;-1) \wedge m=-\frac{1}{2}$

Ecuación de la normal : $y+1=-\frac{1}{2}(x+2)$

$$N: x+2y+4=0$$

EJERCICIO 16 :

Se tiene la parábola $x^2=4py$ donde $p>0$.

I) Demostrar que las tangentes a la parábola en los extremos del lado recto se cortan en la intersección del eje de simetría con la directriz .

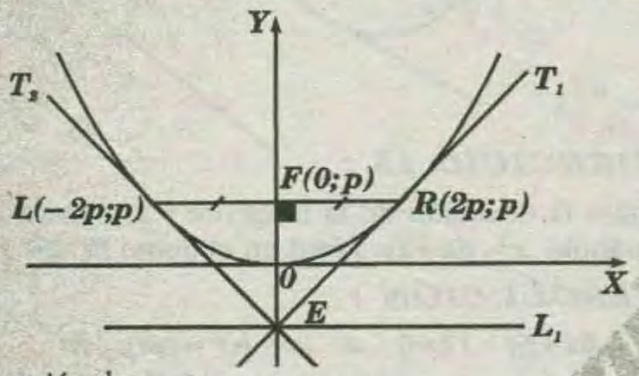
II) Demostrar también que las tangentes son perpendiculares entre sí .

RESOLUCIÓN :

I) Graficando el problema :

Debemos demostrar que : $T_1 \cap T_2 : E(0;-p)$

Sabemos que $|\overline{LR}|=|\overline{4p}|=4p \Rightarrow R(2p;p)$ y $L(-2p;p)$



* Ecuación de :

$T_1: x_1x=2p(y+y_1) \wedge T_1: 2px=2p(y+p) \Rightarrow x=y+p$

$T_1: x-y-p=0 \Rightarrow m_{T_1}=-1 \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$

* Ecuación dé :

$T_2: x_1x=2p(y+y_1) \Rightarrow T_2: -2px=2p(y-p) \Rightarrow -x=y+p$

$\Rightarrow T_2: x+y+p=1 \Rightarrow m_{T_2}=-1 \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$

* Luego intersectamos las tangentes $T_1 \cap T_2$:

$T_1: x-y-p=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$

$T_2: x+y+p=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$

* Sumando : $2x=0 \Rightarrow x=0$

* En *(II)* : $y=-p$

$$\Rightarrow T_1 \cap T_2 : E(0;-p)$$

II) Debemos demostrar que $T_1 \perp T_2$, es decir :

$m_{T_1} m_{T_2}=-1$ de $(\alpha): m_{T_1}=1$

de $(\beta): m_{T_2}=-1 \Rightarrow m_{T_1}m_{T_2}=-1$

NOTA :

En cualquier tipo de parábola sea canónica u ordinaria siempre se cumple que :

* Las tangentes en los extremos del lado recto se cortan en el punto de intersección del eje de simetría con directriz.

* Los tangentes en los extremos del lado recto son perpendiculares entre sí .

EJERCICIO 17 :

Hallar la distancia entre el foco de la parábola $x^2=y$ el punto de intersección de las rectas tangentes trazadas a dicha parábola en los extremos del lado recto .

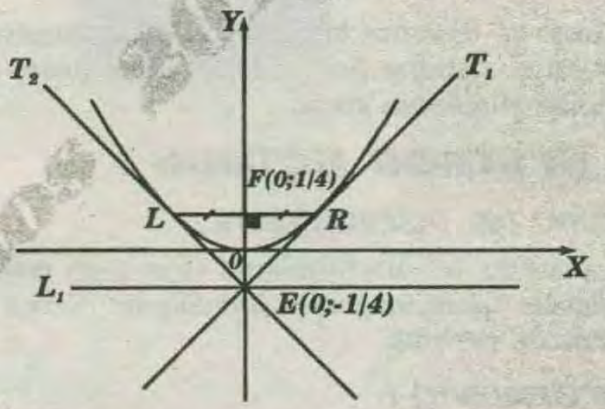
RESOLUCIÓN :

$$x^2=y \Rightarrow x^2=4py \Rightarrow 4p=1 \Rightarrow p=\frac{1}{4}$$

Vamos aplicar la ***demostración anterior*** para resolver este problema :

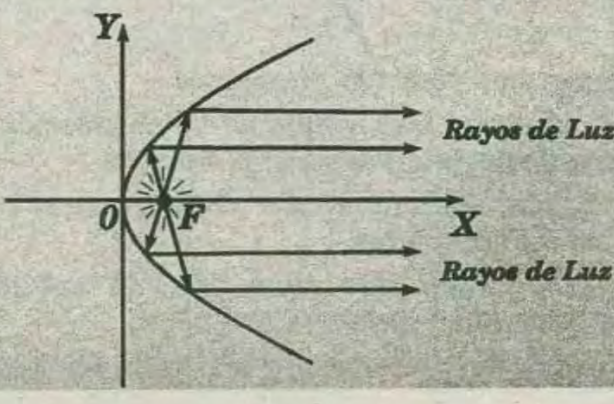
Por la demostración del ejemplo anterior:

$$E=(0;\frac{-1}{4}) \Rightarrow |\overline{EF}|=\left|\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)\right|=\frac{1}{2}$$



PROPIEDAD DE REFLEXIÓN DE LA PARÁBOLA

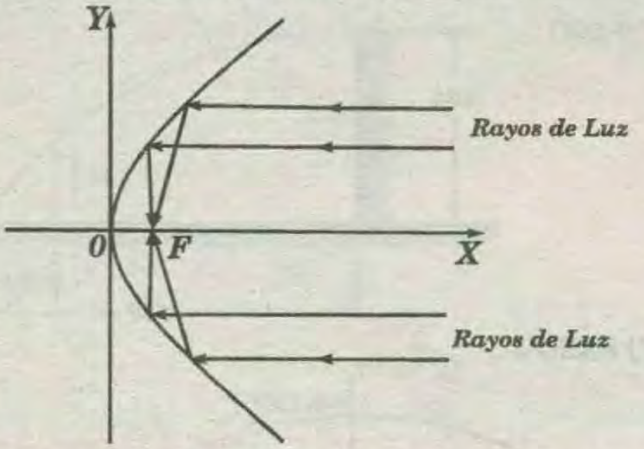
Vamos a suponer que se gira una parábola sobre su eje de simetría , el resultado es una superficie llamada paraboloide de revolución . Si una fuente emisora de luz se coloca en el foco de un espejo que tiene la forma de un paraboloide de revolución, todos los rayos de luz que emanen de esta fuente se reflejarán en el espejo siguiendo líneas paralelas al eje de simetría. Esta propiedad se utiliza en los reflectores, faros buscadores, lámparas y otros dispositivos.



De manera contraria , supongamos que de una fuente lejana emanan rayos de luz u otras señales prácticamente paralelos entre sí.

Si estos rayos de luz u otras señales tocan la superficie de un espejo parabólico , cuyo eje de simetría es paralelo a ellos , se reflejarán hacia un solo punto que es el foco de la parábola .

Esta propiedad se utiliza en los espejos usados en telescopios, lupas, antenas parabólicas, algunos dispositivos solares y otros dispositivos .



OTRAS APLICACIONES DE LA PARÁBOLA

*I)*El cable de un puente colgante adquiere la forma de una parábola. Ver figura *A* .

*II)*Todo cuerpo que es lanzado con una velocidad determinada formando con la horizontal un ángulo diferente de *90°* , describe un movimiento parabólico. Ver figura *B* . Si un avión vuela horizontalmente y abandona un proyectil (bomba); la trayectoria que describe la bomba con respecto a un punto fijo en la tierra , es una parábola . Ver figura *C* .

FIGURA A : PUENTE COLGANTE

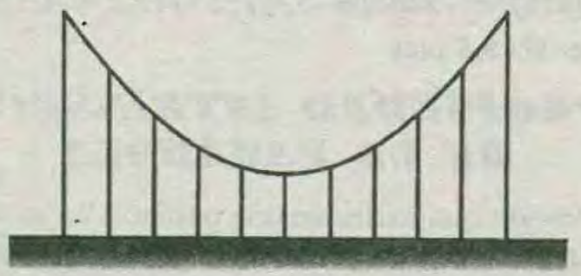


FIGURA B : TRAYECTORIA DE UN PROYECTIL

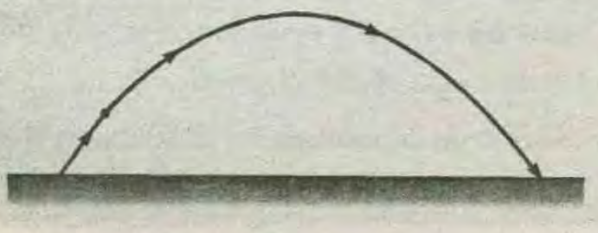
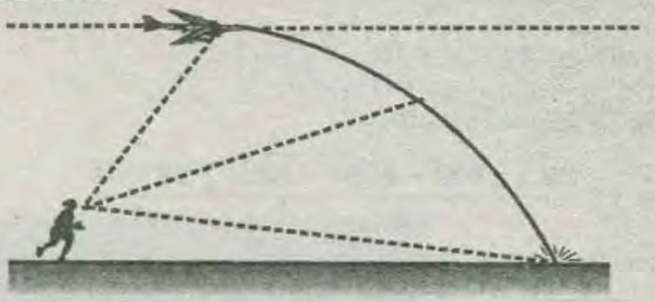


FIGURA C : TRAYECTORIA DE UNA BOMBA



♦ Los cometas periódicos tienen como trayectorias elipses muy alargados . aquellos cometas cuya vuelta al sistema solar no está demostrada al parecer describen una parábola o una hipérbola .

♦ si un recipiente cilíndrico , parcialmente lleno de líquido , gira alrededor de su eje , todo el líquidp adquiere un movimiento de rotación y en su interior se forma una superficie ahuecada cuyo perfil es una parábola .

EJERCICIO 18 :

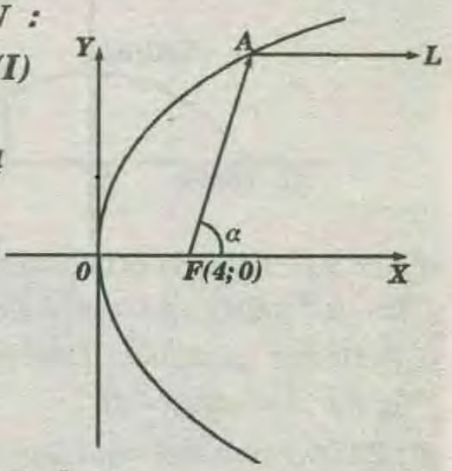
Se tiene un reflector parabólico de ecuación $y^2=16x$; desde el foco sale un rayo de luz que forma un ángulo agudo α con el eje de simetría , tal que $tg\alpha=\frac{12}{5}$. El rayo de luz al llegar a la parábola se ha reflejado. Hallar la ecuación de la recta L que contiene al rayo reflejado (el rayo de luz toca a la parábola en un punto que está en el primer cuadrante) .

RESOLUCIÓN :

$y^2=16x$.....(I)

$\Rightarrow y^2=4px$

$\Rightarrow 4p=16 \Rightarrow p=4$



Por propiedad: La recta L es paralela al eje de simetría X .

* Por lo tanto L es una recta horizontal.

Datos de $\overrightarrow{FA}$: $F(4;0); m=tag\,\alpha=\frac{12}{5}$

* Ecuación de $\overrightarrow{FA}$: $y-0=\frac{12}{5}(x-4)$

* Ecuación de $\overrightarrow{FA}$: $0=12x-5y-48$.....(II)

* De la figura : A : $L \cap$ parábola : De *(II)* :

$$\frac{5y+48}{12}=x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

* *(III)* en *(I)*: $y^2=16\left(\frac{5y+48}{12}\right)$

$3y^2-20y-192=0$

$\Rightarrow y=\frac{20\pm\sqrt{400-4(3)(-192)}}{6}=\frac{20\pm 52}{6}$

$y=12 \Rightarrow x=9$ $A(9;12)$ $\Rightarrow$ Ecuación de L: $\boxed{y=12}$

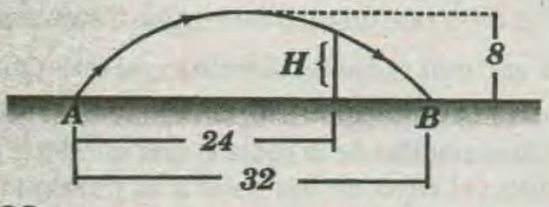
$\Rightarrow \boxed{y=\frac{-16}{3}} \Rightarrow$ No cumple.

EJERCICIO 19 :

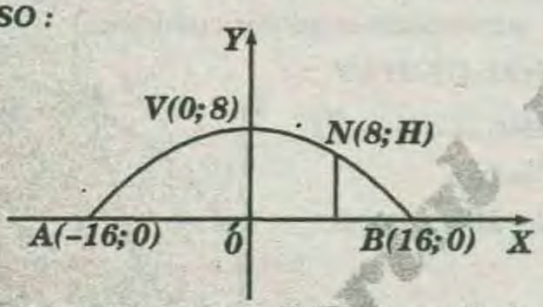
Se lanza una piedra , siendo su trayectoria una parábola. La máxima altura que alcanza la piedra es *8* metros y cae *32* metros más allá del punto en que se lanzó la piedra . Hallar la altura que alcanzó la piedra *24* metros más alla del punto en que fué lanzada.

RESOLUCIÓN :

1°) PASO : H=?



2°) PASO :



3°) PASO : Hallar la ecuación de la parábola :

$(x-h)^2=4p(y-k) \Rightarrow x^2=4p(y-8) \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$

$B(16;0) \in$ parábola : $(16)^2=4p(0-8) \Rightarrow -8=p$

* En *(I)*: $x^2=-32(y-8)$

4°) PASO : Hallar el valor buscado:

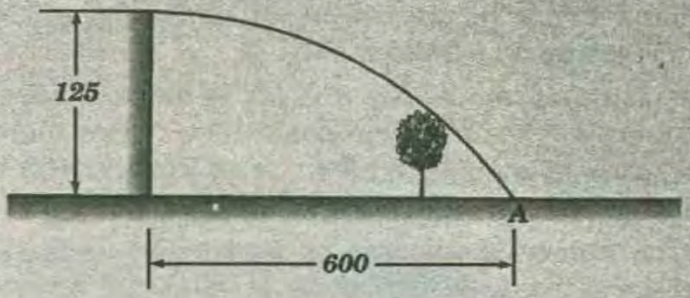
$N(8;H) \in$ párabola: $(8)^2=-32(H-8)$

$\Rightarrow 64=-32(H-8) \Rightarrow -2=H-8 \Rightarrow H=6$ metros

EJERCICIO 20 :

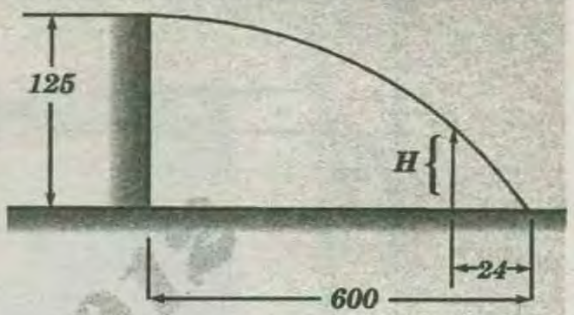
Una piedra se lanza en forma horizontal desde lo alto de una torre de *125* pies de altura . La piedra cae al piso en el punto *A* como indica la figura . En su trayectoria la piedra roza la copa de un árbol que está a *24* pies del punto en el cual la piedra toca el piso .

Hallar la altura del árbol .

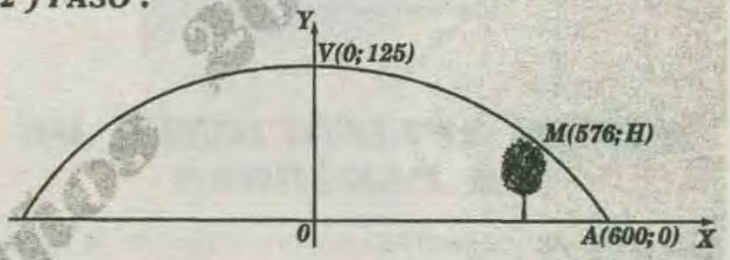


RESOLUCIÓN :

1°)PASO :



2°) PASO :



3°) PASO : Hallar la ecuación de la parábola :

$(x-h)^2=4p(y-k) \Rightarrow x^2=4p(y-125) \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$

$A(600;0) \in$ parábola : $(600)^2=4p(0-125) \Rightarrow -720=p$

* En *(I)*: $x^2=-2800(y-125)$

4°) PASO : Hallar el valor buscado :

$M(576;H) \in$ parábola

$\Rightarrow (576)^2=-2880(H-125) \Rightarrow -115{,}2=H-125$

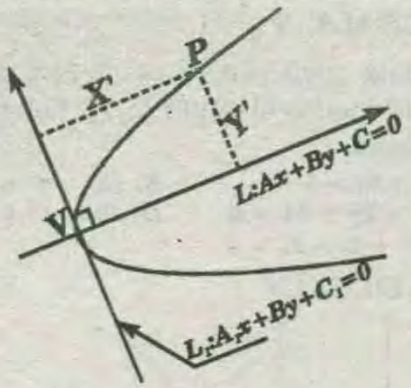
$\Rightarrow H=9{,}8$ pies

PROPIEDAD INTRINSECA DE LA PARÁBOLA

La relación que existe en una parábola en su forma canónica entre la distancia que separa un punto de la parábola de su eje y la distancia que separa el mismo de la tangente en el vértice es el mismo, suponiendo que la ecuación del eje de la parábola es : $Ax+By+C=0$ y ecuación de la recta tangente en el vértice es : $A_1x+B_1y+C_1=0$

La ecuación de la parábola en su forma canónica es

$$y'^2=4p\,x' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$



$$x' = d(P; L_1) = \frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

$$y' = d(P; L) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

.....(II)

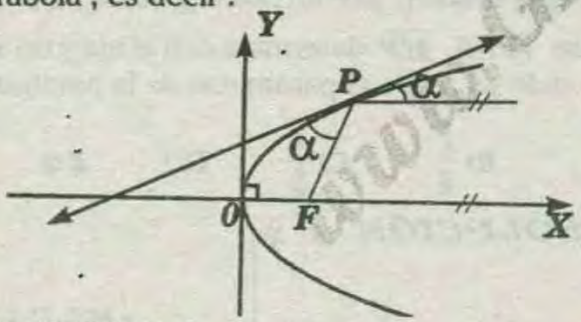
* Reemplazando *(II)* en *(I)* se tiene :

$$\left(\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2 = 4p\left(\frac{A_1x + B_1y + C}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}\right)$$

TEOREMAS SOBRE PARÁBOLAS

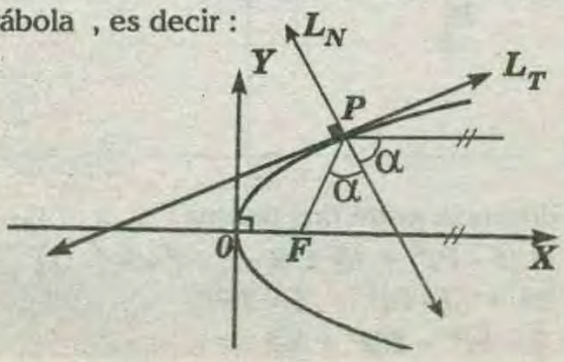
TEOREMA 1 :

La tangente a la parábola forma ángulos iguales con el radio focal del punto de contacto y la recta que pasa por el punto de contacto y es paralela al eje de la parábola , es decir :



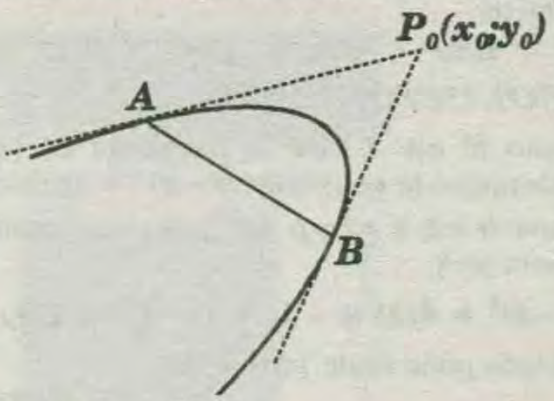
TEOREMA 2 :

La normal a la parábola en cualquier punto P de la parábola forma ángulos iguales con el radio focal $\overline{PF}$ y la recta que pasa por P y es paralela al eje de la parábola , es decir :



CUERDA DE CONTACTOS DE LA PARÁBOLA

Sea $P_0=(x_0;y_0)$ un punto exterior a una parábola . Si desde P_0 se trazan tangentes a la parábola ; se llama *CUERDA DE CONTACTOS* relativa al punto P_0 al segmento de recta que une los puntos A y B, es decir :



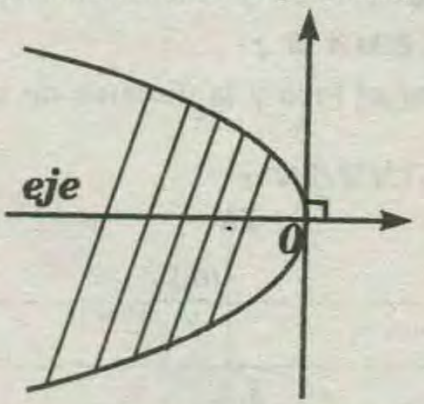
Sea la parábola : $y^2 = 4px$

$\Rightarrow$ la ecuación de la cuerda de contacto será L :

$$L: \boxed{y_0y - 2px = 2px_0} \quad \vee \quad \boxed{y_0y = 2p(x_0 + x)}$$

DIÁMETRO DE UNA PARÁBOLA

Dada una familia de cuerdas paralelas de una parábola , se llama *diámetro* de la parábola relativa a la familia de cuerdas , al lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas paralelas, es decir :



Si la familia de cuerdas paralelas tiene pendiente m, se verifica :

Ecuación de la parábola	Ecuación del diámetro
$y^2 = 4px$	$y = \frac{2p}{m}; m \neq 0$
$x^2 = 4py$	$x = 2pm$
$(y-k)^2 = 4p(x-k)$	$y - k = \frac{2p}{m}; m \neq 0$
$(x-k)^2 = 4p(y-k)$	$x - h = 2pm$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Hallar la ecuación de una parábola con vértice *(2;1)* y foco *(2;4)*. Determinar también la longitud de su lado recto.

A)12 B)20 C)32 D)4 E)52

RESOLUCIÓN :

* Como el eje *Y* de la parábola es vertical, consideramos la ecuación: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

* Donde: $h=2$, $k=1$ y $p=3$, luego la ecuación de la parábola será:

$$(x-2)^2 = 4(3)\,(y-1) \rightarrow (x-2)^2 = 12(y-1)$$

* Y el lado recto mide $|4p| = 12$

RPTA : "A"

OBSERVACIÓN :

Si se desarrollan los cuadrados en las formas canónicas $(y-R)^2 = 4p(x-h)$ ó $(x-h)^2 = 4p(x-h)$ se obtienen las ecuaciones de la parábola en su forma general :

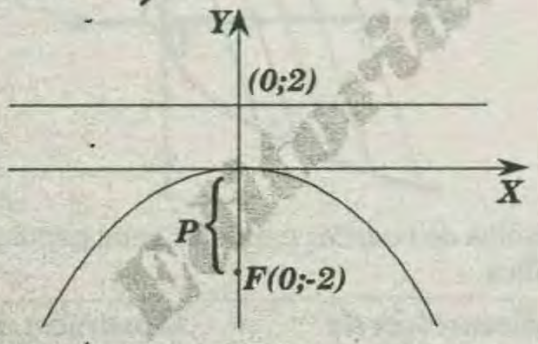
$$y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{ó} \quad x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Las cuales se pueden reducir inversamente a una forma canónica, por el método de completar cuadrados.

PROBLEMA 2 :

Determinar el foco y la directriz de la parábola $x^2+8y=0$

RESOLUCIÓN :



* Despejamos y damos la forma adecuada: $x^2 = -8y$; tiene vértice en $(0;0)$ es de eje focal vertical.

* Entonces $4p = -8$; $p = -2$ como $p < 0$, se curva hacia abajo.

* El foco está en $(0;p)$, es decir : $(0:-2)$

* La ecuación de la directriz es de forma $y = p$

* constante y como pasa por $(0;2)$ es $y=2$ ó $y-2=0$

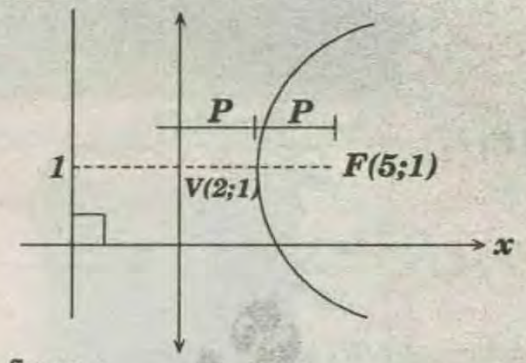
* Foco: $(0;-2)$; directriz: $y-2=0$

PROBLEMA 3 :

Una parábola cuyo vértice es *(2;1)* y su foco tiene como coordenadas el punto *(5;1)*, halle la ecuación de la parábola.

A) $12x + y^2 + 2y = 0$ *B) $12x - y^2 + 2y - 25 = 0$*
C) $12x + x^2 + 2y + 61 = 0$ *D) $12x - y^2 + 2y - 61 = 0$*
E) $12x + 2y^2 + 2y - 61 = 0$

RESOLUCIÓN :



* De la figura :

$$P = 5 - 2 \rightarrow P = 3$$

* Luego:

$$P : (y-1)^2 = 4(3)(x-2)$$
$$\Rightarrow P : y^2 - 2y + 1 = 12x - 24$$
$$\Rightarrow P : 12x - y^2 + 2y - 25 = 0$$

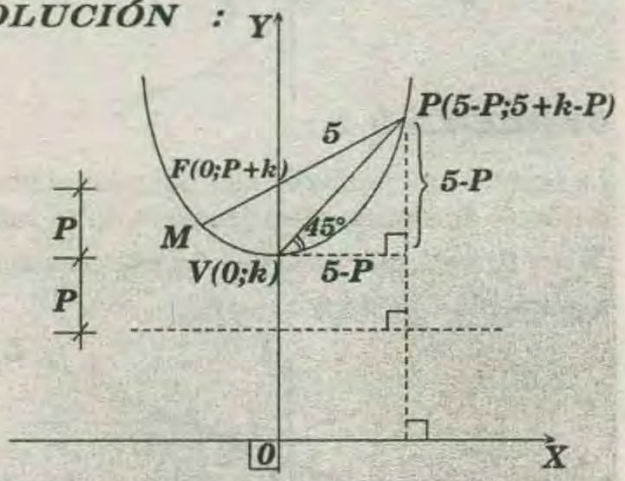
RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

C es una parábola con vértice *V*, eje focal contenido en el eje *Y*, $\overline{MP}$ es una cuerda que pasa por el foco *F*, el eje y divide a $\overline{MP}$ en dos segmentos $\overline{FP}$ y $\overline{MF}$ donde $FP=5$, $\overline{MF}$ determina con el eje y un ángulo que mide *45*, halle el parámetro de la parábola.

A) $\frac{1}{2}$ *B) $\frac{1}{4}$* *C) $\frac{1}{3}$* *D)1* *E)2*

RESOLUCIÓN :



* Por distancia entre dos puntos :

$$5^2 = (5-P)^2 + (5+k-P-P-k)^2$$
$$\Rightarrow 25 = (5-P)^2 + (5-2P)^2$$
$$\Rightarrow 0 = 5P^2 - 30P + 25$$

$\Rightarrow 0 = P^2 - 6P + 5 \rightarrow (P-5)(P-1) = 0$

$P \quad -5$

$P \quad -1$

* De donde : $P = 1$

RPTA : "D"

PROBLEMA 5 :

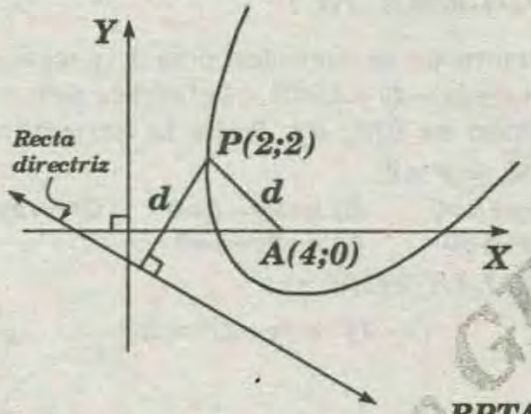
El foco de una parábola es el punto $A(4;0)$ y un punto sobre la parábola es el punto $P(2;2)$; entonces la distancia del punto P a la recta directriz de la parábola es :

A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

* Por definición de parábola , es el lugar geométrico de todos los puntos que están a igual distancia de un punto fijo , llamado foco , y de una recta , llamada recta directriz.

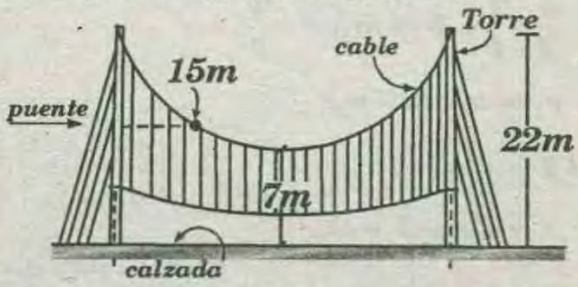
$\Rightarrow d = \sqrt{(2-4)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$



RPTA :"C"

PROBLEMA 6 :

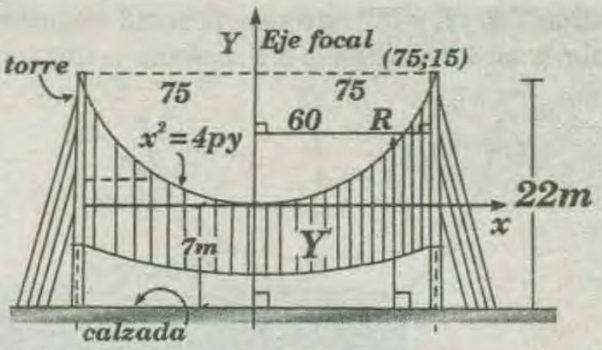
El cable del puente colgante de la figura tiene la forma de una parábola. Las dos torres se encuentran a una distancia de $150\ m$ entre sí y los puntos de soporte del cable en las torres se hallan a $22m$ sobre la calzada; además, el punto más bajo del cable se encuentra a $7\ m$ sobre dicha calzada. Halle , sobre la calzada, la distancia de un punto del cable que se encuentra a $15\ m$ de una de las torres.



A) 16 m B) 15,6 m C) 16,6 m D) 14 m E) 14,6 m

RESOLUCIÓN :

* Se pide y' :



* Ubicando convenientemente los ejes coordenados, X e Y se tiene que $R = (60 ; y'-7)$

* Luego la ecuación de la parábola con vértice en el origen : $x^2 = 4py$

* El extremo superior de la torre $(75 ; 15)$ pertenece a la parábola , entonces debe vérificar la ecuación

$$(75)^2 = 4p(15) \Rightarrow 4p = 375$$

* El punto R pertenece a la parábola , entonces $(60)^2 = 375(y' - 7)$. Operando $y' = 16{,}6m$

RPTA :"C"

PROBLEMA 7 :

La recta $\overleftrightarrow{\mathcal{L}} : 2x - y - 13 = 0$ contiene a los puntos $P=(13;b)$ y $Q=(4;a)$, los cuales pertenecen a una parábola cuya vértice es $V=(h;1)$; su eje focal es paralelo al eje x y su parámetro es p . Calcule $a+b+h+p$.

A) 10 B) 9 C) 16 D) 13 E) 12

RESOLUCIÓN :

$$\mathcal{L} : 2x - y\ 12 = 0$$

$P = (B;b)$ y $Q = (4;a) \in \mathcal{L}$

$\rightarrow b = 13$ y $a = -5$ } al evaluar

$\rightarrow P = (13;13)$ y $Q = (4;-5)$

$P = (y-k)^2 = 4p(x-h)$

$V = (h;k) = (h;1)$

$P : (y-1)^2 = 4p(x-h)$

$P : Q \in P \rightarrow$ evaluemos

* Para $P : (13-1)^2 = 4p(13-h)$ .....(I)

* Para $Q : (-5-1)^2 = 4p(4-h)$ .....(II)

* (I) ÷ (II): $\dfrac{12^2}{6^2} = \dfrac{(13-h)}{(4-h)} \rightarrow h = 1$

* En (I): $p = 3$

* Piden: $a + b + h + p = -5 + 13 + 1 + 3$

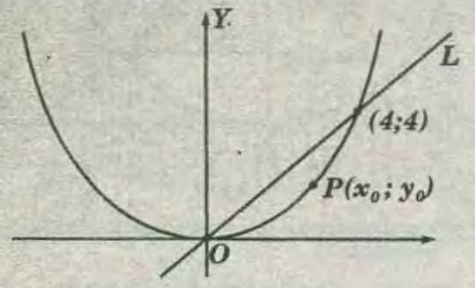
$\rightarrow a + b + h + p = 12$

RPTA : "E"

PROBLEMA 8 :

Sea $P(x_0 ; y_0)$ un punto de la parábola con vértice en el origen , con eje focal sobre el eje Y, que pasa por

el punto *(4; 4)*, sabiendo que la recta tangente a la parábola en *P* es paralela a *L*. calcule la distancia de *P* a *L*.



RESOLUCIÓN :

* Sea la ecuación de la parábola , con vértice en el origen y eje focal paralelo al eje *y* : $y=kx^2$? como pasa por el punto *(4;4)*: $(4)=k(4)^2$

* Entonces $K=1/4$, de donde la ecuación de la parábola es $y=\frac{1}{4}x^2$.

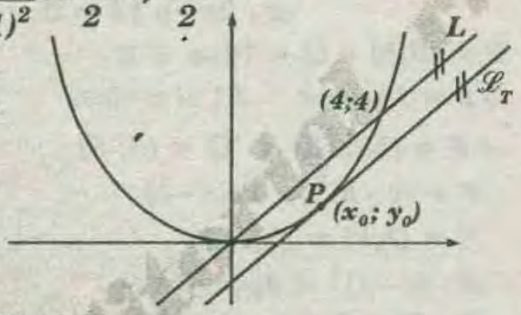
* Sabemos que la pendiente de una recta tangente a la parábola $y=\frac{1}{4}x^2$ es $\frac{x_0}{2}$ en el punto $(x_0; y_0)$ siendo $(x_0; y_0)$ el punto de tangencia.

* Como $\overline{\mathscr{L}_T} \parallel L$

$$M_{(\mathscr{L}_T)}=\frac{x_0}{2}=1 \rightarrow x_0=2 \ \text{y} \ \ y_0=1 \rightarrow P=(2;1)$$

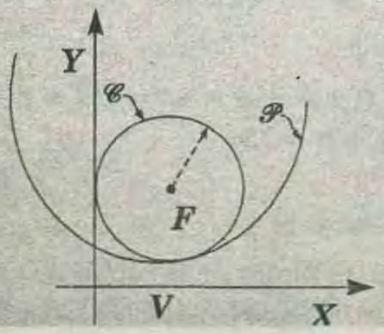
* Ahora calculamos la distancia de *P* a *L* para lo cual tenemos la ecuación de *L*: $x-y=0$

$$d=\frac{|(2)-(1)|}{\sqrt{(1)^2-(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$$



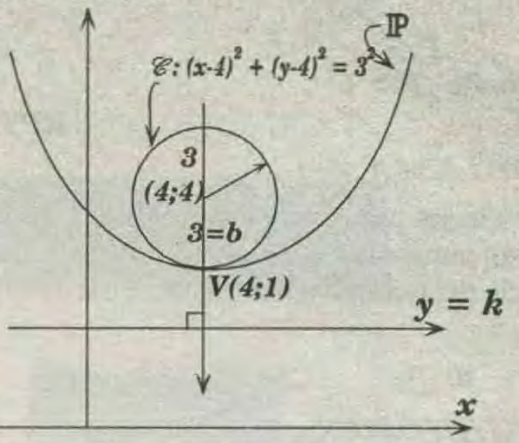
PROBLEMA 9 :

Del grófica, *V* es punto de tangencia $\overline{\mathscr{C}}: x^2+y^2-8x-8y+23=0$ y la directriz de la parábola $\mathscr{P}$ es $\overline{\mathscr{L}}: y=k, (k=cte)$. Halle la ecuación de $\mathscr{P}$ cuyo vértice es *V* y *F* es foco de $\mathscr{P}$.



A) $x^2+8x-12y-28=0$ B) $x^2-8x-12)y-28=0$
C) $x^2-8x-16y+32=0$ D) $x^2-8x-12y+28=0$

RESOLUCIÓN :



* Piden :

$$\mathbb{P}: (x-h)^2=4p(y-k)$$
$$(x-4)^2=12\,(y-1)$$
$$\rightarrow \mathbb{P}: x^2-8x-12y+28=0$$

RPTA : "D"

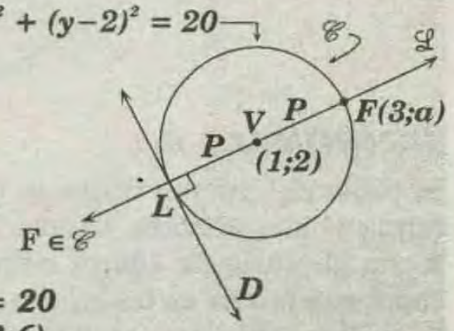
PROBLEMA 10 :

Si el centro de la circunferencia $\mathscr{C}$ y representada por $x^2+y^2-2x-4y-15=0$, es el vértice de la parábola cuyo foco es *F(3; a)*. Halle la ecuación de su directriz, si $F \in \mathscr{C}$.

A) $2x+y+3=0$ B) $x+2y-3=0$ C) $x+2y+3=0$
D) $2x-y+5=0$ E) $x+2y+5=0$

RESOLUCIÓN :

$$(x-1)^2+(y-2)^2=20$$



$$(3-1)^2+(a-2)^2=20$$
$$\rightarrow a=6 \rightarrow F=(3;6)$$

$$V=\frac{L+F}{2} \rightarrow L=(-1;-2)=(x_1; y_1)$$

$$m_L=\frac{a-2}{3-1}=2 \rightarrow m_D=-\frac{1}{2}$$

$$D: y-y_1=m_D\,(x-x_1)$$

$$y+2=-\frac{1}{2}(x+1)$$

$$\rightarrow D: x+2y+5=0$$

RPTA : "E"

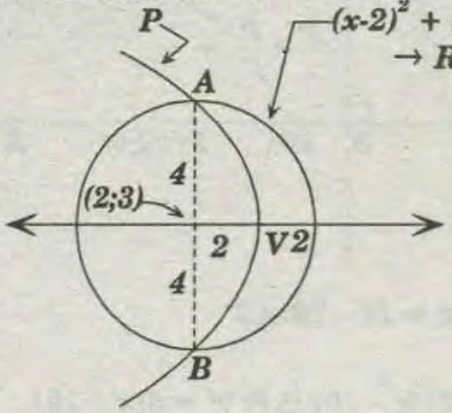
PROBLEMA 11 :

Dada la circunferencia $\mathscr{C}\ x^2+y^2-4x-6y-3=0$ cuyo diámetro $\overline{AB}$ es el lado recto de una parábola *P* que

se extiende hacia el semieje negativo $\vec{x}$, halle la ecuación de P.

A) $y^2-6y-8x-23=0$ B) $y^2-6y+8x-23=0$
C) $y^2-6x-8x+23=0$ D) $y^2+6y-8x+23=0$

RESOLUCIÓN :



$LR=|4p|=8 \rightarrow p=-2$

$\rightarrow V=(4;3)=(h;k)$

$\mathbb{P}: (y-k)^2=4p(x-h)$

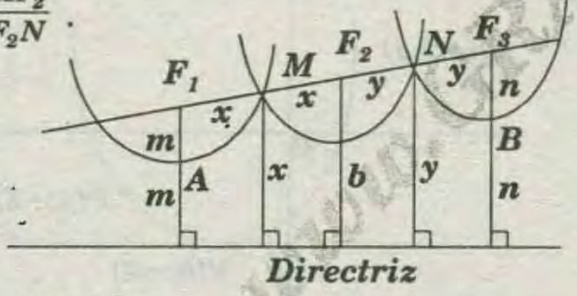
$(y-3)^2=4(-2)(x-4) \Rightarrow \mathbb{P}: y^2-6y+8x-23=0$

RPTA : "B"

PROBLEMA 12 :

Se muestran tres parábolas de focos F_1, F_2 y F_3 Si $\frac{F_1A}{F_3B}=a$ y $\vec{L}$ es la directriz de las tres parábolas, calcule $\frac{MF_2}{F_2N}$.

A) a
B) a^2
C) $\sqrt{a}$
D) $a/2$
E) $\sqrt{a}/2$



RESOLUCIÓN :

* Por base media :

$2x=2m+b$ .....(I)

$2y=2n+b$ .....(II)

* Propiedad :

$$b=\frac{xy+xy}{x+y} \rightarrow b=\frac{2xy}{x+y}$$

* En (I) y (II) :

$$\left.\begin{matrix} x^2=m(x+y) \\ y^2=n(x+y) \end{matrix}\right\}(\div) \Rightarrow \frac{x^2}{y^2}=\frac{m}{n}=a \Rightarrow \frac{x}{y}=\sqrt{a}$$

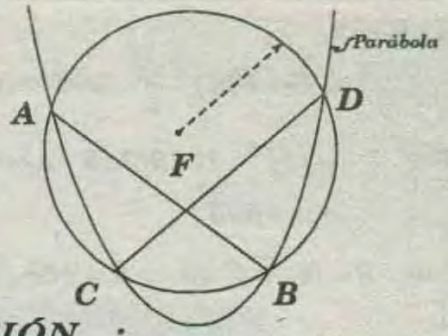
RPTA : "C"

PROBLEMA 13 :

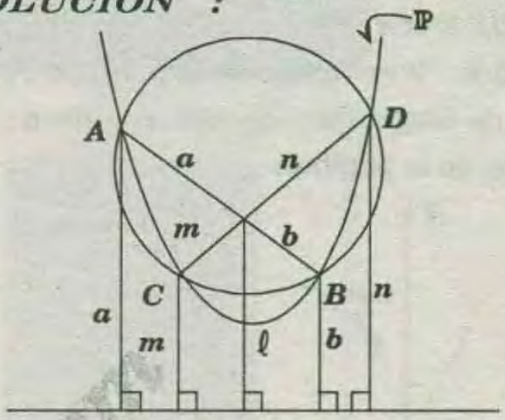
Según el gráfico se ilustra una parábola de foco (F).

Calcule $\frac{AB}{CD}$

A) 1
B) $\sqrt{2}$
C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{2}/2$
E) $\sqrt{3}/3$



RESOLUCIÓN :



* Piden : $\frac{AB}{CD}=\frac{a+b}{m+n}=?$

* Teorema de cuerdas : $ab=mn$

* Propiedad :

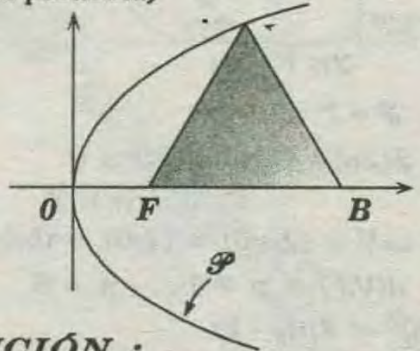
$$\ell=\frac{ab+ab}{a+b}=\frac{mn+mn}{m+n} \Rightarrow \frac{\cancel{ab}}{a+b}=\frac{\cancel{mn}}{m+n} \Rightarrow \frac{a+b}{m+n}=1$$

RPTA : "A"

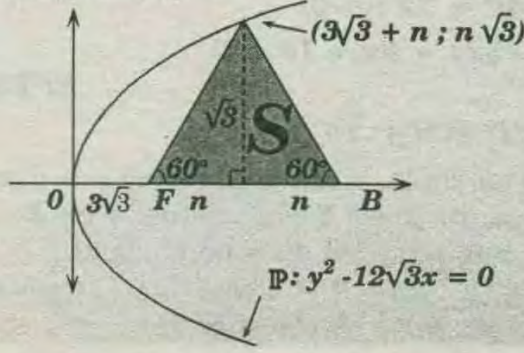
PROBLEMA 15 :

Según el gráfico : $\mathscr{P}$ es una parábola de ecuación : $y^2-12\sqrt{3}x=0$ y foco F. Calcule el área de la región triángular equilátera FAB .(O es punto de tangencia y vértice de la parábola)

A) $120\sqrt{3}$
B) $124\sqrt{3}$
C) $86\sqrt{3}$
D) $96\sqrt{3}$
E) $108\sqrt{3}$



RESOLUCIÓN :



Piden : $S = ?$

$$\Rightarrow S = (2n)\frac{2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = n\sqrt{3}$$

* $A \in \mathcal{P}$: $(n\sqrt{3})^2 - 12\sqrt{3}(3\sqrt{3}+n) = 0$

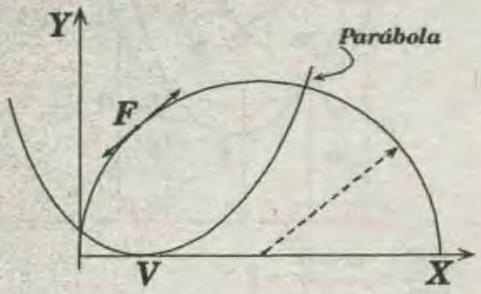
$\rightarrow n = 6\sqrt{3}$

* Ahora : $S = (6\sqrt{3})^2\sqrt{3} \Rightarrow S = 108\sqrt{3}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 16 :

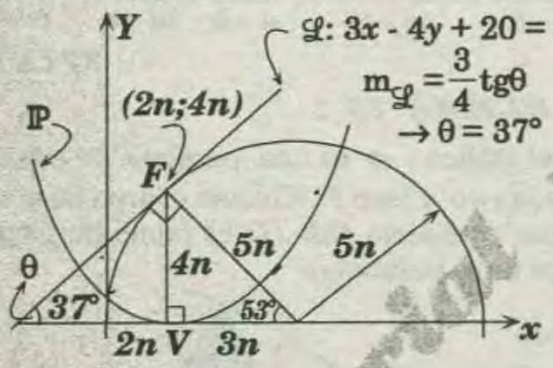
Del gráfico , *V es* vértice de la parábola ,V y *F* son puntos de tangencia , $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}: 3x - 4y + 20 = 0$. Halle la ecuación de la parábola .



A) $x^2 - 32y - 8x + 16 = 0$ B) $x^2 - 32y + 8x + 16 = 0$

C) $x^2 - 32y - 10x - 20 = 0$ D) $x^2 - 32y + 10x + 20 = 0$

RESOLUCIÓN :



* Piden : $\mathcal{P} = ?$

$F \in \mathcal{P}$: $3(2n) - 4(4n) + 20 = 0$

$\Rightarrow n = 2$

$\Rightarrow V = (2n;0) = (4;0) = (h;k)$

$d(V;F) = p = 4n \rightarrow p = 8$

$\mathcal{P}: (x-h)^2 = 4p(y-k)$

$(x-4)^2 = 32\,(y-0)$

$\mathcal{P}: x^2 - 32y - 8x + 16 = 0$

RPTA : "A"

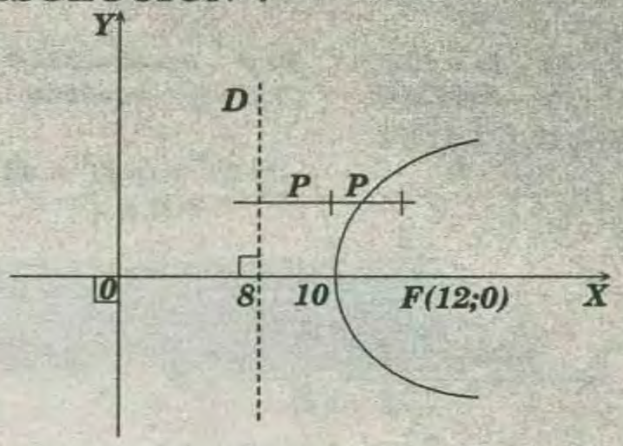
PROBLEMA 17 :

En una parábola , su foco es *(12;0)* y la directriz es perpendicular al eje *X* e interceptar al eje *X* en *(8;0)*, entonces la ecuación de la parábola es :

A) $y^2 = 18(x-10)$ B) $y^2 = 20(x-10)$ C) $y^2 = 6(x+10)$

D) $y^2 = 8(x-10)$ E) $y^2 = 10(x-8)$

RESOLUCIÓN :



* De la figura : $p = 12 - 10 = 2$

* Luego:

$P: y^2 = 4(2)(x-10) \Rightarrow P: y^2 = 8(x-10)$

RPTA : "D"

PROBLEMA 18 :

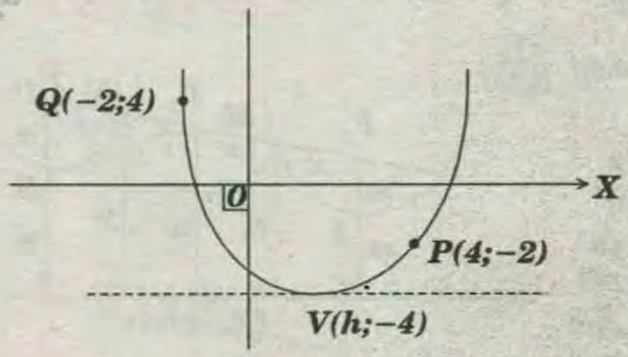
Una parábola pasa por $P(4;-2)$ y $Q(-2;4)$. La recta tangente $L: y+4=0$ pasa por el vértice *V* de la parábola.

Halle la ecuación de la parábola.

A) $(x+2)^2 = 2(y+4)$ B) $(x-2)^2 = 2(y+4)$

C) $(x+2)^2 = 2(y-4)$ D) $(x-10)^2 = 18(y+4)$

RESOLUCIÓN :



$Q \in p \Rightarrow (-2-h)^2 = 4p(4+4)$ .....(I)

$P \in p \Rightarrow (4-h)^2 = 4p(-2+4)$ .....(II)

* (I) ÷ (II):

$$\frac{(2+h)^2}{(4-h)^2} = \frac{8}{2} \Rightarrow (2+h)^2 = 4(4-h)^2$$

* Efectuando : $h = 2$

* Luego : $(4-2)^2 = 4p(-2+4)$

* De donde : $p = \frac{1}{2}$

* Ahora : $P: (x-2)^2 = 2(y+4)$

RPTA : "B"

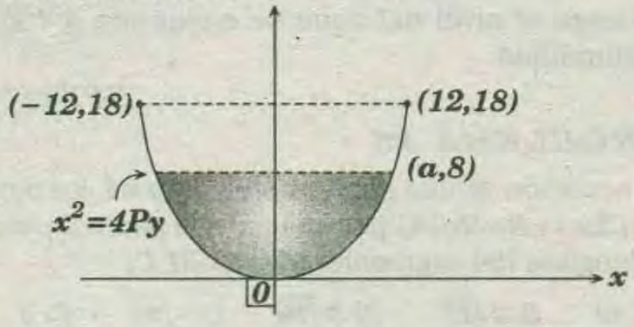
PROBLEMA 19 :

Un depósito de agua tiene sección transversal parábola cuando el nivel del agua alcanza una de

18m, su ancho mide *24m*, cuando el nivel del agua desciende *10m*, el nuevo ancho del nivel del agua (en *m*) es igual a :

A)12 B)15 C)16 D)18 E)20

RESOLUCIÓN :



* Como :

$$(12;18) \in p \Rightarrow 12^2 = 4p(18) \Rightarrow p = 2$$

* También : $(a;8) \in p$

$$\Rightarrow a^2 = 4(2)(8) \Rightarrow a = 8$$

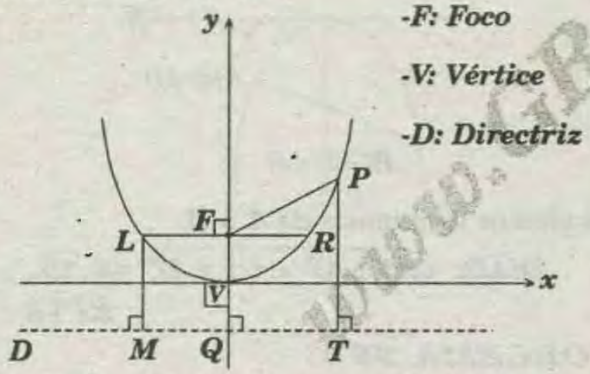
* Luego el nuevo ancho es : $L = 16$

RPTA : "C"

PROBLEMA 20 :

Demuestre que la longitud del lado recto de cualquier parábola es $4|P|$, donde $|P|$ es la distancia del vértice al foco.

RESOLUCIÓN :



$$|p| = |QV| = |VF|$$

* Por definición : $d(F;P) = d(P;T)$

$$\Rightarrow |LF| = |LM| = |2p|$$

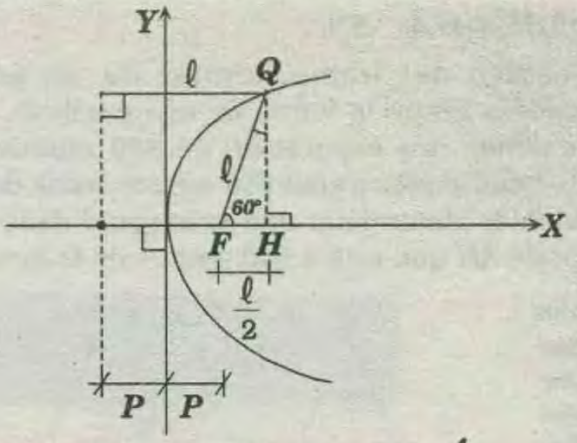
* Luego : $LR = |4p|$

PROBLEMA 21 :

Una parábola que pasa por el origen y cuyo eje focal es el eje *X*, es tal que el segmento que une el foco con uno de sus puntos mide *R* y determina *60* con el eje *X* (rama positivo). Halle la longitud del lado recto.

A) *B)* $\frac{\ell}{2}$ *C)* $\frac{2\ell}{3}$ *D)* $\frac{3\ell}{4}$ *E)* $\frac{3\ell}{2}$

RESOLUCIÓN :



* $\triangle FQH$ notable, si $FQ = \ell \Rightarrow FH = \frac{\ell}{2}$

* Luego:

$$2p + \frac{\ell}{2} = \ell \rightarrow p = \frac{\ell}{4} \Rightarrow 4p = \ell$$

$$LR = |4p| = |\ell| \Rightarrow LR = \ell$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 22 :

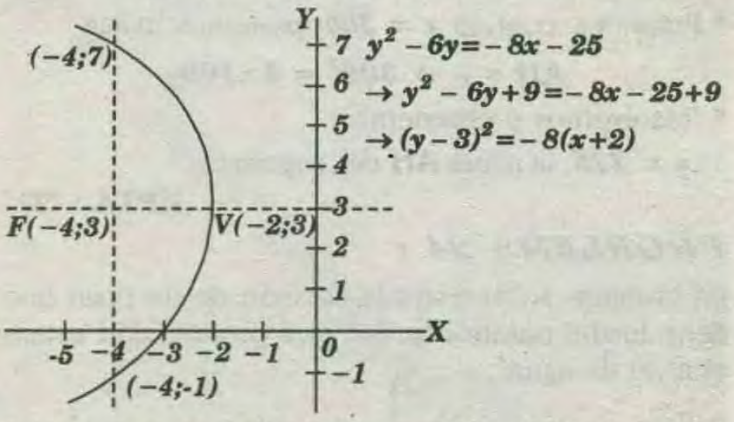
Hallar las coordenadas del vértice y el foco, las ecuaciones del eje y la directriz y la longitud del lado recto de la parábola dada por:

$$y^2 + 8x - 6y + 25 = 0.$$

Dibujar la curva.

RESOLUCIÓN :

* La ecuación representa a una parábola con término de segundo grado en "*y*" , entonces completamos cuadrados respecto a "*y*".



* Notamos que el vértice es $V(-2;3); 4p = -8$, entonces $p = -2$, lo cual indica que el foco está a la izquierda del vértice (parábola hacia la izquierda). Con esto ya podemos dibujar la parábola.

* El foco esta en $(-4;3)$

* La ecuación de la directriz: $x = -2 + 2 = 0$, es decir $x = 0$ (el eje *Y*).

* La ecuación del eje es:

$$y - 3 = 0$$

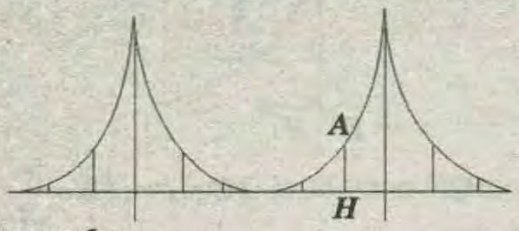
* La longitud del lado recto es $|4p| = |4(-2)| = 8$ y sus extremos son los puntos $(-4;-1)$ y $(-4;7)$

LIBRO GRATIS.net

PROBLEMA 23 :

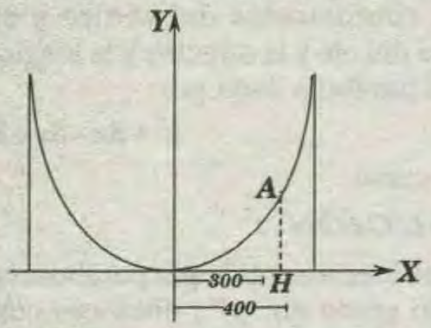
Los cables del tramo central de un puente suspendido tienen la forma de una parábola. Si las torres tienen una separación de **800** metros y los cables están atados a ellas **400** metros arriba del piso del puente, ¿determinar qué la longitud debe tener el soporte **AH** que está a **100** metros de la torre?.

A)220m
B)240m
C)300m
D)225m
E)380m



RESOLUCIÓN :

* Incluimos en el gráfico un sistema de coordenadas cuyo origen coincide con el punto más bajo del cable, para qué el vértice coincida con el origen. La ecuación es de la forma : $x^2 = 4py$. El punto **(400;400)** pertenece a la parábola, por tanto:



$$400^2 = 4p \times 400 \rightarrow p = 100$$

* Entonces, cuando $x = 300$; podemos hallar

$$AH = y \rightarrow 300^2 = 4 \times 100y$$

* Resolvemos y obtenemos:

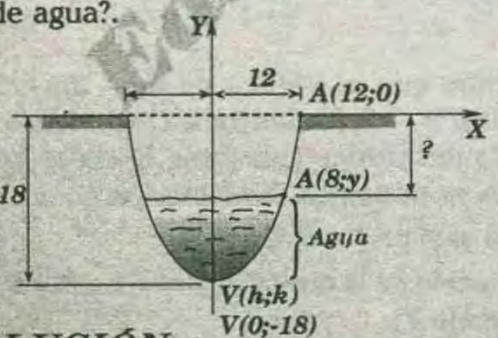
$y = 225$, la altura **AH** del soporte.

RPTA : "D"

PROBLEMA 24 :

En la figura se muestra la sección de un pozo que tiene forma parabólica. ¿ A qué profundidad estará el nivel de agua?.

A) 5u
B) 8
C) 12
D) 10
E) 15



RESOLUCIÓN :

* La parábola es: $P: (x-h)^2 = 4p(y-k)$

$$\rightarrow (x-0)^2 = 4p(y+18)$$

* $A \in P: (12)^2 = 4p(18)$

$$\rightarrow p = 2$$

$$\rightarrow P: x^2 = 8(y+18)$$

* $(8;y) \in P: 8^2 = 8(y+18)$

$$\rightarrow y = -10$$

* Luego el nivel del agua se encuentra a **10u** de profundidad.

RPTA : "D"

PROBLEMA 25 :

La ecuación de una parábola es $x^2+9y=0$, los puntos $A=(3;a)$ y $B=(b;-4)$ pertenecen a la parábola. Hallar la longitud del segmento **AB.** $(B \in III\ C)$

A) 10 **B)** $3\sqrt{11}$ **C)** $3\sqrt{10}$ **D)** $\sqrt{31}$ **E) 4**

RESOLUCIÓN :

* Transformando la ecuación : $y = -\frac{x^2}{9}$

* Como **A** pertenece a la ecuación:

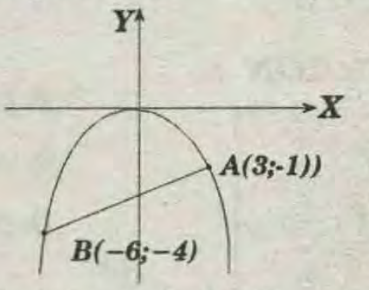
$$3^2 + 9a = 0 \rightarrow a = -1$$

* También **B** pertenece a la ecuación:

$$b^2 - 36 = 0 \rightarrow b = \pm 6$$

* Pero **B** al tercer cuadrante: $B = (-6;-4)$

*Graficamos el problema:



* Calculamos la distancia de **A** a **B**:

$$D(AB) = \sqrt{(3+6)^2 + (-1+4)^2} = 3\sqrt{10}$$

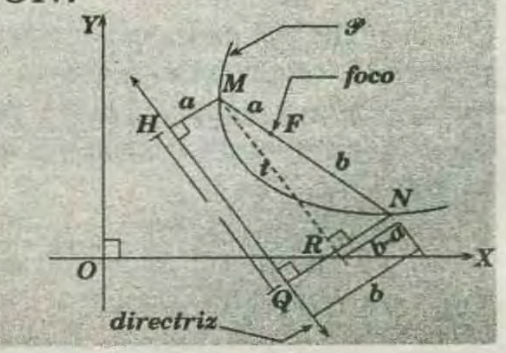
RPTA : "C"

PROBLEMA 26 :

Se tiene una parábola, en el cual **MN** es una cuerda focal. Si $MF = a$ y $FN = b$ (f: foco) calcular la longitud de la proyección de dicha cuerda sobre la directriz de la parábola.

A) $\sqrt{a^2-b^2}$ **B)** $2\sqrt{ab}$ **C)** $\sqrt{ab}$ **D)** $\sqrt{2(a^2-b^2)}$ **E)** $\sqrt{a^2+b^2}$

RESOLUCIÓN:



* Sea P la parábola de foco F

* Piden la longitud de la proyección de $\overline{MN}$ sobre la directriz, es decir t.

* Por propiedad de parábola:

$$MH = MF = a \ ; \ NQ = NF = b$$

* $\triangle MRN$ (Teorema de Pitágoras):

$$(a+b)^2 = t^2 - (b-a)^2 \Rightarrow t = 2\sqrt{ab}$$

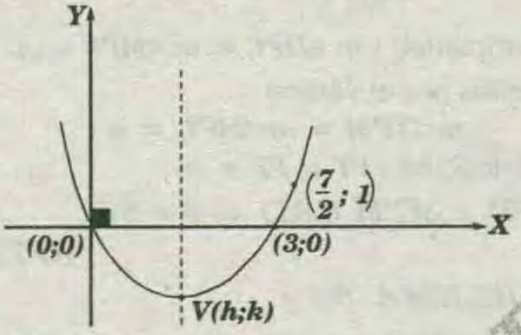
RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

Hallar la ecuación de la parábola que tiene su eje focal paralelo al eje "Y" y que pasa por $(0;0)$, $(3;0)$ y $\left(\frac{7}{2};1\right)$.

A) $4x^2 + 24x - 7y - 27 = 0$ B) $4x^2 - 24x - 7y + 27 = 0$
C) $4x^2 - 12x - 7y = 0$ D) $4x^2 + 24 - 7y + 27 = 0$

RESOLUCIÓN :



* Ecuación de la parábola: $\mathcal{P}: (x-h)^2 = 4p(y-k)$

* Ecuación general de la parábola:

$$\mathcal{P}: x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si $(0;0) \in P \rightarrow 0 + 0 + 0 + F = 0$ ..... (I)

Si $(3;0) \in P \rightarrow 9 + 3D + F = 0$ ..... (II)

Si $\left(\frac{7}{2};1\right) \in P \rightarrow 49 + 14D + 4E + 4F = 0$ ..... (III)

* Al resolver (I); (II) y (III):

obtenemos: $D = -3$; $F = 0$ y $E = -\frac{7}{4}$

* Ecuación de la parábola :

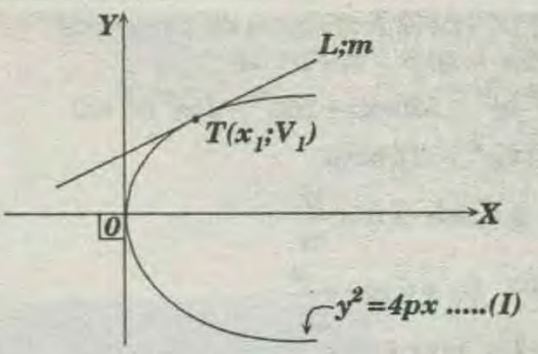
$$\mathcal{P} : 4x^2 - 12x - 7y = 0$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 28 :

Dada la parábola de ecuación : $y^2 = 4px$ y el punto $P(x_1;y_1)$ de la parábola. Demuestre que la pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto P es: $\frac{2p}{y_1}$.

RESOLUCIÓN :



$$L : y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow x = \frac{1}{m}(y - y_1 + mx_1) \ldots (II)$$

* (II) en (I):

$$y^2 = 4p \times \frac{1}{m}(y - y_1 + mx_1)$$

$$\rightarrow my^2 - 4py + 4p(y_1 - mx_1) = 0$$

$D = 0$ (condición de tangencia) :

$$(-4p)^2 - 4m(4p)(y_1 - mx_1) = 0$$

$$16p^2 = 16mp(y_1 - mx_1)$$

$$\Rightarrow p = m(y_1 - mx_1) \Rightarrow p = my_1 - m^2x_1$$

$$\Rightarrow 0 = m^2x - my_1 + p$$

$$m = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4px_1}}{2x_1} \ldots\ldots\ldots (III)$$

* Pero : $T(x_1;y_1) \in p \Rightarrow y_1^2 = 4px_1 \ldots\ldots\ldots (IV)$

*(IV) en (III):

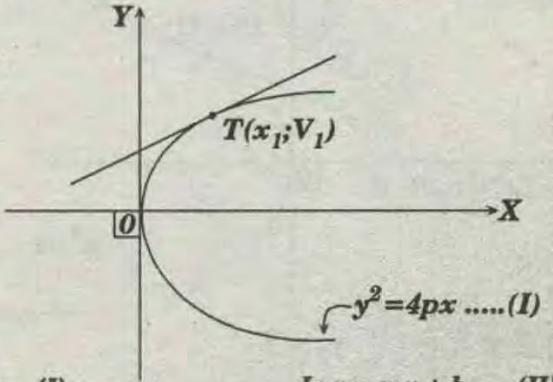
$$m = \frac{y_1 \pm \sqrt{4px_1 - 4px_1}}{2x_1} \Rightarrow m = \frac{y_1}{2x_1} \Rightarrow m = \frac{2p}{y_1}$$

PROBLEMA 29 :

Sea la parábola $\zeta : y^2 = 4px$. Halle la ecuación de recta tangente a ζ de pendiente m.

A) $y = mx - \frac{p}{m}$ B) $y = 2mx + \frac{p}{m}$ C) $y = mx + \frac{p}{m}$

RESOLUCIÓN :



*(II) en (I): $L: y = mx + b$ .....(II)

$$(mx + b)^2 = 4px$$

$$\Rightarrow m^2x^2 + 2mbx + b^2 = 4px$$

$$\Rightarrow m^2x^2 + x(2mb - 4p) + b^2 = 0$$

PDF GRATIS2.com

$\Delta=0$ (condición de tangencia).

$(2bm-4p)^2-4m^2b^2=0$

$\Rightarrow 4b^2m^2-16bmp+16p^2-4m^2b^2=0$

$\Rightarrow 16p^2=16bmp$

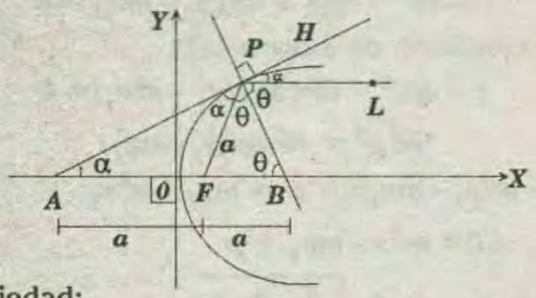
$\Rightarrow p=mb \rightarrow b=\frac{p}{m}$

* Luego: $L: y=mx+\frac{p}{m}$

PROBLEMA 30 :

Demostrar que por un punto P de una parábola (distinto al vértice) al trazar la recta tangente y la recta normal, estas intersectan al eje de la parábola en los puntos A y B que equidistan del foco.

RESOLUCIÓN :



* Propiedad:

$m\sphericalangle HPL = m\sphericalangle APF = \alpha$

* ΔAPF isósceles : $AF = FP = a$

* ΔFPB isósceles : $FP = FB = a$

$\rightarrow AF = FB$

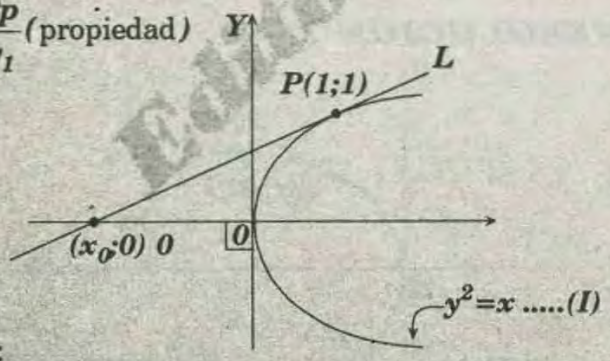
PROBLEMA 31 :

Sea la parábola cuya ecuación $x = y^2$. Por el punto $P(1;1)$ se traza una recta tangente a la parábola, dicha recta intersecta al eje de la abscisas en el punto $(x_0;0)$. Entonces , x_0 es:

A) -2 B) -3 C) -1 D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{3}{2}$

RESOLUCIÓN :

$m=\frac{2p}{y_1}$ (propiedad)



* Pero:

$4p=1 \rightarrow p=\frac{1}{4} \wedge y_1=1$

* Luego :

$$m=\frac{2\left(\frac{1}{4}\right)}{1} \rightarrow m=\frac{1}{2}$$

* Ahora:

$$L: y-1=\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow L: x-2y+1=0$$

$\Rightarrow x_0=-1$ RPTA : "C"

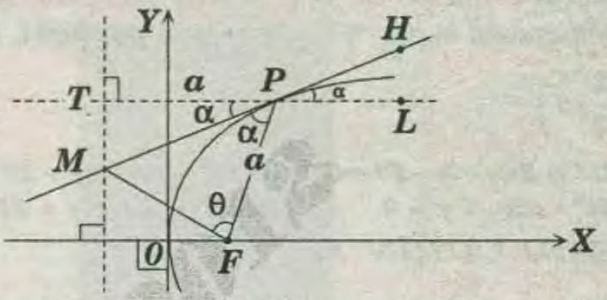
PROBLEMA 32 :

Se tiene una parábola cuyo vértice es $(0;0)$. Sea P un punto de la parábola y F su foco. M es un punto de la directriz $\overline{PM}$ es tangente a la curva.

Halle la medida del ángulo MFP.

A) $45°$ B) $60°$ C) $75°$ D) $90°$ E) $120°$

RESOLUCIÓN :



* Por propiedad : $m\sphericalangle HPL = m\sphericalangle MPF = \alpha$

* Opuestos por el vértice :

$m\sphericalangle TPM = m\sphericalangle HPL = \alpha$

* Por definición : $PT = PF = \alpha$

$\Delta TPM \cong \Delta FPM$ (LAL) $\Rightarrow \theta = 90°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 33 :

Sea $P: y^2 = 8x$ la ecuación de una parábola , halle la ecuación de la recta tangente a P y paralela a la recta $2x + 2y - 3 = 0$

A) $x+y+1=0$ B) $x+y+2=0$ C) $x+y-2=0$
D) $x+y-3=0$ E) $x+y+5=0$

RESOLUCIÓN :

* Por propiedad :

$$m_1=\frac{2p}{b} \text{.....(I)}$$

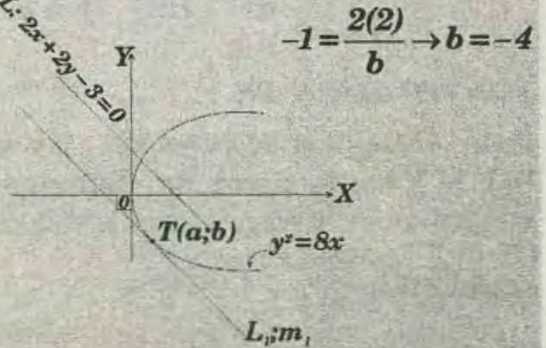
* Pero :

$4p = 8 \Rightarrow p = 2$ .....(II)

$L \parallel L_1 \Rightarrow m = m_1 = -1$ .....(III)

* (II) y (III) en (I):

$-1=\frac{2(2)}{b} \rightarrow b=-4$



* Como $T(a;b) \in p \Rightarrow (-4)^2 = 8a \rightarrow a = 2$

* Luego : $L_1: y + 4 = -1(x - 2)$

$L_1: x + y + 2 = 0$

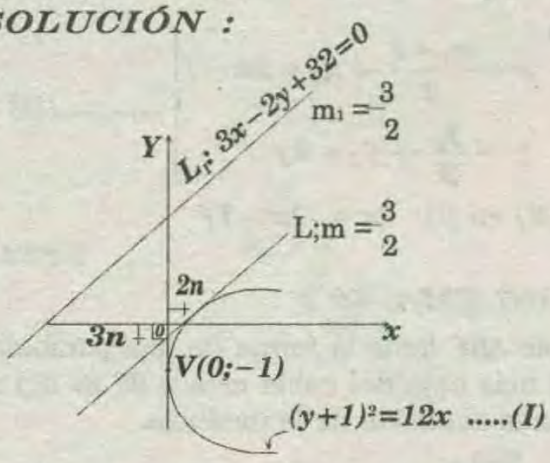
RPTA : "B"

PROBLEMA 34 :

Sea la parábola $P: y^2-12x+2y+1=0$. Halle el área de la región triangular que forman los ejes coordenadas con la recta tangente a dicha parábola , la cual es paralela a $L_1: 3x - 2y + 32 = 0$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{7}{8}$

RESOLUCIÓN :



$L: y=\frac{3}{2}(x-2n) \rightarrow x=\frac{2}{3}y+2n$.....(II)

* (II) en (I):

$$(y+1)^2=12\left(\frac{2}{3}y+2n\right)$$

* De donde : $y^2 - 6y + 24n + 1 = 0$

$\Delta = 0$ (condición de tangencia).

$$\Rightarrow (-6)^2 - 4(1)(24n+1) = 0 \rightarrow n = \frac{1}{3}$$

$$S=\frac{1}{2}(2n)(3n) \rightarrow S = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 \rightarrow S = \frac{1}{3}$$

RPTA : "B"

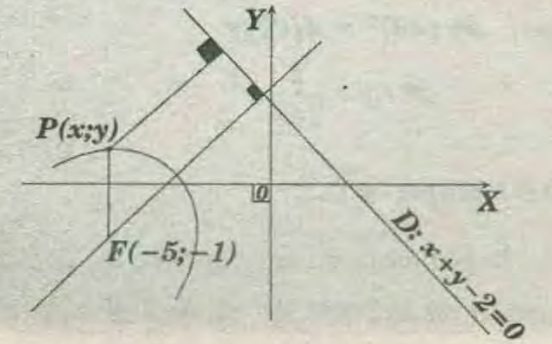
PROBLEMA 35 :

Si el foco de una parábola está ubicado en $F(-5;-1)$ y su directriz $x + y - 2=0$ y además la ecuación de la parábola es :

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, halle $a + b + c$

A)0 B)1 C)2 D)3 E)4

RESOLUCIÓN :



* Por definición :

$d(F;P) = d(P;D)$

$$\sqrt{(x+5)^2+(y+1)^2} = \frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}$$

* Efectuando : $x^2 - 2xy + y^2 + 24x + 8y + 24 = 0$

* De donde :a $= 1$; $b = -2$ y $c = 1$

* Luego : $a + b + c = 0$

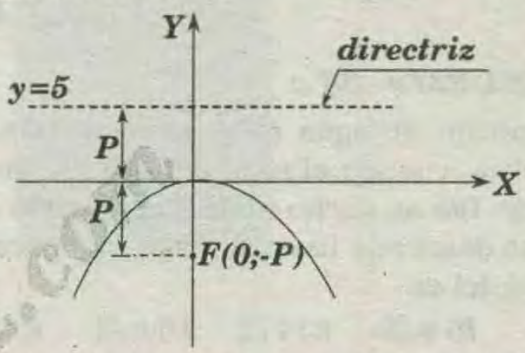
RPTA : "A"

PROBLEMA 36 :

Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen de coordenadas y directriz de la recta $y - 5=0$

A) $x^2 = -5y$ B) $x^2 = -10y$ C) $x^2 = -20y$

RESOLUCIÓN :



* Ecuación de la parábola es de forma: $x^2 = 4py$

* Pero : $p = -5$

* Luego: $\mathcal{P} : x^2 = -20y$

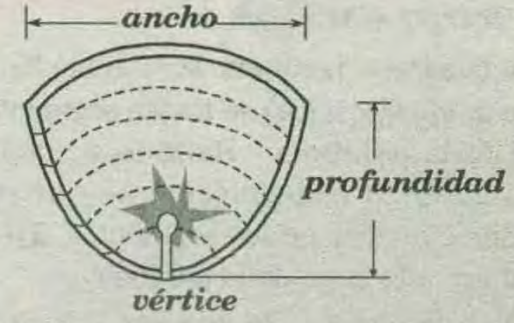
RPTA : "C"

PROBLEMA 37 :

Considere un espejo en forma de copa con una sección transversal parabólica como se muestra en la figura. Si se coloca una fuente de luz en el foco, los rayos de luz son reflejados como un haz en el que todos los rayos son paralelos al eje. Esta propiedad óptica de la parábola se usa para el diseño de faros.

Según esto, considere un faro reflector que tiene $12cm$. de profundidad y $18\ cm$. de ancho. ¿A qué distancia del vértice debemos colocar la fuente de luz?.

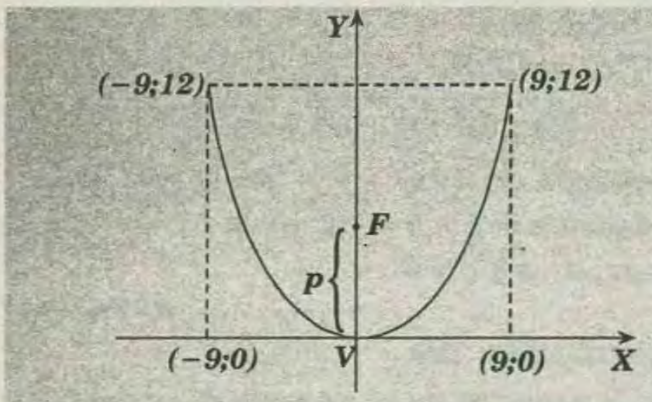
A) 2
B) 3
C) 4
D) 8
E) 12



RESOLUCIÓN :

La parábola tendrá una ecuación de la forma $x^2 = 4py$. Reemplazando $(9;12)$ en la ecuación:

www.GRATIS2.com



$12 = 4p \times 9$

Obtenemos $p = 4$ que es la distancia de la fuente de luz (foco) al vértice.

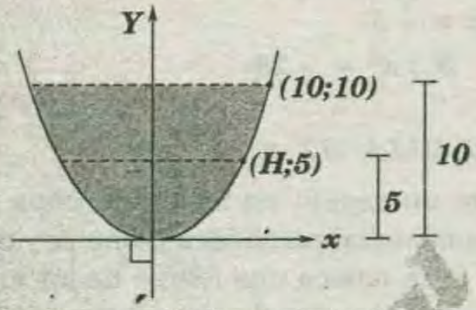
RPTA : "C"

PROBLEMA 38 :

Un depósito de agua tiene sección transversal parabólica, cuando el nivel del agua alcanza una altura de ***10u*** su ancho mide ***20u;*** cuando el nivel del agua desciende hasta la mitad, su nuevo ancho del nivel del es:

A) $5\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $7\sqrt{2}$ D) $9\sqrt{2}$ E) $10\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :



* Ecuación de la parábola es de la forma: $x^2 = 4py$

* Pero: $(10;10) \in \mathcal{P} \rightarrow 10^2 = 4p(10)$

$\rightarrow 4p = 10$

* También: $(H;5) \in \mathcal{P}$:

$\rightarrow H^2 = (10)(5)\ H = 5\sqrt{2} \Rightarrow 2H = 10\sqrt{2}$

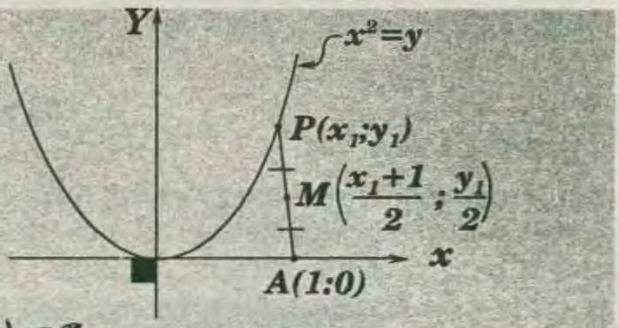
RPTA : "E"

PROBLEMA 39 :

Se tiene una parábola $\mathcal{P}$ de ecuación $y=x^2$. Desde un punto fijo $A(1;0)$ se trazan segmentos a un punto $\mathcal{P}$ de la parábola. Halle la ecuación del lugar geométrico respectivamente que describen los puntos medios de los segmentos $\overline{AP}$ cuando $\mathcal{P}$ se mueve a lo largo de la parábola $\mathcal{P}$.

A) $y = (x-1)^2$ B) $2y = (2x-1)^2$ C) $y = (2x+1)$
D) $2x = (2y-1)$ E) $x = (y+1)^2$

RESOLUCIÓN :



$P(x_1; y_1) \in \mathcal{P}$

$\rightarrow x_1^2 = y_1$ ..... *(I)*

* Pero :

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1+1}{2} \rightarrow x_1 = 2x-1 \\ y &= \frac{y_1}{2} \rightarrow y_1 = 2y \end{aligned}\right\} \text{.....(II)}$$

* De *(II)* en *(I)*: $2y = (2x-1)^2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 40 :

El cable ***ABC*** tiene la forma de una parábola. Si el punto mas bajo del cable esta a ***20 m*** del suelo , calcula la ecuación de la parábola.

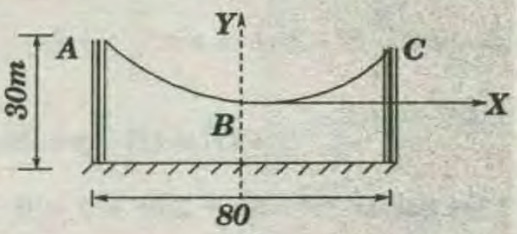
A) $y = \frac{1}{160}x^2$

B) $y = \frac{1}{80}x^2$

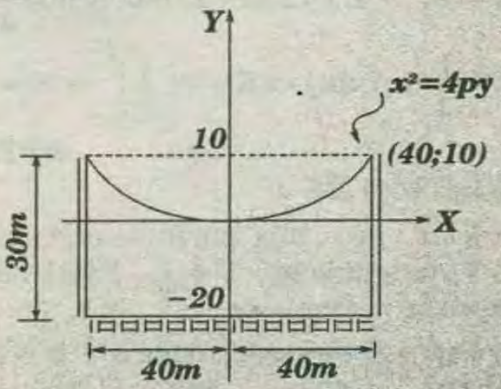
C) $y = 160x^2$

D) $y = 80x^2$

E) $y = 40x^2$



RESOLUCIÓN :



* $(40; 10) \in \mathcal{P} \rightarrow (40)^2 = 4p(10) \rightarrow \mathcal{P} = 40$

* Luego : $\mathcal{P}$: $(40)^2 = 4(40)y$

$$\mathcal{P} : y = \frac{1}{160}x^2$$

RPTA : "A"

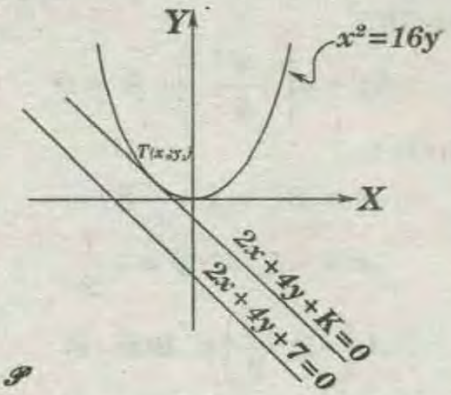
PROBLEMA 41 :

Se tiene la parábola cuya ecuación es $y = \frac{1}{16}x^2$ y la ecuación de la recta $2x + 4y + 7 = 0$. Halle la

ecuación de la recta paralela a la recta dada y que es tangente a dicha parábola.

A) $2x + 4y + 9 = 0$ *B) $x + 2y + 8 = 0$*
C) $x + 2y + 6 = 0$ *D) $2x + 4y + 4 = 0$*
E) $x + 2y + 2 = 0$

RESOLUCIÓN :



$T \in \mathcal{P}$

$$\rightarrow x_1^2 = 16y_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* También tenemos :

$$2x_1 + 4y_1 + k = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* De *(I)* y *(II)* :

$$x_1^2 + 8x_1 + 4k = 0$$

* Por condición de tangencia :

$$\Delta = 0 \rightarrow 8^2 - 4(1)(4k) = 0 \rightarrow k = 4$$

* La recta ejemplo : $2x + 4y + 4 = 0$

$$\rightarrow x + 2y + 2 = 0$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 42 :

Hallar la ecuación de la recta directriz de la parábola

$$y^2 + 8x - 4y - 28 = 0$$

A) $x = -6$ *B) $x = 4$* *C) $x = -8$* *D) $x = 8$*

RESOLUCIÓN:

* Ecuación de la parábola :

$$y^2 + 8x - 4y - 28 = 0$$

* Completando cuadrados : $(y-2)^2 = -8(x-4)$
* Donde : $h = 2; k = 4$ y $4p = -8$

$$\rightarrow p = -2$$

* Ecuación de la directriz : $\ell : x = h - p$

$$\rightarrow \ell : x = 2 - (-2) \rightarrow \ell : x = 4$$

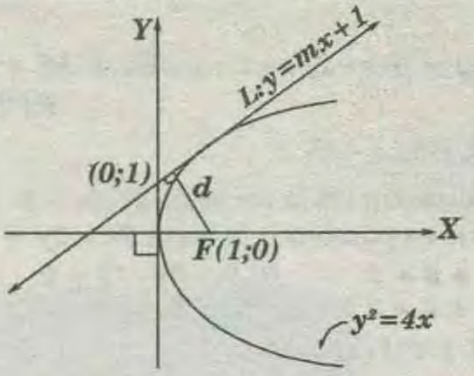
RPTA : "B"

PROBLEMA 43 :

Si *L* es la recta tangente(no vertical) a la parábola $y^2 = 4x$, trazada desde *(0;1)* calcule la distancia del foco de la parábola a la recta *L*.

A) $\sqrt{2}$ *B)* $\sqrt{3}$ *C)* $\frac{\sqrt{2}}{1}$ *D)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *E)* 2

RESOLUCIÓN :



* En la ecuación : $y^2 = 4x$ reemplazamos $y = mx + 1$, entonces $(mx + 1)^2 = 4x$
* De donde : $m^2x^2 + (2m - 4)x + 1 = 0$
* Por la condición de tangencia :

$$\Delta = 0 \rightarrow (2m-4)^2 = 4m^2(1)$$
$$\rightarrow 4m^2 - 16m + 16 = 4m^2$$
$$\rightarrow 16m^2 = 16 \rightarrow m = 1$$

* Luego :

$$d = \frac{|(1) - (0) + 1|}{\sqrt{2}} \Rightarrow d = \sqrt{2}$$

RPTA : "A"

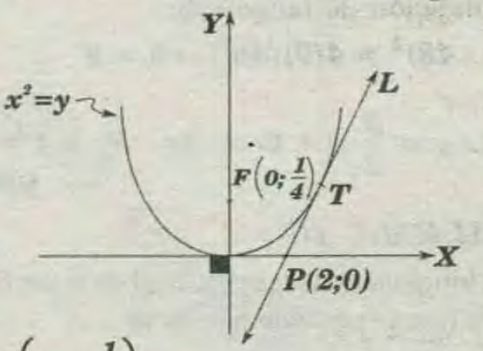
PROBLEMA 44 :

Se tiene la parábola $y = x^2$. Halle la ecuación de la recta tangente trazada desde el punto *(2 ; 0)*.

A) $y = 2\sqrt{2}x$ *B)* $y = -2\sqrt{2}x - 2$ *C)* $y - 8x + 16 = 0$

RESOLUCIÓN :

* Dado : $P : x^2 = y \rightarrow 4p = 1 \rightarrow p = \frac{1}{4}$



* Luego:

$$F\left(0\,;\ \frac{1}{4}\right)$$

* Ahora :

$$L : y - 0 = m(x - 2)$$

* Donde *"m"* es la pendiente de *L*.

$$\rightarrow y = m(x-2) \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Reemplazando *(I)* en la ecuación de la parábola

$$P : x^2 = y \rightarrow x^2 = m(x-2)$$
$$\rightarrow x^2 - mx + 2m = 0$$

* Por condición de tangencia

$$\Delta = 0 \rightarrow m^2 = 4(1)(2m) \rightarrow m = 8$$

WWW.GRATIS2.COM

* Luego

$$L: y = 8(x-2) \rightarrow L: y - 8x + 16 = 0$$

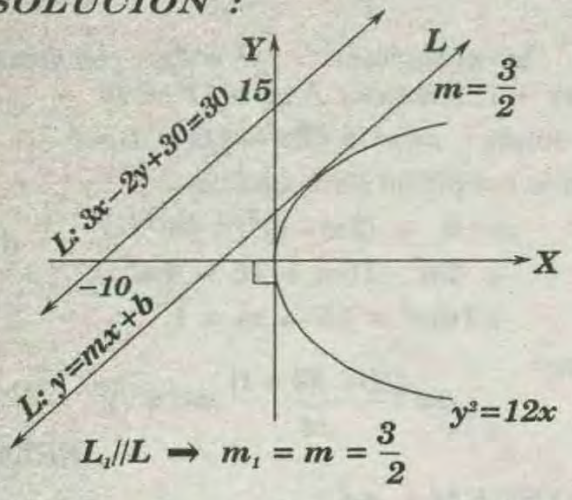
RPTA : "C"

PROBLEMA 45 :

Halle la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2=12x$ que es paralela a la recta $3x - 2y + 30 = 0$

A) $3x-2y+5=0$ B) $2x-3y-10=0$
C) $3x-2y+4=0$ D) $2y-3x+30=0$

RESOLUCIÓN :



$$L_1 // L \rightarrow m_1 = m = \frac{3}{2}$$

* Luego :

$$y = \frac{3}{2}x + b$$

* Reemplazando :

$$\left(\frac{3}{2}x + b\right)^2 = 12x$$

* Simplificando: $9x^2 + x(12b - 48) + 4b^2 = 0$

* Por condición de tangencia:

$$(12b-48)^2 = 4(9)(4b^2) \rightarrow b = 2$$

* Tenemos :

$$L: y = \frac{3}{2}x + 2 \Rightarrow 3x - 2y + 4 = 0$$

RPTA : "C"

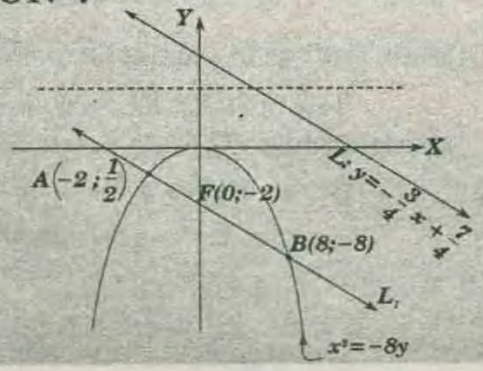
PROBLEMA 46 :

Hallar la longitud de la cuerda focal de la parábola $P: x^2 = -8y$ que es paralela a la recta

$$\overline{L}: 3x + 4y - 7 = 0$$

A) $\frac{22}{3}$ B) $\frac{23}{2}$ C) $\frac{24}{3}$ D) $\frac{25}{2}$ E) $\frac{26}{3}$

RESOLUCIÓN :



* Tenemos:

$$y = -\frac{3x}{4} + \frac{7}{4} \quad \ldots\ldots (I)$$

$$x^2 = -8y \quad \ldots\ldots (II)$$

$$L_1: 3x + 4y + 8 = 0 \quad \ldots\ldots (III)$$

* De *(II)* en *(III)*:

$$3x + 4\left(\frac{-x^2}{8}\right) + 8 = 0$$

* Resolviendo :

$$x = 8 \rightarrow y = -8$$

$$x = -2 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

* Luego :

$$A\left(-2; \frac{-1}{2}\right) \text{ y } B(8; -8)$$

* Por distancia entre dos puntos :

$$AB^2 = (-2-8)^2 + \left(-\frac{1}{2} + 8\right)^2$$

$$\rightarrow AB^2 = 100 + \frac{225}{4} \rightarrow AB^2 = \frac{400 + 225}{4}$$

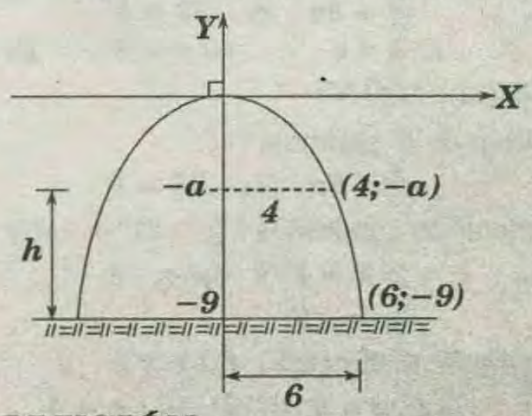
$$\rightarrow AB^2 = \frac{625}{4} \rightarrow AB = \frac{25}{2}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 47 :

La entrada de una iglesia tiene forma parabólica de $9m$ de alto y $12m$ de base. Toda la parte superior es una ventana de vidrio cuya base es paralela al piso y mide $8m$. ¿Cuál es la altura de la ventana?.

A) 2,5 B) 3 C) 4 D) 4,5 E) 5



RESOLUCIÓN :

* Ecuación de la parábola :

$$x^2 = 4py$$

* Pero : $(6; -9) \in P \rightarrow 6^2 = 4p(-9)$

$$\rightarrow p = -1$$

$$\rightarrow P: x^2 = -4y$$

* También : $(4; -a) \in P$

$$\rightarrow 4^2 = -4(-a) \rightarrow a = 4$$

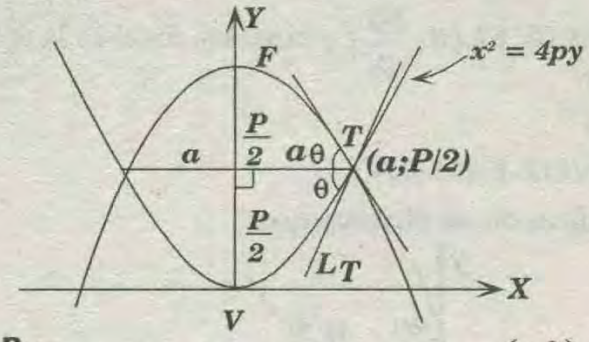
* Altura de la ventana : $h = 9 - 4 \rightarrow h = 5m$

RPTA : "E"

PROBLEMA 48 :

Se tienen dos parábolas, tal que el foco de uno de ellas es el vértice de la otra y viceversa . Calcule la medida del ángulo entre dichas parábolas .

RESOLUCIÓN :



$T \in P$:

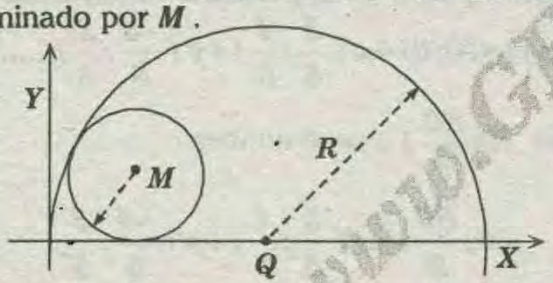
$$a^2 = 4p\frac{P}{2} \rightarrow a = p\sqrt{2} \Rightarrow mL_T = \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{x^2}{4p}\right)}{dx} = \frac{x}{2p}$$

* En T :

$$m_{L_T} = \frac{p\sqrt{2}}{2p} = \frac{\sqrt{2}}{2} = tg\theta \Rightarrow \theta = Arctg\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2\theta = 2Arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$$

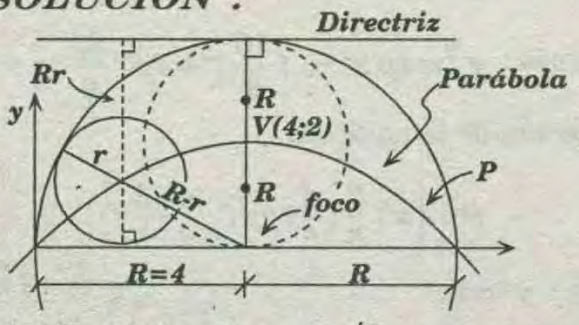
PROBLEMA 49 :

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si $R = 4$, calcule la ecuación del lugar geométrico determinado por M .



A) $x^2 - 8x + 8y = 0$ B) $x^2 - 4 + 8y = 0$
C) $2x^2 - 8x + y = 0$ D) $x^2 - 8x + 4y = 0$

RESOLUCIÓN :



$\mathbb{P}$: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

$p = -2$ (Parábola hacia abajo)

$V = (1;2)$

$\mathbb{P}$: $(x - 4)^2 = -8(y - 2)$

$\rightarrow \mathbb{P}: x^2 - 8x + 8y = 0$

RPTA : "A"

PROBLEMA 50 :

$F = (9; 8)$ es el foco de una parábola $\mathscr{P}$. $Q = (11; 22) \mathscr{P}$ y $comp_{\vec{u}^{\perp}}\overrightarrow{FQ} = 10$, siendo $\vec{u}$ el vector unitario direccional del eje focal con ambas componentes positivas .

Si la recta L , tangente a $\mathscr{P}$ en Q intersecta al eje focal en el punto A tal que $d(A;Q) = 10\sqrt{17}$. Hallar la ecuación vectorial de la parábola.

RESOLUCIÓN :

Sea : $\vec{u} = (u_1; u_2) \Rightarrow \vec{u}^{\perp} = (-u_2; u_1)$

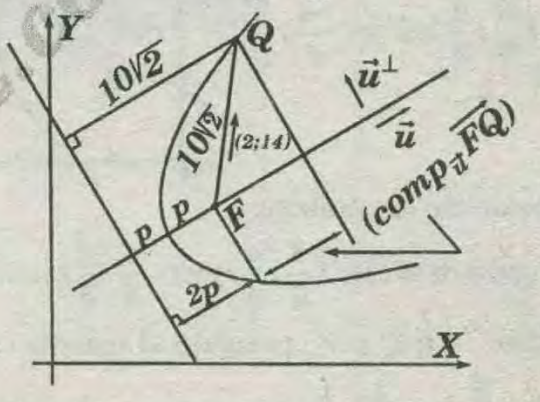
* Por dato : $comp_{\vec{u}^{\perp}}\overrightarrow{FQ} = 10$

$\Rightarrow (2;14).(-u_2; u_1) = 10$

* De donde : $7u_1 - u_2 = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$

* También : $u_1^2 + u_2^2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$

* De (I) y (II) : $\vec{u} = \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$



* Por definición , la distancia de Q a F es igual a la distancia de Q a la directriz $= 10\sqrt{2}$, por lo tanto :

$$2p + comp_{\vec{u}}\overrightarrow{FQ} = 10\sqrt{2} \Rightarrow 2p + (2;14).\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right) = 10\sqrt{10}$$

efectuando: $p = 5(\sqrt{2} - 1)$

$\Rightarrow V = (9;8) - p\vec{u} = (13 - 4\sqrt{2}; 11 - 3\sqrt{2})$

* Ecuación de la parábola :

$$\mathscr{P} = \left\{(13 - 4\sqrt{2}; 11 - 3\sqrt{2}) + x'\left(\frac{4}{2}; \frac{3}{5}\right) + y'\left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{2}\right)\right\}$$

* Donde : $y'^2 = 20(\sqrt{2} - 1)x'$

PROBLEMA 51 :

Obtener la ecuación de la tangente a la parábola paralela a la recta : $x + y - 8 = 0$.

RESOLUCIÓN :

* Sea : $y = mx + b$, la recta tangente a la parábola .

* Por dato : $m = -1 \Rightarrow y = -x + b$

www.GRATIS2.com

* Reemplazando en la ecuación de la parábola :

$$x^2=8(b-x)\Rightarrow x^2+8x-8b=0$$

* Condicición de tangencia :

Discriminante = 0

$$\Delta=\sqrt{8^2-4(1)(-8b)}=0\Rightarrow b=-2$$

* Ecuación de la tangente : $y=-x-2$

PROBLEMA 52 :

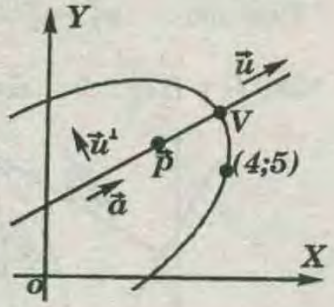
Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es la recta representada por : $4y-3y+9=0$; su vértice es punto $y=(3;7)$ y sabiendo que pasa por el punto $(4;5)$. Hallar además , la ecuación de su directriz y las coordenadas de su foco.

RESOLUCIÓN :

* De la ecuación del eje se obtiene que un vector dirección es :

$$(1;m)=(1;\frac{4}{3})\Rightarrow \vec{a}=(3;4)$$

$$\Rightarrow \vec{u}=(\frac{3}{5};\frac{4}{5});\vec{u}^{\perp}=(\frac{-4}{5};\frac{3}{5})$$



* Ecuación de la parábola :

$$\mathcal{P}=(x;y)=(3;7)+x'(\frac{3}{5};\frac{4}{5})+y'(-\frac{4}{5};\frac{3}{5}).....(I)$$

* Por dato : $(4;5)\in\mathcal{P}$; pasando al sistema $x'y'$:

$$\left.\begin{array}{l}4=3+\frac{3}{5}x'-\frac{4}{5}y'\\5=7+\frac{4}{5}x'+\frac{3}{5}y'\end{array}\right\}$$

Resolviendo:

$$A=(x';y')=(-1;-2)$$

* En el sistema $x'y'$:

$$y'^2=-4px'\Rightarrow(-2)^2=-4p(-1)\Rightarrow p=1$$

* Si D es la intersección de la directriz con el eje , entonces:

$$D=V+p\vec{u}=(3;7)+(1)(\frac{3}{5};\frac{4}{5})=(\frac{18}{5}+\frac{39}{5})$$

* Ecuación de la directriz :

$$D:\left\{(\frac{18}{5};\frac{19}{5})+t(-4;3)/t\in\mathbb{R}\right\}$$

* Coordenadas del foco :

$$F=V-p\vec{u}=(3;7)-(1)(\frac{3}{5};\frac{4}{5})=(\frac{12}{5};\frac{31}{5})$$

NOTA :

* Si , se desea la ecuación de $\mathcal{P}$ en términos de xy :

De (I) : $x'=\dfrac{3x+4y-37}{5}$; $y'=\dfrac{3y-20x-9}{5}$

* Reemplazando en $y'^2=-4x'$, se obtiene :

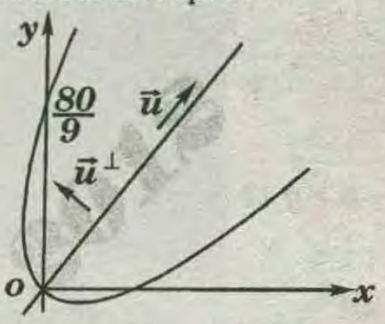
$$\mathcal{P}=16x^2+19y^2-24xy+132x+26y-659=0$$

PROBLEMA 53 :

Hallar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $(0;0),(0;\frac{80}{9})$ y cuyo eje focal es la recta : $y=\frac{4}{3}x$.

RESOLUCIÓN:

* Graficando se observa que :



$V=(0;0)$, es el vértice :

$$\vec{u}=(\frac{3}{5};\frac{4}{5});\vec{u}^{\perp}=(\frac{-4}{5};\frac{3}{5})$$

* Cualquier punto de la parábola estará dada por :

$$\mathcal{P}=(x;y)=(0;0)+x'(\frac{3}{5};\frac{4}{5})+y'(\frac{-4}{5};\frac{3}{5}).....(I)$$

* Como $(0;\frac{80}{9})\in\mathcal{P}$ entonces :

$$(0;\frac{80}{9})=x'(\frac{3}{5};\frac{4}{5})+y'(\frac{-4}{5};\frac{3}{5})$$

* De donde : $A=(x';y')=(\frac{64}{9};\frac{16}{3})$

* Además : $y'^2=4px'\Rightarrow(\frac{16}{3})^2=4p(\frac{64}{9})\Rightarrow p=1$

* Ecuación de la parábola :

$$\mathcal{P}:\left\{x'(\frac{3}{5};\frac{4}{5})+y'(-\frac{4}{5};\frac{3}{5})\right\}$$

Donde : $y'^2=4x'$

* En términos de xy :

* De (I) : $x'=\dfrac{3x+4y}{5}$ $\quad y'=\dfrac{3y-4x}{5}$

* Reemplazando en $y'^2=4x'$, se obtiene :

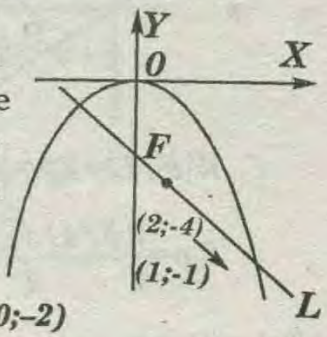
$$\mathcal{P}=9y^2+16x^2-24xy-60x-80y=0$$

PROBLEMA 54 :

El punto medio de una cuerda focal de la parábola $x^2=-8y$ es $(2;-4)$, determinar la ecuación de dicha cuerda.

RESOLUCIÓN :

« Una cuerda focal de una parábola es un segmento de recta que pasa por el foco y tiene puntos extremos en la parábola ».



Graficando se obtiene $F=(0;-2)$

* La pendiente de la cuerda será :

$$m=\frac{-4+2}{2-0}=-1=\frac{y+2}{x-0}, \text{ entonces}$$

* la ecuación de la cuerda será : $L: x+y+2=0$

* En forma vectorial :

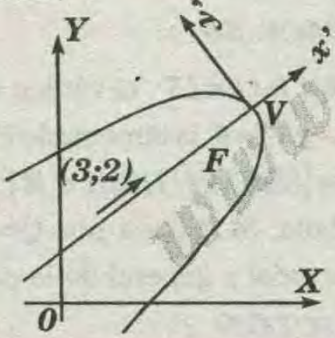
$\vec{a}$: Vector dirección. $\Rightarrow \vec{a}=(2;-4)-(0;-2)=2(1;-1)$

$$\Rightarrow L:\{(2;-4)+t(1;-1)/t\in\mathbb{R}\}$$

PROBLEMA 55 :

El eje de simetría de una parábola es la recta : $2x-3y-4=0$; su foco es el punto $F=(11;6)$; siendo su vértice $V(14;6)$, hallar la ecuación cartesiana de la parábola.

RESOLUCIÓN :



* De los datos :

$$p=|FV|=|(14;8)-(11;6)| \Rightarrow p=\sqrt{13}$$

* Ecuación de la parábola :

$$\mathcal{P}=\left\{(14;8)+\frac{1}{\sqrt{13}}(3;2)x'+\frac{1}{\sqrt{13}}(-2;3)y'\right\}$$

* Donde : $y'^2=-4\sqrt{13}x'.....(\alpha)$

* De la ecuación de la parábola :

$$x=14+\frac{3}{\sqrt{13}}x'=\frac{2}{\sqrt{13}}y' \;;\; y=8+\frac{2}{\sqrt{13}}x'+\frac{3}{\sqrt{13}}$$

* Resolviendo : $x'=\frac{3x+2y-58}{\sqrt{13}}$; $y'=\frac{3y-2x+4}{\sqrt{13}}$

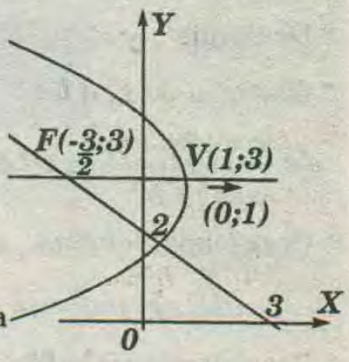
* Reemplazando en (α) y operando :

$$4x^2+9y^2-12xy+140x+128y-3000=0$$

PROBLEMA 56 :

Determinar la ecuación de una parábola cuyo eje es paralelo al eje X y vértice $V=(1;3)$ y cuyo foco está sobre la recta definida por $L: 2x+3y-6=0$.

RESOLUCIÓN :



* Graficando se obtiene que el eje focal es la recta $y=3$ que al intersectar la con L se determina el Foco F.

$F=(-\frac{3}{2};3)$; por lo tanto la

* parábola se abre hacia la izquierda y es de forma $(y-3)^2=-4p(x-1)$

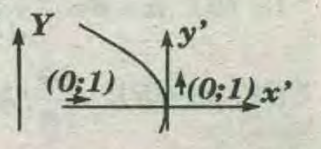
$$p=d(F;V)=\sqrt{(1+\frac{3}{2})^2+(3-3)^2}=\frac{5}{2}$$

* Finalmente , la ecuación de la parábola será :

$$(y-3)^2=-10(x-1)$$

* SOLUCIÓN VECTORIAL :

$\mathcal{P}:\{(1;3)+x'(1;0)+y'(0;1)\}$



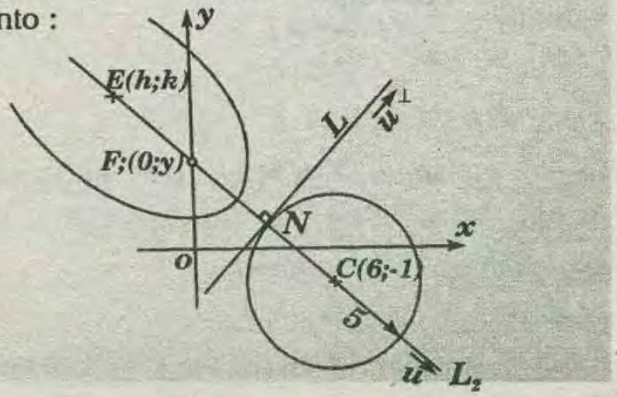
PROBLEMA 57 :

Dada la circunferencia $C: x^2+y^2-12x+2y+12=0$, la recta $L: L: 3x-4y+3=0$ es tangente a C y es directriz de una elipse E ; si $E\cap C=\phi$ y L divide el segmento que une los centros de C y E en razón $1:2$. Hallar la ecuación vectorial de la elipse E, si uno de los focos se encuentra sobre el eje Y.

RESOLUCIÓN :

* Sean E y C, Centros de la elipse y la circunferencia respectivamente.

* Si L es la directriz y un foco se encuentra sobre EC, se deduce que EC se encuentra sobre el eje focal. Por lo tanto :



www.GRATIS2.com

$\overrightarrow{EC} \perp L \Rightarrow m_{EC} = -\frac{4}{3} = \frac{y+1}{x-3}$

* De donde :

$L_2: 4x+3y-21=0$ .....(I)

$(0;y) \in L_2 \Rightarrow -\frac{4}{3} = \frac{y+1}{0-6}$

* De donde : $y=7 \Rightarrow F_1=(0;7)$

* distancia de F_1 a L :

$d=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow d(F_1;L)=\frac{|3(0)-4(7)+3|}{\sqrt{9+16}}=5$

* Observando el dato , se deduce que :

$d(E;F_1)=5=ae \quad ; \quad d(E;N)=10=\frac{a}{e}$

* Resolviendo : $a^2=50$

* además: $b^2=a^2-(ae)^2=25$

* Sea : $E=(h;k)$, centro de la elipse .

$(h;k) \in L_2$; en (I): $4h+3k-21=0$.....(II)

* También :

$d(E;C)=15=\sqrt{(h-6)^2+(k+1)^2}$ .....(III)

* De (II): $h-6=-\frac{3}{4}(k+1)$

* (IV) en (III): $\frac{25}{16}(k+1)^2=(15)^2 \Rightarrow k=11$

* en (IV): $h=-3$

* Del gráfico : $\overrightarrow{F_1C}=(6;-1)-(0;7)=(6;-8)$

$\vec{u}=(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}); \vec{u}^{\perp}=(\frac{4}{5};\frac{3}{5})$

* Ecuación vectorial de la Elipse :

$E=\{F_O+x'\vec{u}+y'\vec{u}^{\perp}\}$

$E=\left\{(-3;11)+x'(\frac{3}{5};\frac{-4}{5})+y'(\frac{4}{5};\frac{3}{5})\right\}$

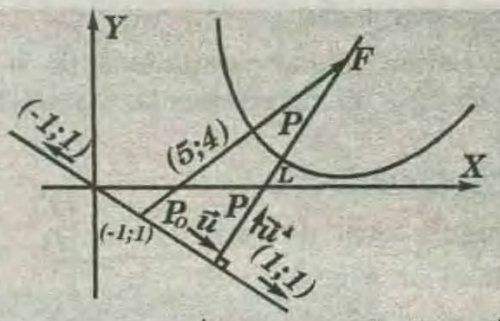
* Donde : $\frac{x'^2}{50}+\frac{y'^2}{25}=1$

PROBLEMA 58 :

Dado el foco $F=(6;3)$ y la recta directriz $L=\{(1;-1)+r(-1;1)\}$ de una parábola. Hallar la ecuación de dicha parábola.

RESOLUCIÓN :

* Sea P , la intersección del eje focal con la directriz:



$d|F;L|=2p=\left|Comp\ (-1;1)\overrightarrow{P_oF}\right|$

$2p=\left|\frac{(5;4).(-1;1)}{2}\right| \Rightarrow p=\frac{\sqrt{2}}{4}$

* Del gráfico :

$\vec{u}$= Vector direccional de x'

$\Rightarrow \vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;-1) \Rightarrow \vec{u}^{\perp}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1)$

$V=F-p\vec{u}=(6;3)-\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1)=\frac{1}{4}(23;11)$

* Como $x'^2=4py' \Rightarrow x'^2=\sqrt{2}y'$

Ecuación de la parábola :

$\mathcal{P}=(\frac{23}{4};\frac{11}{4})+\frac{1}{\sqrt{2}}(1;-1)x'+\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1)y'$

* Donde : $x'^2=\sqrt{2}y'$

PROBLEMA 59 :

Sea $V=(h;k)$; $h+k<15$, el vértice de una parábola P. Sea $D: 2x-y+1=0$ la directriz de P y T, de ecuación vectorial $T=\{(5;6)+t(1;2)/t \in \mathbb{R}\}$, la tangente en V a la parábola. Si P pasa por $Q=(7;5)$. Hallar la ecuación vectorial y general de la parábola

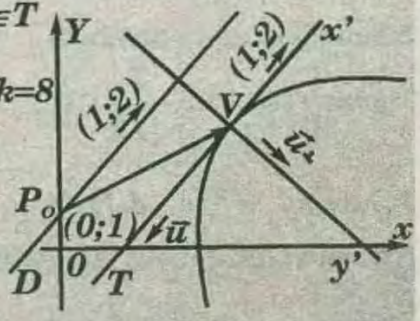
RESOLUCIÓN :

Escalarmente :

$T: y=2x-4$; $(h;k) \in T$

$\Rightarrow 2h-4=k$

pero $h+k<15$ $\Big\} h=6; k=8$



Vectorialmente :

$D=\{(0;1)+r(1;2)\}$; $T=\{(5;6)+t(1;2)\} \Rightarrow D \parallel T$

* De la figura :

$$P=\left|Comp(-2;1)\overrightarrow{P_OV}\right|=\left|\frac{(6;7)(-2;1)}{\sqrt{5}}\right|=\sqrt{5}$$

* Sea $\vec{u}$ = Vector direccional de x', entonces

$$\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1;2)\Rightarrow\vec{u}^{\perp}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2;-1)$$

$$\Rightarrow P=\left\{(6;8)+\frac{1}{\sqrt{5}}(-1;-2)x'+\frac{1}{\sqrt{5}}(2;-1)y'\right\}$$

donde : $x'^2=4\sqrt{5}y'$

PROBLEMA 60 :

SP es la ordenda de un punto P de la parábola $y^2=4px$. Por el punto medio o $\overline{SP}$ se traza la paralela al eje X que corta a la curva en el punto M. la recta SM corta a la tangente en el vértice de la parábola en el punto T. Demostrar que $TO=\frac{2}{3}\times SP$

RESOLUCIÓN :

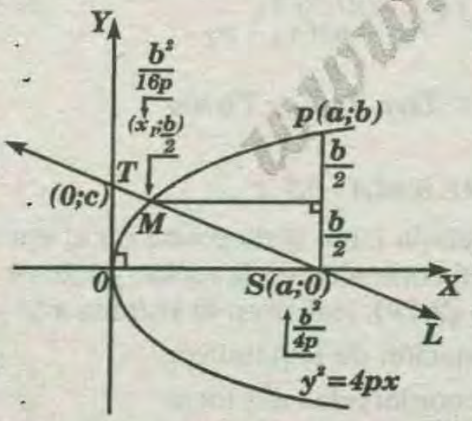
* Ecuación de la parábola : $y^2=4px$ .....(I)

* Las coordenadas del punto P satisfacen a la ecuación (I):

$$b^2=4pa\Rightarrow a=\frac{b^2}{4p}$$

* Las coordenadas del punto M satisfacen a la ecuación (I) :

$$\frac{b^2}{4}=4px_1\Rightarrow x_1=\frac{b^2}{16p}$$



* Por lo tanto : $M=\left(\frac{b^2}{16p};\frac{b}{2}\right)$

* La ecuación de la recta L :

$$y-0=\left(\frac{\frac{b}{2}-0}{\frac{b^2}{16p}-\frac{b^2}{4p}}\right)\left(x-\frac{b^2}{4p}\right)$$

* Efectuando $L: 8px+3by-2b^2=0$

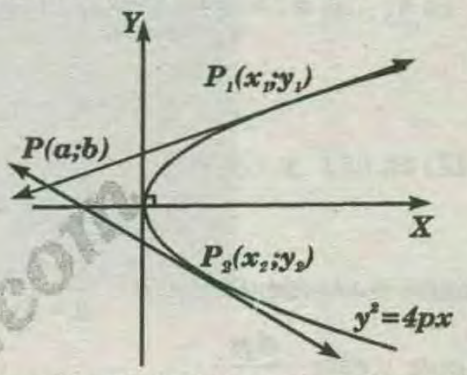
* $T\in$ a la recta $L: 8p\times 0+3bc-2b^2=0\Rightarrow c=\frac{2}{3}b$

* Luego reemplazando : $TO=\frac{2}{3}SP$

PROBLEMA 61 :

Demostrar que la abscisa y la ordenada del punto de intersección de las tangentes a una parábola , son respectivamente iguales al medio geométrico y al medio aritmético entre las abscisas y las ordenadas de los puntos de tangencia.

RESOLUCIÓN:



* De la ecuación de la tangencia a la parábola :

$$\left.\begin{array}{l}*b\times y_1=2p(a+x_1)\\*b\times y_2=2p(a+x_2)\end{array}\right\}b=\frac{2p(x_1-x_2)}{y_1-y_2}\ .....(I)$$

* En la ecuación de la parábola $y_2=4px$

$$\left.\begin{array}{l}y_1^2=4px_1\\y_2^2=4px^2\end{array}\right\}\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2p(x_1-x_2)}{y_1-y_2}\ ...(II)$$

* De (I)=(II): $b=\frac{y_1+y_2}{2}$

* La ecuación de la tangente a la parábola :

$$b\times y_1=2p(a+x_1)\ ....(III)$$

* En (III):

$$\frac{(y_1+y_2)}{2}\times y_1=2p(a+x_1)\Rightarrow y_1^2+y_1\times y_2=4pa+4px_1$$

$$\Rightarrow\sqrt{4px_1}\times=\sqrt{4px_2}=4pa\Rightarrow a=\sqrt{x_1\times x_2}$$

* Finalmente : $a=(a;b)=P(\sqrt{x_1\times x_2};\frac{y_1+y_2}{2})$

PROBLEMA 62 :

Demostrar que el coeficiente angular de una secante a la parábola $y^2=4px$. es : $m=\frac{4p}{y_1+y_2}$

RESOLUCIÓN :

www.GRATIS2.com

* Sean $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ dos puntos de la parábola, la ecuación de la secante que pasa por ellos es :

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* En la ecuación de la parábola :

$$y^2=4px \begin{cases} y_1^2=4px_1 \\ y_2^2=4px_2 \end{cases}$$

* Luego :

$$y_2^2-y_1^2=4p(x_2-x_1)$$

$$\Rightarrow y_2-y_1=\frac{4p(x_2-x_1)}{y_2+y_1} \ldots\ldots (II)$$

*Ahora (II) en (I) : $y-y_1=\dfrac{\frac{4p(x_2-x_1)}{y_2+y_1}}{x_2-x_1}(x-x_1)$

* Efectuando convenientemente : $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{4p}{y_1+y_2}$

* Finalmente : $m=\dfrac{4p}{y_1+y_2}$

PROBLEMA 63 :

I) Sea la parábola : $x^2=4py$. Encontrar la ecuación de la recta tangente a dicha parábola, de la forma : $y=mx+b$, donde la pendiente es conocida.

II) Dada la parábola : $(x-3)^2=12(y-2)$. Encontrar la ecuación de la recta tangente a dicha parábola, de la forma : $y=mx+b$, sabiendo que $m=1/2$.

RESOLUCIÓN :

I) En el punto de tangencia :

$$x^2=4p(mx+b) \Rightarrow x^2-4pmx-4pb=0$$

Condición de tangencia : discriminante$=0$; luego :

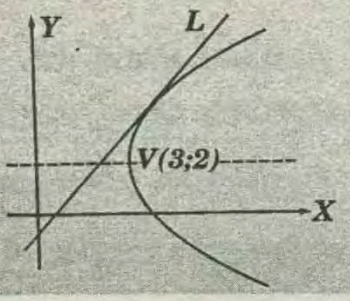
$$\sqrt{(-4pm)^2+4(4pb)}=0 \Rightarrow b=-pm^2$$

$\Rightarrow$ la ecuación de la recta tangente será :

$$y=mx-pm^2 \quad \text{ó} \quad y=mx-\frac{x^2}{4y}m^2$$

II) Por dato : $y=\dfrac{1}{2}x+b$

En el punto de tangencia :



$$(x-3)^2=12(\frac{1}{2}x+b-2)$$

$$x^2-12x+(33-12b)=0$$

Condición de tangencia : $\Delta=0$

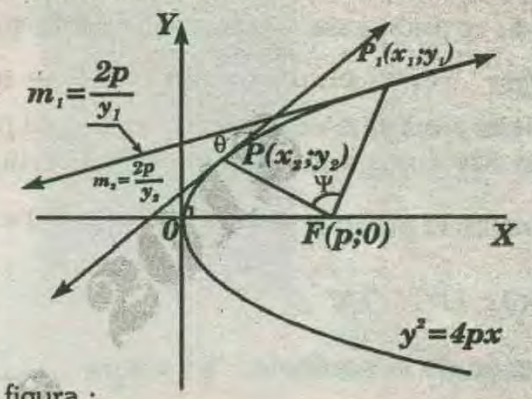
$$\Delta=\sqrt{(-12)^2-4(33-12b)}=0 \Rightarrow b=-\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ la recta tangente es : $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$

PROBLEMA 64 :

Demostrar que el ángulo formado por dos tangentes de la parábola $y^2=4px$ es la mitad del ángulo formado por los radios focales en su punto de contacto.

RESOLUCIÓN :



* De la figura :

$$Tan\theta=\frac{\frac{2p}{y_2}-\frac{2p}{y_1}}{1+\frac{4p^2}{y_1\times y_2}} \Rightarrow Tan\theta=\frac{2p(y_1-y_2)}{y_1\times y_2+4p^2}$$

$$Tan\psi=\frac{\frac{y_2}{x_2-p}-\frac{y_1}{x_1-p}}{1+\frac{y_1\times y_2}{(x_1-p)(x_2-p)}} \Rightarrow Tan\psi=\frac{4p(y_1-y_2)}{y_1\times y_2+4p^2}$$

* Luego : $Tan\theta=\dfrac{1}{2}\times Tan\psi$

PROBLEMA 65 :

Una parábola cuyo vértice está en el eje Y y su eje focal está contenido en la recta : $y=3x+4$, pasa por el punto $(2;20)$. Hallar en el sistema $x'y'$.

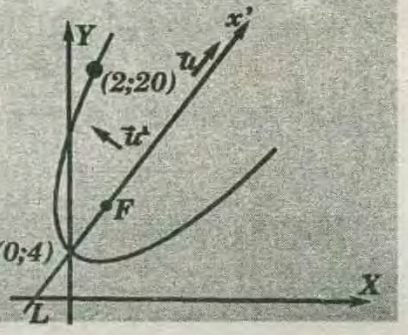
I) La ecuación de la parábola

II) Las coordenadas del foco

III) La ecuación de la recta directriz

RESOLUCIÓN:

I) De los datos :



$$V=(0;4)$$

$$\vec{u}=(\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}})$$

* Ecuación de la parábola

$$\mathcal{P}=\left\{(0;4)+x'\left(\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}}\right)+y'\left(-\frac{3}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right\}....(\alpha)$$

Si $(x;y)=(2;20)\in\mathcal{P}$, en *(I)* se obtiene :

$$2=\left(\frac{x'}{\sqrt{10}}-\frac{3y'}{\sqrt{10}};20=4+\frac{3x'}{\sqrt{10}}+\frac{y'}{\sqrt{10}}\right.$$

* Resolviendo : $(x';y')=(5\sqrt{10};\sqrt{10})$.....$(\beta)$

* la ecuación de la parábola en los ejes x'e y', está dado por : $y'^2=4px'$ .....(φ)

(β) en (φ) , se obtiene $p=\frac{\sqrt{10}}{20}\Rightarrow y'^2=\frac{\sqrt{10}}{5}x'$

luego , las coordenadas del foco serán :

$$F=V+p\vec{u}=(0;4)+\frac{\sqrt{10}}{20}\left(\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=\left(\frac{1}{20};\frac{83}{20}\right)$$

* luego en (α) :

$$\left(\frac{1}{20};\frac{83}{20}\right)=\left\{(0;4)+x'\left(\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{3}{\sqrt{10}}\right)+y'\left(\frac{-3}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right\}$$

* Resolviendo : $F=(x';y')=\left(\frac{\sqrt{10}}{20};0\right)$

II) Intersección de la directriz con el eje focal :

$$D=V-p\vec{u}=(0;4)-\frac{\sqrt{10}}{20}\left(\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{77}{20}\right)$$

* La ecuación de la directriz será :

$$L_D=D+t\vec{a}^{\perp}=\left\{\left(-\frac{1}{20};\frac{77}{20}\right)+t(-3;1)/t\in\mathbb{R}\right\}$$

* Si reemplazamos : $V=(0;4)$ en *(I)*

* Se obtiene : $V(0;0)$ en $(x';y')$

* También : $F=\left(\frac{\sqrt{10}}{20};0\right)$

* Un vector dirección del eje focal en el sistema x' e y', será :

$$\vec{a}'=F-V=\left(\frac{\sqrt{10}}{20};0\right)-(0;0)=\frac{\sqrt{10}}{20}(1;0)$$

* La intersección de la directriz con el eje focal , en el sistema x' e y' será :

$$D=V-p\vec{u}=(0;0)-\frac{\sqrt{10}}{20}(1;0)=\left(-\frac{\sqrt{10}}{20};0\right)$$

* La ecuación de la directríz en $x'-y'$ es :

$$L_D:\left\{\left(-\frac{\sqrt{10}}{20};0\right)+r(0;1)/r\in\mathbb{R}\right\}\text{ó } x'=-\frac{\sqrt{10}}{20}$$

PROBLEMA 66 :

Hallar la ecuación de la tangente y de la normal de la parábola : $y^2=4x$ en el punto $(1;-2)$

RESOLUCIÓN:

* Si la ecuación de la curva es : $y^2=4x$

la ecuación de su tangente será : $yy_o=4\left(\frac{x+x_o}{2}\right)$

donde $(x_o;y_o)$ es punto de tangencia.

por dato: $(x_o;y_o)=(1;-2)$

reemplazando : $-2y=4\left(\frac{x+1}{2}\right)$, de donde :

$T: x+y+1=0$ .....Rpta.

* Ecuación de la normal en el punto $(1;-2)$

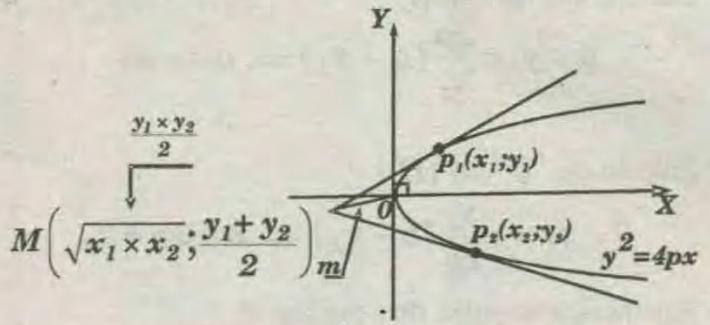
$m_N=-\frac{1}{m_t}=-\frac{1}{-1}=\frac{y+2}{x-1}$, por lo tanto :

$N: x-y-3=0$

PROBLEMA 67 :

Hallar la relación que existe entre las pendientes de dos tangentes cualesquiera de la parábola : $y^2=4px$ con la pendiente de la recta que une el origen de coordenadas con el punto de intersección de las dos tangentes escogidas.

RESOLUCIÓN :



* Por propiedad se tiene las coordenadas del punto

$$M=\left(\sqrt{x_1\times x_2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

* En la ecuación de la parábola : $y^2=4px$

$$\left.\begin{array}{l}*\ y_1^2=4px_1\Rightarrow\sqrt{x_1}=\frac{y_1}{2\sqrt{p}}\\ *\ y_2^2=4px_2\Rightarrow\sqrt{x_2}=\frac{y_2}{2\sqrt{p}}\end{array}\right\}\sqrt{x_1\times x_2}=\frac{y_1\times y_2}{4p}$$

* Sea m la pendiente del $\overline{MO}$ Luego :

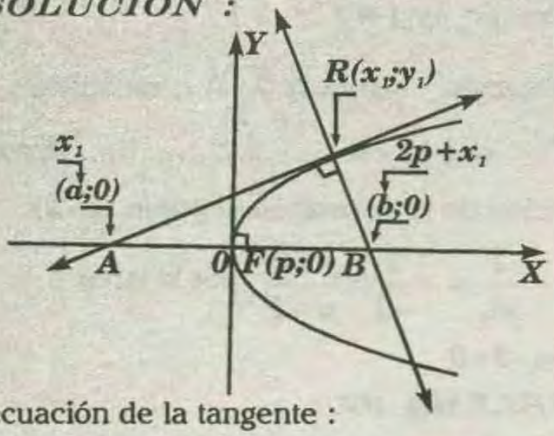
$$m=\frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{y_1\times y_2}{4p}}\Rightarrow m=\frac{2p}{y_1}+\frac{2p}{y_2}$$

* Por lo tanto : $m=m_1+m_2$

PROBLEMA 68 :

En cualquier punto R de una parábola , no siendo el vértice, la tangente y la normal cortan al eje de la parábola en los puntos A y B , respectivamente. Demostrar que los puntos A ; R y B son equidistantes del foco.

RESOLUCIÓN :



* La ecuación de la tangente :

$$y-y_1=\frac{2p}{y_1}(x-x_1)\ .....(I)$$

* La ecuación de la normal :

$$y-y_1=-\frac{y_1}{2p}(x-x_1)\ .....(II)$$

* Cálculo de "a" en (I) :

$$0-y_1=\frac{2p}{y_1}(a-x_1)\Rightarrow a=-x_1$$

* Cálculo de "b" en (II) :

$$0-y_1=-\frac{y_1}{2p}(b-x_1)\Rightarrow b=2p+x_1$$

* Por distancia entre dos puntos :

$$\left.\begin{array}{l} *\ AF=\sqrt{(p+x_1)^2}\ \Rightarrow AF=p+x_1 \\ *\ RF=\sqrt{y_1^2+(x_1-p)^2}\ \Rightarrow RF=p+x_1 \\ *\ BF=\sqrt{(2p+x_1-p)^2}\ \Rightarrow BF=p+x_1 \end{array}\right\}$$ Luego los puntos $A;R;B$ son equidistantes del foco.

PROBLEMA 69 :

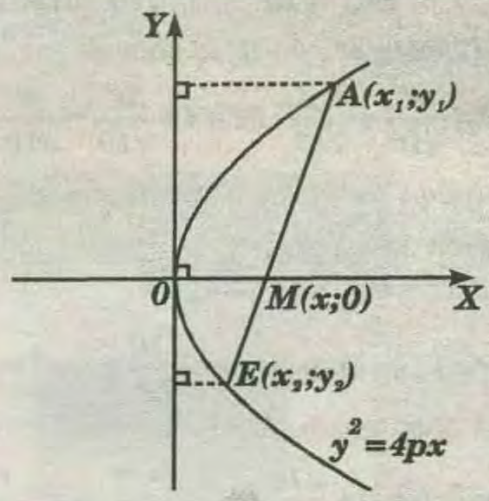
Demostrar que bajando desde los extremos de cualquier cuerda de una parábola perpendicular a la tangente levantada en el vértice ; la media proporcional entre éstas perpendiculares es la distancia que hay desde el vértice al punto en que aquella cuerda corta al eje.

RESOLUCIÓN :

* Sea la parábola : $y^2=4px$. Entonces :

$$\left.\begin{array}{l} y_1^2=4px_1 \\ y_2^2=4px_2 \end{array}\right\}\ y_1^2-y_2^2=4p(x_1-x_2)$$

* Luego : $\dfrac{y_1+y_2}{4p}=\dfrac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\ .....(I)$



* La ecuación de la cuerda $\overline{AE}$ será :

$$0-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)\Rightarrow\frac{x-x_1}{-y_1}=\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\ ...(II)$$

* En $(I)=(II)$:

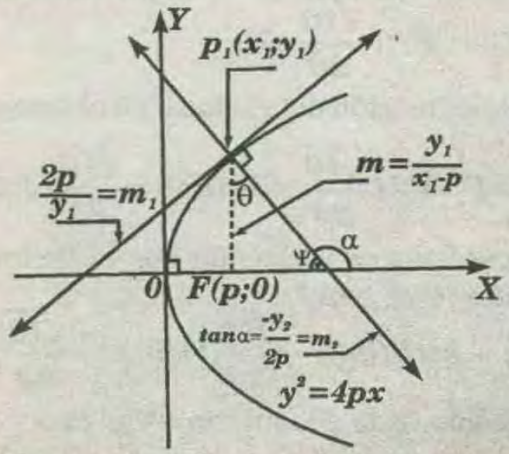
$$x=\frac{4px_1-y_1^2-y_1\times y_2}{4p}\Rightarrow x^2=\frac{y_1^2}{4p}\times\frac{y_2}{4p}$$

* Finalmente : $x^2=x_1\times x_2$

PROBLEMA 70 :

Demostrar que la normal en un punto cualquiera $P_1(x_1\ ;\ y_1)$ de la parábola forma ángulos congruentes con el radio focal que pasa por ese punto y el eje de la parábola.

RESOLUCIÓN :



* Sea $P_1(x_1\ ;\ y_1)$ un punto cualquiera de la parábola $y^2=4px$. Ahora para obtener la pendiente m_1 en el punto P_1 Aplicamos la derivada en $y_1^2=4px_1$ luego, diferenciando :

$$2\times y_1\times\frac{dy_1}{dx_1}=4p$$

* Por lo tanto : $m_1=\frac{2p}{y_1}$ Además : $m_2=\frac{-y_1}{2p}$

* Luego de deduce que : $Tan\psi=\frac{y_1}{2p}$

*Ahora : $Tan\theta=\frac{\frac{-y_1}{2p}-\frac{y_1}{x_1-p}}{1+\left(\frac{-y_1}{2p}\right)\left(\frac{y_1}{x_1-p}\right)}\Rightarrow Tan\theta=\frac{y_1}{2p}$

* Luego :

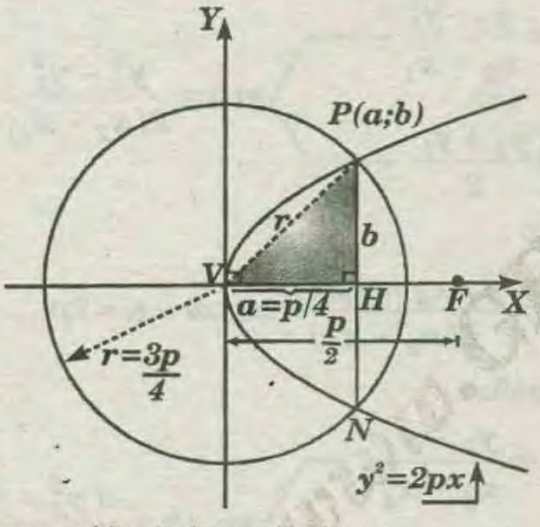
$$Tan\psi=Tan\theta$$

* Entonces : $\psi=\theta$

PROBLEMA 71 :

Una circunferencia tiene su centro en el vértice V de la parábola $y^2=2px$ y su diámetro es *3VF*, siendo *F* el foco de la parábola. Demostrar que la cuerda común de las dos curvas biseca al $\overline{VF}$.

RESOLUCIÓN :



* De la ecuación de la parábola :

$$y^2=2px \quad .....(I)$$

$$y^2=4\left(\frac{p}{2}\right)x. \text{ Luego: } VF=\frac{p}{2}$$

* Por dato :

$$2r=\frac{3p}{2}\Rightarrow r=\frac{3}{4}p$$

* El punto *P(a;b)* pertenece a la parabola , entonces satisface la ecuacion *(I)*.

Luego : $b^2=2pa$ .....*(II)*

* En el $\triangle$*VHP* (*T.* Pitágoras) :

$$(\frac{3p}{4})^2=a^2+b^2\Rightarrow b^2=\frac{9}{16}p^2-a^2$$

* Ahora en *(II)* :

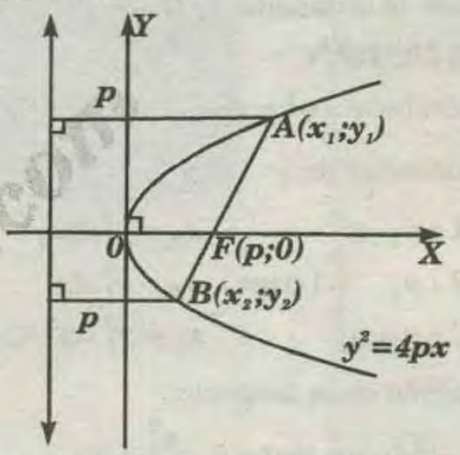
$$\left.\begin{array}{l}16a^2+32pa-9p^2=0\\ 4a\quad -p\\ 4a\quad 9p\end{array}\right\}a=\frac{p}{4}\wedge a=-\frac{9p}{4}$$

El valor que satisface es para $a=\frac{p}{4}$. Lo que implica que la cuerda $\overline{PN}$ biseca a $\overline{VF}$.

PROBLEMA 72 :

Demostrar que siendo la ecuación de la parábola $y^2=px$. La igualdad $\frac{1}{AF}=\frac{1}{FB}=\frac{1}{P}$ es cierta ,donde *F* es foco y $\overline{AB}$ cuerda focal .

RESOLUCIÓN :



* Sea la cuerda focal :

$$y=m(x-p)\Rightarrow y^2=m^2(x-p)^2$$

* Pero $y^2=4px$, Luego :

$$0=x^2-2p(\frac{m^2+2}{m^2})x+p^2$$

* Resolviendo :

$$x_{(1;2)}=p\left(\frac{m^2+2}{m^2}\right)\pm p\sqrt{\left(\frac{m^2+2}{m^2}\right)^2-1}$$

* Las raíces de está ecuación son las abscisas x_1 y x_2

* Luego :

$$x_1+x_2=2p\left(\frac{m^2+2}{m^2}\right) \text{ y } x_1\times x_2=p^2$$

* De la figura :

$$\frac{1}{AF}+\frac{1}{FB}=\frac{1}{p+x_1}+\frac{1}{p+x_2}$$

* Efectuando :

$$\frac{1}{AF}+\frac{1}{FB}=\frac{2p+x_1+x_2}{p^2+(x_1+x_2)p+x_1\times x_2}$$

* Reemplazando :

$$\frac{1}{AF}+\frac{1}{FB}=\frac{2p+2p\left(\frac{m^2+2}{m^2}\right)}{p^2+2p\left(\frac{m^2+2}{m^2}\right)\times p+p^2}$$

* Finalmente :

$$\frac{1}{AF}+\frac{1}{FB}=\frac{1}{p}$$

PROBLEMA 73 :

Si los puntos $A;B$ y C situados sobre una parábola y son tales que sus ordenadas están en progresión geométrica. Demostrar que las tangentes en A y C se cortan sobre la ordenada de B.

RESOLUCIÓN :

* Sea la parábola : $y^2=4px$

* Dato ordenadas de :

$$\left.\begin{array}{l} A: y_1/q \\ B: y_1 \\ C: y_1\times q \end{array}\right\} \text{Luego : } \begin{array}{l} x_A=y_1^2/4pq^2 \\ x_B=y_1^2/4p \\ x_C=y_1^2\times q^2/4p \end{array}$$

* Por ecuación de la tangente :

* Para $A: \frac{y_1}{q}\times y=2p(x+\frac{y_1^2}{4pq^2})$

$$\Rightarrow y_1\times y=\frac{4pq^2x+y_1^2}{2q} \quad ....(I)$$

* Para $C: y_1\times q\times y=2p(x+\frac{y_1^2\times q^2}{4p})$

$$\Rightarrow y_1\times y=\frac{4px+y_1^2q^2}{2q} ...(II)$$

* Igualando (I) y (II) :

$$4pq^2x+y_1^2=4px+y_1^2\times q^2$$

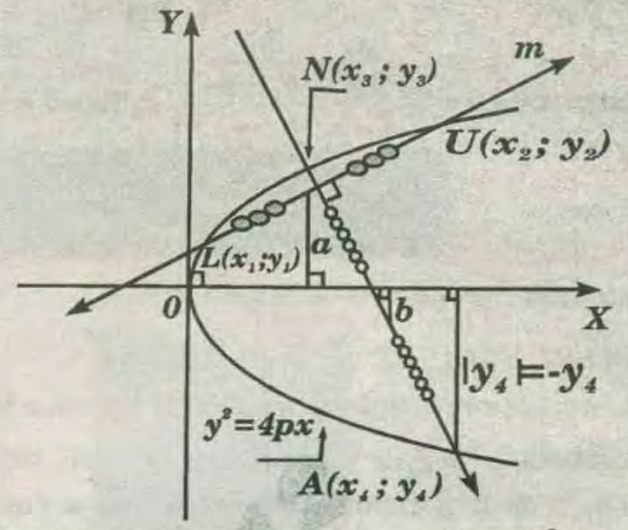
$$\Rightarrow 4px(q^2-1)=y_1^2(q^2-1) \Rightarrow \boxed{x=\frac{y_1^2}{4p}}$$

Ahora vemos que es la abscisa de B, siendo entonces éste el punto de intersección.

PROBLEMA 74 :

Demostrar que cuando en una parábola se trazan dos cuerdas cualesquiera perpendicular entre si $\overline{LU}$ y $\overline{NA}$. las distancias a y b desde sus puntos medios al eje tienen por media proporcional la mitad del parámetro.

RESOLUCIÓN :



* Lo que se quiere demostrar : $a\times b=4p^2$

* Del gráfico :

$$\left.\begin{array}{l} * \ m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ * \ a=\frac{y_2+y_1}{2} \end{array}\right\} ma=\frac{y_2^2-y_1^2}{2(x_2-x_1)}$$

* Luego :

$$ma=\frac{4px_2\times 4px_1}{2(x_2-x_1)} \Rightarrow m\times a=2p.....(I)$$

* Del gráfico :

$$\left.\begin{array}{l} * \ m_1=\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4} \\ * \ b=\frac{-(y_3+y_4)}{2} \end{array}\right\} m_1\times b=\frac{-(y_3^2-y_4^2)}{2(x_3-x_4)}$$

* Luego :

$$m_1\times b=\frac{-(4px_3-4px_4)}{2(x_3-x_4)} \Rightarrow m_1\times b=-2b....(II)$$

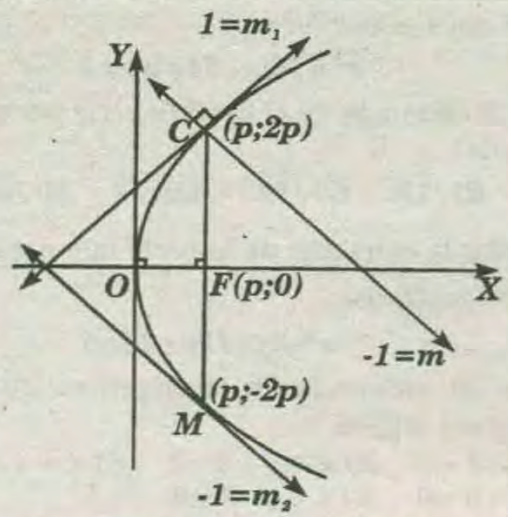
*Ahora $(I)\times(II)$:

$$a\times b\times \underbrace{m\times m_1}_{-1}=-4b^2 \Rightarrow \boxed{a\times b=4b^2}$$

PROBLEMA 75 :

Demostrar que la normal en el extremo de la cuerda focal perpendicular al eje es paralela a la tangente en el otro extremo de esta cuerda.

RESOLUCIÓN :



* La ecuación de la tangente a la parábola en C :

$$2p\times y=2p(x+p) \Rightarrow y=x+p$$

* Luego su pendiente : $m_1=1$

* La ecuación de la tangente a la parábola en M :

$$-2p\times y=2p(x+p) \Rightarrow -y=x+p$$

* Luego su pendiente : $m_2=-1$

* De la figura , se deduce que la tangente en M y la normal en C son paralelas .

PROBLEMA 76 :

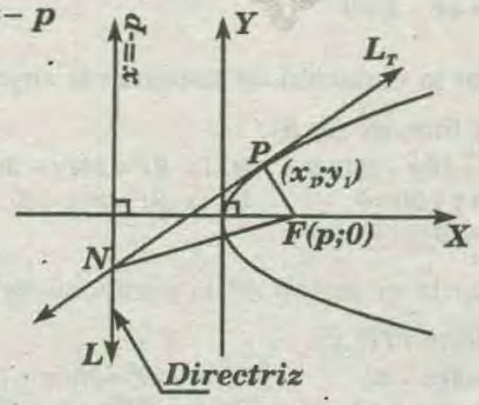
Demostrar que las directrices que resultan de unir el foco F de una parábola con el punto P de contanto de la tangente, y el punto N donde ésta corta a la directriz son perpendicualares .

RESOLUCIÓN :

* Sea la parábola : $y^2=4px$

$L_T : y_1\times y=2p(x+x_1)$

$L : x=-p$



* Interceptando L_T y L se obtiene las coordenadas del punto :

$$N=(-p;\frac{2p}{y_1}(x_1-p))$$

* La pendiente $\overline{FP}$: $m_1=\dfrac{y_1}{x_1-p}$

* La pendiente $\overline{FN}$: $m_2=\dfrac{-(x_1-p)}{y_1}$

* Luego : $m_1\times m_2=-1$

PROBLEMA 77 :

La ecuación de una cuerda focal de la parábola $x^2-8x+3ny-2=0$ es la recta $L: 2x-2y-15=0$. Sabiendo que n es negativo ; hallar el área del triángulo que se forma uniendo los extremos del lado recto con el vértice de la parábola .

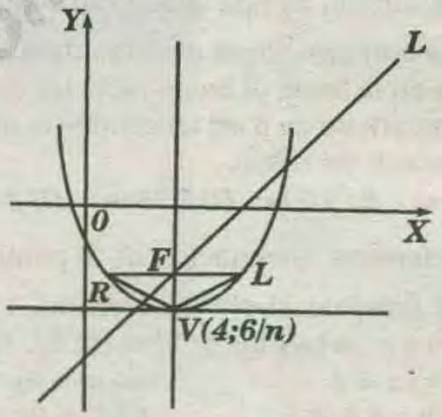
RESOLUCIÓN :

$x^2-8x+3ny-2=0 \Rightarrow (x-h)^2=4p(y-k)$

$x^2-8x+16=-3ny+2+16 \Rightarrow (x-4)^2=-3ny+18$

$\Rightarrow (x-4)^2=-3n\left(y-\dfrac{6}{n}\right) \Rightarrow V\left(4;\dfrac{6}{n}\right) \Rightarrow$ IV cuadrante

$(I)\ldots\ldots\ldots p=\dfrac{-3n}{4} \Rightarrow p=+$



* Por ser una parábola vertical : Ecuación de eje de simetría: $x=h \Rightarrow x=4$

$L: 2x-2y-15=0$

x	y
0	-7,5
7,5	0

* Por ser una parábola vertical :

$$F(h;k+p)=F\left(4;\frac{6}{n}-\frac{3n}{4}\right)$$

$$F\left(4;\frac{24-3n^2}{4n}\right)\in L:\ 2(4)-2\left(\frac{24-3n^2}{4n}\right)-15=0$$

$\Rightarrow 32n-48+6n^2-60n=0$

$\Rightarrow 6n^2-28n-48=0 \Rightarrow 3n^2-14n-24=0$

$3n \times 4$, $n \times -6$

$n=-\dfrac{4}{3} \Rightarrow$ En $(I): p=1$

$n=6 \Rightarrow$ no cumple

Area $\triangle LRV=\dfrac{|\overline{LR}|\times|\overline{VF}|}{2}=\dfrac{|4p|\times|p|}{2}=\dfrac{4\times1}{2}=2$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Determine la ecuación de la parábola que tiene vértice en $(-3; 5)$ y cuyos extremos de sus lados rectos son los puntos $L(-5; 9)$ y $R(-5; 1)$

A) $4(x-3) = (y+5)^2$ B) $8(x-3) = (y-5)^2$
C) $4(x+3) = (y+5)^2$ D) $8(x+3) = (y-5)^2$
E) $16(x+3) = (y+5)^2$

02 Calcule la longitud del radio vector del punto de la parábola: $x^2+9y = 0$ cuya abscisa es $-1,5$.

A) 3/2 B) 2 C) 5/2 D) 3 E) 4

03 Determine la ecuación de la directriz de la parábola cuya ecuación es: $3x^2-16y=0$

A) $3y+1=0$ B) $3y+2=0$ C) $3y+4=0$
D) $3y+5=0$ E) $3y+7=0$

04 La entrada de una iglesia tiene la forma de una parábola con una altura máxima de $9\ m$ y un ancho de $12\ m$ en la base, el techo de la iglesia es de vidrio y tiene un ancho de $6\ m$; determine la altura máxima del casquete de vidrio.

A) 2,25 m B) 2,5 m C) 2,75 m D) 3 m E) 3,5 m

05 Determine la ecuación de la parábola cuyo eje focal es paralelo al eje de abscisas, sabiendo que esta curva pasa por los puntos $(0; 0)$, $(8; 4)$, $(3; -1)$

A) $y^2-2y+x=0$ B) $y^2+2y-3x=0$
C) $y^2+2y-x=0$ D) $y^2+2y-x=0$
E) $y^2+2y+3x=0$

06 El vértice de una parábola es el origen del plano coordenada y un extremo de su lado recto es $(2; 4)$. Luego la ecuación de dicha parábola es:

A) $y^2=4x$ B) $y^2=8x$ C) $y^2=12x$
D) $y^2=16x$ E) $y^2=20x$

07 Si el foco de una parábola es el punto $(-3; -1)$ y la ecuación de la directriz es: $y-5=0$, entonces la ecuación de la parábola es:

A) $x^2+6x-12y+33=0$ B) $x^2+6x+12y-15=0$
C) $x^2+6x-6y+9=0$ D) $x^2+6x+6y-9=0$
E) $x^2-6x+12y-15=0$

08 El eje de una parábola es paralelo al eje X, la longitud de su lado recto es 16, el foco es $(5; 11)$ y se abre hacia la derecha. Hallar su ecuación.

A) $(y+11)^2=16(x+1)$ B) $(y-11)^2=16(x+1)$
C) $(y+11)^2=16(x+2)^2$ D) $(y-11)^2=16(x-1)$
E) $(y+11)^2=16(x-1)$

09 La distancia del punto Q al foco de una parábola cuya ecuación es :

$x^2-16y-64=0$ es 5

Calcular la distancia de Q al vértice. (Q pertenece a la parábola)

A) $\sqrt{15}$ B) $\sqrt{17}$ C) $\sqrt{19}$ D) $\sqrt{11}$ E) $\sqrt{20}$

10 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el foco de la parábola:

$x^2-2x-12y+13=0$

y tal que su ordenada en el origen es igual a su abscisa en el origen.

A) $x+y-4=0$ B) $x+y-3=0$ C) $x+y-5=0$
D) $x+y-6=0$ E) $x+y-2=0$

11 Un depósito de agua tiene una sección transversal parabólica cuando el nivel AB del agua alcanza una altura de $6\ m$, $AB=24\ m$. Cuando el nivel desciende $4\ m$, calcular la longitud $A'B'$

A) $6\sqrt{3}$ B) $7\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{3}$ D) $8\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

12 ¿Cuál debe ser la medida del ángulo formado por la cuerda que pasa por el foco de la parábola $y^2=5x$ con su eje, para que la longitud de la cuerda sea 4 veces la del lado recto?

A) 15° B) 30° C) 37° D) 60° E) 45°

13 Dada la parábola que tiene por ecuación:

$y^2+6x+8y+1=0$, entonces el vértice es :

A) (5/2; –4) B) (5;–2) C) (3;–2/3)
D) (1;–2) E) (2;–1)

14 Hallar la ecuación de la parábola tangente al eje Y, cuyo lado recto une los puntos $A(-2; -3)$ y $B(-2; 5)$

A) $y^2-2y+8x+1=0$ B) $y^2-2y+4x-2=0$
C) $y^2-3y+5x+2=0$ D) $y^2-16y+5x+1=0$
E) $y^2+2y+4x-2=0$

15 Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es $(2; 5)$ y foco es $(2; 9)$

A) $x^2-4x+16y-20=0$ B) $(x-2)^2=16(y-5)$
C) $x^2-4x+y+30=0$ D) $(x-2)^2=8(y-5)$
E) $(x+2)^2=16(y+5)$

16 Hallar la ecuación de la parábola con vértice $V(5; 2)$ y foco $F(7; 2)$

A) $(y+2)^2=8(x-5)$ B) $(y+2)^2=16(x+5)$
C) $(y-2)^2=8(x-5)$ D) $(y-2)^2=16(x-5)$
E) $(y-2)^2=4(x-5)$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

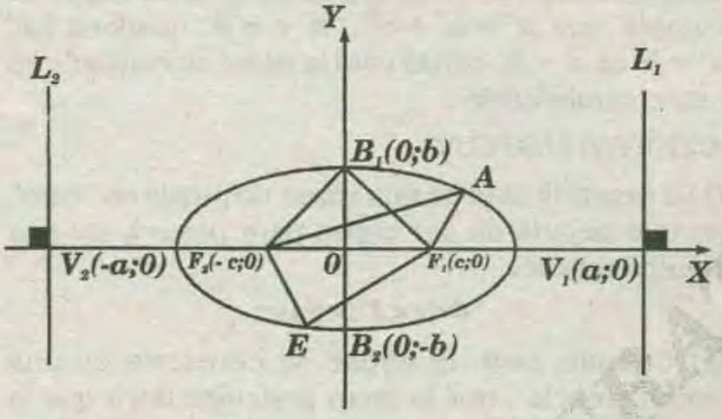
1)D	2)C	3)C	4)A	5)D	6)B	7)B	8)D	9)C	10)C
11)D	12)*	13)*	14)A						

OBJETIVOS :

Conocer la definición , propiedades y aplicaciones de la Elipse , así como saber resolver problemas afines con ello.

ELIPSE

Es el lugar geométrico de los puntos de tal manera que si tomamos un punto cualquiera de la curva , la suma de sus distancias a los focos es igual a $2a$.



* Por definición :

$$\boxed{|\overrightarrow{AF_1}|+|\overrightarrow{AF_2}|=2a} \wedge \boxed{|\overrightarrow{EF_1}|+|\overrightarrow{EF_2}|=2a}$$

* Eje mayor:

$$|\overrightarrow{V_1V_2}|=2a$$

* Eje menor:

$$|\overrightarrow{B_1B_2}|=2b$$

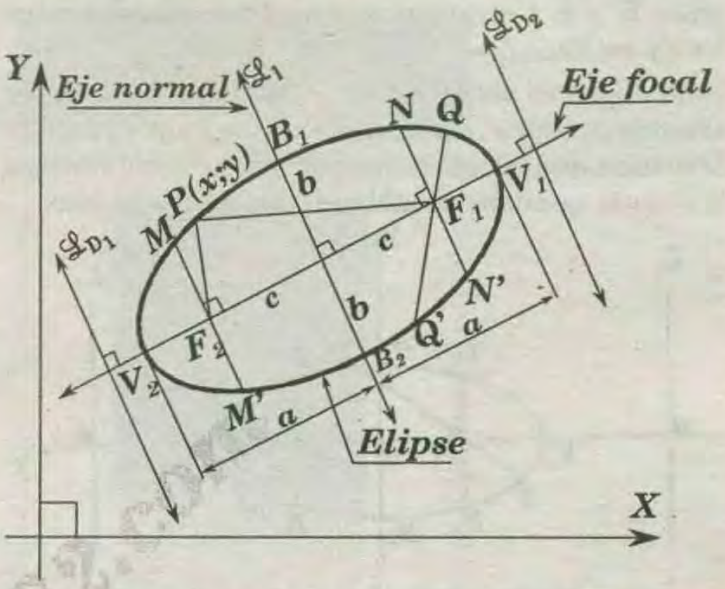
* Distancia focal :

Eje mayor: $|\overrightarrow{F_1F_2}|=2c$

* $a; b; c,$ son números positivos por ser longitudes.

DEFINICIÓN :

Dado dos puntos fijos F_1 y F_2 distintos, denominados focos. Se define la elipse como el lugar geométrico del conjunto de puntos $P(x; y)$ tales que la suma de distancias de P a los focos F_1 y F_2 es igual a una constante convencional $2a$.



* Según la definición, sean F_1 y F_2 los puntos fijos denominados. Focos de la elipse y $P(x; y)$ es un punto cualquiera de la elipse, luego:

$$|d(P;F_1)| + |d(P;F_2)| = 2a$$

ELEMENTOS :

* Centro	: $C(h; k)$
* Foco	: F_1 y F_2 ,$(F_1F_2 = 2c)$
* Eje mayor	: $\overline{V_1V_2}$,$(V_1V_2 = 2a)$
* Eje menor	: $\overline{B_1B_2}$,$(B_1B_2 = 2b)$
* Vértice de la elipse	: V_1 y V_2
* Lado recto	: $\overline{MM'}$ y $\overline{NN'}$
* Cuerda Focal	: $\overline{QQ'}$
* Directriz	: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_{D_1}}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_{D_2}}$
* Eje Focal	: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$
* Eje Normal	: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$

Los ejes Focal y Normal de toda elipse son sus respectivos ejes de simetría.

*Para demostrar una igualdad importante , aplicaremos la definición de la elipse en un extremo cualquiera del eje menor . Tomamos el punto $B_1(0; b)$:

$$|B_1F_1|+|B_1F_2|=2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{c^2+b^2}+\sqrt{c^2+b^2}=2a \Rightarrow 2\sqrt{c^2+b^2}=2a$$

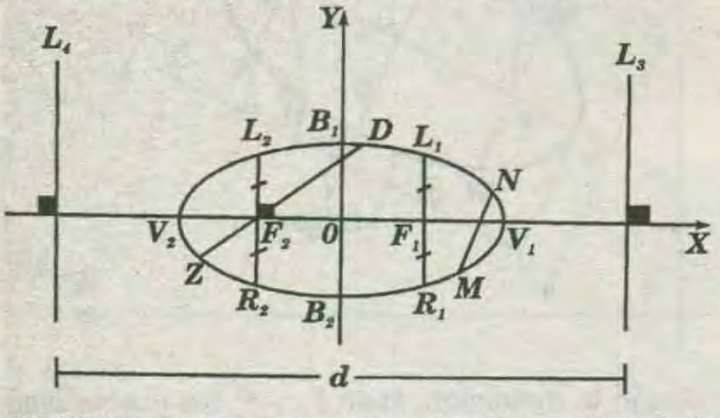
(I)....$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow$ cumple para cualquier tipo de elipse

* De *(I)* podemos concluir lo siguiente :

* En una elipse cualquiera siempre se cumple $\begin{cases} a>b \\ a>c \end{cases}$

* En una elipse cualquiera no hay una relación fija entre b y c ; en algunos casos $b>c$, en otros casos $b<c$ y en otros $b=c$.

Toda elipse es simétrica con respecto a sus ejes de simetría , es decir , con respecto al eje mayor y menor. Si se traza una cuerda perpendicular al eje de simetría la cuerda quedará dividida en dos partes iguales .



CUERDA : es un segmento que une dos puntos de la curva $(\overrightarrow{MN};\ \overrightarrow{L_1R_1};\ \overrightarrow{L_2R_2};\ \overrightarrow{ZD})$.

CUERDA FOCAL : es una cuerda que pasa por el foco $(\overrightarrow{ZD};\ \overrightarrow{L_2R_2};\ \overrightarrow{L_1R_1},)$.

LADO RECTO : es una cuerda focal perpendicular al eje mayor $(\overrightarrow{L_1R_1};\ \overrightarrow{L_2R_2})$. La longitud del lado recto es $\dfrac{2b^2}{a}$.

RADIO VECTOR : es el segmento que une el foco con un punto cualquiera de la elipse .

$$(\overrightarrow{F_1L_1};\ \overrightarrow{F_1R_1};\ \overrightarrow{F_2L_2};\ \overrightarrow{F_2R_2};\ \overrightarrow{F_2Z};\ \overrightarrow{F_2D})$$

DIRECTRICES $(L_3;\ L_4)$ ***:*** son las rectas perpendiculares a la recta que contiene al eje mayor de la elipse, de tal manera que la distancia entre rectas directrices es:

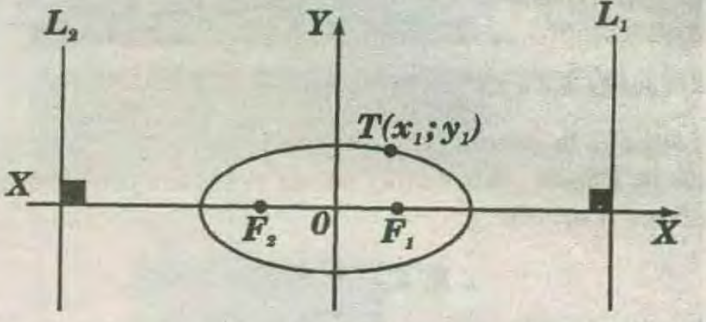
$$d=\frac{2a^2}{c}$$

EXCENTRICIDAD DE UNA ELIPSE

Es un elemento importante de una elipse que se denota por la letra e . Saber el valor de e nos permite identificar la cónica .

$$e=\frac{|\overrightarrow{TF_1}|}{d(T;L_1)}=\frac{|\overrightarrow{TF_2}|}{d(T;L_2)}=\frac{c}{a}$$

como $c<a \Rightarrow e=\dfrac{c}{a}<1$



ANALIZANDO LA EXCENTRICIDAD :

Si $e = 0$: quiere decir que $c = 0$, por lo tanto no habría distancia entre focos. Para toda elipse se cumple que $a^2 = b^2 + c^2$, si $c = 0$ quedaría así: $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$, con lo cual la elipse se convierte en una circunferencia .

CONCLUSIÓN :

I) La excentricidad de una elipse no puede ser 'cero', porque dejaría de ser elipse para pasar a ser una circunferencia .

$0<e<1$: elipse

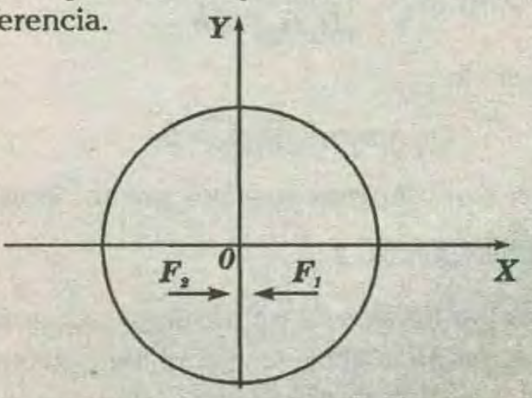
II) Cuando $e=0$, la elipse se convierte en una circunferencia , por lo tanto podemos decir que la circunferencia es un caso particular de la elipse. También podemos decir que la excentricidad de una circunferencia es 'cero'.

$e=0$: circunferencia

Analizaremos ahora gráficamente cuando la elipse tiende a ***'cero'*** y cuando la elipse tiende a ***'uno'*** .

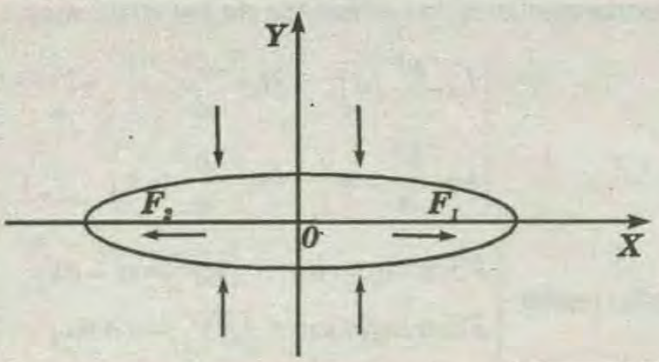
$$e \Rightarrow 0$$

* A medida que los focos se acercan y la «*e*» tiende a 0, la elipse asemeja cada vez más a una circunferencia.



* A medida que los focos se alejan y la «*e*» tiende a 1, la elipse asemeja cada vez más a una línea recta .

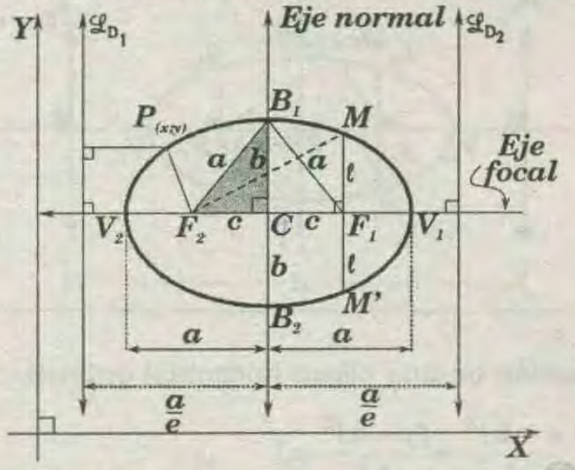
$$e \Rightarrow 1$$



Area de una elipse: para toda elipse: $\boxed{Area=\pi ab}$

PROPIEDADES BASICAS DE LA ELIPSE

En toda elipse se cumple las siguientes propiedades:



I) Por definición:

$$B_1F_1+B_1F_2 = 2a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

* Pero: $B_1F_1 = B_1F_2$

* Luego en (α): $2(B_1F_1) = 2a \rightarrow B_1F_1 = a$

II) En el $\triangle F_1CB_1$ aplicando el teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

$$a > c \quad \text{y} \quad a > b$$

III) Por definición de cónica:

$$d(P; F_1) = e\,(d(P; \mathscr{L}_{D_1}))$$

* Luego :

$$\underbrace{d(B_1;F_1)}_{a} = e\,(B1;\mathscr{L}_{D_1})$$

$$\rightarrow d(B_1;\mathscr{L}_{D_1}) = \frac{a}{e}$$

* Se observa: $d(V_1 ; F_1) = a - c$

$$d(V_1 ; \mathscr{L}_{D_1}) = \frac{a}{e} - a$$

* Luego aplicando la definición de cónica:

$$\frac{a-c}{\frac{a}{e}-a} = e \Rightarrow \boxed{c = a \times e}$$

* Como: $a > c \rightarrow e < 1$

IV) Cálculo de la longitud del lado recto $\overline{MM'}$.

Se observa: $MF_2 = M'F_2 = \ell$

* Por definición:

$$F_2M + \ell = 2a \rightarrow F_2M = 2a - \ell \quad \ldots.(i)$$

* $\triangle F_1F_2M$: aplicando el teorema de Pitágoras:

$$(F_2M)^2 = (2c)^2 + \ell^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(ii)$$

* Reemplazando *(i)* en *(ii)*: $(2a-\ell)^2 = 4c^2+\ell^2$

$$\rightarrow 4a^2 - 4a\ell + \ell^2 = 4c^2 + \ell^2$$

$$\rightarrow a^2 - c^2 = a\ell \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(iii)$$

* Pero: $a^2 - c^2 = b^2$

* Luego se reemplaza b^2 en *(iii)*:

$$a\ell = b^2 \rightarrow \ell = \frac{b^2}{a} \Rightarrow \boxed{MM' = \frac{2b^2}{a}}$$

ECUACIONES DE LA ELIPSE

Las ecuaciones cartesianas de la elipse para todo punto de coordenadas genéricas *(x;y)*; depende de la ubicación del eje focal respecto a los ejes coordenados.

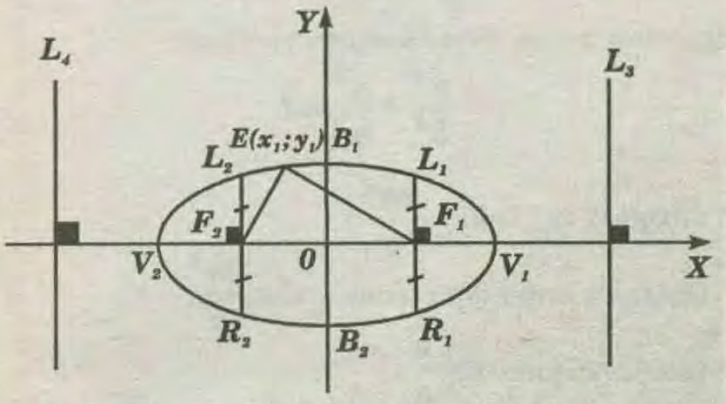
A) PRIMERA FORMA (CANÓNICA) :

Es cuando la elipse tiene su centro en el origen y el eje mayor está sobre el eje X .

Ecuación de una elipse horizontal canónica :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Longitud del lado recto : $\frac{2b^2}{a}$



* Distancia entre directrices : $d=\frac{2a^2}{c}$

* Excentricidad: $e=\frac{c}{a}$

* Ecuaciones de las directrices $\begin{cases} L_3:\ x=\frac{a^2}{c} \\ L_4:\ x=-\frac{a^2}{c} \end{cases}$

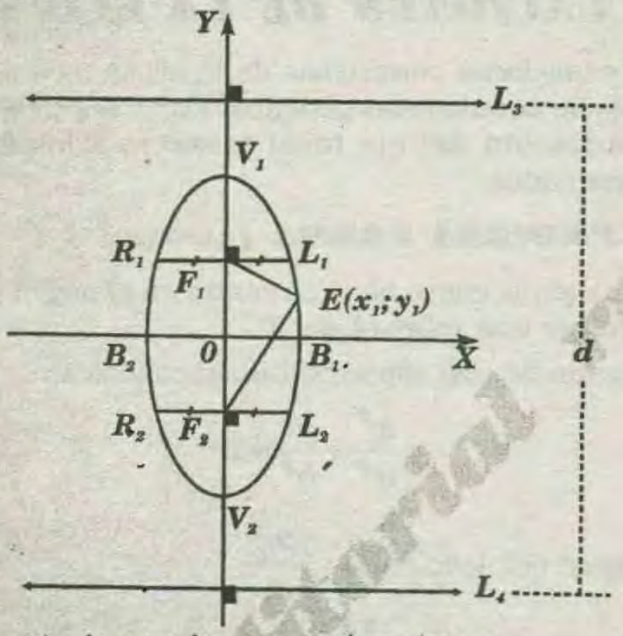
* Coordenadas de los extremos de los lados rectos :

$$\begin{cases} L_1\left(c;\frac{b^2}{a}\right) & R_1\left(c;\frac{-b^2}{a}\right) \\ L_2\left(-c;\frac{b^2}{a}\right) & R_2\left(-c;\frac{-b^2}{a}\right) \end{cases}$$

$$\text{Radio vector}\begin{cases} \text{Foco derecho}: & |\overrightarrow{EF_1}|=a-ex_1 \\ \text{Foco izquierdo}: & |\overrightarrow{EF_2}|=a+ex_1 \end{cases}$$

B) SEGUNDA FORMA (CANÓNICA) :

Es cuando la elipse tiene su centro en el origen y el eje mayor está sobre el eje Y.



Ecuación de una elipse vertical canónica :

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

* Longitud del lado : $\frac{2b^2}{c}$.

* Distancia entre directrices : $d=\frac{2a^2}{c}$

* Excentricidad : $e=\frac{c}{a}$

* Ecuaciones de las directrices $\begin{cases} L_3:\ y=\frac{a^2}{c} \\ L_4:\ y=-\frac{a^2}{c} \end{cases}$

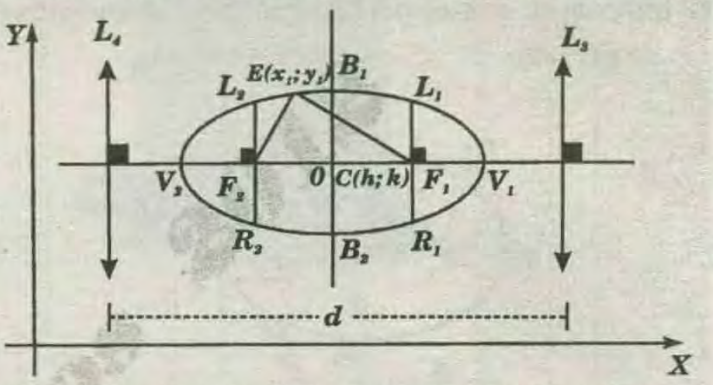
* Coordenadas de los extremos de los lados rectos :

$$\begin{cases} L_1\left(\frac{b^2}{a};c\right) & R_1\left(\frac{-b^2}{a};c\right) \\ L_2\left(\frac{b^2}{a};-c\right) & R_2\left(\frac{-b^2}{a};-c\right) \end{cases}$$

$$\text{Radio vector}\begin{cases} \text{Foco superior}: & |\overrightarrow{EF_1}|=a-ex_1 \\ \text{Foco inferior}: & |\overrightarrow{EF_2}|=a+ex_1 \end{cases}$$

C) TERCERA FORMA : (ORDINARIA)

Es cuando la elipse tiene su centro en el punto $C(h;k)$ y el eje mayor es paralelo al eje X.



* Ecuación de una elipse horizontal ordinaria :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$V_1(h+a;k)\ ;\ V_2(h-a;k)\ ;\ B_1(h;k+b)$

$B_2(h;k-b)\ ;\ F_1(h+c;k)\ ;\ F_2(h-c;k)$

* Longitud del lado recto : $\frac{2b^2}{a}$

* Distancia entre directrices : $d=\frac{2a^2}{c}$

* Excentricidad: $e=\frac{c}{a}$

Ecuaciones de las directrices $\begin{cases} L_3:\ x=h+\frac{a^2}{c} \\ L_4:\ x=h-\frac{a^2}{c} \end{cases}$

Coordenadas de los extremos de los lados rectos :

$$\begin{cases} L_1\left(h+c;k+\frac{b^2}{a}\right) & R_1\left(h+c;k-\frac{b^2}{a}\right) \\ L_2\left(h-c;k+\frac{b^2}{a}\right) & R_2\left(h-c;k-\frac{b^2}{a}\right) \end{cases}$$

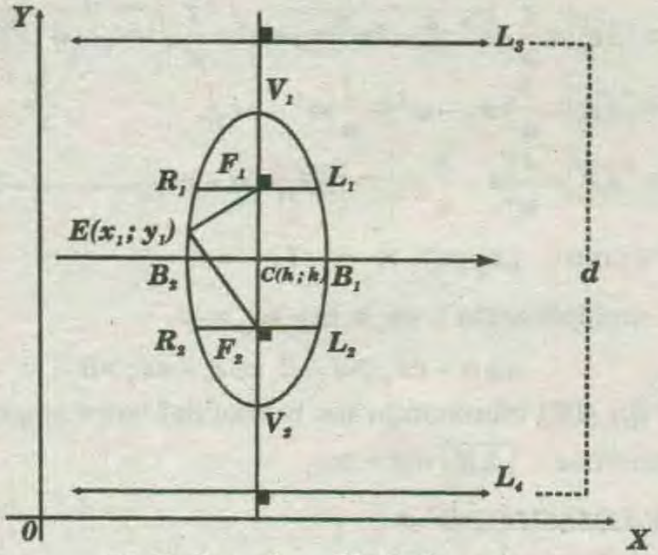
$$\text{Radio vector}\begin{cases} \text{Foco derecho}: & |\overrightarrow{EF_1}|=a-ex_1 \\ \text{Foco izquierdo}: & |\overrightarrow{EF_2}|=a+ex_1 \end{cases}$$

D) CUARTA FORMA (ORDINARIA) :

Es cuando la elipse tiene su centro en el punto $C(h;k)$ y el eje mayor es paralelo al eje Y .

Ecuación de una elipse vertical ordinaria :

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$



$V_1(h;k+a)$ $\quad V_2(h;k-a)$

$B_1(h+b;k)$ $\quad B_2(h-b;k)$

$F_1(h;k+c)$ $\quad F_2(h;k-c)$

* Longitud del lado recto : $\frac{2b^2}{a}$

* Distancia entre directrices : $d=\frac{2a^2}{c}$

* Excentricidad : $e=\frac{c}{a}$

Ecuaciones de las directrices $\begin{cases} L_3: y=k+\frac{a^2}{c} \\ L_4: y=k-\frac{a^2}{c} \end{cases}$

* Coordenadas de los extremos de los lados rectos :

$$\begin{cases} L_1\left(h+\frac{b^2}{a};k+c\right) & R_1\left(h-\frac{b^2}{a};k+c\right) \\ L_2\left(h+\frac{b^2}{a};k-c\right) & R_2\left(h-\frac{b^2}{a};k-c\right) \end{cases}$$

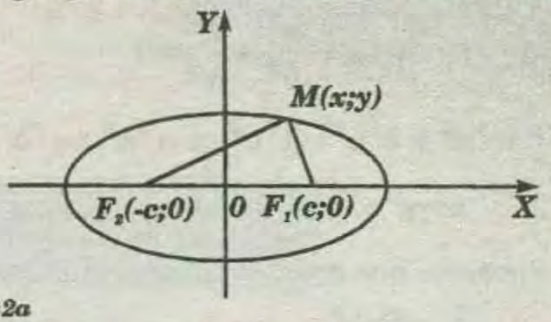
Radio vector $\begin{cases} \text{Foco superior}: & |\overrightarrow{EF_1}|=a-ex_1 \\ \text{Foco inferior}: & |\overrightarrow{EF_2}|=a+ex_1 \end{cases}$

EJERCICIO 1:

Demostrar que la ecuación de una elipse horizontal canónica es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

RESOLUCIÓN :

* Sobre la elipse tomaremos un punto genérico $M(x;y)$ y luego aplicaremos la definición de la elipse:



$|\overrightarrow{MF_1}|+|\overrightarrow{MF_2}|=2a$

$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$

$\Rightarrow \left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$

$\Rightarrow (x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$

$\Rightarrow x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$

$\Rightarrow -2cx=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+2cx \Rightarrow 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx$

$\div 4:\left(a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}\right)^2=(a^2+cx)^2$

$\Rightarrow a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2$

$\Rightarrow a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+c^2x^2$

$\Rightarrow a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$

$\Rightarrow x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$ .....(I)

* En toda elipse se cumple : $a^2=b^2+c^2$

$a^2-c^2=b^2$ .....(II)

* (II) en (I) :

$(x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2)/(a^2b^2)$

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

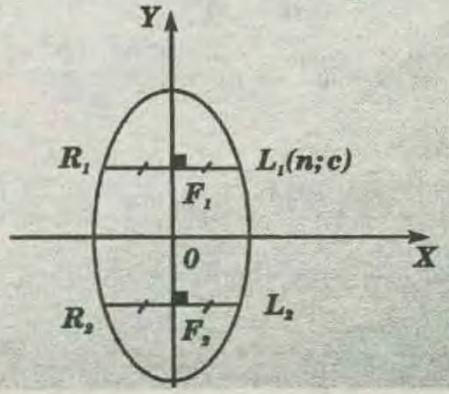
EEJERCICIO 2 :

Demostrar que la longitud del lado recto de una elipse vertical canónica es $\frac{2b^2}{a}$.

RESOLUCIÓN :

* La ecuación de la elipse : $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

* Debemos demostrar: $|\overrightarrow{L_1R_1}|=\frac{2b^2}{a}$



UNID. GRATIS

* Por simetría: $|\overrightarrow{L_1F_1}|=|\overrightarrow{F_1R_1}|=n$

* De la figura $L_1(n;\ c)$

$L_1(n;\ c) \in$ elipse : $\dfrac{n^2}{b^2}+\dfrac{c^2}{a^2}=1$

$$a^2n^2+b^2c^2=a^2b^2 \Rightarrow a^2n^2=a^2b^2-b^2c^2$$

$$\Rightarrow n^2=\frac{b^2(a^2-c^2)}{a^2} \quad .....(I)$$

* Sabemos que en toda elipse se cumple: $a^2=b^2+c^2$

$$a^2-c^2=b^2 \quad .....(II)$$

* *(II)* en *(I)* : $n^2=\dfrac{b^2\times b^2}{a^2}=\dfrac{b^4}{a^2} \Rightarrow n=\dfrac{b^2}{a}$

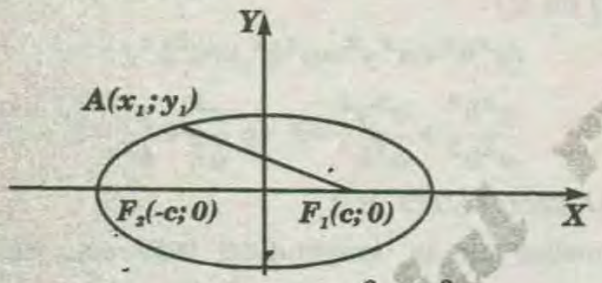
* En *(I)* : $|\overrightarrow{LR_1}|=\dfrac{2b^2}{a}$

EJERCICIO 3 :

Se tiene una elipse horizontal canónica $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Se tiene un punto $A(x_1;\ y_1)$ que pertenece a la elipse y está en el segundo cuadrante . Demostrar que el radio vector que corresponde al foco derecho es $a-ex_1$.

RESOLUCIÓN :



* La ecuación de la elipse : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

* Debemos demostrar que : $|\overrightarrow{AF_1}|=a-ex_1$

$$|\overrightarrow{AF_1}|=\sqrt{(x_1-c)^2+y_1^2} \quad .....(I)$$

$A(x_1;\ y_1) \in$ elipse : $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$

$$b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2 \Rightarrow y_1^2=\frac{a^2b^2-b^2x_1^2}{a^2} \quad .....(II)$$

* *(II)* en *(I)*:

$$|\overrightarrow{AF_1}|=\sqrt{(x_1-c)^2+\frac{a^2b^2-b^2x_1^2}{a^2}} \Rightarrow |\overrightarrow{AF_1}|=\sqrt{x_1^2-2cx_1+c^2+\frac{a^2b^2-b^2x_1^2}{a^2}}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AF_1}|=\sqrt{\frac{a^2x_1^2-2a^2cx_1+a^2c^2+a^2b^2-b^2x_1^2}{a^2}}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AF_1}|=\frac{1}{a}\sqrt{x_1^2(a^2-b^2)-2a^2cx_1+a^2c^2+a^2b^2} \quad .....(III)$$

* En toda elipse se cumple : $a^2=b^2+c^2$

$$a^2-b^2=c^2 \quad .....(IV)$$

* *(IV)* en *(III)* :

$$|\overrightarrow{AF_1}|=\frac{1}{a}\sqrt{x_1^2(a^2-b^2)-2a^2cx_1+a^2(a^2-b^2)+a^2b^2}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AF_1}|=\frac{1}{a}\sqrt{c^2x_1^2-2a^2cx_1+a^4-a^2b^2+a^2b^2}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AF_1}|=\frac{1}{a}\sqrt{c^2x_1^2-2a^2cx_1+a^4}=\frac{1}{a}\sqrt{(cx_1-a^2)^2}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AF_1}|=\frac{1}{a}|cx_1-a^2|=\frac{1}{a}|a^2-cx_1|$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AF_1}|=\frac{1}{a}\left|a-\frac{c}{a}x_1\right| \Rightarrow |\overrightarrow{AF_1}|=|a-ex_1| \quad .....(V)$$

* Como : $(x_1<a) \times (e<1)$

* multiplicando : $ex_1>a-ex_1>-a$

$$\Rightarrow a-ex_1>a-a \Rightarrow a-ex_1>0$$

* En *(III)* eliminando las barras del valor absoluto tenemos : $|\overrightarrow{AF_1}|=a-ex_1$

EJERCICIO 4 :

Determinar la ecuación de la elipse canónica vertical , si se sabe que la distancia entre directrices es $\dfrac{50}{\sqrt{21}}$ y su excentricidad es $\dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

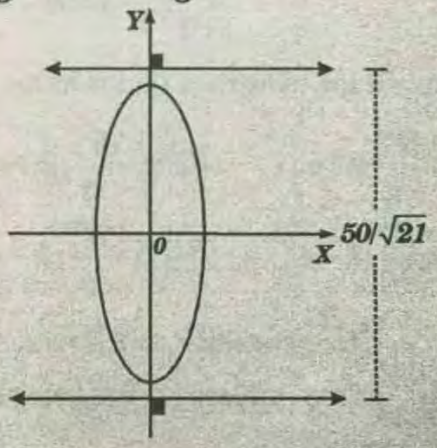
RESOLUCIÓN :

* Por dato :

$$d=\frac{50}{\sqrt{21}} \Rightarrow \frac{2a^2}{c}=\frac{50}{\sqrt{21}} \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{21}}{25}=c \quad .....(I)$$

* Por dato :

$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{21}}{5} \Rightarrow c=\frac{a\sqrt{21}}{5} \quad .....(II)$$



* *(I)*=*(II)*: $\dfrac{a^2\sqrt{21}}{25}=\dfrac{a\sqrt{21}}{5} \Rightarrow a=5$

* En *(II)* : $c=\sqrt{21}$

$\Rightarrow a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 25=b^2+21 \Rightarrow 4=b^2$

* Ecuación de la elipse : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$

EJERCICIO 5 :

Se tiene la elipse $\frac{x^2}{12-n}+\frac{y^2}{22-n}=1$, cuya excentricidad es $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Hallar el valor de la constante n , si $n>0$.

RESOLUCIÓN :

* como $n>0$: $a^2=22-n \Rightarrow a=\sqrt{22-n}$ .....(I)

$b^2=12-n \Rightarrow a^2=b^2+c^2$

$\Rightarrow 22-n=12-n+c^2$

$\Rightarrow \sqrt{10}=c$.....(II)

Por dato del problema : $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.....(III)

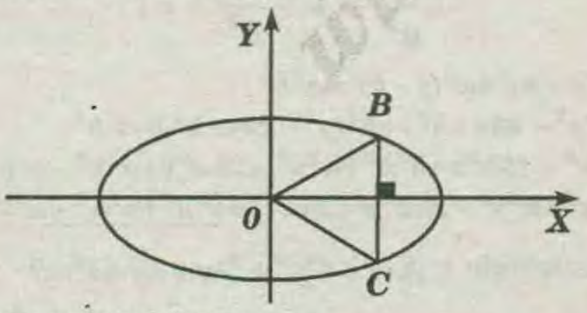
* (I) y (II) en (III) : $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{22-n}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

* Elevando al cuadrado ambos miembros :

$$\frac{10}{22-n}=\frac{5}{9} \Rightarrow \boxed{n=4}$$

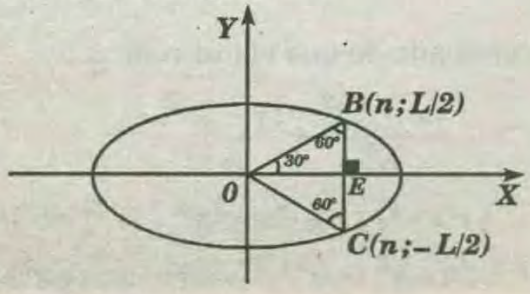
EJERCICIO 6 :

Se tiene la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. El triángulo OBC es equilátero y el lado $\overline{BC}$ es una cuerda vertical . Determinar el área del triángulo .



RESOLUCIÓN :

* Sea el lado del triángulo = L



* El eje X corta al lado $\overline{BC}$ en dos partes iguales:

$$|\overrightarrow{BE}|=|\overrightarrow{EC}|$$

* De la figura : $B\left(n;\frac{L}{2}\right) \in$ elipse:

$$\frac{n^2}{4}+\frac{\frac{L^2}{4}}{1}=1 \Rightarrow n^2+L^2=4.....(I)$$

* De la figura: $m_{\overline{OB}}=tg30°$

$$\frac{\frac{L}{2}}{n}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow L=\frac{2n}{\sqrt{3}}.....(II)$$

* (II) en (I) : $n^2+\frac{4n^2}{3}=4$

$$\Rightarrow 3n^2+4n^2=2 \Rightarrow 7n^2=12 \Rightarrow n=\sqrt{\frac{12}{7}} \Rightarrow n=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

* En (II) : $L=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times\sqrt{3}} \Rightarrow L=\frac{4}{\sqrt{7}}$

* Area Δ_{OBC}: $\frac{Base\times altura}{2}=\frac{|\overline{BC}|\times|\overline{OE}|}{2}=\frac{\frac{4}{\sqrt{7}}\times\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}{2}=\frac{\frac{8\sqrt{3}}{7}}{2}$

*área $\Delta_{OBC}=\frac{8\sqrt{3}}{14}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

EJERCICIO 7 :

Los focos de la elipse están en las rectas L_1: $x-y+1=0$ y L_2: $x+y-3=0$. El eje mayor de la elipse está en la recta L_3: $x=3$. Sabiendo que la excentricidad de la elipse es $1/3$; hallar la ecuación de la elipse y el área del cuadrilátero cuyos vértices son los extremos del eje mayor y del eje menor .

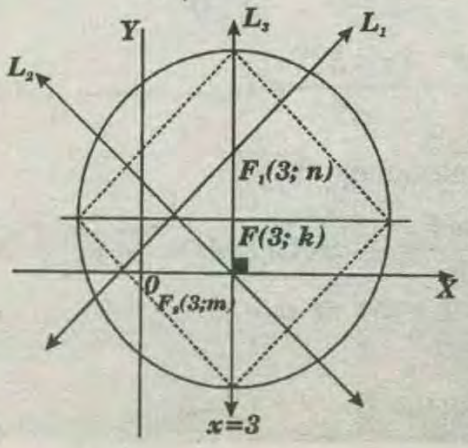
RESOLUCIÓN :

$L_1: x-y+1=0$

x	y
0	1
-1	0

$L_2: x+y-3=0$

x	y
0	3
3	0



$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1.....(\alpha)$$

* De la figura : $h=3$

$$F_1(3;n): L_1 \cap L_3 \begin{cases} x-y+1=0.....(I) \\ x=3.....(II) \end{cases}$$

* *(II)* en *(I)*: $y=4 \Rightarrow F_1(3;4)$

$$F_1(3;m): L_2 \cap L_3 \begin{cases} x+y-3=0.....(III) \\ x=3.....(II) \end{cases}$$

* *(II)* en *(III)* : $y=0 \Rightarrow F_2(3;0)$

$C(3;k)$: punto medio de F_1F_2: $k=\frac{4+0}{2}=2 \Rightarrow C(3;2)$

$$|\overrightarrow{F_1F_2}| = 2c \Rightarrow |4-0|=2c \Rightarrow c=2$$

* Por dato :

$$\frac{c}{a}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{a}=\frac{1}{3} \Rightarrow a=6$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 36=b^2+4 \Rightarrow 32=b^2$$

* En (α): la ecuación de la elipse :

$$\frac{(x-3)^2}{32}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$$

* Area del cuadrilátero=Area del rombo

$$\Rightarrow \frac{2a\times 2b}{2}=\frac{12\times 8\sqrt{2}}{2}=48\sqrt{2}$$

EJERCICIO 8 :

Los extremos del eje mayor de una elipse son *(1; 7)* y *(1;1)*. Una recta $L: x-y+1=0$ pasa por el vértice derecho del eje menor. Hallar la ecuación de la elipse , las ecuaciones de las directrices y el área de la elipse.

RESOLUCIÓN :

$L: x-y+1=0$

x	y
0	1
-1	0

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1.....(\alpha)$$

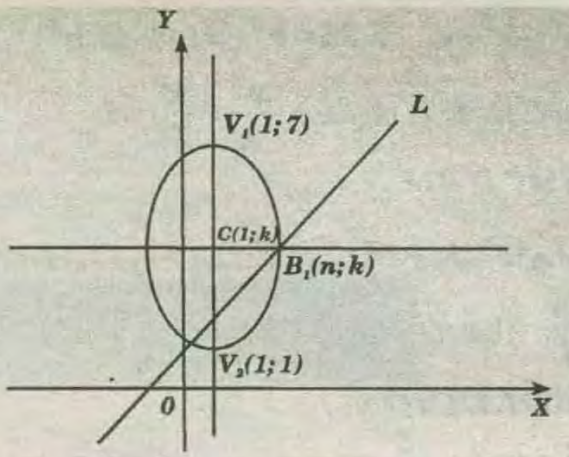
$C(1;k)$: punto medio $\overrightarrow{V_1V_2}$:

$$k=\frac{7+1}{2}=4 \Rightarrow C(1;4) \wedge |\overrightarrow{V_1V_2}| = 2a$$

$$\Rightarrow |7-1|=2a \Rightarrow a=3$$

* De la figura:

$B_1(n;k)=B_1(n;4)$



$B_1(n;4) \in$ elipse: $n-4+1=0 \Rightarrow n=3 \Rightarrow B_1(3;4)$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{CB_1}|=b \quad |1-3|=b \Rightarrow b=2$$

* En (α) : $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$

Ecuaciones de las directrices :

$$\begin{cases} L_1: y=k+\frac{a^2}{c} \Rightarrow L_1: y=4+\frac{9}{\sqrt{5}} \\ L_2: y=k-\frac{a^2}{c} \Rightarrow L_2: y=4-\frac{9}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Área de la elipse $=\pi ab=\pi(3)(2)=6\pi$.

ECUACIÓN GENERAL DE UNA ELIPSE

La ecuación general de una elipse resulta del desarrollo de la forma ordinaria.

* Forma ordinaria de una elipse horizontal :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$$
$$\Rightarrow b^2(x^2-2hx+h^2)+a^2(y^2-2ky+k^2)=a^2b^2$$
$$\Rightarrow b^2x^2-2hb^2x+b^2h^2+a^2y^2-2ka^2y+a^2k^2-a^2b^2=0$$
$$\Rightarrow b^2x^2+a^2y^2-2hb^2x-2ka^2y+\underbrace{b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2}=0$$

Generalizando : $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

Para que sea una elipse $\begin{cases} \bullet\ A\ ;\ C \\ \bullet\ A \neq C \end{cases}$ deben ser de igual signo.

* Forma ordinaria de una elipse vertical :

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

$$\Rightarrow a^2(x-h)^2+b^2(y-k)^2=a^2b^2$$
$$\Rightarrow a^2(x^2-2h+h^2)+b^2(y^2-2ky+k^2)=a^2b^2$$

$\Rightarrow a^2x^2-2ha^2x+a^2h^2+b^2y^2-2kb^2y+b^2k^2-a^2b^2=0$

$\Rightarrow a^2x^2-2ha^2x+a^2h^2+b^2y^2-2kb^2y+b^2k^2-a^2b^2=0$

$\Rightarrow a^2x^2+b^2y^2-2ha^2x-2kb^2y+a^2h^2+b^2k^2-a^2b^2=0$

* Generalizando: $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

Para que sea una elipse $\begin{cases}\bullet\ A;\ C\\ \bullet\ A\neq C\end{cases}$ deben ser de igual signo

La ecuación general de la elipse $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ se puede reducir a la forma ordinaria de la elipse .

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey=-F$$

$$\Rightarrow A\left(x^2+\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{4A^2}\right)+C\left(y^2+\frac{E}{C}y+\frac{E^2}{4C^2}\right)=-F$$

$$\Rightarrow A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=\underbrace{\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4AC}}_{N}$$

Donde: $N=\dfrac{CD^2+AE^2-4ACF}{4AC}$

$$\Rightarrow A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=N\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$\Rightarrow \frac{A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{N}+\frac{C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{N}=\frac{N}{N}\Rightarrow \frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{N}{A}}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{N}{C}}=1$$

Ecuaciones ordinaria de la elipse :

I) Si $N>0$, se trata de una elipse ordinaria horizontal o vertical .

II) Si $N=0$, la ecuación *(I)* es un punto de coordenadas:

$$\left(-\frac{D}{2A};-\frac{E}{2C}\right)$$

III) Si $N<0$; la ecuación *(I)* representa un conjunto vacío .

EJERCICIO 9 :

Determinar si la gráfica de la ecuación dada es una elipse , un punto o un conjunto vacío . Si la gráfica es una elipse hallar su centro y los valores de a y b.

I) $4x^2+9y^2-16x+18y-11=0$

II) $3x^2+2y^2-18x-4y+29=0$

III) $5x^2+4y^2-10x-40y+110=0$

RESOLUCIÓN :

I) $4x^2+9y^2-16x+18y-11=0$

$\Rightarrow 4x^2-16x+9y^2+18y=11$

$\Rightarrow 4(x^2-4x+4)+9(y^2+2y+1)=11+16+9$

$\Rightarrow 4(x-2)^2+9(y+1)^2=36$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1}$$

Es una elipse horizontal ordinaria de centro $C(2;-1)$; $a=3$; $b=2$.

II) $3x^2+2y^2-18x-4y+29=0$

$\Rightarrow 3x^2-18x+2y^2-4y=-29$

$\Rightarrow 3(x^2-6x+9)+2(y^2-2y+1)=-29+27+2$

$\Rightarrow 3(x-3)^2+2(y-1)^2=0$

La gráfica es un punto de coordenadas $(3;\ 1)$.

III) $5x^2+4y^2-10x-40y+110=0$

$\Rightarrow 5x^2-10x+4y^2-40y=-110$

$\Rightarrow 5(x^2-2x+1)+4(y^2-10y+25)=-110+5+100$

$\Rightarrow 5(x-1)^2+4(y-5)^2=-5$

La gráfica no existe o es el conjunto vacío .

EJERCICIO 10 :

Se tiene la elipse $4x^2+ny^2-16x+54y+61=0$. Se sabe que la ordenada del centro de la elipse es -3 y que un cuadrado esta inscrito en la elipse .

Hallar el área del cuadrado si sus lados son perpendiculares a los ejes mayor y menor de la elipse.

RESOLUCIÓN :

$4x^2+ny^2-16x+54y+61=0\Rightarrow 4x^2-16x+ny^2+54y=-61$

$$\Rightarrow 4(x^2-4x+4)+n\left(y^2+\frac{54}{n}y+\frac{729}{n^2}\right)=-61+16+\frac{729}{n}$$

$$\Rightarrow 4(x-2)^2+n\left(y+\frac{27}{n}\right)^2=\frac{729}{n}-45$$

$$\Rightarrow \frac{4(x-2)^2}{\frac{729-45n}{n}}+\frac{n\left(y+\frac{27}{n}\right)^2}{\frac{729-45n}{n}}=\frac{\frac{729-45n}{n}}{\frac{729-45n}{n}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(x-2)^2}{\frac{729-45n}{4n}}+\frac{\left(y+\frac{27}{n}\right)^2}{\frac{729-45n}{n^2}}=1}$$

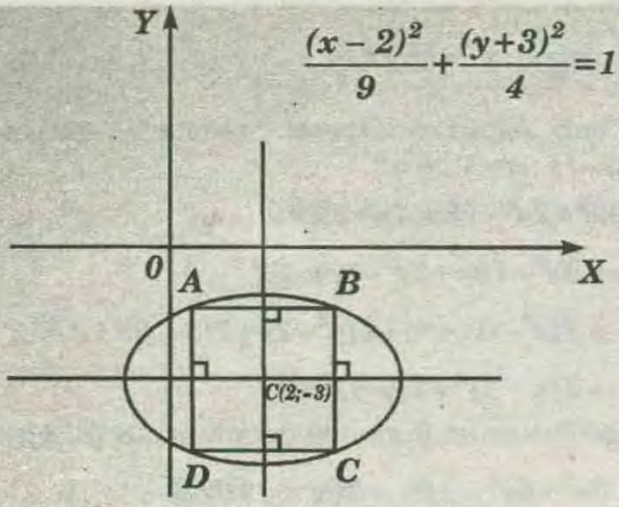
$\Rightarrow h=2$

$\Rightarrow k=-\dfrac{27}{n}\Rightarrow$ Por dato $k=-3\Rightarrow -3=-\dfrac{27}{n}\Rightarrow n=9$

$$\Rightarrow \frac{729-45n}{4n}=\frac{729-45(9)}{36}=9\Rightarrow a^2=9$$

$$\Rightarrow \frac{729-45n}{n^2}=\frac{729-45(9)}{81}=4\Rightarrow b^2=4$$

Al final la ecuación de la elipse queda así:



$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$$

Sea el cuadrado *ABCD* inscrito en la elipse .

* El eje mayor corta a las cuerdas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ en dos partes iguales.

* El eje menor corta a las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ en dos partes iguales .

Longitud del lado del cuadrado = L .

* área del cuadrado = L_2.

De la figura: $B(2+\frac{L}{2};-3+\frac{L}{2})$

$B\left(2+\frac{L}{2};-3+\frac{L}{2}\right)\in$ elipse :

$$\frac{\left(2+\frac{L}{2}-2\right)^2}{9}+\frac{\left(-3+\frac{L}{2}+3\right)^2}{4}=1\Rightarrow\frac{\frac{L^2}{4}}{9}+\frac{\frac{L^2}{4}}{4}=1$$

$$\Rightarrow\frac{L^2}{36}+\frac{L^2}{16}=1\Rightarrow 16L^2+36L^2=36\times16$$

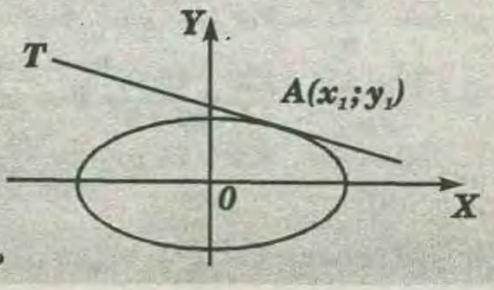
$$\Rightarrow 52L^2=36\times16\Rightarrow L^2=\frac{144}{3}$$

TANGENTES A UNA ELIPSE

Vamos a ver tres métodos para hallar las ecuaciones de las tangentes a una elipse.

I) PRIMER MÉTODO: Cuando se conoce el punto de tangencia.

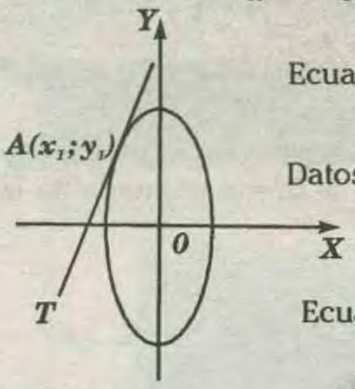
A) CASO1:Usando fórmulas para cada tipo de ecuación .



Ecuación de T=?

Datos conocidos $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ A(x_1;y_1)\end{cases}$

Ecuación de T: $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$



Ecuación de T=?

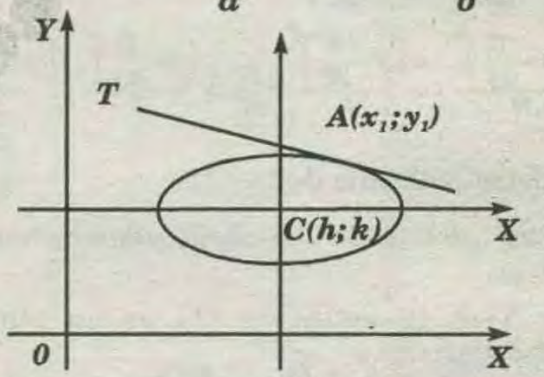
Datos conocidos $\begin{cases}\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\\ A(x_1;y_1)\end{cases}$

Ecuación de T: $\frac{x_1x}{b^2}+\frac{y_1y}{a^2}=1$

Ecuación de T=?

Datos conocidos $\begin{cases}\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\\ A(x_1;y_1)\end{cases}$

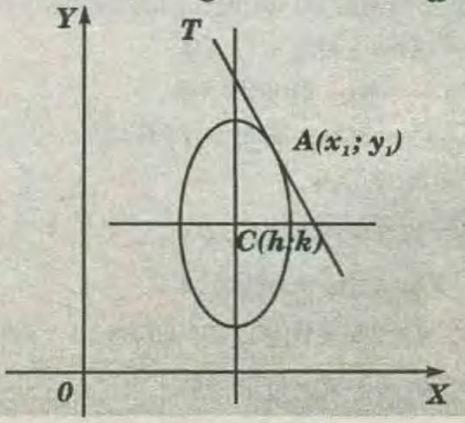
Ecuación de T: $\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2}+\frac{(y_1-k)(y-h)}{b^2}=1$



* Ecuación de T=?

* Datos conocidos $\begin{cases}\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1\\ A(x_1;y_1)\end{cases}$

* Ecuación de T: $\frac{(x_1-h)(x-h)}{b^2}+\frac{(y_1-k)(y-h)}{a^2}=1$



B) CASO 2 : (USANDO TRASLACIÓN DE EJES)

Cuando se conoce el punto de tangencia y se desea hallar la tangente a una cónica se puede aplicar traslación de ejes al punto de tangencia y después aplicar la propiedad aplicada en dicho capítulo.

PROCEDIMIENTO :

1) Al inicio tenemos los siguientes datos :

* Ecuación de la elipse .
* Punto de tangencia .

2) Aplicaremos una traslación de ejes al punto de tangencia.

3) Después de la traslación la ecuación quedará así:

$$x'^2+y'^2+Dx'+Ey'=0 .$$

4) La tangente en el punto de tangencia será:

$$T: Dx'+Ey'=0 .$$

5) Como ya tenemos la ecuación de la tangente *'T'* pero en el sistema final, deberemos pasar esta ecuación al sistema inicial .

II)SEGUNDO MÉTODO:

MÉTODO DEL DISCRIMINANTE

Este método del discriminante sirve para resolver problemas sobre tangentes a cualquier cónica ; es un método general .

PROCEDIMIENTO :

1) Ecuación de la elipse
Ecuación de la tangente } **A** una de las ecuaciones le debe faltar **1** dato.

2) Intersectar : elipse $\cap$ Tangente.

3) A la ecuación que resulta de la intersección , le aplicaremos el discriminante : $b^2-4ac=0$

4) Al aplicar el discriminante, hallaremos el valor que deseamos encontrar .

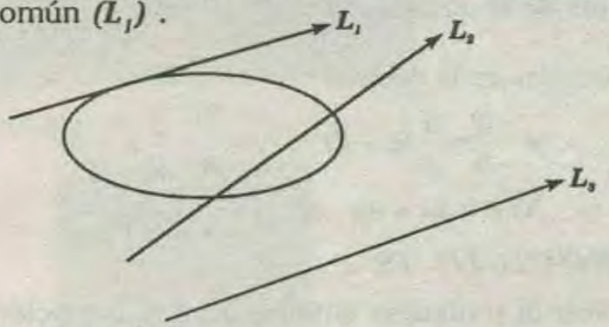
La elipse es una ecuación de segundo grado , como lo es $ax^2+bx+c=0$.

Si quisiéramos determinar la naturaleza de las soluciones de ésta ecuación, deberemos analizar el discriminante :

* Si el $b^2-4ac>0$: significa que hay dos soluciones reales y diferentes. Con relación al gráfico , la elipse y la recta tienen dos puntos en común (L_2).

* Si el $b^2-4ac<0$: significa que hay dos soluciones imaginarias, es decir no hay solución real . Con relación al gráfico , la elipse y la recta no tienen un punto en común (L_3) .

* Si el $b^2-4ac=0$: significa que hay dos soluciones reales pero iguales, es decir hay una solución . Con relación al gráfico , la elipse y la recta tienen un punto en común (L_1) .



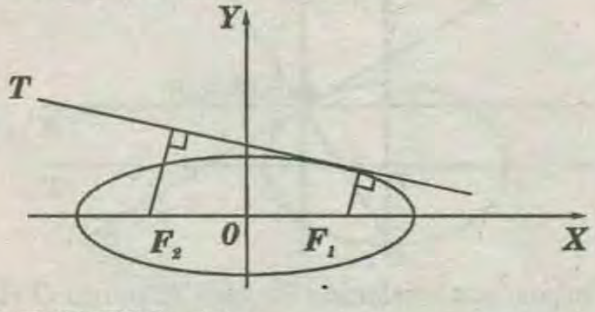
III) USANDO UNA PROPIEDAD :

Esta propiedad cumple para todo tipo de elipse , sea canónica u ordinaria .

$$\boxed{d(F_1;T)d(F_2;T)=b^2}$$

El producto de la distancia de los focos de una elipse a una misma recta tangente es igual a b^2.

* b= semieje menor



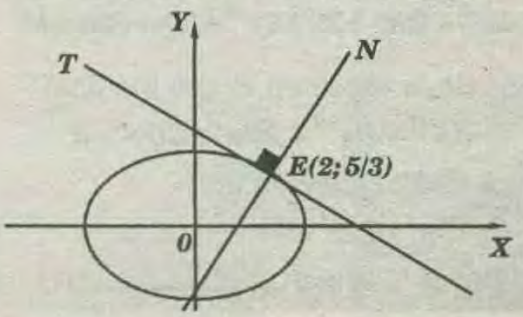
EJERCICIO 11 :

Determinar la ecuación de la tangente y la normal a la elipse $5x^2+9y^2=45$ en el punto $E\left(2;\frac{5}{3}\right)$.

RESOLUCIÓN :

$$\frac{5x^2}{45}+\frac{9y^2}{45}=\frac{45}{45}\Rightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

$$\underbrace{a^2=9\Rightarrow a=3}\ \wedge\ \underbrace{b^2=5\Rightarrow b=\sqrt{5}}$$



Como se conoce la ecuación de la elipse y su punto de tangencia ; para hallar la ecuación de la tangente podemos usar la fórmula :

$$T: \frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1 \Rightarrow T: \frac{2x}{9}+\frac{\frac{5}{3}y}{5}=1$$

$$T: 2x+3y-9=0 \Rightarrow m_T=-\frac{2}{3}$$

* Datos de la normal : $E\left(2;\frac{5}{2}\right) \wedge m=\frac{3}{2}$

* Ecuación de la normal :

$$y-\frac{5}{3}=\frac{3}{2}(x-2) \Rightarrow y-\frac{5}{3}=\frac{3}{2}x-3$$

$$N: 0=9x-6y-8$$

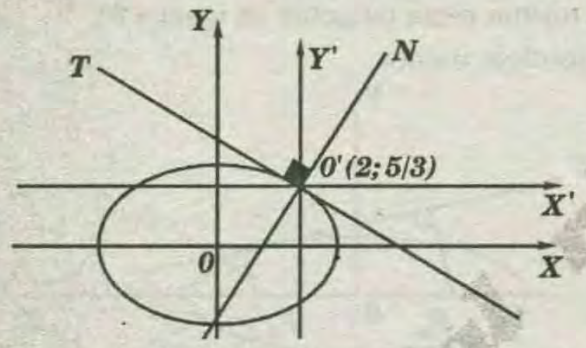
EJERCICIO 12 :

Resolver el problema anterior usando traslación de ejes.

RESOLUCIÓN :

$$\frac{5x^2}{45}+\frac{9y^2}{45}=\frac{45}{45} \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

$$a^2=9 \Rightarrow a=3 \wedge b^2=5 \Rightarrow b=\sqrt{5}$$



* Hacemos una traslación de ejes al punto $O'(2; 5/3)$; obligando a la curva y a la tangente T a pasar por el origen (en el sistema final).

Trasladando la ecuación: $x=x'+2 \wedge y=y'+\frac{5}{3}$

$$5x^2+9y^2=45 \Rightarrow 5(x'+2)^2+9\left(y'+\frac{5}{3}\right)^2=45$$

$$\Rightarrow 5(x'^2+4x'+4)+9\left(y'^2+\frac{10y'}{3}+\frac{25}{9}\right)=45$$

$$\Rightarrow 5x'^2+20x'+20+9y'^2+30y'+25=45$$

* Ecuación de la elipse en el sistema final :

$$5x'^2+9y'^2+20x'+30y'=0$$

* Por propiedad , Ecuación de:

$$T: 20x'+30y'=0$$

$$T: \quad 2x'+3y'=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Ahora tenemos la ecuación de la tangente T pero en el sistema final ; para regresar al sistema inicial haremos :

$$\begin{cases} x-2=x' \\ y-\frac{5}{3}=y' \end{cases}$$

* Reemplazando en (I):

$$T: 2(x-2)+3\left(y-\frac{5}{3}\right)=0 \Rightarrow T: 2x-4+3y-5=0$$

$$\Rightarrow T: 2x+3y-9=0 \Rightarrow m_T=-\frac{2}{3}$$

* Datos de la normal : $E(2;\frac{5}{3}) \wedge m=\frac{3}{2}$

* Ecuación de la normal: $y-\frac{5}{3}=\frac{3}{2}(x-2)$

$$N: 0=9x-6y-8$$

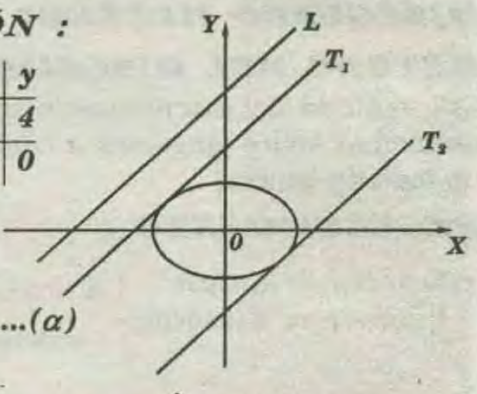
EJERCICIO 13 :

Determinar las ecuaciones de la tangentes a la elipse $x^2+2y^2=4$ que son paralelas a la recta $L: x-y+4=0$. Use el método del discriminante .

RESOLUCIÓN :

$L: x-y+4=0$

x	y
0	4
-4	0



$$x^2+2y^2=4 \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$$

$$m_L=1 \Rightarrow m_{T_1}=m_{T_2}=1$$

$$\Rightarrow T_1: y=mx+b$$

$$\Rightarrow T_1: y=x+b \ldots\ldots\ldots (I)$$

* (I) en (α): $x^2+2(x+b)^2=4$

$$\Rightarrow x^2+2(x^2+2bx+b^2)-4=0$$

$$\Rightarrow x^2+2x^2+4bx+2b^2-4=0$$

$$\Rightarrow 3x^2+4bx+2b^2-4=0$$

* Por ser tangente : $b^2-4ac=0$

$$(4b)^2-4(3)(2b^2-4)=0 \Rightarrow 16b^2-24b^2+48=0$$

$$2b^2-3b^2+6=0 \Rightarrow 6=b^2 \Rightarrow \pm\sqrt{6}=b$$

* Reemplazando en (I) :

Como T_1 corta al eje Y en su parte positiva :

$$T_1: y=x+\sqrt{6} \Rightarrow T_1: 0=x-y+\sqrt{6}$$

Como T_2 corta al eje Y en su parte negativa :

$$T_2: y=x-\sqrt{6} \Rightarrow T_2: 0=x-y-\sqrt{6}$$

EJERCICIO 14 :

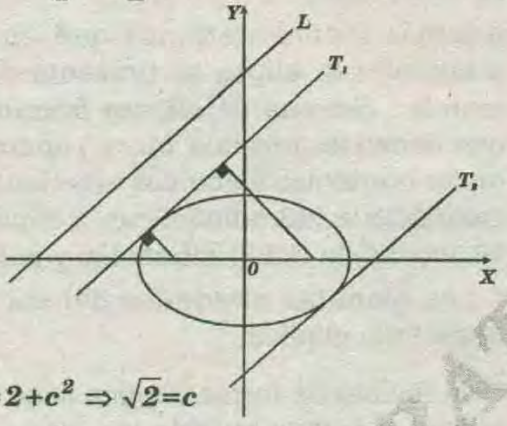
Resolver el problema anterior usando otro método de solución .

RESOLUCIÓN :

* Para resolver el problema con otro método diferente al método del discriminante: podría ser el *III* método estudiado .

$$L: x-y+4=0 \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 4 \\ \hline -4 & 0 \end{array}$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{2y^2}{4}=\frac{4}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow b^2=4$$



$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 4=2+c^2 \Rightarrow \sqrt{2}=c$

$m_L=1 \Rightarrow m_{T_1}=m_{T_2}=1$

$\Rightarrow T_1: y=mx+b \Rightarrow T_1: y=x+b$

$\Rightarrow T_1: 0=x-y+b$.....(I)

* Por propiedad : $d(F_1;T_1)xd(F_2;T_2)=b^2$

$$\frac{|\sqrt{2}+b|}{\sqrt{2}}\times\frac{|-\sqrt{2}+b|}{\sqrt{2}}=2$$

$$\Rightarrow \frac{|(b+\sqrt{2})(b-\sqrt{2})|}{2}=2 \Rightarrow |b^2-2|=4$$

(+)	(−)
$b^2-2=6$	$-b^2+2=4$
$\Rightarrow b^2=6$	$\Rightarrow b^2=-2$ *No existe solución*

* Reemplazando en *(I)* :

Como T_1 corta al eje Y en su parte positiva :

$$b=\sqrt{6} \Rightarrow \boxed{T_1: x-y+\sqrt{6}=0}$$

Como T_2 corta al eje Y en su parte negativa:

$$b=-\sqrt{6} \Rightarrow \boxed{T_2: x-y-\sqrt{6}=0}$$

EJERCICIO 15 :

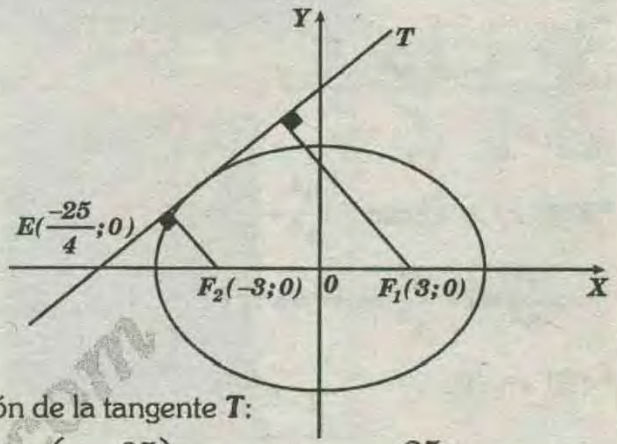
Hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse $16x^2+25y^2=400$. La recta tangente pasa por el punto $E\left(-\frac{25}{4};0\right)$. El punto E no es punto de tangencia y la pendiente de la tangente es positiva .

RESOLUCIÓN :

$$\frac{16x^2}{400}+\frac{25y^2}{400}=\frac{400}{400} \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

$$\underbrace{a^2=25 \Rightarrow a=5} \wedge \underbrace{b^2=16 \Rightarrow b=4}$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 25=16+c^2 \Rightarrow 3=c$$



* Ecuación de la tangente T:

$$T: y-0=m\left(x+\frac{25}{4}\right) \Rightarrow T: \ y=mx+\frac{25m}{4}$$

$$T: 4y=4mx+25m \Rightarrow T: 0=4mx-4y+25m.....(I)$$

* Por propiedad : $d(F_1;T)\times d(F_2;T)=b^2$

$$\Rightarrow \frac{|4m(3)+25m|}{\sqrt{16m^2+16}}\times\frac{|4m(-3)+25m|}{\sqrt{16m^2+16}}=16 \Rightarrow \frac{|37m|\times|13m|}{16m^2+16}=16$$

$$\Rightarrow |481m^2|=256m^2+256 \Rightarrow 481m^2=256m^2+256$$

$$\Rightarrow 225m^2=256 \Rightarrow m^2=\frac{256}{225} \Rightarrow m=\pm\frac{16}{15} \Rightarrow m=\frac{16}{15}$$

* En *(I)*: $T: 4\left(\frac{16}{15}\right)x-4y+25\left(\frac{16}{15}\right)=0$

$$\Rightarrow T: 64x-60y+400=0 \Rightarrow \boxed{T: 16x-15y+100=0}$$

EJERCICIO 16 :

Demostrar que el producto de las dos distancias perpendiculares trazadas desde los focos de una elipse cualquiera a cualquier recta tangente es una constante igual al cuadrado de la longitud del semieje menor.

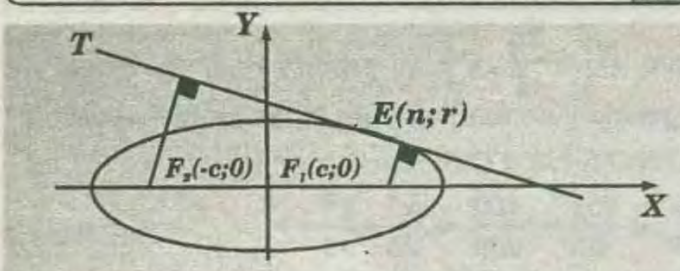
RESOLUCIÓN :

* Tomaremos una elipse horizontal cónica cuyo punto de tangencia sea $E(n; r)$.

* Ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

* Ecuación del tangente:

$$T: \frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad T: \frac{nx}{a^2}+\frac{ry}{b^2}=1$$



* Debemos demostrar: $d(F_1T)\times d(F_2T)=k$

k = constante = b^2

$$\frac{\left|\frac{nc}{a^2}-1\right|}{\sqrt{\frac{n^2}{a^4}+\frac{r^2}{b^4}}}\times\frac{\left|-\frac{nc}{a^2}-1\right|}{\sqrt{\frac{n^2}{a^4}+\frac{r^2}{b^4}}}=k\Rightarrow\frac{\left|1-\frac{nc}{a^2}\right|\times\left|1+\frac{nc}{a^2}\right|}{\frac{n^2}{a^4}+\frac{r^2}{b^4}}=k.....(I)$$

* $E(n;r)\in$ elipse : $\frac{n^2}{a^2}+\frac{r^2}{b^2}=1$

$$\Rightarrow\frac{r^2}{b^2}=1-\frac{n^2}{a^2}\Rightarrow r^2=b^2\left(1-\frac{n^2}{a^2}\right).....(II)$$

* (II) en (I):

$$\frac{\left|1-\frac{n^2c^2}{a^4}\right|}{\frac{n^2}{a^4}+\frac{b^2\left(1-\frac{n^2}{a^2}\right)}{b^4}}=k$$

$$\frac{\left|1-\frac{n^2c^2}{a^4}\right|}{\frac{n^2}{a^4}+\frac{1}{b^2}\left(1-\frac{n^2}{a^2}\right)}=k\Rightarrow\frac{\left|1-\frac{n^2c^2}{a^4}\right|}{\frac{n^2}{a^4}+\frac{1}{b^2}-\frac{n^2}{b^2a^2}}=k$$

$$\Rightarrow\frac{\left|1-\frac{n^2c^2}{a^4}\right|}{\frac{n^2}{a^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+\frac{1}{b^2}}=k\Rightarrow\frac{\left|1-\frac{n^2c^2}{a^4}\right|}{\frac{n^2}{a^2}\left(\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\right)+\frac{1}{b^2}}=k$$

$$\Rightarrow\frac{\left|1-\frac{n^2c^2}{a^4}\right|}{\frac{n^2}{a^2}\left(\frac{-c^2}{a^2b^2}\right)+\frac{1}{b^2}}=k\Rightarrow\frac{\left|1-\frac{n^2c^2}{a^4}\right|}{\frac{1}{b^2}\left(\frac{-n^2c^2}{a^4}+1\right)}=k.....(III)$$

* De la figura :

$$n<a\Rightarrow n^2<a^2\Rightarrow\frac{n^2}{a^2}<\frac{a^2}{a^2}\Rightarrow\frac{n^2}{a^2}<1.....(\alpha)$$

* Por definición :

$$\frac{c}{a}<1\Rightarrow\frac{c^2}{a^2}<1.....(\beta)$$

* Multiplicando (α) y (β):

$$\frac{n^2c^2}{a^4}<1\Rightarrow-\frac{n^2c^2}{a^4}>-1\Rightarrow1-\frac{n^2c^2}{a^4}>0;$$ Reemplazando :

En *(III)* eliminando las barras de valor obsoluto del numerador tendremos :

$$\frac{\left(1-\frac{n^2c^2}{a^4}\right)}{\frac{1}{b^2}\left(\frac{-n^2c^2}{a^4}+1\right)}=k\Rightarrow\boxed{b^2=k}$$

APLICACIONES DE LA ELIPSE

Las elipses tienen varias aplicaciones en la ingeniería y en todas las ciencias. Por ejemplo , las órbitas de los planetas son elípticas y el sol se encuentra en uno de los focos. Algunos puentes tienen un arco semielíptico. En máquinas se usan engranajes elípticos cuando se requiere de una razón de movimiento variable. Las elipses tienen una importante propiedad de reflexión.

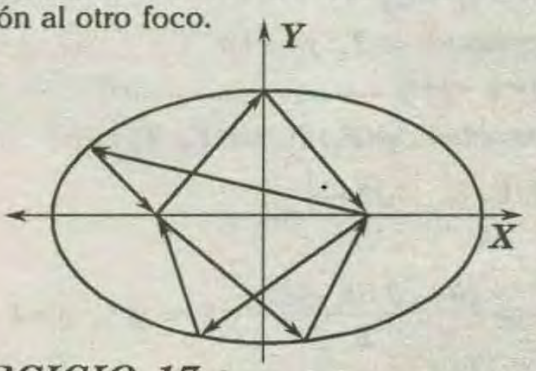
Si una fuente de luz o sonido se coloca en un foco, las ondas trasmitidas por la fuente se reflejarán en la elipse y se concentrarán en el otro foco .

En este principio se basan las ***«galerías murmurantes»***, que son salones diseñados con techos elípticos ; de tal manera que si una persona se encuentra en uno de los focos y murmura algo será escuchado por otra persona que está en el otro foco, ya que el sonido que proviene de uno de sus focos y choca en cualquier punto del techo elíptico se refleja en el otro foco .

Además mencionaremos que en resistencia de materiales la elipse se presenta como elipse de inercia . Sistema de ***elipses homofocales*** (elipses que tienen los mismos focos) aparecen en la teoría de las corrientes eléctricas estacionarias , corrientes caloríficas e hidrodinámicas ; elipses aparecen en las teorías de doble refracción y polarización , etc.

* Los planetas alrededor del sol describen una trayectoria elíptica.

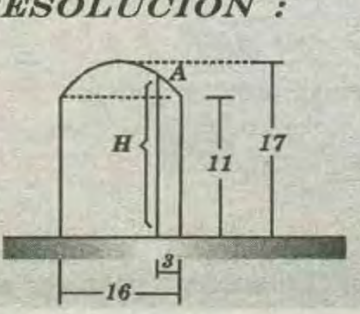
* Un recinto de forma elíptica tiene la propiedad de reflejar el sonido emitido en un foco con dirección al otro foco.

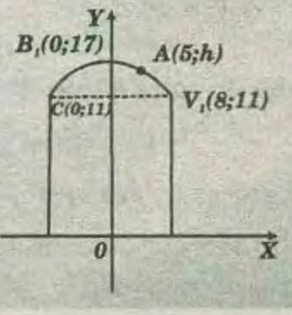


EJERCICIO 17 :

El techo de un pasillo de ***16*** pies de ancho tiene una forma de una semielipse , y tiene ***7*** pies de altura en el centro y ***11*** pies de altura en las paredes laterales. Hallar la altura del techo a ***3*** pies de cualquier pared.

RESOLUCIÓN :





Ecuación de la elipse: $\frac{(x-0)^2}{64}+\frac{(y-11)^2}{36}=1$

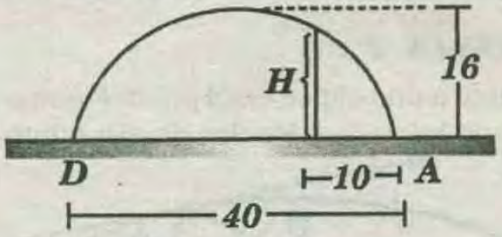
$A(5;H)\in$ elipse : $\frac{25}{64}+\frac{(H-11)^2}{36}=1$

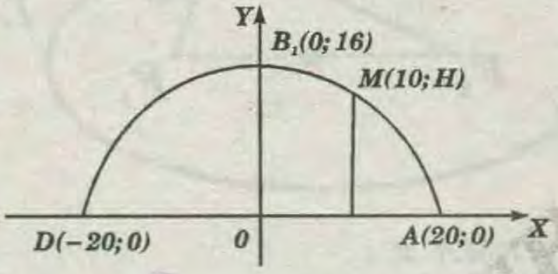
$$\Rightarrow \frac{(H-11)^2}{36}=1-\frac{25}{64}\Rightarrow (H-11)^2=\frac{39}{64}\times 36$$
$$\Rightarrow H-11=4,7\Rightarrow H=15,7 \text{ pies}$$

EJERCICIO 18 :

Un arco en forma de media elipse tiene ***40*** pies de ancho y ***16*** pies de altura en el centro. Encuentre la altura del arco de ***10*** pies del extremo derecho .

RESOLUCIÓN :





* Ecuación de la elipse : $\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{256}=1$

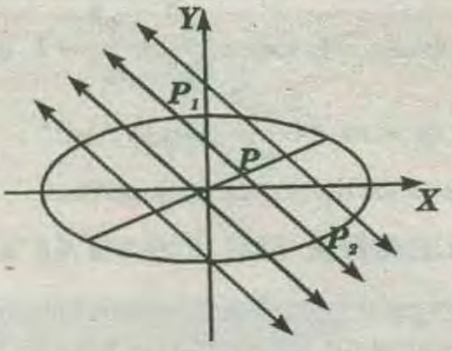
* De la figura: $M(10;H)\in$ elipse :

$$\frac{100}{400}+\frac{H^2}{256}=1\Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{H^2}{256}=1$$
$$\Rightarrow \frac{H^2}{256}=\frac{3}{4}\Rightarrow H=8\sqrt{3}$$

ECUACIÓN DEL DIÁMETRO DE UNA ELIPSE

Es el lugar geométrico de los puntos medios de cualquier sistema de cuerdas paralelas. Para determinar su ecuación, designemos la elipse.

• Si $\varepsilon:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $P(x;y)$ un punto del lugar geométrico y $P_1(x_1;y_1)$, $P_2(x_2;y_2)$ los extremos de la cuerda dado que P biseca al $\overline{P_1P_2}$.



Entonces la ecuación del diámetro será : $y=\frac{-b^2x}{a^2m}$

• Si $\varepsilon:\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ Entonces la ecuación del diámetro es : $y=\frac{-a^2x}{b^2m}$.

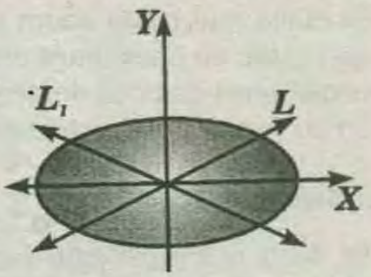
• Si $\varepsilon:\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, Entonces la ecuación del diámetro es : $y-k=\frac{-b^2(x-h)}{a^2m}$

• Si $\varepsilon:\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ Entonces la ecuación del diámetro es : $y-k=\frac{-a^2(x-h)}{b^2m}$

DIÁMETROS CONJUGADOS

Sean dos diámetros tales que si cada uno de ellos biseca a las cuerdas paralelas del otro , se les llama diámetros conjugados.

Sea la elipse : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



La ecuación del diámetro que biseca a las cuerdas de pendiente "m", es : $L: y=\frac{-b^2x}{a^2m}$

Entonces , la ecuación de su diámetro conjugado, es $L_1: y=mx$.

OBSERVACIONES :

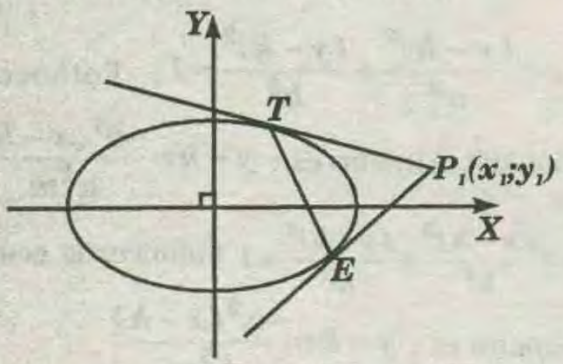
1) Si la elipse es de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, entonces se cumple : $m\times m_1=\frac{-b^2}{a^2}$ siendo "m" y "m_1" las pendientes de los diámetros conjugados.

2) Si la elipse es de la forma $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, entonces se cumple : $m \times m_1=\frac{-a^2}{b^2}$ siendo "m" y "m_1" las pendientes de los diámetros conjugados.

CUERDA DE CONTACTO

Si desde un punto exterior P_1 trazan tangentes a una elipse, el segmento de recta que une los puntos de contacto se llama *CUERDA DE CONTACTO* de P_1 para dicha elipse.

Para determinar su ecuación, consideremos a la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. El punto exterior $P_1(x_1; y_1)$ y además T ; E $\Rightarrow$ puntos de tangencia.

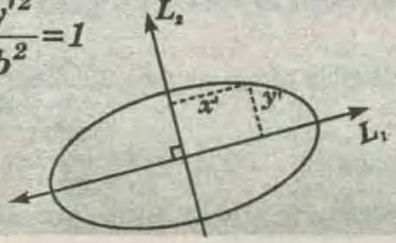


$$\Rightarrow L: a^2y_1y+b^2x_1x=a^2b^2$$

PROPIEDAD INTRÍSENCA DE LA ELIPSE

Es obvio que hasta ahora se ha considerado elipses que están en posiciones ordinaria en particular sus ecuaciones carecen del término xy. Si una elipse está en su forma canónica entonces nos permite notar la siguiente relación : $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$

Es decir la misma que sea la posición de sus ejes mayor y menor . Esta propiedad intríseca describe la forma de la elipse sin referirse a los ejes coordenados y por consiguiente, se puede emplear para hallar la ecuación del eje focal sea la recta $L_1 : Mx+Ny+Q=0$ y la del eje menor la recta $L_2 : Nx-My+R=0$ Por propiedad intríseca de la elipse de tiene : $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$



* Pero :

$$\boxed{x'=d(P;L_2)=\frac{Nx-My+R}{\pm\sqrt{M^2+N^2}}}$$

$$\boxed{y'=d(P;L_1)=\frac{Mx+Ny+Q}{\pm\sqrt{M^2+N^2}}}$$

* Luego se tiene :

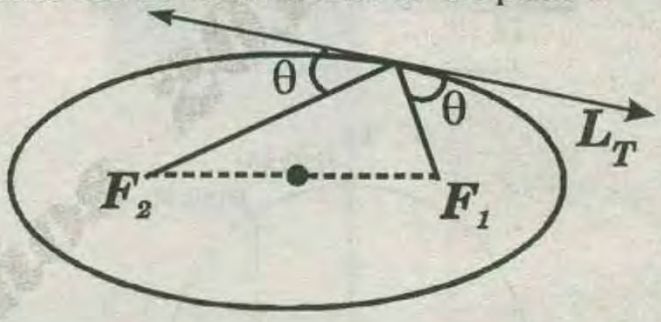
$$\frac{(Nx-My+R)^2}{a^2\left(M^2+N^2\right)}+\frac{(Mx+Ny+Q)^2}{b^2\left(M^2+N^2\right)}=1$$

* De donde la ecuación de la elipse requerida , presenta en estos casos siempre el término xy.

TEOREMAS SOBRE ELIPSES

TEOREMA 1 :

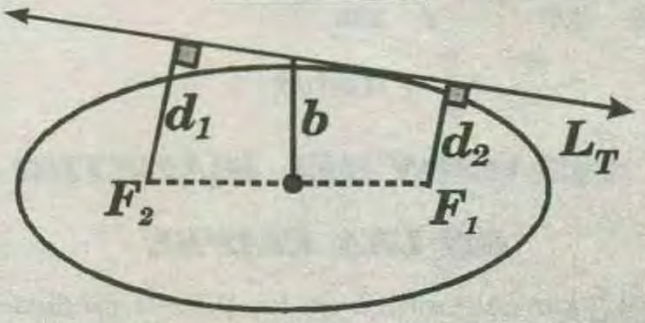
La tangente a una elipse en el punto P forma ángulos iguales con los radios focales de ese punto .



TEOREMA 2 :

El producto de las de las distancias de los focos a una recta tangente de la elipse es constante e igual al cuadrado del semieje menor , es decir :

$$\boxed{d_1d_2=b^2}$$



TEOREMA 3 :

En toda elipse de eje horizontal , las tangentes en los extremos de los lados rectos tienen pendientes que son numéricamente iguales a la excentricidad , es decir : $\boxed{m=\pm\frac{c}{a}}$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Se tiene que una elipse que pasa por los puntos $A(4;-\sqrt{3})$ y $B(2\sqrt{2};3)$. Halle la ecuación de dicha elipse

A) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$ B) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{20}=1$ C) $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$

RESOLUCIÓN :

* Como los puntos $A(4;-\sqrt{3})$ y $B(2\sqrt{2};3)$ pertenecen al elipse, entonces deben satisfacer la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

* Con lo que se tendrá:

$$\frac{4^2}{a^2}+\frac{(-\sqrt{3})^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{16}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1 \text{ .....(I)}$$

$$\frac{(2\sqrt{2})^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{8}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \text{ .....(II)}$$

* Resolviendo (I) y (II): $a^2=20$ y $b^2=15$
* Finalmente la ecuación, resultará:

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$$

RPTA : "A"

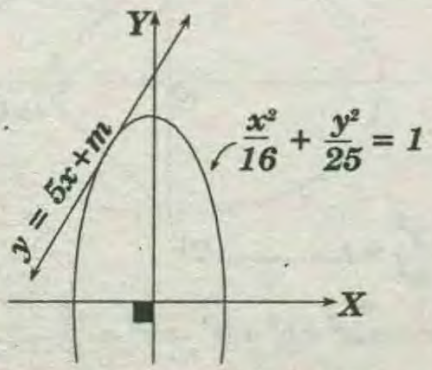
PROBLEMA 2 :

Determine el valor de m si la recta $y=5x+m$ es tangente a la elipse.

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$$

A) $5\sqrt{15}$ .B) $5\sqrt{17}$ C) $5\sqrt{19}$ D) 20 E) 25

RESOLUCIÓN :



* Reemplazando $y=5x+m$ en :

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1 \rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{(5x+m)^2}{25}=1$$

* Simplificando:

$$425x^2+160mx+(16m^2-400)=0$$

* Ahora para que la recta sea realmente tangente, entonces el discriminante de esta última ecuación debe ser igual a cero (condición de tangencia), para que así la elipse y la tangente coincidan en un punto.

$$\Delta=0 \rightarrow (160m)^2-4(425)(16m2-400)=0$$

* Resolviendo: $m=5\sqrt{17}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

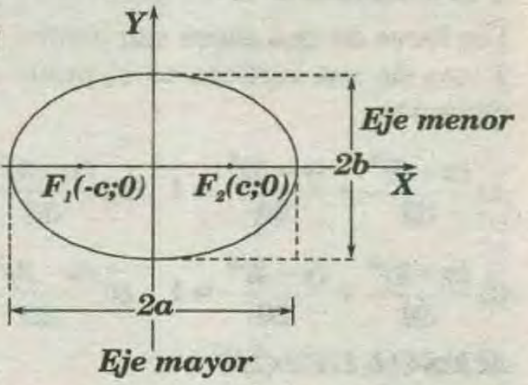
Hallar la ecuación de la elipse que tiene sus focos en $(-4;0)$ y $(4;0)$ y cuyo eje menor mide 6 unidades de longitud.

A) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ B) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ C) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$

RESOLUCIÓN :

Se sabe que la ecuación de una elipse de focos el eje x y de centro en el origen de coordenadas es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



* Se cumple : $b^2+c^2=a^2$
* En este caso :

$$b=3;\ F_1(-4;0) \text{ y } F_2(4;0);$$

* Donde: $2c=8 \rightarrow c=4$
* Luego como: $b^2+c^2=a \rightarrow 3^2+4^2=a^2$, donde: $a=5$
* Aplicando la ecuación de la elipse mencionada tendremos :

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1 \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

RPTA : "B"

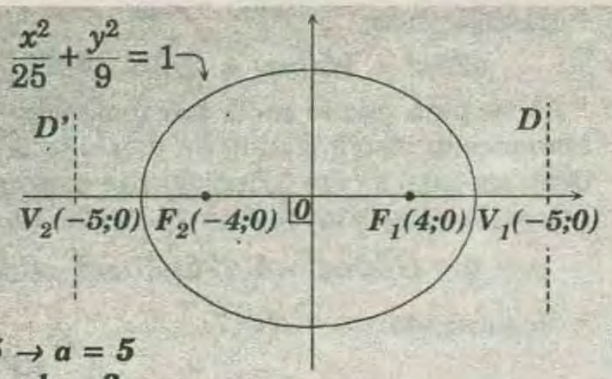
PROBLEMA 4 :

Dada la ecuación de la elipse :

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

Halle las coordenadas del centro focal , los focos , los vértices y las ecuaciones de las rectas directrices.

RESOLUCIÓN :



$a^2 = 25 \rightarrow a = 5$
$b^2 = 9 \rightarrow b = 3$
$c^2 = 25-9 = 16 \rightarrow c = 4$
$\Rightarrow F_1(4;0)$ y $F_2(-4;0)$
$V_1(5;0)$ y $V_2(-5;0)$

* Directrices :

$$D = \frac{a^2}{c} \rightarrow D = \frac{25}{4}$$

$$D' = \frac{a^2}{c} \rightarrow D' = -\frac{25}{4}$$

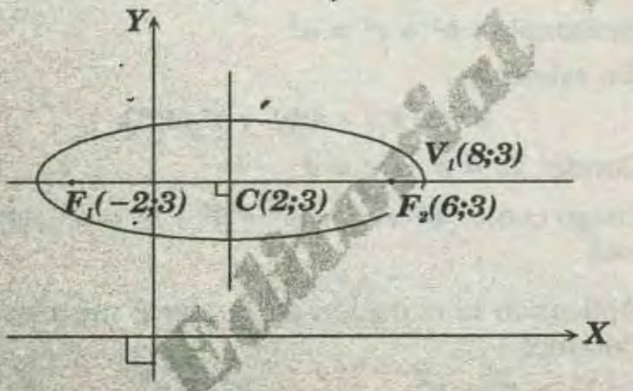
PROBLEMA 5 :

Los focos de una elipse son puntos $(-2;3)$ y $(6;3)$ y uno de sus vértices es el punto $(8;3)$, halle su ecuación.

A) $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y-3)^2}{20}=1$ B) $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+3)^2}{20}=1$

C) $\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-3)^2}{20}=1$ D) $\frac{(x-2)^2}{20}+\frac{(y+3)^2}{36}=1$

RESOLUCIÓN :



* Ecuación de la elipse , de la forma :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

* De la figura : $C(h;k) = C(2;3)$

$a = 8-2 = 6$; $2c = 8 \rightarrow C = 4$

$b^2 = 6^2 - 4^2 \rightarrow b^2 = 20$

* Luego: $\mathscr{E}: \frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y-3)^2}{20}=1$

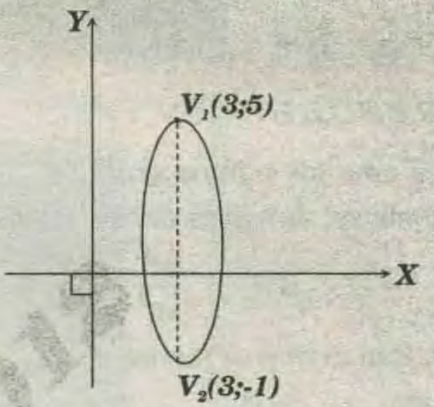
RPTA: "A"

PROBLEMA 6 :

Los vértices de una elipse son: $V_1(3;5)$, $V_2(3;-1)$, además su excentricidad es $\frac{1}{3}$. Halle la longitud del lado recto.

A)3 B) $\frac{11}{3}$ C)5 D) $\frac{16}{3}$ E)9

RESOLUCIÓN :



* Dato: $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$

* Pero : $2a = 6 \rightarrow a = 3 \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{c}{3} \rightarrow c = 1$

$$b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b^2 = 9-1 = 8$$

* Luego, la longitud del lado recto es :

$$LR = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow LR = \frac{2(8)}{3} \Rightarrow LR = \frac{16}{3}$$

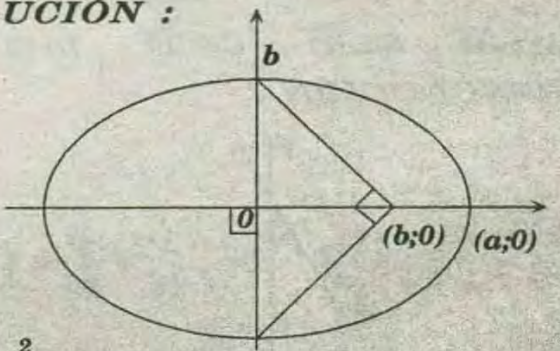
RPTA : "D"

PROBLEMA 7 :

Halle la ecuación de la elipse de eje mayor $2a$ en la que el eje menor, se vea bajo un ángulo que mide $90°$ desde uno de los focos.

A) $x^2 + 2y^2 = a^2$ B) $2y^2 + x^2 = a^2$ C) $4y^2 + x^2 = a^2$
D) $x^2 + 2y^2 = 2a^2$ E) $4y^2 + x^2 = 2a^2$

RESOLUCIÓN :



$\mathscr{E} = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.....(I)

* Pero: $b = c \Rightarrow a^2 = b^2 + b^2 \rightarrow b^2 = \frac{a^2}{2}$.....(II)

* (II) en (I): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\frac{a^2}{2}}=1 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = a^2$

RPTA : "A"

PROBLEMA 8 :

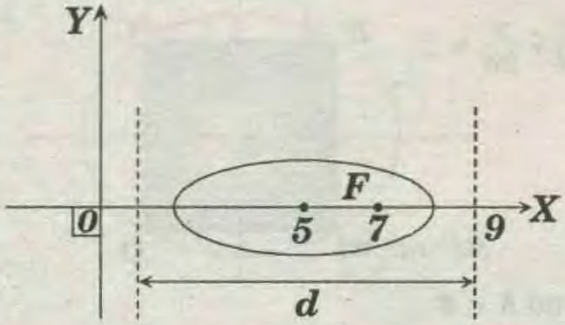
Halle la ecuación y la excentricidad de la elipse cuyas directrices son las rectas L_1: $x-1=0$ y L_2: $x-9=0$, uno de sus focos es $F=(7;0)$.

A) $(x-5)^2+2y^2=8,\ e=\frac{\sqrt{2}}{2}$

B) $(x-5)^2+2(y-1)^2=8,\ e=\frac{\sqrt{2}}{4}$

C) $(x-1)^2+2y^2=1,\ e=\frac{\sqrt{2}}{8}$

RESOLUCIÓN :



* Propiedad :

$$\boxed{d=\frac{2a^2}{c}}$$

* Pero :

$$c=7-5 \rightarrow c=2$$

$$d=9-1 \rightarrow d=8$$

$$\Rightarrow 8=\frac{2a^2}{2} \rightarrow a^2=8 \rightarrow a=2\sqrt{2}$$

$$b^2=8-4 \rightarrow b^2=4 \rightarrow b=2$$

* Luego :

$$\mathcal{E}:\ \frac{(x-5)^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\rightarrow \mathcal{E}:\ (x-5)^2+2y^2=8$$

$$e=\frac{c}{a} \rightarrow e=\frac{2}{2\sqrt{2}} \rightarrow e=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

RPTA : "A"

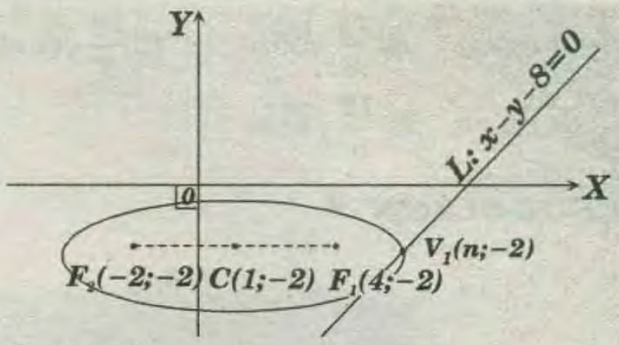
PROBLEMA 9 :

Los focos de una elipse son $F_1(4;-2)$ y $F_2(-2;-2)$. Halle la ecuación de la elipse si uno de sus vértices está sobre la recta $L: x-y-8=0$.

A) $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$ B) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$

C) $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$ D) $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$

RESOLUCIÓN :



$c=4-1=3$

$V_1(n;-2) \in L \Rightarrow n-(-2)-8=0$

$n=6$

* Luego : $a=6-1=5$

* Ahora: $5^2=b^2+3^2 \rightarrow b^2=16$

* Ecuación de la elipse :

$$\mathcal{E}=\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

Halla la ecuación de la elipse cuyo semieje mayor mide 3 y sus focos son los puntos $(0;1)$ y $(4;1)$.

A) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ B) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{36}=1$ C) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{5}=1$

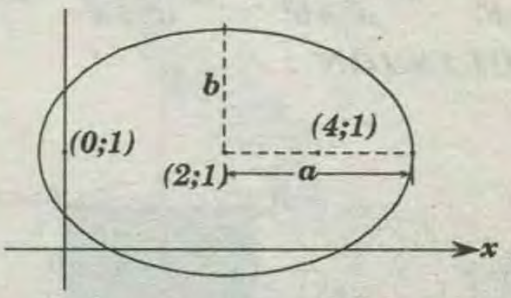
RESOLUCIÓN :

Como los focos están en $(0;1)$ y en $(4;1)$; el centro de la elipse es $(2;1)$. Además se deduce que la distancia desde el centro hasta uno de los focos es: $c=2$; y por dato: $a=3$

* Por lo tanto, usando:

$$c^2=a^2-b^2 \rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}$$

$$b=9-4 \rightarrow b=\sqrt{5}$$



* Puesto que el eje mayor de la elipse es paralelo al eje x, la ecuación es:

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{5}=1$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

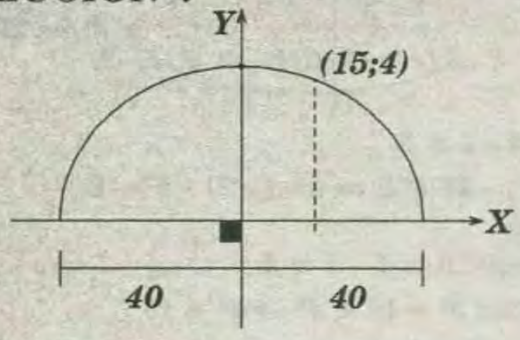
Un arco de $80m$ de luz tiene forma semielíptica. Sabiendo que su altura es $30m$, calcular la altura del arco en un punto situado a $15m$ del centro.

WWW.GRATIS.COM

A) $\frac{5}{2}\sqrt{74}m$ B) $\frac{15}{4}\sqrt{55}m$ C) $\frac{10}{3}\sqrt{65}m$

D) $\frac{9}{2}\sqrt{51}m$ E) $\frac{12}{5}\sqrt{65}m$

RESOLUCIÓN :



* Elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

* Pero: $a^2 = 1600 \ \wedge \ b^2 = 900$

* Elipse: $\frac{x^2}{1600} + \frac{y^2}{900} = 1$

* Ahora: $\frac{15^2}{16} + \frac{H^2}{9} = 100$

$$\rightarrow \frac{H^2}{9} = 100 - \frac{225}{16} \rightarrow H = \frac{15}{4}\sqrt{55}$$

RPTA : "B"

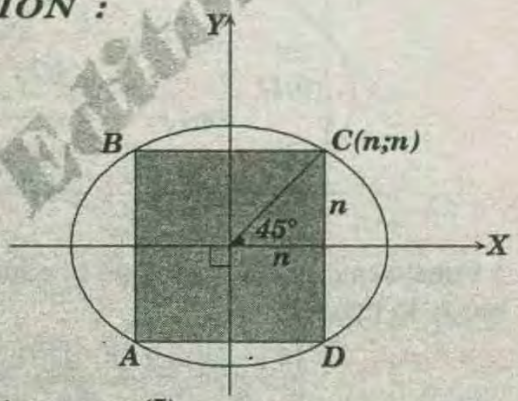
PROBLEMA 12 :

Sea la elipse cuya ecuación es : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Calcule el área de la región cuadrada inscrita a la elipse.

A) $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ B) $\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$ C) $\frac{3a^2b^2}{a^2+b^2}$ D) $\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$

RESOLUCIÓN :



$\mathscr{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.....(I)

* Pero: $C(n;n) \in \mathscr{E}$

* Luego: $\Rightarrow \frac{n^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow n^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

$$S_{ABCD} = (2n)^2 \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$$

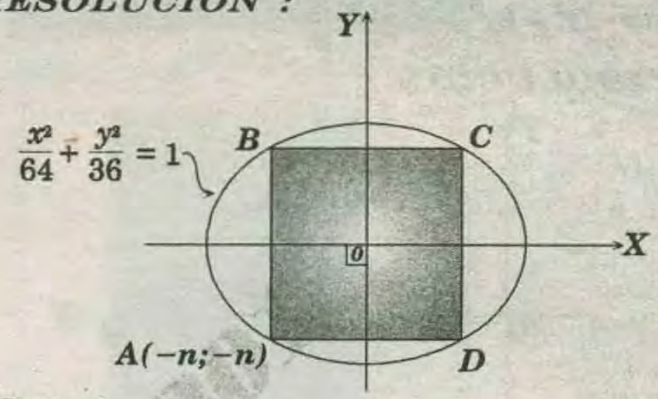
RPTA : "D"

PROBLEMA 13 :

En la elipse de ecuación $9x^2+16y^2 = 576$ se inscribe un cuadrado , halle la suma de las coordenadas de uno de sus vértices del cuadrado.

A) -15 B) $-12,5$ C) $-9,6$ D) $-8,4$ E) $-4,5$

RESOLUCIÓN :



* Como $A \in \mathscr{E}$

$$\Rightarrow \frac{(-n)^2}{64} + \frac{(-n)^2}{36} = 1 \rightarrow n^2\left[\frac{1}{64} + \frac{1}{36}\right] = 1$$

* De donde : $n = 4,8$

* Luego: $-n - n = -2n = -9,6$

RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

En la elipse $\zeta: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, se traza la cuerda MN, el punto $(x_o;y_o)$ pertenece a $\overline{MN}$ y esta ubicado en el punto medio de $\overline{MN}$. Halle la ecuación de la recta que contiene a $\overline{MN}$.

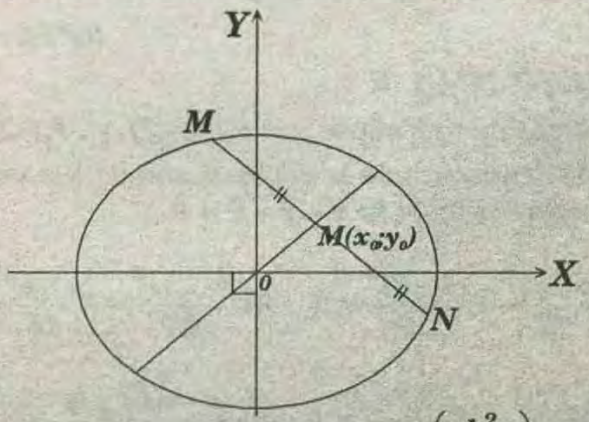
A) $bx_ox + ay_oy + bx_o - ay_o = 0$

B) $b^2x_ox + a^2y_oy + b^2x^2 + a^2y^2_o = 0$

C) $ax_ox - by_oy - ax_o - by_o = 0$

D) $b^2x_ox + a^2y_oy - b^2x^2_o - a^2y^2_o = 0$

RESOLUCIÓN :



* Ecuación del diámetro: $\ell : \ y = -\left(\frac{b^2}{a^2m}\right)x$

* Como $M \in \ell$:

$$\Rightarrow y_0 = -\left(\frac{b^2}{a^2 m}\right)x_0$$

* De donde : $m = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{x_0}{y_0}$

m es pendiente de la recta L que contiene a la cuerda $\overline{MN}$. $L: y - y_0 = m(x - x_0)$

$$L: y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

* Efectuando:

$$L: b^2x_0x + a^2y_0y - b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = 0$$

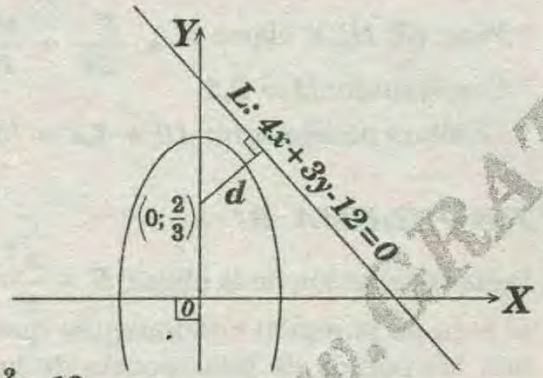
RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

Determine la distancia de la recta $4x + 3y - 12 = 0$ al foco más cercano de la elipse $9y^2 + 13x^2 = 13$.

A) $\frac{1}{2}$ B)1 C)2 D) $\frac{5}{2}$ E)3

RESOLUCIÓN :



$\mathscr{C} = 9y^2 + 13x^2 = 13$

$$\mathscr{C} = x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{13}{9}\right)} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{13}{9};\ b^2 = 1$$

* Ahora:

$$\frac{13}{9} = 1 + c^2 \rightarrow c^2 = \frac{13}{9} - 1 \Rightarrow c^2 = \frac{4}{9} \rightarrow c = \frac{2}{3}$$

* Luego:

$$F_1\left(0; \frac{2}{3}\right) \Rightarrow d = \frac{|4(0) + 3(2/3) - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$\rightarrow d = 2$$

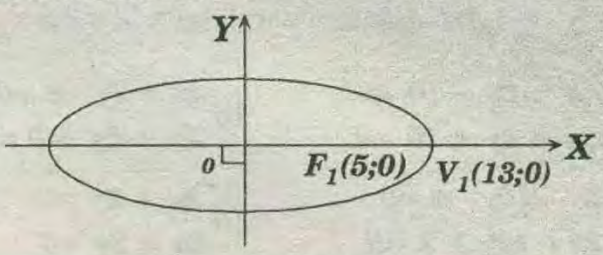
RPTA : "C"

PROBLEMA 16 :

Deducir la ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas, que tiene un vértice en $(13;0)$ y un foco en $(5;0)$.

A) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$ B) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ C) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{100} = 1$

RESOLUCIÓN :



$$a = 13\ ;\ c = 5$$

$$\Rightarrow b^2 = 169 - 25 = 144 \rightarrow b = 12$$

* La ecuación de la elipse es : $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

RPTA : "B"

PROBLEMA 17 :

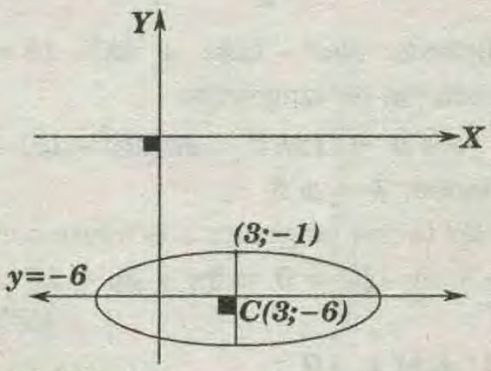
El punto $(3;-1)$ es un extremo del eje menor de una elipse cuyos focos están en la recta $y+6=0$.

La excentricidad es $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Hallar la ecuación de la elipse.

A) $x^2+2y^2-6x+24y+31=0$ B) $x^2-2y^2-6x+24y-30=0$
C) $x^2-y^2+6x-y=0$ D) $x^2+y^2-5x-12y-15=0$

RESOLUCIÓN :



* La excentricidad es:

$$e = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$\frac{a^2}{2} = a^2 - b^2 \rightarrow b^2 = \frac{a^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Pero: $(3;\ -1) \in$ elipse

$$\Rightarrow \frac{(3-3)^2}{a^2} + \frac{(-1+6)^2}{b^2} = 1 \rightarrow b^2 = 25 \ldots\ldots\ldots (II)$$

* (II) en (I): $a^2 = 50$

* Luego:

$$\frac{(x-3)^2}{50} + \frac{(y+6)^2}{25} = 1$$

$$\rightarrow x^2 + 2y^2 - 6x + 24y + 31 = 0$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 18 :

Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse.

GRATIS2.com

$\frac{x^2}{10}+\frac{2y^2}{5}=1$ que son paralelas a la recta

A) $\begin{matrix}3x+2y-10=0\\3x+2y+10=0\end{matrix}$ B) $\begin{matrix}3x+2y-9=0\\3x+2y+9=0\end{matrix}$

C) $\begin{matrix}3x-12y-8=0\\3x+12y+8=0\end{matrix}$ D) $\begin{matrix}3x+2y=0\\3x+2y=0\end{matrix}$

RESOLUCIÓN :

* Dado la elipse:

$$\frac{x^2}{10}+\frac{2y^2}{5}=1 \text{ .....(I)}$$

* La recta : $3x+2y+7=0$

$$L: y=\frac{-3}{2}x-\frac{7}{2}$$

* Recta tangente a la elipse y paralela a la recta L:

$$L_1: y=-\frac{3}{2}x+k \text{ ..... (II)}$$

* *(II)* en *(I)*:

$$x^2+4\left(-\frac{3}{2}x+k\right)^2=10$$

* Simplificando: $10x^2-12kx+4k^2-10=0$

* Por condición de tangencia:

$$\Delta=0 \rightarrow (12k)^2=40(4k^2-10)$$

* Resolviendo: $k=\pm 5$

* Luego las rectas tangentes a la elipse son:

$$3x+2y-10=0 \Rightarrow 3x+2y+10=0$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 19 :

Dada la elipse de ecuación $4x^2+9y^2-48x+72y+144=0$ entonces la suma de la longitud de sus ejes es:

A) 15 B)8 C)10 D)9 E)20

RESOLUCIÓN :

* Ecuación de la elipse:

$$4x^2+9y^2-48x+72y+144=0$$

* Completando cuadrados:

$$(4x^2-48x+144)+(9y^2+72y+144)=144$$

$$\rightarrow (2x-12)^2+(3y+12)^2=144$$

$$\Rightarrow \frac{4(x-6)^2}{144}+\frac{9(y+4)^2}{144}=1 \Rightarrow \frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{36}=1$$

* Luego : $a^2=36 \rightarrow a=6$

$b^2=16 \rightarrow b=4$

* Entonces la suma pedida, será : $2a+2b=20$

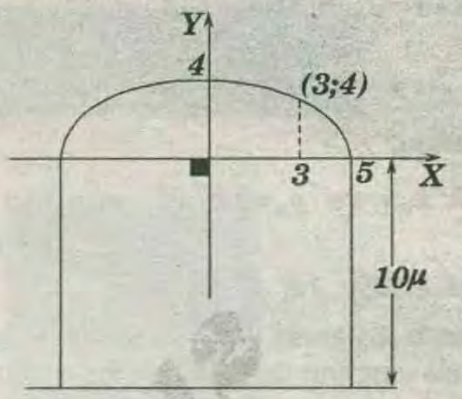
RPTA : "E"

PROBLEMA 20 :

El techo de $14u$ de altura es el centro de un pasillo de $10u$ de ancho, tiene la forma de una semielipse, las paredes laterales tiene una altura de $10u$, encontrar la altura del techo a $2u$ de cualquier pared.

A) 13 B) 13,1 C) 13,2 D) 13,3 E) 13,5

RESOLUCIÓN :



* Elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

* De la figura: $a=5 \wedge b=4$

* Pero: $(3; H) \in$ elipse : $\rightarrow \frac{3^2}{25}+\frac{H^2}{16}=1$

* Resolviendo: $H=3,2$

* La altura pedida será: $10+3,2=13,2$

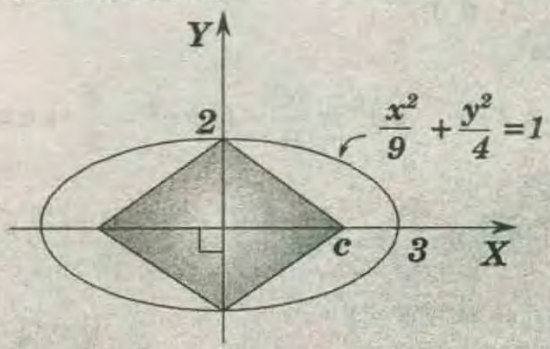
RPTA : "C"

PROBLEMA 21 :

Dada la ecuación de la elipse $E=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, halle el área de la región cuadrangular que se obtiene al unir los puntos de intersección de la elipse con el eje **"Y"** y los focos de la misma.

A) $\sqrt{3}$ B)$2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $2\sqrt{5}$ E) $4\sqrt{5}$

RESOLUCIÓN:



$a=3 \wedge b=2$

* Por lo teoría: $c^2=a^2-b^2$

$\Rightarrow c^2=9-4 \rightarrow c=5$

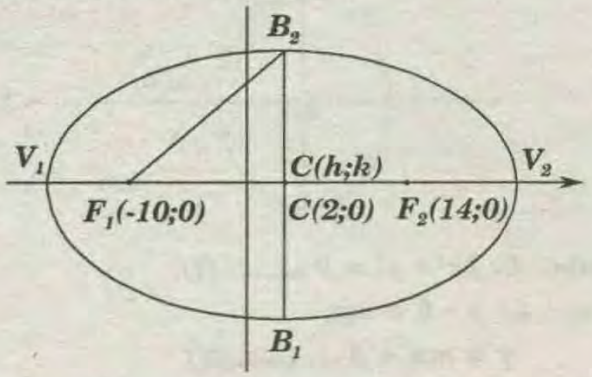
* Luego el área pedido será: $S=2\left(\frac{4x\sqrt{5}}{2}\right)=4\sqrt{5}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 22 :

Calcular la ecuación de la elipse, cuyo eje mayor mide **26u** y los focos son los puntos $F_1(-10;0)$ y $F_2(14;0)$.

RESOLUCIÓN :

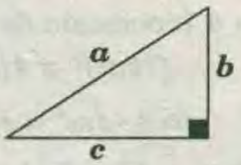


$$E = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

* Datos :

$V_1V_2 = 2a = 26 \rightarrow a = 13$

$F_1F_2 = 2c = 24 \rightarrow c = 12$



* Luego: $b=5$

$$\rightarrow E: \frac{(x-2)^2}{13^2} + \frac{(y-0)^2}{52} = 1$$

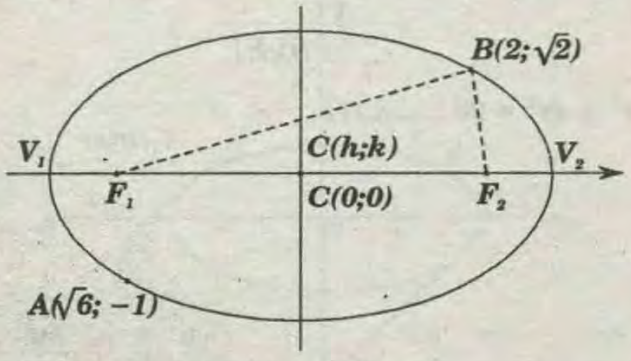
$$E: 25x^2 + 169y^2 - 100x - 4125 = 0$$

PROBLEMA 23 :

Una elipse tiene su centro en el origen de coordenadas y su eje mayor está en el eje "X". Calcular su ecuación sabiendo que pasa por los puntos $A(\sqrt{6};-1)$ y $B(2;\sqrt{2})$.

RESOLUCIÓN :

$$E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \wedge A \in E: \frac{6}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \wedge b \in E: \frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1$$



* Al resolver: $a^2 = 8 \wedge b^2 = 4$

$$\rightarrow E: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

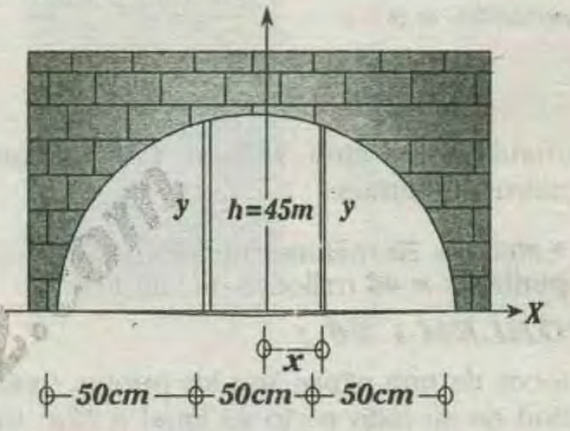
$$\Rightarrow E: 4x^2 + 8y^2 - 32 = 0$$

PROBLEMA 24 :

Arco semielíptico de un puente: Un puente está diseñado de tal manera que su base tiene forma de semielipse con una luz de **150m**, siendo su máxima altura **45m**. Hallar la longitud de dos soportes verticales cuya distancia entre sí y a sus respectivos extremos es la misma.

RESOLUCIÓN :

* Ante esta situación nueva, creemos conveniente elaborar un gráfico en el que la altura **"h"** es la longitud del eje mayor . Supongamos que el eje **"X"** es la base del arco y que el origen es su punto medio. La ecuación del arco será:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ siendo: } a = 75, b = 45$$

* Para hallar la altura de los soportes, hacemos: $x = 25$ en la ecuación y despejamos el valor de y:

$$\frac{625}{5625} + \frac{y^2}{2025} = 1 \rightarrow y = 30\sqrt{2}$$

PROBLEMA 25 :

Orbita de Mercurio. Desde los tiempos de Kepler, se sabe que las órbitas de los planetas forman una elipse alrededor del sol, con el sol en uno de los focos. Si la órbita de Mercurio tiene una excentricidad de **0,206** y la longitud de su eje mayor es de **0,774UA** (unidades astronómicas), calcular las distancias máxima (afelio) y mínima(perihelio) de Mercurio al sol.

RESOLUCIÓN :

* Por dato:

$$2a = 0{,}774UA$$

$$a = 0{,}387\ UA$$

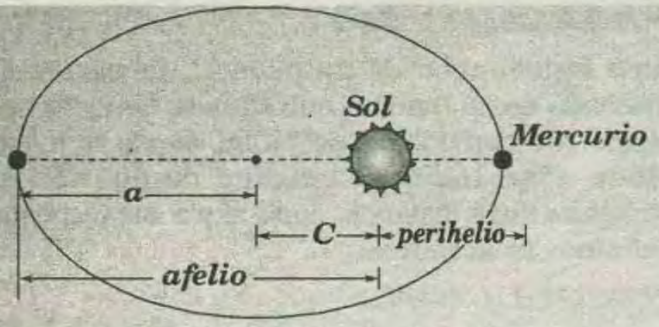
* También se sabe que:

$$c = a \times e$$

$$\rightarrow c = (0{,}387)(0{,}206)$$

$$\rightarrow c = 0{,}080\ UA$$

LIBROS GRATIS2.com



* Entonces:

afelio $= a + c$
$= 0{,}387 + 0{,}080$
$= 0{,}467UA$

perihelio $= a - c$
$= 0{,}387 - 0{,}080$
$= 0{,}307\ UA$

* Considerando que $1UA = 150$ millones de kilómetros, tenemos:

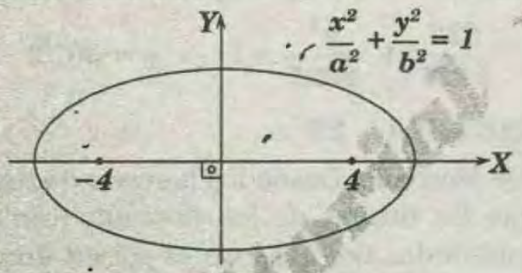
→ afelio = **70** millones de kilómetros ;
perihelio = **46** millones de kilómetros.

PROBLEMA 26 :

Los focos de una elipse son los puntos $(\pm 4;0)$ y la longitud de su lado recto es igual a $12u$. Hallar la ecuación de la elipse.

A) $\frac{x^2}{80}+\frac{y^2}{32}=1$ B) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ C) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$

RESOLUCIÓN :



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

* Dato :

$$LR = \frac{2b^2}{a} = 12 \rightarrow b^2 = 6a$$

* Sabemos que :

$$a^2 = b^2 + c^2 \ ;\ pero\ c = 4$$
$$\rightarrow a^2 = 6a + 16 \rightarrow a = 8 \rightarrow b^2 = 48$$

* Luego:

$$E: \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

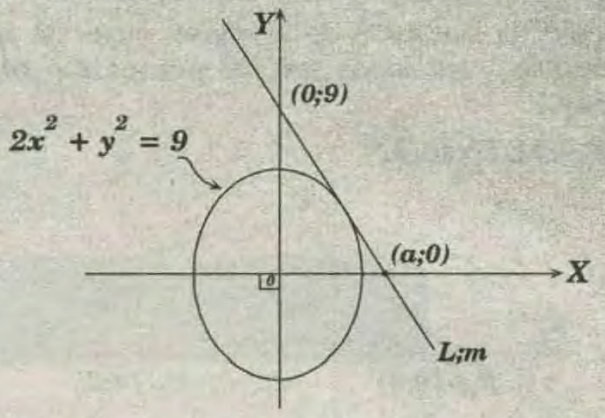
RPTA : "C"

PROBLEMA 27 :

Desde el punto $(0;9)$ se traza una recta tangente a la elipse $2x^2+y^2=9$. Halle el intercepto de esta recta tangente con la parte positiva del eje X.

A) $\frac{7}{4}$ B) $\frac{9}{4}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{5}{3}$

RESOLUCIÓN :



* Dada : $C: 2x^2 + y^2 = 9$ .....(I)

* Pero : $L: y - 9 = mx$

$y = mx + 9$ .....(II)

* (II) en (I): $2x^2 + (mx + 9)^2$

$\Rightarrow 2x^2 + m^2x^2 + 18mx + 81 = 9$

$\Rightarrow x^2(2 + m^2) + x(18m) + 72 = 0$

$D = 0$ (condición de tangencia):

$$(18m)^2 = 4(2 + m^2)(72)$$
$$9\times 9\times 4m^2 = 4\times 9\times 8(2+m^2)$$

$\Rightarrow 9m^2 = 16 + 8m^2 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$

Þ $y - 9 = -4(x)$

$L: 4x + y - 9 = 0 \rightarrow a = \frac{9}{4}$

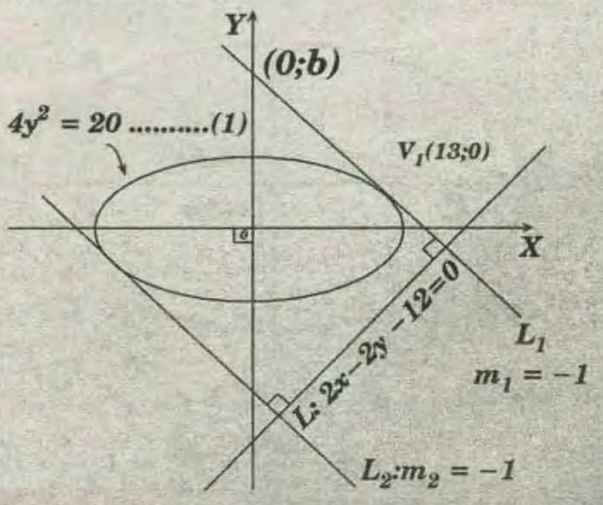
RPTA : "B"

PROBLEMA 28 :

Sea la ecuación de la elipse $x^2+4y^2=20$ y la recta $\overline{L}$: $2x - 2y - 13 = 0$. Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse y perpendiculares a la recta $\overline{L}$.

A) $\begin{matrix} x+y+5=0 \\ x+y-5=0 \end{matrix}$ B) $\begin{matrix} x+y+7=0 \\ x+y-7=0 \end{matrix}$ C) $\begin{matrix} x-y+5=0 \\ x-y-5=0 \end{matrix}$

RESOLUCIÓN :



$L_1: y = mx + b \rightarrow y = -x + b$ .....(II)

* *(II)* en *(I)*: $x^2 + 4(-x + b)^2 = 20$
* Efectuando: $5x^2 - x(8b) + 4b^2 - 20 = 0$

$\Delta = 0$ (condición de tangencia):

$$64b^2 = (5)(4b^2 - 20)$$

* De donde : $b = \pm 5$
* Luego: $L_1: x + y - 5 = 0$

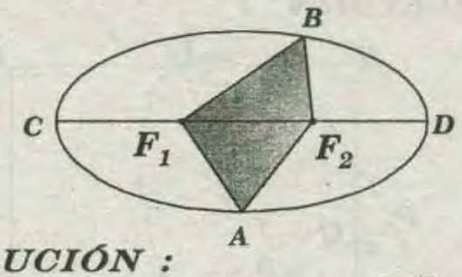
$L_2: x + y + 5 = 0$

RPTA : "A"

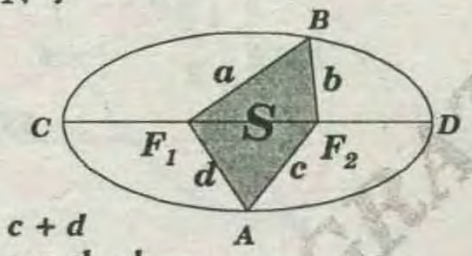
PROBLEMA 29 :

Se muestra el elipse de focos F_1 y F_2. Si la circunferencia $\mathscr{C}$ es tangente a las prolongaciones de $\overline{F_1B}$, $\overline{BF_2}$ y $\overline{AF_2}$. Si $F_1B - AF_2 = 10$, el radio de $\mathscr{C}$ es 4; calcule el área de la región sombreado.

A) 20
B) 40
C) 80
D) 60
E) 50



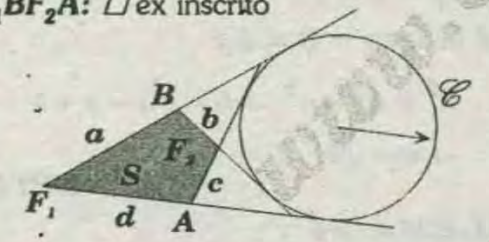
RESOLUCIÓN :



* Como : $a + b = c + d$

$\rightarrow a - c = d - b$

$\Rightarrow \square F_1BF_2A$: $\square$ ex inscrito



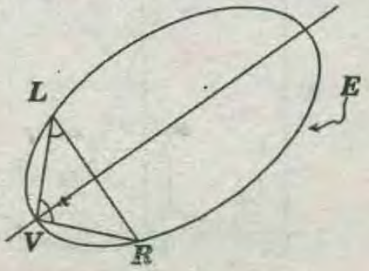
$S = (a - c)R = 40 \times 4 \Rightarrow S = 40\ m^2$

RPTA : "B"

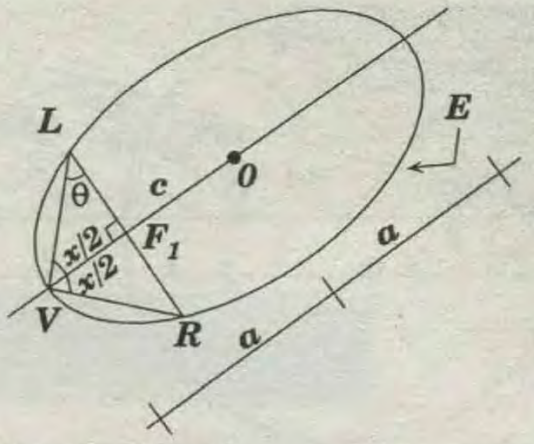
PROBLEMA 30 :

En el gráfico V es extremo del eje mayor y LR lado recto de la elipse E. Calcule el menor valor entero de x.

A) 88°
B) 91°
C) 92°
D) 90°
E) 93°



RESOLUCIÓN :



* Se sabe : $a^2 = b^2 + c^2$
* Propiedad : $LR = \dfrac{2b^2}{a} \rightarrow LF_1 = F_1R = \dfrac{b^2}{a}$

$$\Rightarrow LF_1 = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{(a + c)}{a}(a - c) \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* En el gráfico :

$$VF_1 = a - c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* De *(I)* y *(II)* : $LF_1 > VF_1 \Rightarrow \dfrac{x}{2} > \theta$
* Pero :

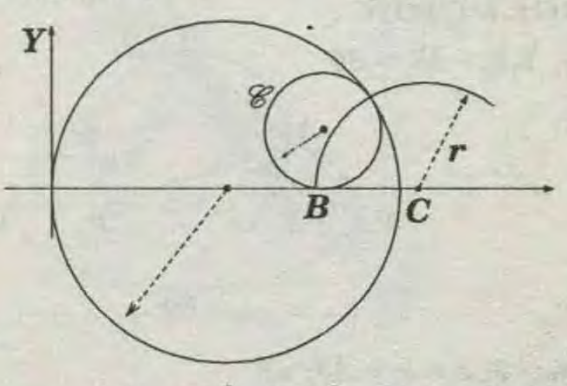
$$\frac{x}{2} + \theta = 90° \rightarrow \theta = 90 - \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} > 90° - \frac{x}{2} \rightarrow x > 90°$$

$\Rightarrow x_{min\ ent} = 91°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 31 :

En el gráfico , A y B son puntos de tangencia . Si $BC = 1$ y $r = 1{,}5$. calcule la ecuación de la circunferencia $\mathscr{C}$.



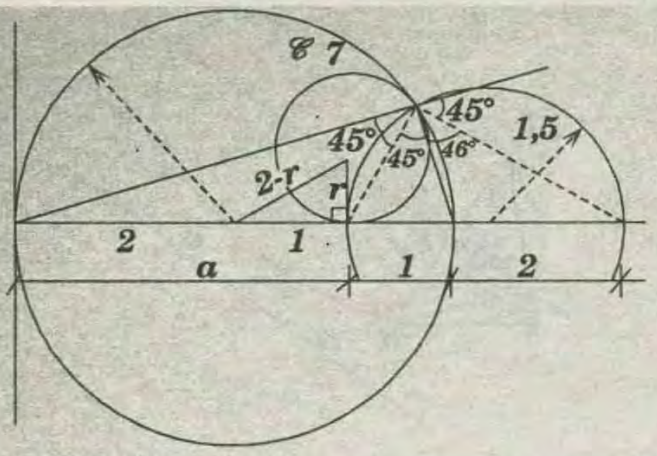
A) $(x - 3)^2 + \left(y - \dfrac{3}{4}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$

B) $(x^2 - 1)^2 + \left(y - \dfrac{3}{4}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$

C) $(x^2 - 2)^2 + \left(y - \dfrac{3}{4}\right) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$

RESOLUCIÓN :

SOLO GRATIS.com



* Por cuaterna armónica :

$(a)(2) = (1)(3+3) \rightarrow a = 3$

$(2-r)^2 = r^2 + 1^2 \rightarrow r = \frac{3}{4}$

$\mathscr{E}: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

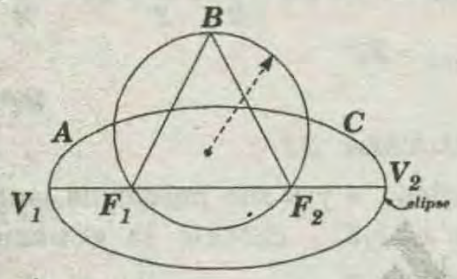
$\Rightarrow \mathscr{E}: (x-3)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$

RPTA : "A"

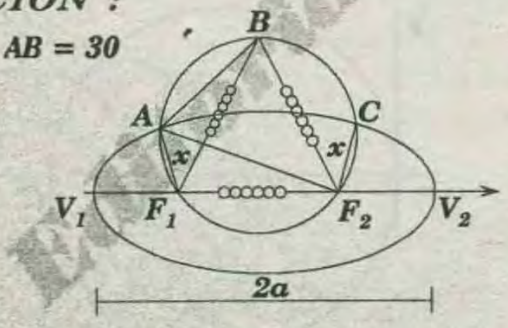
PROBLEMA 32 :

Se muestra elipse de focos F_1 y F_2; si $V_1V_2 - AB = 30$, Calcule F_2C , si el triángulo F_1BF_2 es equilátero .

A) 15
B) 14
C) 8
D) 18
E) 25



RESOLUCIÓN :



* Dato: $V_1V_2 - AB = 30$

* Piden : $F_2e = x = AF_1 = ?$

*por Euclides: $x + AF_2 = 2a$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow x + AF_2 = V_1V_2 \\ x + AB = AF_2 \end{array}\right\} (+)$$

* Teorema Chadu :

$2x + AB = V_1V_2 \rightarrow 2x = V_1V_2 - AB$

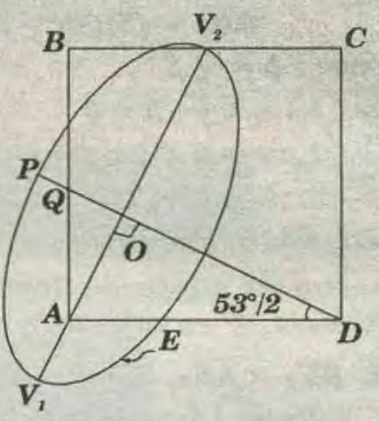
$\rightarrow x = 15$

RPTA : "A"

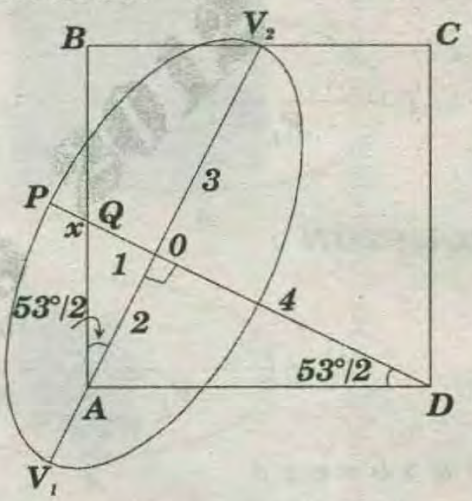
PROBLEMA 33 :

En el gráfico , *ABCD* 'es un cuadrado . Además *A* y $\overline{V_1V_2}$ son foco y eje mayor de la elipse *E* . Si *OD=4*, calcule *PQ* .

A) $\sqrt{6}-1$
B) $\sqrt{3}-1$
C) $\sqrt{5}-2$
D) $\sqrt{5}-1$
E) $\sqrt{6}-2$



RESOLUCIÓN :



* Piden : $PQ = x = ?$

* Como *A* es foco → $C = 2y$

$b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b = \sqrt{5} = x + 1$

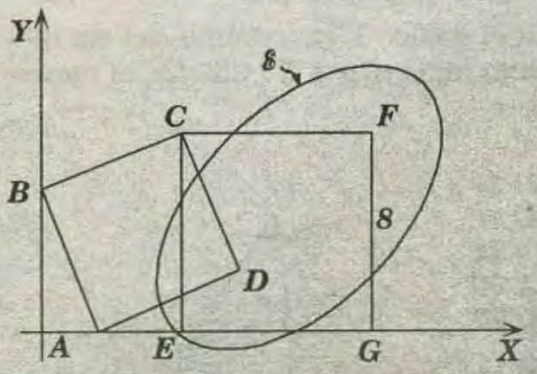
$\rightarrow x = \sqrt{5} - 1$

RPTA : "D"

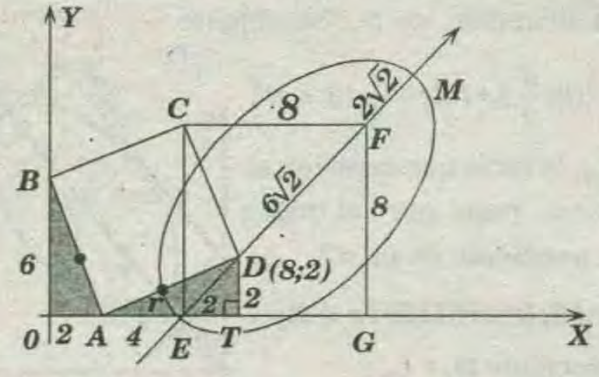
PROBLEMA 34 :

Del gráfico, *ABCD* y *ECFG* son cuadrados, *D=(8;2)*; *D* y *F* son focos de la elipse $\mathscr{E}$. Calcule su excentricidad.

A) 2/5
B) 3/5
C) 4/5
D) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$
E) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$



RESOLUCIÓN :



* $\sim ACDE$: inscriptible :

$\rightarrow m\sphericalangle DEG = 45° \rightarrow DT = ET = 2$

$\triangle BOA \cong \triangle ATD \rightarrow OA = 2 \rightarrow AE = 4$

* Propiedad :

$$CE = OB + DT \rightarrow CE = 8 = FG$$

$$DF = 6\sqrt{2} = 2c \rightarrow C = 3\sqrt{2}$$

$$EM = 10\sqrt{2} = 2a \rightarrow a = 5\sqrt{2}$$

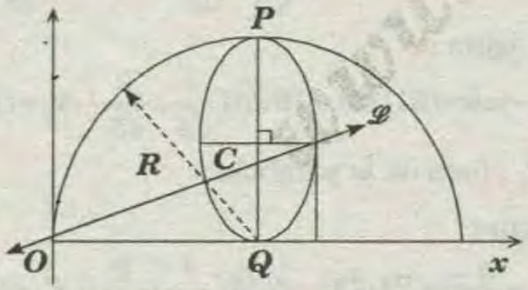
* Piden Excentricidad (e) :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \Rightarrow e = \frac{3}{5}$$

RPTA : "B"

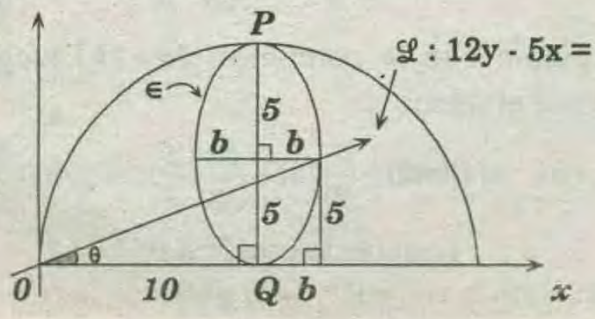
PROBLEMA 35 :

En gráfico P y Q son puntos de tangencia; $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}: 12y - 5x = 0$ y la excentricidad de la elipse es $\frac{\sqrt{21}}{5}$ (C: centro de la elipse). Halle la ecuación de la elipse, si $R = 10$.



A) $(5x+50)^2+(2y-10)^2=200$
B) $(5x-50)^2+(2y-10)^2=100$
C) $(5x-50)^2+(2y-10)^2=200$

RESOLUCIÓN :



$\in: e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5} \rightarrow c = \sqrt{21}\,k$ y $a = 5k$

$$tg\theta = \frac{5}{10+b} = m_L = \frac{5}{12} \rightarrow b = 2$$

$$\rightarrow k = 1 \begin{cases} a = 5 \\ c = \sqrt{21} \end{cases}$$

$$C = (h;k) = (10;5)$$

$$E: \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-h)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-10)^2}{2^2} + \frac{(y-5)^2}{5^2} = 1$$

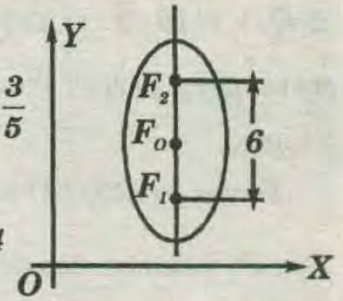
$$\rightarrow E: (5x-50)^2 + (2y-10)^2 = 100$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 36 :

Hallar la ecuación de la elipse cuyo eje es paralelo al eje Y , la distancia entre sus focos es $2c=6$ y la excentricidad es $e=3/5$ y centro de la elipse es el origen de coordenadas.

RESOLUCIÓN :



* Por dato : $2c=2ae=6$; $e=\frac{3}{5}$

* de donde : $a=5$

además : $b=a\sqrt{1-e^2} \Rightarrow b=4$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$$

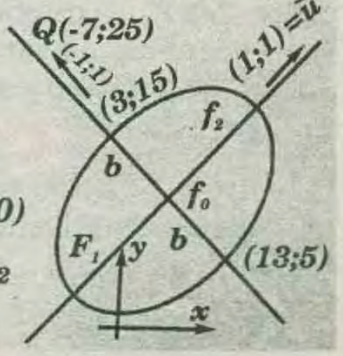
PROBLEMA 37 :

Sea E una elipse de excentridad $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$ cuyos extremos del eje menor son los puntos $(3;15)$ y $(13;5)$. Sea P una parábola cuyo eje focal coincide con el eje menor de E. Sabiendo que la distancia del vértice de $P(V=(h;k)\ ;\ h>0)$ al punto $(-7;25)$ es $10\sqrt{2}$ unidades y que ésta pasa por los focos de E . Calcular las ecuaciones vectoriales de E y P.

NOTA: El vector unitario $\vec{u}$ de rotación de la elipse tiene la primera componente positiva. Considerar el vector unitario de rotación de la parábola como $\vec{v}=\vec{u}^{\perp}$.

RESOLUCION :

* Centro de la elipse :



$$h_o = \frac{(3;15)+(13;5)}{2} = (8;10)$$

$$\Rightarrow b = 5\sqrt{2} = b^2 = a^2 - a^2e^2$$

* Reemplazando valores : $a=10$

* Ecuación de la elipse :

$$E=\left\{(8;10)+\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1)x'+\frac{1}{\sqrt{2}}(-1;1)y'\right\};\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1)$$

* Donde : $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{50}=1$

FOCOS :

$$F_1=F_o-(ae)\vec{u}=(8;10)-5\sqrt{2}\frac{1}{2}(1;1)=(3;5)$$

$$F_2=F_o+(ae)\vec{u}=(8;10)+5\sqrt{2}\frac{1}{2}(1;1)=(13;15)$$

Sea $Q=(-7;25)$, comprobamos que Q pertenece al eje focal de la parábola , cuya ecuación es :

$L: x=y=18$ ó $L=\{(8;10)+t(-1;1)/t\in\mathbb{R}\}$

$(h;k)\in L\Rightarrow h+k=18$ .....(I)

$d(Q;V)=10\sqrt{2}\Rightarrow(h+7)^2+(k-25)^2=200$.....(II)

(I) en (II) : $2(h+7)^2=200\Rightarrow(h;k)=(3;15)$

* Luego :

$$P=(x;y)=(3;15)+\frac{1}{2}(-1;1)x'+\frac{1}{2}(-1;1)y'$$

$F_1\in P$, entonces las ecuaciones de transformación serán :

$$3=3-\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'\ ;\ 5=15+\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'$$

* Resolviendo : $(x';y')=(-5\sqrt{2};5\sqrt{2})$

* Además : $y'^2=-4px'$.....(III)

* Reemplazando $(x';y')$ en (III) : $4p=5\sqrt{2}$

* Ecuación de la parábola :

$$P=\left\{(3;15)+\frac{1}{\sqrt{2}}(-1;1)x'+\frac{1}{\sqrt{2}}(-1;-1)y'\right\};y'^2=-5\sqrt{2}x'$$

PROBLEMA 38 :

Sea D_1 : $x+2y-5=0$; una directriz de una elipse E que se en cuentra en el primer cuadrado , cuya excentricidad es $1/2$ y cuyo eje focal pasa por el origen. Sea P una parábola cuyo lado recto coincide con el semieje mayor izquierdo de E que mide $10\sqrt{5}u$, de longuitud y cuyo vértice $V=(h;k)$ donde $3h>2k$.

I) Hallar la Ecuación vectorial de P .

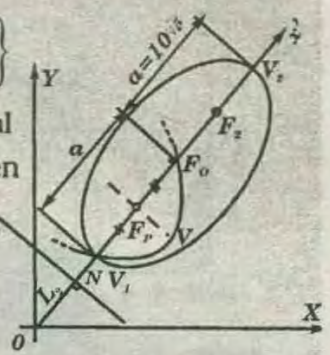
II) Hallar la Ecuación vectorial de E .

RESOLUCIÓN :

I) Para la parábola :

De la ecuación de D_1 , se obtiene :

$$D_1=\left\{(0;\frac{5}{2})+t(1;-\frac{1}{2})/t\in\mathbb{R}\right\}$$



Sea L_2, la recta que contiene al eje focal, pasa por el origen cuya pendiente es $m_2=2$.

$L_2=\{(0;0)+r(1;2)/r\in\mathbb{R}\}$

intersectante D_1 y L_2 :

$$t=r\ ;\frac{5}{2}-\frac{t}{2}=2r$$

* Resolviendo : $t=r=1$

* Reemplazando en la ecuación de D_1 o de L_2 , se obtiene el punto de la intersección : H

$$H=(1;2)$$

* de los datos se tiene $4p=a=10\sqrt{5}$; $e=\frac{1}{2}$

* además sabemos que : $|HF_O|=\frac{a}{e}=20\sqrt{5}$

haciendo $F_o=(m;n)$ y utilizando las fórmulas de «distancia entre dos puntos» y «distancia de un punto a una recta» tendremos :

$$|HF_o|=20\sqrt{5}=\sqrt{(m-1)^2+(n-2)^2}$$

$$|HF_o|=20\sqrt{5}=\frac{m+2n-5}{\sqrt{5}}\Rightarrow F_o=(m;n)=(21;42)$$

* Luego :

$$|OF_o|=21(1;2)\Rightarrow\vec{u}=(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}});\vec{u}^{\perp}=(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}})$$

* de la figura :

$$V_1=F_o-a\vec{u}=(21;42)-10\sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}});V_1=(11;22)$$

* Sea F_p , foco de la parabola :

de la figura :

$$F_p=F_o-\frac{a}{2}\vec{u}=(21;42)-5\sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}});\ F_p=(16;32)$$

* Siendo $V=(h;k)$ el vértice de la parábola se tiene :

$$V=F_p+p\vec{u}^{\perp}=(16;32)+\frac{5}{2}\sqrt{5}(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{5});V=(21;\frac{69}{2})$$

(no cumple con la condición $3h>2k$) luego , invertimos el vector $\vec{u}^{\perp}$

$$V=F_p+p\vec{u}^{\perp}=(16;32)-\frac{5}{2}\sqrt{5}(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{5});\ V=(21;\frac{69}{2})$$

(cumple la condición).

* Por lo tanto la ecuación de la parábola será :

$$P=\left\{(21;\frac{59}{2})+x'(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}})+y'(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}})\right\}$$

* Donde : $x'^2=10\sqrt{5}y'$

II) Para la elipse :

$$b=a\sqrt{1-e^2}=5\sqrt{15}$$

$$E=\left\{F_o+x'\vec{u}+y'\vec{u}^{\perp}/\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1\right\}$$

$$E=\left\{(21;42)+x'(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}})+y'(-\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}})\right\}$$

* Donde : $\frac{x'^2}{500}+\frac{y'^2}{375}=1$

PROBLEMA 39 :

Los focos de una elipse E son los puntos $F_1=(-1;3)$ y $F_2=(5;3)$, si $R\in E$ y la suma de las longitudes de los radios vectores trazados de R es igual a 4 veces la longitud del lado recto.

NOTA: Radio vector es el segmento que une un punto cualquiera de la elipse con uno de los focos.

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que :

longitud del lado recto $=2\frac{b^2}{a}$

* Por dato $=|\overrightarrow{RF_1}|+|\overrightarrow{RF_2}|=2a$

* igualando se obtiene $= a = 2b$

* además : $d(F_1;F_2)=|(5;3)-(-1;3)|=6=2ae$

* de donde : $ae=3$

* también : $b^2=a^2-(ae)^2=(2b)^2-9$

$$b=\sqrt{3}\ ;\ a=2\sqrt{3}$$

Centro de la elipse : $(h;h)=(\frac{-1+5}{2};\frac{3+3}{2})=(2;3)$

* la ecuación será : $\frac{(x-2)^2}{12}+\frac{(y-3)^2}{3}=1$

PROBLEMA 40 :

Si $P_1(x_1;y_1)$ es un punto cualquiera de la elipse :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

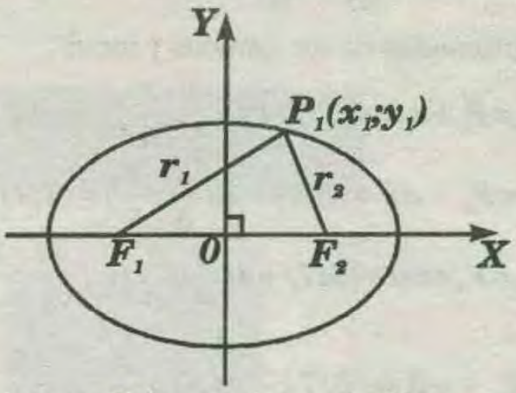
Demostrar que sus radios vectores son :

$$r_1=a+ex_1 \text{ y } r_2=a-ex_1$$

RESOLUCIÓN :

* Ecuación de la elipse : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

* Según el gráfico : $r_1=|\overline{P_1F_1}|=\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}$



* Ahora como $P_1(x_1;y_1)\in$ a al elipse .

* Entonces : $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \Rightarrow y_1^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_1^2)$

* Luego :

$$\Rightarrow r_1=\sqrt{x_1^2+c^2+2x_1c+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_1^2)}=\sqrt{x_1^2-\frac{b^2}{a^2}x_1^2+b^2+c^2+2x_1c}$$

$$\Rightarrow r_1=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_1^2+a^2+2x_1c}\Rightarrow r_1=|a+ex_1|$$

$$\Rightarrow \boxed{r_1=a+ex_1}\wedge\boxed{r_2=a-ex_1}$$

PROBLEMA 41 :

La condición de la recta que contiene a un lado recto de la elipse es : $4x+3y-61=0$

Si el centro es el punto $(5\ ;\ 7)$ y el semieje menor mide 3 unidades , hallar :

I) La ecuación vectorial de la elipse.

II) Las coordenadas de los vértices y focos.

III) Las ecuaciones de las rectas que contienen los radios vectores que pasan por el extremo superior del eje menor

RESOLUCIÓN :

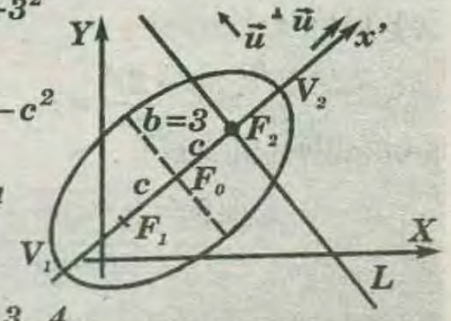
I) Distancia de $F_o(5;7)$ a L :

$$|\overrightarrow{F_oF_2}|=c=\frac{|4(5)+3(7)-61|}{\sqrt{4^2+3^2}}\Rightarrow c=4$$

* además : $b^2=a^2-c^2$

* donde : $b=3\ ;\ c=4$

* luego : $a=5$



$$\vec{u}=(\frac{4}{5};\frac{3}{5});\vec{u}^{\perp}=(-\frac{3}{5};\frac{4}{5})$$

* Ecuación vectorial de la elipse :

$$\mathscr{E}=\left\{(5;7)+x'(\frac{4}{5};\frac{3}{5})+y'(-\frac{3}{5};\frac{4}{5})\right\}$$

$$\text{ó}\quad \mathscr{E}:\frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{9}=1$$

II) Coordenadas de los vértices y focos :

$$V_2=F_o+a\vec{u}=(5;7)+5(\frac{4}{5};\frac{3}{5})=(9;10)$$

$$V_1=F_o-a\vec{u}=(5;7)-5(\frac{4}{5};\frac{3}{5})=(1;4)$$

$$F_2=F_o+c\vec{u}=(5;7)+4(\frac{4}{5};\frac{3}{5})=(\frac{41}{5};\frac{47}{5})$$

$$F_1=F_o-c\vec{u}=(5;7)-4(\frac{4}{5};\frac{3}{5})=(\frac{9}{5};\frac{23}{5})$$

III) El punto del extremo superior del eje menor está dado por :

$$B_1=F_o+b\vec{u}^{\perp}=(5;7)+3(-\frac{3}{5};\frac{4}{5})=(-\frac{16}{5};\frac{47}{5})$$

Si la recta pasa por B_1 y F_1, el vector dirección será :

$$\vec{a}=(\frac{16}{5};\frac{47}{5})-(\frac{9}{5};\frac{23}{5})=\frac{1}{5}(7;24)$$

Si la recta pasa por B_1 y F_2, su vector dirección será

$$\vec{b}=(\frac{16}{5};\frac{47}{5})-(\frac{41}{5};\frac{47}{5})=(-5;0)=5(-1;0)$$

* Por lo tanto las ecuaciones serán :

$$L_1=\left\{(\frac{9}{5};\frac{23}{5})+t(7;24)/t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$L_2=\left\{(\frac{41}{5};\frac{47}{5})+r(-1;0)/r\in\mathbb{R}\right\}$$

PROBLEMA 42 :

Sean las cónicas:

$$C_1:\frac{(x-3)^2}{20}+\frac{(y-5)^2}{5}=1$$

$$C_2:(x-3)^2=4(y-2)$$

Hallar los puntos de intersección de estas cónicas.

RESOLUCIÓN :

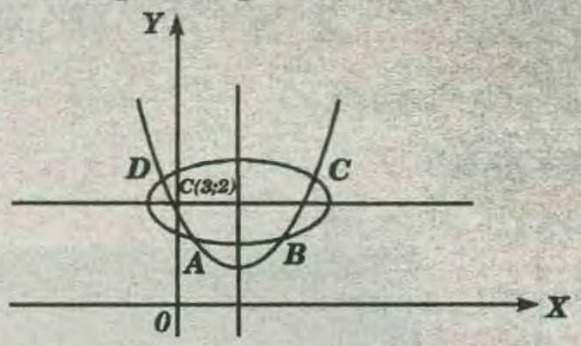
$C_1:\ \dfrac{(x-3)^2}{20}+\dfrac{(y-2)^2}{36}=1$, es una elipse horizontal ordinaria

$$C(3;5):\ \boxed{a^2=20\Rightarrow a=2\sqrt{5}}$$

$$\boxed{b^2=20\Rightarrow b=\sqrt{5}}$$

$C_2:\ (x-3)^2=4(y-2)$, es una parábola vertical ordinaria

$V(3;2):\ 4p=4\Rightarrow p=1$



'A' ; 'B' ; 'C' ; 'D' : Elipse $\cap$ parábola:

$$\frac{(x-3)^2}{20}+\frac{(y-2)^2}{5}=1\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$(x-3)^2=4(y-2)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

* *(II)* en *(I)* : $\dfrac{4(y-2)}{20}+\dfrac{(y-5)^2}{5}=1$

$$\Rightarrow\frac{(y-2)}{5}+\frac{(y-5)^2}{5}=1$$

$$\Rightarrow y-2+y^2-10y+25=5\Rightarrow y^2-9y+18=0$$

$$y\times y=6\times 3$$

$y=6\Rightarrow$ En *(II)*: $(x-3)^2=16\begin{cases}x=7\Rightarrow C(7;6)\\ x=-1\Rightarrow C(-1;6)\end{cases}$

$x=3\Rightarrow$ En *(II)*: $(x-3)^2=4\begin{cases}x=5\Rightarrow B(5;3)\\ x=1\Rightarrow A(1;3)\end{cases}$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Determine la ecuación de la elipse centrada en el origen y eje focal en el eje de abscisas, sabiendo además que pasa por los puntos de coordenadas

A) $x^2+3y^2=52$ *B)* $4x^2+y^2=52$ *C)* $x^2+4y^2=52$
D) $x^2+13y^2=52$ *E)* $13x^2+y^2=52$

02 Determine la excentricidad de la elipse , sabiendo que su eje menor es observado desde uno de los focos con un ángulo de $60°$.

A) $\sqrt{2}/2$ *B)* $1/2$ *C)* $\sqrt{6}/4$ *D)* $\sqrt{3}/2$ *E)* $\sqrt{7}/4$

03 Determine la ecuación de la recta tangente a la elipse: $x^2+2y^2=8$ en el punto $(\sqrt{6};-1)$

A) $\sqrt{6}x-2y=8$ *B)* $\sqrt{6}x+2y=4$ *C)* $\sqrt{6}y-2x=8$
D) $\sqrt{6}y+2x=6$ *E)* $\sqrt{6}x-2y=4$

04 La ecuación de una elipse es:

$4x^2 + y^2 + 8x - 4y - 4 = 0$, calcule las ecuaciones de sus directrices:

A) $x+5=0 \wedge x-3=0$ B) $y+1=0 \wedge y-5=0$
C) $x+3=0 \wedge x-5=0$ D) $x+4=0 \wedge x-4=0$
E) $y-6=0 \wedge y+2=0$

05 Una represa de sección semielíptica tiene una profundidad máxima de $40\ m$ y un ancho de $100\ m$ en la parte superior, determine la profundidad de la represa a una distancia de $30\ m$ de su parte central.

A) 16m B) 18 m C) 20 m D)24 m E) 32m

06 En una elipse de focos F_1 y F_2, siendo P un punto de la elipse, se tiene que $F_1F_2 = 6u$ y el perímetro del triángulo PF_1F_2 es $18u$. Luego la longitud de un lado recto es:

A) 6 u B) 7 u C) 8 u D) 9 u E) 10 u

07 Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son $(-4; 0)$, $(4; 0)$ y además pasa por el punto $(2; -3)$.

A) $3x^2 + 4y^2 = 12$ B) $3x^2 + 4y^2 = 48$
C) $3x^2 + 4y^2 = 36$ D) $4x^2 + 3y^2 = 12$
E) $4x^2 + 3y^2 = 36$

08 Los extremos del eje menor de una elipse son los puntos $(2; -1)$ y $(2; 5)$. Hallar la ecuación de la elipse, cuya excentricidad es $0,6$.

A) $25x^2 + 16y^2 - 100x - 64y - 61 = 0$
B) $25x^2 + 16y^2 - 100x + 64y - 61 = 0$
C) $25x^2 + 16y^2 + 100x + 64y - 61 = 0$
D) $16x^2 + 25y^2 - 64x - 100y - 61 = 0$
E) $16x^2 + 25y^2 + 64x - 100y - 61 = 0$

09 Dada la elipse: $\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$, uno de sus vértices es:

A) (–1;6) B) (–1;8) C)(–1;10) D) (0; 8) E) (0; 10)

10 Determinar los radios focales del punto $P(-4; 2,4)$, sabiendo que "P" está en la elipse:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

A) 2 y 8 B) 2,6 y 7,4 C) 2,4 y 7,6
D) 3,1 y 7,2 E) 1 y 9

11 Hallar el área del cuadrado inscrito en la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A) $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ B) $\frac{2a^2b^2}{a^2-b^2}$ C) $\frac{3a^2b^2}{a^2+b^2}$
D) $\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$ E) $\frac{9a^2b^2}{a^2+b^2}$

12 Hallar las ecuaciones de las directrices de la elipse: $x^2 + 5y^2 - 2x - 19 = 0$

A) $x = -6; x = 4$ B) $x = -2; x = 8$ C) $x = -4; x = 6$
D) $x = -8; x = 2$ E) $x = 0; x = 10$

13 Si los focos de una elipse son los puntos $(1; 2)$ y $(1; 8)$ y uno de los extremos del eje menor está en la recta $y = 3x - 7$, determinar la longitud de un lado recto.

A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) 2 D)3 E)1

14 Si el centro de una elipse es $(1; -1)$, un foco es $(6; -1)$ y un extremo del eje menor es $(1; 11)$, ¿cuál es su ecuación?

A) $\frac{(x-1)^2}{144} + \frac{(y+1)^2}{169} = 1$ B) $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{169} = 1$
C) $\frac{(x-1)^2}{169} + \frac{(y+1)^2}{144} = 1$ D) $\frac{(x-1)^2}{169} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$
E) $\frac{(x+1)^2}{144} + \frac{(y-1)^2}{169} = 1$

15 ¿ Cuál es la ecuación de la elipse centrada en el origen, eje mayor igual a 20 y además desde uno de los extremos del eje menor se divisa la distancia focal, que es vertical, con un ángulo de 106^c ?

A) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ B) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$
C) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ D) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$
E) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$

16 Hallar la ecuación de la elipse cuyo lado recto mide $32/5$ y cuyos vértices son: $(-4; 3)$ y $(6; 3)$.

A) $\frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ B) $\frac{(x+1)^2}{5} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$
C) $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$ D) $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$
E) $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

17 Los puntos $A(a; 4)$ y $B(2; b)$ están en una elipse cuyo centro es el punto $(3; 1)$. Si el segmento $\overline{AB}$ pasa por el centro, calcular: $a \times b$.

A)–6 B)–7 C)–8 D)–9 E)–10

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)D	3)A	4)E	5)E	6)D	7)B	8)D	9)C	10)B
11)D	12)C	13)B	14)C	15)B	16)D	17)C			

HIPERBOLA

CAPITULO 50

OBJETIVOS :

Conocer la definición , propiedades y aplicaciones de la hipérbola , así como saber resolver problemas relacionados con ella.

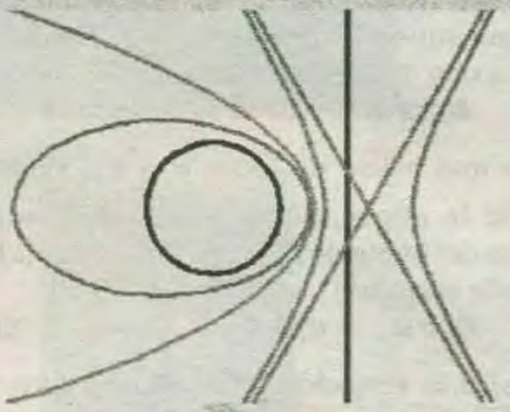
EL ESTUDIO DE KEPLER DE LAS SECCIONES CÓNICAS

Johannes Kepler, quien estableció la ciencia física moderna como una extensión de estos antiguos descubrimientos griegos, tal como Nicolás de Cusa, Luca Pacioli, y Leonardo da Vinci los redescubrieron. Kepler, citando a Cusa, a quien llamo «divino», dio una particular importancia a la diferencia entre la curva (geométrica) y la recta (aritmética). Kepler escribió en su *M*ystérium Cosmographicum:

«Pero, después de todo, ¿por qué las distinciones entre la curva y la recta, y la nobleza de una curva, en la intención de Dios cuando creó al Universo? ¿Precisamente por qué? Salvo que para el Creador más perfecto fuera absolutamente necesario crear la más bella obra».

Como parte su investigación astronómica, Kepler dominó Las Cónicas de Apolonio, que es una compilación de los descubrimientos griegos sobre estas curvas superiores. Como resultado de sus investigaciones sobre la refracción de la luz, Kepler aportó un concepto nuevo y revolucionario de las secciones cónicas. Por primera vez, Kepler consideró a las secciones cónicas como una multiplicidad proyectiva:

«Entre estas líneas existe el siguiente en razón de sus propiedades: pasa de la línea recta, a través de una infinidad de hipérbolas, a una parábola, y de ahí, a través de una infinidad de elipses, al círculo. Así, por un lado la parábola tiene dos cosas en naturaleza infinitas, la hipérbola y la línea recta, la elipse y el círculo. Aunque también es infinito, asume una limitación en el otro lado...Por tanto, los límites opuestos son el círculo y la línea recta: El primero es curvatura pura, la última recta pura. La hipérbola, la parábola y la elipse están en medio, y participan de la recta y de la curva, lo mismo la parábola, y la hipérbola participan más de la recta, y la elipse más de la curva».



Concepto proyectivo de Kepler de las secciones cónicas

En tanto el foco se mueve a la izquierda, el círculo se transforma en una elipse. En el límite con el infinito, la elipse se convierte en una parábola. La hipérbola se forma «del otro lado» del infinito».

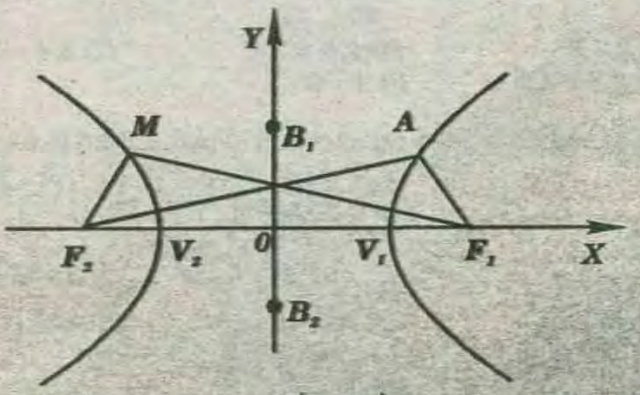
La discontinuidad que revela esta proyección entre la parábola y la hipérbola es importante para esta discusión. La hipérbola esta al otro lado del infinito, por así decirlo, de la elipse y el círculo, mientras que un lado de la parábola va hacia el infinito y el otro hacia el finito.

HIPÉRBOLA

Es el lugar geométrico de los puntos de tal manera que si tomamos un punto cualquiera de la curva , la diferencia de sus distancias a los focos es igual a '2a'.

* Por definición :

$$\left|\overline{AF_2}\right| - \left|\overline{AF_1}\right| = 2a \Rightarrow \left|\overline{MF_1}\right| - \left|\overline{MF_{12}}\right| = 2a$$



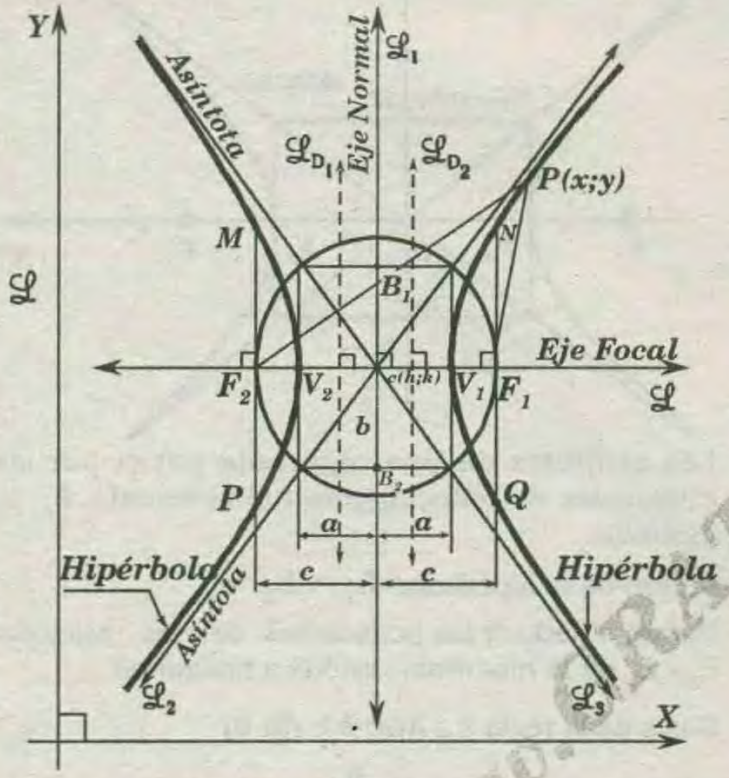
* Eje transverso o focal: $\left|\overline{V_1V_2}\right| = 2a$

* Eje conjugado o normal: $|\overrightarrow{B_1B_2}|=2b$

* Distancia focal : $|\overrightarrow{F_1F_2}|=2c$

DEFINICIÓN :

Dado dos puntos fijos distintos F_1 y F_2 denominados focos. Se define la hipérbola como el lugar geométrico del conjunto de puntos $P(x\,;y)$ tales que la diferencia de sus distancias a los puntos fijos F_1 y F_2 en valor absoluto es igual a una constante convencional $2a$.



Según la definición, sea F_1 y F_2 los puntos fijos denominados focos y $P(x;y)$ un punto cualquiera de la hipérbola respectivamente, luego:

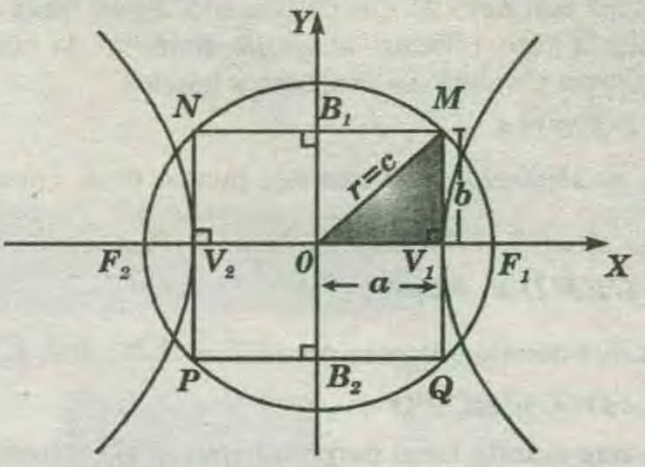
$$|d(P;F_1)| - |d(P;F_2)| = 2a$$

ELEMENTOS :

* Centro : $C(h;k)$
* Focos : $F_1 \wedge F_2 ; (F_1F_2 = 2c)$
* Vértices : $V_1 \wedge V_2 ; (V_1V_2 = 2a)$
* Eje transverso : $\overline{V_1V_2}$
* Eje normal : $\overrightarrow{\mathcal{L}_1}$
* Eje conjugado : $\overline{B_1B_2}$; $(B_1B_2 = 2b)$
* Lado recto : $\overline{MQ} \wedge \overline{NP}$
* Asíntotas : $\overrightarrow{\mathcal{L}_2} \wedge \overrightarrow{\mathcal{L}_3}$
* Directríz : $\mathcal{L}_{D_1} \wedge \mathcal{L}_{D_2}$

$P(x;y)$: Punto P de coordenadas genéricas $(x;y)$

Los ejes focal y normal , son sus respectivos ejes de simetría de la hipérbola.



a; b; c son números positivos por ser longitudes.

En cualquier hipérbola siempre se cumple que una circunferencia pasa por los focos y por los vértices del «*Rectángulo fundamental de la hipérbola*», siendo el centro de la hipérbola el centro de la circunferencia.

«Rectángulo fundamental» = cuadrilátero $NMQP$.

* De la figura : $|\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{OF_1}|=r=c$

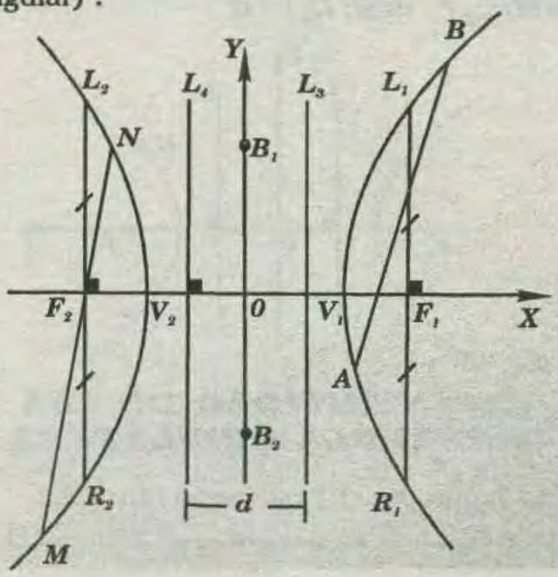
* En el $\triangle OMV_1$: Por Pitágoras :

$$c^2=a^2+b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* La igualdad (I) cumple para cualquier tipo de hipérbola.

* En una hipérbola cualquiera siempre se cumple $\begin{cases} c>a \\ c>b \end{cases}$

* En una hipérbola cualquiera no hay una relación fija entre 'a' y 'b'; en algunos caso $a>b$, en otros casos $a<b$ y en otros $a=b$ (hipérbola equilátera o rectangular) .



Toda hipérbola es simétrica con respecto a sus ejes de simetría , es decir con respecto a su eje transverso y con respecto al eje conjugado. Si se traza una cuerda perpendicular al eje de simetría , la cuerda quedará dividida en dos partes iguales.

CUERDA :

Es un segmento que une dos puntos de la curva .

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{L_1R_1};\overrightarrow{MN};\overrightarrow{L_2R_2})$$

CUERDA FOCAL :

Es una cuerda que pasa por el foco $(\overrightarrow{L_1R_1};\ \overrightarrow{MN};\ \overrightarrow{L_2R_2})$.

LADO RECTO :

Es una cuerda focal perpendicular al eje transverso $(\overrightarrow{L_1R_1};\ \overrightarrow{L_2R_2})$. La longitud del lado recto $\dfrac{2b^2}{a}$.

RADIO VECTOR :

Es el segmento que une el foco con un punto cualquiera de la hipérbola

$$(\overrightarrow{F_1L_1};\ \overrightarrow{F_1R_1};\ \overrightarrow{F_2L_2};\ \overrightarrow{F_2M};\ \overrightarrow{F_2N};\ \overrightarrow{F_2R_2})\cdot$$

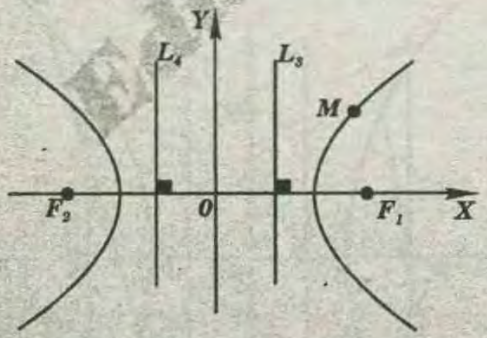
DIRECTRICES :

$(L_3;\ L_4)$ son las rectas perpendiculares al eje transverso , de tal manera que la distancia entre rectas directrices es : $d=\dfrac{2a^2}{c}$

EXCENTRICIDAD DE UNA HIPÉRBOLA

Es un elemento importante de un hipérbola que se denota por *'è'* . Saber el valor de *'e'* nos permite identificar la cónica .

$$e=\frac{|\overrightarrow{MF_1}|}{d(M;L_3)}=\frac{|\overrightarrow{MF_2}|}{d(M;L_4)}=\frac{c}{a}\ \text{como}\ c>a\Rightarrow e=\frac{c}{a}>1$$



EXCENTRICIDAD DE UNA HIPÉRBOLA EQUILÁTERA

* En una hipérbola cualquiera se cumple :

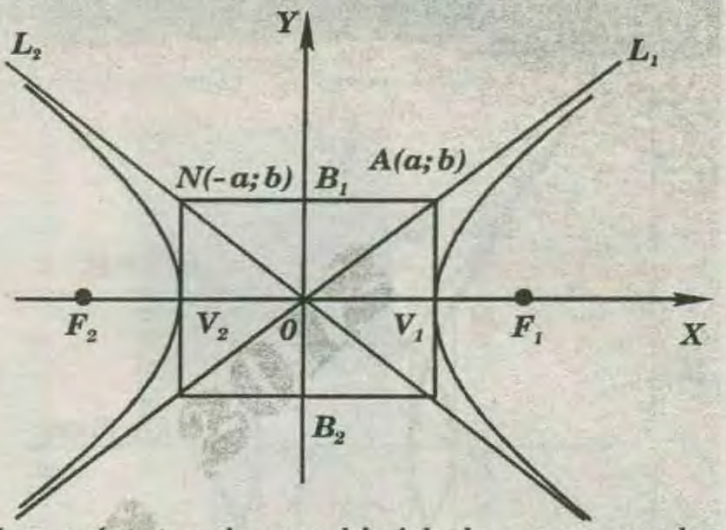
$c^2=a^2+b^2$.....*(I)*

* Por ser una hipérbola equilátera: $a=b$.....*(II)*

* *(III)* en *(I)*: $c^2=a^2+a^2\quad c^2=2a^2$

$$\frac{c^2}{a^2}=2\Rightarrow \boxed{e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}}$$

ASÍNTOTAS DE UNA HIPÉRBOLA



Las asíntotas de una hipérbola pasan por las diagonales del «Rectángulo fundamental». $L_1; L_2$ asíntotas

Centro de la hipérbola: $L_1 \cap L_2$.

Vamos a deducir las Ecuaciones de las asíntotas L_1 y L_2 de la hipérbola canónica horizontal .

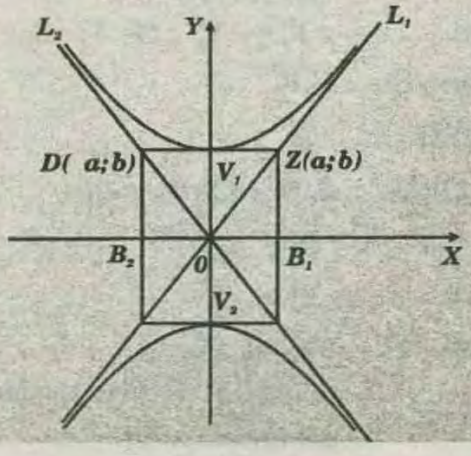
Datos de la recta L_1: $A(a;\ b);\ (0;\ 0)$

Ecuación de L_1: $y-0=\dfrac{b}{a}(x-0)\Rightarrow L_1: 0=bx-ay$

* *Ec*uación de la Hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

* Datos de la recta L_2: $N(-a;b);(0;0)$

Ecuación de L_2: $y-0=-\dfrac{b}{a}(x-0)\Rightarrow L_2: bx+ay=0$



* ***Ecuación*** de la Hipérbola $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

* Vamos a deducir las Ecuaciones de las asíntotas L_1 y L_2 de la hipérbola canónica vertical .

* Datos de la recta L_1: $Z(a; b)$; $(0; 0)$

*Ecuación de L_1: $y-0=\frac{b}{a}(x-0) \Rightarrow L_1: 0=bx-ay$

* Datos de la recta L_2: $D(-a ; b)$; $(0 ; 0)$

Ecuación de: $L_2: y-0=-\frac{b}{a}(x-0) \Rightarrow L_2: bx+ay=0$

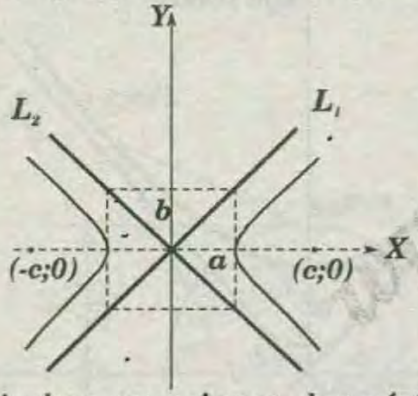
NOTA :

I) Como se observa las ***hipérbolas canónicas*** tienen asíntotas conjugadas .

II) Una forma practica de hallar las Ecuaciones de las asíntotas de cualquier hipérbola sea canónica u ordinaria consiste en reemplazar en la Ecuación de la hipérbola el número *1* por el 'cero'.

CONCLUSIÓN :

Toda hipérbola tiene dos asíntotas, que son rectas oblicuas que se cruzan en su centro a las que la gráfica de la hipérbola se acerca sin tocarlas. Para determinar gráficamente estas asíntotas dibujamos un rectángulo cuyas dimensiones sean los eje transversal y conjugado. Las diagonales de este rectángulo serán las asíntotas.



* Hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

* Asíntotas:

$$L_1: y=\frac{b}{a}x$$

$$L_2: y=-\frac{b}{a}x$$

* Ambas ecuaciones, los vértices están a una distancia *"a"* del centro y los focos a una distancia *"c"*del centro.Además no olvidemos que: $b^2=c^2-a^2$

EJEMPLO 1 :

Hallar las asíntotas de la hipérbola :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Resolución :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2} \Rightarrow x^2=\frac{a^2y^2}{b^2} \Rightarrow x=\pm\frac{ay}{b}$$

$$* x=\frac{ay}{b} \Rightarrow bx-ay=0$$

$$* x=-\frac{ay}{b} \Rightarrow bx+ay=0$$

EJEMPLO 2 :

Hallar las asíntotas de la hipérbola : $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

Resolución :

$$\left\{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=0\right\} \Rightarrow \frac{y^2}{a^2}=\frac{x^2}{b^2} \Rightarrow y^2=\frac{a^2x^2}{b^2} \Rightarrow y=\pm\frac{ax}{b}$$

$$* y=\frac{ax}{b} \Rightarrow ax-by=0$$

$$* y=-\frac{ax}{b} \Rightarrow ax+by=0$$

EJEMPLO :

Determinar las asíntotas de la hipérbola :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Resolución :

$$\left\{\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=0\right\} \Rightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2}=\frac{(y-k)^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow (x-h)^2=\frac{a^2(y-k)^2}{b^2} \Rightarrow x-h=\pm\frac{a(y-k)}{b}$$

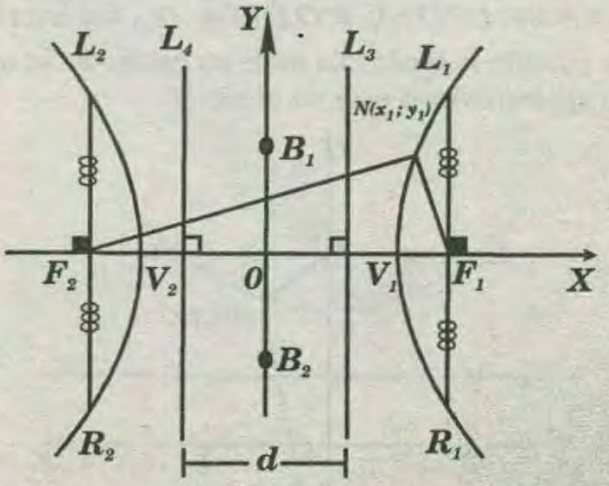
ECUACIONES DE LA HIPÉRBOLA

La ecuación cartesiana de la hipérbola para todo punto P de coordenadas genérica *(x;y)*, depende de la ubicación del eje focal respecto a los ejes coordenados.

A continuación, se analizan las diversas ecuaciones.

1)PRIMERA FORMA(CANÓNICA) :

Es cuando la hipérbola tiene su centro en el origen y su eje transverso está en el eje ***X*** .



* Ecuación de una hipérbola horizontal canónica :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

* Longitud del lado recto : $\frac{2b^2}{a}$

* Distancia entre directrices: $d=\frac{2a^2}{ac}$

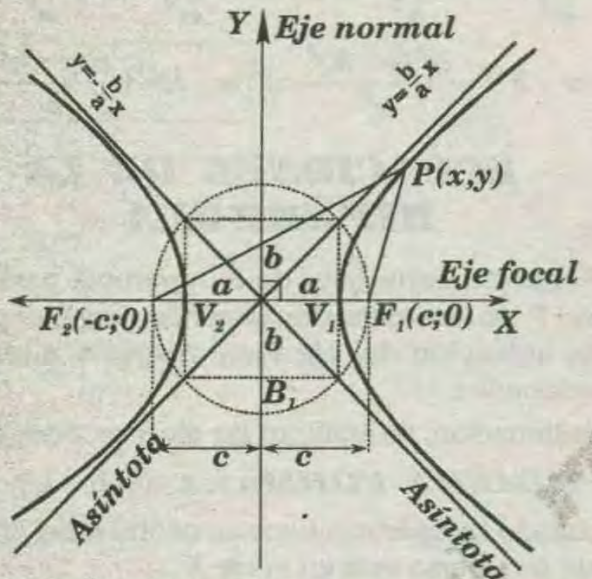
* Excentricidad : $e=\frac{c}{a}$

* Ecuaciones de las directrices $\begin{cases} L_3: x=\frac{a^2}{c} \\ L_4: x=-\frac{a^2}{c} \end{cases}$

Coordenadas de los extremos de los lados rectos

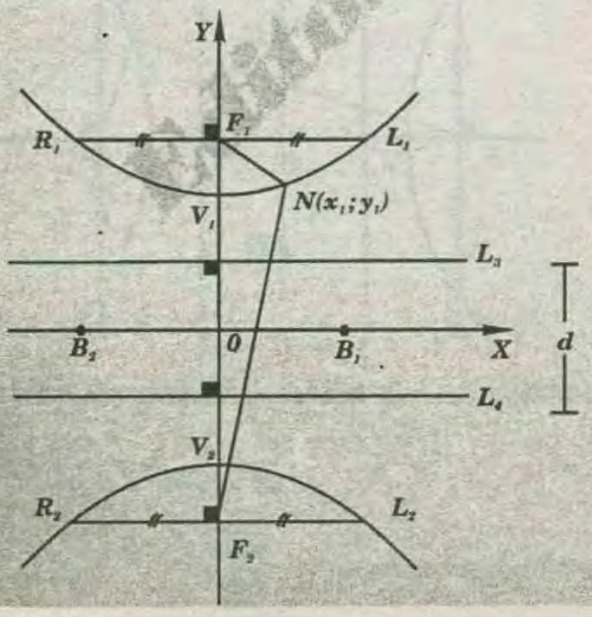
$$\begin{cases} L_1(c;\frac{b^2}{a}) & R_1(c;-\frac{b^2}{a}) \\ L_2(-c;\frac{b^2}{a}) & R_2(-c;-\frac{b^2}{a}) \end{cases}$$

Radio vector : $\begin{cases} \text{Foco derecho :} & |\overrightarrow{NF_1}|=|ex_1-a| \\ \text{Foco izquierdo :} & |\overrightarrow{NF_2}|=|ex_1+a| \end{cases}$



II)SEGUNDA FORMA (CANÓNICA) :

Es cuando la hipérbola tiene su centro en el origen y su eje transverso está en el eje Y.



* Ecuación de una hipérbola vertical canónica:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

* Longitud del lado recto : $\frac{2b^2}{a}$

* Distancia entre directrices: $d=\frac{2a^2}{a}$

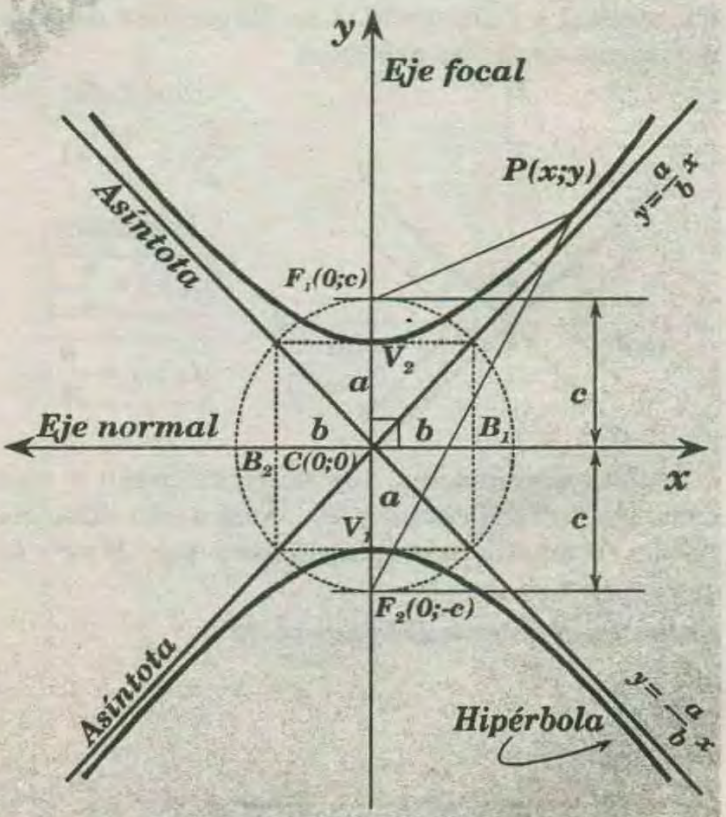
* Excentricidad: $e=\frac{c}{a}$

Ecuaciones de las directrices $\begin{cases} L_3: y=\frac{a^2}{c} \\ L_4: y=-\frac{a^2}{c} \end{cases}$

* Coordenadas de los extremos de los lados rectos

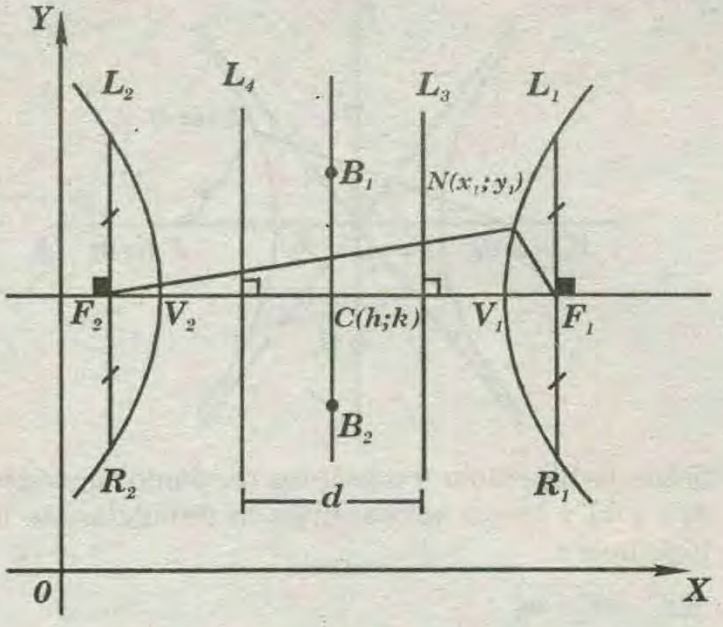
$$\begin{cases} L_1(\frac{b^2}{a};c) & R_1(-\frac{b^2}{a};c) \\ L_2(\frac{b^2}{a};-c) & R_2(-\frac{b^2}{a};-c) \end{cases}$$

Radio vector : $\begin{cases} \text{Foco superior :} & |\overrightarrow{NF_1}|=|ex_1-a| \\ \text{Foco inferior :} & |\overrightarrow{NF_2}|=|ex_1+a| \end{cases}$



III) TERCERA FORMA (ORDINARIA) :

Es cuando la hipérbola tiene su centro en el punto $C(h;k)$ y su eje transverso es paralelo al eje X .



* Ecuación de una hipérbola horizontal ordinaria :

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

$V_1(h+a;k)$; $V_2(h-a;k)$

$B_1(h;k+b)$; $B_2(h;k-b)$

$F_1(h+c;k)$; $F_2(h-c;k)$

* Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}$

* Distancia entre directrices: $d=\frac{2a^2}{c}$

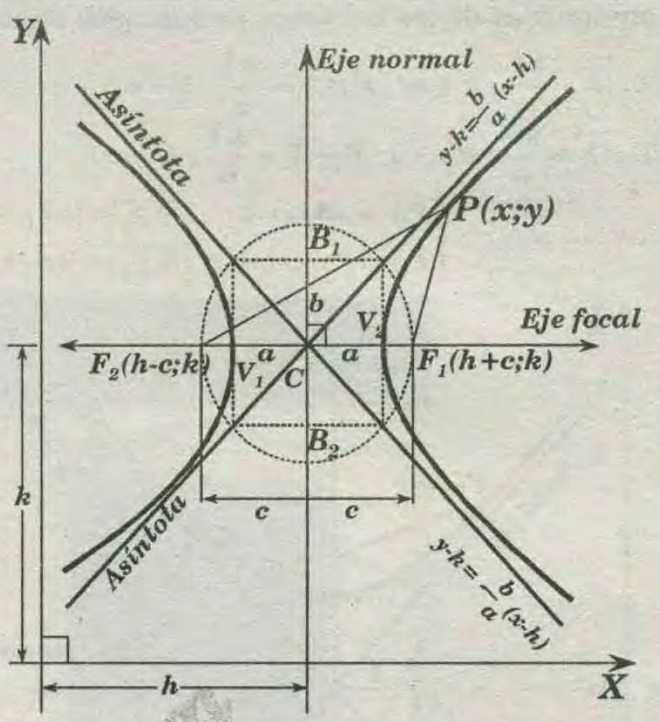
* Excentricidad: $e=\frac{c}{a}$

* Ecuaciones de las directrices $\begin{cases} L_3: x=h+\frac{a^2}{c} \\ L_4: x=h-\frac{a^2}{c} \end{cases}$

* Coordenadas de los extremos de los lados rectos :

$$\begin{cases} L_1(h+c;k+\frac{b^2}{a}) & R_1(h+c;k-\frac{b^2}{a}) \\ L_2(h-c;k+\frac{b^2}{a}) & R_2(h-c;k-\frac{b^2}{a}) \end{cases}$$

Radio vector : $\begin{cases} \text{Foco derecho}: & |\overrightarrow{NF_1}|=|ex_1-a| \\ \text{Foco izquierdo}: & |\overrightarrow{NF_2}|=|ex_1+a| \end{cases}$



IV)CUARTA FORMA (ORDINARIA)

Es cuando la hipérbola tiene su centro en el punto $C(h;k)$ y su eje transverso es paralelo al eje Y.

Ecuación de una hipérbola vertical ordinaria :

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1}$$

$V_1(h;k+a)$; $V_2(h;k-a)$; $B_1(h+b;k)$

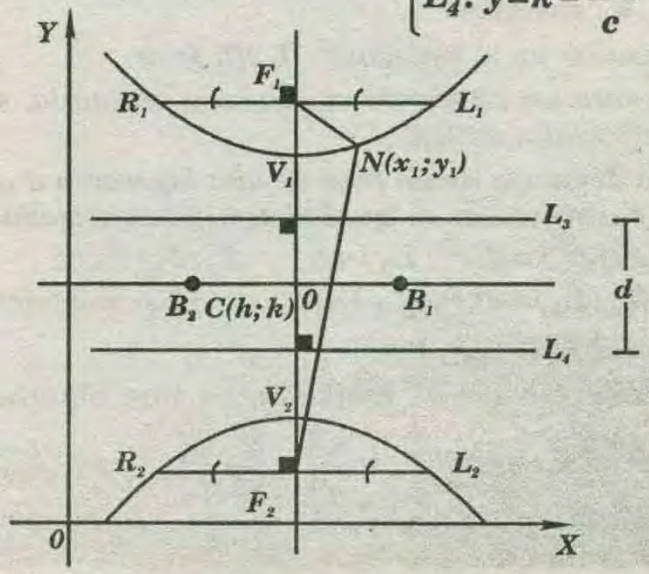
$B_2(h-b;k)$; $F_1(h;k+c)$; $F_2(h;k-c)$

* Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}$

* Distancia entre directrices: $d=\frac{2a^2}{c}$

* Excentricidad : $e=\frac{c}{a}$

Ecuaciones de las directrices : $\begin{cases} L_3: y=k+\frac{a^2}{c} \\ L_4: y=k-\frac{a^2}{c} \end{cases}$

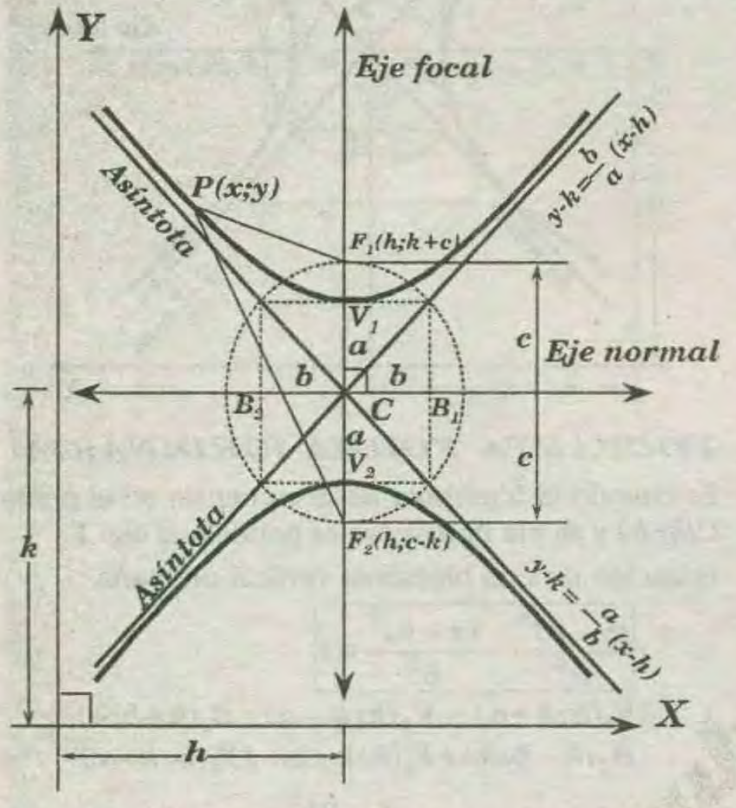


WWW.GRATIS.COM

Coordenadas de los extremos de los lados rectos :

$$\begin{cases} L_1(h+\frac{b^2}{a};k+c) \quad R_1(h-\frac{b^2}{a};k+c) \\ L_2(h+\frac{b^2}{a};k-c) \quad R_2(h-\frac{b^2}{a};k-c) \end{cases}$$

$$Radio\ vector: \begin{cases} Foco\ superior: |\overrightarrow{NF_1}| = |ex_1 - a| \\ Foco\ inferior: |\overrightarrow{NF_2}| = |ex_1 + a| \end{cases}$$



PROPIEDADES DE LA HIPÉRBOLA

A) Para un hipérbola canónica u ordinaria , sea horizontal o vertical :

L_1 : Ecuación de una asíntota

L_2 : Ecuación de una asíntota

k : constante

Ecuación de la hipérbola: $(L_1)(L_2) = k$

B) Para un hipérbola canónica u ordinaria, sea horizontal o vertical :

«La distancia de un foco de una hipérbola a una de sus asíntotas es igual al semieje conjugado»

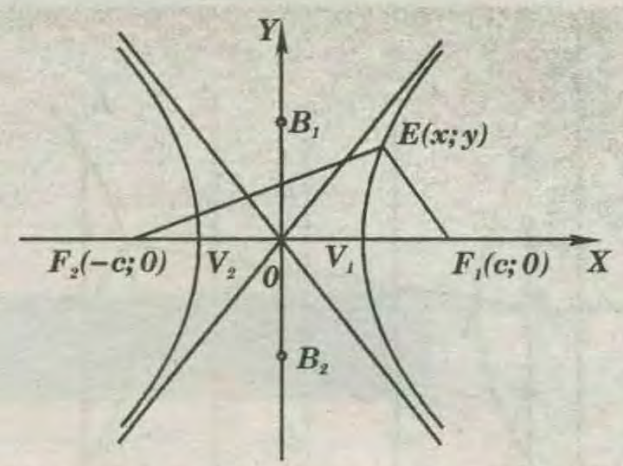
$d(F_1;L_1) = d(F_1;L_2) = b$ $\quad F_1;F_2$: focos

$d(F_2;L_1) = d(F_2;L_2) = b$ $\quad L_1;L_2$: asíntotas

EJERCICIO 1 :

Demostrar que la Ecuación de una hipérbola horizontal canónica es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

RESOLUCIÓN :



Sobre la hipérbola tomaremos un punto genérico $E(x\ ;\ y)$ y luego aplicaremos la definición de la hipérbola :

$$\boxed{|\overrightarrow{EF_2}| - |\overrightarrow{EF_1}| = 2a}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (x+c)^2+y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

$$\Rightarrow x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$\Rightarrow 2cx = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} - 2cx$$

$$\Rightarrow 4cx = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$

$$\div 4 : cx = a^2 + a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$

$$\Rightarrow (cx-a^2)^2 = \left(a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

$$\Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\Rightarrow c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\Rightarrow a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2$$

$$\Rightarrow a^2(a^2-c^2) = x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* En toda hipérbola se cumple :

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow -b^2 = a^2 - c^2 \quad \ldots\ldots\ldots (II)$$

* (II) en (I): $a^2(-b^2) = x^2(-b^2) + a^2y^2$

$$\Rightarrow \frac{-a^2b^2}{-a^2b^2} = \frac{-b^2x^2}{-a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{-a^2b^2} \Rightarrow \boxed{1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \ldots L.Q.Q.D$$

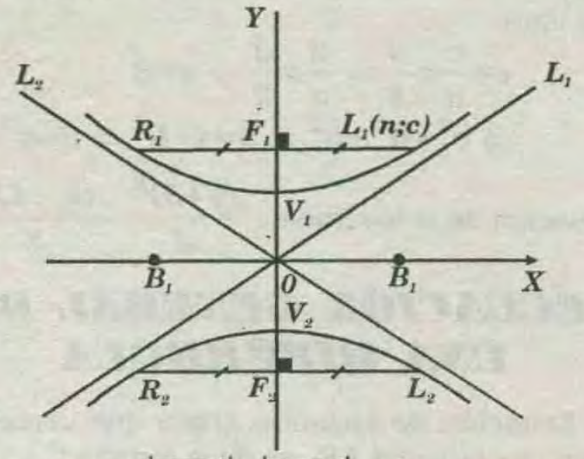
EJERCICIO 2 :

Demostrar que la longitud del lado recto de una hipérbola vertical canónica es $\frac{2b^2}{a}$.

RESOLUCIÓN :

* Ecuación de la hipérbola: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

* Debemos demostrar que : $|\overrightarrow{L_1R_1}| = \frac{2b^2}{a}$



* Por simetría : $|\overrightarrow{L_1F_1}|=|\overrightarrow{F_1R_1}|=n$

$$|\overrightarrow{L_1R_1}|=2n.....(I)$$

* De la figura: $L_1(n;\ c)$

$L_1(n;\ c) \in$ hipérbola: $\dfrac{c^2}{a^2}-\dfrac{n^2}{b^2}=1$

$$\Rightarrow c^2b^2-a^2n^2=a^2b^2 \Rightarrow c^2b^2-a^2b^2=a^2n^2$$

$$\Rightarrow \frac{b^2(c^2-a^2)}{a^2}=n^2.....(I)$$

* Sabemos que en toda hipérbola se cumple : $c^2=a^2+b^2$

$$b^2=c^2-a^2.....(II)$$

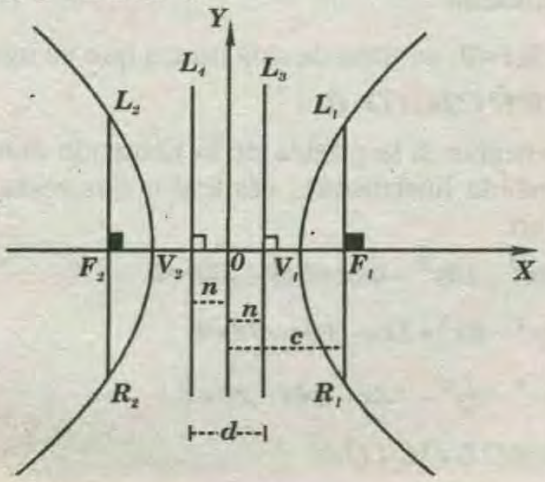
* *(II)* en *(I)*: $\dfrac{b^2\times b^2}{a^2}=n^2 \Rightarrow \dfrac{b^4}{a^2}=n^2 \Rightarrow n=\dfrac{b^2}{a}$

* En *(I)*: $|\overrightarrow{L_1R_1}|=\dfrac{2b^2}{a}$

EJERCÍCIO 3 :

Demuestre que la distancia entre directrices de una hipérbola cualquiera es $\dfrac{2a^2}{c}$

RESOLUCIÓN :



d=distancia entre directrices

Debemos demostrar que : $d=\dfrac{2a^2}{c}$

* Del gráfico : $d=2n$.....*(I)*

* Por definición general de excentricidad:

$$e=\frac{|\overrightarrow{L_1F_1}|}{d(L_1;\ L_3)} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{\frac{b^2}{a}}{c-n} \Rightarrow c^2-cn=b^2$$

$$\Rightarrow \frac{c^2-b^2}{c}=n.....(I)$$

* En todo hipérbola se cumple : $c^2=a^2+b^2$

$$c^2-b^2=a^2.....(II)$$

* *(II)* en *(I)*: $\dfrac{a^2}{c}=n$

* En *(I)* : $d=\dfrac{2a^2}{c}$.....*L.Q.Q.D.*

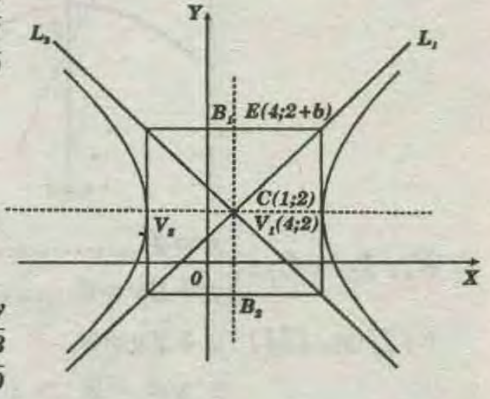
EJERCICIO 4 :

Las asíntotas de una hipérbola son L_1: $x-y+1=0$ y L_2: $x+y-3=0$. Si uno de los vértices del eje transverso es $V_1(4;\ 2)$; hallar la Ecuación de la hipérbola y la longitud del lado recto .

RESOLUCIÓN :

$L_1: x-y+1=0$

x	y
0	1
-1	0



$L_2: x+y-3=0$

x	y
0	3
3	0

* Donde se cortan las asíntotas es el centro de la hipérbola :

$$x-y+1=0.....(I)$$

$$C(h;k): L_1 \cap L_2: \quad x+y-3=0.....(II)$$

$$2x-2=0$$

$x=1$ En *(I)* : $1-y+1=0 \Rightarrow 2=y \Rightarrow C(1;2)$

$\Rightarrow a=|\overrightarrow{CV_1}|=|4-1|=3$

* De la figura : $E(4;2+b) \in L_1$:

$$4-(2+b)+1=0 \Rightarrow 4-2-b+1=0 \Rightarrow b=3$$

* Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{(x-1)^2}{9}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$

* Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}=\frac{2(9)}{3}=6$

EJERCICIO 5 :

El eje transverso de una hipérbola vertical ordinaria está en la recta $L: x=4$. Los focos están en las rectas $L_1: x+2y=0$ y $L_2: 2x+y=0$, y la excentricidad es $\frac{3}{2}$. Hallar la Ecuación de la hipérbola.

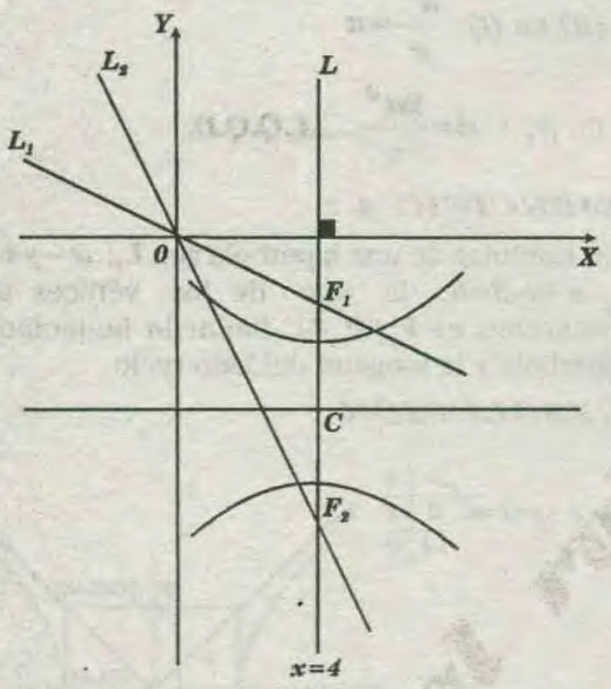
RESOLUCIÓN :

$L_1: x+2y=0$

x	y
0	0
1	-1/2

$L_2: 2x+y=0$

x	y
0	0
1	-2



$$F_1: L\cap L_1:\begin{cases}x=4.....(I)\\ x+2y=0.....(II)\end{cases}$$

* (I) en $(II): 4+2y=0$

$$\Rightarrow y=-2\Rightarrow F_1(4;-2)$$

$$F_2: L\cap L_2:\begin{cases}x=4.....(I)\\ 2x+y=0.....(III)\end{cases}$$

* (I) en $(III): 8+y=0$

$$\Rightarrow y=-8\Rightarrow F_2(4;-8)$$

* $C(h;k)$: punto medio de $\overrightarrow{F_1F_2}$:

$$h=\frac{4+4}{2}=4\wedge k=\frac{-2-8}{2}=-5\Rightarrow C(4;-5)$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{F_1F_2}\right|=2c\Rightarrow |-2-(8)|=2c$$

$$\Rightarrow |6|=2c\Rightarrow 3=c$$

* Por dato:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}\Rightarrow \frac{3}{a}=\frac{3}{2}\Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2\Rightarrow 9=4+b^2\Rightarrow 5=b^2$$

* Ecuación de la hipérbola : $\frac{(y+5)^2}{4}-\frac{(x-4)^2}{5}=1$

ECUACIÓN GENERAL DE UNA HIPÉRBOLA

Una Ecuación de segundo grado que carece del término rectangular XY , es de la forman :

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Para que esta Ecuación de $2°$ grado sea una hipérbola

$\{$'A'; 'C' deben ser de signos contrarios.

La Ecuación general de la hipérbola :

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Se puede reducir a la forma ordinaria de la hipérbola

$$Ax^2+Dx+Cy^2+Ey=-F$$

$$\Rightarrow A\left(x^2+\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{4A^2}\right)+D\left(y^2+\frac{E}{C}y+\frac{E^2}{4C^2}\right)=-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}$$

$$\Rightarrow A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=t$$

$$\Rightarrow t=-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}\Rightarrow \frac{A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{t}+\frac{C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{t}=\frac{t}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{t}+\frac{C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{t}=1\Rightarrow \boxed{\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{t}{A}}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{t}{C}}=1}$$

Ecuación ordinaria de una hipérbola :

I) Si $t>0$, se trata de una hipérbola horizontal canónica u ordinaria .

II) Si $t<0$, se trata de una hipérbola vertical canónica u ordinaria .

III) Si $t=0$, se trata de dos rectas que se intersectan.

EJERCICIO 6 :

Determinar si la gráfica de la Ecuación dada es una hipérbola horizontal , vertical o dos rectas que se cortan.

a) $9x^2-16y^2-54x+64y-559=0$

b) $8y^2-6x^2+12x-64y+74=0$

c) $3x^2-4y^2-12x-24y-24=0$

RESOLUCIÓN :

a) $9x^2-16y^2-54x+64y-559=0$

$\Rightarrow 9x^2-54x-16y^2+64y=559$

$\Rightarrow 9(x^2-6x+9)-16(y^2-4y+4)=559+81-64$

$\Rightarrow 9(x-3)^2-16(y-2)^2=576$

$\Rightarrow \dfrac{9(x-3)^2}{576}-\dfrac{16(y-2)^2}{576}=\dfrac{576}{576}$

$\Rightarrow \dfrac{(x-3)^2}{64}-\dfrac{(y-2)^2}{36}=1$

* Es una hipérbola horizontal ordinaria :

$C(3;2);\ a=8;\ b=6$

b) $8y^2-6x^2+12x-64y+74=0$

$\Rightarrow 8y^2-64y-6x^2+12x=-74$

$\Rightarrow 8(y^2-8y+16)-6(x^2-2x+1)=-74+128-6$

$\Rightarrow 8(y-4)^2-6(x-1)^2=48$

$\Rightarrow \dfrac{8(y-4)^2}{48}-\dfrac{6(x-1)^2}{48}=\dfrac{48}{48}$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{(y-4)^2}{6}-\dfrac{(x-1)^2}{8}=1}$

* Es una hipérbola vertical ordinaria :

$C(1;4)\ ;\ a=\sqrt{6}\ ;\ b=2\sqrt{2}$

c) $3x^2-4y^2-12x-24y-24=0$

$\Rightarrow 3x^2-4y^2-12x-24y=24$

$\Rightarrow 3(x^2-4x+4)-4(y^2+6y+9)=24+12-36$

$\Rightarrow 3(x-2)^2-4(y+3)^2=0 \Rightarrow (x-2)^2=\dfrac{4}{3}(y+3)^2$

$\Rightarrow x-2=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}(y+3) \Rightarrow x-2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}(y+3)$

$x\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2y+6$

$\boxed{x\sqrt{3}-2y-2\sqrt{3}-6=0}$

$\Rightarrow x-2=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}(y+3)$

$\Rightarrow x\sqrt{3}-2\sqrt{3}=-2y-6$

$\boxed{x\sqrt{3}+2y-2\sqrt{3}+6=0}$

} Son 2 rectas que se intersectan

EJERCICIO 7 :

Se tiene la hipérbola horizontal :

$x^2-4y^2-10x+8ny-55=0$. Si el lado recto mide 2 unidades ; hallar el valor de n y la ecuación de la hipérbola si $n>0$.

RESOLUCIÓN :

$x^2-4y^2-10x+8ny-55=0$

$\Rightarrow \dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow x^2-10x-4y^2+8ny=55$

$\Rightarrow (x^2-10x+25)-4(y^2-2ny+n^2)=55+25-4n^2$

$\Rightarrow (x-5)^2-4(y-n)^2=80-4n^2$

$\Rightarrow \dfrac{(x-5)^2}{80-4n^2}-\dfrac{4(y-n)^2}{80-4n^2}=\dfrac{80-4n^2}{80-4n^2}$

$\Rightarrow \dfrac{(x-5)^2}{80-4n^2}-\dfrac{(y-n)^2}{20-n^2}=1$.....(α)

$\Rightarrow a^2=80-4n^2$.....(I)

$b^2=20-n^2$.....(II)

* Por dato : $\dfrac{2b^2}{a}=2 \Rightarrow b^2=a$.....(III)

* (I) y (II) en (III): $20-n^2=\sqrt{80-4n^2}$

$\Rightarrow (20-n^2)^2=\left(\sqrt{80-4n^2}\right)^2$

$\Rightarrow 400-40n^2+n^4=80-4n^2$

$n^4-36n^2+320=0$

n^2 -20

n^2 -16

* $n^2=20 \Rightarrow$ No puede ser porque hará que a^2 y b^2 sean cero. $n^2=16 \Rightarrow n=\pm 4 \Rightarrow n=4$

* En (I): Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{(x-5)^2}{16}-\dfrac{(y-4)^2}{4}=1$

TANGENTES A UNA HIPÉRBOLA

Vamos a ver tres métodos para hallar las Ecuaciones de las tangentes a una hipérbola.

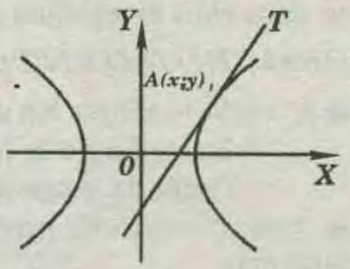
I) PRIMER MÉTODO: cuando se conoce el punto de tangencia.

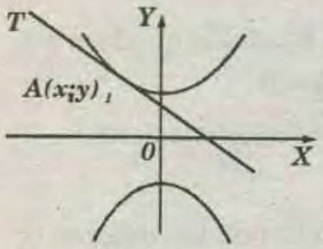
a) CASO 1: Usando fórmulas para cada tipo de Ecuación :

Ecuación de T=?

Datos conocidos $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ A(x_1;y)_1\end{cases}$

Ecuación de T : $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$





Ecuación de T=?

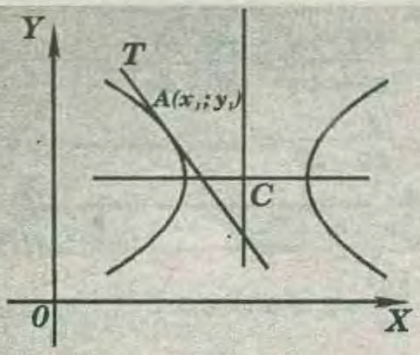
Datos conocidos $\begin{cases}\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1\\ A(x_1;y)_1\end{cases}$

Ecuación de T : $\dfrac{y_1y}{a^2}-\dfrac{x_1x}{b^2}=1$

Ecuación de T=?

Datos conocidos $\begin{cases}\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1\\ A(x_1;y_1)\end{cases}$

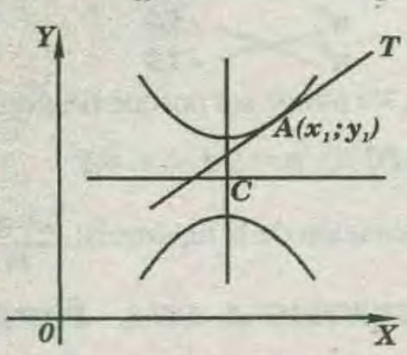
Ecuación de T : $\boxed{\dfrac{(x_1-h)(x-h)}{a^2}-\dfrac{(y_1-k)(y-k)}{b^2}=1}$



Ecuación de $T=?$

Datos conocidos $\begin{cases} \dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1 \\ A(x_1;y_1) \end{cases}$

Ecuación de T : $\dfrac{(x_1-h)(x-h)}{a^2}-\dfrac{(y_1-k)(y-k)}{b^2}=1$



B) CASO 2 : USANDO TRASLACIÓN DE EJES

Cuando se conoce el punto de tangencia y se desea hallar la tangente a una cónica , se puede aplicar una traslación de ejes al punto de tangencia y después aplicar la propiedad aplicada en el capitulo de traslación de ejes(ver capítulo **35**).

PROCEDIMIENTO :

♠ Al inicio tenemos los siguientes datos :

* Ecuación de la hipérbola.
* Punto de tangencia.

♠ Aplicaremos una traslación de ejes al punto de tangencia

♠ Después de la traslación la Ecuación quedará así:

$$x'^2-y'^2+Dx'+Ey'=0 .$$

♠ La tangente en el punto de tangencia será:

$$T: Dx'+Ey'=0$$

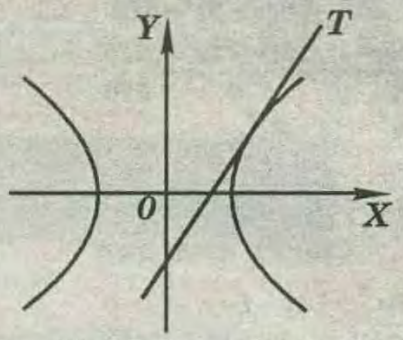
♠ Como ya tenemos la Ecuación de la tangente T pero en el sistema final , deberemos pasar esta Ecuación al sistema inicial .

II) SEGUNDO MÉTODO : Método del discriminante:

Este método del discriminante sirve para resolver problemas sobre tangentes a cualquier cónica; es un método general .

PROCEDIMIENTO :

♠ * Ecuación de la hipérbola } A una de las Ecuaciones
* Ecuación de la tangente } le debe faltar un dato.



♠ Intersectar : hipérbola $\cap$ tangente .

♠ A la Ecuación que resulta de la intersección, le aplicaremos el discriminante: $b^2-4ac=0$.

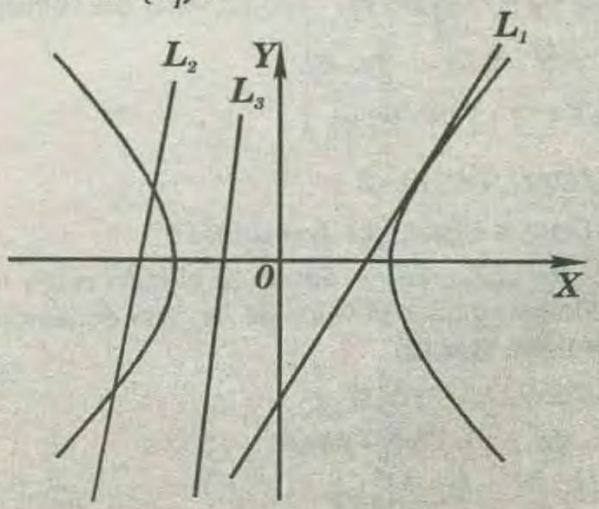
♠ Al aplicar el discriminante, hallaremos el valor que deseamos hallar .

La hipérbola es una Ecuación de segundo grado como lo es $ax^2+bx+c=0$. Si quisiéramos determinar la naturaleza de las soluciones de esta Ecuación deberemos analizar el discriminante :

* Si el $b^2-4ac>0$: significa que hay dos soluciones reales y diferentes. Con relación al gráfico ,la hipérbola y la recta tienen dos puntos en común (L_2).

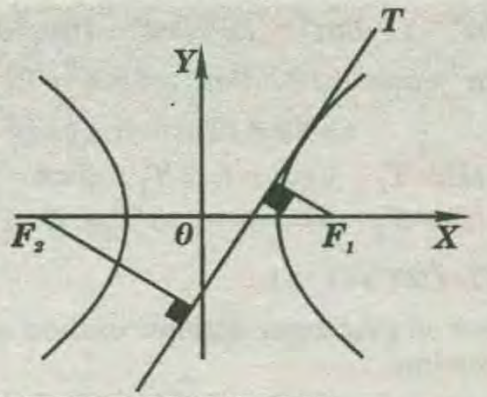
* Si el $b^2-4ac<0$: significa que hay dos soluciones imaginarias es decir no hay solución real . Con relación al gráfico , la hipérbola y la recta no tienen punto en común (L_3).

* Si el $b^2-4ac=0$: significa que hay dos soluciones reales pero iguales , es decir hay una solución. Con relación al gráfico , la hipérbola y la recta tienen un punto en común (L_1) .



III) USANDO UNA PROPIEDAD.

Esta propiedad cumple para todo tipo de hipérbola sea canónica u ordinaria .



$$\boxed{d(F_1;T)\times d(F_2;T)=b^2}$$

El producto de la distancia de los focos de una hipérbola a una misma recta tangente es igual a b^2

* b= semieje conjugado

CONCLUSIÓN :

Como la ecuación de una hipérbola es de segundo grado , sus tangentes pueden obtenerse empleando la condición de tangencia o el método empleado para hallar la ecuación de la tangente a una elipse .

TANGENTE EN UN PUNTO DE CONTACTO

* La ecuación de la tangente a la hipérbola $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ en cualquier punto $P_1(x_1;y_1)$ de la curva es : $b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2$

* La ecuación de la tangente a la hipérbola $b^2y^2-a^2x^2=a^2b^2$ en cualquier punto $P_1(x_1;y_1)$ de la curva es : $b^2y_1y-a^2x_1x=a^2b^2$

TANGENTE DE PENDIENTE DADA

* Las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ de pendiente "m" son :

$$\boxed{y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}}\ ;\ |m|>\frac{b}{a}$$

* Las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $b^2y^2-a^2x^2=a^2b^2$ de pendiente "m" son :

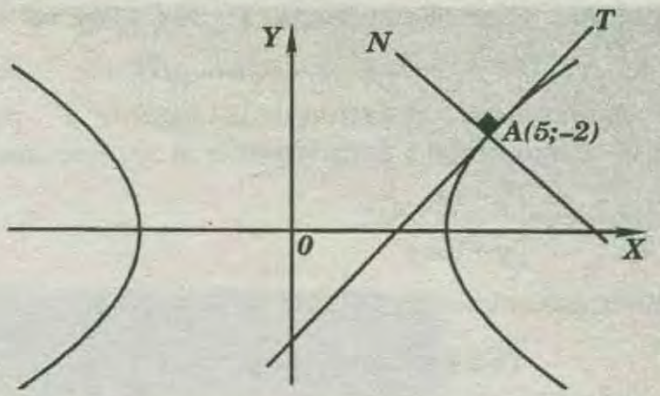
$$\boxed{y=mx\pm\sqrt{a^2-b^2m^2}}\ ;\ |m|<\frac{a}{b}$$

EJERCICIO 8 :

Determinar las Ecuaciones de la recta tangente y normal a la hipérbola $2x^2-5y^2=30$ en el punto $A(5;-2)$.

RESOLUCIÓN :

$$2x^2-5y^2=30\Rightarrow\frac{2x^2}{30}-\frac{5y^2}{30}=\frac{30}{30}$$



$$\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1\Rightarrow\{a^2=15\Rightarrow a=\sqrt{15}\}\wedge\{b^2=6\Rightarrow b=\sqrt{6}\}$$

Como se conoce la Ecuación de la hipérbola y su punto de tangencia ; podemos usar la fórmula siguiente para hallar la Ecuación de la tangente.

$$T:\ \frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1\ \Rightarrow\ T:\ \frac{5x}{15}-\frac{-2y}{6}=1$$

$$\Rightarrow T:\ \frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1\Rightarrow T:\ x+y-3=0\Rightarrow m_T=-1$$

* Datos de la normal : $A(5;-2)$; $m=1$
* Ecuación de la normal: $y+2=1(x-5)$

$$N:\ 0=x-y-7$$

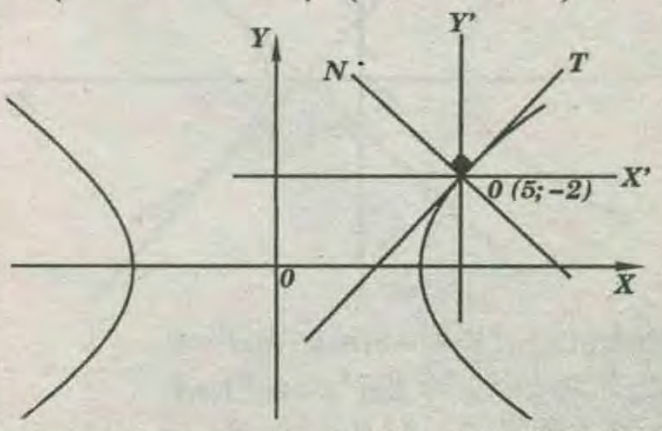
EJERCICIO 9 :

Resolver el problema anterior usando traslación de ejes.

RESOLUCIÓN :

$$2x^2-5y^2=30\Rightarrow\frac{2x^2}{30}-\frac{5y^2}{30}=\frac{30}{30}\Rightarrow\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$$

$$\Rightarrow\{a^2=15\Rightarrow a=\sqrt{15}\}\wedge\{b^2=6\Rightarrow b=\sqrt{6}\}$$



Hacemos una traslación de ejes al punto $O'(5;-2)$; obligando a la curva y a la tangente T a pasar por el origen (en el sistema final).

Trasladando la Ecuación : $x=x'+5\ \wedge\ y=y'-2$

$$2x^2-5y^2=30\Rightarrow 2(x'+5)^2-5(y'-2)=30$$

$$\Rightarrow 2(x'^2+10x'+25)-5(y'^2-4y'+4)=30$$

$$\Rightarrow 2x'^2+20x'+50-5y'^2+20y'-20-30=0$$

$$\Rightarrow 2x'^2-5y'^2+20x'+20y'=0$$

Ecuación de la hipérbola en el sistema final

* Por propiedad : Ecuación de T: $20x'+20y'=0$

$$T: x'+y'=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Ahora tenemos la Ecuación de la tangente T , pero en el sistema final ; para regresar al sistema inicial haremos : $\begin{cases} x-5=x' \\ y+2=y' \end{cases}$

* Reemplazando en (I): $T: x-5+y+2=0$

$$T: x+y-3=0 \Rightarrow m_T=-1$$

*- Datos de la normal: $A(5;-2) \wedge m=1$

* Ecuación de la normal: $y+2=x-5$

$$N: 0=x-y-7$$

EJERCICIO 10 :

Determinar las Ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $2x^2-3y^2=6$, que pasan por el punto $A(1;0)$. Resolver usando el método del discriminante.

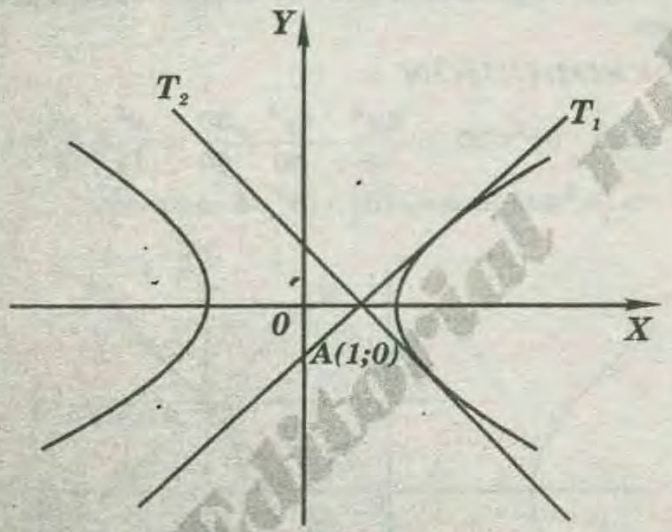
RESOLUCIÓN :

$2x^2-3y^2=6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$

$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1 \Rightarrow \{a^2=3 \Rightarrow a=\sqrt{3}\} \wedge \{b^2=2 \rightarrow b=\sqrt{2}\}$

$T_1: y-0=m(x-1)$

$T_1: y=mx-m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$



* (I) en (α) : $2x^2-3(mx-m)^2=6$

$\Rightarrow 2x^2-3(m^2x^2-2m^2x+m^2)=6$

$\Rightarrow 2x^2-3m^2x^2-6m^2x-3m^2)=6$

$\Rightarrow x^2(2-3m^2)+x(6m^2)-3m^2-6=0$

* Por ser tangentes: $b^2-4ac=0$

$(6m^2)^2-4(2-3m^2)(-3m^2-6)=0$

$\Rightarrow 36m^4-4(2-3m^2)(-3m^2-6)=0$

$\Rightarrow 9m^4-(2-3m^2)(-3m^2-6)=0$

$\Rightarrow 9m^4-(-6m^2-12+9m^4+18m^2)=0$

$\Rightarrow 9m^4+6m^2+12-9m^4-18m^2=0$

$\Rightarrow 12=12m^2 \Rightarrow \pm 1=m$

* En (I): $T_1: y=x-1 \Rightarrow T_1: 0=x-y-1$

* En (I): $T_2: y=-x+1 \Rightarrow T_2: 0=x+y-1$

EJERCICIO 11 :

Resolver el problema anterior usando otro método de solución.

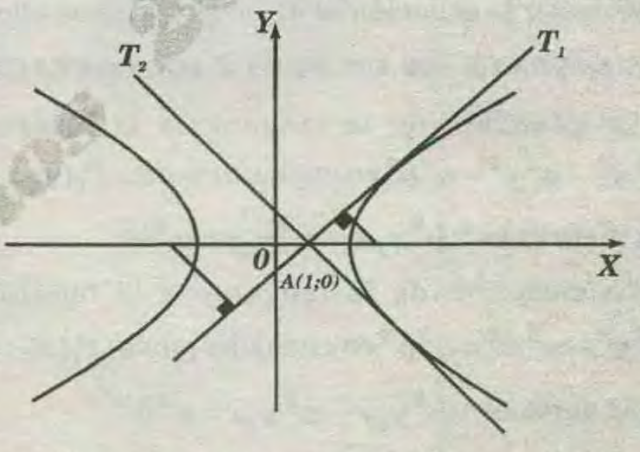
RESOLUCIÓN :

* Para resolver el problema con otro método diferente al método del discriminante : podría ser el *III* método estudiado .

$2x^2-3y^2=6 \Rightarrow \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$

$\Rightarrow \{a^2=3 \Rightarrow a=\sqrt{3}\} \wedge \{b^2=2 \Rightarrow b=\sqrt{2}\}$

$\Rightarrow c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=3+2 \Rightarrow c=\sqrt{5}$



$T_1: y-0=m(x-1) \Rightarrow y=mx-m$

$T_1: 0=mx-y-m \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$

* Por propiedad:

$$d(F_1;T_1)\times d(F_2;T_2)=b^2$$

$$\frac{|\sqrt{5}m-m|}{\sqrt{m^2+1}} \times \frac{|-\sqrt{5}m-m|}{\sqrt{m^2+1}}=2$$

$$\frac{|\sqrt{5}m-m|\times|-\sqrt{5}m+m|}{m^2+1}=2$$

$\Rightarrow |(\sqrt{5}m-m)(\sqrt{5}m+m)|=2m^2+2$

$\Rightarrow |5m^2-m^2|=2m^2+2 \Rightarrow |4m^2|=2m^2+2$

$\Rightarrow 4m^2=2m^2+2 \Rightarrow m=\pm 1$

* En (I): $T_1: x-y-1=0$

* En (I): $T_2: -x-y+1=0 \Rightarrow T_2: x+y-1=0$

EJERCICIO 12 :

Se tiene una hipérbola de focos $F_1(7;-3)$; $F_2(-3;-3)$ y una tangente T: $5x-3y-28=0$. Hallar la Ecuación

de la hipérbola y la excentricidad .

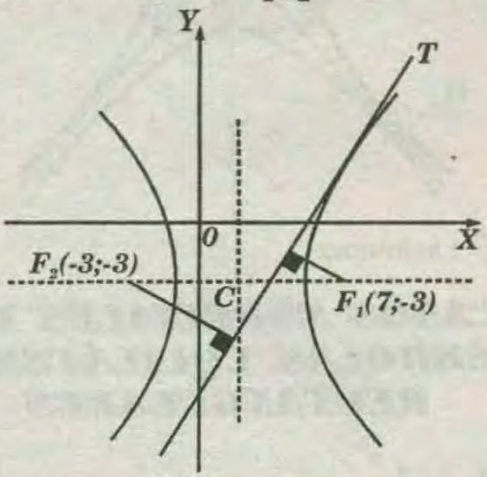
RESOLUCIÓN :

x	y
0	$-28/3$
$28/5$	0

$T: 5x-3y-28=0$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

* $C(h;k)$: punto medio de $\overrightarrow{F_1F_2}$:



$$h=\frac{-3+7}{2}=2 \wedge k=\frac{-3-3}{2}=-3$$

$$C(2;-3) \Rightarrow |\overrightarrow{F_1F_2}|=2c$$

$$\Rightarrow |-3-7|=2c \Rightarrow 5=c$$

* Por propiedad: $d(F_1;T)d(F_2;T)=b^2$

$$\frac{|35+9-28|}{\sqrt{34}}\times\frac{|-15+9-28|}{\sqrt{34}}=b^2$$

$$\Rightarrow \frac{16\times 34}{34}=b^2 \Rightarrow 16=b^2$$

$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 25+a^2+16 \Rightarrow 9=a^2$$

* En (α) : $\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{(y-3)^2}{16}=1$

* excentricidad : $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{3}$

EJERCICIO 13 :

Se da la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ y una tangente cualquiera a ella ; A es el punto de intersección de la tangente con el eje X ; B es la proyección del punto de tangencia sobre el eje X .

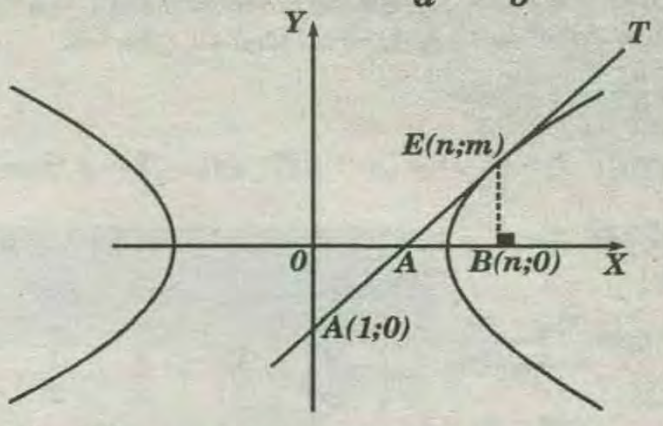
Demostrar que $|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OB}|=a^2$

RESOLUCIÓN :

* Debemos demostrar que : $|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|=a^2$

* Ecuación de la hipérbola : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

* Ecuación de la tangente : $T: \dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$



$$T: \frac{nx}{a^2}-\frac{my}{b^2}=1 \wedge T: nb^2-ma^2y-a^2b^2=0$$

* Se hace $y=0$:

$$nb^2x-a^2b^2=0 \Rightarrow x=\frac{a^2}{n} \Rightarrow A\left(\frac{a^2}{n};0\right)$$

* Comprobando : $|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OB}|=a^2$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{n}\times n=a^2 \Rightarrow a^2=a^2$$

EJERCICIO 14 :

Desde el punto $A(0;-5)$ se trazan tangentes a la hipérbola $x^2-4y^2=20$. Hallar el ángulo agudo θ que forman las tangentes.

RESOLUCIÓN :

$$x^2-4y^2=20 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

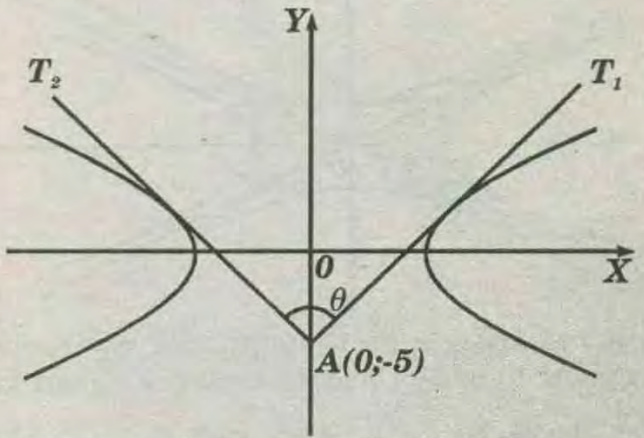
$$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$$

$$\Rightarrow \left\{a^2=20 \Rightarrow a=2\sqrt{5}\right\} \wedge \left\{b^2=5 \Rightarrow b=\sqrt{5}\right\}$$

$$\Rightarrow T_1 : y+5=m(x-0)$$

$$T_1 : 0=mx-y-5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* De (I) : $y=mx-5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$



* (II) en (α) : $x^2-4(mx-5)^2=20$

$$\Rightarrow x^2-4(m^2x^2-10mx+25)=20$$

$$\Rightarrow x^2-4m^2x^2-40mx+100-20=0$$

$$\Rightarrow x^2(1-4m^2)+x(40m)-120=0$$

* Por ser tangentes: $b^2 - 4ac = 0$

$(40m)^2 - 4(1-4m^2)(-120)=0 \Rightarrow 1600m^2+480(1-4m^2)=0$

$\div 160:\ 10m^2+3(1-4m^2)=0 \Rightarrow\ 10m^2+3-12m^2=0$

$\Rightarrow \frac{3}{2}=m^2 \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=m$

* En *(I)*: $T_1:\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x-y-5=0 \Rightarrow T_1:\ \sqrt{3}x-\sqrt{2}y-5\sqrt{2}=0$

* En *(II)*: $T_2:\ \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x-y-5=0 \Rightarrow T_2:\ \sqrt{3}x+\sqrt{2}y+5\sqrt{2}=0$

$$\Rightarrow tg\theta=\frac{m_{T_2}-m_{T_1}}{1+m_{T_2};m_{T_1}}=\frac{\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{1-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{2}}$$

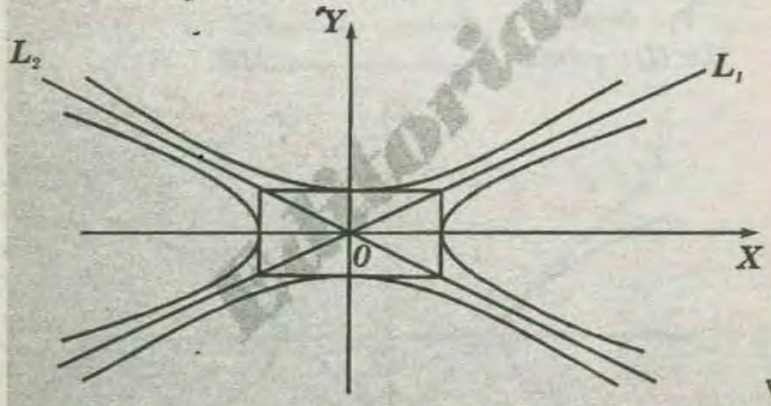
$$\Rightarrow tg\theta=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{6} \Rightarrow tg\theta=2\sqrt{6} \Rightarrow \theta=78{,}5^\circ$$

HIPÉRBOLAS CONJUGADAS

Dos hipérbolas son conjugadas cuando el eje transverso de cada una es igual al eje conjugado de la otra . Son hipérbolas conjugadas, si la Ecuación de una hipérbola es : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.....*(I)*

Entonces la hipérbola conjugada de *(I)* tiene por Ecuación: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.

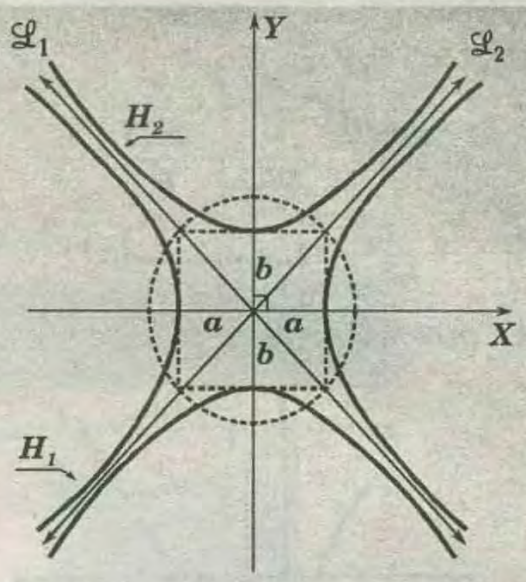
* La segunda Ecuación se puede obtener de la primera Ecuación *(I)* cambiando los signos de los términos del primer miembro .



* Como se aprecia en la figura dos hipérbolas conjugadas tienen el mismo centro y tienen las mismas asíntotas : $\mathcal{H}_1: -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

* La conjugada de H_1 es H_2 y viceversa :

$$\mathcal{H}: -\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$$



$\overline{\mathscr{L}_1}$ y $\overline{\mathscr{L}_2}$: asíntotas

CASOS ESPECIALES DE HIPÉRBOLAS EQUILÁTERAS O RECTANGULARES

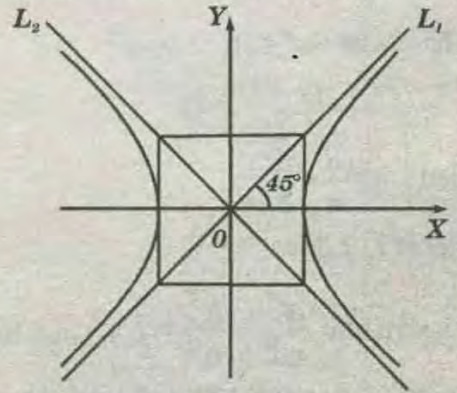
Sea $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, la ecuación de una hipérbola horizontal canónica equilátera . Por ser equilátera

$$a=b:\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$$

* Ecuación de la hipérbola equilátera horizontal :

$$x^2-y^2=a^2$$

* Posición inicial de una hipérbola equilátera :



Vamos a girar las asíntotas hasta que coincidan con los ejes.

PRIMER CASO : Vamos a girar las asíntotas *45°* en sentido antihorario. Las ramas de la hipérbola están en el *I* y *III* cuadrante.

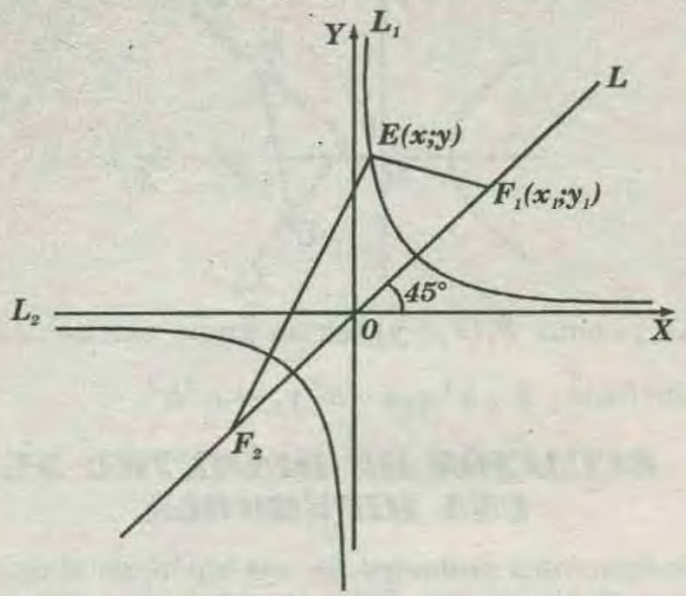
Sea *L* la recta que contiene al eje transverso.

Datos de *L* : *(0; 0)* y $m=1$

* Ecuación de *L*: $y-0=x-0$

$F_1(x_1;y_1) \in L : 0 = x_1 - y_1$

$x_1 = y_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$



$\Rightarrow |\overrightarrow{OF_1}| = c \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2$

$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = c^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$

* *(I)* en *(II)* : $2x_1^2 = c^2$

$\Rightarrow x_1 = \frac{c}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ En *(I)* : $y_1 = \frac{c}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow F_1\left(\frac{c}{\sqrt{2}}; \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$, como $c^2 = a^2 + b^2$, por ser equilátero : $a = b$

$\Rightarrow c^2 = 2a^2 \Rightarrow c = a\sqrt{2} \Rightarrow F_1\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}; \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow F_1(a;a)$

* Por simetría: $F_2(-a\,;-a)$

Hallaremos la Ecuación de esta hipérbola aplicando la definición de la hipérbola : $|\overrightarrow{EF_2}| - |\overrightarrow{EF_1}| = 2a$.

$\Rightarrow \sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2} - \sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2} = 2a$

$\Rightarrow \left(\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}\right)^2$

$\Rightarrow x^2+2ax+a^2+y^2+2ay+a^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2} + x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2ay + a^2$

$\Rightarrow 4ax + 4ay = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}$

$\div 4a$: $x + y = a + \sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}$

$\Rightarrow (x+y-a)^2 = \left(\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}\right)^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+a^2+2xy-2ax-2ay = x^2-2ax+a^2+y^2-2ay+a^2$

$\Rightarrow 2xy = a^2$

* Ecuación de la hipérbola equilátera : $xy = \frac{a^2}{2}$

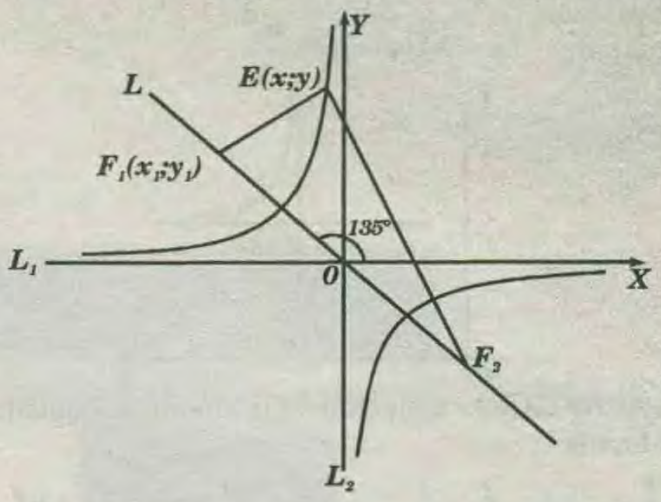
SEGUNDO CASO : Vamos a girar las asíntotas *135°* en sentido antihorario . Las ramas de la hipérbola están en el *II* y *IV* cuadrante .

Sea *L* la recta que contiene al eje transverso .

Datos de *L*: *(0; 0) ; m = – 1*

Ecuación de *L* : $y - 0 = -1(x - 0)$

$y = -x \Rightarrow L: x + y = 0$



$F_1(x_1;y_1) \in L : x_1 + y_1 = 0$

$x_1 = -y_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$

$\Rightarrow |\overrightarrow{OF_1}| = c \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = c$

$x_1^2 + y_1^2 = c^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$

* *(I)* en *(II)*: $2x_1^2 = c^2$

$\Rightarrow x_1 = \pm\frac{c}{\sqrt{2}} \rightarrow x_1 = -\frac{c}{\sqrt{2}}$

* En *(I)*: $y_1 = \frac{c}{\sqrt{2}} \Rightarrow F_1\left(\frac{-c}{\sqrt{2}}; \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$

* Como $c^2 = a^2 + b^2$ por ser equilátera :

$a = b \Rightarrow c^2 = 2a^2 \Rightarrow c = a\sqrt{2} \Rightarrow F_1\left(\frac{-a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}; \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow F_1(-a;a)$ Por simetría $F_2(a;-a)$

Ahora hallaremos la Ecuación de esta hipérbola aplicando la definición de la hipérbola: $|\overrightarrow{EF_2}| - |\overrightarrow{EF_1}| = 2a$

$\sqrt{(x-a)^2+(y+a)^2} - \sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2} = 2a$

$\Rightarrow \left(\sqrt{(x-a)^2+(y+a)^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2}\right)^2$

$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + 2ay + a^2$

$= 4a^2 + 4a\sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2} + x^2 + 2ax + a^2 + y^2 - 2ay + a^2$

$\Rightarrow -2ax + 2ay = 4a^2 + 2ax - 2ay + 4a\sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2}$

$\Rightarrow 4ay = 4ax + 4a^2 + 4a\sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2}$

$\div 4a$: $y = x + a + \sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2}$

$(y - x - a)^2 = \left(\sqrt{x^2+2ax+a^2+y^2-2ay+a^2}\right)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + a^2 - 2xy - 2ay + 2ax = x^2 + 2ax + a^2 + y^2 2ay + a^2$

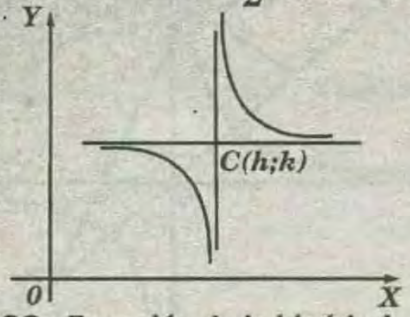
$\Rightarrow -2xy = a^2$

Ecuación de la hipérbola equilátera $xy = -\frac{a^2}{2}$

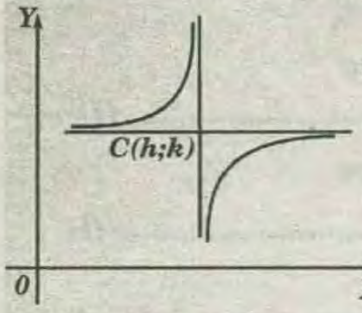
* Análogamente si se trata de hipérbolas equiláteras ordinarias :

GRATIS2.com

TERCER CASO : Ecuación de la hipérbola equilátera ordinaria : $(x-h)(y-k)=\frac{a^2}{2}$



CUARTO CASO : Ecuación de la hipérbola equilátera ordinaria :



$$(x-h)(y-k)=-\frac{a^2}{2}$$

EJERCICIO 15 :

Hallar la Ecuación de la hipérbola equilátera que tiene por asíntotas los ejes coordenados. La hipérbola es tangente a la recta $L: x-y+2=0$ siendo el punto de tangencia el vértice de la hipérbola.

RESOLUCIÓN :

$L: x-y+2=0$

x	y
0	2
-2	0

* Ecuación de la hipérbola :

$$xy=\frac{-a^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

* Datos de L_1: $(0;0)$ $m=-1$

* Ecuación de L_1: $y-0=-(x-0)$

$\Rightarrow L_1: x+y=0$

$V: L_1 \cap L:$ $x+y=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$

$x-y+2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$

$2x+2=0 \Rightarrow x=-1$

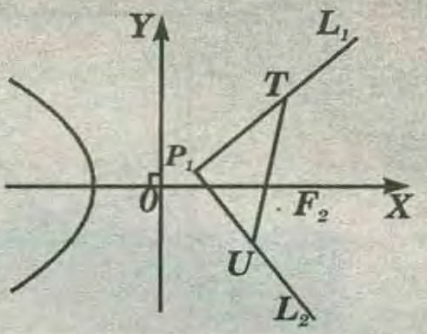
En (I): $y=1 \Rightarrow V(-1;1)$

$\Rightarrow |\overline{OV}|=a \Rightarrow \sqrt{2}=a \Rightarrow 2=a^2$

$\Rightarrow$ En (α): $xy=-1$

CUERDA DE CONTACTO

Si desde un punto exterior P_1 se trazan tangentes a una hipérbola , el segmento de recta que une los puntos de contactos se llama cuerda de contacto de P_1 para dicha hipérbola.



Así , como $P_1(x_1;y_1)$ es un punto exterior a la hipérbola : $L: b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2$

ECUACIÓN DE DIÁMETRO DE UNA HIPÉRBOLA

Se denomina ***diámetro*** de una hipérbola al lugar geométrico de los puntos medios de cualquier sistema de cuerdas paralelas . Para determinar su ecuación consideremos la hipérbola $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

$P(x;y)$ un punto del lugar geométrico $P_1(x_1;y_1)$ y $P_2(x_2;y_2)$ los extremos de una cuerda.

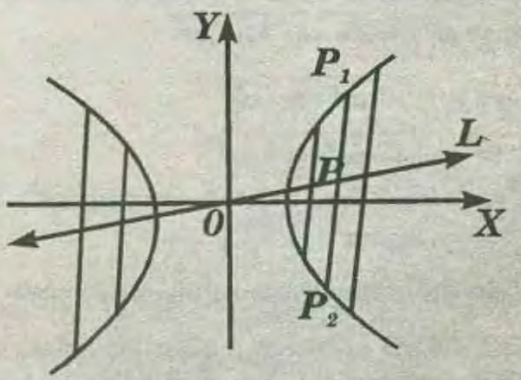
Como P biseca al $\overline{P_1P_2}$ se tiene : $x_1+x_2=2x$; $y_1+y_2=2y$.

* Además : $P_1 \in b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2$

$P_2 \in b^2x_2^2-a^2y_2^2=a^2b^2$

Al efectuar la sustracción y operación se tiene :

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{b^2x}{a^2y} \Rightarrow m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$



Donde : $m \Rightarrow$ pendiente de las cuerdas paralelas .

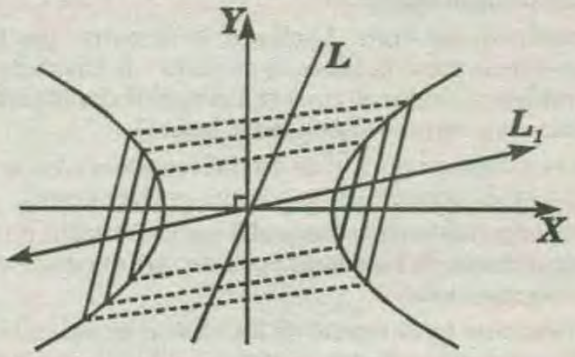
Finalmente : $L: y=\frac{b^2x}{a^2m}$

Análogamete, para la hipérbola $b^2y^2-a^2x^2=a^2b^2$

la ecuación en un diámetro es L : $L: y=\frac{a^2x}{b^2m}$

DIÁMETROS CONJUGADOS

Si dos diámetros son tales que cada uno de ellos biseca a las cuerdas paralelas del otro , se les llama ***Diámetros Conjugados.***



En la hipérbola $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ la ecuación del diámetro que biseca a las cuerdas de pendiente "m" es : $L_1: y=\frac{b^2x}{a^2m}$

Entonces la ecuación de su conjugada es : $y=mx$.

Ahora si "m_1" es la pendiente de L_1 . $m_1=\frac{b^2}{a^2m}$

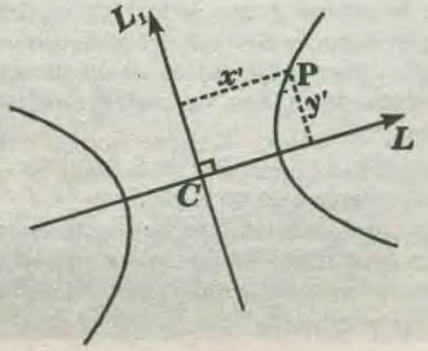
Donde : $m\times m_1=\frac{b^2}{a^2}$

Vale decir es la condición para dos diámetros sean conjugados .En la hipérbola $b^2y^2-a^2x^2=a^2b^2$

se debe cumplir : $m_1\times m=\frac{a^2}{b^2}$.

PROPIEDAD INTRÍNSECA DE LA HIPÉRBOLA

La ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; representa la propiedad intríseca : $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$



Donde x' *é* y'. son las distancias dirigidas de las prolongaciones de los ejes conjugado y transverso , a un punto P de la hipérbola respectivamente. Es decir, como la parábola y elipse la propiedad intrínseca de la hipérbola describe su forma sin referirse al sistema de ejes coordenados.

Si $L: Mx+Ny+R=0$ y $Nx-My+Q=0$

Son las ecuaciones del eje transverso y conjugado , respectivamente.

$$x'=\frac{Nx-My+Q}{\pm\sqrt{M^2+N^2}}\ ;\ y'=\frac{Mx+Ny+R}{\pm\sqrt{M^2+N^2}}$$

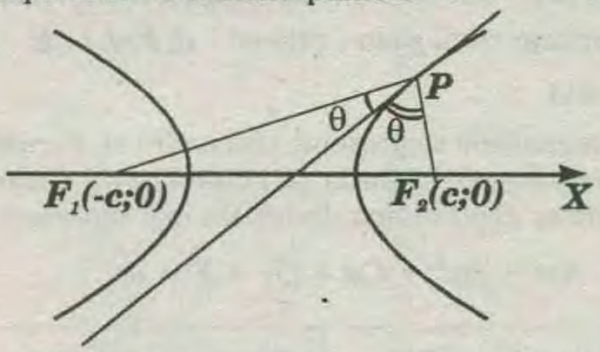
* Luego :

$$\frac{(Nx-My+Q)^2}{a^2(M^2+N^2)}-\frac{(Mx+Ny+R)}{b^2(M^2+N^2)}=1$$

TEOREMAS SOBRE LA HIPÉRBOLA

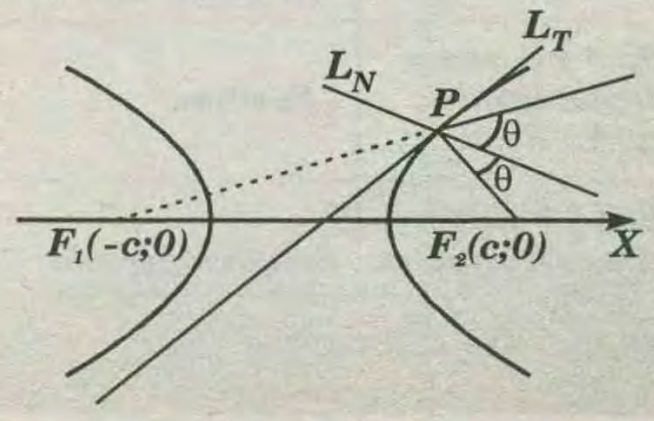
TEOREMA 1 :

La tangente a una hipérbola en cualquier punto P es bisectríz del ángulo formado por los radios focales correspondientes a dicho punto .



TEOREMA 2 :

La normal a una hipérbola es bisectríz del ángulo formado por uno de los radios focales correspondientes al punto de contacto y la prolongación del otro .

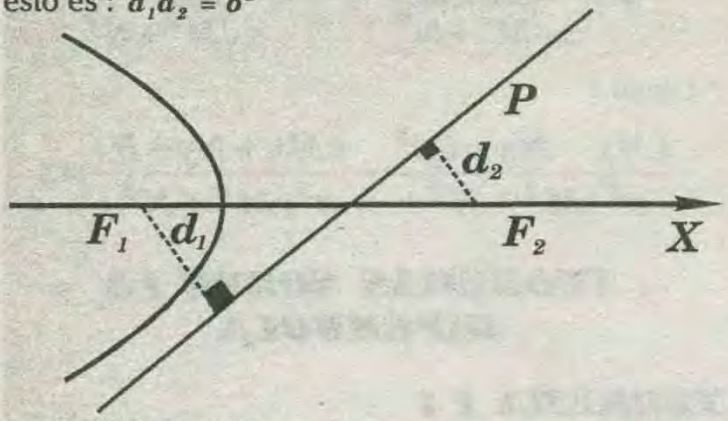


TEOREMA 3 :

En toda hipérbola de eje transverso horizontal , las tangentes en los extremos de los lados rectos tienen pendientes que son numéricamente iguales a la excentricidad , esto es : $m = \pm e$

TEOREMA 4 :

El producto de las distancias de los focos de una hipérbola a cualquier tangente es constante e igual al cuadrado de la longitud del semieje conjugado , esto es : $d_1 d_2 = b^2$



TEOREMA 5 :

La distancia de un foco de una hipérbola a cualquiera de sus asíntotas es igual a la longitud de su semieje conjugado , esto es : $d(F;L) = b$

NOTA :

A continuación se presenta un cuadro en el cual nos permite conocer dada la ecuación de variables genéricas *(x;y)* el tipo de cónica que representa:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Relación entre los coeficientes	*Tipos de cónicas*
Si: A=B ≠0	*Es una circunferencia*
Si: A=0 ó B = 0	*Es parábola*
Si: A y B tienen signos iguales, A≠0 ; B≠ 0	*Es elipse*
Si A y B tienen signos diferentes.	*Es una hipérbola*

APOLONIO DE PERGA(CÓNICAS)

Era contemporáneo de Arquímedes (286 a. de J.C. - 212 a. de J.C.), aunque algo más joven que él. Vivió la mayor parte de su vida en Alejandría y se le recuerda como «el gran geómetra».

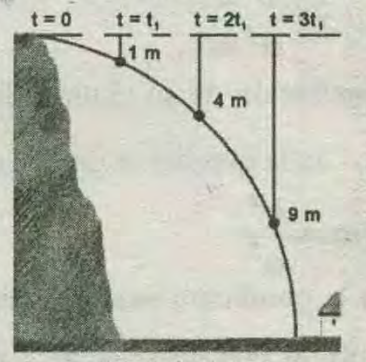
Se preocupó de llevar a una perfección definitiva las matemáticas helénicas, especialmente la **Geometría**. Su obra fundamental son ocho famosos libros sobre las secciones cónicas que elevaron el estudio de las curvas de segundo grado a una perfección no superada durante siglos.

Al comenzar su libro, Apolonio demuestra que tanto la circunferencia como la elipse, la parábola o la hipérbola pueden determinarse al cortar un cono con planos de distinta inclinación (por ello estas curvas son llamadas **Cónicas**).

¿Cuál es el motivo principal de que las secciones cónicas ocupen un lugar tan importante entre todas las posibles curvas?

Muchos años más tarde se comprobó que las órbitas de los planetas y las trayectorias de los cuerpos pesados son curvas de este tipo. Pero esto no es todo.

La importancia fundamental de las cónicas reside en el aparato sensitivo del hombre mismo. Su capacidad de percepción depende principalmente del ojo. El hombre es, ante todo, una criatura que mira, y los rayos luminosos que penetran en el ojo o que de él parten en dirección contraria para construir la visión forman un cono (según las leyes de refracción y convergencia de una lente biconvexa).



Toda imagen de la realidad óptica, toda perspectiva, toda proyección, se presenta bajo forma de una sección cónica. Por tanto, no es exagerado calificar a nuestro mundo como «mundo de las secciones cónicas».

En lo referente a la trayectoria de los cuerpos pesados, fue **Galileo Galilei** quien, en 1589, con apenas 25 años y recién nombrado profesor de matemáticas de la Universidad de Pisa, inició los experimentos.

Durante tres años, Galileo se dedicó a lanzar objetos desde lo alto de la famosa torre inclinada. Logró probar que la trayectoria de uno de esos proyectiles es una **parábola** y que su recorrido vertical es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido desde que fue lanzado.

Naturalmente, Galileo y sus contemporáneos no se contentaron con lanzar piedras desde lo alto de las torres o acantilados. Rápidamente demostraron que la trayectoria descrita por los proyectiles de los cañones también describía una parábola. Y así, Galileo, Tartaglia y otros se hicieron famosos calculando todas las posibles trayectorias de una bala, variando la cantidad de pólvora y el ángulo de tiro.

Una última propiedad importante de la parábola sembró terror entre las naves romanas que, en el año 214 a. de J.C., llevaban los 50 000 legionarios del cónsul Marco Claudio Marcelo a la conquista de Siracusa. Los aguerridos romanos, que no retrocedieron ni ante los elefantes de Aníbal, estuvieron a punto de ser derrotados por un viejo solitario de 72 años.

PROBLEMAS RESUELTOS

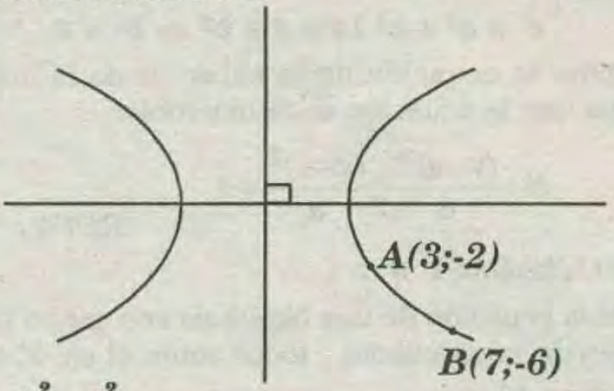
PROBLEMA 1 :

Halla la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos $A(3; -2)$ y $B(7;-6)$, tiene su centro en el origen y el eje transverso coincide con el eje X.

A) $\frac{x^2}{4}-\frac{5y^2}{16}=1$ B) $\frac{x^2}{4}-\frac{16y^2}{5}=1$

C) $\frac{x^2}{4}-\frac{3y^2}{16}=1$ D) $\frac{x^2}{25}-\frac{2y^2}{144}=1$

RESOLUCIÓN :



$H: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$A \in H \Rightarrow \frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$.....(I)

$B \in H \Rightarrow \frac{49}{a^2}-\frac{36}{b^2}=1$.....(II)

* De (I) y (II): $a^2=4$ y $b^2=\frac{16}{5}$

* Luego : $H: \frac{x^2}{4}-\frac{5y^2}{16}=1$

RPTA : "A"

PROBLEMA 2 :

Los focos de una hipérbola son $(-3;0)$ y $(3;0)$ teniendo sus vértices las coordenadas de $(-2;0)$ y $(2;0)$, halle la ecuación de su asíntota cuya pendiente es positiva.

A) $y=\frac{\sqrt{5}}{3}x$ B) $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$ C) $y=\frac{2}{\sqrt{5}}x$

RESOLUCIÓN :

$$\ell_1 : y=\frac{b}{a}x$$

* Pero : $2c = 6 \rightarrow c = 3$

$$2a = 4 \rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 9 - 4 = 5 \rightarrow b=\sqrt{5} \rightarrow \ell_1 : \ y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

Una asíntota de una hipérbola es $y=\frac{4}{3}x$, el eje focal es el eje y y un foco está en el punto $(0;-10)$. Escriba la ecuación cartesiana de esta hipérbola.

A) $9y^2 - 16x^2 = 576$ B) $16y^2 - 9x^2 = 576$

C) $8y^2 - 4x^2 = 228$ D) $9y^2 - 16x^2 = 584$

RESOLUCIÓN :

$$H: \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

* Pero : $y=\frac{b}{a}x$; dato: $y=\frac{4}{3}x$

$$\Rightarrow b = 4k \text{ y } a = 3k$$

* Pero : $c = 10$

* Ahora: $16k^2 = 102 - 9k2 \Rightarrow k = 2$

* Luego : $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{64}=1$

$$\Rightarrow H: 16y^2 - 9x^2 = 576$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

Halle la ecuación de la recta que es asíntota a :

$$9x^2 - 4y^2 = 36$$

A) $y = 3x$ B) $y = -3x$ C) $2x = -3y$ D) $y-\frac{3}{2}x$

RESOLUCIÓN :

* Las asíntotas de cualquier hipérbola horizontal o vértical pueden obtenerse igualando a cero el segundo miembro de la ecuación correspondiente , y despejando $y = F(x)$.

Así : $9x^2 - 4y^2 = 36$

$$H: \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{9}=\frac{x^2}{4} \rightarrow y=\frac{3}{2}x$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 5 :

Halle las ecuaciones de las asíntotas de la curva :

$$144x^2 - 25y^2 = 3600$$

A) $2x \pm 15y = 0$ B) $5x \pm 12y = 0$ C) $12x \pm 5y = 0$
D) $12x \pm y = 0$ E) $15x \pm 7y = 0$

RESOLUCIÓN :

* Como en el caso anterior :

$$H: 144x^2 - 25y^2 = 3600$$

$$H: \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$$

$$\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{25}=0 \Rightarrow y^2=\frac{144}{25}x^2 \Rightarrow y=\pm\frac{12}{5}x$$

$$\Rightarrow 12x \pm 5y = 0$$

RPTA : "C"

LIBRO GRATIS.com

PROBLEMA 6 :

Halle la ecuación de una hipérbola cuyas asíntotas son $y=\pm\frac{5}{3}x$ y pasa por el punto $(2;-5)$.

A) $\frac{9y^2}{125}-\frac{x^2}{5}=1$ B) $\frac{9y^2}{125}-\frac{x^2}{4}=1$ C) $\frac{5y^2}{9}-\frac{x^2}{125}=1$

RESOLUCIÓN :

$P(2;-5)\in H$

* Asíntotas : $y=\pm\frac{5}{3}x$

* Por teoría : $H=\{(x;y)/(5x-3y)(5x+3y)=k\}$

$25x^2-9y^2=k \Rightarrow (2)^2-9(-5)^2=k$

* De donde : $k=-125$

$\rightarrow H:\frac{9y^2}{125}-\frac{x^2}{5}=1$

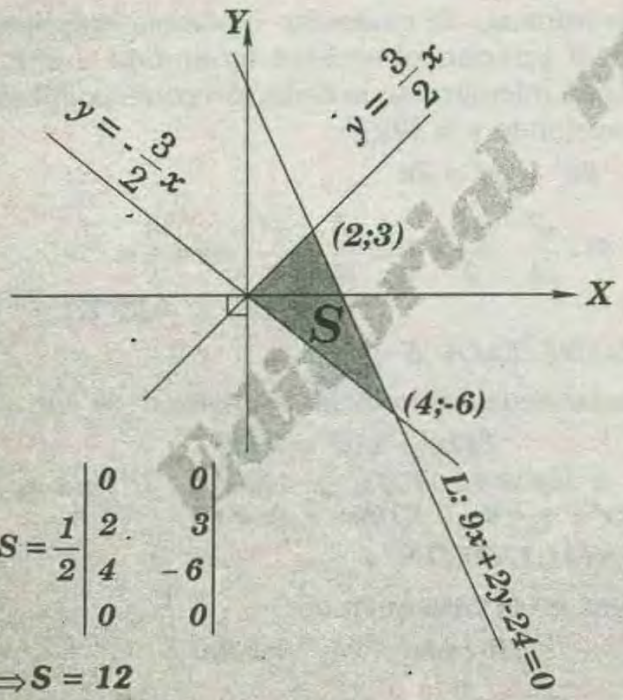
RPTA : "A"

PROBLEMA 7 :

Sea la hipérbola $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ y la recta $L: 9x+2y-24=0$. Calcule el área de la región triangular determinado por la recta L y las asíntotas de la hipérbola.

A)6 B)7 C)8 D)10 E)12

RESOLUCIÓN :



$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 3\\ 4 & -6\\ 0 & 0\end{vmatrix}$

$\Rightarrow S=12$

RPTA : "E"

PROBLEMA 8 :

Los focos de la elipse $\frac{(y-1)^2}{8}+\frac{(x-4)^2}{14}=1$, son los vértices de una hipérbola y a su vez los focos de ésta última coincide con los vértices de la elipse. Halle la ecuación de la hipérbola.

A) $\frac{(y-2)^2}{6}-\frac{(x-1)^2}{8}=1$ B) $\frac{(y-4)^2}{6}-\frac{(x-1)^2}{8}=1$

C) $\frac{(y-4)^2}{8}-\frac{(x-1)^2}{6}=1$ D) $\frac{(y-4)^2}{8}-\frac{(x+1)^2}{6}=1$

RESOLUCIÓN :

* En la elipse se tiene : $a^2=14$ y $b^2=8$

$c^2=a^2-b^2=14-8=6 \rightarrow c=\sqrt{6}$

* Para la hipérbola : $a\sqrt{6}$ y $c=\sqrt{14}$, además : $C(1;4)$

$c^2=a^2+b^2\ 14=6+b^2 \Rightarrow b^2=8$

* Como la ecuación de la elipse es de la misma forma que la ecuación de la hipérbola.

$H:\frac{(y-4)^2}{6}-\frac{(x-1)^2}{8}=1$

RPTA : "B"

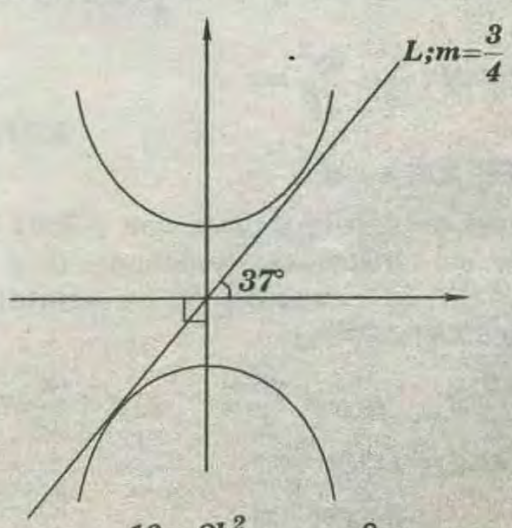
PROBLEMA 9 :

Halle la ecuación de una hipérbola con centro en el origen de coordenadas , focos sobre el eje Y, lado recto de $\frac{16}{3}$ y la pendiente de una sus asíntotas es $\frac{3}{4}$.

A) $16y^2-9x^2=36$ B) $9y^2-3x^2=36$

C) $16x^2-9y^2=36$ D) $9x^2-3y^2=36$

RESOLUCIÓN :



* Por dato : $LR=\frac{16}{3}=\frac{2b^2}{a}\rightarrow b^2=\frac{8}{3}a$.....(I)

* Por teoría : $L: y=\frac{a}{b}x$

* Por dato : $y=\frac{3}{4}x$

$\Big\}\ a=3k\wedge b=4k$

* En *(I)*: $16k^2 = \frac{8}{3}(3k) \rightarrow k = \frac{1}{2}$

* Luego la ecuación de la hipérbola es :

$$H: \frac{4y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow H: 16y^2 - 9x^2 = 36$$

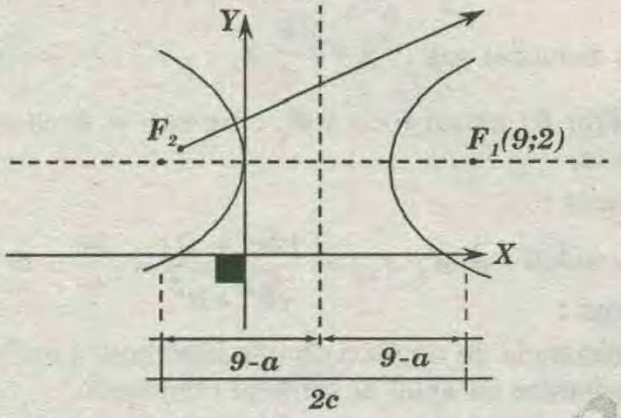
RPTA : "A"

PROBLEMA 10 :

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{9} = 1$ es una hipérbola con focos $F_1 = (9\ ;\ 2)$, F_2 en el *II* cuadrante , un vértice se encuentra en el eje " *Y* ", halle a :

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

RESOLUCIÓN :



* De la figura : $2c = 2(9-a) \rightarrow a + c = 9$ ..... *(I)*

* Pero : $b^2 = 9 = c - a^2 \rightarrow (c+a)(c-a) = 9$ ..... *(II)*

* *(I)* en *(II)*: $9(c-a) = 9 \rightarrow c = a + 1$ ..... *(III)*

* *(III)* en *(I)*: $a + a + 1 = 9 \rightarrow 2a = 8 \rightarrow a = 4$

RPTA : "D"

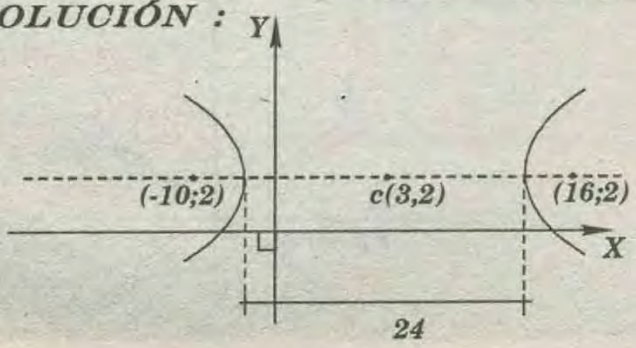
PROBLEMA 11 :

Halle la ecuación de la hipérbola que la distancia entre sus vértices es igual a *24 u* la coordenadas de los focos son *(− 10; 2); (16; 2)*

A) $\frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1$ *B)* $\frac{(x-3)^2}{169} - \frac{(y-2)^2}{144} = 1$

C) $\frac{(x+2)^2}{144} - \frac{(y+3)^2}{169} = 1$ *D)* $\frac{(x+3)^2}{144} - \frac{(y+2)^2}{25} = 1$

RESOLUCIÓN :



* Dato : $2a = 24 \rightarrow a = 12$

* De la figura: $2c = 26 \rightarrow c = 13$

* Por teoría:

$$b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow b^2 = 13^2 - 12^2 \rightarrow b^2 = 25$$

* Luego: $H: \frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1$

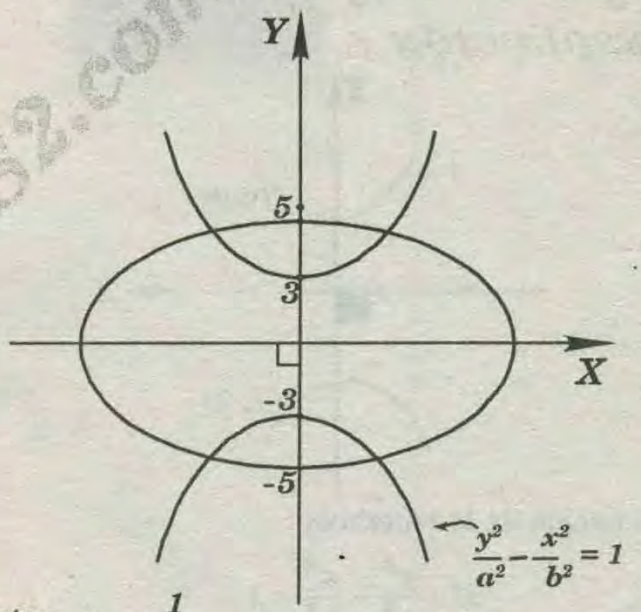
RPTA : "A"

PROBLEMA 12 :

Sea la ecuación de una elipse $16x^2 + 25y^2 = 625$, si los extremos del eje menor son los focos de la hipérbola cuya excentricidad es inversa de la excentricidad de la elipse. Calcular la ecuación de la hipérbola.

A) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ *B)* $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ *C)* $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$

RESOLUCIÓN :



* Dato : $e_H = \frac{1}{e_e}$

* Para la elipse: $\frac{x^2}{\left[\frac{15}{4}\right]^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

$$b = 5 \rightarrow b^2 = 25\ ;\ a^2 = \left[\frac{25}{4}\right]^2 \rightarrow a = \frac{25}{4}$$

* Luego :

$$c^2 = \frac{25^2}{16} - 25 \rightarrow c = \frac{15}{4}$$

* Excentricidad de la elipse :

$$e_e = \frac{c}{a} \Rightarrow e_e = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{25}{4}} \Rightarrow e_e = \frac{3}{5}$$

* Excentricidad de la hipérbola : e_H

www.CRAIS2.com

* En el dato: $e_H = \frac{1}{\frac{3}{5}} \rightarrow e_H = \frac{5}{3} = \frac{c}{a}$

* En la hipérbola : $c = 5 \rightarrow a = 3$

* Por teoría : $b^2 = 5^2 - 3^2 \rightarrow b^2 = 4$

$$H : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

* Reemplazando valores: $H : \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

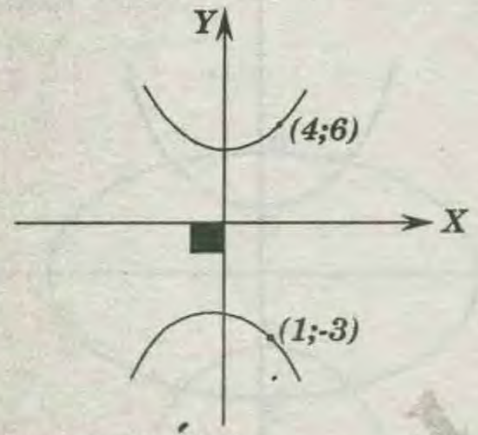
RPTA : "A"

PROBLEMA 13 :

Hallar la ecuación de la hipérbola de centro el origen, eje focal real sobre el de coordenada "y" que pase por los puntos $(4 ; 6)$ y $(1 ; -3)$.

A) $\frac{y^2}{\frac{36}{5}} - \frac{x^2}{4} = 1$ B) $\frac{y^2}{\frac{64}{5}} - \frac{x^2}{16} = 1$ C) $\frac{y^2}{\frac{36}{25}} - \frac{x^2}{9} = 1$

RESOLUCIÓN :



* Ecuación de la hipérbola :

$$H : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

* Pero : $(4; 6)$ y $(1; -3) \in H$, entonces se cumple:

$$\frac{36}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{a^2} = \frac{1}{4} + \frac{4}{b^2} \quad \text{.....(I)}$$

* También :

$$\frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{a^2} = \frac{1}{b^2} + 1 \quad \text{.....(II)}$$

* De (I) y (II):

$$1 + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4} + \frac{4}{b^2} \Rightarrow b^2 + 1 = \frac{b^2 + 16}{4}$$

$$\Rightarrow 4b^2 + 4 = b^2 + 16 \Rightarrow 3b^2 = 12 \Rightarrow b^2 = 4$$

* En (I) :

$$\frac{9}{a^2} = \frac{1}{4} + \frac{4}{4} \rightarrow a^2 = \frac{36}{5}$$

* Ahora si tenemos la ecuación de la hipérbola

$$H : \frac{y^2}{\frac{36}{5}} - \frac{x^2}{4} = 1$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 14 :

En una hipérbola con centro en el origen; "y" eje focal sobre el eje de las abscisas , la distancia de uno de los focos $F(2\sqrt{3}; 0)$ a una de sus asíntotas es $\sqrt{3}$, entonces la ecuación de la hipérbola es?.

A) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ B) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ C) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$

RESOLUCIÓN :

* Forma de la ecuación buscada

$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{..... (I)}$$

* Las asíntotas son : $y = \pm \frac{b}{a} x$

* Si $F(c; 0)$ es un foco y $R_1 : bx + ay = 0$ es una asíntota,

entonces :

* Propiedad : $d(F; \ell_1) = \frac{|bc + 0|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{bc}{c} = b$

* Luego :

" La distancia de un foco de una hipérbola a una de sus asíntotas es igual al semieje conjugado".

* Según esta propiedad :

$$b = \sqrt{3} \text{ y como } F(2\sqrt{3}; 0) \rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

* Además : $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 12 = a^2 + 3 \rightarrow a^2 = 9$

* En (I) ; se concluye:

$$H : x^2 - 3y^2 = 9 \Rightarrow H : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$$

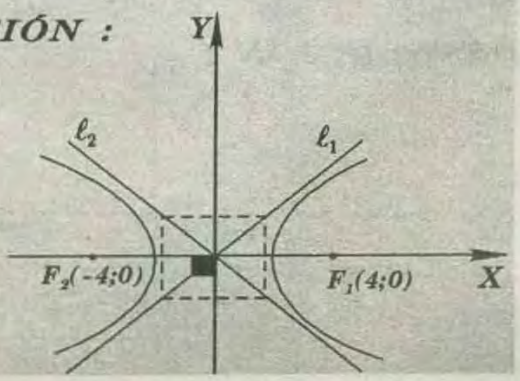
RPTA : "A"

PROBLEMA 15 :

Las asíntotas de una hipérbola son las rectas $x+y= 0$ y $x - y=0$ y sus focos los puntos $F_1(4;0)$ y $F_2(-4; 0)$, entonces la ecuación de la hipérbola es :.

A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ B) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{6} = 1$ C) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

RESOLUCIÓN :



$\ell_1 : x-y=0$ y $\ell_2 : x+y=0$

* Entonces la hipérbola es equilátera
* De la figura : $c=4$
* Pero : $c^2 = a^2 + a^2 \rightarrow 2a^2 = 4$

$a^2 = 8 \rightarrow a^2 \doteq 2\sqrt{2}$

* Ecuación ordinaria de la hipérbola equilátera es:

$$x^2 - y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 8 \Rightarrow H : \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 16 :

Halle la ecuación de la hipérbola con centro $(0;0)$ de manera que los focos estén situados sobre el eje "X", la distancias entre las directrices es $\frac{\sqrt{30}}{15}$ y que pasa por el punto $P(1; 2)$.

A) $20x^2-y^2=20$ B) $5x^2-y^2=1$ C) $20x^2-y^2=1$
D) $20x^2-y^2=18$ E) $5x^2-y^2=2$

RESOLUCIÓN :

* Dato :

$c(0;0)$ en el origen ; $F_1 \in x \wedge F_2 \in x$, también :

$$DD' = \frac{2a^2}{c} = \frac{\sqrt{30}}{15} \rightarrow c = a^2\sqrt{30} \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* La ecuación de la hipérbola es : $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
* Pero por dato : $P(1; 2) \in H$

$$\rightarrow \frac{1}{a^2} - 4 = \frac{1}{b^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* Por teoría; $c^2 = a^2 + b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (III)$
* Reemplazando *(III)* en *(I)*:

$30a^4 - a^2 = b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (IV)$

* Reemplazando *(IV)* en *(II)*:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 4 \Rightarrow b^2(1-a^2) = 4a^2$$

$$\rightarrow a^2(30a^2 - 1)(1-a^2) = 4a^2$$

* Resolviendo: $a^2 = \frac{1}{5} \wedge b^2 = 1$
* En consecuencia: $H : 5x^2 - y^2 = 1$

RPTA : "B"

PROBLEMA 17 :

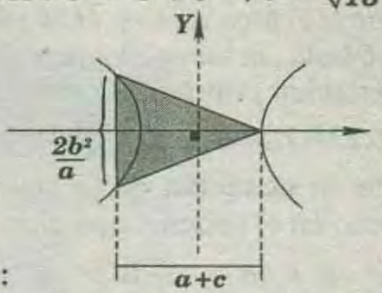
Si la hipérbola $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$, calcular el área máxima de la región triangular cuyos vértices son los extremos del lado recto y uno de los vértices de la hipérbola.

A) $4(2+\sqrt{13})$ B) $\frac{8(2+\sqrt{15})}{3}$ C) $\frac{9\sqrt{13}}{2}$ D) $\frac{9}{2}(2+\sqrt{13})$

RESOLUCIÓN :

* Dada la ecuación de la hipérbola : $H : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$
* De la ecuación :

$a^2=4 ; b^2=9$, entonces : $c^2 = 4 + 9 \rightarrow c = \sqrt{13}$



* El área pedida será :

$$S = \frac{1}{8} \times \frac{2b^2}{a} \times (a+c) \Rightarrow S = \frac{b^2}{a}(a+c)$$

* Reemplazando valores : $S = \frac{9}{2}(2+\sqrt{13})$

RPTA : "D"

PROBLEMA 18 :

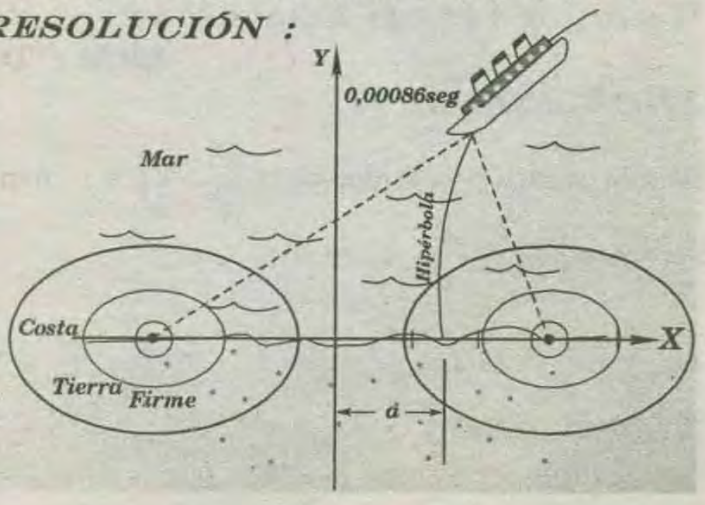
Un barco en el mar puede determinar la diferencia de sus distancias a dos transmisores fijos midiendo la diferencia en los tiempos de recepción de señales de radio sincronizadas. Esto pone su ruta sobre una de las ramas de una hipérbola , con los dos transmisores como focos. El sistema basado en este principio se llama LORAN (longrange). Aplicado al siguiente

CASO :

Dos estaciones LORAN están separados por **200** millas a lo largo de una costa recta. Un barco registra una diferencia de tiempo de **0,00086** segundos entre las señales LORAN; establezca un sistema de coordenadas apropiado para determinar dónde el barco alcanzara la costa, y si continúa sobre la trayectoria de la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.

(Velocidad de la señal = **186 000** millas/segundo)

RESOLUCIÓN :



* Como la diferencia de tiempos es **0,00086** segundos la velocidad de la señal de radio es **186 000 mlls/s**, la diferencia **2a** de distancia del barco a cada estación es: $2a = (186\,000)(0{,}00086)$

$\rightarrow 2a = 160 \Rightarrow a = 80$ millas.

El vértice de la hipérbola correspondiente es **(80; 0)** y como el foco está en **(125 ; 0)**, al seguir sobre esta hipérbola , el barco alcanzará la costa a **45** millas de la estacion principal (la más cercana al barco).

PROBLEMA 19 :

Halle la ecuación de la hipérbola equilátera con centro en el origen y que pasa por el punto **(5; – 3)**.

A) $x^2 - y^2 = 16$ B) $x^2 - y^2 = 10$ C) $x^2 - y^2 = 8$
D) $x^2 - y^2 = 1$ E)) $x^2 - y^2 = 20$

RESOLUCIÓN :

* Ecuación de una hipérbola equilátera es:

$$a^2 = 256 \Rightarrow a = 16$$

* En consecuencia: $H : x^2 - y^2 = 16$

PROBLEMA 20 :

La ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tiene excentricidad de $\frac{3}{2}$ y directriz $x = \pm\frac{4}{3}$. Halle $a^2 + b^2$.

A)4 B)5 C)7 D)9 E)11

RESOLUCIÓN :

$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

* Datos : $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2} \rightarrow a = \frac{2}{3}c$ .....(I)

* Directriz : $\frac{a^2}{c} = \frac{4}{3} \rightarrow a^2 = \frac{4}{3}c$ .....(II)

* De (I) y (II): $a = 2 \; ; \; c = 3$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5 \rightarrow b = \sqrt{5}$$

* Luego : $a^2 + b^2 = 4 + 5 \Rightarrow a^2 + b^2 = 9$

RPTA : "D"

PROBLEMA 21 :

Halle la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tiene excentricidad de $\frac{3}{2}$ y la directriz $x = \pm\frac{4}{3}$.

A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$ C) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

RESOLUCIÓN :

$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

* Datos : $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$ .....(I)

* Directriz : $\frac{a^2}{c} = \frac{4}{3}$ .....(II)

* De (I) y (II) : $a = 2$ y $c = 3$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow b^2 = 5$$

$$H : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 22 :

Dada la ecuación de la hipérbola :

$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Halle la ecuación del diámetro de la hipérbola (lugar geométrico de los puntos medios de cualquier sistema de cuerdas paralelas a los ejes).

RESOLUCIÓN :

* Para determinar su ecuación consideremos la hipérbola $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $P(x;y)$ un punto del lugar geométrico, $P(x_1;y_1)$ y $P(x_2;y_2)$ los extremos de una cuerda.

Como P biseca al segmento

$$\overline{P_1P_2} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2x, \; y_1 + y_2 = 2y$$

* Si $P_1 \in H \Rightarrow b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$

$P_2 \in H \Rightarrow b^2x_2^2 - a^2y_2^2 = a^2b^2$

* Restando ambas ecuaciones se tiene :

$$b^2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - a^2(y_1 + y_2)(y_1 - y_1) = 0$$

$$\Rightarrow b^2(2x)(x_1 - x_2) - a^2(2x)(y_1 - y_2) = 0$$

* de donde : $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{b^2x}{a^2y}$

* Pero :

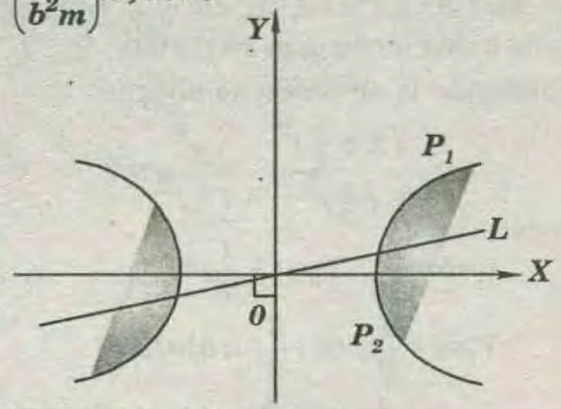
$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ *(pendiente de las cuerdas paralelas)*

$$\rightarrow L : y = \left(\frac{b^2}{a^2m}\right)x, m \neq 0$$

Nótase que el lugar geómetrico es una línea recta que pasa por el origen , osea por el centro de la hipérbola; su ecuación es ; por lo tanto , la ecuación de un diámetro de la hipérbola.

Análogamente , para la hipérbola de ecuación $H : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ la ecuación de un diámetro es :

$L: y=\left(\frac{a^2}{b^2 m}\right)x\ ;\ m\neq 0$



PROBLEMA 23 :

Sea la hipérbola cuya ecuación es : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Halle la distancia del foco de la hipérbola a una de las rectas asíntotas.

A) a B) b C) c D) $\frac{bc}{a}$ E) $\frac{ab}{c}$

RESOLUCIÓN :

* las asíntotas son de la forma : $y=\pm\frac{b}{a}x$

Si $F(c;o)$ es un foco y $R_1: bx+ay=0$ es una asíntota , entonces : $d(F;\ell_1)=\frac{|bc+0|}{\sqrt{b^2+a^2}}\Rightarrow d(F;\ell_1)=\frac{bc}{c}=b$

RPTA : "B"

PROBLEMA 24 :

En una hipérbola , con centro en el origen y el eje transversal contenido en el eje de las abscisas , la distancia del foco $F(2\sqrt{3},0)$ a una de sus asíntotas es $\sqrt{3}$. Halle ; la ecuación de dicha hipérbola.

A) $3x^2-y^2=9$ B) $2x^2-3y^2=8$ C) $x^2-y^2=8$
D) $x^2-2y^2=8$ E) $x^2-3y^2=9$

RESOLUCIÓN :

* La distancia de un foco de una hipérbola a una de sus asíntotas es igual al semieje conjugado.

$$H:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

* Según esta propiedad : $b=\sqrt{3}$, y como $F(2\sqrt{3};0)$ $\Rightarrow c=2\sqrt{3}$, además :

$$c^2=a^2+b^2\Rightarrow 12=a^2+3\Rightarrow a^2=9$$

* En (I): $H: x^2-3y^2=9$

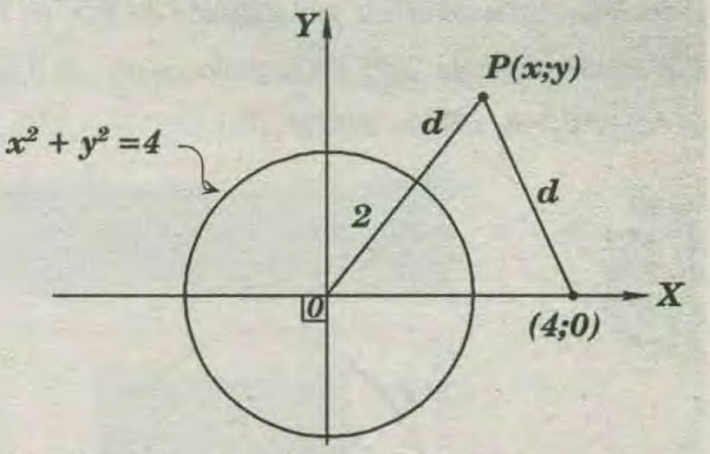
RPTA : "E"

PROBLEMA 25 :

Un punto $P(x;y)$ está a igual distancia del punto $(4;0)$ que de la circunferencia $x^2+y^2=4$, entonces P pertenece a una :

A) Recta B) Circunferencia C) Parábola
D) Elipse E) Hipérbola

RESOLUCIÓN :



* Por distancia entre dos puntos :

$$(d+2)^2=x^2+y^2\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$
$$d^2=(x-4)^2+y^2\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

* De (I): $d=\sqrt{x^2+y^2}-2$

* En (II): $(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2=(x-4)^2+y^2$

* De donde : $(x-2)^2-\frac{y^2}{3}=1$

RPTA : "E"

PROBLEMA 26 :

En una hipérbola de focos F_1 y F_2, los punlos A y B pertenecen a una de las hojas . La circunferencias $\mathscr{C}$ es tangente a $\overline{F_1B}$, $\overline{F_2B}$ y $\overline{AF_2}$, Calcule la medida del arco , determinado por $\overline{AF_1}$ en $\mathscr{C}$.

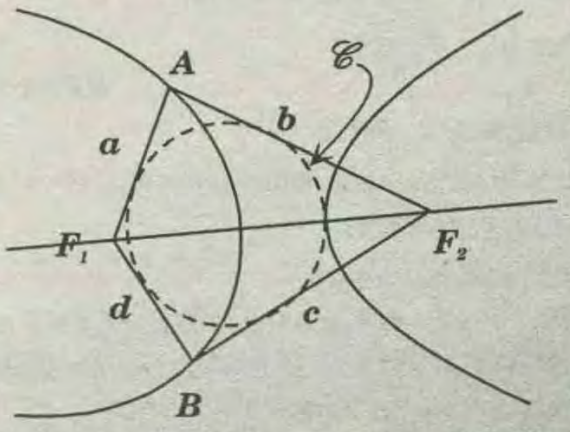
A) 0° B) 90° C) 30° D) 180° E) 37°/2

RESOLUCIÓN :

* En la hipérbola : $b-a=c-d\Rightarrow a+c=b+d$

$\Rightarrow \square F_1aF_2B$: $\square$ circunscriptible

$\rightarrow \overline{AF_1}$ es tangente a $\mathscr{C}$.



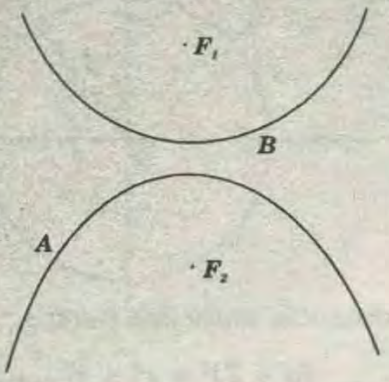
RPTA : "A"

PROBLEMA 27 :

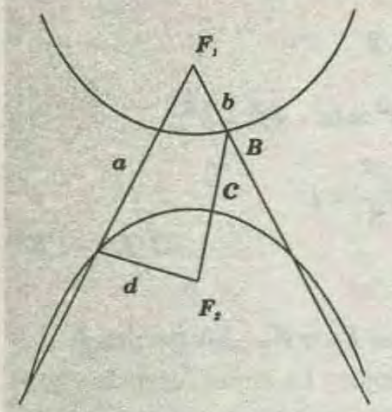
Se muestra una hipérbola de focos F_1 y F_2 sea $\mathscr{C}$ circunferencia tangente a la prolongación de $\overline{F_1A}$ en T, a la prolongación de $\overline{BF_2}$ y a la prolongación de $\overline{F_1B}$.

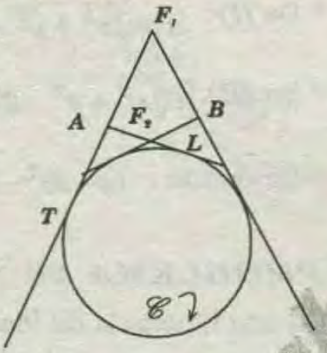
Si $AT - AF_2 = K$, calcule $POT(F_2;\mathscr{C})$.

A) K^2
C) $K^2/2$
B) $K^2/4$
D) $K^2/9$
E) $4K^2$



RESOLUCIÓN :





* En la hiperbola : $a - d = c - b \Rightarrow a - c = d - b$

$\Rightarrow \square AF_1BF_2$: $\square$ ex – inscrito.

$\rightarrow \mathscr{C}$: tangente a $\overline{AF_2}$.

* Piden Pot $(F_2;\mathscr{C})$ = ?

* Por $(F_2;\mathscr{C}) = (F_2L)^2$

$\Rightarrow F_2L = AL - AF_2$

* Pero : $AL = AT$

$\rightarrow F_2L = AT - AF_2 = k$ ..... Dato:

$\rightarrow$ Pot $(F_2;\mathscr{C}) = k^2$

RPTA : "A"

PROBLEMA 28 :

Discutir y graficar la siguiente ecuación: $y^2 = x^2 + x - 6$

RESOLUCION:

De la ecuación general :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

* Si $B=0$ y $AC > 0 \Rightarrow$ la gráfica es una elipse, un punto elipse o ningún lugar geométrico .

* Si $B=0$ y $AC < 0 \Rightarrow$ la gráfica es una hipérbola ó 2.

Se tiene la ecuación: $x^2 - y^2 + x - 6 = 0$:

donde : $A=1;B=0;C=-1;\ AC<0 \Rightarrow$ la gráfica es una hipérbola o dos rectas que se cortan.

Transformando la ecuación se obtiene :

$$\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{(\frac{5}{2})^2} - \frac{y^2}{(\frac{5}{2})^2} = 1$$

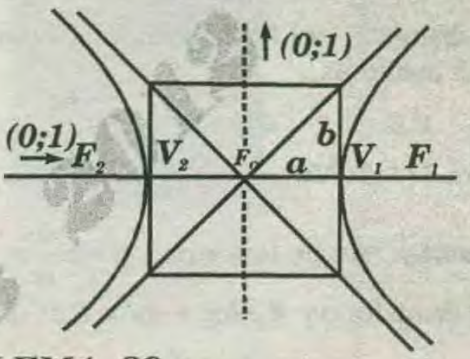
de donde:

$$a = b = \frac{5}{2} \ ; \ F_o = (-\frac{1}{2};0)$$

$$V_1 = (-\frac{1}{2};0) + \frac{5}{2}(1;0) = (2;0)$$

$$V_2 = (-\frac{1}{2};0) - \frac{5}{2}(1;0) = (-3;0)$$

GRAFICA :



PROBLEMA 29 :

Dada la hipérbola H uno de cuyos focos es $(2;0)$; si la recta : $L=\{(11;9)+t(-1;1)/t \in \mathbb{R}\}$ es la directriz de H correspondiente al otro foco . Hallar la ecuación vectorial de la hipérbola H sabiendo que la excentricidad de la hipérbola conjugada de H es $\sqrt{2}$

RESOLUCION :

"La hipérbola $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, es conjugada de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$"

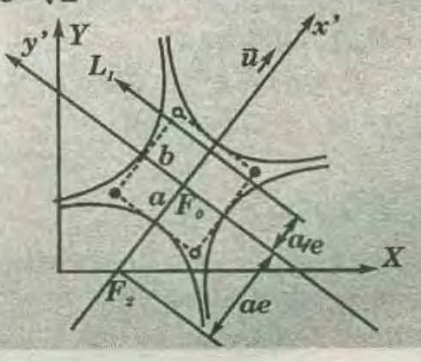
* Según esto para H : $b = a\sqrt{e^2 - 1}$.....(I)

* Para su conjugada : $a = b\sqrt{e_1^2 - 1}$.....(II)

* Por dato: $e_1 = \sqrt{2}$

* En (II): $a = b \Rightarrow e = \sqrt{2}$

* También .



$L=\{(11;9)+t(-1;1)/t\in\mathbb{R}\}$ ó $x+y-20=0$

distancia del foco $F_2(2;0)$ a L_1:

$$d(F_2;L_1)=ae+\frac{a}{e}=3a\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|2+0-20|}{\sqrt{2}}$$

* De donde : $a=b=6$

* También : $\vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\vec{u}^{\perp}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$F_o=F_2+(ae)\vec{u}=(2;0)+6\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$F_o=(8;6)$$

* Ecuación de la Elipse :

$$E=\left\{(8;6)+x'\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+y'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

PROBLEMA 30 :

I) Sea la hipérbola H: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ y un punto $P_1=(x_1;y_1)\in H$.

Demostrar que el producto de las distancias de P_1, a las asíntotas de H es una constante igual a :

$$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

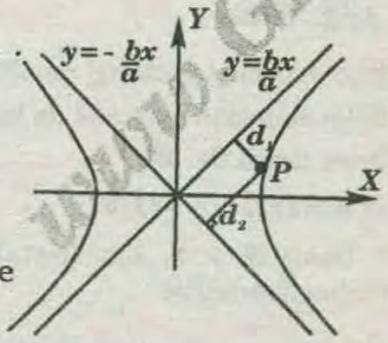
II) Deducir analíticamente la longitud del lado recto de una elipse.

RESOLUCIÓN :

I) Las asíntotas de H serán las rectas :

L_1: $bx-ay=0$

L_2: $bx-ay=0$



*Utilizando la fórmula de distancia de un punto a una recta , tendremos :

$$d_1=\frac{|bx-ay|}{\sqrt{b^2+a^2}}\ ;\ d_2=\frac{|bx+ay|}{\sqrt{b^2+a^2}}$$

* Luego :

$$d_1d_2=\frac{|bx-ay||bx+ay|}{a^2+b^2}=\frac{b^2x^2-a^2y^2}{a^2+b^2}\ldots\ldots\ldots(I)$$

* de la ecuación se obtiene : $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

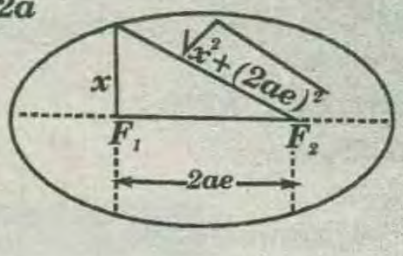
* En *(I)*: $d_1d_2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

II) Sea la mitad del lado recto de una elipse $=x$

Se sabe que :

$|\overrightarrow{PF_1}|+|\overrightarrow{PF_2}|=2a$

$x+\sqrt{x^2+4a^2e^2}=2a$



* de donde :

$x=a(1-a^2)$.....*(I)*

* además , en una elipse :

$b^2=a^2(1-a^2)$.....*(II)*

* *(II)* en *(I)*: $x=\frac{b^2}{a}$

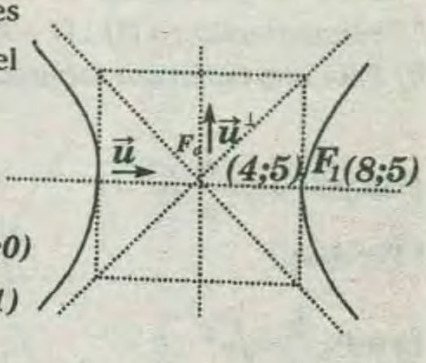
* longitud del lado recto : $2x=2\frac{b^2}{a}$

PROBLEMA 31 :

El centro de una hipérbola es el punto *(4; 5)* y uno de sus focos es *(8; 5)*, si su excentricidad es *2* . hallar su ecuación y las longitudes de sus ejes transverso y conjugado.

RESOLUCIÓN :

* Según la figura , $\vec{a}$ es el vector dirección del eje focal, entonces :



$\vec{a}=(8;5)-(4;5)=4(1;0)$

$\Rightarrow \vec{u}=(1;0)$; $\vec{u}^{\perp}=(0;1)$

* También :

$|\overrightarrow{F_0F_1}|=|(4;0)|=ae=4$

* Pero $b=2\Rightarrow a=2$

* Por otro lado $b=a\sqrt{e^2-1}\Rightarrow b=2\sqrt{3}$

$$\mathcal{H}:\{(4;5)+x'(1;0)+y'(0;1)\}$$

* Donde $\mathcal{H}$: $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{12}=1$, por lo tanto :

* Longitud del eje transverso $=2a=4$.

* Longitud del eje conjugado $=2b=4\sqrt{3}$

PROBLEMA 32:

I) Dar la definición de parábola y demostrar que una parábola con vértice $V(h;k)$ y eje x tiene por ecuación:

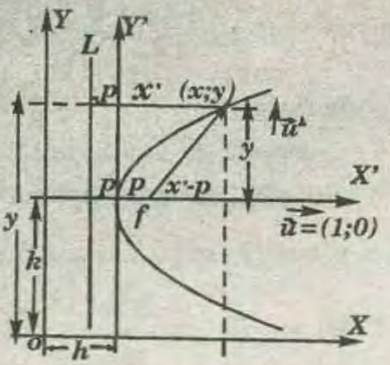
www.GRATIS.com

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

II) Las asíntotas de una hipérbola forman un ángulo de $60°$ con el eje transversal (eje focal). Hallar su excentricidad.

RESOLUCIÓN :

I) Parábola :



«Es el conjunto de todos los puntos que equidistan de una recta fija (directriz) y de un punto fijo (foco) que se encuentra sobre su eje de simetría (eje focal)».

Sea L, directriz de la parábola , entonces por definición:

$$d(P;L)=d(P;F)\Rightarrow |P+x'|=|\overrightarrow{FP}|$$

* Donde : $\overrightarrow{FP}=(x'-p)\vec{u}+y'\vec{u}^{\perp}\Rightarrow \overrightarrow{FP}=(x'-p\,;y')$

* luego : $p+x'=(x'-p\,;y')$

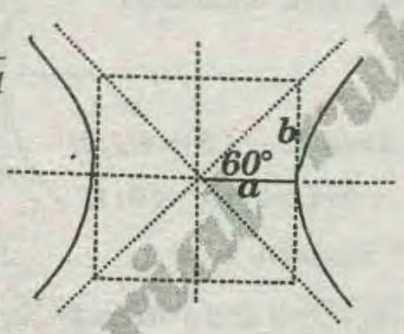
* efectuando se obtiene : $y'^2=4p\,x'$ .....*(I)*

* donde $y'=y-k\,;\ x'=x-h$

* Reemplazando en *(I)* : $(y-k)^2=4p(x-h)$

II) Para una hipérbola sabemos que :

$$b=a\sqrt{e^2-1}\Rightarrow \frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$$



* Por dato :

$$tg\,60°=\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}=\sqrt{e^2-1}\Rightarrow e=2$$

PROBLEMA 33 :

Hallar la ecuación de una hipérbola con eje paralelos a los ejes coordenados y centro en el orígen , sabiendo que la distancia entre focos es *12* unidades y el lado rectó es igual a los $\frac{2}{3}$ de dicha distancia.

Además graficarla .

NOTA: Dar todas las soluciones posibles.

RESOLUCIÓN :

Por dato :

* distancia entre focos : $2ae=12\Rightarrow ae=6$

* long. del lado recto : $\frac{2b^2}{a}=\frac{2}{3}(12)\Rightarrow \frac{b^2}{a}=4$

* Además se sabe que : $b^2=a^2(e^2-1)=(ae)^2-a^2$

donde : $b^2=4a$ y $ae=6$

reemplazando y ordenando :

$$a^2+4a-36=0\Rightarrow a=-2+2\sqrt{10}$$

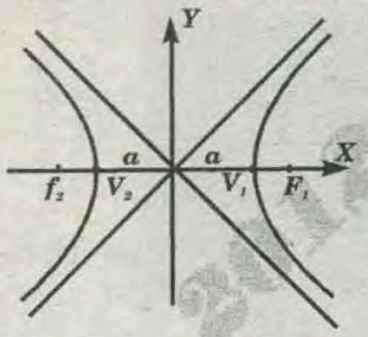
* Por lo tanto :

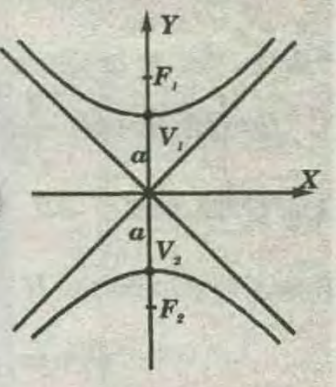
$$a^2=44-8\sqrt{10}$$

$$b^2=8\sqrt{10}-8$$

* Las ecuaciones serán :

$$\frac{x^2}{44-8\sqrt{10}}-\frac{y^2}{8\sqrt{10}-8}=1\ ;\ \frac{y^2}{44-8\sqrt{10}}-\frac{x^2}{8\sqrt{10}-8}=1$$





PROBLEMA 34 :

Dada la elipse $\mathscr{E}=4x^2+9y^2=72$, Sea $\mathscr{H}$ una hipérbola cuyas asíntotas son las rectas normal y la recta tangente a la elipse en el punto $(3;2)$.

Si el eje transversal de la hipérbola no corta el cuarto cuadrante y la distancia entre las directrices de $\mathscr{H}$ es $4\sqrt{2}$. Hallar :

I) La ecuación vectorial de $\mathscr{H}$.

II) La ecuación vectorial de las rectas que contienen los lados rectos de $\mathscr{H}$.

RESOLUCIÓN :

* Sean N y T, las rectas normal y tangente, respectivamente

$N\perp T\Rightarrow$ la hipérbola es equilátera

* Luego : $a=b$; pero : $b=a\sqrt{e^2-1}$

* efectuando : $e=\sqrt{2}$

* Por dato : distancia entre directrices $=2\frac{a}{e}=4\sqrt{2}$

* Resolviendo : $a=b=4$

* Ecuación de la recta tangente a la elipse

$$\mathscr{E}:4x^2+9y^2=72$$

* Si $(x_o;y_o)=(3;2)$, es punto de tangencia , entonces; la ecuación de la tangente estará dada por :

$$4xx_o+9yy_o=72\Rightarrow 12x+18y=72,\ \text{luego :}$$

$$T: 2x+3y-12=0 \Rightarrow m_T=-\frac{2}{3} \Rightarrow m_N=\frac{3}{2}$$

* Vector dirección de la tangente =

$$(1;m_T)=(1;-\frac{2}{3}) \Rightarrow \vec{u}_T=(\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{-2}{\sqrt{13}})$$

* Vector dirección de la normal =

$$(1;m_N)=(1;\frac{3}{2}) \Rightarrow \vec{u}_N=(\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}})$$

* Sea $\vec{a}$, el vector dirección del eje focal :

$$\vec{a}=\vec{u}_T+\vec{u}_N=\frac{1}{\sqrt{13}}(5;1)$$

$\Rightarrow$ Vector unitario del eje focal :

$$\vec{u}=(\frac{5}{\sqrt{26}};\frac{1}{\sqrt{26}});\ \vec{u}^{\perp}=(-\frac{5}{\sqrt{26}};\frac{5}{\sqrt{56}})$$

* Ecuación de la hipérbola :

$$\mathcal{H}:\left\{(3;2)+x'(\frac{5}{\sqrt{26}};\frac{1}{\sqrt{26}})+y'(-\frac{1}{\sqrt{26}};\frac{5}{\sqrt{26}})\right\}$$

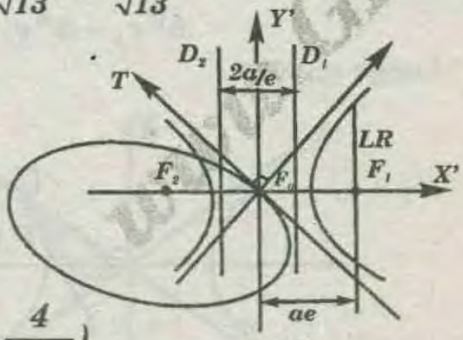
* Donde : $\frac{x'^2}{16}-\frac{y'^2}{16}=1$

II) Ecuaciones de las rectas que contienen a los lados rectos.

Sea LR , la recta que contiene al lado recto :

$$F_1=F_o+(ae)\vec{u}=(3;2)+4\sqrt{2}(\frac{5}{\sqrt{26}};\frac{1}{\sqrt{26}})$$

$$F_1=(3+\frac{20}{\sqrt{13}};2+\frac{4}{\sqrt{13}})$$



$$F_1=(3+\frac{20}{\sqrt{13}};2+\frac{4}{\sqrt{13}})$$

* Por lo tanto :

$$LR_1=\left\{(3+\frac{20}{\sqrt{13}};2+\frac{4}{\sqrt{13}})+t(-1;5)/t\in\mathbb{R}\right\}$$

* También : $F_2=F_o-(ae)\vec{u}=(3-\frac{20}{\sqrt{13}};2-\frac{4}{\sqrt{13}})$

$$LR_2=\left\{(3-\frac{20}{\sqrt{13}};2-\frac{4}{\sqrt{13}})+r(-1;5)/r\in\mathbb{R}\right\}$$

PROBLEMA 35 :

Sea $\mathscr{C}$ una circunferencia con centro F_o , el cual a su vez es centro de la hipérbola $\mathcal{H}$. Se sabe que $\mathscr{C}$ corta a la asíntotas de $\mathcal{H}$ en $(5;\ 45)$ y $(101;-27)$, además $(65;25)\in\mathscr{C}$, el vector dirección del eje transverso tiene sus componentes ambas con el mismo signo y el lado recto mide $90\ u$. Hallar la ecuación vectorial de $\mathcal{H}$.

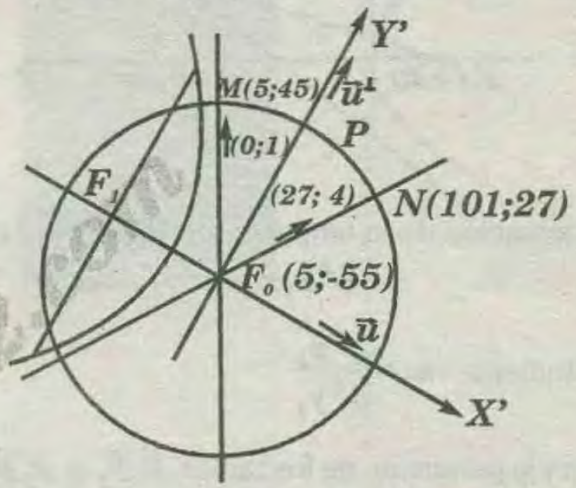
RESOLUCIÓN :

* Sean: $M(5;\ 45)$, $N(101;-27)$ y $P(65;\ 25)$, puntos de la circunferencia . Hallaremos las mediatrices M_1 y M_2 de MP y NN respectivamente ; intersectamos y encontramos F_o procediendo se logra .

$$M_1=((35;35)+t(1;3)/t\in\mathbb{R}\}$$

$$M_2=\{(53;9)+r(3;4)/r\in\mathbb{R}\}$$

* Intersectando M_1 y M_2: $F_o=(5;-55)$



* Sean L_1 y L_2 asíntotas de $\mathcal{H}$. $(M;F_o)\in L_1$ y $(N;F_o)\in L_2$

* Por lo tanto : vector unitario de L_1: $\vec{u}_1=(0;1)$

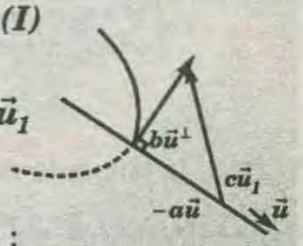
vector unitario de L_2: $\vec{u}_2=(\frac{24}{25};\frac{7}{25})$

* Por dato, las componentes del eje transverso tienen el mismo signo; esto lo logramos cuando el eje focal tenga pendiente negativa , por lo tanto :

$$r\vec{u}=\vec{u}_1-\vec{u}_2=(-\frac{24}{25};\frac{18}{25}) \Rightarrow \vec{u}=(\frac{4}{5};-\frac{3}{5});\ \vec{u}^{\perp}=(\frac{3}{5};\frac{4}{5})$$

* Por dato : $\frac{2b^2}{a}=90$ .....(I)

* De la figura : $-a\vec{u}+b\vec{u}^{\perp}=c\vec{u}_1$



* Reemplazando y efectuando :

$$(\frac{3b-4a}{5};\frac{3a-4b}{5})=(0;C) \Rightarrow 4a=3b.....(II)$$

* De (I) y (II): $a=\frac{405}{16}$; $b=\frac{135}{4}$

* Ecuación vectorial de $\mathcal{H}$:

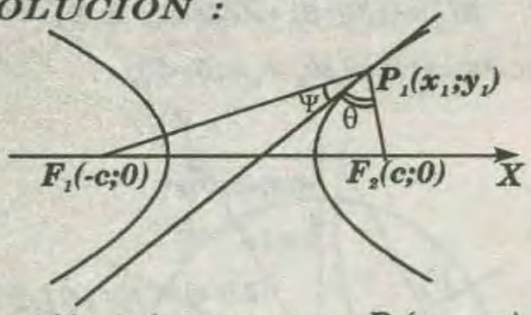
$$\mathcal{H}=\left\{(5;-55)+x'\left(\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)+y'\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)\right\}$$

* Donde : $\dfrac{x'^2}{\left(\frac{405}{16}\right)^2}-\dfrac{y'^2}{\left(\frac{135}{4}\right)^2}=1$

PROBLEMA 36 :

Demostrar que la tangente a una hipérbola en cualquier punto es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores.

RESOLUCIÓN :



* La ecuación de la tangente en $P_1(x_1;y_1)$ es :

$$b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2$$

su pendiente : $m=\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$

*Ahora la pendiente de los radios $\overline{F_1P_1}$ y $\overline{F_2P_1}$ son:

$$m_1=\frac{y_1}{x_1-c}\ \wedge\ m_2=\frac{y_1}{x_1+c}$$

$$*\ Tan\theta=\frac{\frac{y_1}{x_1-c}-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}}{1+\left(\frac{y_B}{x_1-c}\right)\left(\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)}=\frac{a^2y_1^2-b^2x_1+b^2cx_1}{x_1y_1(a^2+b^2)-a^2y_1c}$$

$$\Rightarrow\quad Tan\theta=\frac{b^2}{cy_1}$$

$$*\ Tan\psi=\frac{\frac{b^2x_1}{a^2y_1}-\frac{y_1}{x_1+c}}{1+\left(\frac{b^2+x_1}{a^2+y_1}\right)\left(\frac{y_1}{x_1+c}\right)}=\frac{b^2x_1^2-a^2y_1+b^2cx_1}{c^2x_1y_1+a^2cy_1}$$

$$\Rightarrow\quad Tan\psi=\frac{b^2}{cy_1}$$

$$\theta=\psi$$

* Luego la tangente es la bisectriz del $\sphericalangle F_1P_1F_2$

PROBLEMA 37 :

Demostrar que el punto de contácto de cualquier tangente a una hipérbola es el punto medio del segmento de tangente comprendido entre las asíntotas .

RESOLUCIÓN :

* Sea la hipérbola : $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

* Sus asíntotas serán : $x=\dfrac{a}{b}y\ \wedge\ x=-\dfrac{a}{b}y$

* La tangente en $P_1(x_1;y_1)$ a la hipérbola es : $b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2$.

* Luego interceptando se obtiene :

$$A=\left(\frac{a^2b}{bx_1-ay_1};\frac{ab^2}{bx_1-ay_1}\right)\ \wedge\ B=\left(\frac{a^2b}{bx_1+ay_1};\frac{-ab^2}{bx_1+ay_1}\right)$$

* Ahora las coordenadas del punto medio del $\overline{AB}$ son :

$$\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{a^2b(bx_1)}{b^2x_1^2-a^2y_1^2}=\frac{a^2b(bx_1)}{a^2b^2}=x_1$$

$$\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{ab^2(ay_1)}{b^2x_1^2-a^2y_1^2}=\frac{ab^2(ay_1)}{a^2b^2}=y_1$$

* El punto $P_1(x_1;y_1)$ es el punto medio del $\overline{AB}$.

PROBLEMA 38 :

Demostrar que el triángulo formado en una tangente cualquiera a una hipérbola y sus asíntotas tiene un área constante.

RESOLUCIÓN :

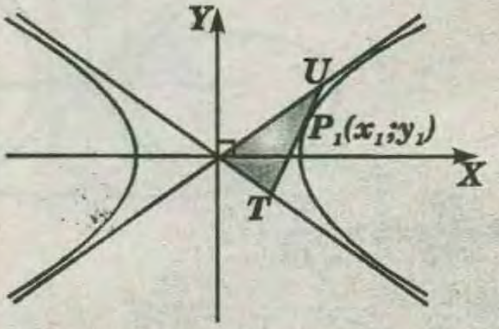
* Sea la hipérbola : $b^2x^2-a^2y^2=a^2\times b^2$

y sus asíntotas : $bx-ay=0\ \wedge\ bx+ay=0$

* La tangente en $p_1(x_1;y_1)$ será :

$$b^2x_1-a^2y_1y=a^2b^2$$

* Luego se tiene :



$$T=\left(\frac{a^2b}{ay_1+bx_1};\frac{ab^2}{ay_1+bx_1}\right)$$

$$U=\left(\frac{a^2b}{bx_1-ay_1};\frac{ab^2}{bx_1-ay_1}\right)$$

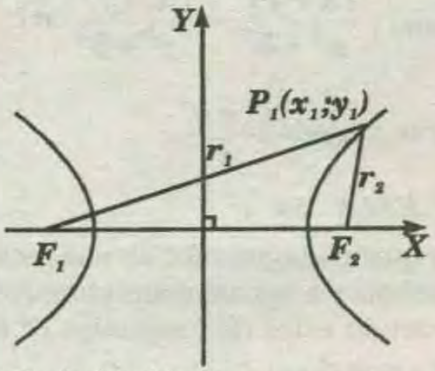
* Sea S el área de la región triangular sombreada

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ \frac{a^2b}{ay_1+bx_1} & \frac{ab^2}{ay_1-bx_1} & 1\\ \frac{a^2b}{bx_1-ay_1} & \frac{ab^2}{bx_1-ay_1} & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left[\frac{a^3b^3}{b^2x_1^2-a^2y_1^2}+\frac{a^3+b^3}{b^2x_1^2-a^2y_1^2}\right]\Rightarrow S=ab$$

PROBLEMA 39 :

Si $P_1(x_1;y_1)$ es un punto cualquiera de la hipérbola $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$. Demostrar que las longitudes de sus radios vectores son $|ex_1+a| \wedge |ex_1-a|$.

RESOLUCIÓN :



* Ecuación de la hipérbola :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$r_2=d(P_1;F_2)=\sqrt{(x_1-c)^2+y_1^2} \quad .....(I)$$

* Ahora como $P_1(x_1;y_1) \in$ a la hipérbola :

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad y_1^2=\frac{b^2}{a^2}(x_1^2-a^2)$$

* En (I):

$$r_2=\sqrt{(x_1-c)^2+\frac{b^2}{a^2}(x_1^2-a^2)} \Rightarrow r_2=|ex_1-a|$$

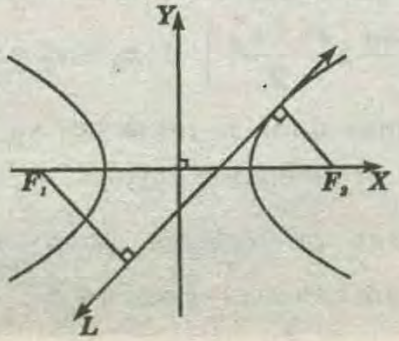
* Análogamente , para el foco izquierdo se deduce que $r_1=|ex_1+a|$.

PROBLEMA 40 :

Demostrar que el producto de multiplicar las distancias de los focos de cualquier tangente a la hipérbola $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ es una constante e igual a b^2.

RESOLUCIÓN :

* Como los focos están sobre el eje X :



* Entonces : $F_1=(-c;0) \wedge F_2=(c;0)$

* se sabe que la ecuación de la tangente es :

$$y=mx \pm \sqrt{a^2m^2-b^2}$$

$$\Rightarrow L: mx-y \pm \sqrt{a^2m^2-b^2}=0$$

$$d(F_1;L)=\frac{-mc+\sqrt{a^2m^2-b^2}}{\sqrt{m^2+1}}$$

* Ahora : $d(F_2;L)=-\dfrac{mc+\sqrt{a^2m^2-b^2}}{\sqrt{m^2+1}}$

* Luego: :

$$d(F_1;L)\times d(F_2;L)=\frac{(mc)^2-(\sqrt{a^2m^2-b^2})^2}{\sqrt{m^2+1^2}}$$

$$\Rightarrow d(F_1;L)\times d(F_2;L)=\frac{m^2\overbrace{(c^2-a^2)}^{b^2}+b^2}{m^2+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{d(F_1;L)\times d(F_2;L)=b^2}$$

PROBLEMA 41 :

Demostrar que la pendiente de una hipérbola en cualquier extremo de cualquiera de sus lados rectos es numéricamente igual a su excentricidad.

RESOLUCIÓN :

* Sea la hipérbola : $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

* la ecuación de uno de sus lados rectos es : $y=c$

* Luego interceptando se obtiene:

$$A=\left(c;\frac{b^2}{a}\right) \wedge B=\left(c;\frac{-b^2}{a}\right)$$

* La pendiente de la tangente a la hipérbola en cualquier punto $P_1(x_1;y_1)$ es $m=\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$ Ahora sustituyendo los puntos A y B se tiene :

$$* \ m_1=\frac{b^2c}{a^2\times\frac{b^2}{a}} \quad \Rightarrow m_1=\frac{c}{a} \Rightarrow m_1=e$$

$$* \ m_2=\frac{b^2\times c}{a^2\times\left(\frac{-b^2}{a}\right)} \Rightarrow m_2=\frac{-c}{a} \Rightarrow m_2=-e$$

Por lo tanto la pendiente en A ó B es numéricamente igual a la excentricidad.

PROBLEMA 42 :

Demostrar que en una hipérbola la tangente trazada por el extremo de un diámetro es paralela al conjugado de éste.

RESOLUCIÓN :

* Sea la ecuación de la hipérbola : $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ y $T(x_1\,;\,y_1)$ el punto de tangencia , extremo de un diámetro.

* La ecuación de la tangente en $T(x_1\,;\,y_1)$ es :

$$L: b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2 \Rightarrow m=\frac{b^2x_1}{a^2y_1} \quad .....(I)$$

* La ecuación de un diámetro de la hipérbola es :

$L_1: y=\dfrac{b^2x}{a^2m}$ Ahora , como : $T(x_1;y_1)\in L_1$

$$\Rightarrow y_1=\frac{b^2}{a^2m}x_1 \Rightarrow m=\frac{b^2x_1}{a^2y_1} \quad .....(II)$$

*Siendo *"m"* la pendiente del diámetro conjugado L

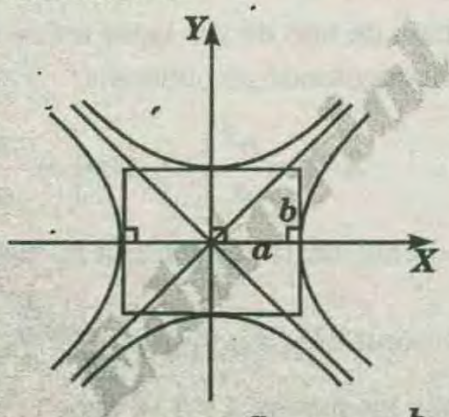
* Por lo tanto de *(I)* y *(II)* se deduce que : $L \,//\, L_1$

PROBLEMA 43 :

Demostrar que la ecuación de una hipérbola referida a sus asíntotas como ejes coordenados es :

$$xy=\frac{a^2+b^2}{4}$$

RESOLUCIÓN :



* Si las asíntotas son : $m=\dfrac{a}{b} \wedge m_1=\dfrac{-b}{a}$

$$sen\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \wedge cos\,\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

* Ahora :

$$sen\theta_1=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \wedge cos\,\theta_1=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$y=\frac{bx_1}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{by_1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b(x_1-y_1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

* Luego :

$$x=\frac{ax_1}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{ay_1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a(x_1+y_1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

* Sustituyendo en la ecuación : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

* Por lo tanto : $\dfrac{(x+y)^2}{a^2+b^2}-\dfrac{(x-y)^2}{a^2+b^2}=1$

* Finalmente : $xy=\dfrac{a^2+b^2}{4}$

PROBLEMA 44 :

Demostrar que los segmentos de una recta que corta a una hipérbola y a sus asíntotas compredidas entre aquellas ,siendo estas de longitudes $(P_1P'_1=P_2P'_2)$

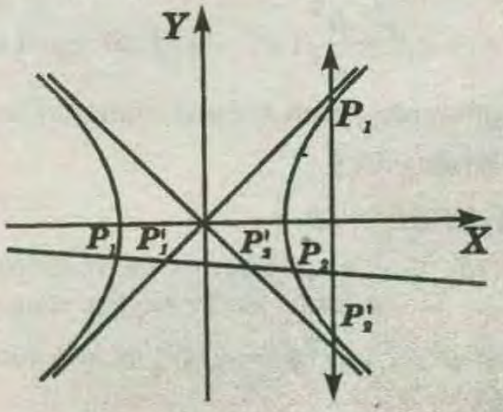
RESOLUCIÓN :

* Sabemos que cuando la recta es perpendicular a un eje coordenado , la simetría respecto a éste hace que la propiedad que acabamos de enunciar sea evidente.

* Para otra recta cualquiera la relación quedaría demostrada si logramos probar que el punto :

$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ medio del $\overline{P_1P_2}$ coicide con el

$\left(\dfrac{x'_1+x'_2}{2};\dfrac{y'_1+y'_2}{2}\right)$ medio del $\overline{P'_1P'_2}$.



Como ambos puntos medios están en línea recta no paralela al eje *Y*, para que coincidan es suficiente la igualdad de las abscisas.

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{x'_1+x'_2}{2}\right) \text{ ó } x_1+x_2=x'_1+x'_2$$

Si suponemos dada la recta por su ecuación : $y=mx+k$ el coeficiente angular *"m"* será finito.

* Los pares de valores $x_1,y_2 \wedge x_2,y_2$ son soluciones del sistema : $y=mx+k$.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

* Analogamente , los pares de valores $x'_1;x'_1$ e $x'_2;x'_2$ son soluciones del sistema : $y=mx+h$

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$ (par de asíntotas)

* Eliminando y : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+k)}{b^2}=1$

$$\frac{1}{a^2b^2}(b^2-a^2k^2)x^2-2akmx-a^2(k^2-b^2)=0$$

* Que da los valores de $x_1 \wedge x_2$ del mismo modo , $x'_1 \wedge x'_2$ son las soluciones de la ecuación :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+k)^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2b^2}[(b^2-a^2k^2)x^2-2a^2kmx-a^2k^2]=0$$

$$\Rightarrow x^2-\frac{2amkx}{b^2-a^2m^2}-\frac{a^2(k^2+b^2)}{b^2-a^2m^2}=0$$

* Luego por igualdad de coeficientes de los términos de *1er* grado , se deduce inmediatamente la igualdad de la suma de las raíces respectivas :

$$x_1+x_2=x'_1+x'_2$$

PROBLEMA 45 :

Si las excentricidades de dos hipérbolas conjugadas con e_1 y e_2 . Demostrar que : $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=1$

RESOLUCIÓN :

* Por definición : $e_1=\frac{c}{a}$, $e_2=\frac{c}{b}$ Elevando al cuadrado miembro a miembro :

$$\left.\begin{array}{l} *\ e_1^2=\frac{c^2}{a^2} \\ *\ e_2^2=\frac{c^2}{b^2} \end{array}\right\} e_1^2+e_2^2=c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \Rightarrow e_1^2+e_2^2=c^2\frac{(a^2+b^2)}{a^2\times b^2}$$

* Luego : $e_1^2+e_2^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2\times\left(\frac{c}{b}\right)^2 \Rightarrow e_1^2+e_2^2=e_1^2\times e_2^2$

* Finalmente : $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=1$

PROBLEMA 46 :

Dada la hipérbola $x^2-y^2=5$ y la elipse $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ Demostrar que se cortan en un ángulo recto.

RESOLUCIÓN :

* Bastará demostrar que las tangentes en los puntos de intersección de la elipse e hipérbola son perpendiculares entre sí. Resolviendo ambas ecuaciones , tenemos los puntos de contacto :

$$(\pm 3;\pm 2)\ .$$

* Tangente a la elipse en el punto $(3;2)$: $2x+3y=12$
* Tangente a la hipérbola en el punto $(3;2)$: $3x-2y=5$

Luego la pendiente de la *1ra* recta es $m=-\frac{2}{3}$ y la pendiente de la 2da recta es $m_1=-\frac{3}{2}$.

* Luego : $m\times m_1=-1$

PROBLEMA 47 :

Si un punto se aleja al infinito sobre la hipérbola $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, demostrar que la tangente en ese punto tiende a coincidir con una asíntota .

RESOLUCIÓN :

* La ecuación de la tangente a una hipérbola desde un punto $P_1(x_1;y_1)$ es : $b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2$ y la pendiente será : $m=\frac{b^2x_1}{a^2y^2}$.

* Cuando P_1 se aleja al infinito x_1 e y_1 tenderan al infinito y "m" tomará la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, pero como P_1 se encuentra sobre la hipérbola :

$$b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2$$

* Luego : $\frac{bx_1}{ay_1}=\pm\sqrt{\frac{b^2}{y_1^2}=1}$

* Se ve que es la forma de "m" , y si y_1m tiende al infinito , "m" tenderá a $\pm\frac{b}{a}$ que son las pendientes de las asíntotas .

PROBLEMA 48 :

Sea la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y sean $L_1;L_2$ sus asíntotas , demostrar que $\forall P(x;y)\in$ a dicha hipérbola . Entonces el producto de multiplicar $d(P;L_1)$ y $d(P;L_2)$ es constante .

RESOLUCIÓN :

* Ecuación de la hipérbola : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\Rightarrow (bx+ay)(bx-ay)=a^2b^2$$

* Luego se tiene : $L_1 : bx+ay=0$

$L_2 : bx-ay=0$

* Ahora :

$$d(P;L_1)=\frac{|bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad d(P;L_2)=\frac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow d(P;L_1)\times(P;L_2)=\frac{a^2b^2}{c^2}=k$$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 La longitud del lado recto de una hipérbola es "m" y la de su eje transverso en n, determine la longitud de su eje conjugado.

A) $\sqrt{m^2-n^2}$ B) $\sqrt{mn}$ C) $\sqrt{\frac{m}{n}}$

D) $\sqrt{\frac{n}{m}}$ E) $\sqrt{m^2+n^2}$

02 Determine la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son: $(0; 24)$ y $(0;-24)$; además sus asíntotas tienen por ecuaciones $y=\pm\frac{12}{5}x$.

A) $\frac{y^2}{576}-\frac{x^2}{100}=1$ B) $\frac{y^2}{576}-\frac{x^2}{169}=1$ C) $\frac{x^2}{576}-\frac{y^2}{100}=1$

D) $\frac{x^2}{576}-\frac{y^2}{169}=1$ E) $\frac{y^2}{576}-\frac{x^2}{144}=1$

03 Calcule la pendiente de la recta tangente a la hipérbola: $9x^2-4y^2=36$ en el punto $(2\sqrt{2}; 3)$

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $\frac{1}{3}\sqrt{2}$ E) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

04 Calcule el área de la región triangular determinada por la intersección de la recta: $9x+2y=24$ y las asíntotas de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$$

A) $6\,u^2$ B) $8\,u^2$ C) $10u^2$ D) $12\,u^2$ E) $24\,u^2$

05 Las ecuaciones de las directrices de una hipérbola son: $5x+1=0 \wedge 5x+19=0$; si la excentricidad es $\frac{16}{9}$; determine la longitud de sus lados rectos.

A) 32/3 B) 16/3 C) 8/3 D) 16/5 E) 32/5

06 Dada la hipérbola: $9x^2-16y^2=144$, su distancia focal mide:

A) 5 B) 16 C) 8 D) 10 E) 6

07 Dada la hipérbola: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$, uno de sus focos es:

A) $(0; 5)$ B) $(0;\sqrt{5})$ C) $(2; 0)$ D) $(\sqrt{5}; 0)$ E) $(3; 0)$

08 Dada la hipérbola: $2x^2-y^2=3$, ¿cuánto mide su eje transverso?

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$ D) $2\sqrt{6}$ E) $\sqrt{6}/2$

09 Hallar la ecuación de una hipérbola de centro $(-1; 3)$, distancia focal igual a $18u$ y una de sus directrices: $y=7$.

A) $\frac{(y-3)^2}{45}-\frac{(x+1)^2}{36}=1$ B) $\frac{(y+3)^2}{45}-\frac{(x-1)^2}{36}=1$

C) $\frac{(y-3)^2}{36}-\frac{(x+1)^2}{45}=1$ D) $\frac{(y+3)^2}{36}-\frac{(x-1)^2}{45}=1$

E) $\frac{(y+1)^2}{36}-\frac{(x-3)^2}{45}=1$

10 Calcular la longitud del lado recto de la hipérbola: $\frac{(x-5)^2}{36}-\frac{(y+2)^2}{12}=1$

A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

11 Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(-5; 8)$, si sus vértices son los puntos $(-3; 0)$ y $(3; 0)$.

A) $3x^2-y^2=11$ B) $4x^2-y^2=36$ C) $6x^2-3y^2=16$

D) $y^2-2x^2=14$ E) $2y^2-3x^2=53$

12 Determine las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola: $x^2-y^2=36$

A) $y=\pm x$ B) $y=\pm 2x$ C) $y=\pm(1/2)x$

D) $y\pm x=1$ E) $y\pm x=9$

13 Determine la ecuación de la hipérbola de centro $(2; 1)$ cuyo eje transverso es paralelo al eje X, mide 10 y su excentricidad es $7/5$.

A) $\frac{(x-2)^2}{25}-\frac{(y+1)^2}{12}=1$ B) $\frac{(x+2)^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{24}=1$

C) $\frac{(x-2)^2}{24}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$ D) $\frac{(x-2)^2}{25}-\frac{(y+1)^2}{24}=1$

E) $\frac{(x-2)^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{24}=1$

14 Calcular el valor de *"a"* para que la hipérbola:

$$4x^2 - a^2y^2 = 4a^2$$

sea tangente a la recta $2x - y - 4 = 0$.

A) $\sqrt{11}$ B) $\sqrt{10}$ C) $\sqrt{8}$ D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{5}$

15 Hallar la ecuación de la hipérbola conjugada a la hipérbola que pasa por el punto $(3; -1)$, centro en el origen, eje transverso sobre el eje X y una de sus asíntotas es $2x+3\sqrt{2}y = 0$.

A) $9y^2 - x^2 = 9$ B) $2x^2 - 9y^2 = 9$ C) $9y^2 - 2x^2 = 9$
D) $9x^2 - 2y^2 = 9$ E) $9y^2 - 2x^2 = 1$

16 Una hipérbola equilátera centrada en el origen pasa por el punto $(4;-1)$. Hallar la ecuación.

A) $x^2 - 2y^2 = 14$ B) $x^2 - y^2 = 15$ C) $2y^2 - x^2 = 14$
D) $x^2 - y^2 = 14$ E) $x^2 - 2y^2 = 15$

17 ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola equilátera centrada en el origen, con vértice en $(0; 4)$?

A) $x^2 - y^2 = 4$ B) $x^2 - y^2 = 32$ C) $y^2 - x^2 = 4$
D) $x^2 - y^2 = 16$ E) $y^2 - x^2 = 16$

18 Hallar un punto de intersección de la recta:

$4x - 3y - 16 = 0$ la hipérbola: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

A) (25/3; 1) B) (25/4; 3) C) (25/4; –3)
D) (3/5; 2) E) (1; 3/4)

19 Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen cuyo eje transverso está en el eje de abscisas y que contiene a los puntos:

$(2\sqrt{3}; 3\sqrt{2})$ y $(2\sqrt{10}; 9)$

A) $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ B) $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$
C) $16x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ D) $16x^2 - 4y^2 - 81 = 0$
E) $25x^2 - 9y^2 - 36 = 0$

20 Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $P(0; 4)$ es $4/3$ de su distancia a la recta $4y = 9$. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto.

A) $9y^2 - 4x^2 = 63$ B) $7y^2 - 16x^2 = 63$ C) $9y^2 - x^2 = 63$
D) $7y^2 - 9x^2 = 63$ E) $9y^2 - 7x^2 = 63$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

CONICAS EN GENERAL

01 El techo en el pasillo de 20 pies de ancho tiene la forma de una semielipse, tiene 18 pies de altura en el centro y 12 pies de altura en las paredes laterales. Encontrar la altura del techo a 4 pies de cualquier pared .

A) $\frac{14}{5}$ B) $\frac{78}{5}$ C) $\frac{20}{3}$ D) $\frac{73}{3}$ E) $\frac{24}{7}$

02 Halle la ecuación de la cuerda común a las circunferencias :

$$\ell_1 : x^2 + y^2 - 6x - 3y = 0$$
$$\ell_2 : x^2 + y^2 = 5$$

A) $3x + 6y + 5 = 0$ B) $6x + 3y + 5 = 0$ C) $3x - 6y - 5 = 0$
D) $3x - 6y + 5 = 0$ E) $6x + 3y - 5 = 0$

03 Halle la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta :

L_1: $x - 4y + 3 = 0$, en el punto $A(5; 2)$ y es tangente a la recta.

L_2: $4x + y - 5 = 0$, en el punto $B(2; -3)$

A) $x^2 + y^2 = 23$ B) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 23 = 0$
C) $x^2 + y^2 + 12x - 2y + 23 = 0$ D) $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 20 = 0$
E) $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 23 = 0$

04 Una elipse es tangente a una circunferencia de modo que sus focos se encuentran también sobre la circunferencia. Hallar su excentricidad .

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

05 Sea la parábola : $P(y-k)^2 = 4p(x-h)$; entonces, necesariamente se verifica que :

A) $P \cap Eje\ y = \phi$ B) $P \cap Eje\ x \neq \phi$ C) $P \cap Eje\ x = \phi$
D) $P \cap Eje\ y \neq \phi$ E) *P intersecta al EjeX y al EjeY .*

06 Una piedra arrojada hacia arriba formando un ángulo agudo con el horizontal, describe el arco de una parábola y cae a una distancia de $16m$.
Hallar el parámetro de esta parábola, si la altura máxima alcanzada es de $12m$.

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 1

07 El espejo del faro de un auto tiene la forma de una parábola en su sección transversal. Hallar el parámetro de esta parábola, si el diámetro del faro mide $20\ cm$ y la profundidad $15\ cm$. El Eje OX es el eje del faro y el origen se ubica en la parte profunda del espejo.

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{2}{3}$

08 Hallar la ecuación de la circunferencia de radio

$\sqrt{10}$, que pasa por $P(7;5)$ y es tangente a la recta : $L: x-3y+4=0$ (Señale como respuesta aquella cuyo centro está más cerca al origen del sistema coordenado)

A) $(x-4)^2+(y-6)^2=10$ B) $\left(x-\frac{44}{5}\right)^2+\left(y-\frac{38}{5}\right)^2=10$

C) $(x-3)^2+(y-6)^2=10$ D) $(x-4)^2+(y+7)^2=10$

E) $\left(x+\frac{44}{5}\right)^2+\left(y-\frac{38}{5}\right)^2=10$

09 El punto $P(2;-1)$ es el centro de una circunferencia que intersecta a la recta: $L: 2x-5y+16=0$ Determinando una cuerda cuya longitud es igual a $8u$.

Calcular la medida del radio de dicha circunferencia.

A) $\frac{15}{\sqrt{29}}$ B) $\frac{18}{\sqrt{29}}$ C) $\frac{20}{\sqrt{29}}$ D) $\frac{33}{\sqrt{29}}$ E) $\frac{35}{\sqrt{29}}$

10 Calcule la distancia del punto de la circunferencia:

$\ell: 16x^2+16y^2+48x-8y-43=0$ Más próxima a la recta L, sabiendo que : $L: 8x-4y+73=0$

A) $3\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}$ D) $4\sqrt{5}$ E) 5

11 Halle la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano, de donde se divisa al segmento de extremos $A(-1;3)$ y $B(7;5)$ bajo un ángulo recto.

A) $x^2+y^2+6x+8y+8=0$ B) $x^2+y^2+8x+6y+8=0$
C) $x^2+y^2-6x-8y+8=0$ D) $x^2+y^2-8x-6y+8=0$
E) $x^2+y^2-3x-4y+4=0$

12 Para qué valor de "k" las circunferencias :

$$\ell_1: x^2+y^2+3x+y+k=0$$
$$\ell_2: x^2+y^2+2x-1=0$$

Se intersectan :

A) $[1;2]$ B) $[-2;2]$ C) $\langle-\infty;-2]\cup[1;+\infty\rangle$
D) $\langle-\infty;-1]\cup[2;+\infty\rangle$ E) $[-2;1]$

13 Cuál es el punto de la circunferencia : $x^2+y^2-10x-6y+25=0$ más cerca a la recta L : $3x-4y+18=0$

A) $\left(\frac{317}{125};\frac{517}{125}\right)$ B) $\left(\frac{331}{125};\frac{441}{125}\right)$ C) $\left(\frac{436}{125};\frac{627}{125}\right)$

D) $\left(\frac{112}{125};\frac{189}{125}\right)$ E) $\left(\frac{421}{125};\frac{717}{125}\right)$

14 La entrada de una iglesia tiene forma parabólica de $9m$ de alto y $12m$ de base. Toda la parte superior es una ventana de vidrio cuya base es paralela al piso y mide $8m$. ¿Cuál es la altura de la ventana?

A) 2,5m B) 3m C) 4m D) 4,5m E) 5m

15 Una parábola "P" tiene por ecuación :

$$P: y^2-6y-4x+17=0$$

Se trazan tangentes a «P» que pasan por los extremos del lado recto.

Hallar la ecuación de la tangente de pendiente positiva.

A) $y=x+1$ B) $y=x+3$ C) $y=2x+1$

D) $y=x+2$ E) $y=\frac{x}{2}+2$

16 Si "L" es la recta tangente (no vertical) a a parábola $y^2=4x$, trazada desde $(0;1)$, calcular la distancia del foco de la parábola a la recta "L" :

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 2

17 Dada la circunferencia :

$$\ell: x^2+y^2-2ax-2by+a^2=0; \quad a>b>0$$

Para que valores de "m" $(m>0)$, la recta $y=mx$ es tangente a la anterior circunferencia.

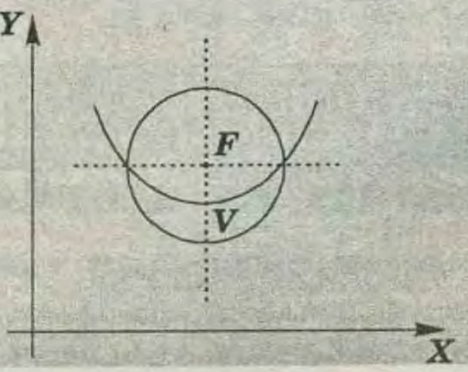
A) $m=\frac{ab}{a^2-b^2}$ B) $m=\frac{ab}{a^2+b^2}$ C) $m=\frac{2ab}{a^2+b^2}$

D) $m=\frac{2ab}{a^2-b^2}$ E) $m=\frac{a^2b^2}{a-b}$

18 Dada una parábola de ecuación : $y^2=12x$, hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en el vértice de la parábola y pasa por los extremos del lado recto.

A) $x^2+y^2=10$ B) $x^2+y^2=15$ C) $x^2+y^2=30$
D) $x^2+y^2=5$ E) $x^2+y^2=45$

19 Si la ecuación de la circunferencia mostrada es : $\ell: x^2+y^2-14x-14y+82=0$; , hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son V y F respectivamente.

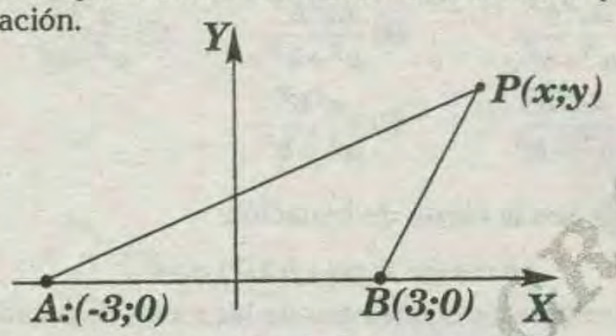


A) $x^2-14x-8y+89=0$ B) $x^2-x-6y+80=0$
C) $x^2-x+7y-80=0$ D) $x^2-12x-5y+50=0$
E) $x^2-7x-y+60=0$

20 En una hipérbola de focos F_1 y F_2, se traza una circunferencia de diámetro F_1F_2 el cual interseca a una de las ramas de la hipérbola en P.
Si : $(PF_1)(PF_2)=36m^2$, calcule la longitud del eje conjugado.

A) $\sqrt{2}m$ B) $\sqrt{3}m$ C) $\sqrt{5}m$ D) $6\sqrt{2}m$ E) $4\sqrt{2}m$

21 Una persona situada en "P", escucha simultáneamente un disparo que se hace desde $A(-3;0)$ y el estallido producido en $B(3;0)$ donde hace blanco el disparo. Conocido la posición de la batería «A» y del blanco "B", la velocidad inicial del proyectil es $V_o=1020\ m/s$ y sin tomar en cuenta el efecto del aire, donde la velocidad del sonido es conocido. Calcule la posición de «P» indicando el nombre del lugar geométrico a que pertenecen los puntos que satisfacen estas situaciones y su ecuación.



A) $8x^2-y^2=8$ (hipérbole) B) $8x^2+y^2=8$ (elipse)
C) $x^2-8y^2=8$ (hipérbole) D) $x^2+8y^2=8$ (elipse)
E) $8x^2-y^2=8$ (parábola)

22 Sea la hipérbola equilátera :

$$H: xy-6x+2y-4=0$$

Halle la longitud de su lado recto.

A) 8 B) 6 C) 4 D) 2 E) 1

23 Dada la hipérbola :

$H: 9x^2-4y^2-72x+8y+176=0$, hallar el área del cuadrilátero cuyos vértices son los focos de la hipérbola y los puntos de intersección de las asíntotas con el eje "X".

A) $\frac{4}{3}\sqrt{13}u^2$ B) $\frac{3}{4}\sqrt{13}u^2$ C) $\frac{5}{4}\sqrt{13}u^2$
D) $\frac{7}{4}\sqrt{13}u^2$ E) $\frac{8}{5}\sqrt{13}u^2$

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

CONICAS EN GENERAL

01 Calcule el área de la región del plano, cuyos puntos verifican :

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2\le 1\\ x+y>0\\ y-x+2\ge 0\end{cases}$$

A) $\frac{\pi-3}{2}u^2$ B) $\frac{\pi-1}{2}u^2$ C) $\frac{\pi+3}{2}u^2$
D) $\frac{\pi+2}{2}u^2$ E) $\frac{\pi+1}{2}u^2$

02 Calcule la distancia del punto de la circunferencia $16x^2+16y^2+48x-8y-43=0$ más próxima a la recta L, sabiendo que $L: 8x-4y+73=0$.

A) $3\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}$ D) $4\sqrt{5}$ E) 5

03 Dados los puntos $A=(-4;-2)$ y $B=(6;-8)$, halle la ecuación del lugar geométrico del punto P tal que el producto de las pendientes de los segmentos PA y PB es igual a 1.

A) $(x-1)^2-(y+5)^2=16$ B) $(x-1)^2+(y+5)^2=16$
C) $(x-5)^2+(y+1)^2=16$ D) $(x-1)^2-(y+5)^2=25$
E) $(x+1)^2-(y-5)^2=25$

04 Determine la ecuación de la recta que contiene al diámetro de la circunferencia $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ que biseca la cuerda cuya ecuación es $3y+x-6=0$.

A) $y=3x+11$ B) $y=3x+21$ C) $y=4x+11$
D) $y=5x+11$ E) $y=3x-11$

05 Una recta $\mathcal{L}$ pasa por el punto $(1;1)$ de la circunferencia de ecuación $x^2-2x+y^2=0$ y forma un ángulo de 45° con el eje X. Halle la ecuación de la recta tangente a la circunferencia que sea perpendicular a $\mathcal{L}$ cuyo punto de tangencia se encuentra en el primer cuadrante.

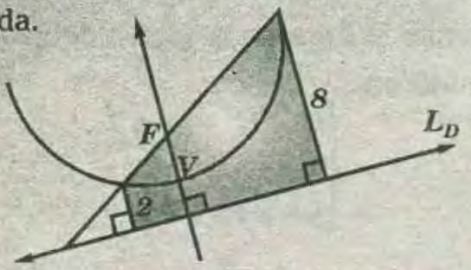
A) $y+x=\sqrt{2}-1$ B) $y+x=\sqrt{2}$ C) $y+x=\sqrt{2}+1$
D) $y+x=-\sqrt{2}$ E) $y-x=1$

06 El centro de una circunferencia es el punto $C(3;-1)$, la recta $2x-5y+18=0$ interseca a dicha circunferencia determinando una cuerda de 6 u. Halle la ecuación de esta circunferencia.

A) $(x-3)^2+(y-1)^2=38$ B) $(x+3)^2+(y+1)^2=38$
C) $(x+3)^2+(y-1)^2=38$ D) $(x-3)^2+(y+1)^2=38$

E) $(x-3)^2+(y+1)^2=36$

07 En el gráfico mostrado F es foco de la parábola, $\overleftrightarrow{LD}$ es la directriz. Calcule el área de la región sombreada.



A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 80

08 Determine la ecuación de una parábola cuyo foco es el centro de la circunferencia $x^2+y^2=81$, sabiendo que ella determina en el diámetro que está en el eje X, tres segmentos congruentes

A) $6(y+3)=x^2$ B) $3\left(y+\frac{3}{2}\right)=x^2$ C) $6\left(y+\frac{3}{2}\right)=x^2$

D) $6\left(y-\frac{3}{2}\right)=x^2$ E) $6(y-3)=x^2$

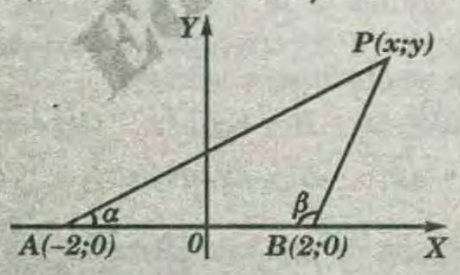
09 Dada una parábola de ecuación $y^2=12x$, halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en el vértice de la parábola que pasa por los extremos del lado recto.

A) $x^2+y^2=10$ B) $x^2+y^2=15$ C) $x^2+y^2=30$
D) $x^2+y^2=5$ E) $x^2+y^2=45$

10 Se tiene dos parábolas con el lado recto pero vértices diferentes. Calcule la medida del ángulo que forman las rectas tangentes a cada una de las parábolas en su punto de intersección.

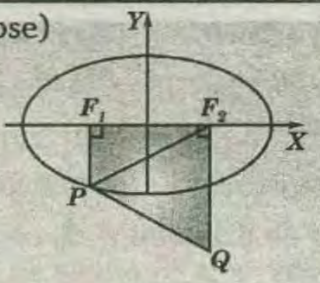
A) 60° B) 45° C) 30° D) 90° E) No se sabe

11 Halle la.ecuación del lugar geométrico de los puntos $(x;y)$ que son vértices de los triángulos ABP de la figura, siendo $\tan\alpha+\tan\beta=2$.



A) $x^2=4+2y$ B) $x^2=2y-4$ C) $x^2=4-2y$
D) $x^2=2-4y$ E) $x^2=2+4y$

12 En la elipse cuya es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, calcule el área de la región sombreada si $PF_2=QF_2$ (F_1 y F_2 son focos de la elipse)



A) $2a\sqrt{a^2-b^2}$ B) $a\sqrt{a^2-b^2}$ C) $a\sqrt{a^2+b^2}$
D) ab E) $2ab$

13 Sean F_1 y F_2 los focos de una elipse de ecuación $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ y sea P un punto de la elipse. Si $m\sphericalangle PF_1F_2=90°$, calcule el área de la región F_1PF_2.

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 18

14 El área de la región limitada por un cuadrado inscrito en una elipse con ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ es.

A) $\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$ B) $\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$ C) $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$
D) $\frac{4a^2b^2}{a^2-b^2}$ E) $\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}$

15 Sea la elipse de ecuación

$$px^2+qy^2=pq\ ;\ p>0\ ;\ q>0$$

Determine las ecuaciones de las rectas de pendiente m que son tangentes a la elipse.

A) $y=mx\pm pq^2$ B) $y=mx\pm\sqrt{p-qm^2}$
C) $y=mx\pm pq$ D) $y=mx\pm\sqrt{qm^2-p}$
E) $y=mx\pm\sqrt{p+qm^2}$

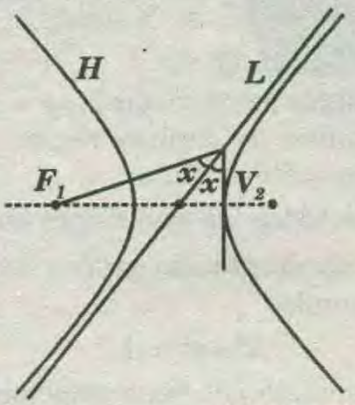
16 En una elipse el lado recto es visto desde el centro de la curva bajo un ángulo de $90°$.
Calcule la longitud del semieje menor si el semieje mayor tiene longitud a.

A) $a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ B) $a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ C) $a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$
D) $a\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ E) $a\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$

17 En una elipse la distancia entre sus focos es igual a la distancia entre un vértice y un extremo del eje menor. Calcule la excentricidad de la elipse.

A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ E) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

18 En el gráfico se muestra la hipérbola H, calcule x, si $\vec{L}$ es una de sus asíntotas, F_1 es uno de sus focos y V_2 es uno de sus vértices (V_2 punto de tangencia)



A) 30° B) 20° C) 37° D) 53° E) 15°

19 Una circunferencia de radio variable es tangente a la circunferencia $x^2+y^2+8x=0$ y contiene a el punto $A(4;0)$. ¿Qué lugar geométrico describe su centro?

A) Elipse B) Hipérbola C) Circunferencia
D) Una recta E) Parábola

20 Calcule la longitud del segmento que une el centro de una hipérbola equilátera a un punto P de ella si $(PF_1)\times(PF_2)=a^2$ (F_1 y F_2 son los focos de la hipérbola)

A) 4a B) 3a C) a D) $\frac{a}{2}$ E) 2a

21 Si desde un punto P de la hipérbola $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ se traza una paralela al eje focal de la curva, que interseca a las asíntotas en Q y R, calcule $(PQ)(PR)$.

A) $4a^2$ B) $3a^2$ C) a^2 D)2a E) $2a^2$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)B	2)A	3)E	4)D	5)A	6)D	7)E	8)C	9)C	10)E
11)B	12)A	13)E	14)E	15)B	16)B	17)E	18)B	19)B	20)D

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)B	2)E	3)E	4)C	5)B	6)A	7)B	8)B	9)D	10)B
11)C	12)B	13)D	14)C	15)D	16)A	17)D	18)E	19)A	20)D
21)A	22)A	23)A							

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1)D	2)B	3)A	4)E	5)C	6)D	7)C	8)D	9)E	10)D
11)C	12)A	13)B	14)B	15)E	16)D	17)B	18)A	19)B	20)C
21)C									

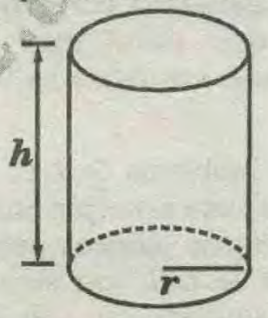
PROBLEMAS DE OLIMPIADAS

01 Sea P un punto fijo al interior de una esfera dada. Tres segmentos , PA ; PB ; PC, teniendo sus extremos $A;B;C$ sobre esta esfera, son dos a dos perpendiculares. Se considera el paralelepípedo rectángular teniendo PA ; PB ; PC por aristas. Sea Q la extremidad de la diagonal PQ de este paralepípedo. Encontrar el conjunto de puntos Q cuando los puntos A ; B y C varíen.

02

*a)*El volumen de una esfera de radio R es $\frac{4\pi R^3}{3}$, su superficie $4\pi R^2$. Encontrar al altura h y el radio r del círculo de base de un cilindro recto cuyo volumen es igual a aquel de esta esfera , y donde la superficie lateral es igual a la superficie de la esfera.

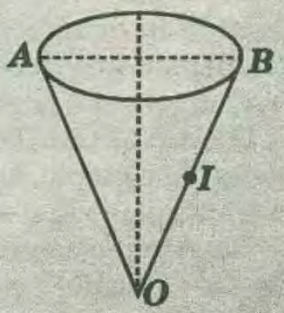
b) Si alguien determina antes, que la superficie total de un cilindro sea igual a una vez y media de aquella de la esfera , qué relación existe entre r y R? (Sería posible que Ud no lo resolviera!)



03 La superficie de un balón de football está formado por pentágonos negros y de exágonos blancos. Los lados de cada pentágono son limitados únicamente por exágonos , mientras que los lados de cada exágono son limitados alternativamente por pentágonos y por exágonos. Gracias a estos datos encontrar el número de pentágonos y el número de exágonos del balón.

04

«La hormiguita matemática» Un embudo tiene la forma de un cono de revolución de vértices O ; A y B son dos puntos diametralmente opuestos del círculo de base I es el punto medio de OB.



Se supone $OA=AB$. Una hormiga matemática a calculado la longitud del camino más corto que le permite ir de A a I permaneciendo siempre sobre el embudo. Podría Ud rehacer el resultado de su cálculo?

WWW.GRATIS2.COM

LUGAR GEOMETRICO

CAPITULO 51

OBJETIVO :

Identificar a las ecuaciones que representan a un conjunto de puntos , que cumplen con una propiedad común.

INTRODUCCIÓN :

Un problema fundamental de la Geometría Analítica es dadas las condiciones que deben cumplir los puntos de una curva, hallar la ecuación de está curva. Esto significa que cada punto de la curva debe satisfacer la ley particular de la curva. Cuando se describe una curva se expresa de la siguiente manera: lugar geométrico de los puntos, trayectoria del punto móvil o curva generada por el móvil. Al conjunto de puntos que tiene una o más características geométricas comunes se le llama *LUGAR GEOMÉTRICO* .

Por lo tanto en cualquier problema de ***L.G.*** nuestra respuesta debe ser siempre una ecuación en función de '***x***' y de '***y***'. Los conceptos teóricos necesarios para resolver problemas de ***L.G.*** son los mismos conceptos que hemos estudiado en «Sistema de Coordenadas».

Se ha visto que las ecuaciones en dos variables como:

$$y - 2x = 1$$

pueden ser representadas por gráficas en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$; en tal caso se denomina ***GRAFICA DE LA ECUACIÓN*** al conjunto de puntos ***(x;y)*** cuyas coordenadas satisfacen la ecuación dada .

Cuando la ecuación proviene de una condición geométrica que debe ser satisfecha por los puntos ***(x;y)*** entonces a la gráfica de la ecuación se le llama el ***LUGAR GEOMÉTRICO(L.G.)*** de dichos puntos, como por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos ***(x;y)*** del plano que se desplazan de tal manera que se encuentran siempre a igual distancia del eje " ***X*** " que del eje " ***Y*** " , origina la ecuación:

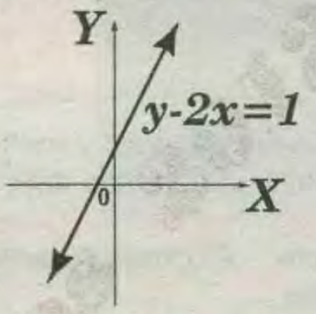
$$d((x;y),x) = d((x;y),y)$$
$$\rightarrow |y| = |x|$$
$$\rightarrow y = \pm x$$

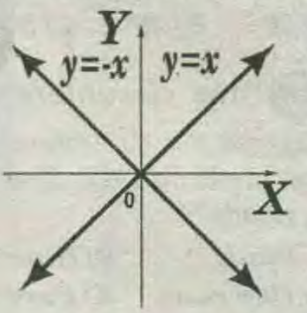
Cuya gráfica es la reunión de los puntos correspondientes a dos rectas $L_1: y = x$, $L_2: y = -x$, pues los puntos de ambas rectas satisfacen la condición geométrica dada .

* Además, no todas las ecuaciones en dos variables tienen una representación gráfica en el plano $\mathbb{R}^2$, como por ejemplo:

$$x^2 + y^2 = -1$$

* Pues esta ecuación no tiene soluciones reales $x ; y$





LUGAR GEOMÉTRICO

Un lugar geométrico es el conjunto de puntos que cumplen una determinada condición que sólo pueden cumplir ellos. Es importante asimilar bien este concepto para facilitar el razonamiento de los trazados geométricos.

♠ ***La circunferencia*** la podemos definir como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un funto fijo.

♠ ***La mediatriz*** es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos fijos.

♠ ***La bisectriz*** es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas fijas.

* El lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a igual distancia de dos puntos dados, es la mediatriz del segmento que los une.

* El lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a distancia fija de una recta, es un conjunto formado por dos rectas paralelas a la recta dada.

* El lugar geométrico de todos los puntos que están a una distancia dada de un punto dado es una circunferencia que tiene por centro al punto dado y por radio a la distancia dada.

* El lugar geométrico de los extremos de segmentos tangentes de la misma longitud a una circunferencia es otra circunferencia concéntrica a la primera.

* El lugar geométrico de los puntos cuyo par de tangentes comunes a una circunferencia forman el mismo ángulo es una circunferencia concéntrica a la primera.

* El lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias de radio dado, tangentes a una circunferencia dada, está formado por dos circunferencias concéntricas a la circunferencia dada, cuyos radios son la suma y la diferencia de los radios dados.

* El lugar geométrico de todos los puntos que están a una distancia dada de una recta dada esta formado por dos rectas, paralelas a la recta dada y situadas a la distancia dada de ellas.

* El lugar geométrico de todos los triángulos equivalentes con la misma base es una recta paralela a esa base; lo mismo para los triángulos con la misma altura.

* El lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de dos puntos dados es una recta perpendicular a la recta que une los dos puntos y pasa por su punto medio.

* El lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de dos rectas dadas está formado por dos rectas perpendiculares entre sí que bisecan los ángulos comprendidos entre las dos rectas dadas.

* El lugar geométrico de todos los puntos tales que las rectas que lo unen con los extremos de un segmento dado comprenden un ángulo dado, es un arco de circunferencia que tiene por cuerda al segmento dado. Se le llama **arco capaz** del ángulo dado y se dice que que el segmento se ve desde todos puntos del arco bajo un ángulo dado.

ECUACION DE UN LUGAR GEOMÉTRICO (L.G.)

Se llama ecuación de un lugar geométrico plano a una ecuación de la forma:

$$f(x\,;\,y) = 0$$

Cuyas soluciones reales para valores correspondientes de x y y son todas las coordenadas de aquellos puntos ,que satisfacen la condición o condiciones geométricas dadas que definen el ***lugar geométrico.***

* El procedimiento para determinar la ecuación del lugar geométrico es el siguiente :

I) Se toma un punto genérico $P(x;y)$ del plano que satisface la condición o condiciones dadas del lugar geométrico ***(L.G.).***

II) Mediante esta condición o condiciones , se debe expresar analíticamente la expresión del lugar geométrico en las variables "x" y "y".

CRITERIOS PARA GRAFICAR ECUACIONES DE L.G.

Cuando se tiene que graficar una ecuación en dos variables x,y, es conveniente tener en cuenta ciertas consideraciones o criterios preliminares:

INTERCEPTOS CON LOS EJES COORDENADOS

Se ubican los puntos en los que la gráfica debe intersectar a los ejes , para lo cual si se desea encontrar los interceptos con el eje Y, se hace $x=0$ en la ecuación y se despejan los valores reales de Y correspondientes ; y para hallar los interceptos con el eje X , se hace $y = 0$ en la ecuación y se encuentran todos los posibles valores reales de x correspondientes .

EJEMPLO :

En la ecuación

$$4x^2 + 9(y-2)^2 = 36$$

* Si $x = 0$: $9(y-2)^2 = 36 \rightarrow y = 0 \vee y = 4$ y se dice que 0 y 4 son los interceptos con el eje Y ; y si $y = 0$: $4x^2 = 0 \rightarrow x = 0$, y se dice que 0 es el único intercepto con el eje X.

EXTENSIÓN :

Con esto se quiere indicar un previo análisis de la ecuación para encontrar los intervalos en los cuales las variables x , y toman valores reales ..

EJEMPLO :

En la ecuación :

$$4x^2 + 9(y-2)^2 = 36$$

* Si se despeja x de la ecuación se tiene que:

$$x = \pm\,(3/2)\sqrt{4 - (y-2)^2}$$

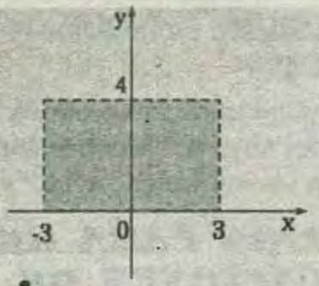
* Y como x debe ser un número real, entonces debe considerarse del radical que:

$4 - (y-2)^2 \geq 0$ lo que implica $-2 \leq y - 2 \leq 2$

$\rightarrow 0 \leq y \leq 4$, es decir , los valores $y \in [0\,;\,4]$

* Análogamente, despejando y de la ecuación se tiene la condición para x: $-3 \leq x \leq 3$, es decir, todos los valores $x \in [-3\,;\,3]$. De esta manera la gráfica estará contenida en la región del plano limitada por el siguiente rectángulo lo que determina su extensión

en el plano.



SIMETRÍA :

Con frecuencia es útil reconocer cuándo la gráfica es simétrica respecto a los ejes coordenados y /o al origen. Recordaremos que si L es una recta y Q un punto cualquiera entonces se dice que el punto Q' es el simétrico de Q con respecto a L si:

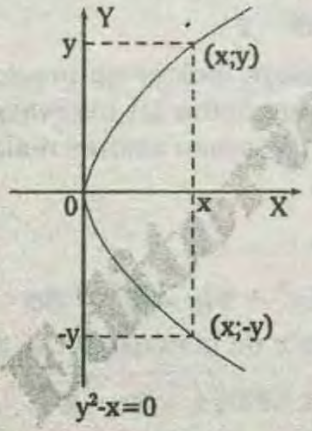
I) $L \perp QQ'$

II) L intersecta a QQ' en su punto medio M. La recta L recibe el nombre de ***EJE DE SIMETRÍA*** de los dos puntos.

* Se dice además que dos puntos P y Q son simétricos entre si con respecto a un punto, si M es el punto medio del segmento PQ. este punto M, se llama ***CENTRO DE SIMETRÍA.***

SIMETRÍA DE UNA CURVA CON RESPECTO AL EJE X

Si la ecuación de una curva no varía cuando se sustituye "y" por "$-y$" entonces se dice , que la curva es simétrica con respecto al eje X, pues ello indicará que los puntos $(x;y)$ y $(x;-y)$ pertenecen a la gráfica y tienen como eje de simetría al eje "X".

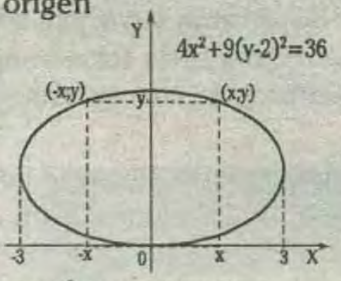


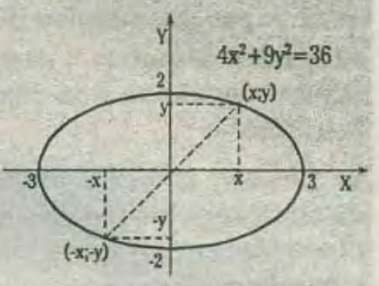
SIMETRÍA CON RESPECTO AL EJE "Y"

Si la ecuación no varía cuando se sustituye "x" por "$-x$" entonces la curva es simétrica con respecto al eje Y, pues ello indicará que los puntos $(x;y)$ y $(-x;y)$ pertenecen a la gráfica y tendrá como eje Y.

SIMETRÍA CON RESPECTO AL ORIGEN

Si la ecuación no varía cuando se sustituye simultáneamente "x", por "$-x$", y, "y" entonces la curva es simétrica con respecto al origen , pues ello indicará que los puntos $(x;y)$ y $(-x;-y)$ pertenecen a la gráfica y tendrán como centro de simetría al origen





ASÍNTOTAS :

Si para una curva se encuentran una recta L tal que la distancia de un punto de la curva a la recta L va disminuyendo tendiendo a cero conforme el punto se aleja ilimitadamente del origen entonces dicha recta se llama ***ASÍNTOTA*** de la curva.

* Consideraremos por ahora solamente asíntotas que sean horizontales o verticales.

EJEMPLO :

Dada la ecuación : $xy - x - y = 0$

* Si se despeja y en términos de x :

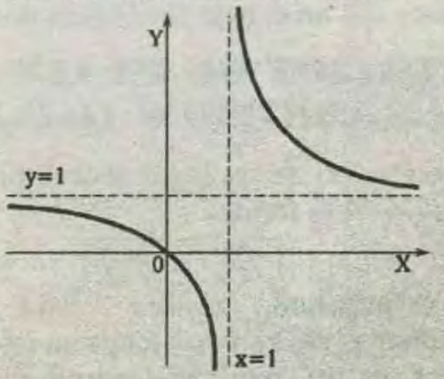
$$y = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

* Se observa que si "x" tiene a 1 tomando valores menores que 1 y positivos, entonces el denominador $x - 1$ tienen a cero y el cociente, y por lo tanto "y", tienen a $-\infty$, mientras que si "x" tiende a: $+\infty$ tomando valores a la derecha de 1, entonces y tiende a $+\infty$. Esto indica que $x=1$, es una asíntota vertical

* Si se despeja x:

$$x = \frac{y}{y-1} = \frac{1}{y-1}$$

* Analizando en forma análoga a la anterior se tiene que $y = 1$ es una asíntota horizontal.



REGLA PARA HALLAR ASÍNTOTAS POSIBLES:

1) Para las asíntotas verticales se despeja "y" en función de "x" y se igualan a cero los factores lineales del denominador y si es que no se obtiene para

tales valores "x" la expresión $\frac{0}{0}$, entonces dichas ecuaciones corresponderán a las asíntotas verticales.

2) Para las asíntotas horizontales se despeja "x" en términos de "y", se igualan a cero los factores lineales del denominador (si existiera, claro está)y se procede como en *(1)*.

CONSTRUCCIÓN DE LA CURVA

Habiéndose determinado algunos detalles de la curva con los criterios anteriores se tabulan algunos puntos .

EJEMPLO :

graficar la ecuación : $4x^2+9y^2=36$

RESOLUCIÓN :

* Interceptos con el eje X : haciendo

$$y = 0 : x = \pm 3$$

* Interceptos con el eje Y : haciendo

$$x = 0 : y = \pm 2$$

* *EXTENSIÓN :*

$$-3 \le x \le 3 \; ; \quad -2 \le y \le 2$$

* *SIMETRÍAS:*

* Es simétrica respecto al eje "X" pués la ecuación no varía al reemplazar "y" por "$-y$".

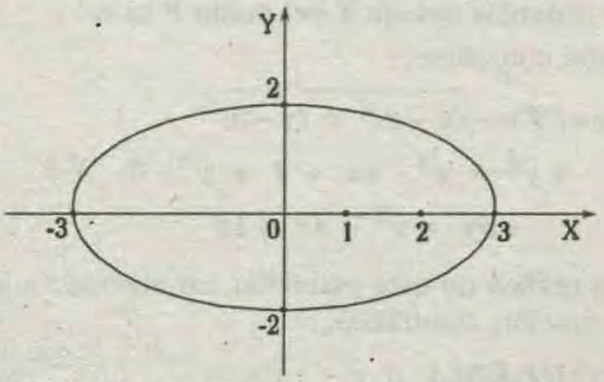
* Es simétrica respecto al origen al eje "Y"pues la ecuación no varía al reemplazar "x" por "$-x$".

* Es simétrica respecto al origen

* No tiene asíntotas verticales ni horizontales

*

x	0	1	2	2,5	3
y	2	$\approx 1{,}88$	$\approx 1{,}49$	$\approx 1{,}1$	0



y por las consideraciones de *(d)* solo es necesario tabular en el primer cuadrante.

ECUACIONES FACTORIZABLES

Son aquellas que pueden expresarse como producto de dos o más factores igualados a cero como:

$$x^2-(y-1)^2=0$$

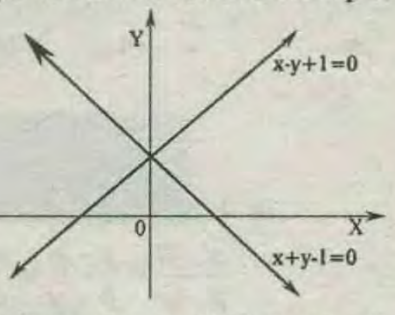
$$\rightarrow (x-y+1)(x+y-1) = 0$$

$$\rightarrow x-y+1 = 0 \quad \text{ó} \quad x+y-1 = 0$$

y cuya gráfica corresponde a la reunión de los puntos de ambas gráfica:

$L_1: x-y+1 = 0$

$L_2: x+y-1 = 0$



NOTA:

Para determinar el lugar geométrico donde el enunciado del problema nos diga *L.G.* de tal punto ; en ese punto, pondremos las coordenadas *(x;y)*. A cualquier otro punto que aparezca en el problema le pondremos cualquier coordenada pero nunca *(x; y)* ya que *(x; y)* es solo para el *L.G.*

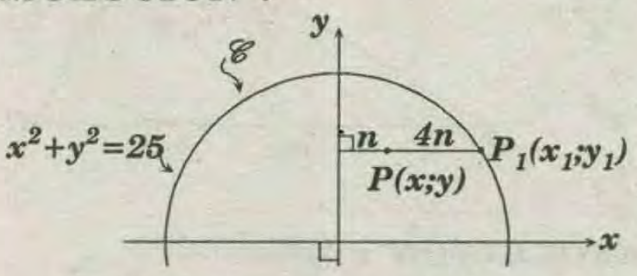
PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Halle el lugar geométrico de los puntos que dividen a las abcisas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en la relación *4/5.*

A)Recta *B)Circunferencia* *C)Parábola*
D)Elipse *E)Hipérbola*

RESOLUCIÓN :



$$x_1 = 5n \; ; \; x = n \quad \Rightarrow x_1 = 5x$$

* Como: $P_1(x_1;y_1) \in \ell$

$$\Rightarrow (5x)^2 + y^2 = 25 \rightarrow 25^2 + y^2 = 25$$

$$\rightarrow \frac{25x^2}{25} + \frac{y^2}{25} = 1 \rightarrow x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$$

$\Rightarrow$ El *L.G.* es una Elipse

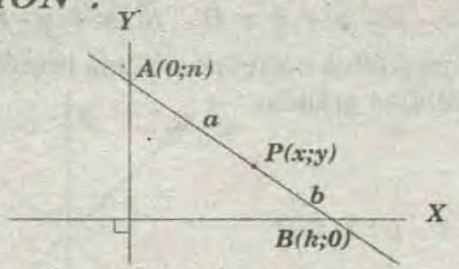
RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

Una recta instersecta a los ejes positivos de coordenadas en A y B , se ubica P en $\overline{AB}$ de manera que $AP = a$ y $a \neq b$. Si los interceptos se desplazan sobre los ejes X e Y. Entonces P describe una figura geométrica llamada:

A)Elipse B)Circunferencia C)Parábola
D)Hipérbola E)Recta

RESOLUCIÓN :



$$(a+b)^2 = m^2 + n^2 \quad .....(I)$$

$$\frac{x-0}{k-x} = \frac{y-n}{0-y} = \frac{a}{b}$$

* De donde :

$$\left.\begin{array}{l} n = \dfrac{(a+b)}{b}y \\ m = \dfrac{(a+b)}{a}x \end{array}\right\} .....(II)$$

* *(II)* en *(I)*:

$$(a+b)^2 = \frac{(a+b)^2x^2}{a^2} + \frac{(a+b)^2y^2}{b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

RPTA : "A"

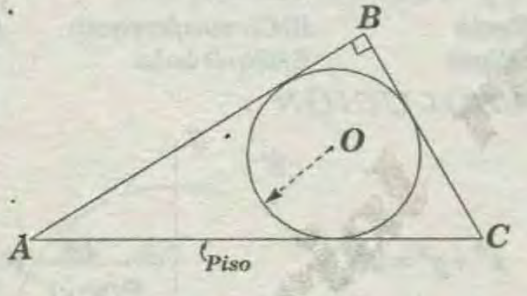
PROBLEMA 3 :

Según el gráfico , $\mathscr{C}$ es el lugar geométrico del punto O, tal que la circunferencia de centro O se pueda inscribir en un triángulo rectángulo de hipotenusa AC. Si $AC = \mathscr{C}$, calcule la longitud de dicho lugar geométrico .

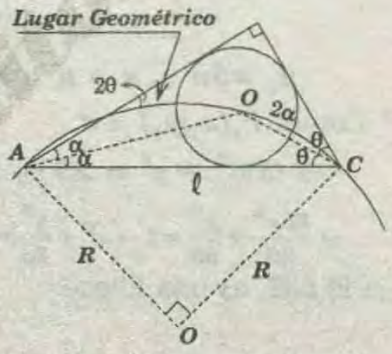
A) $\frac{\ell\sqrt{2}}{4}\pi$

B) $\frac{\ell}{4}\pi$

C) $\frac{\ell}{2}\pi$



RESOLUCIÓN :



* Piden: $L_{\overset{\frown}{AOC}} = ?$

* Como: $\theta + \alpha = 45° \rightarrow m\overset{\frown}{AOC} = 90° \Rightarrow m\sphericalangle AOC = 90°$

$$\Rightarrow L_{\overset{\frown}{AOC}} = \frac{2\pi R}{4}$$

* Pero: $R\sqrt{2} = \ell \Rightarrow R = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \Rightarrow L_{\overset{\frown}{AOC}} = \frac{\pi\ell\sqrt{2}}{4}$

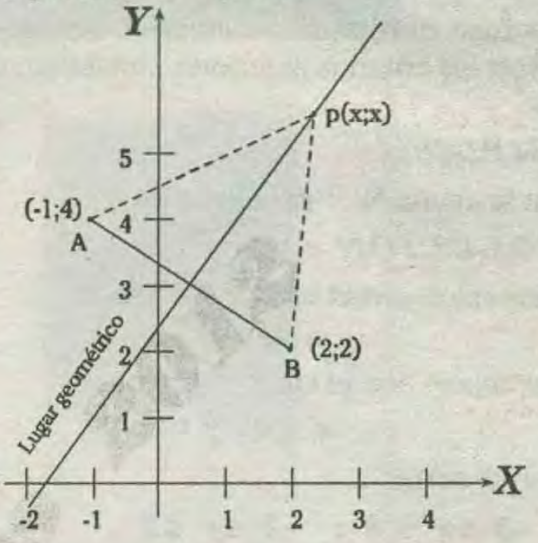
RPTA : "A"

PROBLEMA 4 :

Encontrar el lugar geométrico de un punto que sea en todo momento equidistante de los extremos del segmentos AB, $A(-1;4)$ y $B(2;2)$

RESOLUCIÓN :

* Llamamos $P(x;y)$ al punto móvil y lo situamos en una posición tal que se cumple $PA = PB$, según el problema, luego aplicamos el teorema de la distancia entre dos puntos: $PA = PB$



$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = (x-y)^2 + (y-2)^2$$

* Después, eliminando radicales y desarrollando, obtenemos: $6x - 4y + 9 = 0$

* Cuando dibujamos la gráfica de la ecuación, encontramos que el lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB.

PROBLEMA 5 :

Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto fijo $F(2;3)$ y del eje X.

RESOLUCIÓN :

* La distancia del eje X del punto P es y.

Debe cumplirse:

$$y = PF = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$$

$$\rightarrow y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9$$

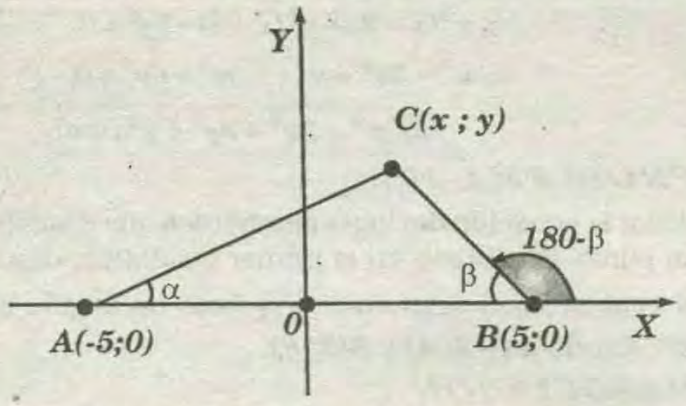
$$\rightarrow 6y = x^2 - 4x + 13$$

* La gráfica de esta ecuación corresponde a la de una función cuadrática.

PROBLEMA 6 :

La base de un triángulo es $\overline{AB}$ en donde $A(-5;0)$ y $B(5;0)$. Hallar el lugar geométrico del tercer vértice "C", si la suma de los ángulos de la base es de $45°$, sabiendo que "C" está el primer cuadrante.

RESOLUCIÓN :



* Por dato : $\alpha+\beta=45°$

$\Rightarrow tg(\alpha+\beta)=tg45° \Rightarrow \dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\times tg\beta}=1$ .....(γ)

$\Rightarrow tg\alpha=m_{\overline{AC}} \Rightarrow tg\alpha=\dfrac{y}{x+5}$ .....(I)

$\Rightarrow tg(180°-\beta)=m_{\overline{BC}}$

* $F.T.(180°\pm\alpha)=\pm F.T.(\alpha)$

$-tg\beta=\dfrac{y}{x-5} \Rightarrow tg\beta=\dfrac{y}{5-x}$ .....(II)

* (I) y (II) en (γ) : $\dfrac{\dfrac{y}{x+5}+\dfrac{y}{5-x}}{1-\left(\dfrac{y}{x+5}\right)\left(\dfrac{y}{5-x}\right)}=1$

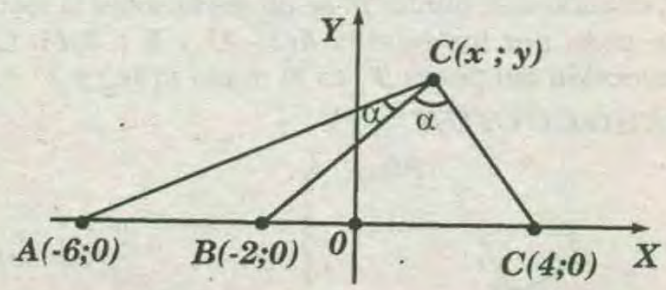
$\dfrac{\dfrac{5y-xy+5y}{25-x^2}}{\dfrac{25-x^2-y^2}{25-x^2}}=1 \Rightarrow \dfrac{10y}{25-x^2-y^2}=10 \Rightarrow \boxed{y=25-x^2-y^2x^2+y^2}$

PROBLEMA 7 :

Dado los puntos $A(-6;0), B(-2;0), C(4;0)$ .Determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos desde los cuales los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ven bajo el mismo ángulo .

RESOLUCIÓN:

* Por el teorema de la bisectriz :



$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{|AQ|}{|QC|} \Rightarrow \dfrac{-2+6}{4+2}=\dfrac{\sqrt{(x+6)^2+y^2}}{(x-6)^2+y^2}$

* Elevando al cuadrado :

$\dfrac{4}{9}=\dfrac{(x+6)^2+y^2}{(x-4)^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{4}{9}=\dfrac{x^2+12x+36+y^2}{x^2-8x+16+y^2}$

$\Rightarrow 4x^2-32x+64+4y^2=9x^2+18x+324+9y^2$

$\Rightarrow 0=5x^2+5y^2+140x+260 \Rightarrow \boxed{0=x^2+y^2+28x+52}$

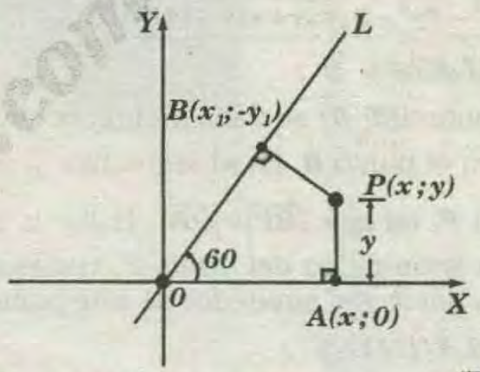
PROBLEMA 8 :

Un punto **'P'** se mueve en el primer cuadrante, en la región limitada por el eje de abscisas y una recta L que forma $60°$ con dicho eje y que pasa por el origen. Hallar el lugar geométrico del punto **'P'**, si la suma de las distancias a las rectas que limitan la región es siempre **6** unidades.

RESOLUCIÓN :

$|\overline{BP}|+|\overline{AP}|=6$ .....(I)

$m_L=tg60° \Rightarrow \dfrac{y_1}{x_1}=\sqrt{3}$



$y_1=\sqrt{3}x_1$.....(II)

$L \perp \overline{BP} \Rightarrow m_L\times m_{\overline{BP}}=-1$

$\Rightarrow (\sqrt{3})\left(\dfrac{y-y_1}{x-x_1}\right)=-1$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}y-\sqrt{3}y_1}{x-x_1}=-1 \Rightarrow \sqrt{3}y-\sqrt{3}y_1=-x+x_1$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}y+x-x_1}{\sqrt{3}}=y_1$ .....(III)

*$(II)=(III)$:

$\dfrac{\sqrt{3}y+x-x_1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}x_1 \Rightarrow \sqrt{3}y+x-x_1=3x_1$

$\Rightarrow 4x_1=\sqrt{3}y+x \Rightarrow x_1=\dfrac{\sqrt{3}y+x}{4}$

$x_1=\dfrac{\sqrt{3}y+x}{4}$ .....(IV)

* (IV) en (II) :

$y_1=\dfrac{3y+\sqrt{3}x}{4}$ .....(V)

* En *(I)* : $\sqrt{(x-x_1)^2-(y-y_1)^2}+y=6$

*(IV) y (V) en (I) :

$$\left(\sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}y+x}{4}\right)^2+\left(y-\frac{3y+\sqrt{3}x}{4}\right)^2}\right)^2=(6-y)^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{4x-\sqrt{3}y-x}{4}\right)^2+\left(\frac{4y-3y-\sqrt{3}x}{4}\right)^2=36-12y+y^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{3x-\sqrt{3}y}{4}\right)^2+\left(\frac{y-\sqrt{3}x}{4}\right)^2=36-12y+y^2$$

$$\Rightarrow\frac{9x^2-6\sqrt{3}xy+3y^2}{16}+\frac{y^2-2\sqrt{3}xy+3x^2}{16}=36-12y+y^2$$

$$\Rightarrow 9x^2-6\sqrt{3}xy+3y^2+y^2-2\sqrt{3}xy+3x^2=576-192y+16y^2$$

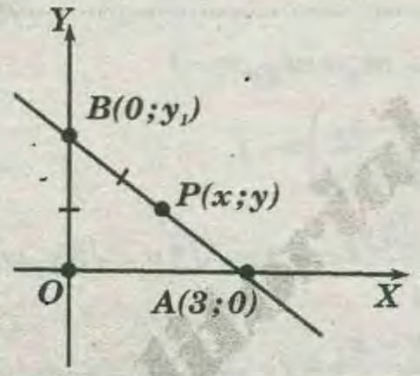
$$\Rightarrow 12x^2-12y^2-8\sqrt{3}xy+192y-576=0$$

$$\Rightarrow \boxed{3x^2-3y^2-2\sqrt{3xy}+48y-144=0}$$

PROBLEMA 9 :

Por el punto $A(3;\ 0)$ se traza una recta que corta al eje **'Y'** en el punto B. En el segmento $\overline{AB}$ se toma un punto P, tal que $|\overline{BP}|=|\overline{OB}|$. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto P, cuando la recta que pasa por A gira alrededor de este punto.

RESOLUCIÓN :



* Por dato : $|\overline{BP}|=|\overline{OB}|$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-y_1)^2}=y_1\Rightarrow\left(\sqrt{(x)^2+(y-y_1)^2}\right)^2=y_1^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2y_1y+y_1^2=y_1^2\Rightarrow x^2+y^2-2y_1y=0\ ....(I)$$

$B\ ;\ P\ ;\ A$ son colineales :

$$m_{\overline{AB}}=m_{\overline{AP}}$$

$$\frac{y_1}{0-3}=\frac{y}{x-3}\Rightarrow y_1=\frac{-3y}{x-3}\ .....(II)$$

* *(II)* en *(I)* : $x^2+y^2-2\left(\frac{-3y}{x-3}\right)y=0$

$$\Rightarrow x^2(x-3)+y^2(x-3)+6y^2=0$$

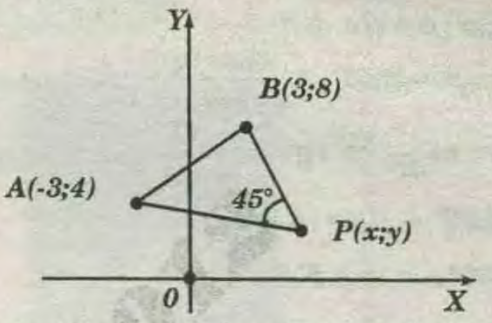
$$\Rightarrow x^3-3x^2+y^2x-3y^2+6y^2=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x^3-3x^2+3y^2+y^2x=0}$$

PROBLEMA 10 :

Hallar la ecuación del lugar geométrico que describe un punto **'P'** situado en el primer cuadrante, desde el cual se ve el segmento $\overline{AB}$ bajo un ángulo de $45°$, siendo $A\ (-3;\ 4)$ y $B(3;\ 8)$.

RESOLUCIÓN :



* Usando la fórmula de ángulo entre dos rectas :

$$tg45°=\frac{m_{\overline{AP}}-m_{\overline{BP}}}{1+m_{\overline{AP}}\times m_{\overline{BP}}}\ .....(I)$$

$$m_{\overline{AP}}=\frac{y-4}{x+3}\ .....(II)$$

$$m_{\overline{BP}}=\frac{y-8}{x-3}\ .....(III)$$

* *(II)* y *(III)* en *(I)* :

$$1=\frac{\frac{y-4}{x+3}-\frac{y-8}{x-3}}{1+\left(\frac{y-4}{x+3}\right)\left(\frac{y-8}{x-3}\right)}\Rightarrow 1=\frac{\frac{yx-3y-4x+12-xy+8x-3y+24}{x^2-9}}{\frac{x^2-9+y^2-8y-4y+32}{x^2-9}}$$

$$\Rightarrow x^2-9+y^2-8y-4y+32=-3y-4x+12+8x-3y+24$$

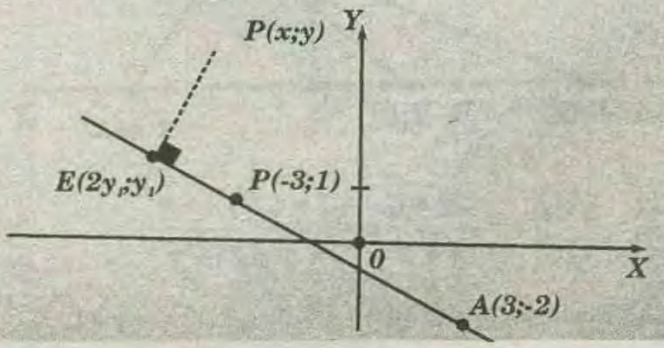
$$\Rightarrow x^2+y^2-12y+23=4x-6y+36$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2-4x-6y-13=0}$$

PROBLEMA 11 :

Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto **'P'**, cuando este punto **'P'** se proyecta sobre la recta que pasa por los puntos $A(3;-2)$ y $B\ (-3;1)$. La proyección del punto **'P'** es el punto $E(2y_1;\ y_1)$.

RESOLUCIÓN :



E; B; A son colineales : $m_{\overline{EB}} = m_{\overline{BA}}$

$$\Rightarrow \frac{1-y_1}{-3-2y_1}=\frac{-2-1}{3+3} \Rightarrow \frac{1-y_1}{-3-2y_1}=\frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow 2-2y_1=3+2y_1 \Rightarrow -1=4y_1 \Rightarrow y_1=\frac{-1}{4} \ldots (I)$$

$$\overline{PE} \perp \overline{AB} \Rightarrow m_{\overline{PE}} \times m_{\overline{AB}} = -1$$

$$\left(\frac{y_1-y}{2y_1-x}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)=-1 \Rightarrow \frac{-y_1+y}{4y_1-2x}=-1$$

$$\Rightarrow -y_1+y=-4y_1+2x \Rightarrow 0=2x-y-3y_1 \ldots (II)$$

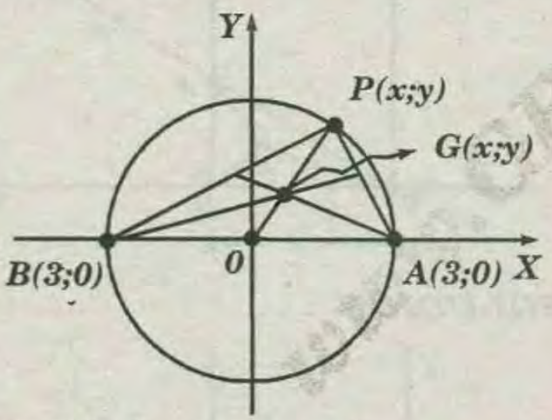
* (I) en (II) :

$$2x-y-3\left(\frac{-1}{4}\right)=0 \Rightarrow \boxed{8x-4y+3=0}$$

PROBLEMA 12 :

Dada la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2=9$, con centro en el origen y radio $=3$. Un punto 'P' de la circunferencia se une con los extremos de un diámetro cualquiera . Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por el baricentro del triángulo formado.

RESOLUCIÓN :



* El punto $P(x; y) \in$ a la curva :

$$x_1^2+y_1^2=9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

* Como $G(x; y)$ es baricentro :

$$x=\frac{1}{3}(3+x_1-3) \Rightarrow x_1=3x \ldots\ldots\ldots (I)$$

$$y=\frac{1}{3}(0+y_1-0) \Rightarrow y_1=3y \ldots\ldots\ldots (II)$$

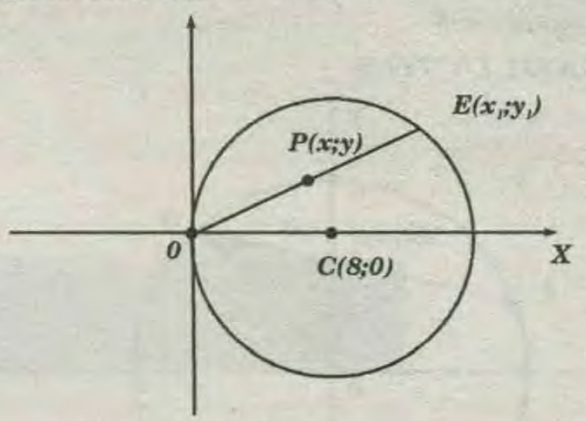
* (I) y (II) en (α):

$$(3x)^2+(3y)^2=9 \Rightarrow 9x^2+9y^2=9 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=1}$$

PROBLEMA 13 :

Por el origen de coordenadas se han trazado todas las cuerdas posibles a la circunferencia $(x-8)^2+y^2=64$ Hallar la ecuación del $L.G.$ de los puntos medios de estas cuerdas.

RESOLUCIÓN :



$$(x-8)^2+y^2=64$$

Centro de la circunferencia : $C(8; 0)$ radio $= 8$

$A(x_1; y_1) \in$ a la circunferencia :

$$(x_1-8)^2+y_1^2=64 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Como $P(x; y)$ es punto medio de $\overline{OA}$:

$$x=\frac{x_1}{2} \Rightarrow x_1=2x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

$$x=\frac{y_1}{2} \Rightarrow y_1=2y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

* Reemplazando (II) y (III) en (I) :

$$(2x-8)^2+(2y)^2=64 \Rightarrow 4x^2-32x+64+4y^2=64$$

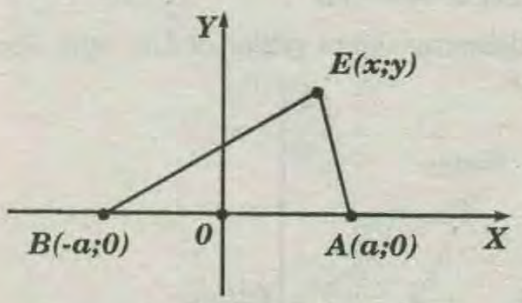
$$\Rightarrow 4x^2-32x+4y^2=0 \Rightarrow 4x^2+4y^2-32x=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2-8x=0}$$

PROBLEMA 14 :

Hallar la ecuación del $L.G.$ de los puntos cuya diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(-a; 0)$ y $B(a; 0)$ es igual a 'C'.

RESOLUCIÓN :



$$\left|\overline{AE}\right|^2-\left|\overline{BE}\right|^2=C \Rightarrow \left(\sqrt{(x+a)^2+y^2}\right)^2-\left(\sqrt{(x-a)^2+y^2}\right)^2=C$$

$$\Rightarrow (x+a)^2+y^2-(x-a)^2-y^2=C$$

$$\Rightarrow x^2+2ax+a^2-(x^2-2ax+a^2)=C$$

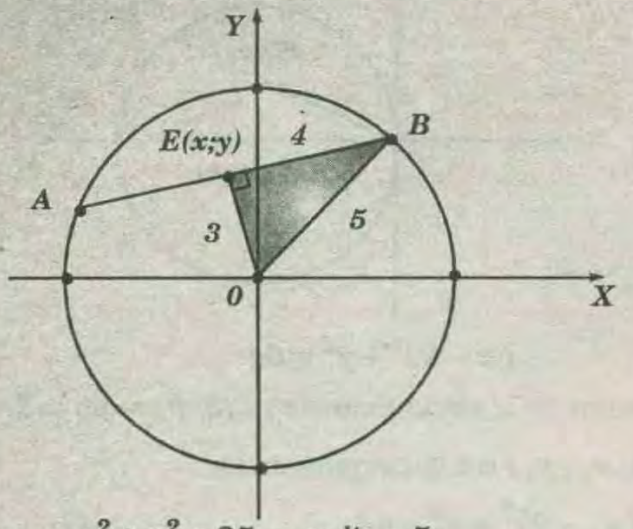
$$\Rightarrow x^2+2ax+a^2-x^2+2ax-a^2=C \Rightarrow \boxed{4ax-C=0}$$

PROBLEMA 15 :

Dada la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2=25$. Hallar la ecuación del $L.G.$ de los puntos medios de

las cuerdas de esta circunferencia cuyas longitudes son iguales a *8*.

RESOLUCIÓN :



$x^2+y^2=25 \Rightarrow$ radio$=5$

* Sea $\overline{AB}$ la cuerda.

* Como *'E'* es punto medio de $\overline{AB}$: $|\overline{EB}|=4$

* Uniendo el origen con el punto *'E'*: Por propiedad $\overline{OE} \perp \overline{AB}$

* En el triángulo *OEB* : Por Pitágoras :

$$|\overline{OB}|^2=|\overline{EB}|^2+|OE|^2 \Rightarrow 25=16+|OE|^2$$

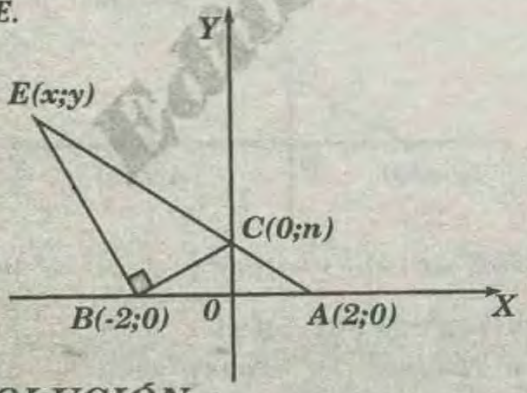
$$\Rightarrow 9=|OE|^2 \Rightarrow 3=|OE| \Rightarrow |OE|=3$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=3 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=(3)^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=9 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2-9=0}$$

PROBLEMA 16 :

En la siguiente figura hallar el ***L.G.*** que describe el punto *E*.



RESOLUCIÓN :

E; C; A son colineales : $m_{\overline{EC}}=m_{\overline{CA}}$

$$\frac{y-n}{x}=\frac{n}{-2} \Rightarrow -2y+2n=nx \Rightarrow 2n-nx=2y$$

$$\Rightarrow n(2-x)=2y \Rightarrow n=\frac{2y}{2-x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$\overline{EB} \perp \overline{BC} \Rightarrow m_{\overline{EB}} \times m_{\overline{BC}}=-1$

$$\left(\frac{y}{x+2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)=-1 \Rightarrow \frac{ny}{2x+4}=-1$$

$$\Rightarrow n=\frac{-2x-4}{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* *(I)=(II)* :

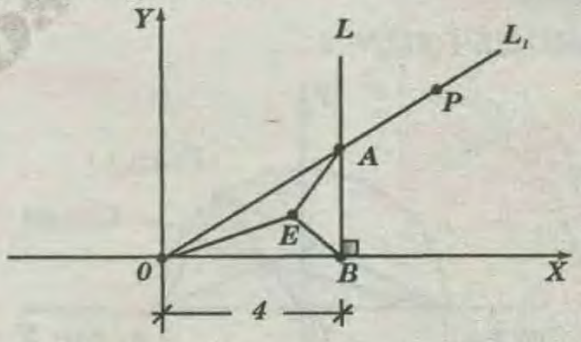
$$\frac{2y}{2-x}=\frac{-2x-4}{y} \Rightarrow 2y^2=(2-x)(-2x-4)$$

$$\Rightarrow 2y^2=-4x-8+2x^2+4x$$

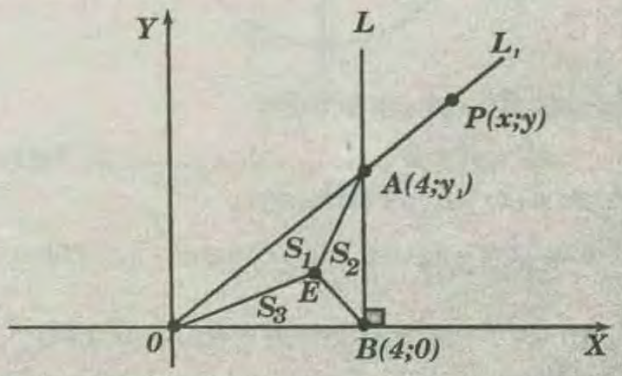
$$\Rightarrow 0=2x^2-2y^2-8 \Rightarrow \boxed{x^2-y^2-4=0}$$

PROBLEMA 17 :

En la siguiente figura hallar el ***L.G.*** que describe el punto *'P'*. Se sabe que el punto $\left(\frac{8}{3};\frac{1}{y}\right)$ se une con los vértices del triángulo *OAB* formándose *3* triángulos de igual área.



RESOLUCIÓN :



O; A; P son colineales :

$$m_{\overline{OA}}=m_{\overline{OP}} \Rightarrow \frac{y_1}{4}=\frac{y}{x} \Rightarrow y_1=\frac{4y}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Como $S_1=S_2=S_3$:

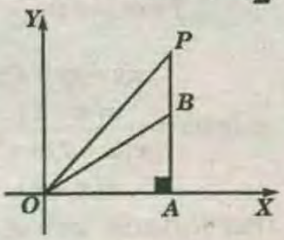
$E\left(\frac{8}{3};\frac{1}{y}\right)$ es baricentro :

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{3}(0+0+y_1) \Rightarrow \frac{3}{y}=y_1 \quad \text{.....(II)}$$

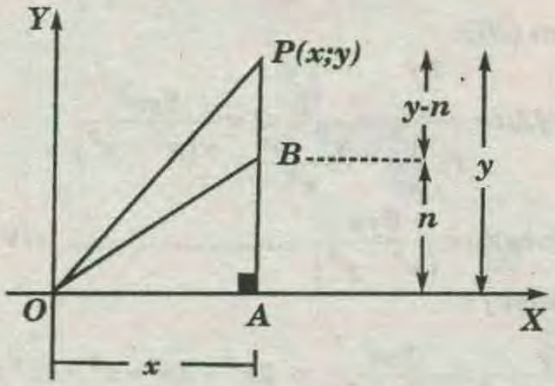
$$\Rightarrow (I)=(II): \frac{4y}{x}=\frac{3}{y} \Rightarrow 4y^2=3x \Rightarrow \boxed{2x-4y^2=0}$$

PROBLEMA 18 :

En la siguiente figura hallar el ***L.G.*** que describe el punto ***'P'***, si se sabe que la pendiente de $\overline{OB}$ es $\frac{3}{2}$ y que $\frac{\text{Area del } \triangle OPB}{\text{Area del } \triangle OBA}=\frac{1}{3}$



RESOLUCIÓN :



$$\frac{\text{Area del } \triangle OPB}{\text{Area del } \triangle OBA}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\frac{(y-n)(x)}{2}}{\frac{n(x)}{2}}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{y-n}{n}=\frac{1}{3} \Rightarrow 3y-3n=n$$

$$\Rightarrow 2y=4n \Rightarrow n=\frac{3y}{4} \quad \text{.....(I)}$$

$$\Rightarrow B(x;n)=B\left(x;\frac{3y}{4}\right)$$

* Por dato :

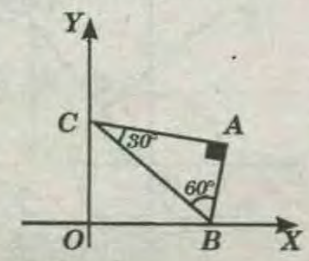
$$m_{\overline{OB}}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\frac{3y}{4}}{x}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3y}{4x}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 6y=12x \Rightarrow 0=12x-6y$$

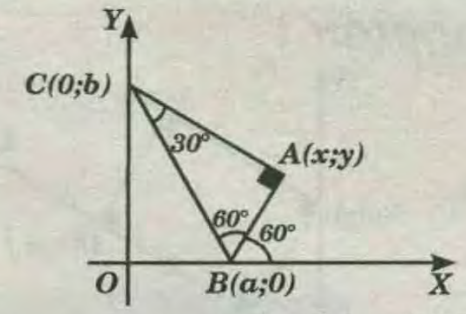
$$\Rightarrow 0=2x-y$$

PROBLEMA 19 :

La siguiente figura es una escuadra. Hallar el ***L.G.*** que describe el punto ***'A'***, sabiendo que el ángulo de inclinación de la hipotenusa ***120°***.



RESOLUCIÓN :



$$\overline{AB} \perp \overline{AC}: m_{\overline{AB}} \times m_{\overline{AC}}=-1 \Rightarrow \left(\frac{y}{x-a}\right)\left(\frac{y-b}{x}\right)=-1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2-by}{x^2-ax}=-1 \Rightarrow y^2-by=x^2+ax$$

$$\Rightarrow y^2-by+x^2-ax=0 \quad \text{.....(I)}$$

* De la figura : $m_{\overline{AB}}=tg60°$.

$$\frac{y}{x-a}=\sqrt{3} \Rightarrow y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}a \Rightarrow \sqrt{3}a=\sqrt{3}x-y$$

$$\Rightarrow a=\frac{\sqrt{3}x-y}{\sqrt{3}} \quad \text{.....(II)}$$

* De la figura : $m_{\overline{BC}}=tg120°$

* $tg120°=tg(180°-60°)=tg60°=-\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{b}{-a}=-\sqrt{3} \Rightarrow b=a\sqrt{3} \quad \text{.....(III)}$$

* *(II)* en *(III)* :

$$b=\left(\frac{\sqrt{3}x-y}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow b=\sqrt{3}x-y \quad \text{.....(IV)}$$

* *(II)* y *(IV)* en *(I)* :

$$y^2-(\sqrt{3}x-y)y+x^2-\left(\frac{\sqrt{3}x-y}{\sqrt{3}}\right)x=0$$

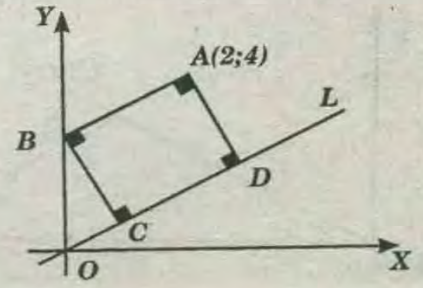
$$\Rightarrow y^2-\sqrt{3}xy+y^2+x^2-\left(\frac{\sqrt{3}x^2-yx}{\sqrt{3}}\right)=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}y^2-3xy+\sqrt{3}y^2+\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}x^2+xy=0$$

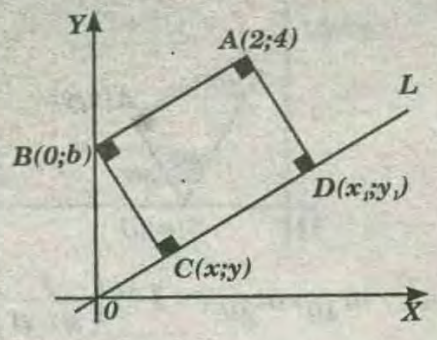
$$\Rightarrow 2\sqrt{3}y^2-2xy=0 \Rightarrow \boxed{\sqrt{3}y^2-xy=0}$$

PROBLEMA 20 :

En el siguiente rectángulo, hallar el ***L.G.*** que describe el punto ***'C'***.



RESOLUCIÓN :



$L \parallel \overline{AB}$:

$$m_L = m_{\overline{AB}} \Rightarrow m_{\overline{OC}} = m_{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{b-4}{-2}$$

$$\Rightarrow -2y = bx - 4x \Rightarrow \frac{4x-2y}{x} = b \quad \text{.....(I)}$$

$L \perp BC$:

$$m_L \times m_{\overline{BC}} = -1 \Rightarrow m_{\overline{OC}} \times m_{\overline{BC}} = -1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right) \times \left(\frac{y-b}{x}\right) = -1 \Rightarrow \frac{y^2 - by}{x^2} = -1$$

$$\Rightarrow y^2 - by = -x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = by$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{y} = b \quad \text{.....(II)}$$

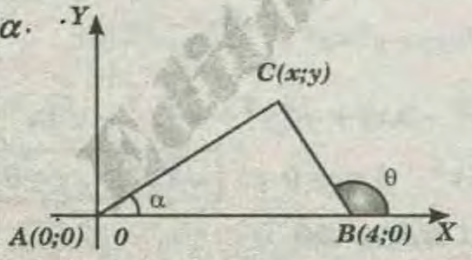
* (I) = (II) :

$$\frac{4x-2y^2}{x} = \frac{x^2+y^2}{y}$$

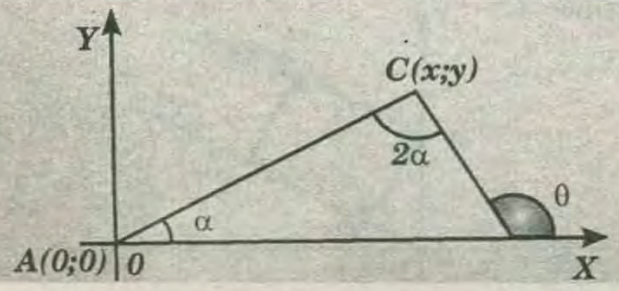
$$\Rightarrow 4xy - 2y^2 = x^3 + xy^2 \Rightarrow \boxed{0 = x^3 + xy^2 - 4xy + 2y^2}$$

PROBLEMA 21 :

En la siguiente figura, hallar el ***L.G.*** que describe el punto ***C(x; y)***, sabiendo que el ángulo θ es igual a 3α.



RESOLUCIÓN :



* Por dato : $\theta = 3\alpha$

* Por propiedad :

Un ángulo externo = suma de los ángulos internos no adyacentes. $\Rightarrow \sphericalangle ACB = 2\alpha$

* De la figura : $m_{\overline{AC}} = tg\alpha \Rightarrow \frac{y}{x} = tg\alpha$....(I)

* Usando el fórmula del $\sphericalangle$ entre dos rectas :

$$tg2\alpha = \frac{m_{\overline{BC}} - m_{\overline{AC}}}{1 + m_{\overline{BC}} \times m_{\overline{AC}}} \Rightarrow tg2\alpha = \frac{\frac{y}{x-4} - \frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x-4}\right)\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\Rightarrow tg2\alpha = \frac{\frac{xy - xy + 4y}{x(x-4)}}{\frac{x(x-4) + y^2}{x(x-4)}} \Rightarrow tg2\alpha = \frac{4y}{x^2 - 4x + y^2} \quad \text{.....(II)}$$

*Por fórmula del $\sphericalangle$ doble: $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$ .....(III)

* (I) en (III):

$$tg2\alpha = \frac{\frac{2y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}} = \frac{\frac{2y}{x}}{\frac{x^2 - y^2}{x^2}} = \frac{2yx^2}{x\left(x^2 - y^2\right)}$$

$$\Rightarrow tg2\alpha = \frac{2yx}{\left(x^2 - y^2\right)} \quad \text{.....(IV)}$$

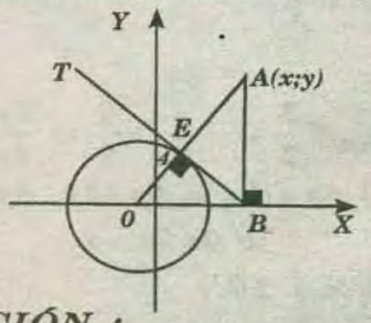
* (II)=(IV) :

$$\frac{4y}{x^2 - 4x + y^2} = \frac{2yx}{\left(x^2 - y^2\right)} \Rightarrow 2x^2 - 2y^2 = x^3 - 4x^2 + xy^2$$

$$\Rightarrow \boxed{0 = x^3 + xy^2 - 6x^2 + 2y^2}$$

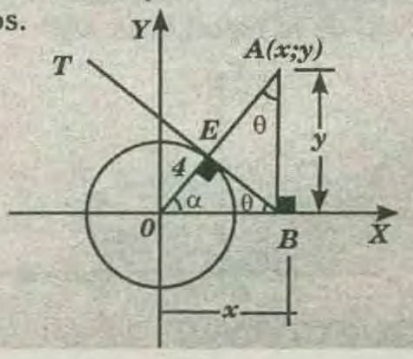
PROBLEMA 22 :

En la siguiente figura se tiene una circunferencia de radio igual a ***4*** unidades. Hallar el ***L.O.*** que describe el punto ***A***.



RESOLUCIÓN :

Dos triángulos son semejantes cuando tienen los mismos ángulos.



$\Rightarrow \triangle OEB \sim \triangle OAB$

$$\frac{x}{\overline{OA}}=\frac{4}{x} \Rightarrow x^2=4\sqrt{x^2+y^2}$$

* Elevando al cuadrado :

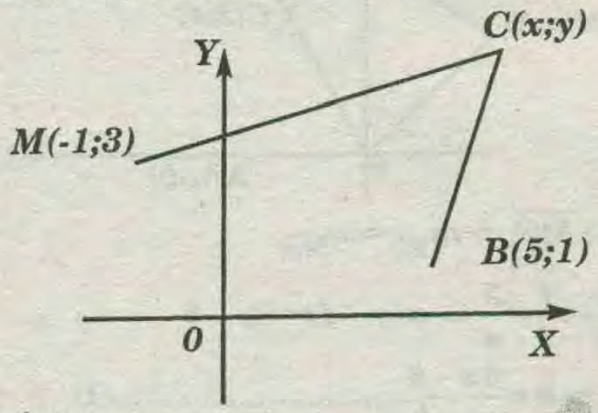
$$x^4=16(x^2+y^2) \Rightarrow x^4=16x^2+16y^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x^4-16x^2-16y^2=0}$$

PROBLEMA 23 :

Dos de los vértices de un triángulo son los puntos $A(-1;3)$ y $B(5;1)$. Halle la ecuación del *L.G.* del tercer vértice $C(x;y)$ que se mueve de tal manera que la pendiente del lado $\overline{AC}$ es siempre el doble de la pendiente del lado $\overline{BC}$

RESOLUCIÓN :



* Por dato :

$$m_{\overline{AC}}=2m_{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{y-3}{x+1}=\frac{2y-2}{x-5} \Rightarrow \frac{y-3}{x+1}=\frac{2y-2}{x-5}$$

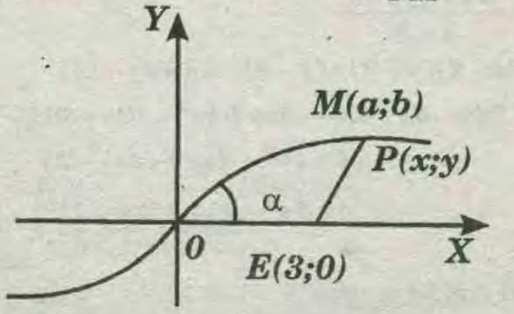
$$\Rightarrow (y-3)(x-5)=(2y-2)(x+1)$$

$$\Rightarrow yx-5y-3x+15=2xy-2x+2y-2$$

$$\Rightarrow \boxed{0=xy+x+7y-17}$$

PROBLEMA 24 :

En la siguiente figura hallar el *L.G.* que describe el punto $P(x;y)$. La ecuación de la curva es $x=y^3$, si se cumple la siguiente condición : $\frac{EP}{PM}=2$



RESOLUCIÓN :

Utilizando la condición : $\frac{EP}{PM}=2$

ABSCISAS :	ORDENADAS :
$\frac{x-3}{a-x}=2$	$\frac{y-0}{b-y}=0$
$\Rightarrow x-3=2a-2x$	$\Rightarrow y=2b-2y$
$\Rightarrow \frac{3x-3}{2}=a$ .....(I)	$\Rightarrow \frac{3y}{2}=b$ .....(II)

$\Rightarrow M(a;b) \in$ curva : $a=b^3$ .....(III)

* (I) y (II) en (III) :

$$\frac{3x-3}{2}=\left(\frac{3y}{2}\right)^3 \Rightarrow \frac{3x-3}{2}=\frac{27y^3}{8}$$

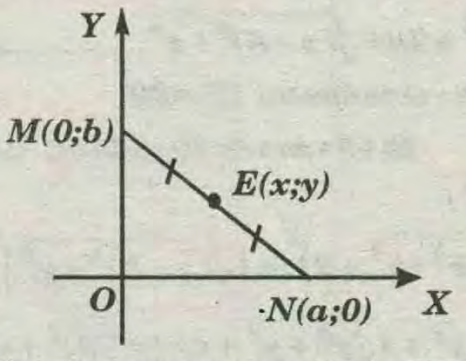
$$\Rightarrow 12x-12=27y^3 \Rightarrow 4x-4=9y^3$$

$$\Rightarrow \boxed{0=9y^3-4x+4}$$

PROBLEMA 25 :

Un segmento $\overline{NM}$ de 8 unidades de longitud apoya su extremo 'N' en el eje 'X' y su extremo 'M' en el eje 'Y'. Hallar el *L.G.* que describe el punto medio de $\overline{NM}$.

RESOLUCIÓN :



* Como $E(x;y)$ es un punto medio de $\overline{NM}$:

$$x=\frac{a+0}{b+0} \Rightarrow 2x=a \text{ .....(I)}$$

$$y=\frac{b+0}{b+0} \Rightarrow 2y=b \text{ .....(II)}$$

* Por dato :

$$\left|\overline{NM}\right|=8 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2=8}$$

* Elevando al cuadrado ambos extremos :

$$a^2+b^2=8 \text{.....(III)}$$

* (I) y (III) en (III):

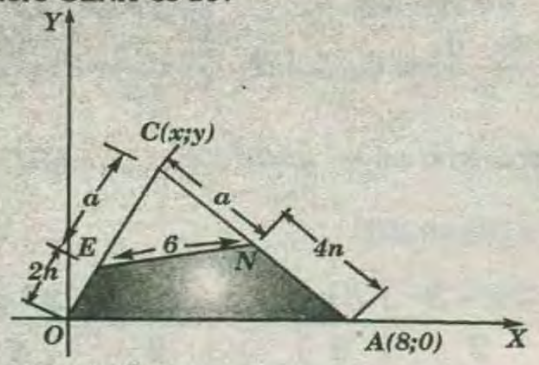
$$(2x)^2+(2y)^2=8$$

$$\Rightarrow 4x^2+4y^2=8$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2-2=0}$$

PROBLEMA 26 :

En la siguiente figura hallar el **L.G.** que describe el punto $C(x;y)$. Se sabe que el perímetro del cuadrilátero **OENA** es **20**.



RESOLUCIÓN :

* De la figura $\overline{|OC|}=a+2n$

$$\sqrt{x^2+y^2}=a+2n \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}-2n=a \quad .....(I)$$

* De la figura :

$$\overline{|AC|}=a+4n \Rightarrow \sqrt{(x-8)^2+y^2}=a+4n$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-8)^2+y^2}-4n=a \quad .....(I)$$

*(I)=(II) :

$$\sqrt{x^2+y^2}-2n=\sqrt{(x-8)^2+y^2}-4n$$

$$\sqrt{x^2+y^2}+2n=\sqrt{(x-8)^2+y^2} \quad .....(III)$$

* Por dato : el perímetro $\square=20$

$$2n+6+4n+8=20 \Rightarrow 6n=6 \Rightarrow n=1$$

*en (III) :

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}+2\right)^2=\left(\sqrt{(x-8)^2+y^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+4\sqrt{x^2+y^2}+4=(x-8)^2+y^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+4\sqrt{x^2+y^2}+4=x^2-16x+64+y^2$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{x^2+y^2}+4=-16x+64$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}+1=-4x+16$$

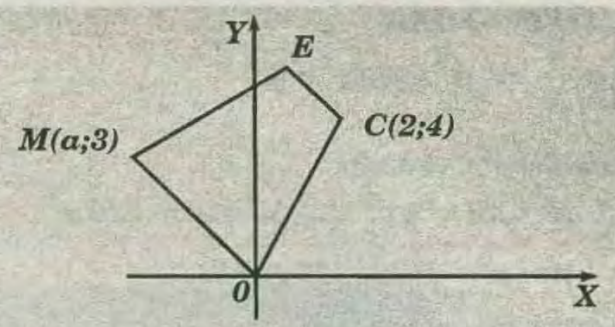
$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=(-4x+15)^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=16x^2-120x+225$$

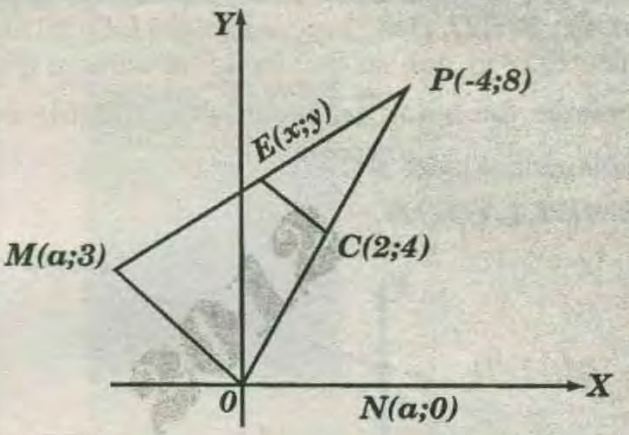
$$\Rightarrow \boxed{0=15x^2-y^2-120x+225}$$

PROBLEMA 27 :

En la siguiente figura se tiene un trapecio. Hallar el **L.G.** que describe el punto **'E'**. El lado $\overline{OC}$ y el lado $\overline{ME}$ se prolongan hasta cortarse en $P(4;8)$.



RESOLUCIÓN :



$$\overline{EC} \parallel \overline{MO} \Rightarrow m_{\overline{EC}}=m_{\overline{MO}}$$

$$\Rightarrow \frac{y-4}{x-2}=\frac{3}{a} \Rightarrow a(y-4)=3x-6$$

$$\Rightarrow a=\frac{3x-6}{y-4} \quad .....(I)$$

* M; E; P son colineales :

$$m_{\overline{MP}}=m_{\overline{EP}} \Rightarrow \frac{-5}{a-4}=\frac{y-8}{x-4}$$

$$\Rightarrow -5x+20=(a-4)(y-8) \Rightarrow \frac{-5x+20}{y-8}=a-4$$

$$\Rightarrow \frac{-5x+20}{y-8}+4=a \Rightarrow \frac{-5x+20+4(y-8)}{y-8}=a$$

$$\Rightarrow \frac{-5x+20+4y-32}{y-8}=a \Rightarrow \frac{-5x+4y-12}{y-8}=a \quad ...(II)$$

* (I)=(II) :

$$\frac{3x-6}{y-4}=\frac{-5x+4y-12}{y-8}$$

$$\Rightarrow (3x-6)(y-8)=(y-4)(-5x+4y-12)$$

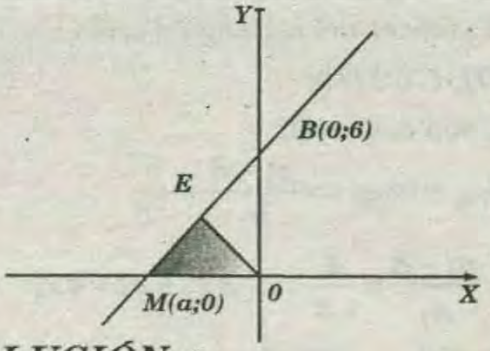
$$\Rightarrow 3xy-24x-6y+48=-5xy+4y^2-12y+20x-16y+48$$

$$\Rightarrow 0=4y^2-8xy+44x-22y$$

$$\Rightarrow \boxed{0=2y^2-4xy+22x-11y}$$

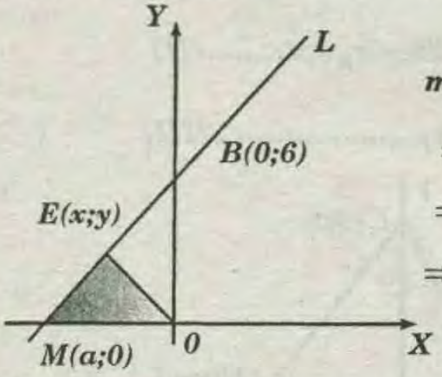
PROBLEMA 28 :

En la siguiente figura hallar el **L.G.** que describe el punto **'E'**. Se sabe que el área del triángulo **MEO** es **6** unidades cuadradas.



RESOLUCIÓN :

A; E; B son colineales .



$$m_{\overline{MB}} = m_{\overline{EB}}$$

$$\Rightarrow \frac{-6}{a} = \frac{y-6}{x}$$

$$\Rightarrow -6x = a(y-6)$$

$$\Rightarrow \frac{-6x}{y-6} = a \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Por dato : Area $\triangle MEO = 6$

$$6 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ a & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow 12 = |-ay|$$

(+) (−)

$12 = -ay$

$\Rightarrow -12 = ay$

$\Rightarrow \frac{-12}{y} = a \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$

$12 = ay \Rightarrow$ NO CUMPLE

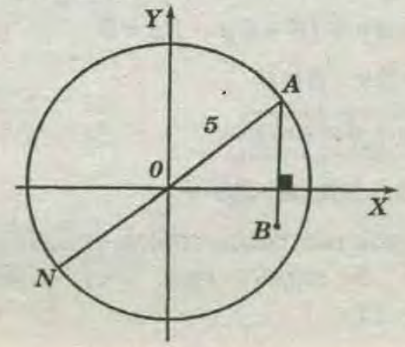
$\Rightarrow (I) = (II)$:

$$\frac{-6x}{y-6} = \frac{-12}{y} \Rightarrow -6xy = -12y + 72 \Rightarrow -3xy = -6y + 36$$

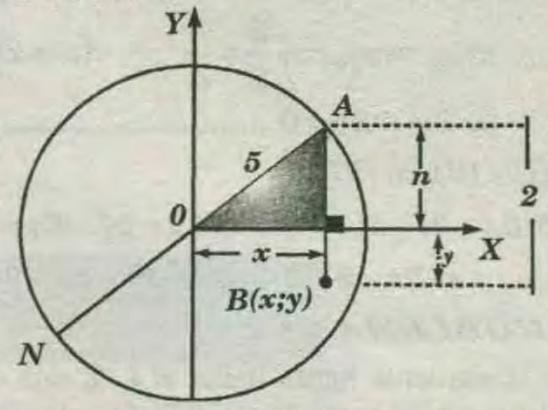
$$\Rightarrow -xy = -2y + 12 \Rightarrow \boxed{0 = xy - 2y + 12}$$

PROBLEMA 29 :

En la siguiente figura hallar el ***L.G.*** que describe el punto **'B'**. La longitud del segmento $\overline{AB}$ es *2* unidades. Se sabe que el radio de la circunferencia es *5* y que $\overline{AB}$ es vertical.



RESOLUCIÓN :



* Colocando las longitudes a la figura.

* ***De la figura*** : En el triángulo rectángulo sombreado: Por Pitágoras.

$$25 = x^2 + n^2 \Rightarrow 25 - x^2 = n^2 \Rightarrow \sqrt{25 - x^2} = n \ldots (I)$$

* De la figura :

$$AB = 2 \Rightarrow n - y = 2 \Rightarrow n = 2 + y \ldots . (II)$$

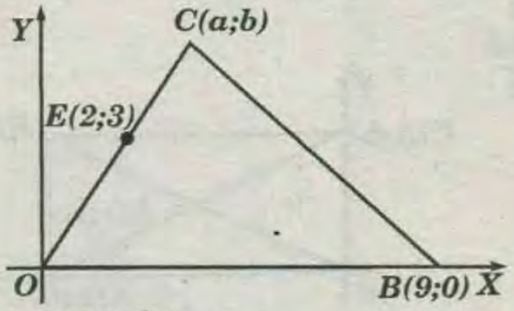
$\Rightarrow (I) = (II)$:

$$\sqrt{25 - x^2} = 2 + y \Rightarrow \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 = (2+y)^2$$

$$\Rightarrow 25 - x^2 = 4 + 4y + y^2 \Rightarrow 0 = x^2 + y^2 + 4y - 21$$

PROBLEMA 30 :

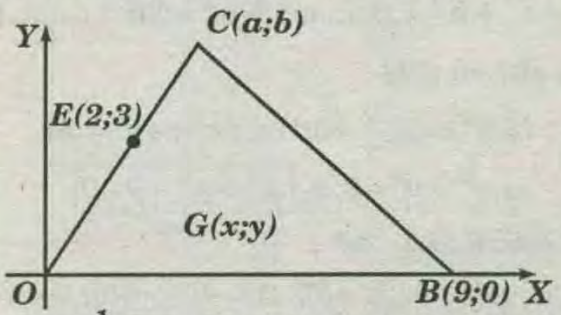
En la siguiente figura hallar el ***L.G.*** que describe, el baricentro del triángulo *OCB*.



RESOLUCIÓN :

Sea $G(x; y)$: baricentro

El baricentro siempre está en el triángulo. Por propiedad del baricentro :



$$x = \frac{1}{3}(0 + a + 9) \Rightarrow 3x - 9 = a \ldots . (I)$$

$$y = \frac{1}{3}(0 + b + 0) \Rightarrow 3y = b \ldots\ldots\ldots (II)$$

O.E.C son colineales :

$$m_{\overline{OE}}=m_{\overline{OC}} \Rightarrow \frac{3}{2}=\frac{b}{a} \Rightarrow 3a=2b$$

$$\Rightarrow 3a-2b=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

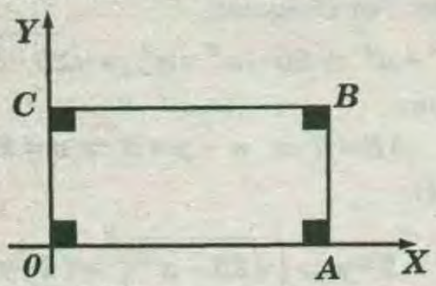
* *(I)* y *(II)* en *(III)* :

$$3(3x-9)-2(3y)=0 \Rightarrow 9x-27-6y=0$$

$$\Rightarrow 3x-9-2y=0 \Rightarrow \boxed{3x-2y-9=0}$$

PROBLEMA 31 :

En la siguiente figura hallar el ***L.G.*** que describe el punto en el cual se cortan las diagonales del rectángulo ***ABCO***. Se sabe que la longitud de la diagonal es ***6***.



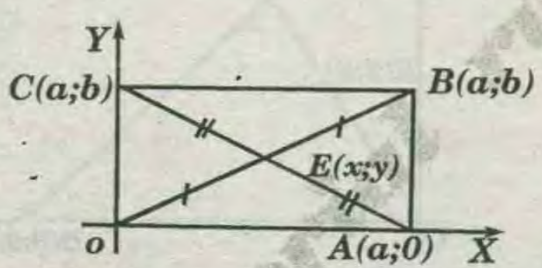
RESOLUCIÓN :

E(x; y): es el punto medio de cada diagonal:

'E' es punto medio de $\overline{CA}$:

$$x=\frac{0+a}{2} \Rightarrow 2x=a \ldots\ldots\ldots (I)$$

$$y=\frac{b+0}{2}$$



$$\Rightarrow 2y=b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

Por dato : $|\overline{OB}|=6$

$$\sqrt{a^2+b^2}=6 \Rightarrow a^2+b^2=36 \ldots\ldots\ldots (III)$$

* *(I)* y *(II)* en *(III)* :

$$(2x)^2+(2y)^2=36 \Rightarrow 4x^2+4y^2=36$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=9 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2-9=0}$$

PROBLEMA 32 :

Se tiene el triángulo ***ABC. A(– 4;0), B(6; 0), C(0; 8)***. Hallar el ***L.G.*** del centro del rectángulo que esta dentro del triángulo. Un vértice del rectángulo toca al lado $\overline{AC}$, otro vértice del rectángulo toca al lado $\overline{BC}$ y 2 vértices del rectángulo están en el eje *"X"*.

RESOLUCIÓN :

C; N; B, son colineales :

$$m_{\overline{CN}}=m_{\overline{CB}} \Rightarrow \frac{y_1-8}{x_1}=\frac{8}{-6}$$

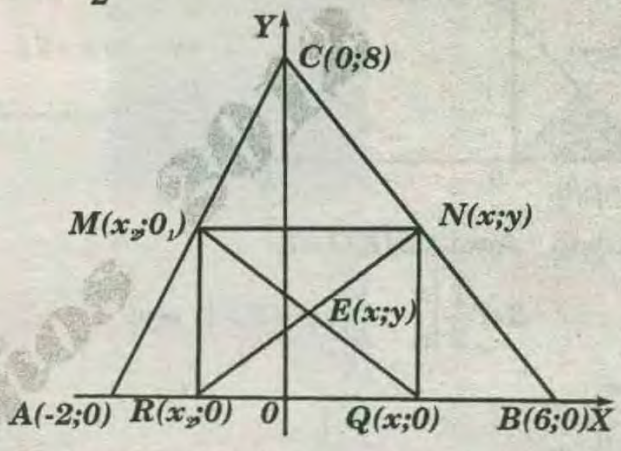
$$\Rightarrow \frac{y_1-8}{x_1}=\frac{4}{-3} \Rightarrow -3y_1+24=4x_1$$

$$4x_1+3y_1-24=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

E*(x; y)*: es el punto medio de las diagonales :

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \Rightarrow 2x-x_2=x_1 \ldots\ldots (II)$$

$$y=\frac{y_1}{2} \Rightarrow 2y=y_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$



A; M; C son colineales :

$$m_{\overline{AM}}=m_{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{y_1}{x_2+4}=\frac{8}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{y_1}{x_2+4}=2 \Rightarrow y_1=2x_2+8 \ldots\ldots\ldots\ldots (IV)$$

* *(III)* en *(IV)* :

$$2y=2x_2+8 \Rightarrow y=x_2+4$$

$$\Rightarrow y-4=x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (V)$$

* *(V)* en *(II)*:

$$2x-(y-4)=x_1$$

$$\Rightarrow 2x-y+4=x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (VI)$$

**(III)* y *(VI)* en *(I)*: $4(2x-y+4)+3(2y)-24=0$

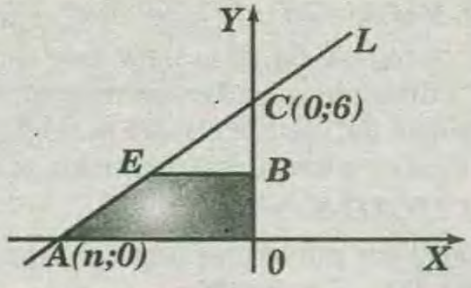
$\Rightarrow 8x-4y+16+6y-24=0$

$\Rightarrow 8x+2y-8=0$

$\Rightarrow \boxed{4x+y-4=0}$

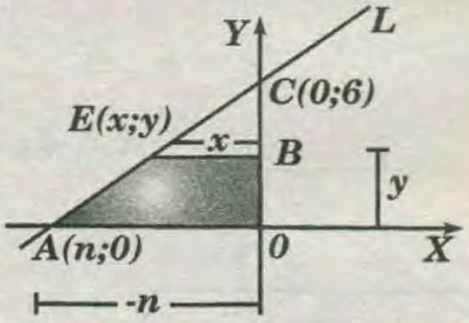
PROBLEMA 33 :

En la siguiente figura hallar el ***L.G.*** que describe el punto *'E'*. Se sabe que el área del trapecio *AOBE* es *12*.



RESOLUCIÓN :

A; E; C son colineales :



$$m_{\overline{AE}}=m_{\overline{EC}} \Rightarrow \frac{y}{x-n}=\frac{y-6}{x}$$

$$\Rightarrow yx=(x-n)(y-6) \Rightarrow yx=xy-6x-ny+6n$$

$$\Rightarrow 6x=n(-y+6) \Rightarrow \frac{6x}{(-y+6)}=n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Por dato : Area $\square=12$

$$\left(\frac{-n-x}{2}\right)y=12 \Rightarrow -ny-xy=24 \Rightarrow -ny=24+xy$$

$$\Rightarrow n=\frac{24+xy}{-y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

*(I)=(II):

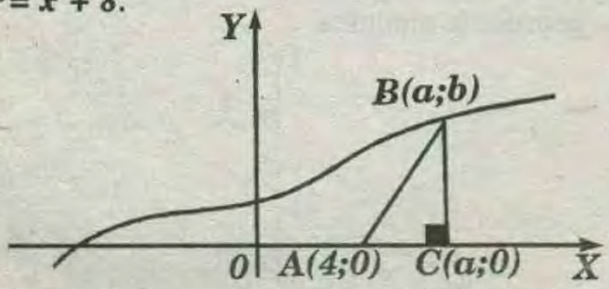
$$\frac{6x}{-y+6}=\frac{24+xy}{-y} \Rightarrow -6xy=(-y+6)(24+xy)$$

$$\Rightarrow -6xy=-24-xy^2+144+6xy$$

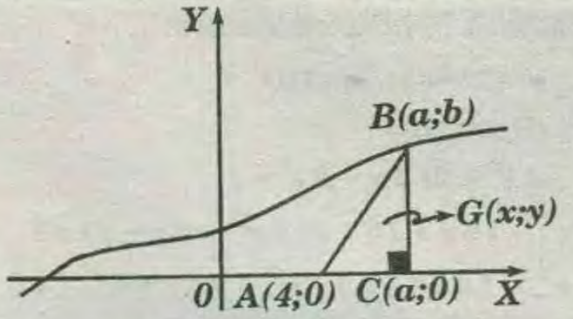
$$\Rightarrow xy^2-12xy+24y-144=0$$

PROBLEMA 34 :

En la siguiente figura hallar el ***L.G.*** que describe el baricentro del triángulo ***ABC***. La ecuación de la curva es $y^3=x+8$.



RESOLUCIÓN :



$G(x;y)$: baricentro del $\triangle ABC$

$$x=\frac{1}{3}(4+a+a) \Rightarrow 3x=4+2a \Rightarrow \frac{3x-4}{2}=a \ldots\ldots (I)$$

$$y=\frac{1}{3}(0+b+0) \Rightarrow 3y=b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* En la figura: $B(a;b) \in$ a la curva: $b^3=a+8 \ldots\ldots (III)$

$\Rightarrow$ *(I)* y *(II)* en *(III)* :

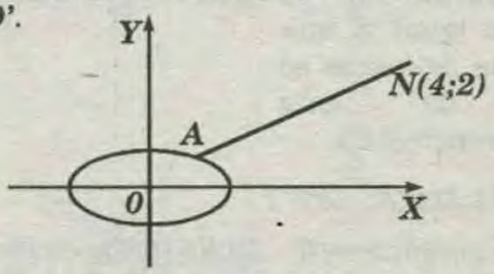
$$(3y)^3=\frac{3x-4}{2}+8 \Rightarrow 27y^3=\frac{3x-4}{2}+8$$

$$\Rightarrow 54y^3=3x-4+16 \Rightarrow 54y^3-3x-12=0$$

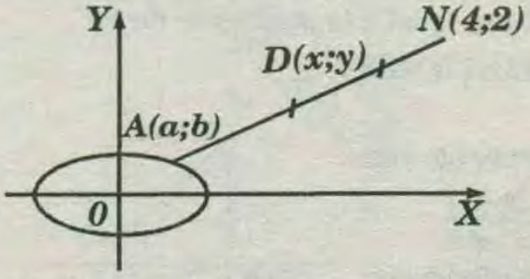
$$\Rightarrow \boxed{18y^3-x-4=0}$$

PROBLEMA 35 :

En la siguiente figura la ecuación de la curva es $x^2+2y^2=1$. El punto *'D'* divide al segmento $\overline{AN}$ en una razón igual a *1* . Hallar el ***L.G.*** que describe el punto *'D'*.



RESOLUCIÓN :



* Como *'D'* divide a $\overline{AN}$ en una razón igual a *1*; esto significa que *'D'* es punto medio de $\overline{AN}$. $D(x;y)$: punto medio de $\overline{AN}$:

$$x=\frac{a+4}{2} \Rightarrow 2x-4=a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$y=\frac{b+2}{2} \Rightarrow 2y-2=b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* En la figura : $A(a;b) \in$ a la curva:

$$a^2+2b^2=1 \ldots\ldots\ldots (III)$$

* (I) y (II) en (III) :

$$(2x-4)^2+2(2y-2)^2=1$$

$$\Rightarrow 4x^2-16x+16+2(4y^2-8y+4)=1$$

$$\Rightarrow 4x^2-16x+16+8y^2-16y+8-1=0$$

$$\Rightarrow \boxed{4x^2+8y^2-16x-16y+23=0}$$

PROBLEMA 36 :

Un punto se mueve de tal manera que su distancia al origen es siempre igual a **3.**

Hallar la ecuación de su lugar geométrico y dar su interpretación geométrica.

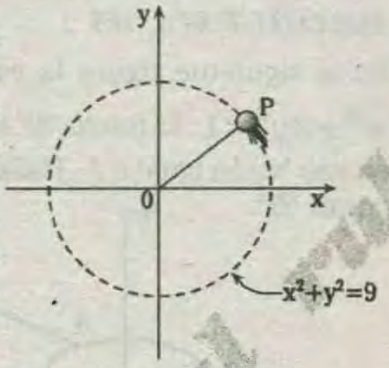
RESOLUCIÓN :

* Sea $P(x;y)$ un punto del lugar geométrico la condición es : $|\overline{PO}|=3$.

La ecuación de su lugar geométrico será:

$$\sqrt{x^2+y^2}=3 \rightarrow \boxed{x^2+y^2=9}$$

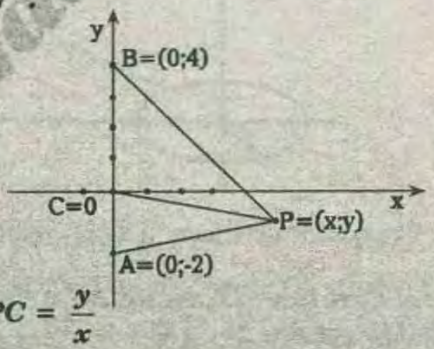
* Su interpretación geométrica es, que si el punto P se mueve de modo que su distancia a un punto fijo es siempre igual a una constante ,entonces se trata de una circunferencia *(LG)*.



PROBLEMA 37 :

Dado los puntos $a=(0;-2), B=(0;4)$ y $c=(0;0)$ hallar la ecuación del lugar geométrico *(L.G.)* de los puntos $P=(x;y)$ tales que el producto de las pendientes de PA y PB sea igual a la pendiente de PC .

RESOLUCIÓN :



m_1=pendiente de $PA = \dfrac{y+2}{x}$

m_2=pendiente de $PB = \dfrac{y-4}{x}$

m_3=pendiente de $PC = \dfrac{y}{x}$

* De:

$$m_1 \times m_2 = m_3 \rightarrow \frac{y+2}{x} \times \frac{y-4}{x} = \frac{y}{x}$$

$$\rightarrow (y+2)(y-4)=xy \rightarrow \boxed{y^2-xy-2y-8=0}$$

PROBLEMA 38 :

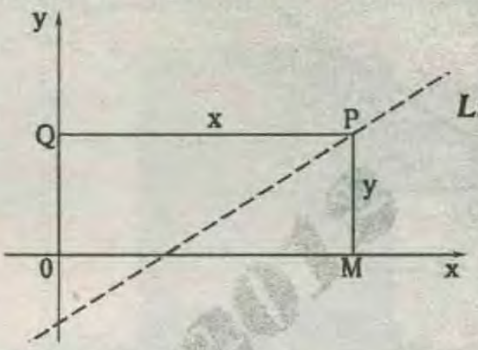
Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje "Y" y disminuida en **5** es siempre igual al doble de su distancia del eje "X". Hallar la ecuación de su lugar geométrico y dar su interpretación geométrica.

RESOLUCIÓN :

* Sea $P(x;y)$ un punto del lugar geométrico por condición : $PQ-5=2\times PM$

* Del gráfico: $x-5=2y \rightarrow 0=x-2y-5$

La ecuación resultante nos dice que el **L.G.** es una recta.



* EL punto "P" se mueve a lo largo de la recta "L" cumpliendo la condición dada.

PROBLEMA 39 :

Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P=(x;y)$ equidistantes de $A=(2;2)$ y $B=(6;-8)$.

RESOLUCIÓN :

$$d(P;A)=d(P;B)$$

$$\rightarrow d^2(P;A)=d^2(P;B) \rightarrow (x-2)^2+(y-2)^2 = (x-6)^2+(y+8)^2$$

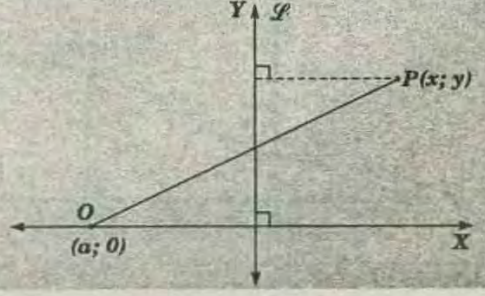
* Desarrollando y simplificando: $2x-5y-23=0$ resultando el lugar geométrico una recta.

PROBLEMA 40 :

En un plano se ubica una recta $\mathcal{L}$ y O un punto exterior a ella (ambos son fijos), sea P un punto del plano tal que el cociente entre la distancia de P al punto dado y la distancia de P a la recta es una constante mayor que la unidad , halle el lugar geométrico de P.

RESOLUCIÓN :

* Para hallar lugares geométricos podemos hacer uso de la geometría analítica.



* Sea $(a;0)$ las coordenadas del punto fijo O y el eje de ordenadas la recta $\mathscr{L}$ dada.

* P es un punto genérico.

* De la condición del problema :

$$\frac{OP}{x}=K \ (K \text{ es constante mayor que } 1)$$

* Distancia entre dos puntos :

$$OP=\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}$$

* Entonces $\frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{x}=K \rightarrow \sqrt{(x-a)^2+y^2}=xK$

* Elevando al cuadrado $(x-a)^2+y^2=x^2K^2$

* se obtiene : $\underbrace{(1-K^2)}_{<0}x^2=2ax-a^2+y^2=0$

* Sea : $K^2-1=n$, se obtiene : $a^2=nx^2+2ax-y^2$ (n: constante) multiplicando

$$\left(\frac{1}{n}\right): \frac{a^2}{n}=x^2+\frac{2ax}{n}-\frac{y^2}{2}$$

* formando cuadrados :

$$\frac{a^2}{n}+\frac{a^2}{n^2}=x^2+\frac{2ax}{n}+\frac{a^2}{n^2}-\frac{y^2}{n} \rightarrow \boxed{\frac{a^2}{n}+\frac{a^2}{n^2}=\left(x+\frac{a}{n}\right)^2-\frac{y^2}{n}}$$

* Como $\frac{a^2}{n}+\frac{a^2}{n^2}$ es constante , la ecuación obtenida corresponde a una hipérbola que es el lugar geométrico de P.

PROBLEMA 41 :

Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P=(x;y)$ cuya distancia a la recta $L: y+4=0$ sea igual a dos tercios de su distancia al punto $(3;2)$

RESOLUCIÓN :

$$d(P;L)=\frac{2}{3}\,d(P;(3;2))$$

$$\rightarrow |y+4|=\frac{2}{3}(x-3)^2+(y-2)^2$$

$$\rightarrow \boxed{4x^2-5y^2-24x-88y-92=0}$$

PROBLEMA 42 :

Hallar la ecuación del lugar geométrico cuyos simétricos respecto del origen forman la gráfica de la ecuación : $xy^2-2x^2\ y+y=3$

RESOLUCIÓN :

* Sea P el punto cuyas coordenadas son $(x;y)$ y su simétrico respecto al origen P' cuyas coordenadas son $(-x\ ;\ -y)$.

* Entonces en la ecuación:

$$xy^2-2x^2\ y+y=3$$

* Hacemos simplemente el cambio:

$$(-x)(-y)^2-2(-x)^2\ (-y)+(-y)=3$$

* Simplificando obtenemos:

$$xy^2-2x^2\ y+y+3=0$$

PROBLEMA 43 :

Un segmento rectilíneo de longitud 6 se mueve de tal manera que uno de sus extremos permanece siempre en el eje "X" y el otro extremo en el eje "Y"; hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio de dicho segmentos.

RESOLUCIÓN :

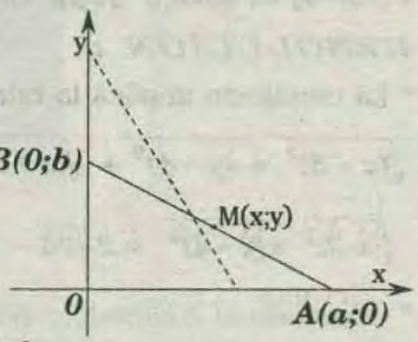
$$x=a/2 \rightarrow a=2x$$

$$y=b/2 \Rightarrow b=2y$$

$$\rightarrow d=(A;B)=6 \rightarrow d^2(A;B)=36$$

$$\rightarrow a^2+b^2=36 \rightarrow 4x^2+4y^2=36$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2=9}$$

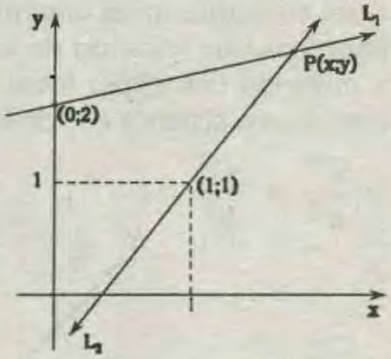


PROBLEMA 44 :

Hallar el lugar geométrico del punto $P(x;y)$ que se mueve de tal manera que la pendiente de la recta que lo une con $(0;2)$ es $1/2$ de la pendiente de la recta que lo une con $(1;1)$.

RESOLUCIÓN :

* Dato : $m_1=\frac{1}{2}m_2$



* Del gráfico:

L_1: $y-2=m_1\,(x-0)$

L_2: $y-1=m_2\,(x-1)$

* Luego tenemos:

$$\frac{y-2}{x-0}=\frac{1}{2}\left(\frac{y-1}{x-1}\right)$$

* Reduciendo obtenemos:

$$xy-3x-2y=4\ ;\ x\neq 0\ ;\ -1$$

PROBLEMA 45 :

Los extremos de la base de un triángulo son los puntos $A=(0;0)$ y $B=(3;0)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto C si este se mueve de tal manera que el ángulo en la base CAB es siempre igual al doble del ángulo en la base CBA.

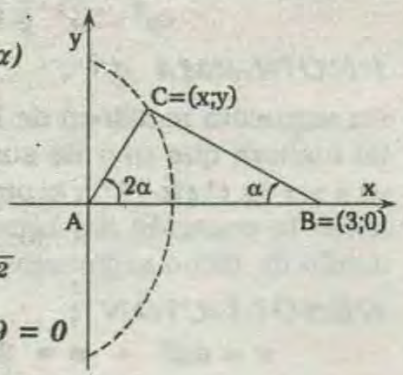
RESOLUCIÓN :

$$\tan 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$\rightarrow \tan(2\alpha) = y/x$

$\rightarrow \tan\alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$

$\rightarrow \tan\alpha = -y/(x-3)$



*En (I) :

$$\frac{y}{x} = \frac{2(-y/(x-3))}{1-(-y/(x-3))^2}$$

$$\rightarrow 3x^2 - 12x - y^2 + 9 = 0$$

PROBLEMA 46 :

Halle el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a los puntos *(3;4)* y *(–3;–4)* es igual a $2\sqrt{26}$ Graficando la ecuación.

RESOLUCIÓN :

* La condición implica la relación:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y+4)^2} = 2\sqrt{26}$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = 2\sqrt{26} - \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2}$$

* Elevando al cuadrado y simplificando.

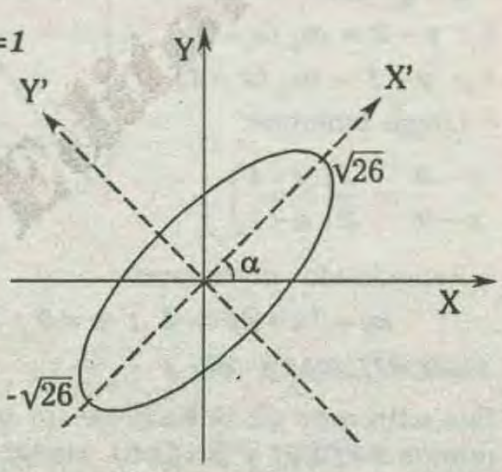
$$3x + 4y + 26 = \sqrt{26}\sqrt{x^2 + 6x + y^2 + 8y + 25}$$

* Elevando al cuadrado nuevamente y simplificando se tiene:

$$17x^2 + 10y^2 - 24xy = 26$$

* Por los datos sabemos que la elipse respectiva tiene su centro en el origen y que por tanto si hacemos una rotación de ejes de manera que el eje x´coincida con el eje focal, la ecuación referida a este nuevo sistema es de la forma:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$



* Es decir, la forma canónica o más simple de las ecuaciones de una elipse. Como uno de los focos es *(3;4)*, entonces el ángulo α de rotación es el correspondiente *A*.

$$\tan\alpha = \frac{4}{3} \text{ ó } sen\,\alpha = \frac{4}{5} \text{ y } \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

* Obsérvese que no es necesario halle el valor de a .Las ecuaciones de transformación son:

$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' \; ; \; y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'$$

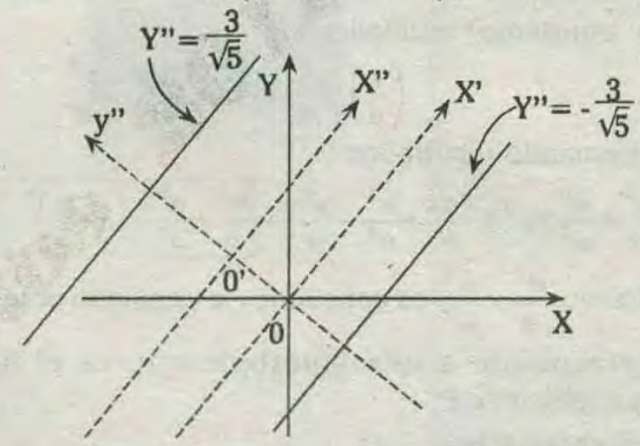
* Que reemplazadas en la ecuación obtenida nos da:

$$x'^2 + 26y'^2 = 26 \rightarrow x'^2 + \frac{y'^2}{26} = 1$$

* Elipse con eje mayor en el eje x' e igual a $2\sqrt{26}$ y eje menor en y' e igual a *2*. La gráfica aparece en la figura.

* Se obtiene $y''^2 = 9/5$, ecuación que representa dos rectas paralelas al eje x''(caso excepcional de una parábola).

$$y''_1 = \frac{3}{\sqrt{5}} \; ; \; y''_2 = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$



PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Hallar la ecuación del lugar geométrico que escribe el punto medio del segmento $\overline{AB}$ cuando *A (–2;–2)* y *B* se mueve sobre la curva de ecuación $x^2 = y$

A) $x^2 + 4x - y = 1$ *B)* $3x^2 + y^2 + y = 1$ *C)* $x^2 + y^2 = 16$
D) $x^2 + y^2 - x - y = 3$ *E)* $2x^2 + 4x - y + 1 = 0$

02 ¿Qué lugar geométrico describe el centro de una circunferencia móvil que siempre es tangente a una recta y a otra circunferencia fija?.

A) Mediatriz ***B) Circunferencia*** ***C) Parábola***
D) Elipse ***E) Hipérbola***

03 Hallar el lugar geométrico de los puntos *"P"*, tales que el punto medio del segmento que une *"P"* con el origen equidista del eje *"Y"* y el punto *(1;1)*.

A) $x^2 - 4y - 4x + 8 = 0$ *B)* $x^2 - 2y - 2x + 2 = 0$
C) $y^2 - 4y - 4x + 8 = 0$ *D)* $y^2 - 2y - 2x + 2 = 0$
E) $y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$

04 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos equidistantes de $A(-2;3)$ y $B(3;-1)$

A) $10x + 8y - 3 = 0$ B) $5x + 4y + 4 = 0$
C) $10y - 8x - 3 = 0$ D) $10x - 8y + 3 = 0$
E) $5y - 4x + 4 = 0$

05 Desde el punto $A(-8;6)$ se han trazado todos los rayos posibles hasta su intersección con el eje de coordenadas . hallar la ecuación del *L.G.* de sus puntos medios.

A) $x = -2$ B) $x = -4$ C) $x = 4$ D) $x = y$ E) $y = 2$

06 Hallar la ecuación del *L.G.* de los puntos cuyas distancias al punto $F(0;3)$ sean iguales a sus distancias a la recta $y + 3 = 0$

A) $x^2 = y$ B) $y^2 = x$ C) $y = 12x2$
D) $y = 8x$ E) $x^2 = 12y$

07 Hallar la ecuación del *L.G.* de los puntos $(x;y)$ que distan del punto $(2;1)$ una distancia igual a 3.

A) $(x-2)^2 = y$ B) $(x^2 - y)^2 = 1$ C) $(x-2)^2 + (y-1) = 32$
D) $x^2 + y^2 = 3$ E) $x = 2y$

08 Por el punto $A(2;-1)$ pasa una familia de rectas y desde $B(2;-5)$ se traza una perpendicular a cada recta de la familia que pasa por A. hallar la ecuación del lugar geométrico.

A) $x^2 + (y+2)^2 = 13$ B) $x^2 + y^2 = 13$
C) $x^2 + (y-2)^2 = 9$ D) $x^2 = y$

09 El segmento AB es tal que A es el punto $(2;2)$ mientras que B se mueve de tal modo que está sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios.

A) $x^2 + y^2 + x + y = -7/4$
B) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = -7/4$
C) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = -7/4$
D) $x^2 + y^2 - x - y = -7/4$
E) $x^2 + y^2 - 3x - 3y = -7/4$

10 Hallar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia tangente a la recta $L: y + 3 = 0$ y la circunferencia.

$$x^2 + y^2 = 4$$

A) $x^2 + y = 25$ B) $x^2 = 10y$ C) $x^2 - 10y - 25 = 0$
D) $x^2 = 8y$ E) $x^2 + y^2 = 22$

11 Halle el lugar geométrico de los puntos que dividen a las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ en la relación $1/2$.

A) $x^2 + 4y^2 = 24$ B) $x^2 + 4y^2 = 30$ C) $x^2 + 4y^2 = 18$
D) $x^2 + 4y^2 = 16$ E) $x^2 + 8y^2 = 30$

12 Sea el triángulo variable ABP , donde $A(0;0)$ y $B(4;0)$. si sus ángulos interiores α y β adyacentes a la base $\overline{AB}$ son tales que $\alpha + \beta = \pi/4$, entonces el lugar geométrico de los vértices *"P"* que están en el primer cuadrante satisfacen la ecuación.

A) $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 9 = 0$
B) $x^2 + y^2 + 4x + 4y = 0$
C) $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$
D) $x^2 - y^2 - 4 + 4y = 0$
E) $x^2 - y^2 + 2xy - 4x - 4y = 0$

13 Un segmento rectilíneo $\overline{AB}$ de longitud $20\ cm$ se mueve de tal manera que los extremos A y B se apoyan siempre sobre los ejes *"X"* y *"Y"*, respectivamente. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto $P(x;y)$ situados sobre el segmento $\overline{AB}$ a 12 cm de A.

A) $6x^2 + 8y^2 - 427 = 0$ B) $9x^2 + 4y^2 - 576 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 16 = 0$

14 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los ejes coordenados es siempre igual a 4.

A) $x = 4$ B) $y = 4$ C) $|x| + |y| = 4$
D) $x + y = 4$ E) N.A.

15 Hallar el volumen del cono recto cuyo vértice es $V = (0;\sqrt{3};0)$; cuya base es la región limitada por el lugar geométrico $x^2 + y^2 = 36$.

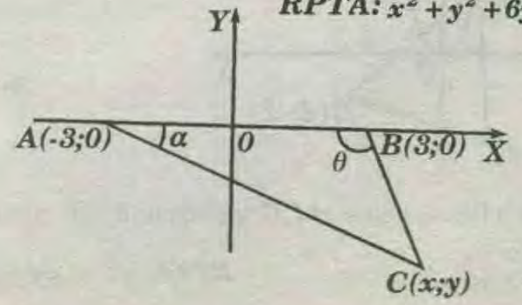
A) $5\sqrt{3}\pi$ B) $6\sqrt{3}\pi$ C) $9\sqrt{3}\pi$
D) $12\sqrt{3}\pi$ E) $18\sqrt{3}\pi$

16 En general, los punto $(m;n)$ y $(2a-m;n)$ son simétricos respecto de la recta $x = a$. Hallar la ecuación de *L.G.* de los puntos $P(x;y)$ cuyos simétricos respecto de la recta $2x + 1 = 0$ están en la gráfica de $x^2 + xy - 5 = 0$

A) $x^2 - xy + 4x - 2y - 1 = 0$ B) $x^2 - xy + 2x - y - 4 = 0$
C) $x^2 - xy - 4x + 2y - 1 = 0$ D) $x^2 + xy + 4x - 2y - 1 = 0$
E) $x^2 - xy - 2x + y + 4 = 0$

17 En la siguiente figura se sabe que : $\alpha + \theta = 135°$. Hallar el *L.G.* que describe el punto *'C'*

RPTA: $x^2 + y^2 + 6y - 9 = 0$

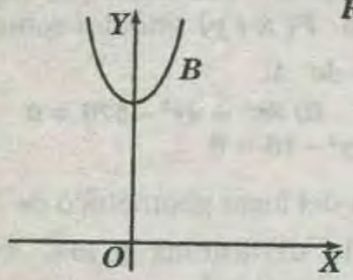


(18) Un punto *'E'*. se encuentra en el primer cuadrante, en la región limitada por el eje *'X'* y una recta *L* que forma *45°* con el eje *'X'* y que pasa por el origen. Hallar el *L.G.* que describe el punto.*'E'*, si la suma de sus distancias a la recta *L* y al eje *'X'* es *2* unidades.

RPTA : $x^2 - y^2 - 2xy + 8y - 8 = 0$

(19) En la siguiente figura el punto *'B'* está en la curva $x^2 - y + 10 = 0$. Hallar el *L.G.* que describe el punto Z, tal que $\frac{AZ}{ZN} = \frac{1}{2}$. Se sabe que *'A'* es la proyección de *'B'* sobre el eje *'Y'* .

RPTA : $9x^2 - 12y + 40 = 0$



(20) Un segmento $\overline{AB}$ de *4* unidades de longitud apoya su extremo *'A'* en el eje *'Y'* y su extremo *'B'* en el eje *'X'* .Un punto *'E'* divide al segmento $\overline{AB}$ en una razón igual a *2* . Hallar el *L.G.* que describe el punto *'E'*.

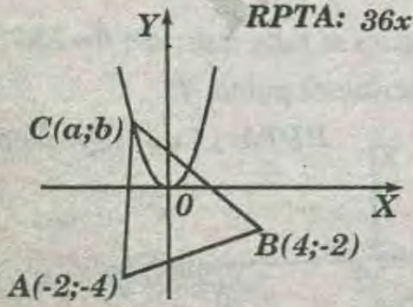
RPTA : $9x^2 + 36y^2 - 64 = 0$

(21) Se tiene un triángulo *ABC. A(–6;1), B(0;–3), C(x; y).* Por el vértice *'B'* se traza una mediana de longitud igual a *4.* Hallar el *L.G.* que describe el punto *'C'*.

RPTA: $x^2 + y^2 - 12x + 14y + 21 = 0$

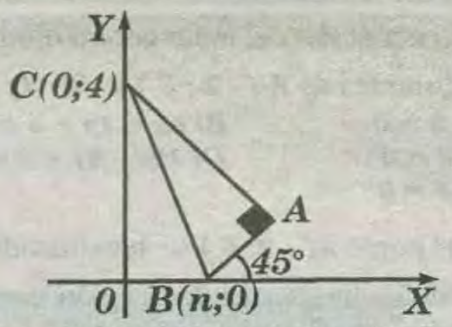
(22) En la siguiente figura se tiene la curva de ecuación $y - 4x^2 = 0$. Hallar el *L.G.* que describe el baricentro del triángulo *ABC*.

RPTA: $36x^2 - 48x - 3y + 10 = 0$



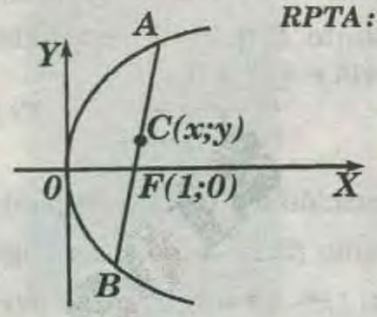
(23) En la figura hallar el *L.G.*que describe el punto *'A'*.

RPTA: $y^2 - 4y + xy = 0$



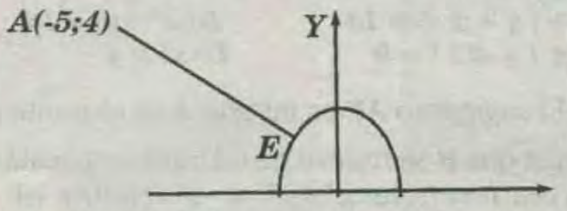
(24) En la siguiente figura hallar el *L.G.* que describe el punto *C(x; y)*. La ecuación de la curva es $y^2 = 4x$; *'C'* es punto medio de $\overline{AB}$.

RPTA: $y^2 - 2x + 2 = 0$



(25) En la siguiente figura la ecuación de la curva es $2x^2 + y^2 = 4$. El punto *'M'* es punto medio de *AE*. Hallar el *L.G.* que describe el punto *'M'*.

RPTA: $4x^2 + 2y^2 + 20x - 8y + 31 = 0$



PROBLEMA 26 :

Se tiene un segmento $\overline{AB}$ de *6* unidades de longitud que apoya su extremo *'A'* en el eje *'X'* y apoya su extremo *'B'* en el eje *'Y'*. Un punto *'E'* divide al segmento $\overline{AB}$ en la razón – *2*. Hallar el *L.G.* que describe el punto *'E'*.

RPTA: $4x^2 + y^2 - 144 = 0$

PROBLEMA 27 :

Halle el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancia a las rectas

$$3x - 4y - 11 = 0 \; ; \; 3x + 4y + 5 = 0$$

sea igual a $\frac{144}{25}$.

A) Recta *B)Circunferencia* *C)Elipse*
D)Parábola *E)Hipérbola*

RESOLUCIÓN :

Hipérbola.

RPTA : "E"

TRANSFORMACION DE COORDENADAS

CAPITULO 52

OBJETIVO :

Conocer el procedimiento de como trasladar y rotar ejes de coordenadas .

INTRODUCCIÓN :

Uno de los objetivos principales de la Geometría analítica es la determinación de las propiedades de las diversas figuras geométricas .Apoyándonos en algunos de los conceptos fundamentales hemos hecho ya un estudio detallado de la recta y la circunferencia. En adelante continuaremos estas investigaciones con referencia a otras curvas, Encontraremos , sin embargo , que, a medida que progresemos en nuestro estudio, las ecuaciones de las curvas se van haciendo más y más difíciles de analizar ; por esto , se hace necesario en algunas ocasiones introducir ciertos artificios con el fin de facilitar el estudio de estas curvas , Uno de estos artificios, que nos permite simplificar las ecuaciones de muchas curvas , consiste en la transformación de coordenadas.

Hasta ahora todo lo que se ha estudiado está referido al eje «*X*» y al eje «*Y*», es decir nuestro sistema de referencia son los ejes coordenados. En este capítulo lo que haremos será cambiar nuestro sistema de referencia de dos maneras básicas , mediante una traslación de ejes y mediante una rotación de ejes.

Otra manera de cambiar el sistema de referencia es mediante una traslación y una rotación simultánea, tomados en cualquier orden. En este capítulo muchas veces se hará referencia a una ecuación de 2° grado, por lo tanto la recordaremos:

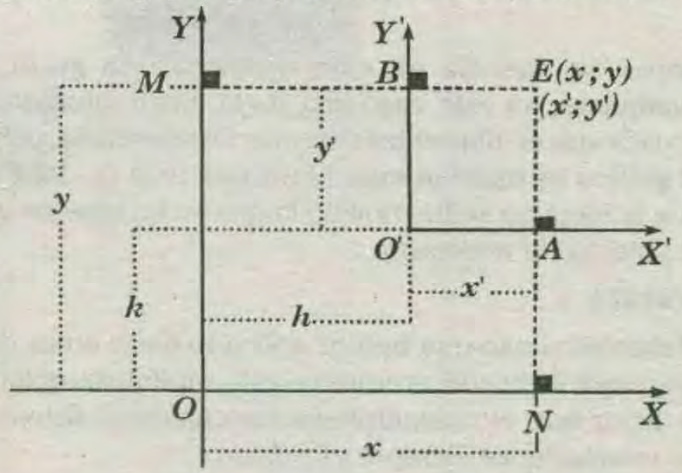
Ecuación general de 2° grado :

$$\underline{Ax^2} + \underline{Bxy} + \underline{Cy^2} + \underline{Dx} + \underline{Ey} + \underline{F} = 0$$

- F : término independiente / término constante
- $Dx + Ey$: término de 1er grado o término lineal
- Cy^2 : término de **2do** , grado
- Bxy : término de **2do** grado

TRASLACIÓN DE EJES

Es cuando se cambia el sistema de referencia. Trasladando el origen ***O(0; 0)*** a un nuevo punto ***O'(h;k)*** quedando los nuevos ejes paralelos a los ejes originales. Demostraremos las ecuaciones que nos permitan pasar del sistema inicial al final y viceversa. El origen ***O(0; 0)*** se traslada al nuevo origen ***O'(h; k)*** y tomamos un punto ***E*** de coordenadas ***(x; y)*** y ***(x'; y')*** referidos al sistema inicial y final respectivamente. El punto ***E(x; y)*** lo proyectamos a los ejes "***X***" e "***Y***" luego el mismo punto ***E(x'; y')*** lo proyectamos a los ejes ***X'*** e ***Y'*** .



Origen inicial: ***(0; 0)***

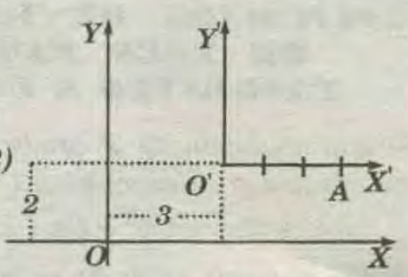
Origen final: ***O'(h; k)***

* Del gráfico:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + h \\ y &= y' + k \end{aligned}\right\} \text{ Ecuaciones de traslación}$$

Para que nos quede claro, lo que significa una traslación, tomaremos unos ejemplos sencillos :

EJEMPLO 1 :



Origen inicial : ***O(0;0)***

Origen Final : ***O'(3;2)***

⇒ ***A(6;2):*** Sistema inicial

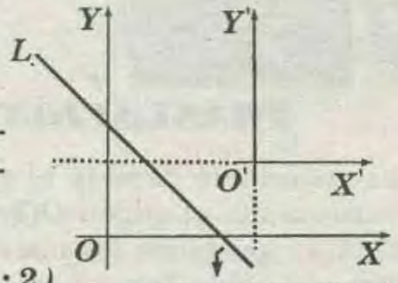
⇒ ***A(3;0):*** Sistema final

Como se aprecia en este sencillo ejemplo un mismo punto tiene diferentes coordenadas en diferentes sistemas de referencia .

EJEMPLO 2 :

Se tiene una recta $L: x+y-3=0$, luego se produce una traslación al punto $O'(4; 2)$ Hallar la ecuación de la recta L en el sistema final.

RESOLUCIÓN :



$L: x+y-3=0; O'(4;2)$

Gráfico en el sistema inicial y también en el final.

* Para pasar del sistema inicial al final usaremos las

* * ecuaciones de traslación : $x=x'+4$, $y=y'+2$

$$\Rightarrow L: x+y-3=0 \Rightarrow L: x'+4+y'+2+3=0$$

$$L: x'+y'+9=0$$

Como se aprecia en este ejemplo una gráfica cualquiera, en este caso una recta, tiene diferentes ecuaciones en diferentes sistemas de referencia, pero el gráfico es exactamente el mismo; esto se debe a que la recta no se ha movido lo que se ha movido es el sistema de referencia .

NOTA :

El razonamiento que hemos aplicado hasta antes de este capítulo lo aplicaremos en este capítulo también, es decir que el razonamiento en cualquier sistema de referencia es siempre el mismo.

SIMPLIFICACIÓN DE UNA ECUACIÓN POR TRASLACIÓN

La principal aplicación de una traslación de ejes es simplificar ecuaciones. En algunos problemas se indica el tipo de simplificación deseado , si en otros no se especificara la simplificación a realizar, deberemos efectuar la máxima simplificación posible.

APLICACIÓN DE LA TRASLACIÓN DE EJES PARA HALLAR TANGENTES A LAS CÓNICAS

Si una ecuación de $2°$ grado pasa por el origen de coordenadas se escribirá así :

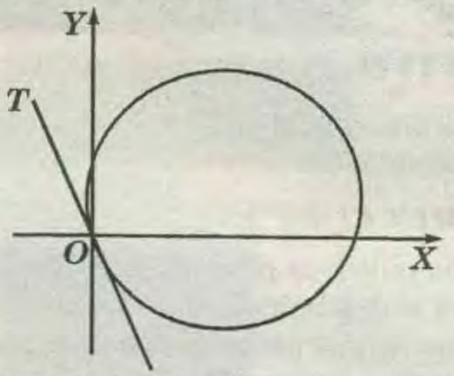
$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Si por el punto $O(0; 0)$ se traza una tangente a la ecuación (I); la ecuación de esta tangente será :

$$T: Dx+Ey=0$$

EJEMPLO 1 :

En la siguiente figura se tiene una circunferencia de ecuación $x^2+y^2-6x-y=0$ Aplicando la propiedad anterior halle la ecuación de la tangente a la circunferencia en el punto $O(0 ; 0)$.



RESOLUCIÓN :

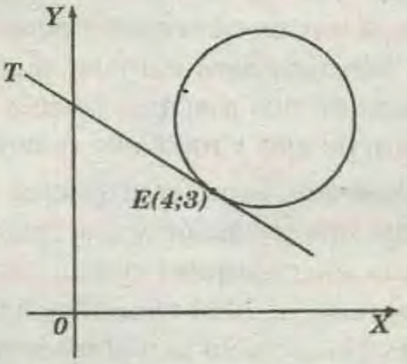
* Como se aprecia la circunferencia pasa por el origen , y nos piden la ecuación de T en el punto $(0; 0)$: por la propiedad anterior :

$$T: -6x-y=0 \Rightarrow T: 6x+y=0$$

* Esta propiedad nos permitirá hallar las ecuaciones de las tangentes a las cónicas en cualquier punto de tangencia , usando traslación de ejes al punto de tangencia.

EJEMPLO 2 :

En la siguiente figura hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2+y^2-10x-10y+45=0$, en el punto $E(4; 3)$.



RESOLUCIÓN :

* Para poder aplicar la propiedad se hará una traslación al punto $E(4; 3)$ que vendría a ser el nuevo origen $O'(h; k)$.

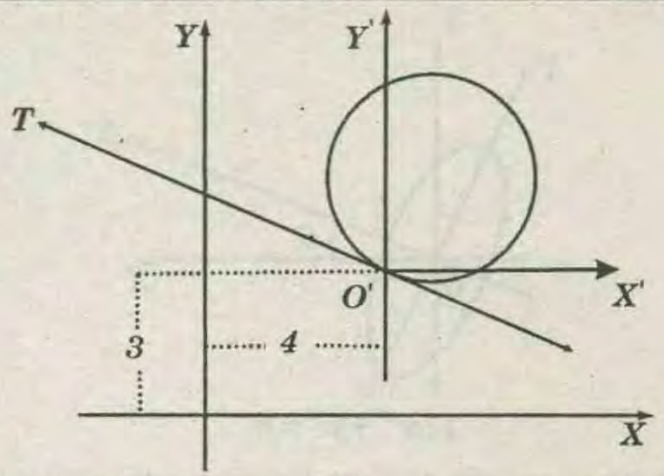
$$x=x'+h \Rightarrow x=x'+4$$

$$y=y'+k \Rightarrow y=y'+3$$

$\Rightarrow$ Reemplazamos :

$$(x'+4)^2+(y'+3)^2-10(x'+4)-10(y'+3)+45=0$$

$$x'^2+8x'+16+y'^2+6y'+9-10x'-40-10y'-30+45=0$$



$x'^2+y'^2-2x'-4y'=0$ Ecuación de la circunferencia en el sistema final. Como se observa en la figura en el sistema final la circunferencia si pasa por el origen y la recta T es tangente a la circunferencia justo en el origen. Por lo tanto podemos aplicar la propiedad estudiada pero en el sistema final :

* Ecuación de $T: -2x'-4y'=0$

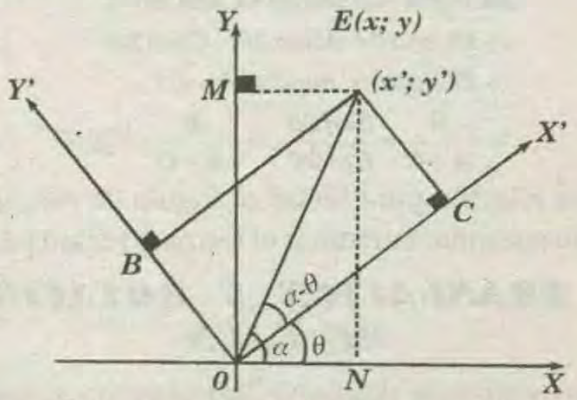
$$\Rightarrow T: -x'-2y'=0$$

Como queremos la ecuación de T pero en el sistema inicial :

$$x=x'+4 \Rightarrow x-4=x'$$
$$y=y'+3 \Rightarrow y-3=y'$$
$$\Rightarrow T: x-4+2(y-3)=0$$
$$T: \quad x+2y-10=0$$

ROTACIÓN DE EJES

Es cuando se cambia el sistema de referencia. El origen no se mueve y los ejes se giran en ***sentido antihorario***. Si los ejes giran en sentido horario el ángulo deberá ser llevado al sentido antihorario, para así poder usar las fórmulas de rotación.



Tomaremos un punto E de coordenadas $(x; y)$ y $(x';y')$referidos al sistema inicial y final respectivamente. el punto $E(x; y)$ lo proyectamos sobre los ejes x e y ; luego el mismo punto $E(x'; y')$ lo proyectamos sobre los ejes x' e y'.

* De la figura : $|\overline{OE}|=r$

* La dirección de $\overline{OE}$ es $\alpha \Rightarrow \sphericalangle EOC=\alpha-\theta$

* En el $\triangle OEC$: En el sistema $X'O'Y'$:

$$*Cos(\alpha-\theta)=\frac{x'}{r} \Rightarrow rCos(\alpha-\theta)=x'$$
$$\Rightarrow r[Cos\alpha Cos\theta+Sen\alpha Sen\theta]=x'$$
$$\Rightarrow rCos\alpha Cos\theta+rSen\alpha Sen\theta=x' \quad .....(I)$$

$$* Sen(\alpha-\theta)=\frac{y'}{r} \Rightarrow rSen(\alpha-\theta)=y'$$
$$r[Sen\alpha Cos\theta+Cos\alpha Sen\theta]=y'$$
$$rSen\alpha Cos\theta+rCos\alpha Sen\theta=y' \quad .....(II)$$

* En el $\triangle OEN$: en el sistema XOY :

$$Cos\alpha=\frac{x}{r} \rightarrow rCos\alpha=x \quad .....(III)$$
$$Sen\alpha=\frac{y}{r} \rightarrow rSen\alpha=y \quad .....(IV)$$

* *(III)* y *(IV)* en *(I)* : $\boxed{x'=xCos\theta+ySen\theta}$

* *(III)* y *(IV)* en *(II)*: $y'=yCos\theta-xSen\theta$

$$\Rightarrow \boxed{y'=-xSen\theta+yCos\theta}$$

* Despejando x e y de estas dos ecuaciones , hallamos otras dos ecuaciones de rotación:

$$\boxed{x=x'Cos\theta-y'Sen\theta} \wedge \boxed{y=x'Sen\theta+y'Cos\theta}$$

* Resumiendo tenemos dos pares de fórmulas de rotación :

$$\left.\begin{array}{l} x=x'Cos\theta-y'Sen\theta \\ y=x'Sen\theta+y'Cos\theta \end{array}\right\} \text{Fórmulas de rotación para pasar del sistema final al sistema inicial}$$

$$\left.\begin{array}{l} x'=xCos\theta+ySen\theta \\ y'=-xSen\theta+yCos\theta \end{array}\right\} \text{Fórmulas de rotación para pasar del sistema inicial al sistema final}$$

NOTAS :

* El razonamiento que hemos aplicado hasta el capítulo anterior lo aplicaremos en este capítulo , es decir que el razonamiento en cualquier sistema de referencia es siempre el mismo .

	Ecuacion de una recta horizontal	Ecuación de una recta vertical	Pendiente de una recta horizontal	Pendiente de una recta vertical
SISTEMA INICIAL	$y=k$	$x=k$	$m=0$	$m=\infty$
SISTEMA FINAL	$y'=k$	$x'=k$	$m=0$	$m=\infty$

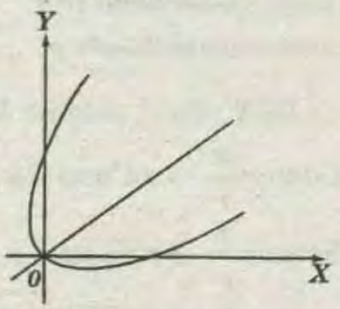
k=número real cualesquiera .

* Si los ejes giran en sentido horario el ángulo deberá ser llevado al sentido antihorario , para así poder usar las fórmulas de rotación. Por ejemplo si en un problema nos dicen que los ejes giran en sentido horario un ángulo de $300°$, este ángulo lo deberemos llevar al sentido antihorario : $360° - 300° = 60°$.

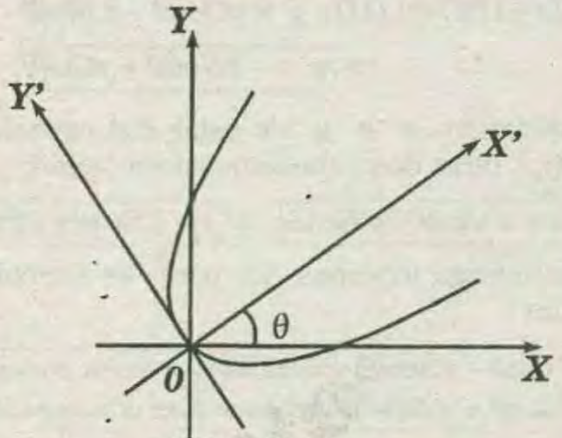
$\Rightarrow \theta = 60°$ que es el ángulo de rotación que se utiliza en las fórmulas de rotación de ejes.

* En una ecuación general de segundo grado : $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, solo se puede eliminar el término rectangular o cruzado mediante una rotación de ejes. Para eliminar el término rectangular xy el ángulo de rotación debe ser agudo:

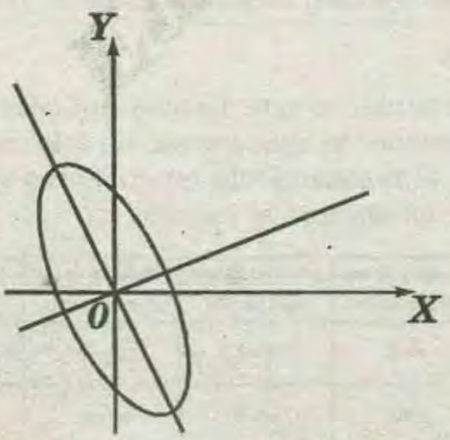
$\boxed{tg2\theta = \frac{A}{A-C}}$, si $A=C \Rightarrow \theta = 45°$



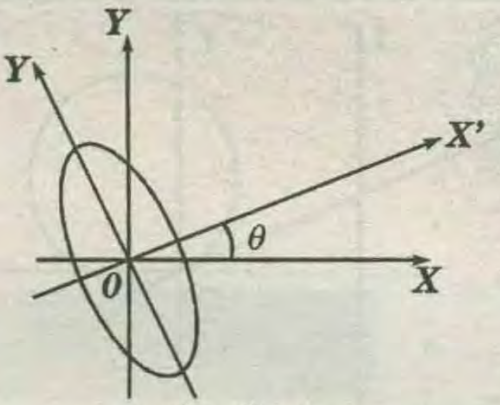
$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y = 0$



$y''^2 = 2x''^2$



$5x^2 + 3xy + y^2 - 4 = 0$



$11x''^2 + y''^2 = 8$

Como se aprecia en estas figuras las ecuaciones de las curvas están en el sistema inicial y tienen término rectangular, pero después de una rotación de ejes según un ángulo agudo θ las ecuaciones ya no tienen el término rectangular en el sistema final. Ahora vamos a demostrar que la fórmula para eliminar el término rectangular xy es :

$$Tg2\theta = \frac{B}{A-C}$$

Sea la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+0x+Ey+F=0$$

$$x = x'Cos\theta - y'Sen\theta$$

$$y = x'Sen\theta + y'Cos\theta$$

* Reemplazando :

$$A(x'Cos\theta - y'Sen\theta)^2 + B(x'Cos\theta - y'Sen\theta)(x'Sen\theta + y'Cos\theta)y +$$
$$C(x'Sen\theta + y'Cos\theta)^2 + D(x'Cos\theta - y'Sen\theta) + E(x'Sen\theta + y'Cos\theta) + F = 0$$

* Efectuando el desarrollo y simplificando :

$$x'^2(ACos^2\theta + BSen\theta Cos\theta + Csen^2\theta) +$$
$$y'^2(Asen^2\theta - BSen\theta Cos\theta + CCos^2\theta) +$$
$$x'y'(BCos2\theta - ASen2\theta + Csen2\theta) +$$
$$x'(DCos\theta - DSen\theta) + y'(ECos\theta - DSen\theta) + F = 0$$

* Como el coeficiente de $x'y'$ debe ser cero :

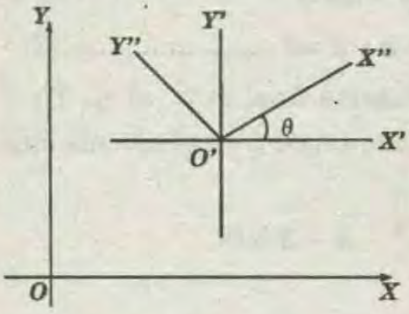
$$BCos2\theta - ASen2\theta + Csen2\theta = 0$$
$$\Rightarrow BCos2\theta = ASen2\theta - Csen2\theta$$
$$\Rightarrow BCos2\theta = Sen2\theta(A-C)$$
$$\Rightarrow \frac{B}{A-C} = \frac{Sen2\theta}{Cos2\theta} \Rightarrow \frac{B}{A-C} = Tg2\theta$$

Es una relación para hallar el ángulo de rotación θ que nos permitirá eliminar el término rectangular xy.

TRASLACIÓN Y ROTACIÓN DE EJES

Hemos visto que mediante la traslación y rotación de los ejes coordenados es posible simplificar muchas ecuaciones. Por lo tanto se podrá efectuar una simplificación mayor aplicando ambas

operaciones a la vez. Primero efectuaremos una traslación al punto $O'(h;k)$ y luego se producirá una rotación.



origen inicial : $O(0;0)$

origen final : $O'(h;k)$

* Por Traslación :

$$x = x' + h \quad \text{.....(I)}$$

$$y = y' + k \quad \text{.....(II)}$$

* Por Rotación :

$$x' = x''\cos\theta - y''\operatorname{sen}\theta \quad \text{.....(III)}$$

$$y' = x''\operatorname{sen}\theta + y''\cos\theta \quad \text{.....(IV)}$$

* *(III)* en *(I)* : $x = x''\cos\theta - y''\operatorname{sen}\theta + h$

* *(IV)* en *(II)* : $y = x''\operatorname{sen}\theta + y''\cos\theta + k$

Estas ecuaciones siguen siendo verdaderas aún cuando primero se produzca una rotación y después una traslación. El ángulo de rotación θ debe estar en sentido antihorario , si los ejes giraran en sentido horario se deberá pasar el ángulo al sentido antihorario .

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Transformar la siguiente ecuación, trasladando los ejes coordenados al nuevo origen $O'(2;-5)$:

$$3xy + 15x - 6y - 31 = 0$$

RESOLUCIÓN :

$$3xy + 15x - 6y - 31 = 0 \Rightarrow O'(2;-5)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$h \quad k$$

* Usando las fórmulas de traslación :

$$x = x' + h \Rightarrow x = x' + 2$$

$$y = y' + k \Rightarrow y = y' - 5$$

* Reemplazando la ecuación :

$$3(x'+2)(y'-5) + 15(x'+2) - 6(y'-5) - 31 = 0$$

$$\Rightarrow 3(x'y' - 5y' + 2y' - 10) + 15x' + 30 - 6y' + 30 - 31 = 0$$

$$\Rightarrow 3x'y' - 15x' + 6y' - 30 + 15x' + 30 - 6y' + 30 - 31 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{3x'y' - 1 = 0}$$

PROBLEMA 2 :

A que punto debe trasladarse el origen para eliminar el término constante y el término lineal en y, de la ecuación $8y^2 - 6x - 24y + 15 = 0$.

RESOLUCIÓN :

$$8y^2 - 6x - 24y + 15 = 0 \Rightarrow O'(h;k)?$$

$$x = x' + h \wedge y = y' + k$$

$$8(y'+k)^2 - 6(x'+h) - 24(y'+k) + 15 = 0$$

$$\Rightarrow 8(y'^2 + 2ky' + k^2) - 6x' - 6h - 24y' - 24k + 15 = 0$$

$$\Rightarrow 8y'^2 + 16ky' + 8k^2 - 6x' - 6h - 24y' - 24k + 15 = 0$$

$$\Rightarrow 8y'^2 + y'\underbrace{(16k - 24)}_{0} - 6x' + \underbrace{8k^2 - 6h - 24k + 15}_{0} = 0$$

$$16k - 24 = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 8k^2 - 6h - 24k + 15 = 0 \Rightarrow 8\left(\frac{9}{4}\right) - 6h - 24\left(\frac{3}{2}\right) + 15 = 0$$

$$\Rightarrow 18 - 6h - 36 + 15 = 0 \Rightarrow -6h = 3 \Rightarrow h = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow O(h;k) = O'\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

PROBLEMA 3 :

La ecuación $x'^2 - 2y'^2 = 4$, esta referida al sistema de coordenadas $X'Y'$ de coordenadas ; referida al sistema XY sabiendo que la distancia entre los orígenes de coordenadas es $\sqrt{17}$ unidades, y que la ordenada del nuevo origen es 1.

RESOLUCIÓN :

$$x'^2 - 2y'^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = x' + h \Rightarrow x' = x - h \\ y = y' + k \Rightarrow y' = y - k \end{cases}$$

$$(x-h)^2 - 2(y-k)^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 2hx + h^2 - 2(y^2 - 2ky + k^2) = 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 2hk + h^2 - 2y^2 + 4ky + h^2 - 2k^2 - 4 = 0$$

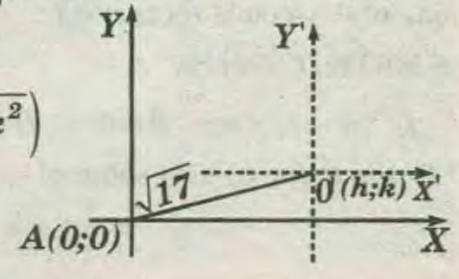
$$\Rightarrow x^2 - 2y^2 - 2hx + 4ky + h^2 - 2k^2 - 4 = 0 \quad \text{.....}(\alpha)$$

Por dato : Distancia entre orígenes es $\sqrt{17}$:

$$d(A,O') = \sqrt{17} = \sqrt{h^2 + k^2}$$

Como $k = 1$

$$\left(\sqrt{17}\right)^2 = \left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$$



$\Rightarrow 17=h^2+1$

$\Rightarrow 16=h^2$

$\Rightarrow h=\pm 4$

En α :

$h=4 \Rightarrow x^2-2y^2-8x+4y+16-2-4=0$

$\Rightarrow \boxed{x^2-2y^2-8x+4y+10=0}$

$h=-4 \Rightarrow x^2-2y^2-8x+4y+16-2-4=0$

$\Rightarrow \boxed{x^2-2y^2+8x+4y+10=0}$

PROBLEMA 4 :

Mediante una traslación de ejes al punto $(h; k)$ la ecuación $2xy-4x+y-5=O$, se escribe en la forma $x'y'=u$. Hallar $h+k+u$.

RESOLUCIÓN :

$2xy-4x+y-5=0 \Rightarrow O'(h;k) \Rightarrow x'y'=u$

$h+k+u=?\ ;\ x=x'+h\ ;\ y=y'+h$

* En la ecuación :

$2(x'+h)(y'+k)-4(x'+h)+y'+k-5=0$

$\Rightarrow 2(x'y'+kx'+hk)-4x'-4h+y'+k-5=0$

$\Rightarrow 2x'y'+2kx'+2hy'+2hk-4x'-4h+y'+k-5=0$

$\Rightarrow 2x'y'+x'(2k-4)+y'(2h+1)+2hk-4h+k-5=0$

* Esta ecuación la dividiremos entre 2 para que se parezca a $x'y'=u$:

$$x'y'+x'\underbrace{(k-2)}_{0}+y'\underbrace{\left(h+\frac{1}{2}\right)}_{0}+hk-2h+\frac{k}{5}-\frac{5}{2}=0 \quad .....(I)$$

$k-2=0 \Rightarrow k=2 \wedge h+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow h=-\frac{1}{2}$

* en (I) :

$$x'y'-1+1+1-\frac{5}{2}=0 \Rightarrow x'y'-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow x'y'=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow u=\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{h+k+u=-\frac{1}{2}+2+\frac{3}{2}=3}$$

PROBLEMA 5 :

Se tiene $L: (h-1)x+y-3=0$, luego L se traslada al nuevo origen $O'(h; k)$. $o'(h; k)$ solo puede moverse a lo largo del eje X positivo. En el sistema final $x'y'$ Les perpendicular al eje y'. Hallar el área del cuadrilátero que forma L en el sistema final con los ejes $x'y'$ y con la recta $x'=3$.

RESOLUCIÓN :

$L: (h-1)x+y-3=0 \Rightarrow 0'(h;k)$

* Como $O'(h; k)$ esta sobre el eje X: $k=0$

$x=x'+h \ \wedge \ y=y'$

* Reemplazando en L :

$L: \ (h-1)(x'+h)+y'-3=0$

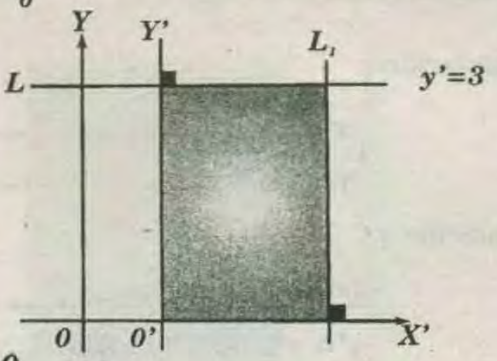
$L: hx'+h^2-x'-h+y'-3=0$

$L: x'(h-1)+y'+h^2-h-3=0$ .....(I)

* Por dato : L en el Sistema final es $\perp$ al eje Y':

Esto significa que la ecuación de L en el sistema final es $y'=\#$; luego (I) :

$$L: x'\underbrace{(h-1)}_{0}+y'+h^2-h-3=0$$



$h-1=0$

$h=1$ $\qquad x'=3$

$L: y'=3$

Graficando el problema $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Area de cuadrilátero: $3\times 3=9u^2$

PROBLEMA 6 :

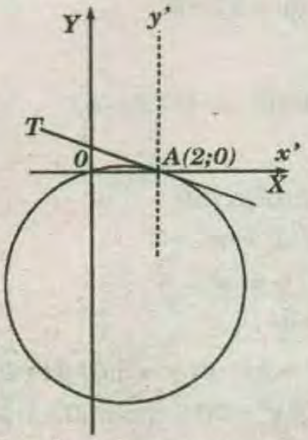
Hallar la ecuación de la tangente a la curva $x^2+y^2-3x+7y+2=0$ en el punto $A(2; 0)$.

RESOLUCIÓN :

Ecuación de $T=?$

Hacemos una traslación al nuevo origen: $O'(2; 0)$; obligando a la tangente a pasar por el origen.

Trasladando la ecuación: $x=x'+2$ $\qquad y=y'$



$(x'+2)^2+y'^2-3(x'+2)+7y'+2=0$

$\Rightarrow x'^2+4x'+4+y'^2-3x'-6+7y'+2=0 \Rightarrow x'^2+y'^2+x'+7y'=0$

Esta ecuación no tiene término independiente, luego pasa por el origen: podemos aplicar la propiedad siguiente :

* Ecuación de T: $x'+7y'=0$ .....(I)

* Regresando al sistema original : $x'=x-2$, $y'=y$

* En (I) : T: $x-2+7y$

$$\Rightarrow \boxed{T: x+7y-2=0}$$

PROBLEMA 7:

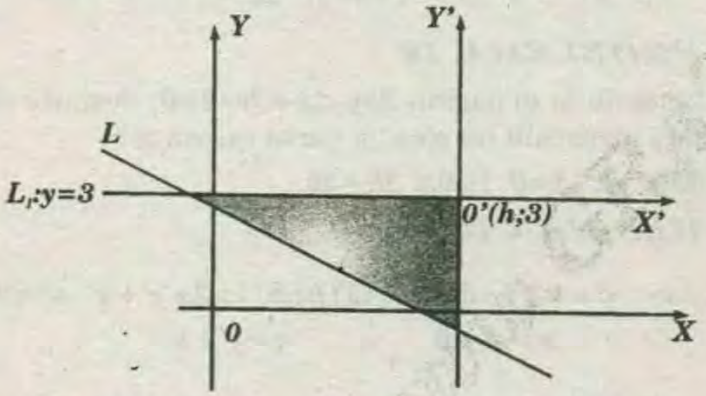
Se tiene la recta L: $x+2y-2=0$. luego se hace una traslación al punto $O'(h;k)$ el cual solo puede desplazarse a lo largo de la recta L_1: $y=3$. En el sistema $x'y'$ la recta L corta a los ejes x' e y', siendo su abscisa más su ordenada en el origen igual a $-\frac{21}{2}$

Hallar el área del triángulo que forma L en el sistema final con los ejes x', y'.

RESOLUCIÓN :

$L: x+2y-2=0$, $O'(h;k)$

$x=x'+h \ \wedge \ y=y'+k$



* Pasando L al sistema final :

$L: x'+h+2(y'+3)-2=0$

$L: x'+h+2y'+6-2=0$

$L: x'+2y'+h+4=0$ .....(I)

x'	y'
0	$\frac{-h-4}{2}$
$-h-4$	0

Por dato del problema : abscisa en el origen + ordenada en el origen $=-\frac{21}{2}$

$$-h-4+\frac{-h-4}{2}=-\frac{21}{2} \Rightarrow -2h-8-h-4=-21$$

$$-3h-12=-21 \Rightarrow -3h=-21+12 \Rightarrow -3h=-9 \Rightarrow h=3$$

$\Rightarrow$ En (I): $L: x'+2y'+3+4=0 \rightarrow L: x'+2y'+7=0$

x'	y'
0	$-7/2$
-7	0

$$\Rightarrow \text{Area} \triangleleft = \frac{7\times\frac{7}{2}}{2}=\frac{49}{4}$$

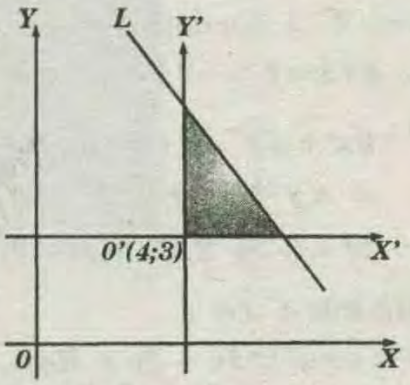
PROBLEMA 8 :

Se tiene la recta L: $3x+2y+C=0$, luego se traslada el origen al punto $O'(4;3)$. En el sistema final $x'y'$ la recta L corta a los semiejes positivos formando un triángulo de área $3u^2$. Hallar la ecuación de L en el sistema final.

RESOLUCIÓN :

* Ecuación de L en el sistema $x'y'=?$

* Pasando L al sistema final :



$L: 3(x'+h)+2(y'+k)+c=0$

$\Rightarrow L: 3x'+3h+2y'+2k+c=0$

$\Rightarrow L: 3x'+2y'+3h+2k+c=0$

$\Rightarrow L: 3x'+2y'+12+6+c=0$

$\Rightarrow L: 3x'+2y'+18+c=0$ .....(I)

x'	y'
0	$\frac{-18-c}{2}$
$\frac{-18-c}{3}$	0

* Por dato : Área $\triangle = 3$

$$\frac{\left(\frac{-18-C}{3}\right)\left(\frac{-18-C}{2}\right)}{2}=3$$

$\Rightarrow (18+c)^2=36 \Rightarrow 18+c=\pm 6$

$\Rightarrow 18+c=6 \Rightarrow c=-12 \Rightarrow$ No cumple

$\vee \ 18+c=6 \Rightarrow c=-24$

$\Rightarrow$ En (I) : $L: 3x'+2y'+18-24=0$

$\Rightarrow L: 3x'+2y'-6=0$

PROBLEMA 9 :

Se tiene la curva $3x+2y+xy+8=0$, luego se hace una traslación al punto $O'(h;\ k)$ y la curva queda de la

siguiente forma : $x'y'+Nx'+M=0$

Hallar $2N-3M$, si se sabe que $h+k=1$.

RESOLUCIÓN :

$3x+2y+xy+8=0 \Rightarrow O'(h;k) \Rightarrow x'y'+Nx'+M=0$

$2N-3M=?$

* Trasladamos la ecuación original al último sistema mediante las fórmulas de traslación :

$x=x'+h \quad \wedge \quad y=y'+k$

$3(x'+h)+2(y'+k)+(x'+h)(y'+k)+8=0$

$\Rightarrow 3x'+3h+2y'+2k+x'y'+kx'+hy'+hk+8=0$

$\Rightarrow x'(3+k)+y'\underbrace{(2+h)}_{0}+x'y'+3h+2k+hk+8=0 \ldots\ldots\ldots(I)$

$\Rightarrow 2+h=0$

$\Rightarrow h=-2 \Rightarrow$ Por dato :

$\Rightarrow h+k=1 \Rightarrow -2+k=1 \Rightarrow k=3$

* En *(I)* : $6x'+x'y'-6+6-6+8=0$

$\Rightarrow x'y'+6x'+2=0$

$N=6 \wedge M=2 \Rightarrow 2N-3M=2(6)-3(2)=6$

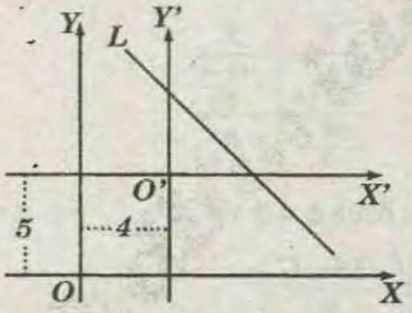
PROBLEMA 10 :

Se tiene la recta $L: 3x+2y+M=0$, luego el origen se traslada al punto $O'(4;5)$. En el sistema final la recta L corta a los semiejes positivos, siendo su abscisa en el origen igual a 4. Hallar la ecuación de L en el sistema final.

RESOLUCIÓN :

$L: 3x+2y+M=0 \Rightarrow O'(4;5) \Rightarrow x'y'$

$x=x'+4 \wedge y=y'+5$



$L: 3(x'+4)+2(y'+5)+M=0$

$L: \quad 3x'+12+2y'+10+M=0$

$L: \quad 3x'+2y'+22+M=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(I)$

* En el sistema final : $E(4;0) \in L$:

$3(4)+2(0)+22+M=0$

$\Rightarrow 12+22+M=0 \Rightarrow M=-34$

* En *(I)* : $L: 3x'+2y'+22-34=0$

$\Rightarrow \boxed{L: 3x'+2y'-12=0}$

PROBLEMA 11 :

Mediante una traslación de ejes al nuevo origen $O'(h;k)$, transformar la ecuación $3xy-3x+6y+5=0$ en otra ecuación que no tenga términos de primer grado.

Hallar también el valor de $\left(\frac{h}{3}+\frac{k}{2}\right)^2$

RESOLUCIÓN :

$3xy-3x+6y+5=0 \Rightarrow O'(h;k) \Rightarrow x'y'$

↓ No tiene términos de $1°$ grado

$\left.\begin{matrix} x=x'+h \\ x=y'+k \end{matrix}\right\}$ Fórmulas de traslación

$\Rightarrow 3(x'+h)(y'+k)-3(x'+h)+6(y'+k)+5=0$

$\Rightarrow 3(x'y'+kx'+hy'+hk)-3x'-3h+6y'+6k+5=0$

$\Rightarrow 3x'y'+3kx'+3hy'+3hk-3x'-3h+6y'+6k+5=0$

$\Rightarrow 3x'y'+x'\underbrace{(3k-3)}_{0}+y'\underbrace{(3h+6)}_{0}+3hk-3h+6k+5=0 \ldots\ldots(I)$

$\Rightarrow 3k-3=0 \Rightarrow k=1 \wedge 3h+6=0 \Rightarrow h=-2$

* En *(I)* : $3x'y'+3(-2)(1)-3(-2)+6(1)+5=0$

$\Rightarrow 3x'y'-6+6+6+5=0 \Rightarrow \boxed{3x'y'+11=0}$

$\Rightarrow \left(\frac{h}{3}+\frac{k}{2}\right)^2=\left(\frac{-2}{3}+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{-4+3}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$

PROBLEMA 12 :

Se tiene la ecuación $3xy-5x+3y-8=0$; después de una traslación de ejes, la curva queda así : $3x'y'+x'-3=0$. Hallar $3h+3k$.

RESOLUCIÓN :

$3xy-5x+3y-8=0 \Rightarrow O'(h;k) \Rightarrow 3x'y'+x'-3=0$

$x=x'+h \quad \wedge \quad y=y'+k$

$\Rightarrow 3(x'+h)(y'+k)-5(x'+h)+3(y'+k)-8=0$

$\Rightarrow 3(x'y'+ky'+hy'+hk)-5x'-5h+3y'+3k-8=0$

$\Rightarrow 3x'y'+3kx'+3hy'+3hk-5x'-5h+3y'+3k-8=0$

$\Rightarrow 3x'y'+x'\underbrace{(3k-3)}_{1}+y'\underbrace{(3h+6)}_{0}+3hk-3h+6k+5=0 \ldots\ldots(I)$

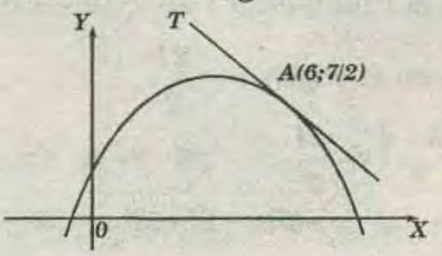
$3k-5=1 \Rightarrow k=2 \wedge 3h+3=0 \Rightarrow h=-1$

$\Rightarrow 3h+3k=-3+6=3$

PROBLEMA 13 :

En la siguiente figura, *"T"* es una tangente a la curva $x^2-8x+4y-2=0$ en el punto $A(6;7/2)$.

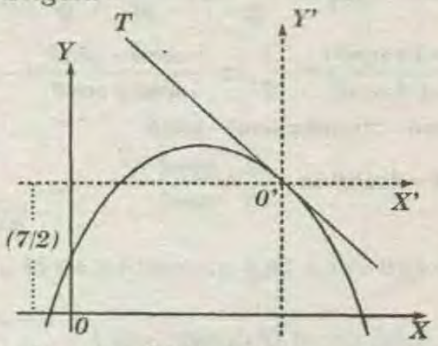
Hallar la ecuación de la tangente *"T"*.



RESOLUCIÓN :

* Ecuación de $T=?$

* Haremos una traslación al nuevo origen ; $O'(6;7/2)$; obligando a la curva y a la tangente "T" a pasar por el origen.



* Trasladando la ecuación :

$$x=x'+6 \quad \wedge \quad y=y'+\frac{7}{2}$$

$$x^2-8x+4y-2=0 \Rightarrow (x'+6)^2-8(x'+6)+4\left(y'+\frac{7}{2}\right)-2=0$$

$$\Rightarrow x'^2+12x'+36-8x'-48+4y'+14-2=0$$

Ecuación de la curva en el sistema final

$$\left\{x'^2+4x'+4y'=0\right.$$

* Por propiedad : $T: 4x'+4y'=0 \Rightarrow T: x'+y'=0$ .....(I)

* Ahora tenemos la ecuación de "T" en el sistema final ; para regresar al sistema inicial,

haremos : $\begin{cases} x-6=x' \\ y-\frac{7}{2}=y' \end{cases}$

* Reemplazando en (I) :

$$T: x-6+y-\frac{7}{2}=0 \Rightarrow T: 2x-12+2y-7=0 \Rightarrow \boxed{T: 2x-2y-19=0}$$

PROBLEMA 14 :

Se tienen las rectas L_1: $x+(k-5)y-8=0$ y L_2: $(h-4)x+y-10=0$, luego se traslada el origen al punto $O'(h;k)$, siendo h y k números positivos.

En el sistema final L, es vertical y L_2 es horizontal. Hallar el área de la figura formada por los ejes x'; y' y las rectas L_1 y L_2 en el sistema final .

RESOLUCIÓN :

$$L_1: x+(k-5)y-8=0 \Rightarrow O'(h;k) \Rightarrow x'y'$$

$$x=x'+h \qquad L_1 : \text{es vertical}$$

$$y=y'+k \qquad L_1 : \quad x'=\#$$

$$L_1: x'+h+(k-5)(y'+k)-8=0$$

$$\Rightarrow L_1: x'+h+ky'+k^2-5y'-5k-8=0$$

$$\Rightarrow L_1: x'+y'\underbrace{(k-5)}_{0}+h+k^2-5k-8=0 \quad .....(I)$$

$$k-5=0 \Rightarrow k=5 \quad .....(\alpha)$$

$$\Rightarrow \text{En (I)}: L_1: x'+h+25-25-8=0$$

$$\Rightarrow \boxed{L_1: x'=8-h} \quad .....(II)$$

$$L_2: (h-4)x+y-10=0 \Rightarrow o'(h;k) \Rightarrow x'o'y' \Rightarrow L_2: \Rightarrow L_2: y'=\#$$

$$\Rightarrow L_2: (h-4)(x'+h)+y'+k-10=0$$

$$\Rightarrow \boxed{L_2: hx'+h^2-4x'-4h+y'+k-10=0}$$

$$L_2: x'\underbrace{(h-4)}_{0}+y'+h^2-4h+k-10=0 \quad .....(III)$$

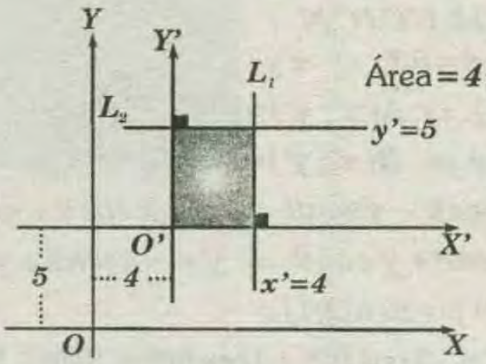
$$h-4=0 \Rightarrow h=4 \quad .....(\beta)$$

*En (III) : $L_2: y'+16-16+k-10=0 \Rightarrow$ De(α): $k=5$

De(α): L_2: $y'+5-10=0 \Rightarrow L_2: y'=5$

(β)en (II): $L_1: x'=8-h \Rightarrow L_1: x'=4$

* Graficando el problema :



PROBLEMA 15 :

Se tiene la ecuación $x^2-2xy+y+x=0$ luego se giran los ejes $45°$; hallar la ecuación en el sistema .

RESOLUCIÓN :

$$x=x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta \Rightarrow x=x'\cos 45°-y'\operatorname{sen}45° \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

$$y=x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta \Rightarrow y=x'\operatorname{sen}45°+y'\cos 45° \Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

$$\Rightarrow x^2-2xy+y+x=0 \quad .....(I)$$

* Reemplazando en (I):

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x'^2-x'y'+\frac{1}{2}y'^2-2\left(\frac{1}{2}x'^2-\frac{1}{2}y'^2\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'+\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x'^2-x'y'+\frac{1}{2}y'^2-x'^2+y'^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'+\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'=0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}x'^2+\frac{3}{2}y'^2-x'y'+\sqrt{2}x'=0$$

$$\Rightarrow x'^2-3y'^2+2x'y'+2\sqrt{2}x'=0$$

PROBLEMA 16 :

Se tiene la ecuación $\sqrt{3}y^2-3=0$ luego se giran los ejes $60°$; hallar la ecuación de la curva en el sistema final.

RESOLUCIÓN:

$x=x'\cos\theta-y'\text{sen}\theta \Rightarrow x=x'\cos 60°-y'\text{sen}60° \Rightarrow x=\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'$

$y=x'\text{sen}\theta+y'\cos\theta \Rightarrow x=x'\,\text{sen}60°+y'\cos 60° \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'$

$\Rightarrow \sqrt{3}y^2-3=0$ .....(I)

* Reemplazando en (I) : .

$\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'\right)^2-3=0 \Rightarrow \sqrt{3}\left(\frac{3}{4}x'^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x'y'+\frac{1}{4}y'^2\right)-3=0$

$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{4}x'^2+\frac{3}{2}x'y'+\frac{\sqrt{3}}{4}y'^2-3=0 \Rightarrow 3\sqrt{3}x'^2+6x'y'+\sqrt{3}y'^2-12=0$

PROBLEMA 17 :

En el sistema inicial se tiene los puntos $A(2;1)$ y $B(3;4)$. Hallar las coordenadas de A y B después de girar los ejes un ángulo de $90°$.

RESOLUCIÓN :

$xy \Rightarrow \theta=90° \Rightarrow x'y'$

$A(2;1) \Rightarrow A(x';y')=?$

$B(3;4) \Rightarrow B(x';y')=?$

$x=x'\cos\theta-y'\text{sen}\theta \Rightarrow x'=x\cos\theta+y\text{sen}\theta$

$y=x'\text{sen}\theta+y'\cos\theta \Rightarrow y'=-x\text{sen}\theta+y\cos\theta$

* Para el punto $A(2;1)$:

$x'=2\cos 90°+1\text{sen}90°=2(0)+1(1)=1$

$y'=-2\text{sen}90°+1\cos 90°=2(1)+1(0)=-2$

$\Rightarrow A(1;-2) \Rightarrow$ Son las coordenadas del punto A en el sistema final .

* Para el punto $B(3;4)$:

$x'=3\cos 90°+4\text{sen}90°=3(0)+4(1)=4$

$y'=-3\text{sen}90°+4\cos 90°=-3(1)+4(0)=-3$

$\Rightarrow B(4;-3) \Rightarrow$ Son las coordenadas del punto $'B'$ en el sistema final.

PROBLEMA 18 :

Se tiene la línea recta $L: x+y-1=0$, luego se hacen girar los ejes un ángulo θ. La recta L en el último sistema tiene una pendiente igual a $-\frac{1}{2}$. Hallar la ecuación de L en el sistema final.

RESOLUCIÓN :

$L: x+y-1=0 \Rightarrow \theta \Rightarrow x'y'$

$\downarrow$

$m_L=-\frac{1}{2} \Rightarrow$ Ecuación de $L=?$

* Usaremos las siguientes fórmulas de rotación :

$x=x'\cos\theta-y'\text{sen}\theta$

$y=x'\text{sen}\theta+y'\cos\theta$

* Pasando la ecuación de L del sistema inicial al final:

$L: x'\cos\theta-y'\text{sen}\theta+x'\text{sen}\theta+y'\cos\theta-1=0$

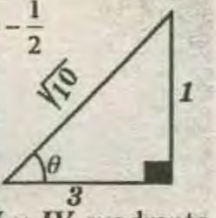
$L: x'(\cos\theta+\text{sen}\theta)+y'(-\text{sen}\theta+\cos\theta)-1=0$ .....(I)

* Por dato : $m_L=-\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{A}{B}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{-(\cos\theta+\text{sen}\theta)}{-\text{sen}\theta+\cos\theta}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-\cos\theta-\text{sen}\theta}{-\text{sen}\theta+\cos\theta}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -2\cos\theta-2\text{sen}\theta=\text{sen}\theta-\cos\theta$

$-\cos\theta=3\text{sen}\theta \Rightarrow -\frac{1}{3}=\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$



$\Rightarrow -\frac{1}{3}=tg\theta \Rightarrow$ La tag es negativa en II y IV cuadrante

* Si θ : está en el II cuadrante :

$\text{sen}\theta=\frac{1}{\sqrt{10}};\cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

* En (I) :

$L: \quad x'\left(\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)+y'\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)-1=0$

$L: \frac{-2}{\sqrt{10}}x'-\frac{4}{\sqrt{10}}y'-1=0 \Rightarrow L: 2x'+4y'+\sqrt{10}=0$

* Si θ : está en el IV cuadrante :

$\text{sen}\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}};\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$

* En (I) :

$L: \quad x'\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}\right)+y'\left(\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}\right)-1=0$

$L: \frac{2}{\sqrt{10}}x'+\frac{4}{\sqrt{10}}y'-1=0 \Rightarrow L: 2x'+4y'-\sqrt{10}=0$

PROBLEMA 19 :

En el sistema inicial se tiene el punto $A(3;4)$, después se giran los ejes un ángulo de $780°$. Hallar el punto A en el sistema final.

RESOLUCIÓN :

* Como $540°$ es mayor que una vuelta, pasaremos el ángulo al primer cuadrante $\frac{780°}{360°}=2$

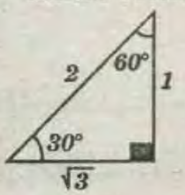
* Luego el ángulo de rotación es : $\theta=60°$

$\left.\begin{array}{l} x=x'\cos\theta-y'\text{sen}\theta \Rightarrow x'=x\cos\theta+y'\text{sen}\theta \\ y=x'\text{sen}\theta+y'\cos\theta \Rightarrow y'=-x\,\text{sen}\theta+y\cos\theta \end{array}\right\}(*)$

$xy \Rightarrow \theta=60° \Rightarrow x'y'$

$A(3;4) \Rightarrow A(x';y')=?$

* En las fórmulas de notación (*) :



$x'=3\cos 60°+4\text{sen}60°$ .....(I)

$y'=-3\text{sen}60°+4\cos 60°$.....(II)

* En *(I)*: $x'=3\left(\frac{1}{2}\right)+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow x'=\frac{3}{2}+2\sqrt{3}=\frac{3+4\sqrt{3}}{2}$

* En *(II)* :

$$y'=-3\frac{\sqrt{3}}{2}+4\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow y'=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+2=\frac{-3\sqrt{3}+4}{2}$$

$$\Rightarrow A'(x';y')=A'\left(\frac{3+4\sqrt{3}}{2};\frac{4-3\sqrt{3}}{2}\right)$$

PROBLEMA 20 :

La nueva ecuación de una curva es $x'y'+2=0$ después de una rotación según un ángulo $\theta=45°$. Hallar la ecuación original de la curva .

RESOLUCIÓN :

$$xy \Rightarrow \theta=45° \Rightarrow x'y'+2=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x=x'\cos\theta-y'sen\theta \Rightarrow x'=x\cos\theta+ysen\theta \\ y=x'sen\theta+y'\cos\theta \Rightarrow y'=-xsen\theta+y\cos\theta \end{array}\right\}(*)$$

$$x'=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$y'=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* *(I)* y *(II)* en la Ecuación de la curva :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)+2=0$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}+2=0 \Rightarrow y^2-x^2+4=0 \Rightarrow \boxed{x^2-y^2-4=0}$$

PROBLEMA 21 :

Se tiene la recta L: $x+y-4=0$, luego se hacen girar los ejes coordenados un ángulo θ y la recta L en el sistema $x'y'$ tiene una pendiente igual a $\frac{1}{2}$. Hallar la ecuación de L en el sistema final $x'y'$.

RESOLUCIÓN :

$$L: x+y-4=0 \Rightarrow \theta \Rightarrow x'y' \Rightarrow m_L=\frac{1}{2}$$

$$x=x'\cos\theta-y'sen\theta \wedge y=x'sen\theta-y'\cos\theta$$

* Reemplazando en L :

$$L: x'\cos\theta-y'sen\theta+x'sen\theta+y'\cos\theta-4=0$$

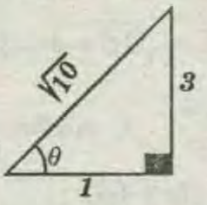
$$L: x'(\cos\theta+sen\theta)+y'(-sen\theta+\cos\theta)-4=0 \ldots\ldots (\alpha)$$

* Por dato : $m_1=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{-(\cos\theta+sen\theta)}{-sen\theta+\cos\theta}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-\cos\theta-sen\theta}{-sen\theta+\cos\theta}=\frac{1}{2}$$

$$-2\cos\theta-2sen\theta=-sen\theta+\cos\theta \Rightarrow -sen\theta=3\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{sen\theta}{\cos\theta}=-3 \Rightarrow tg\theta=-3 \Rightarrow$$ la tg es negativa en el I y IV cuadrante



* Cuando θ, está en el *II* cuadrante :

$$sen\theta=+\frac{3}{\sqrt{10}}=+\frac{3\sqrt{10}}{10} \wedge \cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

* En (α) :

$$x'\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}+\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)+y'\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)-4=0$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{10}}{10}x'-\frac{4\sqrt{10}}{10}y'-4=0 \Rightarrow 2\sqrt{10}x'-4\sqrt{10}y'-40=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{10}x'-2\sqrt{10}y'-20=0 \Rightarrow x'-2y'+2\sqrt{10}=0$$

* Cuando θ, está en el *IV* cuadrante :

$$sen\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10} \wedge \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

* En (α) :

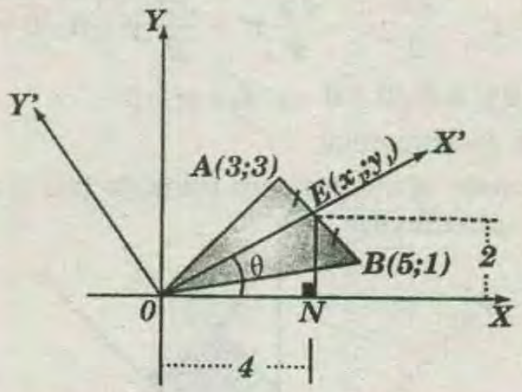
$$x'\left(\frac{\sqrt{10}}{10}-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)+y'\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{10}}{10}\right)-4=0 \Rightarrow \frac{-2\sqrt{10}}{10}x'+\frac{4\sqrt{10}}{10}y'-4=0$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{10}x'+4\sqrt{10}y'-40=0 \Rightarrow \boxed{x'-2y'+2\sqrt{10}=0}$$

PROBLEMA 22 :

El triángulo de vértices $A(3;3)$, $B(5;1)$ y $C(0;0)$ se encuentra en el sistema xy. Si los ejes giran un ángulo en sentido antihorario de manera que el semieje positivo x' divide al lado $\overline{AB}$ en dos partes iguales. Hallar las fórmulas de transformación de coordenadas y el área del triángulo ABC en el sistema final.

RESOLUCIÓN :



$$(1)\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'sen\theta \\ y=x'sen\theta+y'\cos\theta \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x'=x\cos\theta+y\,sen\theta \\ y'=-xsen\theta+y\cos\theta \end{cases}$$

* $E(x_1;y_1)$ es punto medio de $\overline{AB}$:

$$x_1=\frac{3+5}{2}=4 \wedge y_1=\frac{3+1}{2}=2 \Rightarrow E(x_1;y_1)=E(4;2)$$

* En el $\triangle ONE$: $|\overline{OE}|=\sqrt{16+4}=2\sqrt{25}$

$$sen\theta=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \wedge \quad cos\theta=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

* Reemplazando en *(I)* y *(II)* :

$$x=\frac{2\sqrt{5}x'}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}y' \qquad x'=\frac{2\sqrt{5}x}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}y$$

$$y=\frac{\sqrt{5}x'}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}y' \qquad y'=\frac{-\sqrt{5}x}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}y$$

NOTA :

El área de cualquier figura cerrada siempre será igual en cualquier sistema .

$\Rightarrow$ El area $\triangle ABC$ en el sistema final = Area$\triangle$ en el sistema xy

$$\text{Area}\,\triangle ABC=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}3 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}|3-15|=\frac{1}{2}|-12|=6u^2$$

PROBLEMA 23 :

Hallar el área del cuadrilátero comprendido entre los ejes transformados y las rectas $x'=6$ y $L: x-y+3\sqrt{2}=0$; sabiendo que el sistema ha girado $45°$ en sentido antihorario.

RESOLUCIÓN :

$L: x-y+3\sqrt{2}=0 \Rightarrow \theta=45°$

$$x=x'cos\theta-y'\,sen\theta \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

$$y=x'sen\theta+y'cos\theta \Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

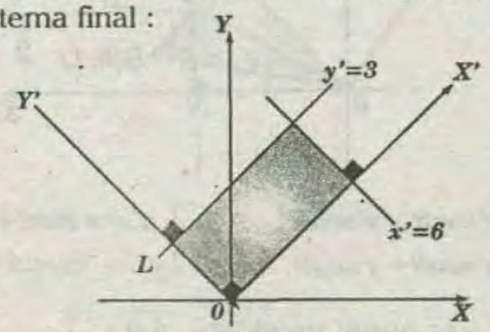
* Pasando la recta L al sistema final :

$$L:\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'-\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'+3\sqrt{2}=0$$

$$L:-\sqrt{2}y'+3\sqrt{2}=0 \Rightarrow L: y'=3$$

Luego L es horizontal.

* Graficando el cuadrilátero formado por las rectas en el sistema final :



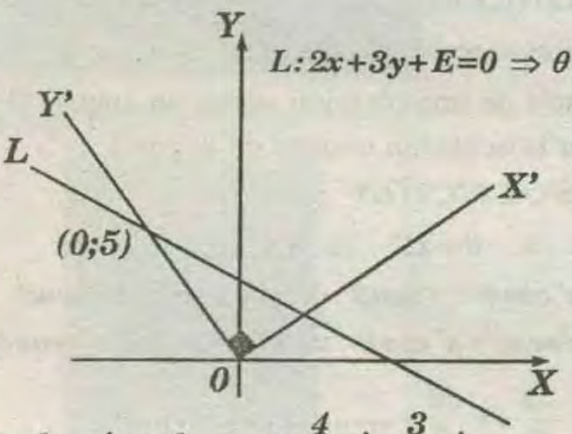
* La figura formada por x'; y'; L y $x'=6$ es un rectángulo

Área del cuadrilátero = $6\times3=18$

PROBLEMA 24 :

Se tiene la recta L: $2x+3y+E=0$, luego se giran los ejes un ángulo de $37°$. En el sistema final $x'y'$ la recta L corta a los semiejes positivos; se sabe que la ordenada al origen de L es 5 en el sistema final. Hallar el área del triángulo formado por los ejes $X'Y'$ y L en el sistema final.

RESOLUCIÓN :



$$x=cos\,0-y'sen\theta \Rightarrow x=\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'$$

$$y=sen\theta+y'cos\theta \Rightarrow y=\frac{3}{5}x'-\frac{4}{5}y'$$

* pasando la recta L al sistema final :

$$L: 2\left(\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'\right)+3\left(\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'\right)+E=0$$

$$\Rightarrow L: \frac{8}{5}x'-\frac{6}{5}y'+\frac{9}{5}x'+\frac{12}{5}y'+E=0$$

$$\Rightarrow L: \frac{17}{5}x'+\frac{6}{5}y'+E=0$$

$$L: 17x'+6y'+5E=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

x'	y'
0	$\frac{-5E}{6}$

* Por dato del problema la ordenada al origen de L en el sistema final es :

$$5: \frac{-5E}{6}=5 \Rightarrow E=-6$$

* En *(I)*: $L: 17x'+6y'-30=0$

x'	y'
0	5
$\frac{30}{17}$	6

$\Rightarrow$ El área del $\triangle$: $\dfrac{\frac{30}{17}\times5}{2}=\dfrac{150}{24}=\dfrac{75}{17}$

PROBLEMA 25 :

Se tiene la recta L: $2x+y+15=0$, luego se giran los ejes un ángulo agudo. Si la recta L en el sistema final es vertical , hallar la ecuación de L en el sistema $X'Y'$.

RESOLUCIÓN :

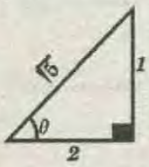
$L: 2x+y+15=0 \Rightarrow \theta \Rightarrow x'=\#$ (como la recta es vertical su ecuacion sera x' igual a un numero)

$$x=x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \ \wedge \quad y=x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$

* pasando la recta L al sistema final :

$$L: 2(x'\cos - y'\operatorname{sen}\theta)+x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta+15=0$$
$$\Rightarrow L: 2x'\cos\theta - 2y'\operatorname{sen}\theta + x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta + 15=0$$
$$\Rightarrow L: x(2\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)+\underbrace{y'(-2\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)}_{0}+15=0 \ldots\ldots (II)$$

$$-\operatorname{sen}\theta+\cos\theta=0 \Rightarrow \cos\theta=2\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$



$\frac{1}{2}=tg\theta \Rightarrow$ la $tg\theta$ es $(+)$: I y III cuadrante

* Como θ es un ángulo agudo : θ está en el I cuadrante :

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

* En (I) :

$$L: x'\left(\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+15=0 \Rightarrow L: \frac{5}{\sqrt{5}x'}=-15 \Rightarrow \boxed{L: x'=-3\sqrt{5}}$$

PROBLEMA 26 :

Se tiene la recta $L : x+y-5=0$. luego se hacen girar los ejes un ángulo θ. La recta L en el último sistema tiene una pendiente igual $a-6$. Hallar la ecuación de L en el sistema final.

RESOLUCIÓN :

$$L: \underbrace{x+y-5=0}_{\text{sistema } xy} \Rightarrow \theta \Rightarrow \underbrace{m_L=-6}_{x'y'}$$

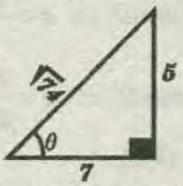
$$x=x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \wedge y=x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$

* Pasando la recta L al sistema final :

$$L: x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta + x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta - 5=0$$
$$L: x'(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)+y'(-\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)-5=0 \ldots\ldots (I)$$

* Por dato del problema :

$$\frac{-(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}{-\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}=-6 \Rightarrow -\cos\theta-\operatorname{sen}\theta=6\operatorname{sen}\theta-6\cos\theta$$
$$\Rightarrow 5\cos\theta=7\operatorname{sen}\theta$$



$\frac{5}{7}=tg\theta \Rightarrow$ la $tg\theta$ es $(+)$: I y III cuadrante

* Si θ estuviera en el II cuadrante :

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{5}{\sqrt{74}} \quad ; \quad \cos\theta=\frac{7}{\sqrt{74}}$$

* En (I) : $L: x'\left(\frac{7}{\sqrt{74}}+\frac{5}{\sqrt{74}}\right)+y'\left(-\frac{5}{\sqrt{74}}+\frac{7}{\sqrt{74}}\right)-5=0$

$$L: \frac{12}{\sqrt{74}}x'+\frac{2}{\sqrt{74}}y'-5=0 \Rightarrow L: 12x'+2y'-5\sqrt{74}=0$$

Si θ estuviera en el III cuadrante :

* En (I) : $\operatorname{sen}\theta=-\frac{5}{\sqrt{74}} \quad ; \quad \cos\theta=-\frac{7}{\sqrt{74}}$

$$L: x'\left(-\frac{7}{\sqrt{74}}+\frac{-5}{\sqrt{74}}\right)+y'\left(\frac{5}{\sqrt{74}}-\frac{7}{\sqrt{74}}\right)-5=0$$
$$\Rightarrow L: \frac{-12}{\sqrt{74}}x'-\frac{2}{\sqrt{74}}y'-5=0$$
$$\Rightarrow L: -12x'-2y'-5\sqrt{74}=0 \Rightarrow \boxed{L: 12x'+2y'+5\sqrt{74}=0}$$

PROBLEMA 27 :

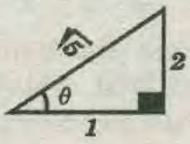
Se tiene la recta $L : 2x-y+20=0$, luego se giran los ejes un ángulo θ. Si la recta L en el sistema final es horizontal ; hallar la ecuación de L en el sistema $X'Y'$.

RESOLUCIÓN :

$$L: 2x-y+20=0 \Rightarrow \theta \Rightarrow x'y'$$
$$\downarrow$$
L : es horizontal
$L: y'=\#$

* Pasando la ecuación de L al sistema final usando las fórmulas de rotación :

$$x=x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$$
$$y=x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$
$$L: 2(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)-(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)+20=0$$
$$L: 2x'\cos\theta - 2y'\operatorname{sen}\theta - x'\operatorname{sen}\theta - y'\cos\theta + 20=0$$
$$L: \underbrace{x'(2\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)}_{0}+y'(-2x'\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)+20=0 \ldots\ldots (I)$$



$$2\cos\theta-\operatorname{sen}\theta=0 \Rightarrow 2\cos\theta=\operatorname{sen}\theta$$
$$\Rightarrow 2=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \Rightarrow tg\theta=2$$

$\Rightarrow$ la tg es $(+)$: en el (I) y (III) cuadrante

* Si θ estuviera en el I cuadrante .

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{2}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

* En (I) :

$$L: y'\left(\frac{-4}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-20$$
$$L: \frac{-5}{\sqrt{5}}x'=-20 \Rightarrow L: y'=4\sqrt{5}$$

*Si θ estuviera en el III cuadrante

$$\operatorname{sen}\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}} \ ; \ \cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

* En (I) : $L: y'\left(\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-20$

$$L: \frac{5}{\sqrt{5}}x'=-20 \Rightarrow L: y'=-4\sqrt{5}$$

PROBLEMA 28 :

Después de la rotación del sistema XY, según un ángulo de $45°$, la ecuación $Ax^2+Bxy+cy^2=0$ se transforma en $2x'^2+y'^2=0$, Hallar $A^2+B^2+C^2$.

RESOLUCIÓN :

$Ax^2+Bxy+Cy^2=0 \Rightarrow \theta \Rightarrow 2x'^2+y'^2=0$

$x=x'\cos\theta-y'sen\theta \Rightarrow x=x'\cos45°-y'sen45° \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'$

$y=x'sen\theta+y'\cos\theta \Rightarrow y=x'sen45°+y'sen45° \Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$

$$\Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2+B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}x'\right)+C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2=0$$

$$A\left(\frac{1}{2}x'^2-x'y'+\frac{1}{2}y'^2\right)+B\left(\frac{1}{2}x'^2-\frac{1}{2}y'^2\right)+C\left(\frac{1}{2}x'^2+x'y'+\frac{1}{2}y'^2\right)=0$$

$$\Rightarrow x'^2\underbrace{\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}_{2}+y'^2\underbrace{\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}_{1}+x'y'\underbrace{(-A+C)}_{0}=0$$

$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=2 \Rightarrow A+B+C=4$ .....(I)

$\frac{A}{2}-\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=1 \Rightarrow A-B+C=2$ .....(II)

$-A+C=0 \Rightarrow C=A$ .....(III)

*(III) en (I) : $A+B+A=4 \Rightarrow 2A+B=4$

*(III) en (II): $A+B+C=2 \Rightarrow 2A-B=2$

* Sumando :

$$4A=6 \Rightarrow A=\frac{3}{2}$$

* En (IV): $2\left(\frac{3}{2}\right)-B=2 \Rightarrow B=1$

* En (I) : $C=\frac{3}{2} \Rightarrow A^2+B^2+C^2=\frac{9}{4}+1+\frac{9}{4}=\frac{22}{4}=\frac{11}{2}$

* Como se observa para resolver este problema hemos pasado del sistema inicial al final. Ahora veremos otra forma de resolver este problema pasando del sistema final al inicial.

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=0 \Rightarrow \theta \Rightarrow 2x'^2+y'^2=0$$

* Usaremos éstas fórmulas de rotación :

$$\begin{cases} x'=x\cos\theta+ysen\theta \\ y'=-xsen\theta+y\cos\theta \end{cases}$$

$$x'=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y \wedge y'=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y$$

$$\Rightarrow 2x'^2+y'^2=0 \Rightarrow 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2=0$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{x^2}{2}+xy+\frac{y^2}{2}\right)+\frac{x^2}{2}-xy+\frac{y^2}{2}=0 \Rightarrow x^2+2xy+y^2+\frac{x^2}{2}-xy+\frac{y^2}{2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x^2+xy+\frac{3}{2}y^2=0 \Rightarrow A=\frac{3}{2};\ B=1;\ C=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow A^2+B^2+C^2=\frac{9}{4}+1+\frac{9}{4}=\frac{22}{4}=\frac{11}{2}$$

PROBLEMA 29 :

Mediante una rotación de ejes simplificar la ecuación $3x^2+2xy+3y^2=18$. de modo que la curva carezca del término rectangular xy.

RESOLUCIÓN :

$$3x^2+2xy+3y^2=18 \text{ .....(I)}$$

* Angulo de rotación :

$$tag2\theta=\frac{B}{A-B}=\frac{2}{3-3}=\frac{2}{0}=\infty \Rightarrow 2\theta=90° \Rightarrow \theta=45°$$

$x=x'\cos\theta-y'sen\theta \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'$ .....(I)

$y=x'sen\theta+y'\cos\theta \Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$ .....(II)

* (I) y (II) en (I) :

$$3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)+3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2=18$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{x'^2}{2}-x'y'+\frac{y'^2}{2}\right)+2\left(\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{2}\right)+3\left(\frac{x'^2}{2}+x'y'+\frac{y'^2}{2}\right)=18$$

$$\Rightarrow \frac{3x'^2}{2}-3x'y'+\frac{3y'^2}{2}+x'^2-y'^2+\frac{3x'^2}{2}+3x'y'+\frac{3y'^2}{2}=18$$

$$\Rightarrow 4x'^2+2y'^2=18 \Rightarrow \boxed{2x'^2+y'^2=9}$$

PROBLEMA 30 :

Mediante una rotación de ejes simplificar la ecuación: $x^2+4\sqrt{3}xy-3y^2=36$ de manera que la curva carezca del término rectangular xy.

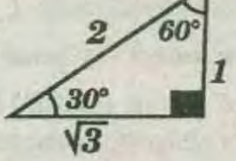
RESOLUCIÓN :

$$x^2+4\sqrt{3}xy-3y^2=36 \text{ .....(I)}$$

* Ángulo de rotación :

$$tag2\theta=\frac{B}{A-C}=\frac{4\sqrt{3}}{1-(-3)}=\sqrt{3}$$

$\Rightarrow 2\theta=60° \Rightarrow \theta=30°$



* Ecuaciones de rotación :

$x=x'\cos\theta-y'sen\theta \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y'$ .....(I)

$y=x'sen\theta+y'\cos\theta \Rightarrow y=\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'$ .....(II)

* (I) y (II) en (I) :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y'\right)^2+4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y'\right)\left(\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)-3\left(\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2=36$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}x'^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x'y'+\frac{1}{4}y'^2+4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x'^2+\frac{3}{4}x'y'-\frac{1}{4}x'y'-\frac{\sqrt{3}}{4}y'^2\right)-3\left(\frac{x'^2}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}x'y'+\frac{3}{4}y'^2\right)=36$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}x'^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x'y'+\frac{1}{4}y'^2+3x'^2+3\sqrt{3}x'y'-\sqrt{3}x'y'-3y'^2-\frac{3x'^2}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{2}x'y'-\frac{9}{4}y'^2=36$$

$$\Rightarrow 3x'^2+x'y'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{3}-\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)+y'^2\left(\frac{1}{4}-3-\frac{9}{4}\right)=36 \Rightarrow \boxed{3x'^2-5y'^2=36}$$

PROBLEMA 31 :

Mediante una rotación de ejes simplificar la ecuación $2x^2 - 24xy - 5y^2 + x + 3y + 9 = 0$, de modo que la curva carezca del término rectangular xy.

RESOLUCIÓN :

$2x^2 - 24xy - 5y^2 + x + 3y + 9 = 0$ .....(I)

* Ángulo de rotación :

$$tag2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{-24}{2-(-5)} = \frac{-24}{7}$$

$$\Rightarrow tag2\theta = \frac{-24}{7} \Rightarrow \frac{2tg\theta}{1-tg^2\theta} = \frac{-24}{7}$$

$$\rightarrow 14tg\theta = -24 + 24tg^2\theta \rightarrow 7tg\theta = -12 + 12tg^2\theta$$

$$0 = 12tg^2\theta - 7tg\theta - 12$$

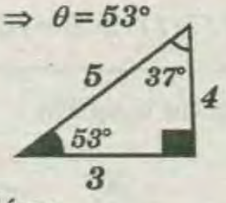
$4tg\theta \quad 3$

$3tg\theta \quad -4$

$4tg\theta + 3 = 0 \Rightarrow tg\theta = \frac{-3}{4}$ ⇒ No cumple porque $\theta > 90°$

$3tg\theta - 4 = 0 \Rightarrow tg\theta = \frac{4}{3}$ ⇒ Si cumple porque θ es agudo

$\Rightarrow \theta = 53°$



* Ecuaciones de rotación :

$x = x'\cos\theta - y'sen\theta \Rightarrow x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'$ .....(II)

$y = x'sen\theta + y'\cos\theta \Rightarrow y = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y'$ .....(III)

* (II) y (III) en (I) :

$$2\left(\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'\right)^2 - 24\left(\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'\right)\left(\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right) - 5\left(\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right)^2 + \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' + 3\left(\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right) + 9 = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{9x'^2}{25} - \frac{24x'y'}{25} + \frac{16y'^2}{25}\right) - 24\left(\frac{12x'^2}{25} + \frac{9x'y'}{25} - \frac{16x'y'}{25} - \frac{12y'^2}{25}\right) - 5\left(\frac{16x'^2}{25} + \frac{24x'y'}{25} + \frac{9y'^2}{25}\right) + \frac{3x'}{5} - \frac{4y'}{5} + \frac{12x'}{5} + \frac{9y'}{5} + 9 = 0$$

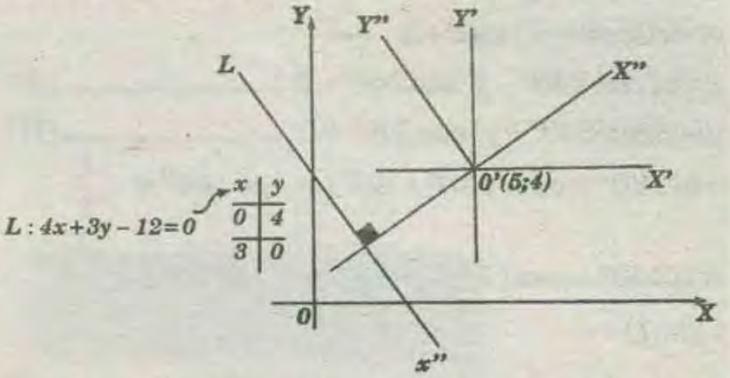
$$\Rightarrow \frac{18x'^2}{25} - \frac{48x'y'}{25} + \frac{32y'^2}{25} - \frac{228x'^2}{25} - \frac{216x'y'}{25} + \frac{384x'y'}{25} + \frac{288y'^2}{25} - \frac{80x'^2}{25} - \frac{120x'y'}{25} - \frac{45y'^2}{25} + \frac{3x'}{5} - \frac{4y'}{5} + \frac{12x'}{5} + \frac{9y'}{5} + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-14x'^2 + 11y'^2 + 3x' + y' + 9 = 0}$$

PROBLEMA 32 :

Sea la recta $L: 4x + 3y - 12 = 0$ en el sistema xy; el origen de coordenadas se traslada al punto $O'(5;4)$ y luego se gira un ángulo agudo θ. Hallar la ecuación de L en el sistema final de manera que L sea vertical en este último sistema $x''y''$.

RESOLUCIÓN :



$x = x''\cos\theta - y''sen\theta + h \Rightarrow x = x''\cos\theta - y''sen\theta + 5$

$y = x''sen\theta + y''\cos\theta + k \Rightarrow y = x''sen\theta + y''\cos\theta + 4$

* Pasando L al último sistema :

$L: 4(x''\cos\theta - y''sen\theta + 5) + 3(x''sen\theta + y''\cos\theta + 4) - 12 = 0$

$L: 4x''\cos\theta - 4y''sen\theta + 20 + 3x''sen\theta + 3y''\cos\theta + 12 - 12 = 0$

$L: x''(4\cos\theta + 3sen\theta) + y''\underbrace{(-4sen\theta + 3\cos\theta)}_{0} + 20 = 0$ .....(I)

$-4sen\theta + 3\cos\theta = 0 \Rightarrow 3\cos\theta = 4sen\theta$

$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{sen\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{3}{4} = tg\theta$

⇒ La tg es $(+)$: I y II cuadrante

* Como θ es agudo : está en el I cuadrante :

$$sen\theta = \frac{3}{5} \quad \wedge \quad \cos\theta = \frac{4}{5}$$

* En (I) :

$$L: x''\left(\frac{16}{5} + \frac{9}{5}\right) + 20 = 0$$

$$L: 5x'' + 20 = 0 \Rightarrow \boxed{L: x'' = -4}$$

PROBLEMA 33 :

Sea $x'y'$ el sistema de coordenadas obtenido por traslación del sistema xy siendo $O'(-3;2)$. El sistema $x'y'$ rota con un ángulo de $120°$ en sentido horario. Si las coordenadas del punto P en el sistema final es $P'(6;2)$; hallar la suma de las coordenadas de P en el sistema inicial xy.

RESOLUCIÓN :

$P(x;y) \Rightarrow O'(-3;2) \Rightarrow \theta = 120°$ horario $\Rightarrow P'(6;2)$

$\downarrow$ xy $\qquad$ $\downarrow$ $x''y''$

NOTA :

El ángulo de giro debe estar siempre en sentido antihorario ; como el problema nos da el ángulo en sentido horario : $\theta = 360° - 120° = 240°$

$x=x''\cos\theta-y''sen\theta+h$

$y=x''sen\theta+y''\cos\theta+k$

$x=x''\cos 240°-y''sen240°-3$ .....(I)

$y=x''sen240°+y''\cos 240°+2$ .....(II)

$\cos 240°=\cos(180°+60°)=-\cos 60°=-\frac{1}{2}$

$sen240°=sen(180°+60°)=-sen60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

* En (I) :

$x=6\left(-\frac{1}{2}\right)-2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-3 \Rightarrow x=-3+\sqrt{3}-3=-6+\sqrt{3}$

* En (II) :

$y=6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\left(-\frac{1}{2}\right)+2 \Rightarrow y=-3\sqrt{3}-1+2=1-3\sqrt{3}$

$\Rightarrow P(x;y)=P(-6+\sqrt{3};1-3\sqrt{3}) \Rightarrow x+y=-6+\sqrt{3}+1-3\sqrt{3}=-5-2\sqrt{3}$

PROBLEMA 34 :

Se tiene las rectas $L_1: 3x+4y-43=0$ y $L_2: 4x-3y+16=0$. Se traslada el origen al punto $O'(4;4)$ y luego se giran los ejes $53°$. Hallar el área de la figura formada por los ejes x'' ; y'' y L_1 y L_2 en el último sistema $x''y''$.

RESOLUCIÓN :

$\left.\begin{matrix} L_1: 3x+4y-43=0 \\ L_2: 4x-3y+16=0 \end{matrix}\right\} O'(4;4) \Rightarrow \theta=53° \Rightarrow x''y''$

* Usando las fórmulas de traslación y rotación :

$x=x''\cos\theta-y''sen\theta+h \Rightarrow x=\frac{3}{5}x''-\frac{4}{5}y''+4$

$y=x''sen\theta+y''\cos\theta+k \Rightarrow y=\frac{4}{5}x''+\frac{3}{5}y''+4$

* Pasando la recta L_1 del sistema inicial al final :

$L_1: 3\left(\frac{3}{5}x''-\frac{4}{5}y''+4\right)+4\left(\frac{4}{5}x''+\frac{3}{5}y''+4\right)-43=0$

$L_1: \frac{9}{5}x''-\frac{12}{5}y''+12+\frac{16}{5}x''+\frac{12}{5}y''+16-43=0$

$L_1: 5x''-15=0 \Rightarrow L_1: x''=3$ Luego L_1 es una recta vertical.

* Pasando la recta L_1 del sistema inicial al final :

$L_2: 4\left(\frac{3}{5}x''-\frac{4}{5}y''+4\right)-3\left(\frac{4}{5}x''+\frac{3}{5}y''+4\right)+16=0$

$L_2: \frac{12}{5}x''-\frac{16}{5}y''+16-\frac{12}{5}x''-\frac{9}{5}y''-12+16=0$

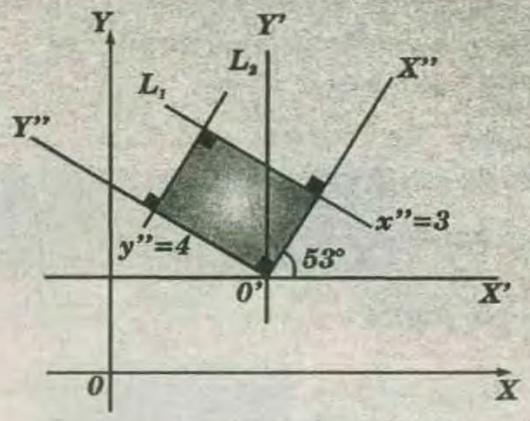
$L_2: -5y''+20=0 \Rightarrow L_2: y''=4$

Luego L_2 es una recta horizontal

* El gráfico de la figura formado por 4 rectas que se encuentran en el último sistema es :

$\Rightarrow$ La figura formada por $L_1; L_2; x''; y''$ es un rectángulo

Área $\square = 3\times 4 = 12$



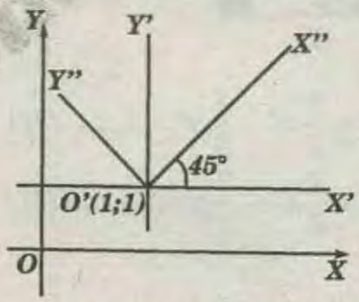
PROBLEMA 35 :

Por una traslación de ejes coordenados al nuevo origen $O'(1;1)$ y luego una rotación de los ejes en un ángulo de $45°$ la ecuación de cierta curva se trasformó en $x''^2-2y''^2=2$

RESOLUCIÓN :

$x\ y \Rightarrow O'(1;1) \Rightarrow \theta=45° \Rightarrow x''^2-2y''^2=2$

* Por fórmulas de rotación :



representa al sistema inicial

$x'=x\cos\theta+ysen\theta$

$y'=-xsen\theta+\cos\theta$

representa al sistema final

* Adaptando estas fórmulas al problema :

$x''=x'\cos\theta+y'sen\theta$ .....(I)

$y''=-x'sen\theta+y'\cos\theta$ .....(II)

* Como $\theta=45° \Rightarrow sen45°=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$

* En (I): $x''=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$

* En (II): $y''=-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$

* En la ecuación $x''^2-2y''^2=2$,reemplazamos la ecuación (I) y (II):

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2-2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2=2$

$$\Rightarrow \frac{x'^2}{2}+x'y'+\frac{y'^2}{2}-2\left(\frac{x'^2}{2}-x'y'+\frac{y'^2}{2}\right)=2$$

$$\Rightarrow \frac{x'^2}{2}+x'y'+\frac{y'^2}{2}-x'^2+2x'y'-y'^2=2$$

$$\Rightarrow x'^2+2x'y'+y'^2-2x'^2+4x'y'-2y'^2=4$$

$$\Rightarrow 6x'y'-x'^2-y'^2-4=0 \quad .....(\psi)$$

*Por traslación :

$$x=x'+h \Rightarrow x'=x-h \Rightarrow x'=x-1$$
$$y=y'+k \Rightarrow y'=y-k \Rightarrow y'=y-1$$

* En (ψ) :

$$6(x-1)(y-1)-(x-1)^2-(y-1)^2-4=0$$
$$\Rightarrow 6(xy-x-y+1)-(x^2-2x+1)-(y^2-2y+1)-4=0$$
$$\Rightarrow 6xy-6x-6y+6-x^2+2x-1-y^2+2y-1-4=0$$
$$\Rightarrow 6xy-4x-4y-x^2-y^2=0$$
$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2-6xy+4x+4y=0}$$

OTRO MÉTODO DE SOLUCIÓN :

Usando las fórmulas de rotación y traslación (simultáneamente) :

$$x=x''\cos\theta-y''\operatorname{sen}\theta+h$$
$$y=x''\operatorname{sen}\theta+y''\cos\theta+k$$

$$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}x''-\frac{\sqrt{2}}{2}y''+1 \quad .....(I)$$
$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x''+\frac{\sqrt{2}}{2}y''+1 \quad .....(II)$$

*Sumando :

$$x+y=\sqrt{2}x''+0+2 \Rightarrow \frac{x+y-2}{\sqrt{2}}=x'' \quad .....(III)$$

* *(III)* en *(I)* :

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}y''+1 \Rightarrow x=\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}y''+1$$

$$\Rightarrow 2x=x+y-2-\sqrt{2}y''+2 \Rightarrow \frac{x-y}{-\sqrt{2}}=y'' \quad .....(IV)$$

* Reemplazando *(III)* y *(IV)* en la ecuación :

$$x''^2-2y''^2=2 \Rightarrow \left(\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}\right)^2-2\left(\frac{x-y}{-\sqrt{2}}\right)^2=2$$

$$\Rightarrow \frac{((x+y)-2)^2}{2}-\frac{2(x^2-2xy+2y^2)}{2}=2$$

$$\Rightarrow \frac{(x+y)^2-4(x+y)+4}{2}-\frac{(2x^2-4xy+2y^2)}{2}=2$$

$$\Rightarrow x^2+2xy+y^2-4x-4y+4-2x^2+4xy-2y^2=4$$
$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2-6xy+4x+4y=0}$$

PROBLEMA 36 :

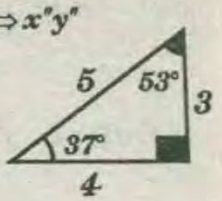
Se tiene una recta L: $x+y-E=0$, luego se produce una traslación al punto $O'(2;1)$ y después se giran los ejes un ángulo de $53°$. Hallar la ecuación de L y el valor de *'E'* en el sistema final $x''y''$, si se sabe que en este sistema la ordenada al origen es -25.

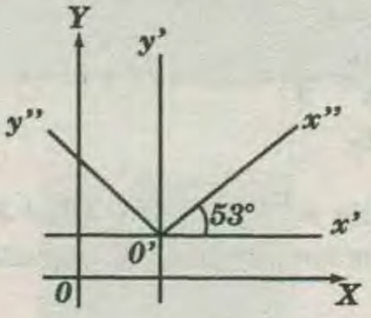
RESOLUCIÓN :

$L: x+y-E=0 \Rightarrow O'(2;1) \Rightarrow \theta=53° \Rightarrow x''y''$

$x=x''\cos\theta-y''\operatorname{sen}\theta+h$

$y=x''\operatorname{sen}\theta+y''\cos\theta+k$





$$x=\frac{3}{5}x''-\frac{4}{5}y''+2$$
$$y=\frac{4}{5}x''+\frac{3}{5}y''+1$$

$$\Rightarrow L: \frac{3}{5}x''-\frac{4}{5}y''+2+\frac{4}{5}x''+\frac{3}{5}y''+1-E=0$$

$$\Rightarrow L: \frac{7}{5}x''-\frac{1}{5}y''+3-E=0$$

$$\Rightarrow L: 7x''-y''+15-5E=0$$

x''	y''
0	$15-5E$

$$\Rightarrow 15-5E=-25 \Rightarrow 40=5E \Rightarrow 8=E$$
$$\Rightarrow L: 7x''-y''+15-5(8)=0$$
$$\Rightarrow \boxed{L: \ 7x''-y''-25=0}$$

PROBLEMA 37 :

Se tiene la recta L:$4x-3y+16=0$, se traslada el origen al punto $O'(4;4)$ y luego se giran los ejes un ángulo agudo de θ. Si la recta L en el último sistema es horizontal ; hallar la ecuación de L en el sistema final.

RESOLUCIÓN :

$L: 4x-3y+16=0 \Rightarrow O'(4;4) \Rightarrow x''y''$

L, es horizontal : $L: y''=\#$

$$\left.\begin{aligned} x&=x''\cos\theta-y''\operatorname{sen}\theta+4 \\ y&=x''\operatorname{sen}\theta+y''\cos\theta+4 \end{aligned}\right\}$$ Fórmulas de transformación

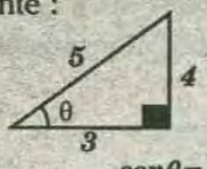
$$\Rightarrow L: 4(x''\cos\theta-y''\operatorname{sen}\theta+4)-3(x''\operatorname{sen}\theta+y''\cos\theta+4)+16=0$$
$$L: \quad 4x''\cos\theta-4y''\operatorname{sen}\theta+16-3x''\operatorname{sen}\theta-3y''\cos\theta-12+16=0$$
$$L: \quad x''\underbrace{(4\cos\theta-3\operatorname{sen}\theta)}_{0}+y''(-4\operatorname{sen}\theta-3\cos\theta)+20=0 \quad .....(I)$$

$$\Rightarrow 4\cos\theta-3\operatorname{sen}\theta=0 \Rightarrow 4\cos\theta=3\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \frac{4}{3}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{4}{3}=\operatorname{tg}\theta$$

La *tg* es *(+)*: *I* y *III* cuadrante

Solo GRATIS.com

* Como según el problema θ es agudo :está en el *I* cuadrante :



$$sen\theta=\frac{4}{5} \wedge \cos\theta=\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \text{En}(I): L:\ y''\left(-4\left(\frac{4}{5}\right)-3\left(\frac{3}{5}\right)\right)+20=0$$

$$\Rightarrow L: y''\left(\frac{-16}{5}-\frac{9}{5}\right)=-20 \Rightarrow \boxed{L:\ y''=4}$$

PROBLEMA 38 :

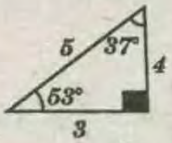
Dada la circunferencia $x^2+y^2-8x-10y+37=0$ Hallar la nueva ecuación , después de trasladarla al origen y rotarla $53°$.

RESOLUCIÓN :

$x^2+y^2-8x-10y+37=0 \Rightarrow O'(0;0) \Rightarrow \theta=53° \Rightarrow x''y''$

$x=x''\cos\theta-y''sen\theta+h$

$y=x''sen\theta+y''\cos\theta+k$



$$x=x''\cos 53°-y''sen53° \Rightarrow x=\frac{3}{5}x''-\frac{4}{5}y''$$

$$y=x''sen53°+y''\cos 53° \Rightarrow y=\frac{4}{5}x''+\frac{3}{5}y''$$

$$\Rightarrow\left(\frac{3}{5}x'-\frac{4}{5}y'\right)^2+\left(\frac{4}{5}x'+\frac{3}{5}\right)^2-8\left(\frac{3}{5}x'-\frac{4}{5}y'\right)-10\left(\frac{4}{5}x'+\frac{3}{5}y'\right)+37=0$$

$$\frac{9}{25}x''^2-\frac{24}{25}x'y'+\frac{16}{25}y''^2+\frac{16}{25}x''^2+\frac{24}{25}x'y'$$

$$+\frac{9}{25}y''^2-\frac{24}{5}x'+\frac{32}{5}y'-8x'-6y'+37=0$$

$$\Rightarrow x''^2+y''^2-\frac{64}{5}x'+\frac{2}{5}y'+37=0 \Rightarrow \boxed{5x''^2+5y''^2-64x'+2y'+185=0}$$

PROBLEMA 39 :

Se tiene L: $2x-y-6=0$, luego se hace una traslación y después se giran los ejes un ángulo θ que está en el *II* cuadrante. La pendiente de L en el último sistema $x''y''$ es -3. La recta L en el sistema xy pasa por el punto $A(4;2)$ y este punto A en el sistema $x''y''$ tiene por coordenadas $(3\sqrt{2};\sqrt{2})$. Hallar el origen trasladado sabiendo que este origen está en la parte positiva del eje 'X'.

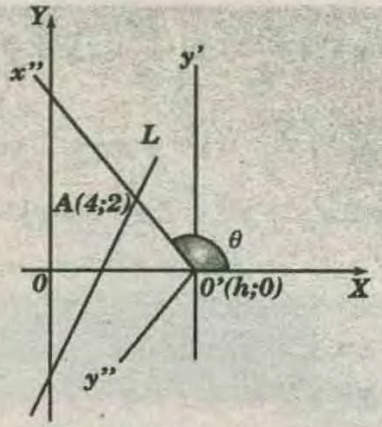
RESOLUCIÓN :

$L: 2x-y-6=0$

x	y
0	-6
3	0

$xy \Rightarrow O'(h;k) \Rightarrow \hat{\theta} \Rightarrow x''y''$

$A(4;2) \Rightarrow A(3\sqrt{2};\sqrt{2}) \Rightarrow O'(h;0)=?$



$x=x''\cos\theta-y''sen\theta+h$

$y=x''sen\theta+y''\cos\theta+k$

$\Rightarrow x=x''\cos\theta-y''sen\theta+h$ .....*(I)*

$y=x''sen\theta+y''\cos\theta$ .....*(II)*

$\Rightarrow A(4;2) \Rightarrow$ sistema $xy: x=4 \quad y=2$

$\Rightarrow A(3\sqrt{2};\sqrt{2}) \Rightarrow$ sistema $x''y''$

$\Rightarrow x''=3\sqrt{2}\ ;\ y''=\sqrt{2}$

* Reemplazando en *(I)* :

$$4=3\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}sen\theta+h \text{.....(III)}$$

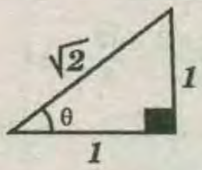
* Ahora pasaremos la recta L , del sistema inicial al final utilizando las fórmulas de transformación *(I)* y *(II)*:

$L: 2(x''\cos\theta-y''sen\theta+h)-(x''sen\theta+y''\cos\theta)-6=0$

$\Rightarrow L: 2x''\cos\theta-2y''sen\theta+2h-x''sen\theta-y''\cos\theta-6=0$

$\Rightarrow L: x''(2\cos\theta-sen\theta)+y''(-2sen\theta-\cos\theta)+2h-6=0$

* Por Dato : $m_L=-3 \Rightarrow \dfrac{-(2\cos\theta-sen\theta)}{-2sen\theta-\cos\theta}=-3$



$-2\cos\theta+sen\theta=6sen\theta+3\cos\theta$

$\Rightarrow -5\cos\theta=5sen\theta$

$\Rightarrow -1=tg\theta \Rightarrow$ La *tg* es *(−)*: *II* y *IV* cuadrante

* Como según,el enunciado θ está en el *II* cuadrante

$$sen\theta=\frac{1}{\sqrt{2}} \ ;\ \cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

* Reemplazando en *(III)*:

$$4=3\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+h$$

$$\Rightarrow 4=-3-1+h \Rightarrow h=8 \Rightarrow O'(8;0)$$

PROBLEMA 40 :

Mediante una transformación de coordenadas (rotación luego traslación) expresar la ecuación $xy-4x+y-12=0$ en una ecuación de la forma

$\frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=1$; donde $x'=x''+h$

$y'=y''+k$

RESOLUCIÓN :

$$xy-4x+y-12=0 \Rightarrow \frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=1$$

Sistema xy ***Sistema x'' y''***

* Como se aprecia al pasar del sistema inicial al final se pierde el término rectangular . Eliminando el término rectangular : $xy-4x+y-12=0$ .....*(I)*

$$tg\,2\theta=\frac{B}{A-C}=\frac{1}{0-0}=\frac{1}{0}=\infty \Rightarrow 2\theta=90° \Rightarrow \theta=45°$$

* Ecuación de rotación :

$$x=x'cos\theta-y'sen\theta \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y' \text{ .....(I)}$$

$$y=x'sen\theta+y'cos\theta \Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y' \text{ .....(II)}$$

* *(I)* y *(II)* en *(I)*:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)-4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'-12=0$$

$$\Rightarrow \frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{2}-2\sqrt{2}x'+2\sqrt{2}y'+\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'-12=0$$

$$\Rightarrow x'^2-y'^2-3\sqrt{2}x'+5\sqrt{2}y'-24=0 \text{ .....(II)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x'^2}{16}-\frac{y'^2}{16}=1}$$

* Por Traslación : $x'=x''+h$

$y'=y''+k$

* En *(II)* :

$$(x'+h)^2-(y'+k)^2-3\sqrt{2}(x'+h)+5\sqrt{2}(y'+k)-24=0$$

$$x'^2+2hx'+h^2-y'^2-2ky'-k^2-3\sqrt{2}x'-3\sqrt{2}h+5\sqrt{2}y'+5\sqrt{2}k-24=0$$

$$x'^2-y'^2+x'\underbrace{\left(2h-3\sqrt{2}\right)}_{0}+y'\underbrace{\left(-2k+5\sqrt{2}\right)}_{0}$$

$$+h^2-k^2-3\sqrt{2}h+5\sqrt{2}k-24=0 \text{ ....(III)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}2h-3\sqrt{2}=0\\ \Rightarrow h=\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l}-2k+5\sqrt{2}=0\\ \Rightarrow k=\frac{5\sqrt{2}}{2}\end{array}}$$

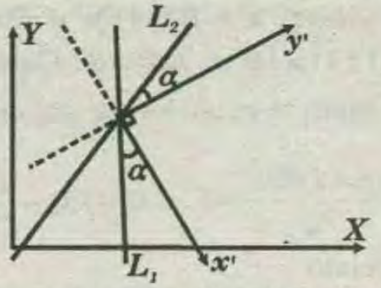
* Reemplazando en *III* :

$$x''^2-y''^2+\frac{9}{2}-\frac{25}{2}-3\sqrt{2}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)+5\sqrt{2}\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)-24=0$$

$$x''^2-y''^2+\frac{9}{2}-\frac{25}{2}-9+25-24=0 \Rightarrow \boxed{\frac{x''^2}{16}-\frac{y''^2}{16}=1}$$

PROBLEMA 41 :

En la figura L_1: $\begin{cases}x=3+t\,;t\in R\\ y=3-t\end{cases}$ y $L_2: 7x-y-10=0$



Son dos rectas , tales que ; $P_O=L_1\cap L_2$ es el nuevo origen de coordenadas. Si los ángulos que forman L_1 con x' y L_2 con y' son iguales .

Hallar las ecuaciones vectoriales L_1 y L_2 en el sistema $x'y'$.

RESOLUCIÓN :

* vectorialmente se tiene :

$$L_1=\{(3;3)+t(1;-1)/t\in\mathbb{R}\} \Rightarrow m_1=-1$$

$$L_2=\{(0;-10)+r(1;7)/r\in\mathbb{R}\} \Rightarrow m_1=7$$

$$\Rightarrow P_O=L_1\cap L_2=(2;4)$$

* Ademas :

$$tg\alpha=\frac{m_2-m_{y'}}{1+m_2m_{y'}}=\frac{m_{x'}-m_1}{1+m_1m_{x'}}\,;x'\perp y' \Rightarrow m_{x'}=\frac{1}{m_{y'}}$$

* Resolviendo : $m_{x'}=-\frac{1}{2}$; $m_{y'}=2$

* Vector direccional : $x'=(1;m_{x'})=(1;-\frac{1}{2})$

* Vector rotación : $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2;-1)$

* Por lo tanto , cualquier punto del sistema xy estará en el nuevo sistema $x'y'$ por :

$$(x;y)=P_0+x'\vec{u}+y'\vec{u}^{\perp}=(2;4)+\frac{1}{5}(2;-1)x'+\frac{1}{5}(1;2)y'$$

* de donde :

$$x=2+\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y' \text{ .....(I)}$$

$$y=4-\frac{1}{5}x'+\frac{2}{5}y' \text{ .....(II)}$$

* L_1 y L_2 se puedan escribir :

$$L_1: x+y=6\,;L_2: 7x-y-10=0 \text{ .....(III)}$$

* *(I)* y *(II)* en *(III)*:

$L_1: x'+3y'=0$ en $x'y'$ $\wedge$ $L_2: 3x'+y'=0$ en $x'y'$

PROBLEMA 42 :

Mediante una traslación paralela de los ejes coordenados , simplificar la siguiente ecuación :

$$x^2+16y^2-8x+16y-12=0$$

RESOLUCION:

WWW.GRATIS.COM

Comparando con: $x^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

$A=1; B=0; C=16 \Rightarrow AC>0$: Elipse .

* Transformando la ecuación se obtiene :

$\frac{(x-4)^2}{32}+\frac{(y+1/2)^2}{2}=1 \Rightarrow 0'=(4;-\frac{1}{2})$, Nuevo Origen Haciendo :

$$\left.\begin{array}{l} x'=x-4 \\ y'=y+\frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \frac{x'^2}{32}+\frac{y'^2}{2}=1$$

* Simplificando : $x'^2+16y'^2-32=0$

PROBLEMA 43 :

Mediante una traslación paralela a los ejes coordenados, simplificar la siguiente ecuación:

$$x^2+16y^2-4x+32y-5=0$$

RESOLUCION:

* El problema es análogo al anterior, por lo tanto se obtiene :

$$x'^2+16y'^2=25 \; ; \; 0'=(2;-1)$$

PROBLEMA 44 :

El sistema de coordenadas XY se traslada al punto $P_o=(7;4)$ y se rota $45°$ en sentido antihorario obteniendose $X'Y'$. Una recta L tiene la siguiente ecuación :

$L=\left\{(\frac{7}{2}\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2})+t\,\vec{a}/t\in\mathbb{R}\right\}$ el sistema $X'Y'$ y

$L=\left\{(7;9)+a\vec{b}/a\in\mathbb{R}\right\}$ en el sistema XY .

I) Hallar la- ecuación vectorial de L en el sistema XY.

II) Las coordenadas del baricentro , en el sistema XY, del triángulo formado por L y los ejes $X'Y'$.

RESOLUCIÓN

*Por dato el nuevo origen es : $P_o=(7;4)$

El vector rotación es $\vec{u}=(\cos 45°; \operatorname{sen} 45°)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1)$

* Por lo tantó, en el nuevo sistema $X'Y'$, cualquier punto del sistema XY , estará representado por :

$$(x;y)=P+x'\vec{u}^{\perp}=(7;4)+x'\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1)+y'\frac{1}{\sqrt{2}}(-1;1).....(\alpha)$$

Sea $R'=(\frac{7}{2}\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2})$ un punto de L , en el sistema $X'\,Y'$ luego , transformando al sistema XY , tendremos:

En $(\alpha): R=(7;4)+\frac{7}{2}\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1)-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}(-1;1)$

$R=(11;7) \Rightarrow (7;9)$ y $(11;7)$ pertenecen a L .

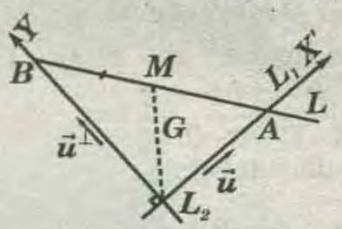
si $\vec{a}$ es vector direccional de L , entonces :

$$\vec{a}=(11-7;7-9)=2(2;-1) \Rightarrow \vec{b}=(2;-1)$$

Ecuación vectorial de L : $L: \{(7;9)+s(2;-1)/s\in\mathbb{R}\}$

* ***Cálculo del baricentro:***

En el sistema xy : considerando a los ejes x'e y' como dos rectas cualesquiera , tendremos.



$L_1: \{(7;4)+m(1;1)/m\in\mathbb{R}\}$; $L_2: \{(7;4)+n(-1;1)/n\in\mathbb{R}\}$

Intersectando L_1 y L_2 con L , forman el triángulo buscado :

$$L\cap L_1=A=(\frac{31}{3};\frac{22}{3}) \; ; \; L\cap L_2=B=(-3;14)$$

* Sea M, punto medio de $\overline{AB}$; $M=\frac{1}{2}(A+B)$

$$\Rightarrow M=(\frac{11}{3};\frac{32}{3}) \Rightarrow \overline{P_oN}=M-P_o=(\frac{-10}{9};\frac{20}{3})$$

* Sea G el baricentro , entonces :

$$G=P_o+\frac{2}{3}\overline{P_oM}=(7;4)+\frac{2}{3}(\frac{-10}{3};\frac{20}{3})=(\frac{43}{9};\frac{76}{9})$$

PROBLEMA 45 :

Determinar mediante una rotación de ejes, una expresión más simple para la cónica:

$$5x^2-4xy+2y^2+60x+264=0$$

RESOLUCIÓN:

* Analizando :

$B=-4; A=5; C=2 \Rightarrow B^2-4AC<0$: Elipse .

* Pero : $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$; $\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

* Reemplazando : $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{5}}$; $\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{\frac{2}{5}}$

* Luego:

$$x=\vec{x}\cos\alpha-\vec{y}\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow x=(\vec{x}-2\vec{y})/\sqrt{5}$$

$$y=\vec{x}\operatorname{sen}\alpha+\vec{y}\cos\alpha \Rightarrow y=(2\vec{x}+\vec{y})/\sqrt{5}$$

* Sustituyendo en la ecuación de la cónica y efectuando:

$$\vec{x}^2+6\vec{y}^2+\frac{60}{\sqrt{5}}\vec{x}-\frac{120}{\sqrt{5}}\vec{y}+264=0$$

α = Ángulo de rotación.

PROBLEMA 46 :

El punto $F_o=(11\ ;\ 3)$ es el centro de un cuadrado uno de cuyos vértices es $Q=(18;\ 2)$. Si además F_o es el centro de una hipérbola H, cuyas asintotas son las diagonales del cuadrado y si $Comp_{\vec{u}}\overrightarrow{F_oQ}=a$, siendo $\vec{u}$ el vector de rotación del sistema coordenado XY, al sistema $X'Y'$ con origen en F_o y "a", la longitud del semieje transverso de H. Hallar:

I) La ecuación vectorial de la hipérbola H.

II) Las coordenadas de los focos de H, en XY.

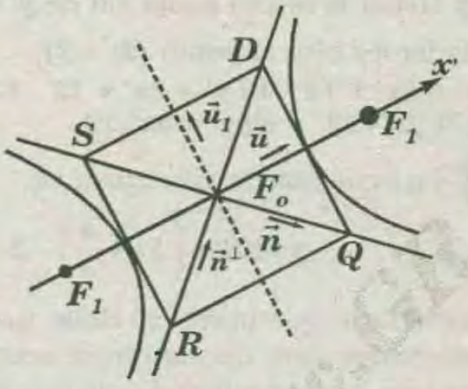
III) Las ecuaciones de las rectas hipérbola directrices de H, en XY.

RESOLUCIÓN :

I) Ecuación vectorial de la Hipérbola :

haciendo: $\overrightarrow{F_oQ}=\vec{n}=(7;-1);\ \vec{n}^{\perp}=(1;7)$

$$r\vec{u}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}+\frac{\vec{n}^{\perp}}{|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{50}}(8;6)\Rightarrow \vec{u}=(\frac{4}{5};\frac{3}{5});\ \vec{u}^{\perp}=(-\frac{3}{5};\frac{4}{5})$$



* Por dato :

$$Comp_{\vec{u}}\overrightarrow{F_oQ}=(7;-1).(\frac{4}{5};\frac{3}{5})=a\Rightarrow a=5$$

* El rectángulo auxiliar de H, es un cuadrado $\Rightarrow b=5$ la ecuación pedida será :

$$H=\left\{(11;3)+x'(\frac{4}{5};\frac{3}{5})+y'(-\frac{3}{5};\frac{4}{5})\right\}$$

Donde : $\frac{x'^2}{25}-\frac{y'^2}{25}=1$.....*Rpta:*

II) Cálculo de los focos :

$F=F_o\pm c\vec{u}$; donde : $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{50}$

$$F_1=(11;3)+\sqrt{50}(\frac{4}{5};\frac{3}{5})=(11+4\sqrt{2};3+3\sqrt{2})$$

$$F_2=(11;3)-\sqrt{50}(\frac{4}{5};\frac{3}{5})=(11-4\sqrt{2};3-3\sqrt{2})$$

III) Directrices de H : $c=ae=\sqrt{50}\Rightarrow e=\sqrt{2}$

de la ecuación de la hipérbola se obtiene :

$(x-11;y-3)=x'u+y'\vec{u}^{\perp}$, donde $\vec{u}=(\frac{4}{5};\frac{3}{5})$

* Multiplicando *m.a.m.* por $\vec{u}$, se obtiene :

$$(x-11\ ;\ y-3).(\frac{4}{5};\frac{3}{5})=x'$$

* Donde : $x'=\pm\frac{a}{e}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

* Reemplazando y efectuando :

$$d_1:\ 8x+6y-(106+25\sqrt{2})=0$$

$$d_2:\ 8x+6y-(106-25\sqrt{2})=0$$

PROBLEMA 47 :

Al realizarse una transformación de coordenadas , el eje de una parábola P resulta orientado según el vector $(3;4)$. En el sistema x',y' un punto $Q'=(20;-20)$ pertenece a P y en el sistema XY el foco de P es $F=(11;5)$.

Determinar en el sístema xy un punto R de P tal que el triángulo QVR sea rectángulo , recto en V (V es un vértice de la parábola).

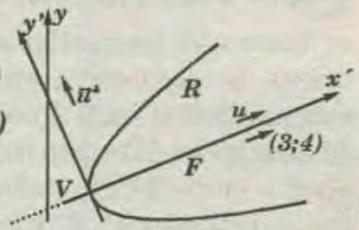
RESOLUCION :

* En el sistema x', y', la ecuación de la parábola será:

$$\mathscr{P}:y'^2=4px'.....(\alpha)$$

$$Q':\in\mathscr{P}\Rightarrow(-20)^2=4p(20)$$

de donde : $p=5$



* Por dato :

$F_{xy}=(11;5)$

$$V_{xy}=F_{xy}-p\vec{u}=(11;5)-5(\frac{3}{5};\frac{4}{5})$$

$V_{xy}=(8;1)$

$$\mathscr{P}=(x;y)=\left\{(8;1)+x'(\frac{3}{5};\frac{4}{5})+y'(-\frac{4}{5};\frac{3}{5})\right\}$$

en $Q'=(20;-20)$ *se tendrá:*

$$(x;y)=\left\{(8;1)+20(\frac{3}{5};\frac{4}{5})+(-20)(-\frac{4}{5};\frac{3}{5})\right\}$$

$\Rightarrow Q=(x;y)=(36;5)$

* Sea $R'=(r_1;r_2)$ el punto $\in\mathscr{P}$, que cumple la condicion del problema :

$$\overrightarrow{R'V}\perp\overrightarrow{VQ}\Rightarrow(r_1;r_2).(20;-20)=0\Rightarrow r_1=r_2$$

* Como $R'\in\mathscr{P}$ debe cumplir su ecuación , luego :

* En (α): $r_2^2=4(5)r_1$

* Resolviendo : $r_1=r_2=20$

* Por lo tanto : $R'=(x';y')=(20;20)$

* En *(I)* :

$$R=(x;y)=\left\{(8;1)+20\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)+20\left(-\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow R=(4;29)$$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 ¿A qué punto debe trasladarse el origen para eliminar el término de primer grado en x y eliminar el término independiente de la ecuación

$$x^2-2x+3y+4=0?$$

RPTA: O'(1;–1)

02 Después de una traslación de ejes de la ecuación $x^2+2x+8y+6=0$ está queda de la forma $Ax'^2+Ey'=C$. Si la suma de las coordenadas del nuevo origen es *3*. Hallar $A+E+C$.

RPTA: A+E+C=–28

03 Se tiene la recta L: $x+(h-1)y-2=0$; luego se hace una traslación al punto $O'(h;k)$. El nuevo origen se encuentra en la recta L_1: $y=3$. En el sistema final la recta L corta a los ejes X' e Y', siendo su abscisa en el origen más su ordenada en el origen igual a cero $(h<1)$. Hallar el área del triángulo que forman los ejes X' ,Y' y la recta L en el sistema final.

RPTA: Area $\Delta=\frac{25}{2}$

04 Se tiene una recta L : $2x+3y+E=0$, luego se traslada el origen al punto $O'(3;3)$. En el sistema final $x'o'y'$ está recta L corta a los semiejes positivos , siendo la abscisa en el origen más la ordenada en el origen igual a *5*. Hallar la ecuación de L en el sistema final.

RPTA: L : 2x'+3y'–6=0

05 Se tiene la ecuación $x+2y+xy+6=0$, luego se traslada el origen al punto $O'(h;k)$ y la ecuación queda de la siguiente forma : $x'y'+4x'+4y'+20=0$. Hallar el origen $O'(h;k)$.

RPTA: O'(2;3)

06 Se trasladan los ejes al punto $(Sec120°;\ Tg^2240°)$. Calcular las coordenadas del punto $P(3;-2)$ en el nuevo sistema.

A) (–5; 5) **B)** (–4; 4) **C)** (2; 1) **D)** (8; 2) **E)** (5; –5)

07 Se traslada los ejes coordenadas al punto $M(8;6)$. Calcular las coordenadas de un punto P en el nuevo sistema $X'Y'$ de manera que el ángulo OPM sea recto y además en el sistema XY el punto P tenga máxima ordenada.

A) (–2; 4) **B)** (2; 4) **C)** (–4; 2) **D)** (–4; –2) **E)** (4;–2)

08 Sea la circunferencia: $x^2+y^2-6x+2y=0$, hallar la ecuación de dicha circunferencia en el nuevo sistema $X'Y'$ luego de trasladar los ejes al punto $(3;-2)$

A) $(X')^2+(Y')^2=13$ **B)** $(X')^2+(Y')^2=4$
C) $(X')^2+(Y')^2=9$ **D)** $(X')^2+(Y')^2=16$
E) $(X')^2+(Y')^2=19$

09 Mediante una traslación de ejes la ecuación:

$$x^2-4y^2+6x+8y+1=0$$

se transforma en $(x')^2-a(y')^2=b$.

Calcular $a+b$.

A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 8 **E)**12

10 Hallar la nueva ecuación de $y=3x$, luego de trasladar los ejes al punto $(5;-3)$.

A) $y'=3x'+12$ **B)** $y'=2x'+12$ **C)** $y'=3x'+18$
D) $y'=4x'+12$ **E)** $y'=5x'-12$

11 La ecuación de una curva es:

$$y=2Sen\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-3$$

Determinar a qué punto se debe trasladar los ejes coordenados para que la nueva ecuación de dicha curva sea: $y'=ASenBx'$; $A<0$. Dar como respuesta la nueva ecuación y las coordenadas del nuevo origen en xy. (Una solución)

A) $y'=2Sen3x', \left(-\frac{\pi}{12};3\right)$ **B)** $y'=-2Sen3x', \left(-\frac{\pi}{4};3\right)$

C) $y'=2Senx', \left(\frac{\pi}{12};3\right)$ **D)** $y'=-2Senx', \left(-\frac{\pi}{4};3\right)$

E) $y'=3Senx', \left(-\frac{\pi}{12};3\right)$

12 Las nuevas coordenadas de un punto son $\left(\frac{3\sqrt{3}-4}{2};\frac{-3-4\sqrt{3}}{2}\right)$ .Hallar las coordenadas originales, si los ejes han sido girados un ángulo de $30°$.

A) (2; 4) **B)** (3; 4) **C)**(2; –4) **D)** (3;–4) **C)** (2; 3)

13 La recta: $y-x=1$, mediante una rotación adecuada, se convierte en el sistema $X'Y'$ en una recta paralela al eje X'. Hallar la ecuación de dicha recta.

A) $y' = \sqrt{2}/2$ B) $y' = -\sqrt{2}/2$ C) $y' = \sqrt{2}$
D) $y' = -\sqrt{2}$ E) $y' = 1$

14 La ecuación de una curva es: $y = Cosx$.

Si los ejes se giran $180°$ se obtiene un nuevo sistema $X'Y'$. Hallar la ecuación de la curva en $X'Y'$.

A) $y' = Senx'$ B) $y' = -Senx'$ C) $x' = Seny'$
D) $y' = -Cosx'$ D) $x' = Cosy'$

15 Mediante una traslación de ejes, eliminar los términos de primer grado de la ecuación:

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 12y - 1 = 0$$

A) $(x')^2 + (y')^2 = 25$ B) $3(x')^2 + 3(y')^2 = 25$
C) $(x')^2 + (y')^2 = 9$ D) $3(x')^2 - 3(y')^2 = 25$
E) $(x')^2 + (y')^2 = 9$

16 Hallar la ecuación que resulta de eliminar el término xy de la ecuación:

$$3x^2 - 9\sqrt{3}xy + 12y^2 = 33$$

A) $\frac{(y')^2}{2} - \frac{(x')^2}{22} = 1$ B) $\frac{(y')^2}{2} + \frac{(x')^2}{22} = 1$
C) $\frac{(y')^2}{22} - \frac{(x')^2}{2} = 1$ D) $\frac{(y')^2}{22} + \frac{(x')^2}{2} = 1$
E) $\frac{(y')^2}{11} - \frac{(x')^2}{2} = 1$

17 Por una rotación de ejes, un ángulo positivo menor de $90°$, transforma la ecuación $2x - \sqrt{5}y + 9 = 0$ en otra que no contiene a la variable x. Hallar dicha ecuación:

A) $y' - 3 = 0$ B) $y' = -3$ C) $|y'| = 3$
D) $y' - 2 = 0$ E) $|y'| = 2$

18 Mediante una adecuada traslación de ejes, eliminar el término de primer grado en "x" de la ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$; también indicar las coordenadas del nuevo origen.

A) $(y')^2 = 3x'; \left(-\frac{2}{5}; 3\right)$ B) $(x')^2 = 3y'; \left(3; \frac{2}{5}\right)$
C) $(x')^2 = -6y'; \left(3; \frac{5}{2}\right)$ D) $(x')^2 = 6y'; \left(\frac{5}{2}; 3\right)$
E) $(y')^2 = 2x'; \left(\frac{2}{5}; -3\right)$

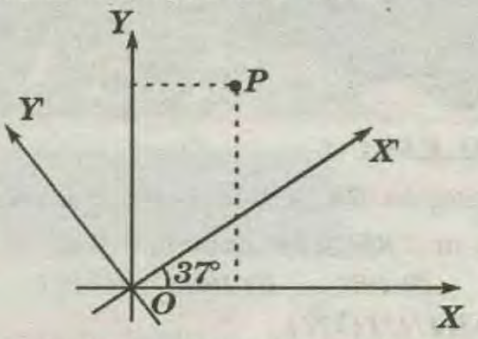
19 Eliminar el término xy dé la ecuación:

y luego de hacer una traslación conveniente se obtiene:

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 10y + 11 = 0$$

A) $3(x'')^2 + (y'')^2 = 3$ B) $3(x'')^2 - (y'')^2 = 3$
C) $3(x'')^2 - 4(y'')^2 = 1$ D) $3(x'')^2 + (y'')^2 = 1$
E) $3(x'')^2 + 2(y'')^2 = 6$

20 Las coordenadas de P en XY son: $(5; 10)$. Calcular las coordenadas de P en $X'Y'$.



A) $(10; 5)$ B) $(8;6)$ C) $(6; 8)$ D) $(3; 4)$ E) $(4; 3)$

TAREA DOMICILIARIA

01 Hallar la ecuación de la tangente a la curva $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$ en el punto $M(3;1)$.

RPTA: $T: x - 2y - 1 = 0$

02 Se tiene una recta $L: 3x + 2y + M = 0$, luego se traslada el origen al punto $O'(4;5)$. En el sistema final la recta L corta a los semiejes positivos, formándose un triángulo de área 12. Hallar la ecuación de L en el sistema final.

RPTA: $L: 3x' + 2y' - 12 = 0$

03 Se tiene la recta $L: 2x - 3y + E = 0$, luego se traslada el origen al punto $O'(6;3)$. En el sistema final $x'y'$ la recta L no pasa por el cuarto cuadrante y forma con los ejes un triángulo cuyo baricentro es $G(-1;2/3)$ Hallar la ecuación de L en el sistema final.

RPTA: $L: 2x' - 3y' + 6 = 0$

04 Dada la recta L: $4x - 3y + 12 = 0$. Se giran los ejes un ángulo agudo θ y la recta L en el sistema final es horizontal. Hallar la ecuación de L en el sistema final.

RPTA: $L: y' = \frac{12}{5}$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)*	2)*	3)*	4)*	5)*	6)E	7)C	8)A	9)D	10)C
11)B	12)D	13)A	14)D	15)B	16)A	17)A	18)D	19)A	20)A

PROBLEMAS RESUELTOS DE REPASO

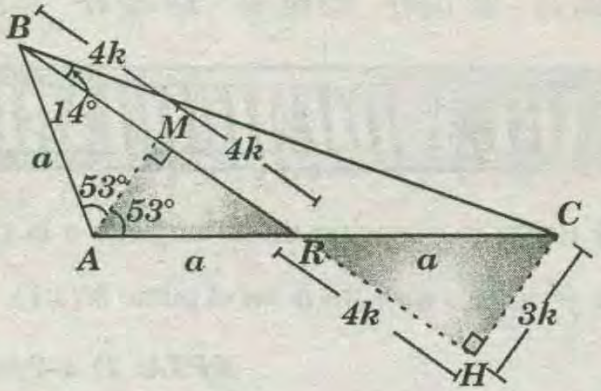
CAPITULO 53

PROBLEMA 1 :

En un triángulo *ABC* se traza la mediana *BR* ; tal que *AB=AR* , $m\sphericalangle RBC=14°$.Halle $m\sphericalangle BAC$

A) 104° B) 105° C) 106° D) 107° E) 108°

RESOLUCIÓN:



* En el triángulo isóceles *ABR* trazamos la mediana AM que también es altura y bisectriz .

* Trazamos $CH \perp BR$

*De : $\triangle AMR \cong \triangle CHR$

*Sea $CH=3K$

Entonces $BH = 4(CH) = 12K$ ($\triangle BHC$ es not.)

*Luego: $BM=MR=RH=4K$

$\triangle RHC$ es not.$(37°$ y $53°)$

Entonces $m\sphericalangle CRH = 37°$

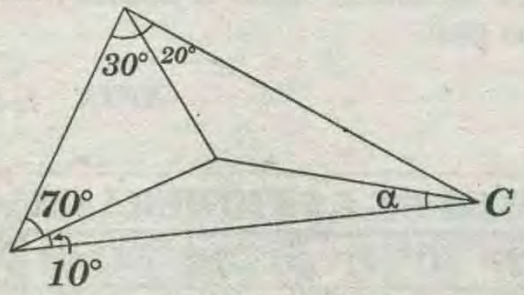
$\triangle ABR$ (isóceles): $x+2(37°)=180°$

* Por lo tanto $x=106°$

RPTA : "C"

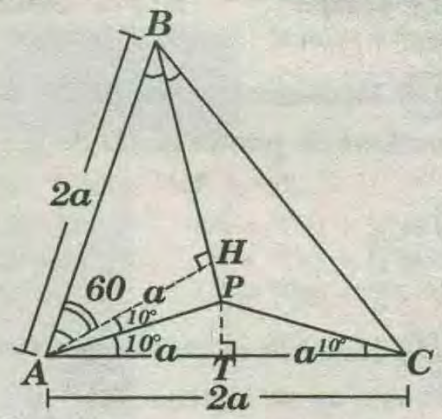
PROBLEMA 2 :

En la siguiente figura , calcule α



A) 9° B)10° C)15° D)22,5° E)30°

RESOLUCIÓN :



* $AB=AC=2a$

* Se traza $\overline{AH} \perp \overline{BP}$: $AH=a$

* Propiedad de la bisectriz :

$AH = AT = a$

$\triangle APC : TC = a \rightarrow AP = PC$

$\Rightarrow \alpha = 10°$

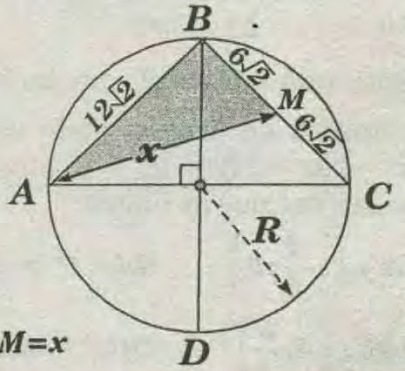
RPTA :"B"

PROBLEMA 3 :

En un círculo de radio *12* se trazan dos diámetros perpendiculares $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Si *M* es el punto medio de la cuerda $\overline{BC}$, halle $\overline{AM}$.

A)$10\sqrt{6}$ B)$\sqrt{380}$ C)$6\sqrt{10}$ D)$6\sqrt{10}+1$ E)$9\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN :



* Se pide :$AM=x$

$\triangle ABM$ de $(53°/2$ y $127°/2)$

$x=(6\sqrt{2})\sqrt{5} \Rightarrow x = 6\sqrt{10}$

RPTA : "C"

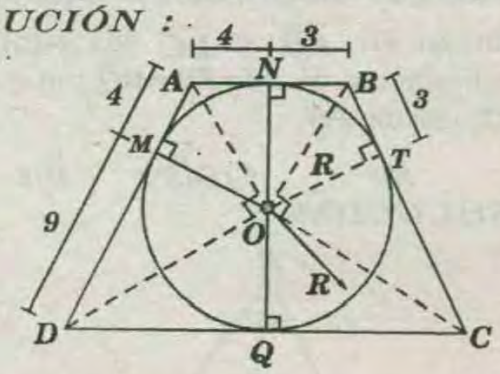
PROBLEMA 4 :

Una de las bases de un trapecio mide *7u*. La circunferencia inscrita al trapecio divide a uno de sus lados no paralelos en dos segmentos de

longitudes $4u$ y $9u$. El área del trapecio es :

A)148 u^2 B)144 u^2 C)158 u^2 D)164 u^2 E)168 u^2

RESOLUCIÓN :



* Sea $ABCD$ el trapecio $(\overline{AB}//\overline{CD})$

* Se pide : S_{ABCD}

* Se sabe : $m\sphericalangle AOB=90°$ y $m\sphericalangle BOC=90°$

R.M. $\triangle AOD$: $R^2=4\times9 \Rightarrow R=6$

$AM=AN=4$, $BN=BT=3$

* R.M. $\triangle BOC$: $R^2=3(TC) \Rightarrow TC=12$

* luego :

$$S_{ABCD}=\left(\frac{21+7}{2}\right)(2R)=168\mu^2$$

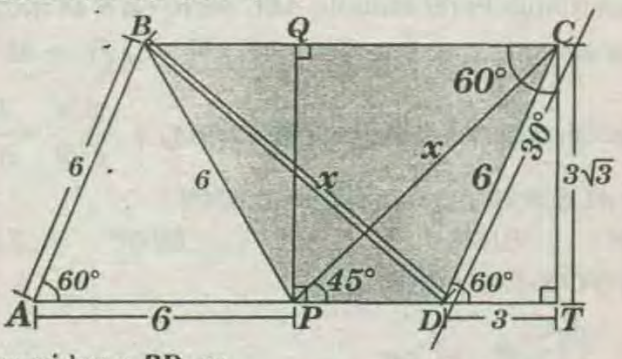
RPTA : "E"

PROBLEMA 5 :

En un romboide $ABCD$ se ubican los puntos P y Q en $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente , tal que $PQCT$ sea un cuadrado. Si $m\sphericalangle BCD=60°$ y $CD=BP=6$, calcule BD.

A)$2\sqrt{10}$ B)$4\sqrt{3}$ C)$2\sqrt{5}$ D)$5\sqrt{5}$ E)$3\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN :



* Nos piden : $BD=x$

* Se observa : $\triangle DCT$: notable $30°$ y $60°$

$\rightarrow DT=3$ y $CT=3\sqrt{3}$

$BP=CD \rightarrow BCDP$ es trapecio isósceles

$BD=PC=x$

* En el cuadrado de $PQCT$:

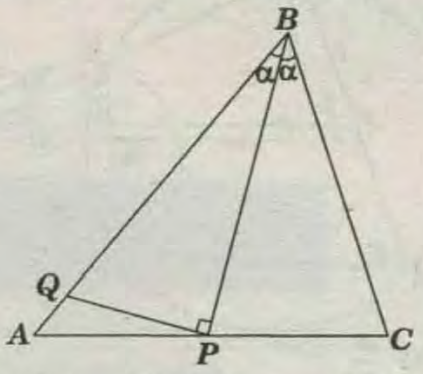
$\triangle DCT$: notable $45°$

$$x=3\sqrt{6}$$

RPTA : "E"

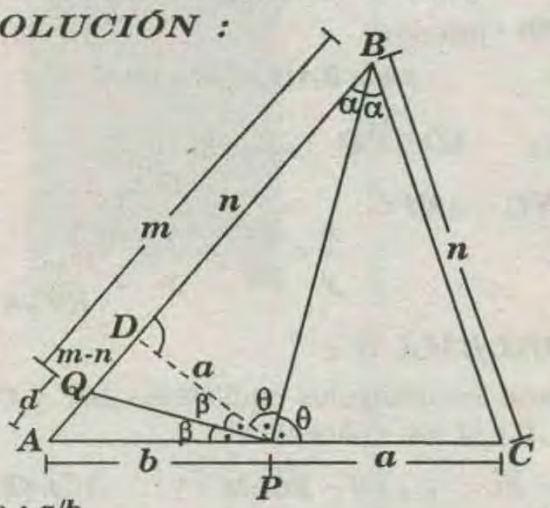
PROBLEMA 6 :

Según el gráfico , $BQ-BC=K(AQ)$. Calcule $\frac{PC}{AP}$



A)K B)K+1 C)1/K D)2/K E)2K

RESOLUCIÓN :



* Piden : a/b

* Dato $m-n=dk$

Se traza $\overline{PD}$, tal que la $m\sphericalangle BDP=m\sphericalangle PCB=\theta$

* Luego : $\triangle DPB \cong \triangle CPB$ caso $(A.L.A)$

$\rightarrow PD=PC=a$; $DB=CB=n$

* Se observa en $\triangle ADP$, (teorema de la bisectriz interior)

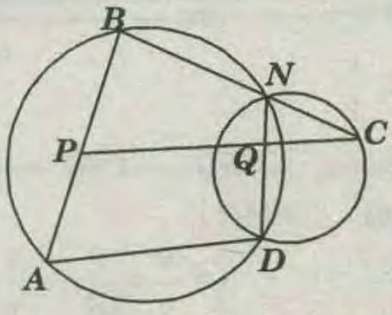
$$\rightarrow \frac{a}{b}=\frac{m-n}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\not{d}K}{\not{d}} \rightarrow \frac{a}{b}=K$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 7 :

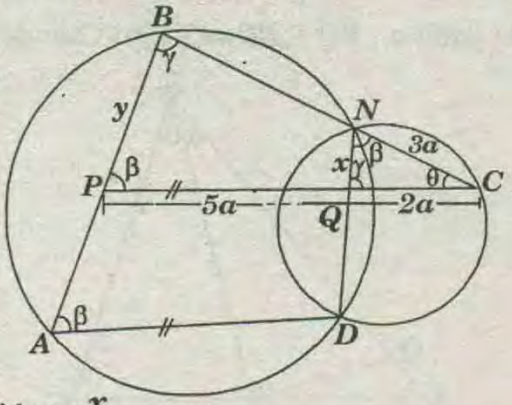
En el gráfico $\frac{PQ}{5}=\frac{QC}{2}=\frac{NC}{3}$ y $\overline{AD}//\overline{PC}$

Calcule $\frac{QN}{PB}$.



A) 2/5 B)3/8 C)3/7 D)5/8 E)2/7

RESOLUCIÓN :



* Nos piden: $\frac{x}{y}$

$\square ABND$: inscrito

$\rightarrow m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle DNC = \beta$

* Dato : $\overline{AD} // \overline{PQ} \rightarrow m\sphericalangle BPQ = \beta$

* $\triangle QNC \sim \triangle BPC$

$$\frac{x}{y}=\frac{3a}{7a} \rightarrow \frac{x}{y}=\frac{3}{7}$$

RPTA : "C"

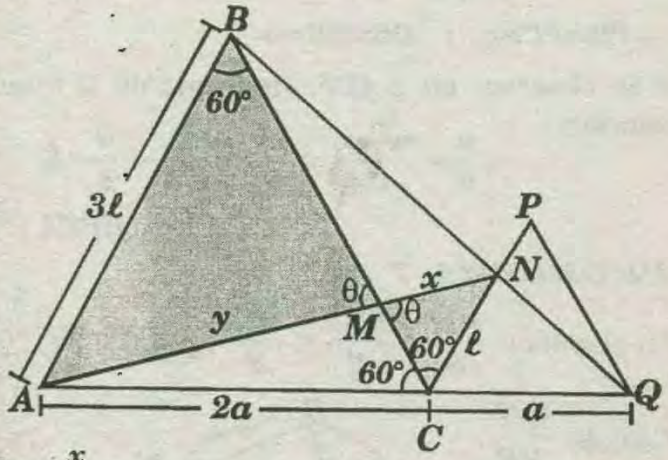
PROBLEMA 8 :

Se tienen los triángulos equiláteros *ABC* y *CPQ* tal que *A*, *C* y *Q* son colineales.

Si $\overline{BQ} \cap \overline{PC}=\{N\}; \overline{AN} \cap \overline{BC}=M$ y $AC)=2(CO)$, calcular $\frac{MN}{AM}$

A)1 B)1/3 C)1/4 D)2/3 E)3/2

RESOLUCIÓN :



* Piden: $\frac{x}{y}$

* se observa : $\triangle ABQ \sim \triangle CNQ \rightarrow AB = 3(CN)$

* $\triangle AMB \sim \triangle NMC$:

$$\rightarrow \frac{x}{y}=\frac{\ell}{3\ell} \rightarrow \frac{x}{y}=\frac{1}{3}$$

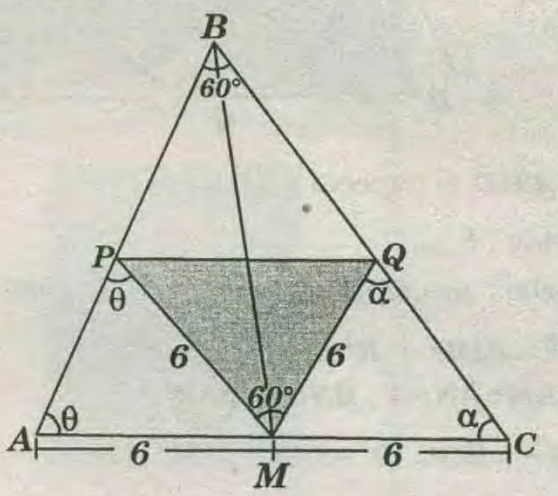
RPTA : "B"

PROBLEMA 9 :

En un triángulo *ABC* se traza la mediana *BM*, además se ubican en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ los puntos *P* y *Q* respectivamente. Si $AM=PM=MQ$; $m\sphericalangle ABC=60°$ y $AC=12$, calcule *PQ*.

A)8 B)9 C)$6\sqrt{3}$ D)6 E)12

RESOLUCIÓN :



* Nos piden : *PQ*

* De los datos : $\triangle AMP$ y $\triangle QMC$ son isósceles

* En $\triangle ABC$: $\alpha+\theta=120°$

$\square MPBQ$: $m\sphericalangle PMQ+60°=\alpha+\theta$

$\rightarrow m\sphericalangle PMQ=60°$

$\triangle PMQ$: Equilátero $\rightarrow PQ=6$

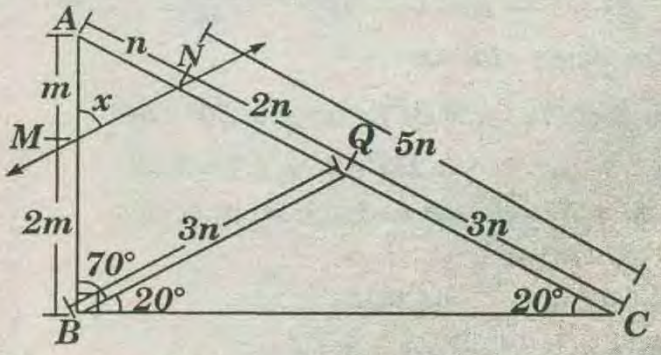
RPTA :"D"

PROBLEMA 10 :

En un triángulo rectángulo *ABC* recto en *B* se traza la recta secante que intersecta a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en *M* y *N* respectivamente , tal que $BM=2(MA)$ y $\frac{AN}{CN}=\frac{1}{5}$ Si $m\sphericalangle ACB=20°$, calcule la $m\sphericalangle AMN$.

A)50° B)55° C)80° D)70° E)60°

RESOLUCIÓN :



* Piden : $m\sphericalangle AMN$

* Sea : $m\sphericalangle AMN = x$

* Se traza la mediana $\overline{BQ}$ en el $\triangle ABC$

Por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa

$$AQ=QC=BQ=3n \rightarrow NQ=2n$$

* $\triangle BQC$(Isósceles) : $m\sphericalangle QBC=20° \Rightarrow m\sphericalangle ABQ=70°$

* Reemplazando *(II)* en *(I)* :

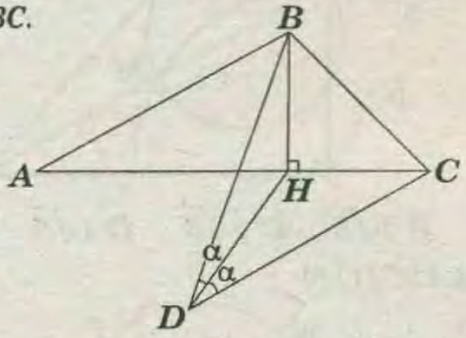
$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NQ} \rightarrow \overline{MN} // \overline{BQ} \Rightarrow x=70°$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 11 :

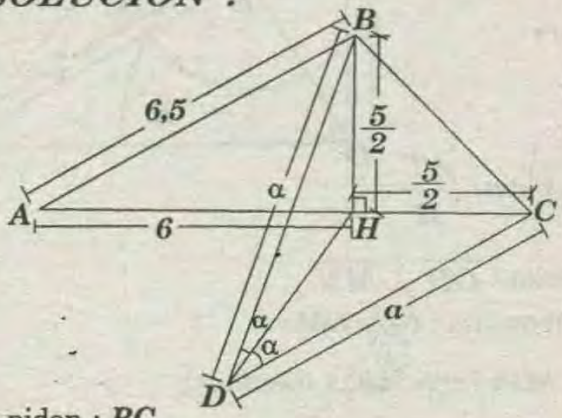
En el gráfico $BD = DC$, $AB = 6{,}5$ y $AH = 6$.

Calcule BC.



A) $5\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ E) $\frac{5}{2}\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



* Nos piden : BC

* En el $\triangle AHB$: $BH^2+6^2=(6.5)^2$

* Operando : $BH=\frac{5}{2}$

* Pero $\triangle DBH \cong \triangle DCH(L.A.L) \Rightarrow BC=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

* Luego del $\triangle BHC \Rightarrow BC=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

RPTA :"A"

PROBLEMA 12 :

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I) Dos triángulos rectángulos, cuyas alturas relativas a la hipotenusa tienen igual longitud respectivamente, son congruentes.

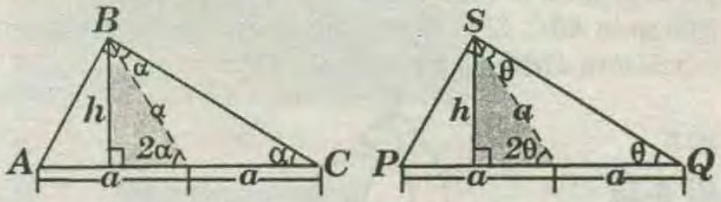
II) Dos triángulos equiláteros siempre son congruentes.

III) Si los perímetros de dos regiones cuadradas son iguales , dichos cuadrados son congruentes.

A)FFF B)FFV C)FVF D)VFV E)VVV

RESOLUCIÓN :

I) VERDADERA :



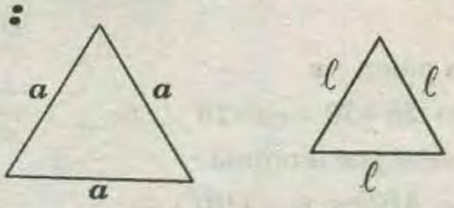
* En ambos triángulos rectángulos se traza la mediana relativa a la hipotenusa.

Se observa: las regiones sombreadas son congruentes

Se cumple $\alpha=\theta$

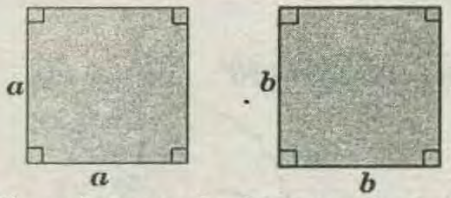
$$\rightarrow \triangle ABC \cong \triangle PSQ$$

II) FALSA :



* Para que dos triángulos equiláteros sean congruentes se requiere que sus lados sean de igual longitud. En el gráfico no se puede afirmar que $a=\ell$

III) VERDADERA :



* Si $4a=4b \Rightarrow$ Los cuadrados son congruentes

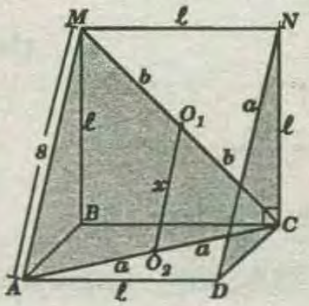
RPTA :"D"

PROBLEMA 13 :

Se tiene un romboide $ABCD$ y un cuadrado $BCNM$. Si $DN=8$, calcule la distancia entre los centros del cuadrado y del romboide.

A)2 B)4 C)6 D) $4\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :



Sean O_1 y O_2 : centros

Nos piden x

* Se observa que $\square ADNM$ es una paralelogramo
$\rightarrow AM=DN=8$

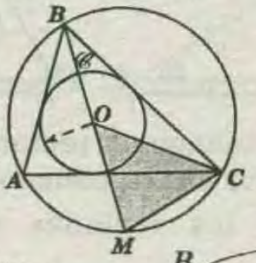
$\triangle AMC$: $\overline{O_1O_2}$ es la base media $\rightarrow x=4$

RPTA :"B"

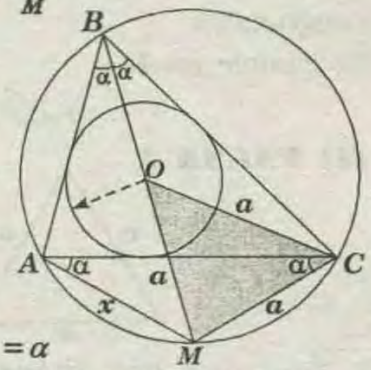
PROBLEMA 14 :

En el gráfico la circunferencia $\mathscr{C}$ está inscrita en el triángulo ABC. Si el perímetro de la región triangular equilátera CMO es 30, calcule AM.

A) 5
B) $5\sqrt{3}$
C) 10
D) $10\sqrt{3}$
E) 7,5



RESOLUCIÓN :



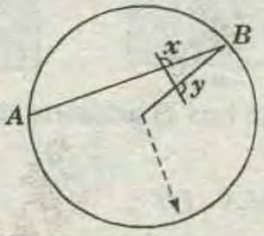
* Nos piden : x
* Dato : $3a=30 \rightarrow a=10$
* Se sabe por teorema :
$m\sphericalangle ABO = m\sphericalangle OBC = a$
$\rightarrow$ por $\sphericalangle$ inscrito : $m\sphericalangle MAC = m\sphericalangle MCA = a$
$\rightarrow \triangle m\sphericalangle AMC$: isósceles $\rightarrow x=10$

RPTA :"C"

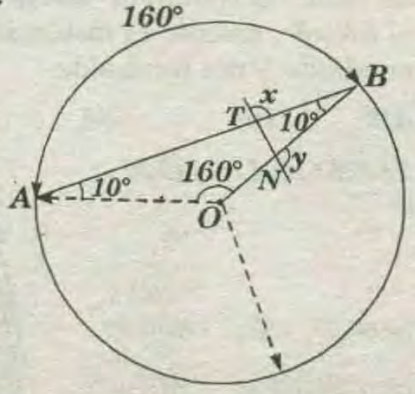
PROBLEMA 15 :

En el gráfico $m\overset{\frown}{AB}=160°$. Calcule $x+y$.

A) 220°
B) 195°
C) 190°
D) 200°
E) 210°



RESOLUCIÓN :

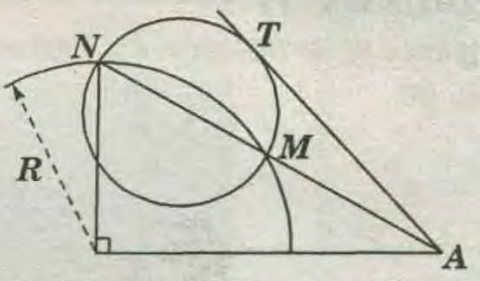


* Nos piden : x
* Dato : $m\overset{\frown}{AB}=160°$
* Se traza $\overline{AO} \rightarrow m\sphericalangle AOB=160°$ (por $\sphericalangle$ central)
$\triangle AOB$: isósceles $\rightarrow m\sphericalangle ABO=10°$
* Luego en $\triangle NBT$: $x+y=180°+10$ (teorema)
$\rightarrow x+y=190°$

RPTA :"C"

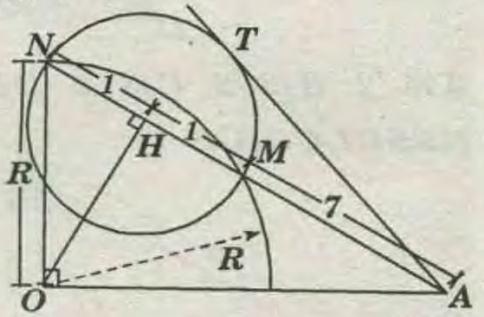
PROBLEMA 16 :

Según el gráfico , T es punto de tangencia. Si $AM=7$ y $MN=2$, calcule $\dfrac{AT}{R}$.



A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{8}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

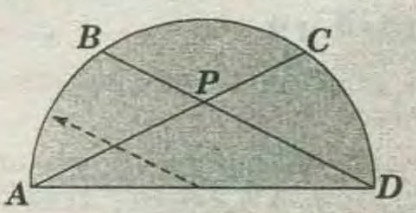


* Nos piden $\dfrac{AT}{R}$
* Se traza : $\overline{OH} \perp \overline{MN}$
* Por teorema : $NH=HM=1$
* $\triangle$ NOA (relaciones métricas)
$R^2 = 9(1) \rightarrow R = 3$
* Por teorema tangente : $(AT)^2=7(9) \Rightarrow AT=3\sqrt{7}$
* Luego : $\dfrac{AT}{R}=\dfrac{3\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \dfrac{AT}{R}=\sqrt{7}$

RPTA :"A"

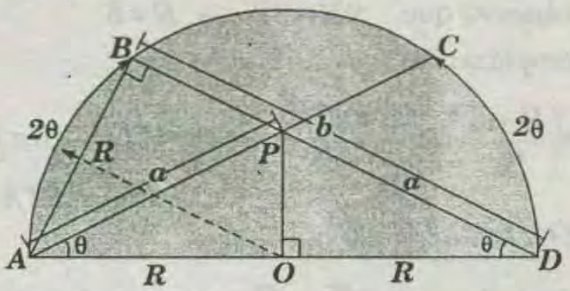
PROBLEMA 17 :

En el gráfico $m\overset{\frown}{AB}=m\overset{\frown}{CD}$ y $(AP)(BD)=48$. Calcule el área de la región sombreada.



A) 16π B) 18π C) 36π D) 12π E) 24π

RESOLUCIÓN :



$\mathbb{A}_{\frown}=\dfrac{\pi R^2}{2}$

Dato : $ab=48$

* Del dato : $m\widehat{AB}=m\widehat{CD} \rightarrow APD$: isósceles

$AP=PD$

* $\triangle OPD \sim \triangle ABD$

$$\Rightarrow \frac{R}{a}=\frac{b}{2R} \Rightarrow 2R^2=ab \Rightarrow R^2=24$$

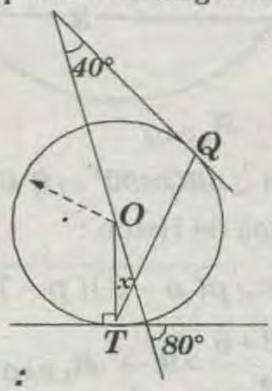
$\mathbb{A}_{\frown}=12\pi$

RPTA :"D"

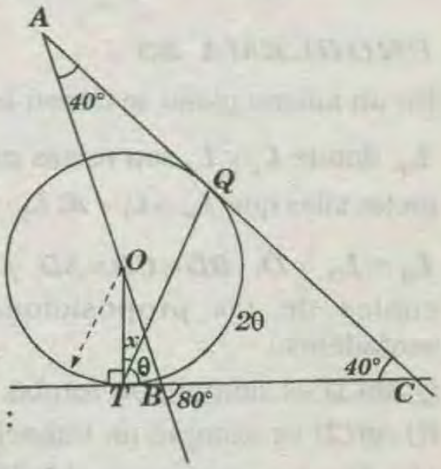
PROBLEMA 18 :

Del gráfico ***T*** y ***Q*** son puntos de tangencia. Calcule ***x***

A) 30°
B) 20°
C) 40°
D) 15°
E) 25°



RESOLUCIÓN :



* Nos piden : x

Sea $m\sphericalangle QTC=\theta$

* Se observa que :

$x+\theta=90°$.....(I)

* por $\sphericalangle$ semiinscrito :

$m\widehat{TQ}=2\theta$

* $\triangle ABC : m\sphericalangle ACB=40°$

* Por teorema : $40°+2\theta=180°$

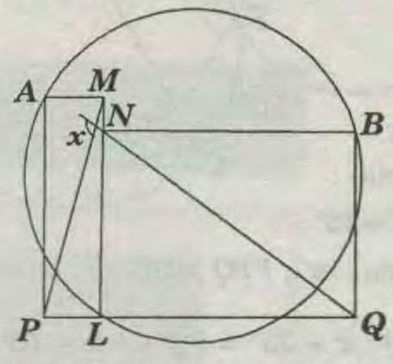
$\theta=70°$ .....(II)

* Reemplazando ***(II)*** en ***(I)*** : $x=70°=90° \rightarrow x=20°$

RPTA :"B"

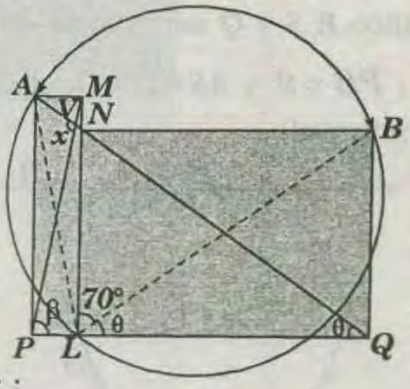
PROBLEMA 19 :

Del gráfico ***AMLP*** y ***BNLQ*** son rectángulos y $m\widehat{AB}=140°$. Calcule ***x***.



A) 100° ***B) 105°*** ***C) 110°*** ***D) 115°*** ***E) 120°***

RESOLUCIÓN :



* Nos piden x :

* Por ángulo inscrito : $m\sphericalangle ALB=70°$

* Sean : $m\sphericalangle MPL=\beta$ y $m\sphericalangle PQN=\theta$

* $\triangle PVQ$: $x=\theta+\beta$ .....(I)

* en los rectángulos :

$m\sphericalangle APL=\beta$ y $m\sphericalangle PQN=\theta$

* Se observa que : $\beta+70°+\theta=180°$

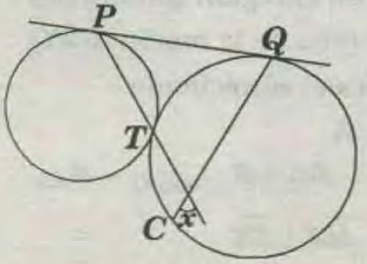
$\rightarrow \beta+\theta=110°$ .....(II)

* Reemplazando ***(II)*** en ***(I)*** : $x=110°$

RPTA :"C"

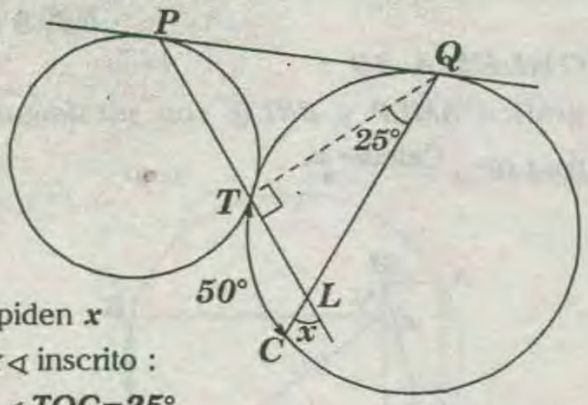
PROBLEMA 20 :

Del gráfico mostrado $m\widehat{TC}=50°$. Si ***P*** ; ***Q*** y ***T*** son puntos de tangencia , calcule ***x***.



A)60° ***B)75°*** ***C)55°*** ***D)65°*** ***E)80°***

RESOLUCIÓN :



Nos piden x

* Por $\sphericalangle$ inscrito :

$m\sphericalangle TQC=25°$

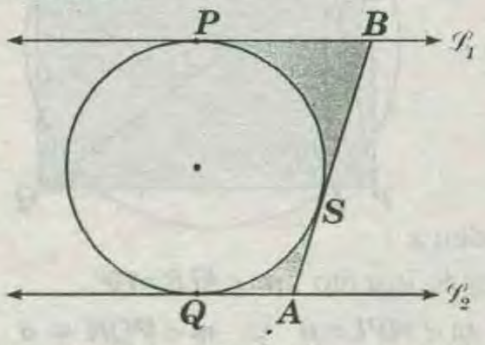
* Por teorema : $m\sphericalangle PTQ=90°$

* En $\triangle LTQ$: $x+25°=90° \rightarrow x=65°$

RPTA :"D"

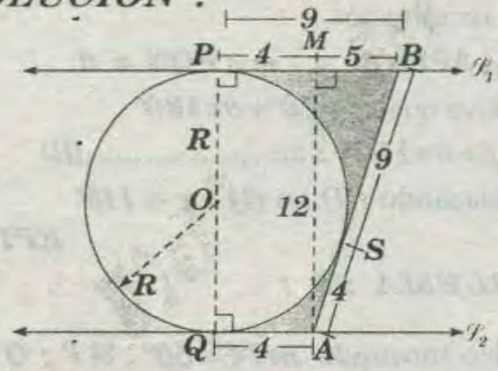
PROBLEMA 21 :

En el gráfico P, S y Q son puntos de tangencia. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$: $PB=9$ y $AS=4$, calcule el área de la región sombreada.



A)$6(13-3\pi)$ B)$24(5-\pi)$ C)$18(5-\pi)$ D)$8(13-3\pi)$

RESOLUCIÓN :



* Sea :

$\mathcal{A}_x$: área de la región sombreada

$\mathcal{A}_{\square ABPQ}$: área de la región $ABPQ$

$\mathcal{A}_{\cap}$: área del semicírculo

* Nos piden: $\mathcal{A}_x$

* Se observa : $\mathcal{A}x=\mathcal{A}_{\square ABPQ}-\mathcal{A}_{\cap}$

* Se traza : $\overline{AM}\perp\overline{2R}$

$PM=4$ y $BM=5$

$\triangle AMB$(Pitágoras) : $AM=12$

* Se observa que : $2R=12 \rightarrow R=6$

* Reemplazando :

$$\mathcal{A}_x=\left(\frac{9+4}{2}\right)12-\frac{\pi(6)^2}{2} \rightarrow \mathcal{A}_x=6(13-3\pi)$$

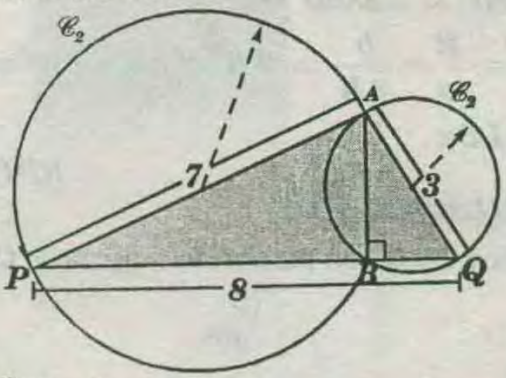
RPTA :"A"

PROBLEMA 22 :

Las circúnferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son secantes en A y B. Si ubicañ P y Q en $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ respectivamente , tal que $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son diámetros ; $AP=7$; $AQ=3$ y $PB+BQ=8$,calcule el área de la región triangular APQ.

A)$6\sqrt{2}$ B)$3\sqrt{2}$ C)$6\sqrt{3}$ D)$5\sqrt{5}$ E)$5\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



* Nos piden : $\mathcal{A}_{\triangle PAQ}$

$m\sphericalangle PBA=m\sphericalangle ABQ=90° \rightarrow P$, B y Q son coloniales

* Por teorema de Herón :

$$\mathcal{A}_{\triangle PAQ}=\sqrt{p(p-3)(p-7)(p-8)}$$

$$p=\frac{7+3+8}{2}=9 \rightarrow \mathcal{A}_{\triangle PAQ}=6\sqrt{3}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 23 :

En un mismo plano se tienen las rectas L_1, L_2,L_3 y L_4; donde L_3 y L_4 son rectas paralelas , L_1 y L_2 son rectas tales que $L_4 \cap L_1 = A$, $L_3 \cap L_1 = B$, $L_3 \cap L_2 = C$, $L_4 \cap L_2 = D$. $BD=CD=AD$ y $BD \perp AC$. Indique cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas.

I) $ABCD$ es siempre un rombo.

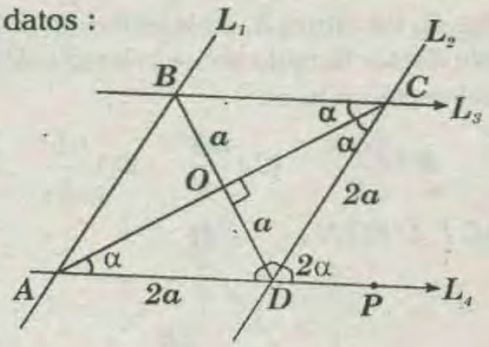
II) $ABCD$ es siempre un trapecio.

III) Por los vértices de $ABCD$ pasa siempre una circunferencia.

A)I y II B)I y III C)II y III D)solo I E)solo III

RESOLUCIÓN :

* De los datos :



$BD=CD=AD=2a$; $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

* En el $\triangle ADC$: $\overrightarrow{DB}$ es mediatriz

$\Rightarrow AO = OC$

$m\sphericalangle CDP = 2\alpha$

* Pero : $m\sphericalangle BCD = m\sphericalangle CDP = 2\alpha$

$m\sphericalangle BCA = \alpha$

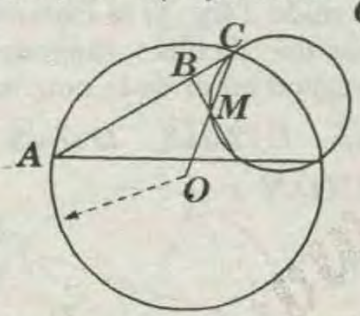
* Como : $\overline{CA} \perp \overline{BD}$

$\Rightarrow BO=OD \rightarrow ABCD$ es un rombo

RPTA :"'D'

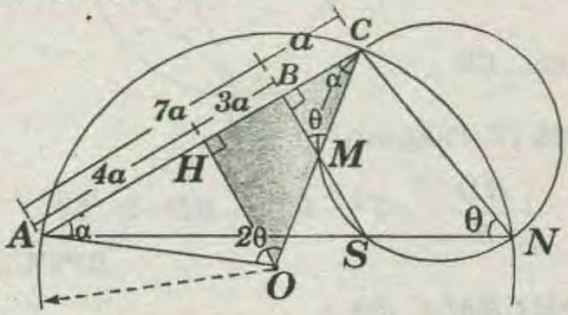
PROBLEMA 24 :

Según el gráfico , $AB=7(BC)$.Calcule $\frac{MC}{OM}$



A)1/2 B)1/3 C)2/3 D)3/4 E)1

RESOLUCIÓN :



* Piden $\frac{MC}{OM}$

$\square NSMC$: inscrito

$\rightarrow m\sphericalangle SNC=m\sphericalangle BMC=\theta$

$\triangle AOC$: isósceles

$2\alpha+2\theta=180°$; $\alpha+\theta=90°$

* Se observa : $m\sphericalangle MBC=90°$

$\triangle AOC$ se traza $\overline{OH} \rightarrow AH=HC$

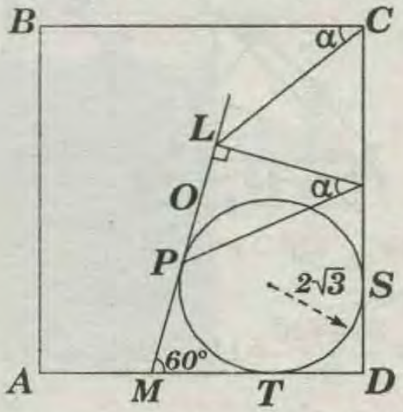
$\overline{OH} \parallel \overline{MB}$: por teorema de thales

$$\frac{MC}{OM}=\frac{a}{3a}=\frac{1}{3}$$

RPTA :"B"

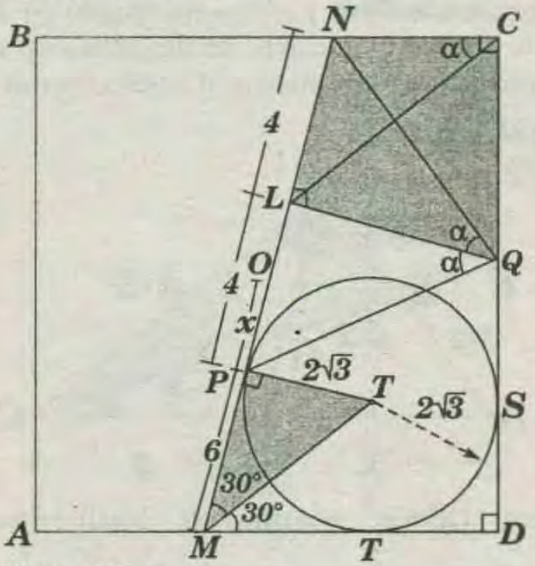
PROBLEMA 25 :

En el gráfico P ; S y T son puntos de tangencia. Si $ABCD$ es un rectángulo de centro O y $PL=4$, calcule OP.



A)0,5 B)1 C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}$ E)1,5

RESOLUCIÓN :



* Nos piden : $OP = x$

Se prolonga a $\overline{ML}$ hasta que interseque a $\overline{BC}$ en N

$\rightarrow \square QLNC$: inscriptible

$\rightarrow m\sphericalangle LQN = m\sphericalangle LCN=\alpha$

$\rightarrow \triangle PQN$: isósceles

$PL=LN=4$

$\triangle MPT$: notable $30°$ y $60° \rightarrow MP=6$

* en $\square ABCD$, O es centro : $MN=14$

$\rightarrow ON=OM=7 \Rightarrow x+6=7 \Rightarrow x=1$

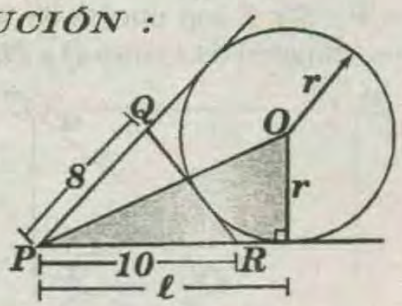
RPTA :"B"

PROBLEMA 26 :

En un triángulo PQR cuyos lados miden $\overline{PQ}=8m$, $\overline{QR}=4m$ y $\overline{PR}=10m$. Determine la potencia del vértice P con respecto a una circunferencia ex-inscrita y tagente aliado $\overline{QR}$.

A)$121\ m^2$ B)$101\ m^2$ C)$98\ m^2$
D)$68\ m^2$ E)$48\ m^2$

RESOLUCIÓN :



* Piden : $Pot_{p(0)}=d^2-r^2=\ell^2$
* Se sabe que :

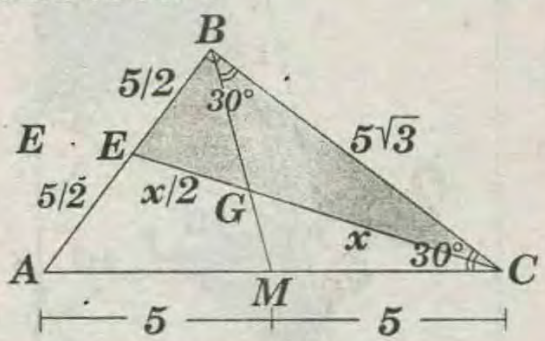
$$\ell=P_{\Delta PQR}=\frac{8+4+10}{2}=11 \Rightarrow Pot_{p(0)}=11^2=121m^2$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 27 :

Si la mediana relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $5\ cm$ y forma un ángulo de $30°$ con el cateto mayor , entonces la distancia en cm del baricentro al vértice opuesto al cateto menor es

RESOLUCIÓN :



* Piden $GC=x$, siendo G baricentro del

$\triangle ABC \Rightarrow EG=\frac{x}{2}$

* Dato : $BM=5$
* Por propiedad : $BM=MC=AM=5$
* $\triangle ABC$ Notable $30°$ y $60°$

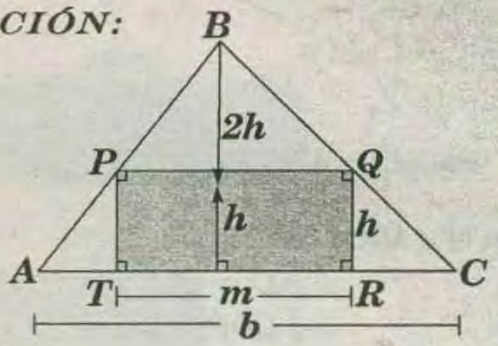
$$\Rightarrow\left(\frac{3x}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+(5\sqrt{3})^2 \Rightarrow x=\frac{5\sqrt{13}}{3}$$

PROBLEMA 28 :

La base de un triángulo mide b y su altura mide $3h$. Un rectángulo de altura h, se inscribe en el triángulo con la base del rectángulo sobre la base del triángulo; el área del rectángulo es

A)$\frac{2bh}{3}$ B)$\frac{3bh}{2}$ C)$\frac{bh}{4}$ D)$\frac{bh}{3}$ E)$\frac{4bh}{3}$

RESOLUCIÓN:



* Se pide : S_{PQRT}

Del gráfico : $S_{PQRT}=mh$

$$\triangle PBQ \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{m}{b}=\frac{2h}{3h} \rightarrow m=\frac{2}{3}b$$

$$\rightarrow S_{PQRT}=\frac{2}{3}bh$$

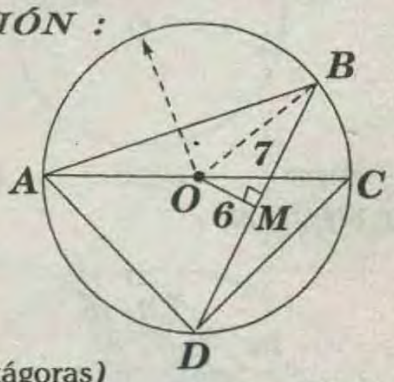
RPTA :"A"

PROBLEMA 29 :

Se tiene un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, donde una de sus diagonales es el diámetro que mide $14m$. Si la distancia entre los puntos medios de dichas diagonales es $6m$, entonces la longitud en m de la otra diagonal es

A)9 B)$4\sqrt{5}$ C)$2\sqrt{13}$ D)$7\sqrt{2}$ E)$12\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :



* Se pide : BD

$\triangle OMB$ (T. Pitágoras)

$$\left(\frac{BD}{2}\right)^2=7^2-6^2 \Rightarrow BD=2\sqrt{13}$$

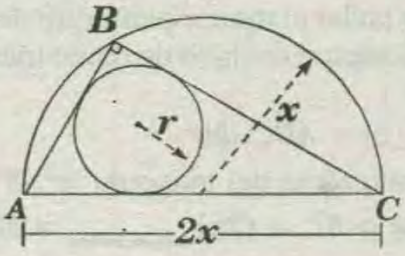
RPTA : "C"

PROBLEMA 30 :

El radio de una circunferencia y el perimetro de un triángulo rectángulo circunscrito a dicha circunferencia miden $3\ cm$ y $50\ cm$, respectivamente. Entonces , el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo rectángulo mide .

A)$44\ cm$ B)$22\ cm$ C)$11\ cm$ D)$12\ cm$ E)$13\ cm$

RESOLUCIÓN :



Piden x

* Datos

$r=3cm$ y $AB+BC+2x=50\ cm$

$\triangle ABC$ Teorema de Poncelet : $AB+BC=2x+2(r)$

* Reemplazando : $50-2x=2x+2(3) \rightarrow x=11cm$

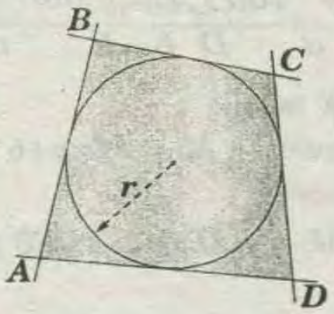
RPTA :"C"

PROBLEMA 31 :

Se trazan **4** tangentes a una circunferencia, obteniéndose un cuadrilátero de área **A** y perímetro **p**. Entonces , el radio de la circunferencia mide

A) $\frac{A}{p}$ **B)** $\frac{2A}{p}$ **C)** $\frac{A}{2p}$ **D)** $\frac{p-\sqrt{A}}{2}$ **E)** $\frac{p-\sqrt{A}}{2}$

RESOLUCIÓN :



Nos piden r

* Dato :

$Área_{(ABCD)} = A$

$Área_{(ABCD)}$ = (Semiperímetro) . r

Perímetro=P

$Semiperímetro = \frac{P}{2}$

$\Rightarrow A = \left(\frac{P}{2}\right) r \rightarrow = \frac{2A}{p}$

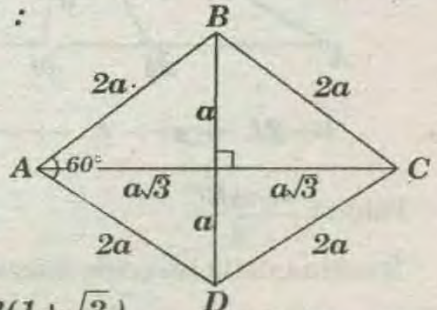
RPTA :"B"

PROBLEMA 32 :

Uno de los ángulos de un rombo mide $60°$ y la suma de sus diagonal es es de $3(1+\sqrt{3})m$. Entonces , el perímetro del rombo mide

A)25 m B)15 m C)16 m D)12 m E)9 m

RESOLUCIÓN :



* Dato : $AC+BD=3(1+\sqrt{3})$

* Se pide perímetro : $8a$

* De la figura : $AC+BD=2a(1+\sqrt{3})$

$2a(1+\sqrt{3})=3(1+\sqrt{3}) \rightarrow 2a=3$

Perímetro = $12\ m$

RPTA : "D"

PROBLEMA 33 :

Dados los vectores $\vec{a}=(1;3)$ y $b=(x;y)$

Si $\vec{a}.\vec{b}=(1,3)$; $\vec{a}-\vec{b}=(1-x;2)$. Halle (x^2+y^2)

A)0 B)1/2 C)1 D)2 E)–1

RESOLUCIÓN :

* Datos : $\vec{a}=(1,3)$; $\vec{b}=(x;y)$.....(I)

$\vec{a}.\vec{b}=3$ .....(II)

$\vec{a}-\vec{b}=(1-x;2)$.....(III)

* (I) y (II) en (III) : $(1;3).(x;y)=3$

* Además : $\vec{a}-\vec{b}=(1-x;2)$

$(1;3)-(x;y)=(1-x;2)$

$3-y=2 \rightarrow y=1$.....(V)

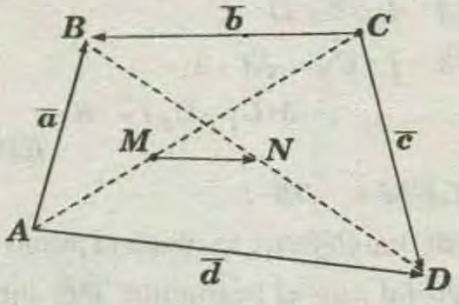
* (V) en (IV) : $x=0$

$x^2+y^2=1$

RPTA :"C"

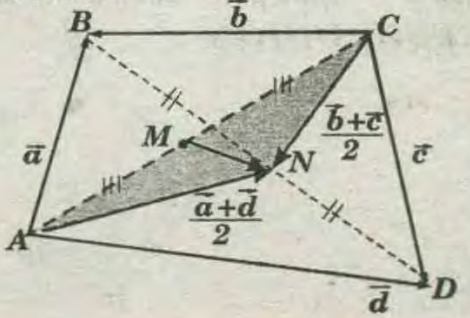
PROBLEMA 34 :

En el cuadrilátero de la figura halle el vector $\overrightarrow{MN}$ en función de los vectores ; $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ y $\vec{d}$ donde **M** y **N** son los puntos medios de las diagonales.



A) $\frac{\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}}{4}$ **B)** $\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}}{3}$ **C)** $\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

RESOLUCIÓN:



* $\triangle BCD : BN = ND$

$$\overline{CN} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

* $\triangle ANC : AM = MC$

$$\overline{MN} = \frac{\left(\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}\right)+\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)}{2} \rightarrow \overline{MN} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

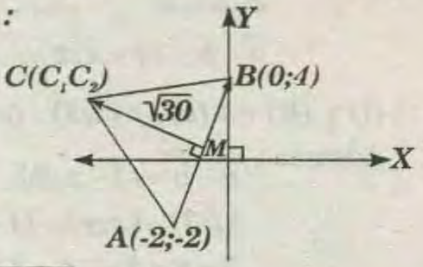
RPTA :"C"

PROBLEMA 35 :

Los puntos $A=(-2;-2)$; $B=(0;4)$; $C=(C_1;C_2)$ son los vértices de un triángulo equilátero. Si C está en el segundo cuadrante entonces . $\sqrt{3}(C_1+C_2)$ vale :

A)-9 B)-8 C)-6 D)-5 E)-4

RESOLUCIÓN :



$L_{\overline{AB}} = \sqrt{(0+2)^2+(4-(-2))^2} = 2\sqrt{10}$

$\Rightarrow MC = \sqrt{30}$

$\overline{AB} = (2;6) \Rightarrow \overline{AB}^{\perp} = (-6;2)$

* Por punto medio : $M = (-1\ ;\ 1)$

$\overline{MC} = \sqrt{30}.\vec{u}_{\overline{AB}^{\perp}}$

$\Rightarrow C - M = \sqrt{30}.\left(\frac{-30}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

$C = (-3\sqrt{3}-1;\sqrt{3}+1)$

$C_1 = -3\sqrt{3}-1 \wedge C_2 = \sqrt{3}+1$

$\rightarrow \sqrt{3}(C_1+C_2) = -6$

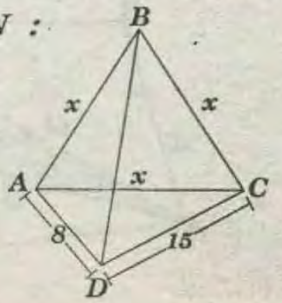
RPTA :""C"

PROBLEMA 36 :

En un $\triangle ABC$ equilátero , se ubica el punto D exterior al triángulo tal que el segmento $\overline{BD}$ intersecta al lado $\overline{AC}$. Si $mSADC>90°$, $AD=8u$ y $CD=15u$, halle el menor perímetro entero del $\triangle ABC$.

A)52 u B)24 u C)22 u D)46 u E)48 u

RESOLUCIÓN :



* Piden hallar el menor perímetro del $D\ ABC\ (2p)$; si x es la longitud del lado de dicho triángulo , entonces $2p=3x$

* Dato : $m\sphericalangle ADC>90°$

* Por naturaleza del triángulo : $x^2>8^2+15^2 \Rightarrow x>17$

$\Rightarrow 3x > 51 \rightarrow (3x)_{\text{mínimo entero}} = 52$

RPTA :"A"

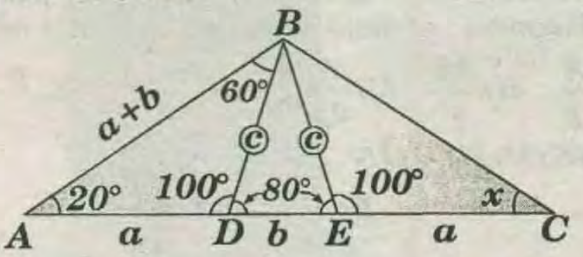
PROBLEMA 37 :

En un $DABC$ se traza la ceviana $\overline{BD}$ tal que $AB=CD$ y D está en el lado AC.Además:

$m\sphericalangle ABD=60°$ y $m\sphericalangle BAC=20°$.Halle la $m\sphericalangle BCA$.

A)15° B)30° C)25° D)22°30' E)20°

RESOLUCIÓN :



* Se traza $\overline{BE}$ tal que :

$\triangle BAE$: isósceles $\rightarrow AB = AE=a+b$

* $\triangle DBE$: isósceles

$\rightarrow BD = BE$ y $\triangle ADB \cong \triangle CEB$ (LAL)

$\rightarrow x = 20°$

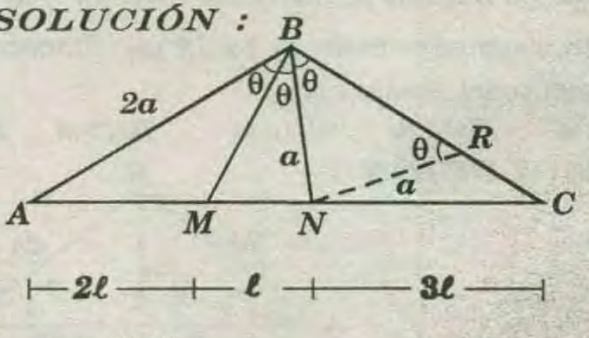
RPTA :"E"

PROBLEMA 38 :

En un triángulo ABC , M y N son puntos de $\overline{AC}$ si los segmentos $\overline{BM}$ y $\overline{BN}$ dividen al ángulo B en tres ángulos iguales y al lado $\overline{AC}$ en segmentos proporcionales a 2 ; 1 y 3 . Calcule la medida del ángulo $\frac{B}{2}$.

A)22,5° B)67,5° C)72,5° D)53,5° E)60°

RESOLUCIÓN :



* Piden : $\frac{m\sphericalangle ABC}{2}$

* Teorema de la bisectriz interior $AB=2a$ y $BN=a$

* Si : $\overline{NR}$: base media $\Rightarrow NR=a$

* Luego el ΔBRN isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle BRN=\theta$

* Por ángulos conjugados :

$$3\theta+\theta=180^\circ \Rightarrow \theta=45^\circ \Rightarrow \frac{m\sphericalangle ABC}{2}=67,5^\circ$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 39 :

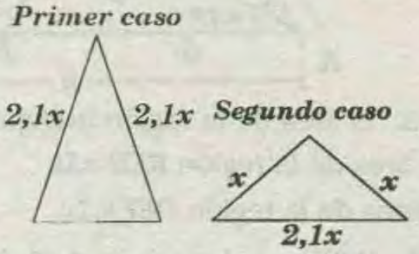
El perímetro de un triángulo isósceles es $26cm$. Se sabe que la longitud de uno de los lados es $2,1$ veces la longitud del otro lado. Entonces las longitudes de los tres lados son :

A) Indeterminadas **B) 10,5 ; 10,5 ; 5** **C) 10; 10 ; 6**

D) $\frac{26}{4,1};\frac{26}{4,1};\frac{54,6}{4,1}$ **E)11;11;4**

RESOLUCIÓN :

* De acuerdo a los datos se puede dar las dos posibilidades :



* Analizando el 2do Caso :

* Por propiedad de existencia : $2,1x < 2x$ (absurdo)

* Consideramos entonces sólo el 1er Caso :

$$2P_{\Delta}=26 \Rightarrow 5,2\,x=26 \Rightarrow x=5$$

$\rightarrow$ Los lados son : $10,5 ; 10,5 ; 5$

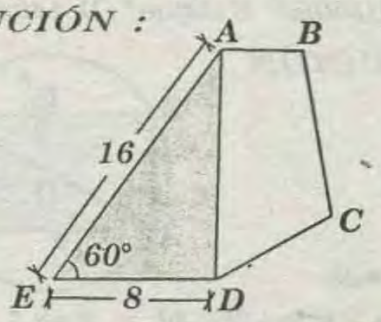
RPTA :"B"

PROBLEMA 40 :

En un penfágono $ABCDE$ los lados $\overline{AE}$ y $\overline{DE}$ miden 16 y $8m$ respectivamente y $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{B}=480$; calcule la distancia del vértice E a la diagonal $\overline{AD}$.

A) $4\sqrt{3}m$ **B)8 m** **C)10 m** **D)12 m**

RESOLUCIÓN :



* Nos piden la distancia d del punto E al lado $\overline{AD}$

* Dato : $m\sphericalangle A + m\sphericalangle B + m\sphericalangle C + m\sphericalangle D=480^\circ$

* Sabemos que el pentágono $(EABCD)$

$$\Sigma\sphericalangle i=540^\circ \Rightarrow m\sphericalangle E=60^\circ$$

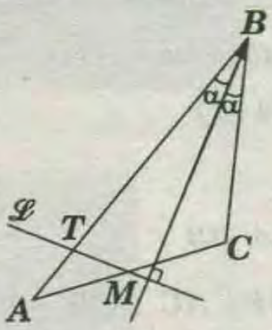
* Se nota en el ΔEAD (notable) :

$$m\sphericalangle ADE=90^\circ \rightarrow ED=d=8m$$

RPTA :"B"

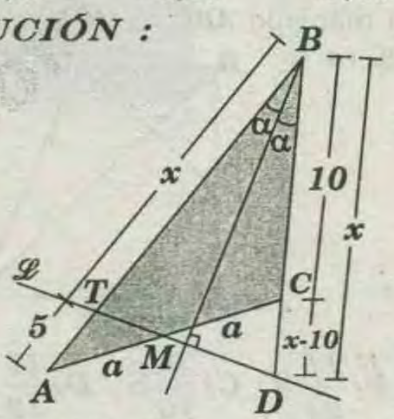
PROBLEMA 41 :

En la figura $AT=5$; $BC=10$; ℓ es una recta ortogonal a la bisectriz del ángulo B. Si $AM=MC$, determine la medida de TB.



A)11 **B)12** **C)13** **D)14** **E)15**

RESOLUCIÓN :



* Al prolongar $\overline{TM}$ y $\overline{BC}$ $\Rightarrow \Delta TBD$: isósceles

* Luego en el ΔABC Teorema de Menelao :

$$xa(x-10)=5ax \rightarrow x=15$$

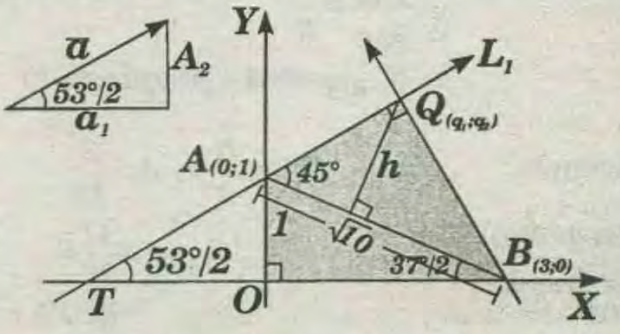
RPTA :"E"

PROBLEMA 42 :

$L_1 : \vec{P}=(0;1)+t\vec{a}$ es una recta que interseca perpendicularmente en $Q=(q_1;\ q_2)$ a la recta $L_2 : \vec{P}=(3;0)+w\vec{b}, si\ q_1>0, q_2>1$ y el área formada por los ejes X,Y y las rectas L_1, L_2 es de $4u^2$. La dirección de L_1 es el vector :

A)(7; 2) **B)(4; 3)** **C)(2; 3)** **D)(4 ; 2)** **E)(5; 1)**

RESOLUCIÓN :



* Piden $\vec{a}=(a_1;a_2)$

* Dato : $S_{ABCD}=4u^2$

* Del gráfico : $S_{AOB}=\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow S_{AOB}=\frac{5}{2}=\frac{h\sqrt{10}}{2}\rightarrow h=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

* En consecuencia , $\triangle AQB$ es isósceles

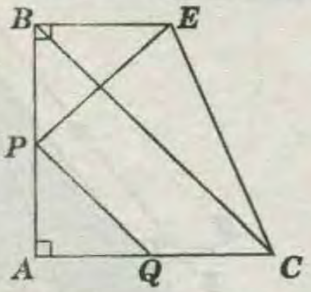
$$m\sphericalangle QAB=45^\circ\rightarrow m\sphericalangle ATB=\frac{53^\circ}{2}\Rightarrow a_1=2a_2$$

* Luego : $\vec{a}=(4;2)$

RPTA :"D"

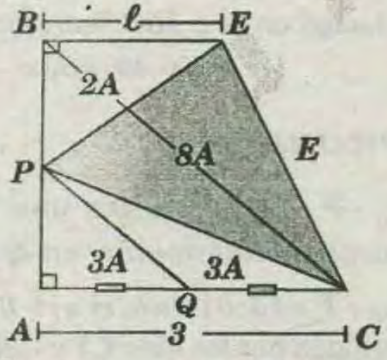
PROBLEMA 43 :

En la figura , $\overline{BE}\,//\,\overline{AC}$ y $3BE=AC$. Sean P y Q los puntos medios de AB y AC, respectivamente. Si S es el área del triángulo ABC, entonces el área de la región $EPQC$ es



$$A)\frac{7}{12}S\quad B)\frac{11}{24}S\quad C)\frac{9}{16}S\quad D)\frac{11}{12}S\quad E)\frac{15}{16}S$$

RESOLUCIÓN :



* Dato :

$S_{\triangle ABC}: S$

* Piden :

$S_{(\square EPQC)}$

$S_{\square EPQC}=S_{\triangle PQC}+S_{\triangle PEC}$

* Se observa : $\frac{S_{\triangle PBE}}{S_{\triangle PAC}}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow S_{\triangle EPC}=8A$ *(propiedad)*

* Además : $3A=\frac{S_{\triangle ABC}}{4}=\frac{S}{4}\Rightarrow A=\frac{S}{12}$

* del gráfico : $S_{EPQC}=11A\Rightarrow S_{EPQC}=\frac{11}{12}S$

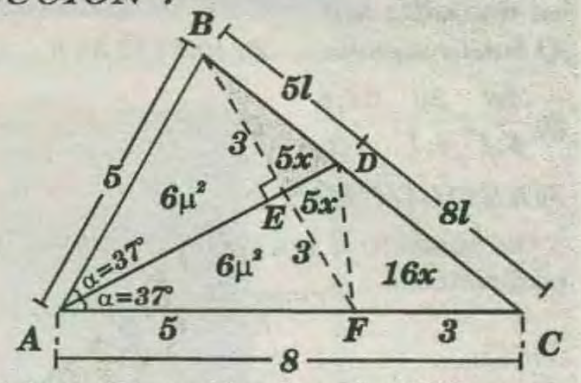
RPTA : "D"

PROBLEMA 45 :

En un triángulo ABC , se traza la bisectriz interior que parte del vértice A y corta en D al lado $\overline{BC}$. Por el vértice B se traza $\overline{BE}$ perpendicular a $\overline{AD}$, calcule el área del triángulo BDE , si $AB=5u$, $AC=8u$ y $BE=3u$.

$$A)\frac{15}{11}u^2\quad B)\frac{14}{9}u^2\quad C)\frac{16}{7}u^2\quad D)\frac{18}{13}u^2\quad E)\frac{12}{7}u^2$$

RESOLUCIÓN :



* Piden: el área de la región triangular BED.

Sea el área de la región $BED=5x$

$\Rightarrow$ el área de la región $DEF=5x$

* En el $\triangle ABC$ por el teorema de la bisectriz :

$$\frac{BD}{DC}=\frac{5}{8}$$

$\Rightarrow$el área de la región $DFC=16x$

* En el $\triangle ABC$:

$$\frac{A_{\triangle ABF}}{A_{\triangle FBC}}\Rightarrow\frac{12\mu^2}{26x}=\frac{5}{3}\Rightarrow A_{\triangle BED}=5x=\frac{18}{13}\mu^2$$

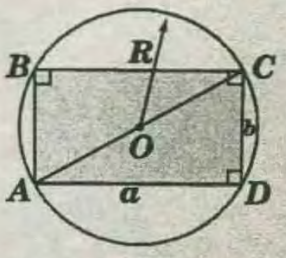
RPTA :"D"

PROBLEMA 46 :

El área de un rectángulo de $46\ m$ de perímetro , inscrito en un círculo de $8{,}5\ m$ de radio es

$$A)80m^2\quad B)100m^2\quad C)120m^2\quad D)140m^2\quad E)150m^2$$

RESOLUCIÓN



Piden $A_{\square}=ab$

* Datos : $2p_{\square}=2a+2b=46$; $R=8{,}5$

$\Rightarrow (a+b)^2=23^2$

$\Rightarrow a^2+b^2+2ab=23^2\Rightarrow 17^2+2A_{\square}=23^2$

$\rightarrow A_{\square}=120\ m^2$

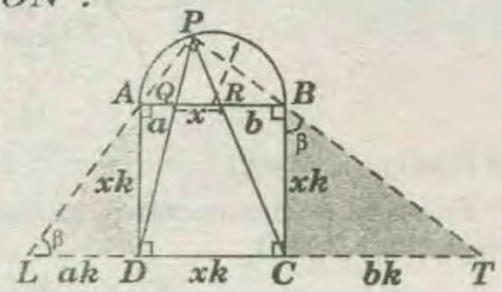
RPTA :"C"

PROBLEMA 47 :

En un cuadrado *ABCD* se toma como diámetro $\overline{AB}$ y se constituye exteriormente una semicircunferencia sobre la cual se ubica un punto *P*. Si *Q* y *R* son las intersecciones de $\overline{AB}$ con $\overline{PD}$ y $\overline{PC}$, halle el valor de *QR* sabiendo que $AQ=a$ y $BR=b$.

$A)\sqrt{ab}$ $B)\dfrac{a+b}{2}$ $C)\dfrac{2ab}{a+b}$

RESOLUCIÓN :



* Piden $QR=x$

* Se prolongan $\overline{PA}$ y PB por semejanza :

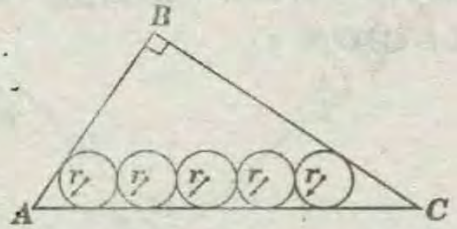
$$\frac{LD}{a}=\frac{DC}{x}=\frac{CT}{b}=k$$

* $\triangle LDA \sim \triangle BCT$: $\dfrac{xk}{bk}=\dfrac{ak}{xk}\rightarrow x=\sqrt{ab}$

RPTA :"A"

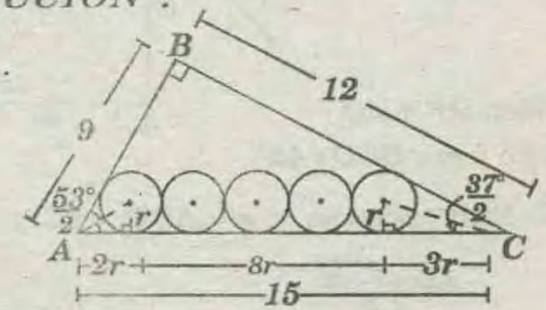
PROBLEMA 48 :

En la figura mostrada se cumple que $AB=9u$ y $AC=15u$. Las circunferencias son iguales y tangentes de radio igual a *r* unidades. Halle la suma de las longitudes de las circunferencias.



$A)\dfrac{125\pi}{13}u$ $B)\dfrac{130\pi}{13}u$ $C)\dfrac{140\pi}{13}u$ $D)\dfrac{175\pi}{13}u$ $E)\dfrac{150\pi}{13}u$

RESOLUCIÓN :



* Piden : $x=5(2\pi r)$

* Dato $AC=15$ $AB=9$

$\triangle ABC$ (not : $53°$ y $37°$)

$$\Rightarrow 13r=15\Rightarrow r=\frac{15}{13}$$

En *(I)* : $x=10\pi\left(\dfrac{15}{13}\right)\Rightarrow x=\dfrac{150\pi}{13}$

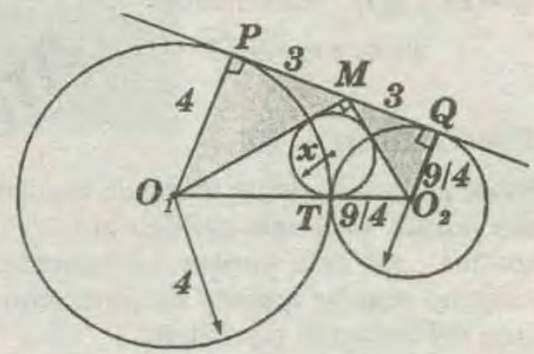
RPTA :"E"

PROBLEMA 49 :

Se tienen dos circunferencias tangentes exteriormente de radios *4* y $\dfrac{9}{4}$. Se une el punto medio del segmento de tangente común exterior con los centros de ambas circunferencias. Calcule el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo así determinado.

A) 1,50 B)1,75 C)1,10 E)1,25 D) 1,60

RESOLUCIÓN :



* Piden : x

* Por propiedad :

$$PQ=2\sqrt{4\frac{9}{4}}=6\rightarrow PM=MQ=3$$

$$m\sphericalangle O_1MO_2=90°$$

$$O_1O_2=O_1T+TO_2=4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$$

$\triangle O_1PM : O_1M=5$ $\triangle O_2QM : O_2M=\dfrac{15}{4}$

* Aplicando el *T* . de Poncelet en el $\triangle O_1MO_2$:

$$5+\frac{15}{4}=\frac{25}{4}+2x\Rightarrow x=1,25$$

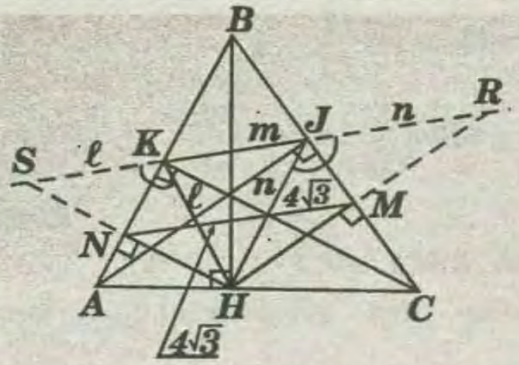
RPTA :"D"

PROBLEMA 50 :

En el triángulo acutángulo *ABC* se trazan las alturas $\overline{BH}$, $\overline{AJ}$ y $\overline{CK}$. Desde *H* se trazan $\overline{HM}$ y $\overline{HN}$ perpendiculares a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{BA}$ respectivamente. Si $MN=4\sqrt{3}$ entonces el perímetro de triángulo *HJK* es

$A)\ 4\sqrt{3}$ $B)\ 6$ $C)\ 6\sqrt{3}$ $D)\ 8$ $E)\ 8\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



* Piden el perímetro **(2P)** del $\triangle HJK$

* $\triangle HJK$: $\triangle$ órtico pedal

A,**B** y **C** : excentros del $\triangle HJK$

* $\triangle HKS$ isósceles : $SK=KH=\ell$

* $\triangle HJR$: isósceles $\Rightarrow HJ=JR=n$

$\triangle SHR$ ($\overline{MN}$: base media)

$$\ell+m+n=8\sqrt{3} \Rightarrow 2P_{\triangle HJK}=8\sqrt{3}$$

RPTA :"E"

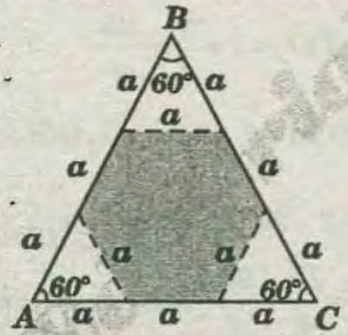
PROBLEMA 51 :

Sobre cada lado de un triángulo equilátero se toman dos puntos tales que dividen al lado en tres partes iguales , los seis puntos así tomados forman un exágono regular inscrito de perímetro **P**, calcule el área del triángulo equilátero.

A) $\frac{\sqrt{3}}{8}p^2$ B) $\frac{1}{8}p^2$ C) $\frac{8}{5}p^2$ D) $\frac{\sqrt{3}}{16}p^2$

RESOLUCIÓN :

* En el triángulo equilátero de lado $3a$:



Perímetro del exágono : $p=6a \Rightarrow a=\frac{p}{6}$

* Como nos piden área de la región $ABC=A$:

$$A=(3a)^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{9}{4}a^2\sqrt{3} \Rightarrow A=\frac{9}{4}\left(\frac{p}{6}\right)^2\sqrt{3}=\frac{p^2}{16}\sqrt{3}$$

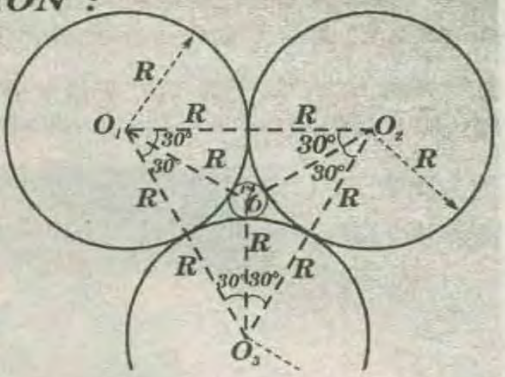
RPTA : "D"

PROBLEMA 52 :

Tres circunferencias de radio **R** son tangentes entre sí dos a dos . Si una circunferencia de radio $r<R$ es tangente a las tres anteriores , entonces el valor de **r** es :

A) $\frac{R}{\sqrt{3}}$ B) $R(\sqrt{3}-1)$ C) $R\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)$ D) $\frac{R}{6}$ E) $\frac{R}{3}$

RESOLUCIÓN :



* Piden : r $(r<R)$

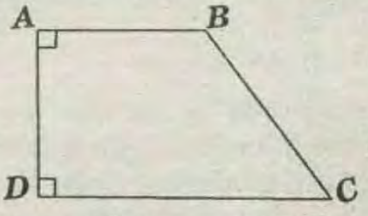
* Como **O** es circuncentro , incentro del triángulo equilátero $O_1O_2O_3$

$$\Rightarrow (R+r)\sqrt{3}=2R \Rightarrow r=R\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)$$

RPTA :"C"

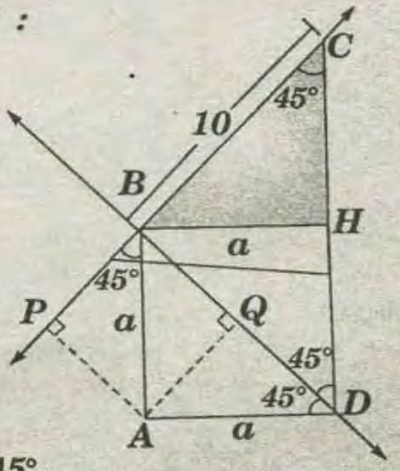
PROBLEMA 53 :

En el trapecio $ABCD$, $AB=AD$. $BC=10u$, $m\sphericalangle BCD=45°$ La suma de las distancias del vértice **A** a las rectas que contienen a los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$ es :



A) $5u$ B) $10u$ C) $20u$ D) $5\sqrt{20}u$ E) $6\sqrt{19}u$

RESOLUCIÓN :



* Piden : $AP + AQ$

* Dato : $m\sphericalangle BCD=45°$

* $\triangle BAD$: isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle ADB = 45°$;

$$AQ=\frac{a}{2}\sqrt{2}$$

* $\triangle BPA$: $AP=a\frac{\sqrt{2}}{2}$

* Luego : $AP+AQ=a\sqrt{2}$

* $\triangle BHC$: $a = 5\sqrt{2} \rightarrow AP + AQ = 10u$

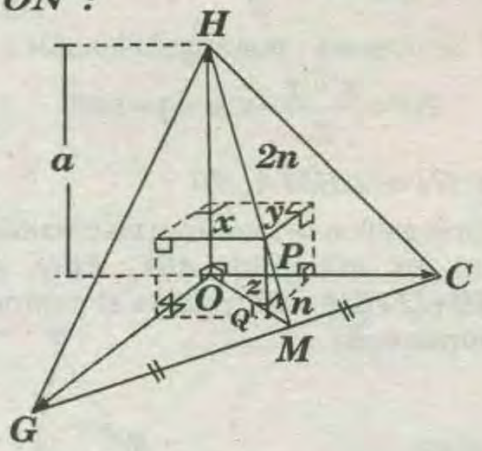
RPTA :"B"

PROBLEMA 54 :

Los vectores $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OH}$ son mutuamente perpendiculares y son de igual longitud ($|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OH}| = a$). Sea P el baricentro del triángulo CGH. Halle la suma de las distancias trazadas desde P a los tres planos formados por los tres vectores tomados dos a dos.

A)2a B)3a C)2/3a D)a E)3/2a

RESOLUCIÓN :



* $\triangle HOM$:

$$\frac{z}{PM} = \frac{OH}{HM} = \frac{a}{3n} \rightarrow z = \frac{a}{3}$$

* En forma análoga :

$$x = y = z = \frac{a}{3} \rightarrow x + y + z = a$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 55 :

El área de un triángulo rectángulo es numéricamente igual a su perímetro. Además , el doble de la longitud de un cateto es igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados . El valor del perímetro de dicho triángulo es :

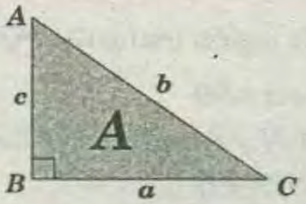
A)20 B)24 C)26 D)30 E)36

RESOLUCIÓN :

Sea el $\triangle ABC$ que se muestra en la figura .

* **A** : Área de la región triangular

* $2p$: Perímetro de la región



* Piden: $2p$

* Dato : $A = 2p$

$2a = b + c$ .....(I)

* Del gráfico : $\frac{a \times c}{2} = (a + b + c)$

$\Rightarrow c = 6$

* También : $b^2 = a^2 + c^2$

$$b^2 = \left(\frac{b+6}{2}\right)^2 + 6^2 \Rightarrow b = 10$$

* En (I) : $2a = 10 + 6 \Rightarrow a = 8$

$\rightarrow 2p = 8 + 10 + 6 = 24$

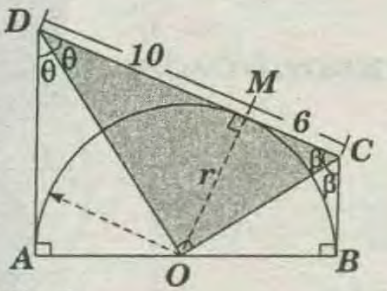
RPTA :"B"

PROBLEMA 56 :

En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se trazan tangentes $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ de modo que $\overline{DC}$ sea tangente a la semicircunferencia en M . Calcule el radio de la semicircunferencia . Si $AD = 10$ y $CB = 6$.

A) $2\sqrt{15}$ B) $4\sqrt{15}$ C) $2\sqrt{5}$ D) $4\sqrt{5}$ E) $6\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



* Piden : r

* Dato : $DM = 10$ y $MC = 6$

* Se traza $\overline{OM}$, entonces $\overline{OM} \perp DC$

* También : $m\sphericalangle ADO = m\sphericalangle ODM = \theta$

$m\sphericalangle MCO = m\sphericalangle OCB = \beta$

* $\square ABCD$: $2\theta + 2\beta = 180°$

$\Rightarrow \theta + \beta = 90°$

* $\triangle DOC$: $r^2 = 10 \times 6 \rightarrow r = 2\sqrt{15}$

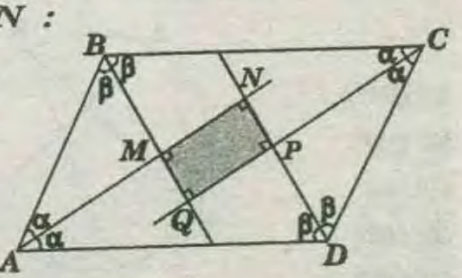
RPTA :"A"

PROBLEMA 57 :

En un paralelogramo $ABCD$, no rectángulo , con $AB < CD$ se trazan las bisectrices , interiores de sus cuatro ángulos. Dichas bisectrices , al intersecarse, forman un :

A) rombo *B) cuadrado* *C) rectángulo*
D) trapecio *E) otros cuadriláteros*

RESOLUCIÓN :



* En el paralelogramo :

$2\beta+2\alpha=180° \Rightarrow \beta+\alpha=90°$

$\overline{AN} \parallel \overline{CQ}$; $\overline{BQ} \parallel \overline{DN}$

* Por lo tanto , las bisectrices forman un rectángulo

RPTA :"C"

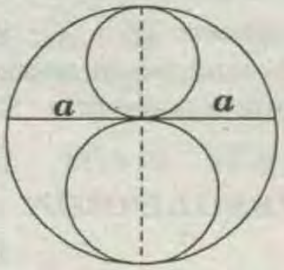
PROBLEMA 58 :

Dentro de una circunferencia de radio R se trazan una cuerda de longitud $2a$ y 2 circunferencias tangentes a la cuerda y a la circunferencia inicial, según se muestra en la figura adjunta. La suma de las áreas de estas últimas circunferencias es :

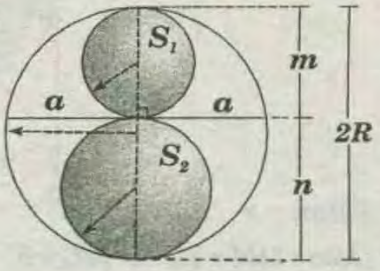
A) $\pi\left(R^2-\frac{a^2}{2}\right)$

B) $\pi\left(R^2-\frac{\sqrt{aRR}}{2}\right)$

C) πR^2



RESOLUCIÓN :



* Piden

$$S_1+S_2=\frac{\pi}{4}(m^2+n^2) \quad .....(I)$$

* De la figura , teorema de las cuerdas :

$$a\times a=m\times n \quad .....(II)$$

Además $2R = m+n$

* Elevando al cuadrado :

$$4R^2=(m+n)^2=m^2+n^2+2mn$$

$$\Rightarrow m^2+n^2=4R^2-2a^2$$

* Reemplazando en (I) :

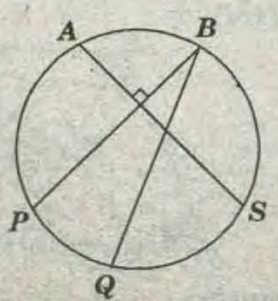
$$S_1+S_2=\pi\left(R^2-\frac{a^2}{2}\right)$$

RPTA :"A"

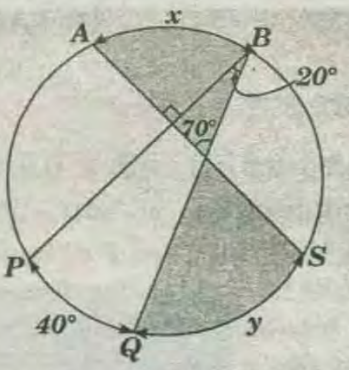
PROBLEMA 59 :

En el gráfico $m\widehat{PQ}=40°$. Calcule $m\widehat{AB}+m\widehat{QS}$.

A) 100°
B) 120°
C) 140°
D) 150°
E) 160°



RESOLUCIÓN :



* Nos piden :

$$N=\frac{m\widehat{AB}+m\widehat{QS}}{2} \rightarrow N=\frac{x+y}{2}$$

* Se observa , por ángulo interior :

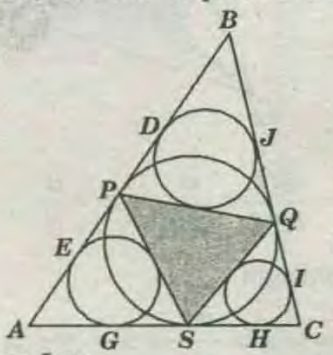
$$70°=\frac{x+y}{2} \rightarrow x+y=140°$$

RPTA :"C"

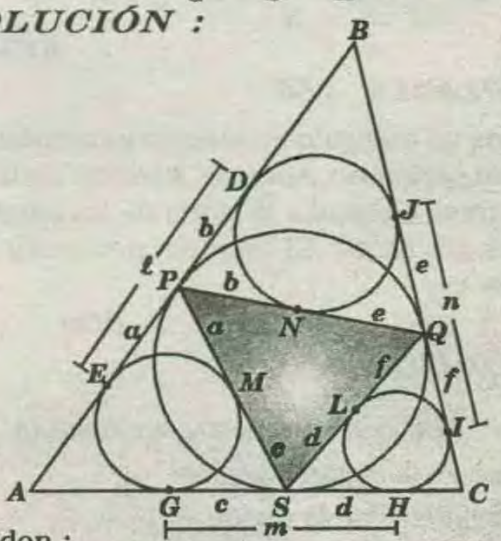
PROBLEMA 60 :

En el gráfico se muestran las circunferencias inscritas en los triángulos ABC, PBQ, APS y SQC. Si $ED+IJ+GH=50$, calcule el perímetro de la región sombreada.

A) 40
B) 30
C) 50
D) 25
E) 75



RESOLUCIÓN :



* Nos piden :

Perímetro de la región triangular $PQS=2p_{(\triangle PQS)}$

* Dato : $\ell+m+n=50$

Se observa , M,N y L son puntos de tangencia

$\rightarrow PM=PE$; $NP=PD$

$QN=QJ$; $QL=QI$

$SG=SM$; $SL=SH$

* Del dato : $a+b+c+d+e+f=50$

* En el $\triangle PQS$ se observa :

$$2p_{\triangle APQS}=a+c+d+f+e+b$$

$$\rightarrow 2p_{(\triangle PQS)}=50$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 61 :

En un triángulo equilátero $ABC(AB=6)$ se ubica en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en los puntos Q y P tal que $\overline{AP}$ y $\overline{QC}$ se intersectan en S. Si $BQ=CP$, calcule el área mínima del círculo circunscrito al triángulo QSP.

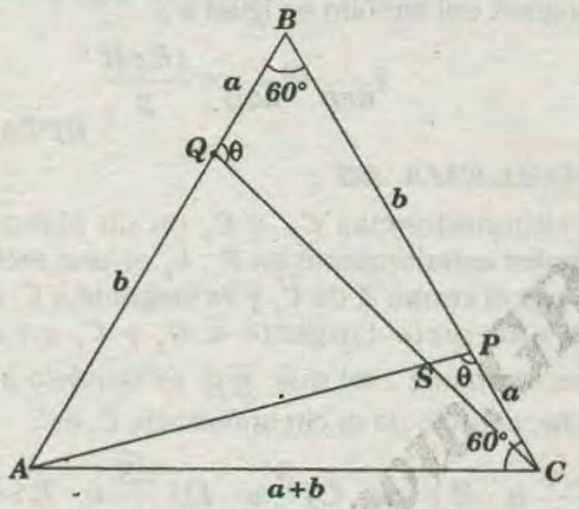
A) 4π B) $3\sqrt{3}\pi$ C) 3π D) 6π E) 9π

RESOLUCIÓN :

* Teorema :

Si $\triangle ABC$: equilátero y $PC=QB$

$$\rightarrow \boxed{\text{⌓}\,BQSP : \text{inscriptible}}$$



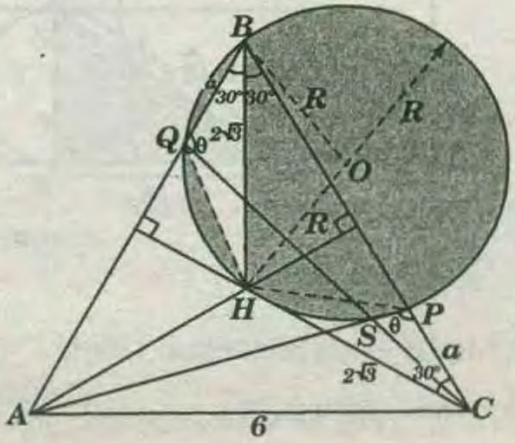
DEMOSTRACIÓN :

Si $PC=BQ$ y $\triangle MBC$ es equilátero

$$\rightarrow \triangle PCA \cong \triangle QBC(L.A.L)$$

* Luego : $m\sphericalangle APC = m\sphericalangle BQC = \theta$

$\rightarrow$ ⌓$BQSP$ es inscriptible



* Piden :

El área mínima del crírculo del radio R.

$$\rightarrow \mathcal{A}_{\bullet}=\pi R^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Del gráfico : $\triangle QBH \cong \triangle PCH(L.A.L)$

$$\rightarrow m\sphericalangle BQH = m\sphericalangle HPC = \theta$$

$\rightarrow$ ⌓$BQHP$ es inscriptible

* Además :

⌓$BQHP$: inscriptible (por teorema anterior)

* Luego : B ; Q ; H ; S y P son concíclicos

$\triangle BOH$: teorema

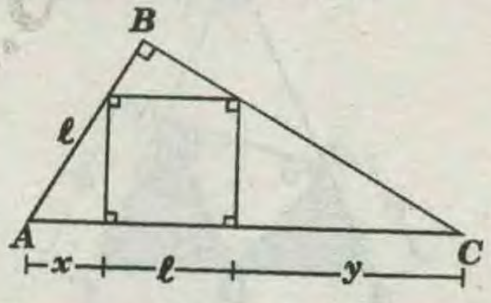
$$2\sqrt{3} \le R+R \Rightarrow R \ge \sqrt{3} \rightarrow R=\sqrt{3}(min)$$

* Pero $\mathcal{A}_{\bullet}=\pi R^2 \rightarrow \mathcal{A}_{\bullet}=3\pi$

RPTA : "C"

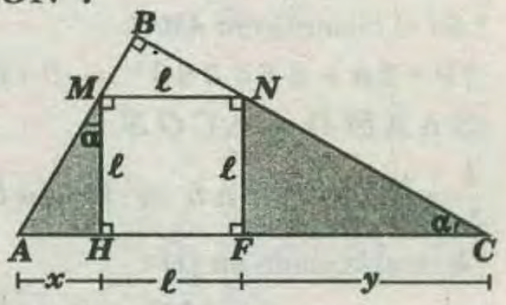
PROBLEMA 62 :

En la siguiente figura, halle la hipotenusa del triángulo ABC , si $x^2+y^2=20$; $\ell=\sqrt{8}$.



A)$5+\sqrt{8}$ B)$6+\sqrt{8}$ C)$7+\sqrt{8}$

RESOLUCIÓN :



* Piden AC

* Del gráfico :

$$AC=x+y+\ell \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Dato : $x^2+y^2=20$ y $\ell=\sqrt{8}$

$$\triangle AHM \sim \triangle NFC$$

$$\frac{\ell}{y}=\frac{x}{\ell} \Rightarrow \ell^2=xy$$

* Sabemos que :

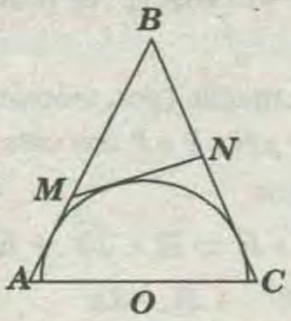
$$(x+y)^2=\underbrace{x^2+y^2}+\underbrace{2xy} \Rightarrow (x+y)^2=20+(2)(8) \Rightarrow x+y=6$$

* En *(I)* : $AC=6+\sqrt{8}$

RPTA : "B"

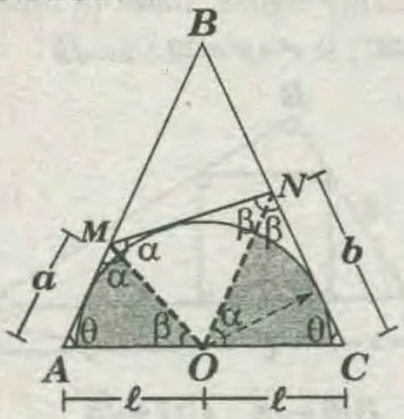
PROBLEMA 63 :

En la figura mostrada , el triángulo *ABC* de isósceles *O* es el centro de la semicircunferencia y $\overline{MN}$ es tangente a las circunferencia. Si $AM=a$ y $NC=b$, halle *AC*.



$A)\sqrt{ab}\quad B)2\sqrt{ab}\quad C)\sqrt{a^2+b^2}$

RESOLUCIÓN :



* Nos piden:

$$AC=2\ell \quad \text{.....(I)}$$

* En el cuadrilátero *AMNC*

$$2\theta+2\alpha+2\beta=360^\circ \Rightarrow \theta+\alpha+\beta=180^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AMO \sim \triangle CON :$$

$$\frac{\ell}{b}=\frac{a}{\ell} \Rightarrow \ell^2=ab \Rightarrow \ell=\sqrt{ab}$$

* Reemplazando en *(I)* :

$$AC = 2\sqrt{ab}$$

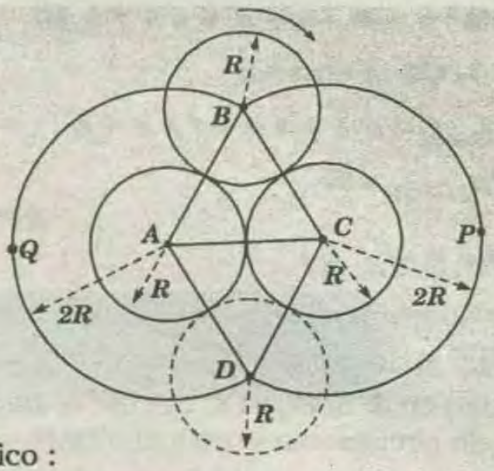
RPTA :"B"

PROBLEMA 64 :

Se tienen dos circunferencias tangentes de radio *R*. Una tercera circunferencia de radio *R* rueda alrededor de las otras dos. Determine la longitud del circuito que recorre el centro de esta tercera circunferencia.

$A)\frac{4\pi R}{3}\quad B)\frac{16\pi R}{3}\quad C)\frac{8\pi R}{3}\quad D)8\pi R\quad E)4\pi R$

RESOLUCIÓN :



Del gráfico :

* Los triángulo *ABC* y *ACD* son equiláteros .

* Los arcos $\overset{\frown}{BPD}$ y $\overset{\frown}{BQD}$ subtienden ángulos centrales que miden $240^\circ <> \frac{4\pi}{3} rad$, entonces :

$$\ell_{\overset{\frown}{BPD}}=\frac{4\pi}{3}\times 2R=\frac{8\pi R}{3} \;;\; \ell_{\overset{\frown}{BQD}}=\frac{4\pi}{3}\times 2R=\frac{8\pi R}{3}$$

* Longitud del circuito es igual a :

$$\ell_{\overset{\frown}{BPD}}+\ell_{\overset{\frown}{BQD}}=\frac{16\pi R}{3}$$

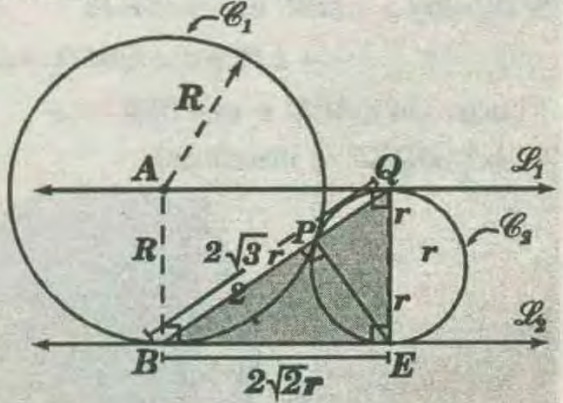
RPTA :"A"

PROBLEMA 65 :

Dos circunferencias C_1 y C_2 en un plano , son tangentes exteriormente en *P* ; L_1 es una recta que pasa por el centro *A* de C_1 y es tangente a C_2 en *Q* ; L_2,es una recta tangente a C_1 y C_2 en *B* y *E* respectivamente , tal que $\overline{BE}$ es paralelo a L_1. Si $BP=2u$, el radio de la circunferencia C_2 es :

$A)\frac{\sqrt{5}}{2}u\quad B)\frac{4}{3}u\quad C)\frac{3}{2}u\quad D)\frac{\sqrt{3}}{2}u\quad E)\frac{\sqrt{5}}{3}u$

RESOLUCIÓN :



* Piden : r

* Dato : $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $BP=2$

como $\square AQEB$ es un rectángulo : $R=2r$

* Por teorema : $BE=2\sqrt{Rr}$

$BE=2\sqrt{(2r)(r)} \rightarrow BE=2\sqrt{2}r$

* Luego en el $\triangle QEB$; por relaciones métricas :

$$(2\sqrt{2}r)^2=2(2r\sqrt{3}) \rightarrow r=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

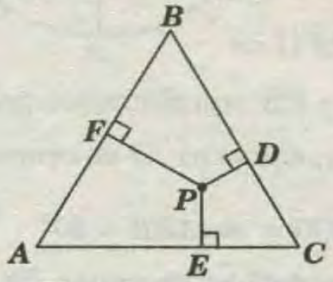
RPTA :"D"

PROBLEMA 66 :

El triángulo ABC es equilátero de lado ℓ y P es un punto interior. Los segmentos $\overline{PD}$, $\overline{PE}$ y $\overline{PF}$ son perpendiculares a sus lados.

Entonces :

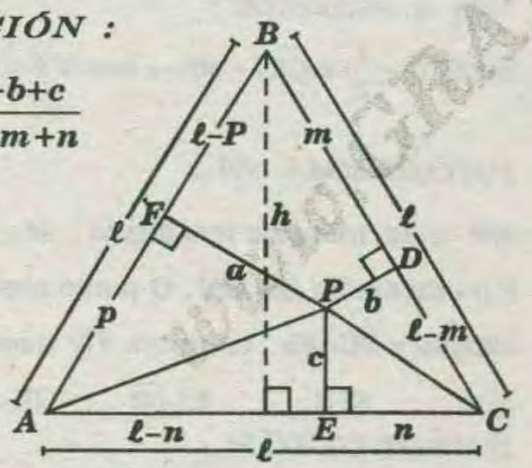
$$\frac{PD+PE+PF}{BD+CE+AF}$$ es :



$A)\frac{\sqrt{3}}{3}$ $B)\frac{\sqrt{3}}{2}$ $C)\sqrt{3}$ $D)2$ $E)2\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

* Piden : $\frac{a+b+c}{p+m+n}$



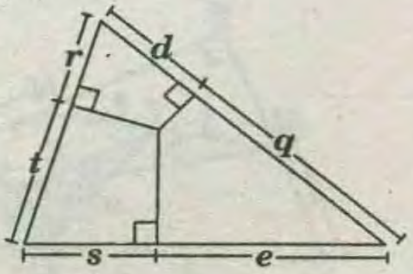
* Dato

$\triangle ABC$ es equilátero

$$AB=BC=AC=\ell$$

* Por teoréma : $a+b+c=h\frac{\ell}{2}\sqrt{3}$ .....(I)

*OBSERVACIÓN :



* Se cumple: $\boxed{t^2+d^2+e^2=s^2+q^2+r^2}$

* En el $\triangle ABC$ de la observación :

$m^2+n^2+p^2=(\ell-m)^2+(\ell-n)^2+(\ell-p)^2$

$0=3\ell^2-2\ell(m+n+p)$

$\rightarrow m+n+p=\frac{3\ell}{2}$ .....(II)

* De (I) y (II) : $\frac{a+b+c}{p+m+n}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

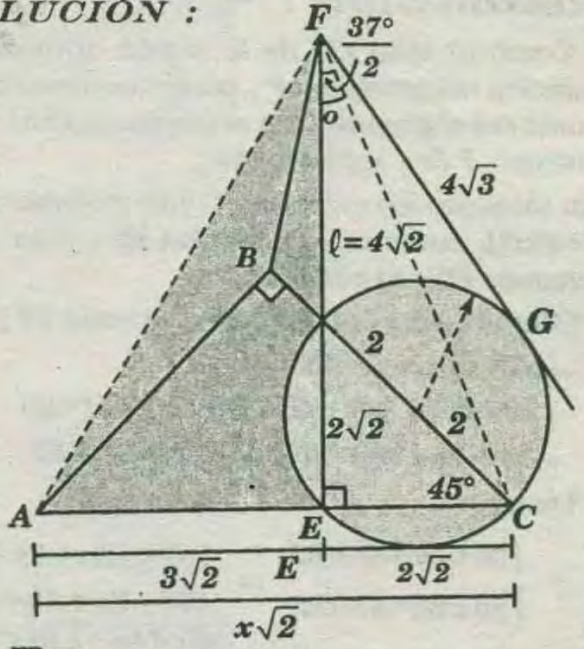
RPTA : "A"

PROBLEMA 67 :

En un triángulo isósceles ABC recto en B, se traza lacircunferencia C de diámetro $\overline{CD}$ $(D\in\overline{BC})$, $C\cap AC=\{E\}$. En la prolongación de $\overline{ED}$ se elige el punto F de manera que $FB=BC$. Desde el punto F se traza la tangente $\overline{FG}$ $(G\in C)$ tal que $FG=4\sqrt{3}$. Si $DC=4\,u$ entonces FB es igual a :

A) 4,5u B) 5,0u C) 5,5u D) 6,0u E) 6,5u

RESOLUCIÓN :



* Piden : $FB=x$

* Sea : $FD=\ell$

* Por el Teorema de la Tangente :

$$(4\sqrt{3})^2=(\ell+2\sqrt{2})\ell \rightarrow \ell=4\sqrt{2}$$

* Como $\overline{CD}$ es diámetro : $m\sphericalangle AEC=90°$

$\triangle FEC$: not $\frac{37°}{2};\frac{143°}{2} \rightarrow m\sphericalangle EFC=\frac{37°}{2}$

* Si $AB=BC=BF$; entonces , B es circuncentro del $\triangle AFC$.

* Por propiedad : $m\sphericalangle EFC=\frac{m\sphericalangle ABC}{2}$

$\triangle AEF$: not $\frac{53°}{2} \rightarrow AE=\frac{FE}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

* Del gráfico : $3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=x\sqrt{2} \rightarrow x=5,0u$

RPTA : "B"

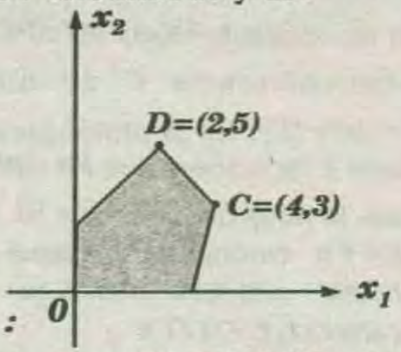
PROBLEMA 68 :

Sea $F(x_1; x_2)=ax_1+bx_2$, la función objetivo del problema P

* P : minimizar $F(x_1, x_2)$ sujeto a $:(x_1, x_2) \in S \subset \mathbb{R}^2$

* Si el lado CD de la región admisible S que se indica es solución del problema P, determine $a+b$ de modo que el valor óptimo de F este entre 20 y 25.

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 10



RESOLUCIÓN :

* Como el lado CD de la región admisible S es solución del problema P, podemos tomar cualquier punto del segmento CD y reemplazarlo en la función objetivo $F(x_1, x_2)=ax_1+bx_2$

Así tomando los extremos C y D, y evaluamos para $C=(4;3)$, tenemos $F(4;3)=4a+3b$ y para $D=(2;5)$ tenemos $F(2; 5)=2a+5b$

* Como el valor óptimo de F está entre 20 y 25 :

$\rightarrow 20<F(x_1;x_2)<25$

$\rightarrow 20<F(4 ; 3)< 25 \wedge 20<F(2; 5)<25$

$\rightarrow 20< 4a+3b< 25 \wedge 20<2a+5b<25$

* Luego :

$$\begin{cases} 20<4a+3b<25 \\ 20<2a+5b<25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60<12a+9<75 \\ 20<2a+5b<25 \end{cases}$$

$$80<14a+14b<100$$

$$\rightarrow \frac{40}{7}<a+b<\frac{50}{7}$$

* Por lo tanto , los valores de $(a+b)$ están en el intervalo $\left\langle \frac{40}{7}; \frac{50}{7} \right\rangle$

* Como $6 \in \left\langle \frac{40}{7}; \frac{50}{7} \right\rangle$

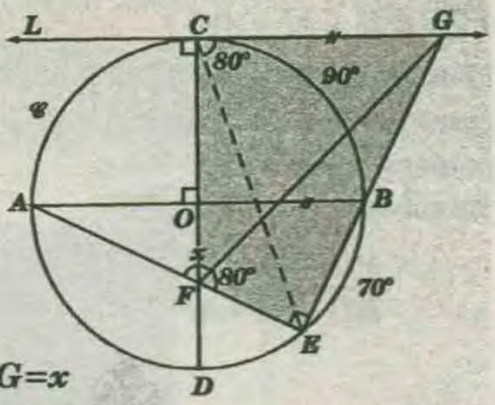
RPTA : "C"

PROBLEMA 69 :

En una circunferencia se trazan los diámetros perpendiculares $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, por C se traza una recta L tangente a la circunferencia , en el arco DB se elige el punto E de manera que E , B y G sean colineales $(G \in L)$, la $m\widehat{EB}=70°$, $\overline{AE} \cap \overline{DC} = \{F\}$. Determine la $m\sphericalangle AFG$.

A)85° B)95° C)100° D)125° E)155°

RESOLUCIÓN :



* Piden $m\sphericalangle AFG=x$

* En $\mathscr{C}$ si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son diámetros perpendiculares $(\overline{AB} \cap \overline{CD} = O)$; entonces , O es centro de $\mathscr{C}$.

* Como $m\sphericalangle OCG = m\sphericalangle AEB = 90°$

$\square FCGE$: inscriptible , trazamos $\overline{CE}$.

$\rightarrow m\sphericalangle ECG=m\sphericalangle GFE$

* Por $\sphericalangle$ semiinscrito :

$m\sphericalangle ECG=\frac{1}{2}(m\widehat{CE})=80° \rightarrow m\sphericalangle GFE=80° \rightarrow x=100°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 70 :

ABC es un triángulo rectángulo , $M \in \overline{AB}$ y $N \in \overline{BC}$ T punto medio de $\overline{MN}$, Q punto medio de $\overline{AC}$, si $AM=4u$ y $NC=6u$, entonces $\overline{TQ}$ mide (en u);

A) 2 B) 3 C) $\sqrt{13}$ D) $\sqrt{15}$ E) 4

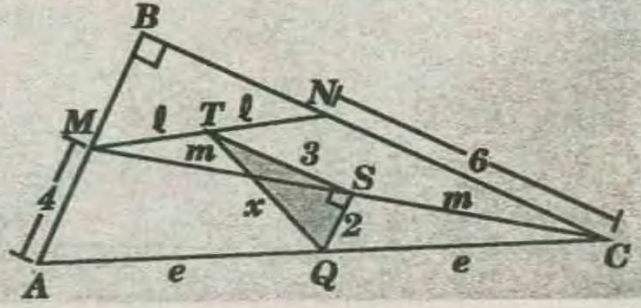
RESOLUCIÓN :

* Piden TQ

* Se traza $\overline{MC}$ y se ubica S, punto medio de $\overline{MC}$.

* Por el Teorema de la base media :

en ΔAMC: $QS=\frac{AM}{2}=2$ y $\overline{QS} \parallel \overline{AM}$



en $D\ CNM$: $TS=\frac{NC}{2}=3$ y $\overline{TS}\parallel\overline{NC}$

* Luego , $m\sphericalangle TSQ=m\sphericalangle ABC=90°$

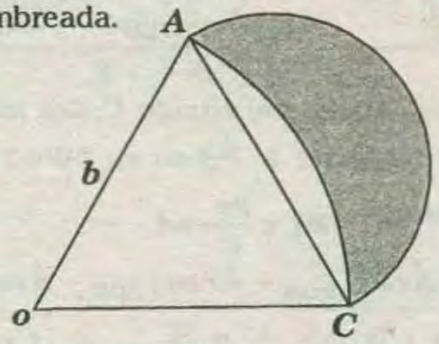
* En el $\triangle TSQ$: Teorema de Pitágoras

$$x^2=2^2+3^2 \rightarrow x=\sqrt{13}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 71 :

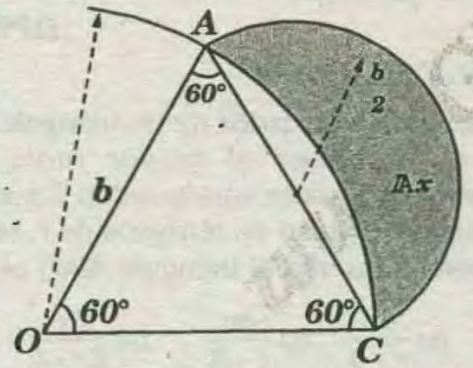
En la figura siguiente , el triángulo AOC , es equilátero de lado b; $\overline{AC}$ es diámetro de la semicircunferencia y $\widehat{AOC}$ es un sector circular. Determine el área de la región sombreada.



A) $\frac{b^2}{24}(6\sqrt{3}-\pi)$ B) $\frac{b^2}{12}(6\sqrt{3}-\pi)$ C) $\frac{b^2}{12}(\sqrt{3}+\pi)$

RESOLUCIÓN :

* Piden el área de la lúnula ($\mathbb{A}_x$) :



* Datos :

ΔABC : equilátero

$\overline{AC}$: diámetro

* Del gráfico : $\mathbb{A}_{\sphericalangle AOC}+\mathbb{A}_x=\mathbb{A}_{\triangle AOC}+\mathbb{A}_{\frown AOC}$

* Reemplazando :

$$\frac{\pi b^2\times 60°}{360°}+\mathbb{A}_x=\frac{b^2\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\times\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 \rightarrow \mathbb{A}_x=\frac{b^2}{24}(6\sqrt{3}-\pi)$$

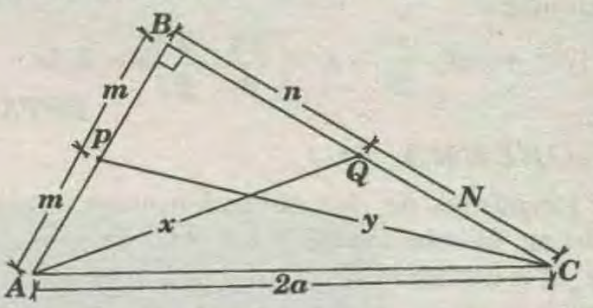
RPTA :"A"

PROBLEMA 72 :

En un triángulo rectángulo ABC la hipotenusa mide $2a$ unidades , entonces la suma de los cuadrados de las longitudes de las medianas relativas a los catetos es :

A) $3a^2$ B) $5a^2$ C) $7a^2$ D) $9a^2$ E) $11a^2$

RESOLUCIÓN :



* Piden : $(AQ)^2+(CP)^2=x^2+y^2$

* Por Teorema de Pitágoras :

$\triangle ABQ$: $x^2=n^2+(2m)^2$ .....(I)

$\triangle CBP$: $y^2=m^2+(2n)^2$ .....(II)

* Sumando (I) y (II) :

$$x^2+y^2=5(m^2+n^2) \text{ ....(III)}$$

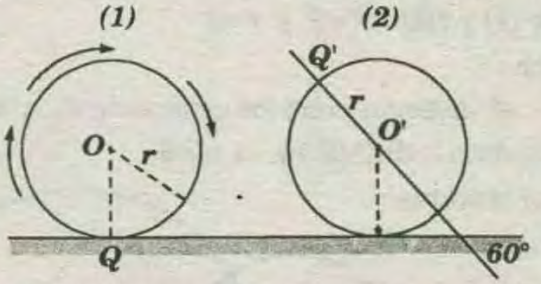
pero , ABC : $(2m)^2+(2n)^2=(2a)^2 \rightarrow m^2+n^2=a^2$

* Reemplazando en (III) : $x^2+y^2=5a^2$

RPTA :"B"

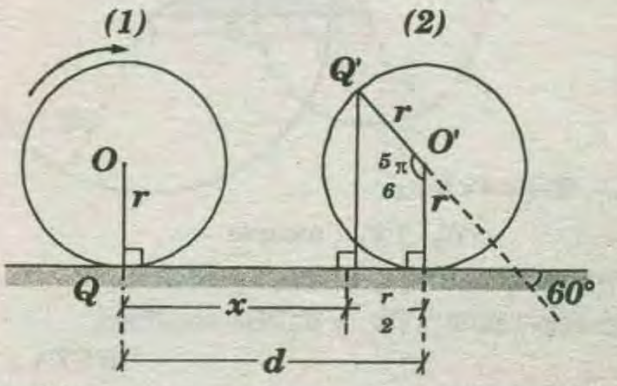
PROBLEMA 73 :

Q'es la nueva ubicación del punto Q, al girar la rueda desde la posición (1) hasta la posición (2). Determine la distancia (menor a $2\pi r$ que hay entre Q y la proyección de Q' sobre el plano horizontal.



A) 1,1r
B) 2,1r
C) 3,1r
D) 4,1r
E) 5,1r

RESOLUCIÓN :



* Nos piden x

* De la figura tenemos que :

$d=\theta r$ (θ: ángulo de giro)

$$d=\frac{5\pi r}{6}$$

* Además :

$$x=d-\frac{r}{2}\rightarrow x=\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)x=2,1r$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 74 :

Las longitudes de dos circunferencias coplanares están en la relación de **5** a **2** y su suma es igual a 14π; si la distancia entre sus centros es dos veces la diferencia de sus radios , podemos afirmar que las circunferencias son:

A) tangentes exteriores *B) tangentes interiores*
C) secantes *D) disjunfas*
E) concéntricas

RESOLUCIÓN :

* Piden analizar las circunferencias.

* Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ las circunferencias de radios R y r, respectivamente

Longitud de $\mathscr{C}_1$: $L_1=2\pi R$

Longitud de $\mathscr{C}_2$: $L_2=2\pi r$

* De los datos :

$$\frac{L_1}{L_2}=\frac{5}{2}\rightarrow\frac{2\pi R}{2\pi r}=\frac{5}{2}\rightarrow\frac{R}{r}=\frac{5}{2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$L_1+L_2=14\pi\rightarrow 2\pi R+2\pi r=14\pi$$

$$\rightarrow R+r=7\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

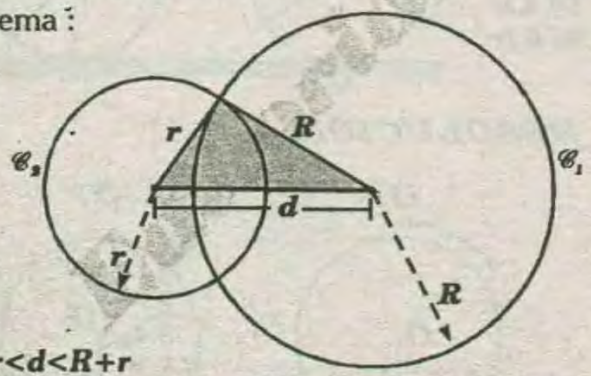
* De *(I)* y *(II)* : $R=5$ y $r=2$

* Sea :

d: distancia entre los centros de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

* Por dato : $d=2(R-r)\rightarrow d=6$

* Por teorema :



* Si : $R-r<d<R+r$

$\rightarrow \mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: secante

* Para el problema : $5-2<6<5+2$

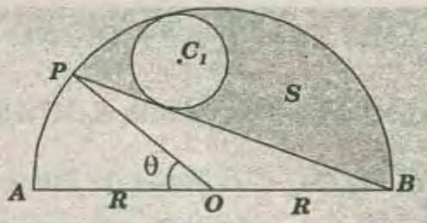
* De esta manera , $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son secantes.

RPTA : "C"

PROBLEMA 75 :

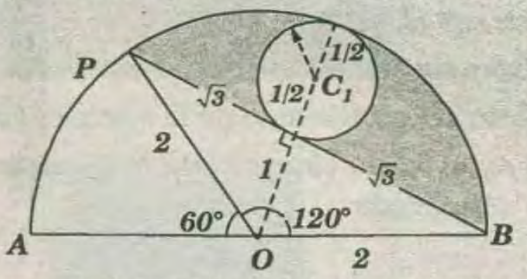
Calcule el área en u^2, que puede tener la región sombreada **S** cuando el área del circulo C_1 es máximo. $R=2u, \theta=\pi/3$.

A)1,36
B)1,45
C)1,53
D)1,67
E)1,82



RESOLUCIÓN :

* Reemplazando los datos en el gráfico :



* Para que el área del círculo C_1 sea máximo,esta debe ser tangente a $\overline{PB}$ en su punto medio. Al considerar que $120^\circ=\frac{2\pi}{3}rad$

$$S=\underbrace{Área_{\triangle POB}}-\underbrace{Área_{\triangle POB}}-\underbrace{Área_{círculoC_1}}$$

$$\rightarrow S=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3}\right)(2)-\frac{2\sqrt{3}}{2}(1)\ -\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow S=\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\sqrt{3}\rightarrow S=\frac{13\pi}{12}-\sqrt{3}$$

* Operando : $S=1,67$

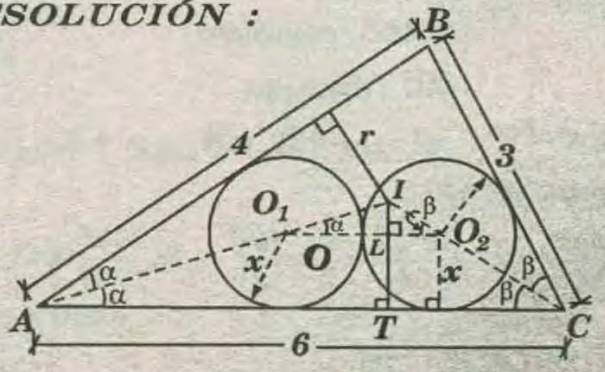
RPTA : "D"

PROBLEMA 76 :

Las longitudes de los lados de un triángulo *ABC* son **3**, **4** y **6**. Entonces el mayor radio de dos circunferencias iguales que pueden inscribirse en dicho triángulo , (dado en términos de r, radio de la circunferencia inscrita al triángulo *ABC*) es :

A) $\frac{6r}{r+3}$ *B)* $\frac{4r}{r+3}$ *C)* $\frac{3r}{r+3}$ *D)* $\frac{3r}{2r+3}$ *E)* $\frac{2r}{r+2}$

RESOLUCIÓN :



* Piden : x máximo en función del inradio r

* Las dos circunferencias congruentes inscritas tendrán radio máximo cuando el lado tangente común sea el de mayor longitud.

* ΔABC : I es incentro

$\Delta AIC \sim \Delta O_1IO_2$ (elementos homólogos)

$$\rightarrow \frac{6}{O_1O_2}=\frac{IT}{IL} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Como $O_1O_2 = 2x$

$IT = r \Rightarrow IL = r-x$

* Reemplazando en *(I)*:

$$\frac{6}{2x}=\frac{r}{r+x} \rightarrow x=\frac{3r}{r+3}$$

RPTA :"C"

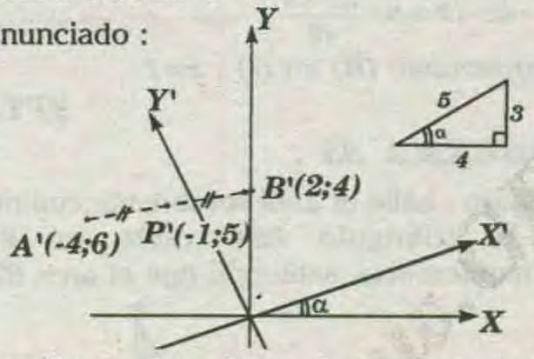
PROBLEMA 77 :

Después de haber sido rotado el sistema XY un ángulo α tal que $\tan\alpha=\frac{3}{4}$, se obtuvo los puntos $A'(-4;6)$, $B'(2;4)$. Si P' es punto medio de $\overline{A'B'}$ en el sistema $X'Y'$, determine las coordenadas de P' en el sistema XY.

A) $\left(\frac{1}{7};\frac{1}{9}\right)$ B) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{5}\right)$ C) $\left(-\frac{17}{25};\frac{11}{15}\right)$ D) $\left(-\frac{19}{5};\frac{17}{5}\right)$

RESOLUCIÓN :

* Del enunciado :



* Del gráfico , nos piden las coordenadas de $P'(\underset{x'}{-1};\underset{y'}{5})$ en el sistema XY.

* Sabemos.:

$$\boxed{x=x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha} \quad x=-1\left(\frac{4}{5}\right)-5\left(\frac{3}{5}\right)=-\frac{19}{5}$$

$$\boxed{y=x'\operatorname{sen}\alpha - y'\cos\alpha} \quad y=-1\left(\frac{3}{5}\right)+5\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{17}{5}$$

$$\rightarrow P'=(x;y)=\left(-\frac{19}{5};\frac{17}{5}\right)$$

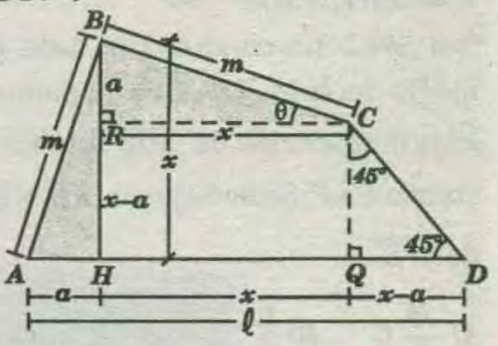
RPTA :"D"

PROBLEMA 78 :

En un trapezoide $ABCD$, $AB=BC$, $m\hat{B}=90°$, $m\hat{D}=45°$. Se traza el segmento $\overline{BH}$ perpendicular a $\overline{AD}$. Si $AD=R$ calcule BH.

A) $\frac{2}{3}\ell$ B) $\frac{\ell}{2}$ C) $\frac{\ell}{3}$ D) $\frac{\ell}{4}$ E) $\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$

RESOLUCIÓN :



* Piden : $BH=x$

* Se trazan $\overline{CR}$ y $\overline{CQ}$ perpendiculares a $\overline{BH}$ y $\overline{AD}$ respectivamente

$\triangle BHA \cong \triangle CRB$ (A – L – A)

$AH=BR=a$

$BH=RC=x$

* Luego :

$\triangle DQC$ (notable $45°$)

$CQ = QD = x - a$

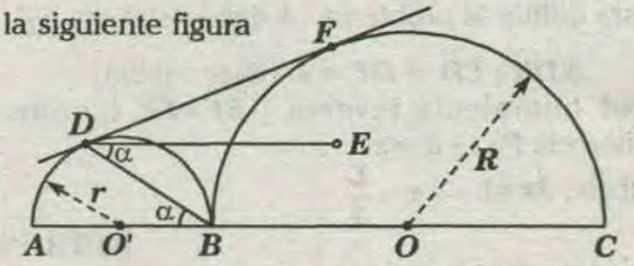
$AD = \ell = a+x+x-a$

$$\Rightarrow x=\frac{\ell}{2}$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 79 :

En la siguiente figura

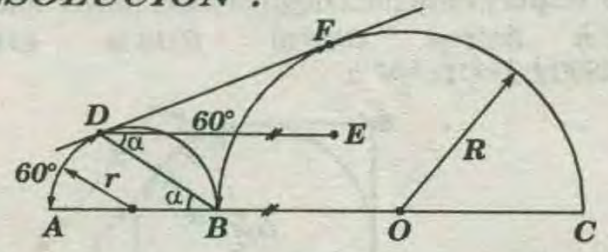


Si $r=1u$, $R=3u$, $\overline{DE}//\overline{AC}$, $O\hat{B}F=60°$.

Entonces la medida del ángulo BDE es :

A)7,5° B)10° C)15° D)22,5° E)30°

RESOLUCIÓN :



* Piden : α

* Como : $\overline{DE}//\overline{AC} \rightarrow m\sphericalangle ABD = \alpha$

* Por dato : $m\sphericalangle OBF = 60°$

* entonces : $m\sphericalangle\widehat{BF}=60°$

* Por propiedad : $m\widehat{AD}=m\widehat{BF}=60°$

* Luego, por ángulo inscrito: $\alpha = 30°$

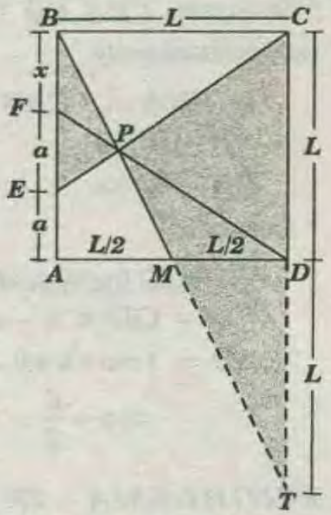
RPTA : "E"

PROBLEMA 80 :

Sea *ABCD* un cuadrado de lado *L* ; *M* es el punto medio del lado $\overline{AD}$, E es un punto en el lado $\overline{AB}$, *P* es la intersección de $\overline{MB}$ con $\overline{EC}$ y *F* es tal que *DF* contiene a *P*. Sabiendo que $|\overline{AE}|=|\overline{EF}|$, calcule el valor de $|\overline{FB}|$.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}L$ B) $\frac{L}{2}$ D) $\frac{L}{3}$ C) $\frac{L}{4}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3}L$

RESOLUCIÓN :



* Piden : $BF = x$
* Dato : $CD = L$

$\Rightarrow AM = MD = \frac{L}{2}$

* Para definir el problema , *F* debe estar en $\overline{AB}$

ΔTBC: $CD = DT = L$ (Base media)

* Por homotecia inversa : $BF=FE$ (centro de homotecia *P*) $\Rightarrow a = x$
* luego , $3x=L \rightarrow x=\frac{L}{3}$

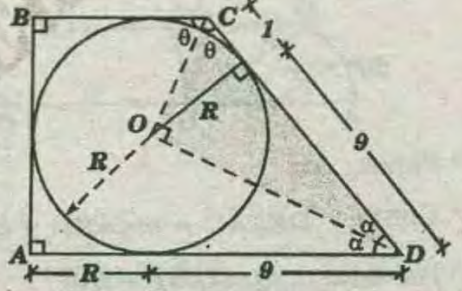
RPTA :"D"

PROBLEMA 81 :

El punto de tangencia de la circunferencia inscrita en un trapecio rectángulo ,divide al mayor de los lados no paralelos en dos segmentos que miden *1m* y *9m* respectivamente.Luego la base mayor mide :

A)12 m B)10 m C)13 m D)14 m E)16 m

RESOLUCIÓN :



* Piden : *AD*
* Se observa : $AD=9+R$
* $\triangle COD$: $R^2=(1)(9)$
* Luego : $R=3 \rightarrow AD=12m$

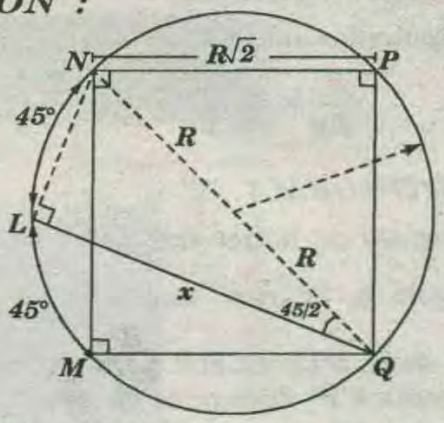
RPTA :"A"

PROBLEMA 82 :

Un cuadrado *MNPQ* cuyos lados miden $\sqrt{2-\sqrt{2}}u$ está inscrito en una circunferencia. Calcule la distancia del punto *Q* al punto medio del arco *MN*.

A)0,5u B)1u C)1,5u D) $\sqrt{2}u$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}u$

RESOLUCIÓN :



* Piden : x
* $\triangle NLQ$ por polígonos regulares :

$$x = ap_8 = \frac{2R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} = R\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{.....(I)}$$

* Pero :

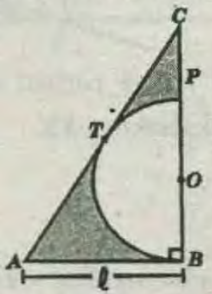
$$R\sqrt{2} = \sqrt{2-\sqrt{2}} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \quad \text{.....(II)}$$

* Reemplazando *(II)* en *(I)* : $x=1$

RPTA :"B"

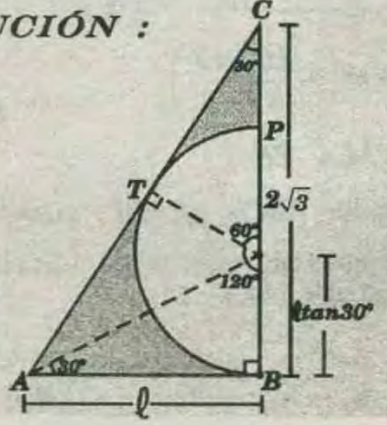
PROBLEMA 83 :

En la figura , halle el area sombreada comprendida entre el triángulo *ABC* recto en *B* y la semicircunferencia, sabiendo que el arco *BT* es de *120°*.



A) $\frac{(3\sqrt{3}-\pi)}{6}\ell^2$ B) $\frac{(2\sqrt{3}-\pi)}{6}\ell^2$ C) $\frac{(\sqrt{3}+\pi)}{4}\ell^2$

RESOLUCIÓN :



* Sea S el área de la región sombreada luego :

$$S=\underset{AB}{\overset{C}{\triangle}}-\underset{BP}{\overset{}{\frown}}$$

$$S=\frac{\ell\times\ell\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right)^2\rightarrow S=\frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi\ell^2}{6}=\left(\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\right)\ell^2$$

RPTA : "A"

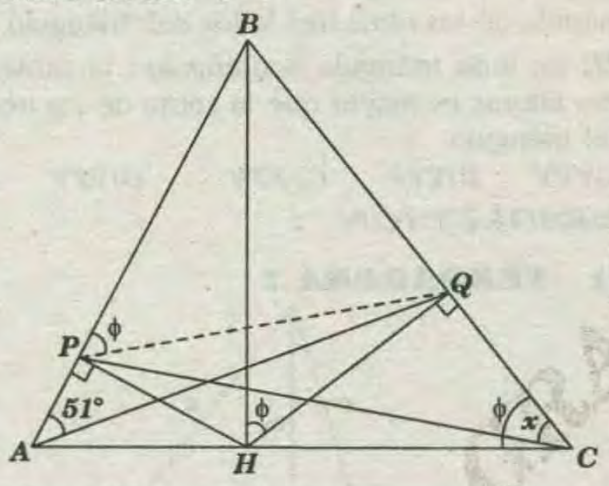
PROBLEMA 84 :

En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$, luego se trazan $\overline{HP}$ y $\overline{HQ}$ perpendiculares a los lados AB y BC respectivamente. Si $m\sphericalangle BAQ=51°$.

Halle la medida del $\sphericalangle PCQ$.

A) 36° B) 39° C) 49° D) 51° E) 56°

RESOLUCIÓN :



* Piden : $m\sphericalangle PCQ=x$

* En el $\triangle BHC$:

se sabe $m\sphericalangle BHQ=m\sphericalangle BCH=\phi$

* $\square PBQH$: Inscriptible

$\Rightarrow m\sphericalangle BPQ=m\sphericalangle BHQ=\phi$

* Como :

$m\sphericalangle BCH=m\sphericalangle BPQ=\phi$

$\Rightarrow APQC$: inscriptible $\rightarrow x=51°$

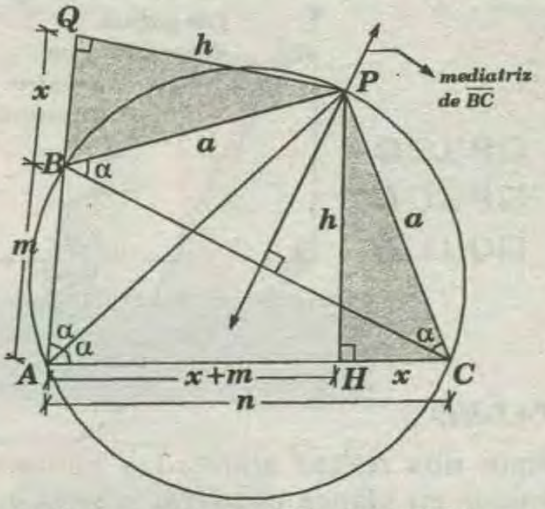
RPTA : "D"

PROBLEMA 85 :

En un triángulo ABC donde $AC-AB=13m$, la mediatriz de $\overline{BC}$ corta a la prolongación de la bisectriz del ángulo BAC en P. Calcule la longitud de la proyección de $\overline{BP}$ sobre la $\overline{AB}$ en metros .

A) 4,5 B)5,0 C) 6,5 D)11,0 E) 13,0

RESOLUCIÓN :



* Piden : x (proyección de $\overline{PB}$ sobre $\overline{AB}$ en metros)

* Dato : $n-m=13m$

* El punto P pertenece a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

* Por teorema de la bisectriz : $AH=AQ=x+m$

* $\triangle PBQ\cong\triangle PCH : HC=BQ=x$

* Se observa : $n=2x+m\Rightarrow n-m=2x\rightarrow x=6,5$

RPTA : "C"

PROBLEMA 86 :

Diga el valor de verdad (V o F) de las siguientes afirmaciones :

I) Tres rectas paralelas coplanares determinan exactamente tres planos (en el espacio)

II) Tres planos perpendiculares dos a dos tiene un sólo punto común .

III) Si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son dos rectas en el espacio que no son paralelas ni se intersecan y P_1 y P_2 planos que las contienen $(\mathcal{L}_1\subset P_1\ y\ \mathcal{L}_2\subset P_2)$ entonces

$$P_1\cap P_2\neq\phi$$

A)VVF B)VFV C)VFF D)VVV E)FVV

RESOLUCIÓN :

A)VERDADERO :

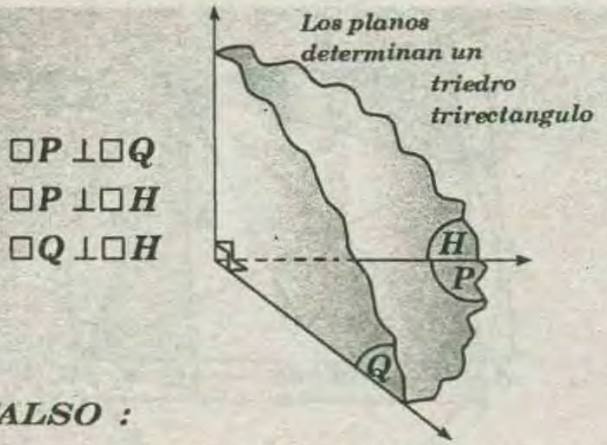
* Como dos rectas paralelas determinan un plano y además las tres son no coplanares entonces se cumple

$$N°\text{ de planos determinados}=C_2^3=\frac{3!}{2!1!}=3$$

B)VERDADERO :

* Porque tres planos secantes dos a dos concurren en un punto .

* Como se observa en el gráfico :

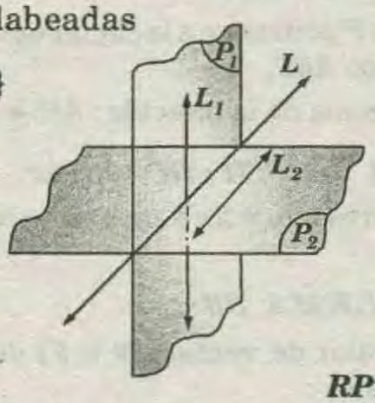


C) FALSO :

* Porque dos rectas alabeadas pueden estar contenidos en planos paralelos o secantes ; ver gráfico

$\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$: alabeadas

$P_1 \cap P_2 = \{L\}$



RPTA : "A"

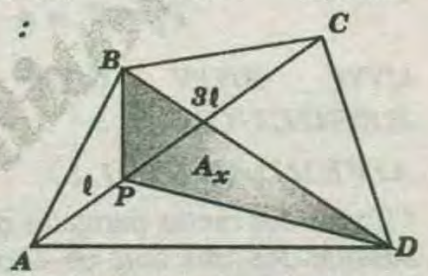
PROBLEMA 87 :

En un cuadrilátero ***ABCD***, el punto ***P*** divide el segmento $\overline{AC}$ en la razón $\frac{1}{3}$, $(AP < PC)$.

Si las áreas de las regiones triangulares ***ABD*** y ***BDC*** miden $70m^2$ y $30m^2$ respectivamente , entonces el área de la región triangular ***PBD*** mide :

A)45m² B)44m² C)42m² D)40m² E)39m²

RESOLUCIÓN :



* Piden : $A_{\triangle PBD} = A_x$

* Datos :

$$\frac{AP}{PC} = \frac{1}{3}; A_{\triangle ABD} = 70m^2; A_{\triangle BCD} = 30m^2$$

* Por propiedad :

$$\left.\begin{array}{l} A_{\triangle PBC} = 3(A_{\triangle ABP}) \\ A_{\triangle PDC} = 3(A_{\triangle APD}) \end{array}\right\} \Rightarrow A_{\square PBCD} = 3(A_{ABPD})$$

* Luego :

$$A_{\triangle ABD} = (A_{\triangle ABPD}) + A_x = 70m^2$$

$$A_{\triangle BCD} = A_{\square PBCD} - A_x = 30m^2$$

* Operando :

$$3A_{\triangle ABPD} + 3A_x = 210m^2$$

$$A_{\square PBCD} - A\,x = 30\,m^2$$

* Restando : $4A_x = 180\,m^2 \Rightarrow A_x = 45\,m^2$

RPTA : "A"

PROBLEMA 88 :

Deduzca el valor de verdad de las siguientes afirmaciones .

I) En todo triángulo acutángulo la altura es menor que la semisuma de los otros dos lados que parten del mismo vértice .

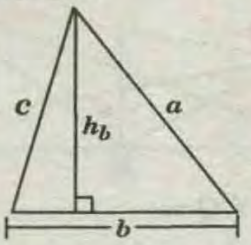
II) En todo triángulo , la altura es menor que la medida de los otros tres lados del triángulo .

III) En todo triángulo acutángulo , la suma de las tres alturas es mayor que la suma de los tres lados del triángulo.

A)VVV B)VVF C) FFV D)VFV E)VFF

RESOLUCIÓN :

I) VERDADERA :



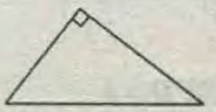
$h_b < a$.....(I)

$h_b < c$.....(II)

*de (I) y (II): $2h < a + c$

$$\Rightarrow h_b < \frac{a+c}{2}$$

II) FALSA :



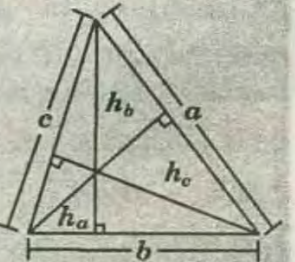
La altura puede ser menor o igual longuitud que cualquiera de los tres lados dependiendo del tipo de triángulo.

III) FALSO :

$h_b < \frac{a+c}{2}$.....(I)

$h_a < \frac{b+c}{2}$.....(II)

$h_c < \frac{a+b}{2}$.....(III)



* de (I)+(II)+(III) : $h_a+h_b+h_c<a+b+c$

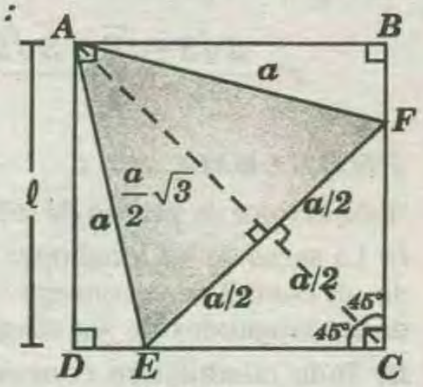
RPTA : "E"

PROBLEMA 89 :

Sea **ABCD** un cuadrado y **AEF** un triángulo equilátero inscrito en **ABCD**. Halle el área del cuadrado **ABCD**, sabiendo que el área del triángulo **AEF** es $\sqrt{3}$.

A)2 B) $2+\sqrt{3}$ C)3 D) $3+\sqrt{3}$ E)4

RESOLUCIÓN :



* Dato :

$$A_{\Delta EF}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\Rightarrow a=2$$

* Piden : $A_{\square ABCD}=\frac{(AC)^2}{2}$ .....(I)

$\triangle ADE \cong ABF$

$\Rightarrow FC=EC$ y $\overline{AC}\perp\overline{EF}$

$\Rightarrow AC=\frac{a}{2}(\sqrt{3}+1)$.....(II)

* Reemplazando (II) en (I): $A_{\square ABCD}=2+\sqrt{3}$

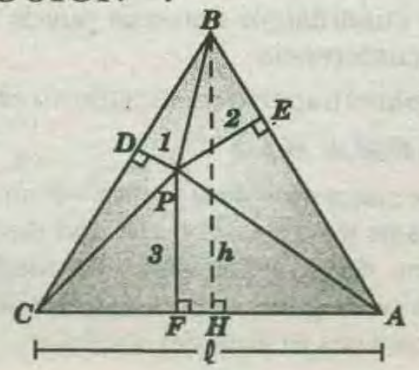
RPTA : "B"

PROBLEMA 90 :

Tres puntos **A**, **B** y **C** forman un triángulo equilátero. Considerando **P** un punto interior al ΔABC tal que las alturas $\overline{PD}$ (del ΔCPB), $\overline{PE}$ (del ΔAPB) y $\overline{PF}$ (del ΔAPC) miden 1; 2 y 3 respectivamente. Calcule el área del triángulo equilátero .

A) $12\sqrt{3}$ B) $36\sqrt{3}$ C)27 D)36 E) $15\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



* Piden :

$$A_{\Delta ABC}\ \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\ (\Delta ABC \text{ equilátero})\text{.....(I)}$$

* Datos : $PD=1$; $PE=2$ y $PF=3$

* Por propiedad : $BH = PD + PE + PF$

$\Rightarrow h=1+2+3=6$

* Pero :

$$h=\frac{\ell}{2}\sqrt{3}\Rightarrow 6=\frac{\ell}{2}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \ell=4\sqrt{3}\ \text{.....(I)}$$

* Reemplazando en (II) en (I): $A_{\Delta ABC}=12\sqrt{3}$

RPTA : "A"

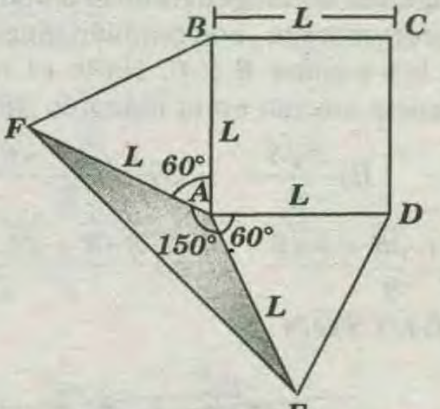
PROBLEMA 91 :

Sea **ABCD** un cuadrado de lado **L** , sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ se construyen triángulos equiláteros : ΔEAD y ΔFAB respectivamente. Calcule el área del triángulo ΔEFA.

RESOLUCIÓN :

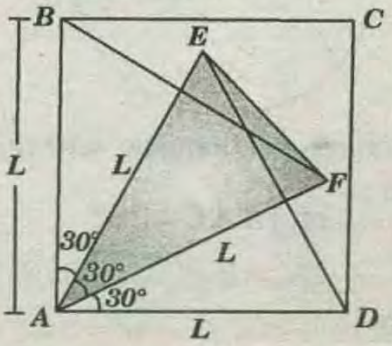
El problema no especifica como realizar el trazado de los triángulos equiláteros por tal motivo se presentan cuatro posibilidades :

*** POSIBILIDAD 1 :**



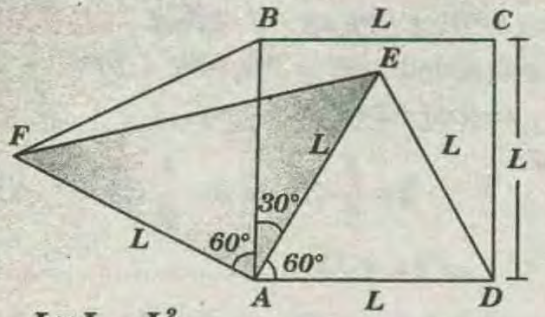
$$A_{\Delta EFA}=\frac{L.L}{2}\,sen\ 150°\Rightarrow A_{\Delta EFA}=\frac{L^2}{4}$$

*** POSIBILIDAD 2:**



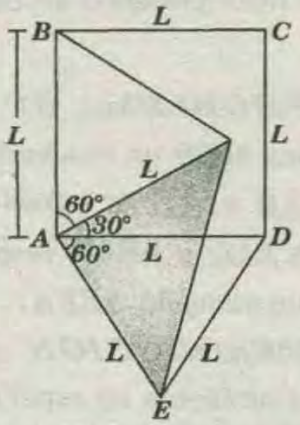
$$A_{\Delta EFA}=\frac{L.L}{2}sen\,30°\Rightarrow A_{\Delta EFA}=\frac{L^2}{4}$$

*** POSIBILIDAD 3 :**



$$A_{\Delta EFA}=\frac{L\times L}{2}=\frac{L^2}{2}$$

*** POSIBILIDAD4:**



$$A_{\Delta EFA}=\frac{L\times L}{2}=\frac{L^2}{2}$$

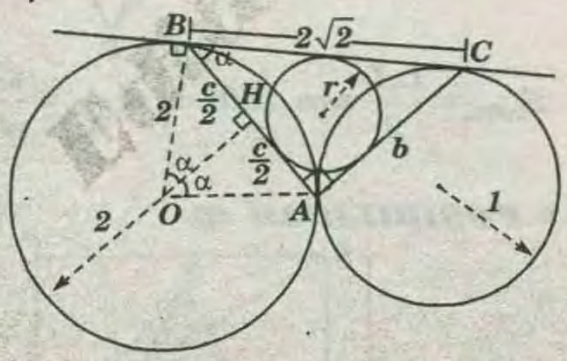
PROBLEMA 92 :

Dos circunferencias tangentes en el punto *A* de radios *1* y *2* respectivamente , son también tangentes a una recta en los puntos *B* y *C*. Halle el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo *ABC*.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$

D) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}-3\sqrt{2}+1}{3}$

RESOLUCIÓN :



* Piden el inradio del triángulo *ABC (r)*

* Propiedad :

$$m\sphericalangle BAC=90°$$

$$BC=2\sqrt{(2)(1)}=2\sqrt{2}$$

* Se observa :

$$\triangle BAC\sim\triangle OHB$$

$$\frac{b}{c/2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}\Rightarrow c=b\sqrt{2}$$

$\triangle BAC$ (*T.* de Pitágoras)

$$2\sqrt{2}=b\sqrt{3}\Rightarrow b=\frac{2\sqrt{6}}{3}\wedge c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

* Luego por Teorema de Poncelet :

$$r=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{3}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 93 :

Halle el valor de verdad de los siguientes enunciados

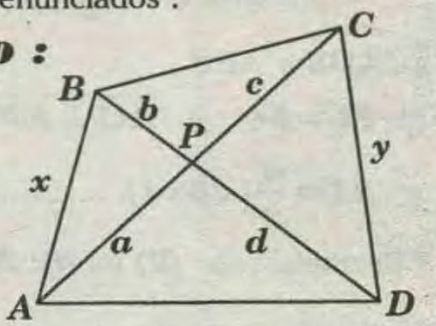
I) La suma de las longitudes de dos lados opuestos de un cuadrilátero convexo es menor que la suma de las longitudes de sus diagonales .

II) Todo cuadrilátero convexo , puede ser inscrito en una circunferencia (de tal forma que todos sus vértices pertenecen a la circunferencia) .

RESOLUCIÓN :

* Piden analizar los enunciados :

I) VERDADERO :

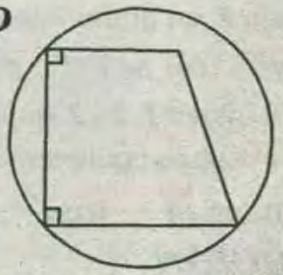


ΔABP: $x<a+b$

ΔCPD: $y<c+d$

$\Rightarrow x+y<AC+BD$

II) FALSO :



* No todo cuadrilátero convexo puede ser inscrito en una circunferencia .

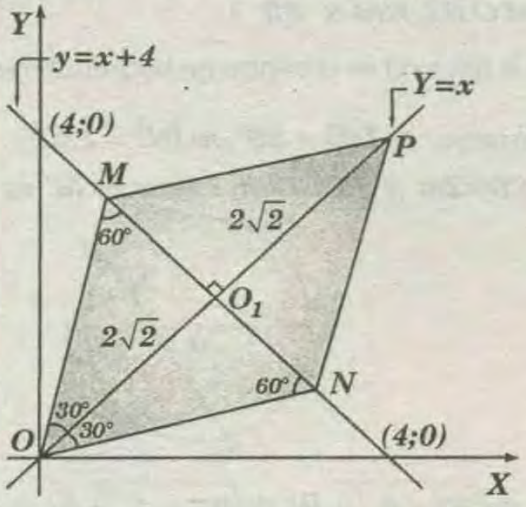
* Por ejemplo el trapecio rectángulo no es inscriptible

PROBLEMA 94 :

Sobre las rectas $x+y-4=0$ y $x-y=0$ se encuentran las diagonales de un rombo . Si uno de sus vértices es el origen de coordenadas y la medida de sus diagonales es igual a la medida del lado del rombo , entonces el área del rombo es .

A) $5\sqrt{3}$ B) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{3}$ D) $6\sqrt{3}$ E) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



* Piden :

$A_{\square OMPN}$

$\square$ *OMPN :* rombo

* La diagonal : $MN=OM=MP=PN=ON$

$\Rightarrow \Delta OMN$: EQUILÁTERO

* como $OO_1=2\sqrt{2} \Rightarrow MN=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

$$A_{\square OMPN}=\frac{(4\sqrt{2})(\frac{4\sqrt{6}}{3})}{2}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$$

RPTA : "B"

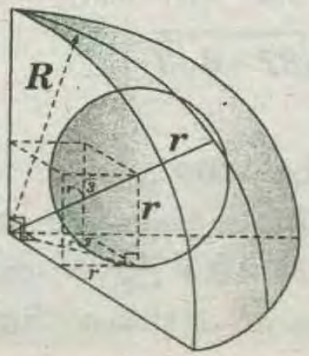
PROBLEMA 95 :

Halle el volumen de una esfera inscrita en un octavo de esfera cuyo volumen es $\frac{256\pi}{3}u^3$

A) $\frac{256\pi}{3}(\sqrt{3}-1)u^3$ B) $240\pi(\sqrt{3}-2)u^3$

C) $\frac{512}{3}\pi(3\sqrt{3}-5)u^3$ D) $216\pi(3\sqrt{3}-1)u^3$

RESOLUCIÓN :



* Piden : $V_{esfera}=\frac{4}{3}\pi r^3$

* Por dato del problema R :

$$\frac{1}{8}\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)=\frac{516}{3}\pi$$

donde $R=8$

Luego , se puede formar un cubo cuya arista es el radio de la esfera :

* Del gráfico :

$R=r(\sqrt{3}+1)=8 \Rightarrow r=4(\sqrt{3}-1)$

$V_{esfera}=\frac{4\pi}{3}(4(\sqrt{3}-1))^3 \Rightarrow V_{esfera}=\frac{512\pi}{3}(3\sqrt{3}-5)u^3$

RPTA : "C"

PROBLEMA 96 :

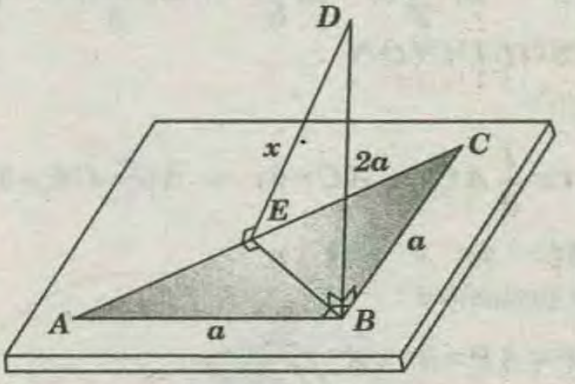
En el triángulo rectángulo isósceles $ABC(m\sphericalangle B=90°)$ los catetos miden a *cm* . Del vértice B levantamos una perpendicular $\overline{BD}$ al plano del triángulo , con $BD=2a$ *cm*. Determine la distancia del punto D a la hipotenusa $\overline{AC}$.

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}a$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}a$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ D) $\sqrt{2}a$ E) $\frac{3\sqrt{2}}{2}a$

RESOLUCIÓN :

* Piden DE

* Por teorema de las $3\perp$ $\overline{BE}\perp\overline{AC}$



$\triangle BDE$ Teorema de Pitágoras

$$x^2=(2a)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow x=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$$

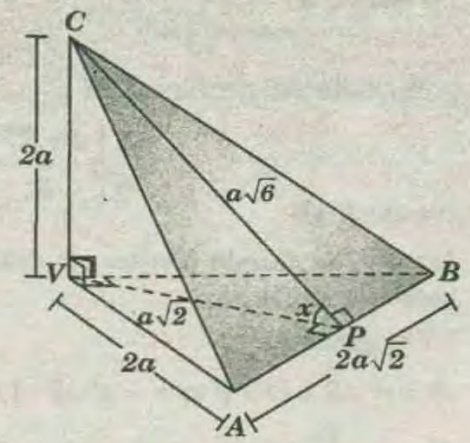
RPTA :"E"

PROBLEMA 97 :

Se tiene el tetraedro V–ABC rectángulo en V tal que $VA=VC=VB$. Calcule el coseno del ángulo diedro que forman las caras ABC y ABV.

A) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ D) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

RESOLUCIÓN :



* Piden :

El coseno del ángulo diedro $\overline{AB}(\cos x)$

* Por el teorema de las tres perpendiculares :

$\overline{CP} \perp \overline{AB}$ luego , $m\sphericalangle VPC = x$

$\triangle CVP: (CP)^2=(2a)^2+(a\sqrt{2})^2 \Rightarrow CP=a\sqrt{6}$

$$\rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 98 :

En un triángulo rectángulo se inscribe una circunferencia cuyo radio r es $1/6$ de la longitud de la hipotenusa . Luego, la longitud del segmento que une el incentro con el baricentro del triángulo dado es .

A) $\frac{2}{3}r$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ C) $\frac{3}{5}r$ D) $\frac{\sqrt{6}}{3}r$ E) $\frac{5}{8}r$

RESOLUCIÓN :

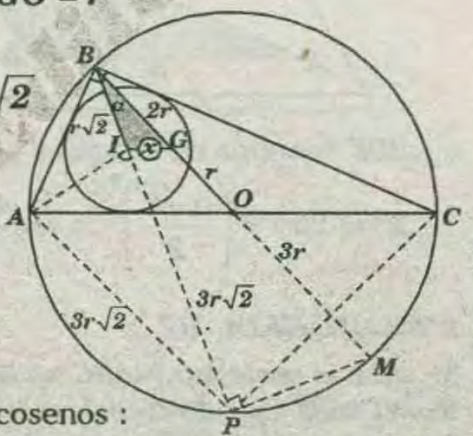
* Dato :

$$r=\frac{1}{6}AC \Rightarrow AC=6r \Rightarrow AO=OC=3r$$

$BG = 2r$. y $GO = r$

* Por propiedad :

$IP=AP=3r\sqrt{2}$



* Teorema de los cosenos :

$\triangle GBI : x^2=(2r)^2+(r\sqrt{2})^2-2(2r)(r-\sqrt{2})\cos\alpha$

$x^2=6r^2-4r^2\sqrt{2}\cos\alpha$

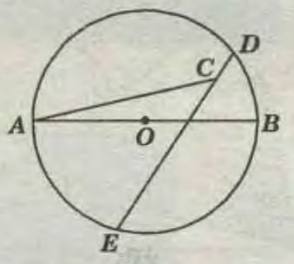
$\triangle MBP: \cos\alpha=\frac{4r\sqrt{2}}{6r}=\frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow x=\frac{r\sqrt{6}}{3}$

RPTA :"D"

PROBLEMA 99 :

En la figura O es el centro de la circunferencia , $\overline{AB}$ es diámetro. $m\widehat{DB} = 30°, m\widehat{BE} = 120°$.

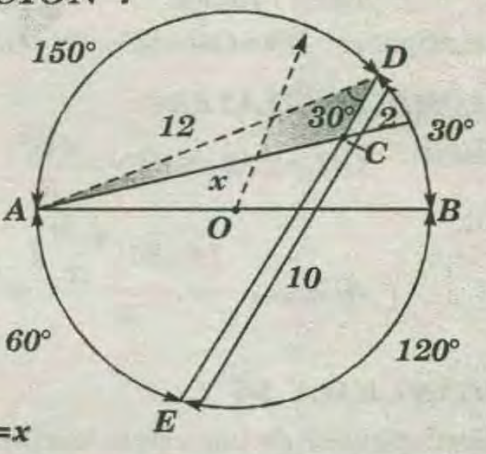
Si $CD=2m$ y $EC=10m$, entonces AC es igual a



A) $2\sqrt{37+6\sqrt{3}}$ B) $2\sqrt{37+4\sqrt{3}}$ C) $2\sqrt{37+2\sqrt{3}}$

D) $2\sqrt{37-6\sqrt{3}}$ E) $2\sqrt{37-4\sqrt{3}}$

RESOLUCIÓN :



* Piden : $AC=x$

* Datos : $m\widehat{DB} = 30°$ y $m\widehat{EB} = 120°$

* Del gráfico : $m\widehat{AD} = 150°$

como $m\widehat{AD} = m\widehat{DBE} \Rightarrow AD = DE = 12$

$m\sphericalangle ADE = 30°$

$DADC$ (Teorema de cosenos)

$$x^2=12^2+2^2-2(12)(2)\cos 30°$$

$$\rightarrow x = 2\sqrt{37-6\sqrt{3}}$$

RPTA :"D"

PROBLEMA 100 :

Se tiene un triángulo acutángulo ABC en el que se trazan las alturas $\overline{AH}$ y $\overline{CJ}$. Se unen H y J con M punto medio de $\overline{AC}$; si el menor ángulo que forman

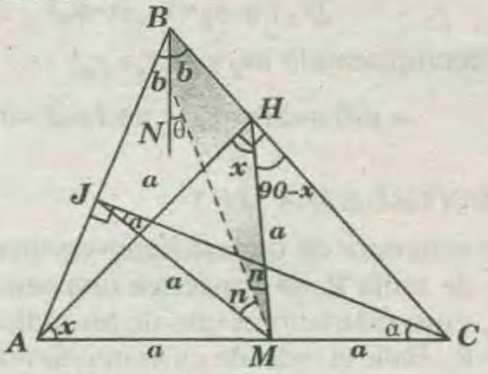
las bisectrices del $\sphericalangle ABC$ y del $\sphericalangle HMJ$ mide θ y el $\sphericalangle JCA$ mide α, halle la medida del $\sphericalangle HAC$,

halle la medida del $\sphericalangle HAC$.

A) $2\alpha-\theta$ B) $30°-\alpha$ C) $\frac{1}{2}(\theta+\alpha)$

D) $\theta+2\alpha$ E) $20°+\alpha$

RESOLUCIÓN :



* Piden la $m\sphericalangle HAC = x$

$\triangle AJC$: $JM = AM = MC = a$

$\triangle AHC$: $HM = AM = MC = a$

$\sphericalangle NBHM$: $n+b=\theta+90°-x$ .....(I)

$\sphericalangle MJBN$: $n+b+90°+\alpha = 180°-\theta$.....(II)

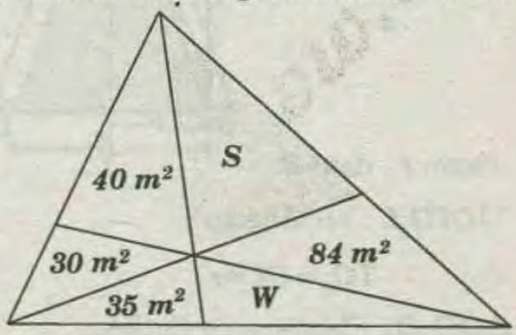
* (II)-(I) : $90°+\alpha = x + 90°-2\theta \rightarrow x = 2\theta + \alpha$

RPTA : "E"

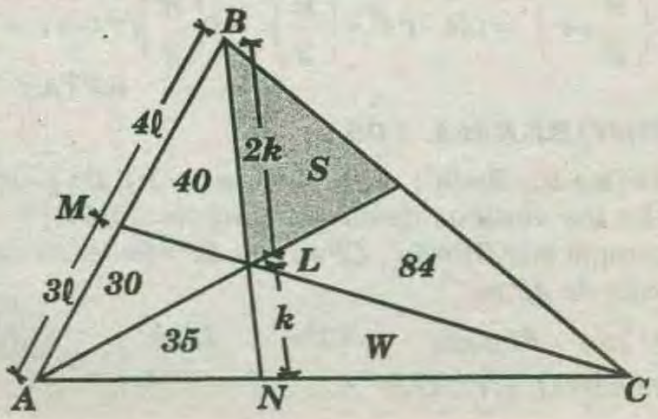
PROBLEMA 101 :

Halle (en m^2) el área de la región sombreada en la figura

A)36
B)56
C)62
D)72
E)87



RESOLUCIÓN :



* Piden el área de la región sombreada *(S)*:

ΔABN : Por relación de áreas

$$\frac{BL}{LN}=\frac{70}{35}=2$$

ΔBNC : Por relación de áreas

$$\frac{S+84}{W}=\frac{2k}{k}\Rightarrow S+84=2W.....(I)$$

ΔABC : Por relación de áreas

$$\frac{S+84}{35+W}=\frac{2W}{35+W}=\frac{4}{3}\Rightarrow W=70$$

* En *(I)*: $S = 56$

RPTA :"B"

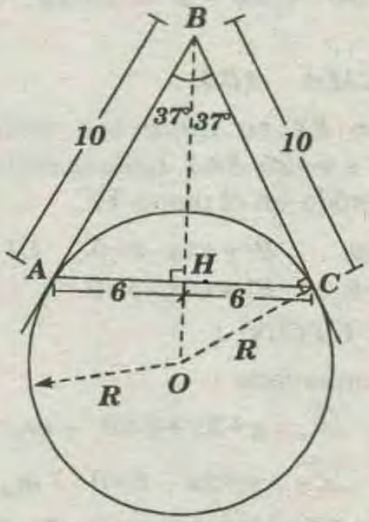
PROBLEMA 102 :

En un triángulo ABC se cumple que $AB=BC=10\ cm$ y $AC=12cm$. Encuentre la longitud en cm, de la circunferencia que pasa por los puntos A y C, sabiendo que los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son tangentes a dicha circunferencia.

A)5π B)10π C)15π D)20π E)25π

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que la circunferencia es tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en A y C, respectivamente :



* Piden:

$L_{\odot}$: Longitud de la circunferencia $\rightarrow L_{\odot}= 2\pi R$

* Como :

$\overline{BO}$: Bisectriz $\rightarrow AH=HC=6$

$\triangle BHC$: Notable de $37°$ y $53°$

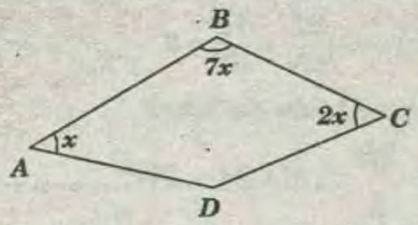
* En el $\triangle BCO$:

$$\tan 37° = \frac{R}{10} \rightarrow R = \frac{15}{2} \rightarrow L_{\odot} = 2\pi\left(\frac{15}{2}\right) = 15\pi$$

RPTA : "C"

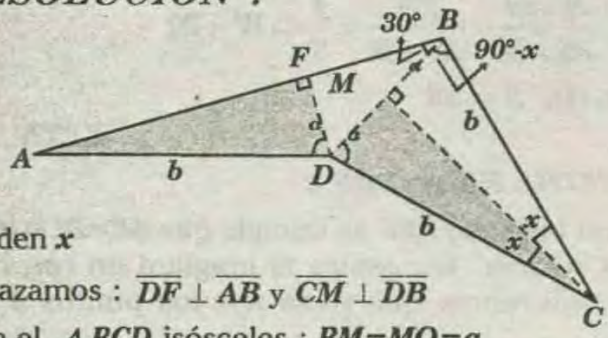
PROBLEMA 103 :

En la figura mostrada , si $BC=CD=AD$, encuentre x.



A) 12° B)15° C) 18° D) 20° E) 30°

RESOLUCIÓN :



* Piden x
* Trazamos : $\overline{DF} \perp \overline{AB}$ y $\overline{CM} \perp \overline{DB}$
* En el ΔBCD isósceles : $BM=MO=a$
* Observamos que :

$$\triangle ADF \cong \triangle CDM(A.L.A) \rightarrow FD=MD=a$$

$\triangle DFB$: notable de $30°$ y $60°$

* Por dato $m\sphericalangle ABC=7x$, luego :

$$\rightarrow 7x = 30° + 90° - x \rightarrow x=15°$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 104 :

En el plano XY se tiene las rectas paralelas $y+2x+4=0$ e $y+2x-8=0$, halle la recta equidistante a ellas contenida en el plano XY.

A) $y+2x-1=0$ B) $y+2x-2=0$ C) $y+2x-\frac{2}{5}=0$
D) $y+2x-3=0$ E) $y+2x-5=0$

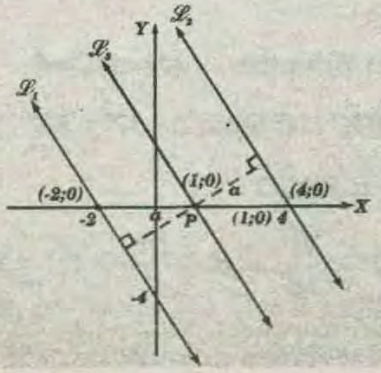
RESOLUCIÓN :

* Según el enunciado :

$$\mathcal{L}_1 : y+2x+4=0 \rightarrow m_1=-2$$

$$\mathcal{L}_2 : y+2x-8=0 \rightarrow m_2=-2$$

* Como las pendientes m_1 y m_2 son iguales , entonces $\mathcal{L}_1$ es paralela con $\mathcal{L}_2$.
* Graficando :



* Piden la ecuación de la recta $\mathcal{L}_3$ que equidista de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.
* Del gráfico $\mathcal{L}_1 // \mathcal{L}_2 // \mathcal{L}_3$:

$$\rightarrow m_3=-2 \text{ y } P=(1;0)$$

* Utilizando la ecuación Punto – Pendiente ,entonces:

$$\mathcal{L}_3 : y-y_0=m_3(x-x_0)$$

* Reemplazando m_3 y $P(x_0 ; y_0)$:

$$\rightarrow y-0=-2(x-1) \rightarrow y+2x-2=0$$

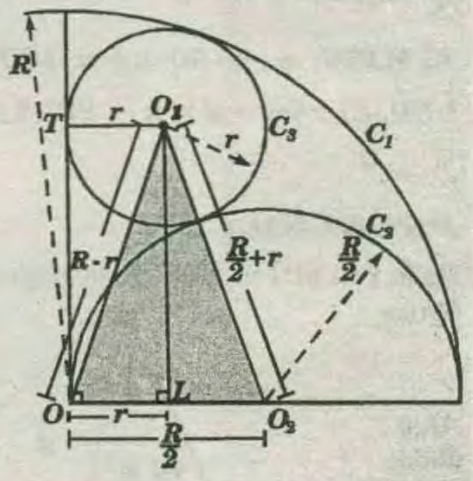
RPTA :"B"

PROBLEMA 105 :

En el interior de un cuadrante de una circunferencia C_1 de radio R, se construye una semicircunferencia C_2. cuyo diámetro es uno de los radios del cuadrante de C_1. Halle el radio de otra circunferencia C_3 tangente a C_1. a C_2 y a un radio del cuadrante.

A) $\frac{R}{6}$ B) $\frac{R}{5}$ C) $\frac{R}{4}$ D) $\frac{R}{3}$ E) $\frac{R}{7}$

RESOLUCIÓN :



* Piden r , dato R
* $\square OTO_1L$: rectángulo

$$TO_1=OL=r$$

* ΔOO_1O_2 : Teorema de Euclides

$$\left(\frac{R}{2}+r\right)^2=(R-r)^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2-2\left(\frac{R}{2}\right)(r) \rightarrow r=\frac{R}{4}$$

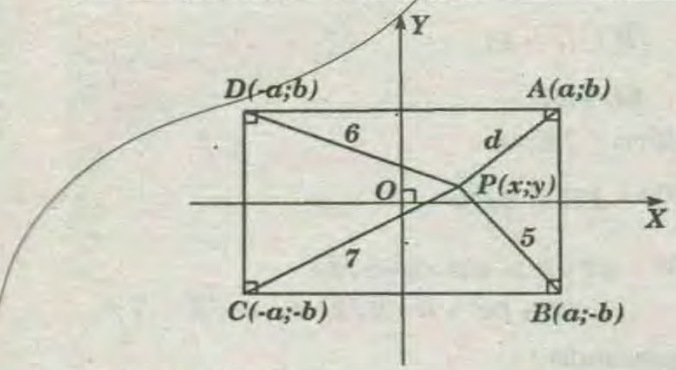
RPTA : "C"

PROBLEMA 106 :

$A=(a ; b)$, $B=(a ; -b)$. $C=(-a ; -b)$, $D=(-a; b)$ son los vértices de un rectángulo. Si $P=(x ; y)$ cumple que $DP=6u$, $CP=7u$ y $BP=5u$. entonces el valor de AP es

A) $\sqrt{5}u$ B) $2\sqrt{3}u$ C)$3u$ D)$4u$ E) $3\sqrt{2}u$

RESOLUCIÓN :



* Piden : $AP=d$

* $\square ABCD$ (Teorema de Marlen):

$$d^2+7^2=6^2+5^2 \rightarrow d^2=1^2 \rightarrow d=2\sqrt{3}$$

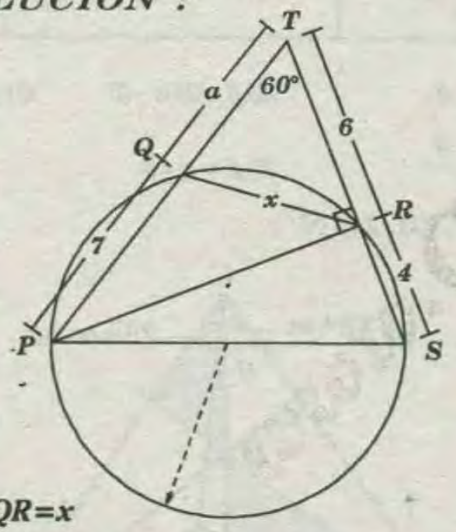
RPTA : "B"

PROBLEMA 107 :

El cuadrilátero $PQRS$ está inscrito en una circunferencia , siendo el lado PS su diámetro. Sea T el punto de intersección de las prolongaciones de los lados PQ y RS ; si $PQ=7u$, $RS=4u$ y $TR=6u$. Entonces el valor de QR es

A) $\sqrt{29}u$ B) $\sqrt{31}u$ C) $\sqrt{33}u$ D) $\sqrt{35}u$ E) $\sqrt{37}u$

RESOLUCIÓN :



* Piden: $QR=x$

* Teorema de las secantes :

$$(7+a)a = 10(6) \Rightarrow a=5u \Rightarrow m\sphericalangle PTR = 60°$$

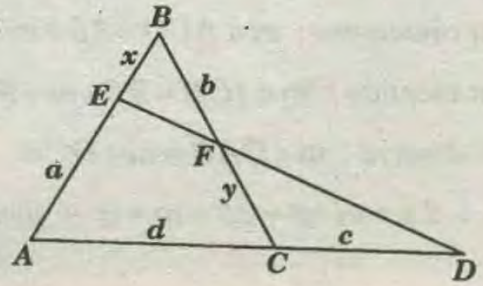
* En el ΔQTR : Teorema de cosenos

$$x^2=5^2+6^2-2(5)(6)\ \cos 60° \rightarrow x=\sqrt{31}u$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 108 :

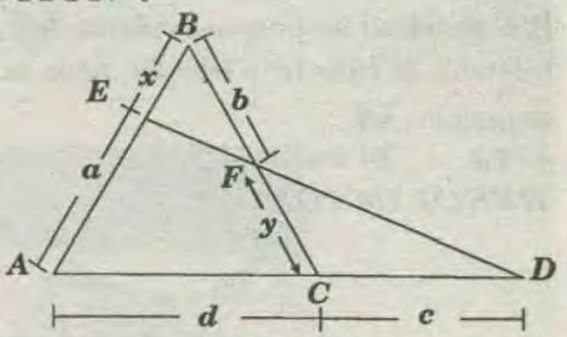
De la gráfica :



Podemos decir que :

A) $abc = xy(c+d)$ B) $abc = xyd$ C) $abd = xyc$
D) $abd=xy(c+d)$ E) $acd = xy(c+d)$

RESOLUCIÓN :



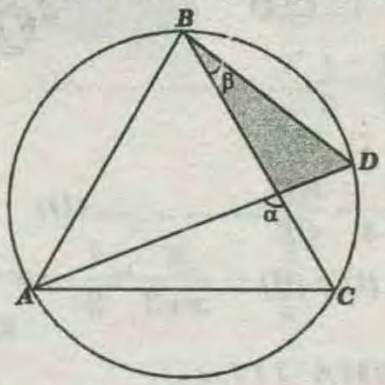
* ΔABC Teorema de Menelao ($\overline{ED}$ secante)

$$abc = xy\,(c+d)$$

RPTA : "A"

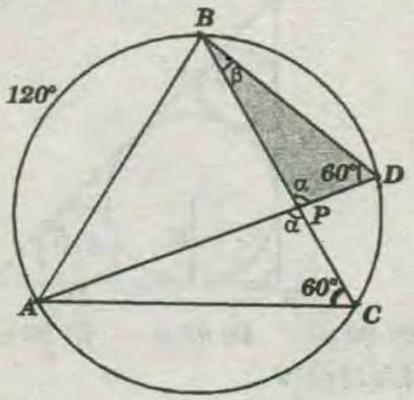
PROBLEMA 109 :

En la figura , ABC es un triángulo equilátero y la medida del ángulo α es de $100°$. Calcule la medida del ángulo β.



A)40° B)20° C)30° D)15° E)10°

RESOLUCIÓN :



* Datos :

ΔABC : equilátero

$\alpha=100°$

* Piden : β

$$\Rightarrow m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle ADB = 60°$$

* En el ΔABP :

$$\alpha+\beta+60° = 180° \rightarrow \beta=20°$$

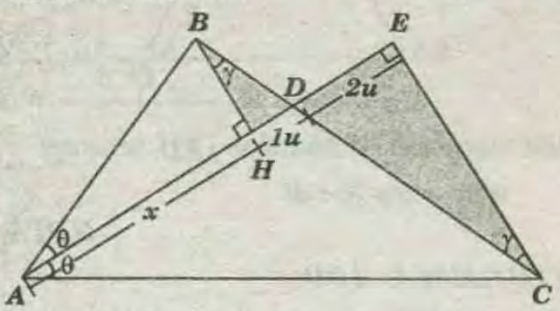
RPTA : "B"

PROBLEMA 110 :

En un triángulo ABC se traza la bisectriz $\overline{AE}$ que intercepta aliado $\overline{BC}$ en D, luego desde los vértices B, C se trazan las perpendiculares $\overline{BH}$, $\overline{CE}$ a dicha bisectriz. Si $HD=1u$ y $DE=2u$, halle la longitud del segmento $\overline{AH}$.

A) $5\,u$ B) $4\,u$ C) $3\,u$ D) $2\,u$ E) $1\,u$

RESOLUCIÓN :



* Se pide : AH

* $\triangle BHD \sim \triangle CED$

$$\frac{BH}{CE}=\frac{1}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

* $\triangle AHB \sim \triangle AEC$

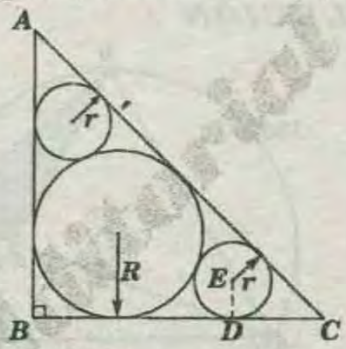
$$\frac{x}{x+3}=\frac{BH}{CE}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

* Igualando *(I)* y *(II)* : $\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{1}{2}\rightarrow x=3u$

RPTA : "C"

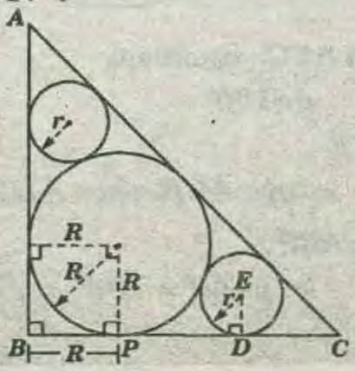
PROBLEMA 111 :

En la siguiente figura , si $\sqrt{R}+\sqrt{r}=10$, entonces $BD+DE$ es:



A) $95\,u$ B) $96\,u$ D) $98\,u$ C) $97\,u$ E) $100\,u$

RESOLUCIÓN :



* Dato : $\sqrt{R}+\sqrt{r}=10$

* Piden : $BD+DE$

* Del gráfico : $DE=r$

* Teorema : $PD=2\sqrt{Rr}$

* además : $BP=R \Rightarrow BD=R+2\sqrt{Rr}$

$$\Rightarrow BD+DE=R+2\sqrt{Rr}+r=(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2$$

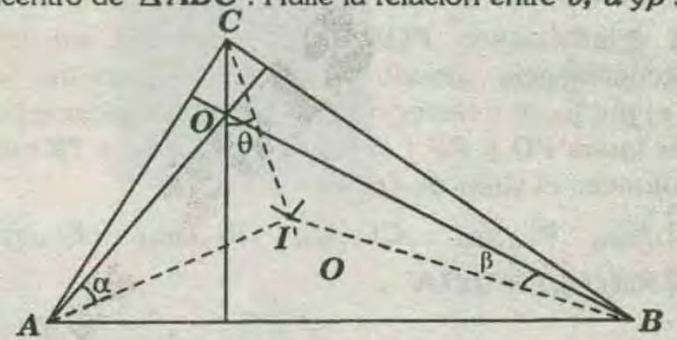
* Reemplazando :

$$BD+DE=10^2 \rightarrow BD+DE=100\,u$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 112 :

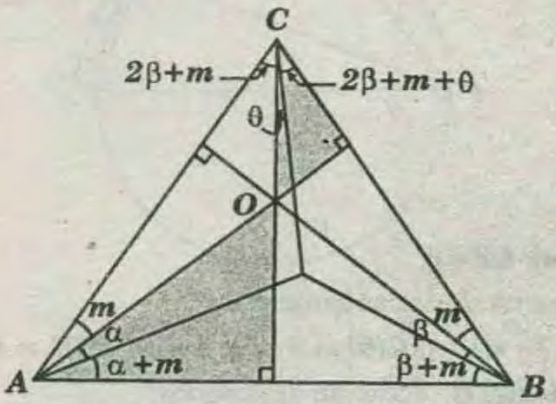
En la figura mostrada el punto O es el ortocentro e I es el incentro de ΔABC. Halle la relación entre θ, α y β.



A) $\beta=2\alpha-\theta$ B) $\beta=2(\alpha-\theta)$ C) $\beta=\dfrac{\alpha+\theta}{2}$

D) $\beta=\dfrac{\alpha+\theta}{4}$ E) $\beta=\alpha-\theta$

RESOLUCIÓN :



* Piden relación entre α, β y θ.

* Sea : $m\sphericalangle CBO=m \Rightarrow m\sphericalangle CAO=m$

* Por incentro : $m\sphericalangle IAB=\alpha+m$, $m\sphericalangle IBA=\beta+m$

* Por ortocentro : $m\sphericalangle ACO=2\beta+m$

* Por incentro : $m\sphericalangle ICB=2\beta+m+\theta$

* Se observa : $m\sphericalangle OAB=m\sphericalangle OCB$

$$\Rightarrow 2\alpha+m=\theta+2\beta+m+\theta \rightarrow \beta=\alpha-\theta$$

RPTA : "E"

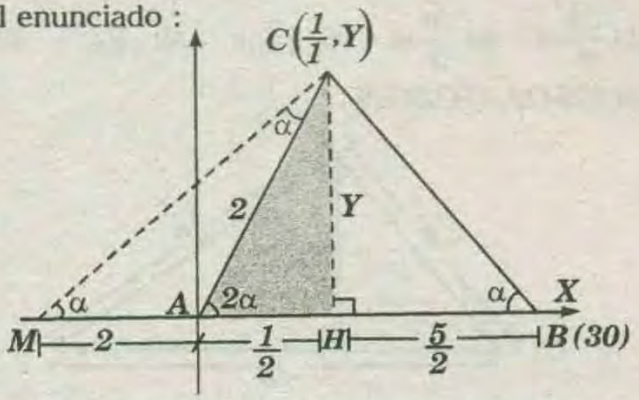
PROBLEMA 113 :

Los extremos de la base de un triángulo son los puntos $A=(0;0)$ y $B=(3;0)$. Determine la ordenada del vértice opuesto $c=\left(\frac{1}{2};y\right)$ de tal manera que la medida del ángulo CAB es igual al doble de la medida del ángulo CBA .

A) $\sqrt{15}$ B) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{15}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{15}}{8}$

RESOLUCIÓN :

* Del enunciado :



* Se traza $\overline{CM}$ de modo que $m\sphericalangle MCA=\alpha$

$$\Rightarrow m\sphericalangle CMB=\alpha$$

* Luego : $AM=AC=2$

* $\triangle$ sombreado : $y^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=2^2 \rightarrow y=\frac{\sqrt{15}}{2}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 114 :

Halle la medida del área de la región comprendida entre la curva de ecuación: $x^2+y^2+4x-6y+4=0$ y la circunferencia que pasa por el punto $P\ (2,6)$, que es concéntrica con la curva anterior.

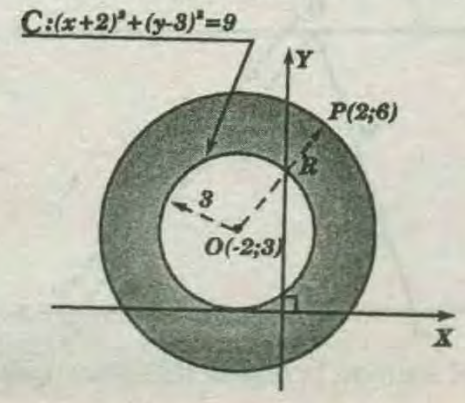
A) $5\pi u^2$ B) $10\pi u^2$ C) $16\pi u^2$ D) $20\pi u^2$ E) $25\pi u^2$

RESOLUCIÓN :

* Piden el área de la región sombreada : (A_{RS})

* Como $C : x^2+y^2+4x-6y+4=0$

$$\Rightarrow C : (x+2)^2+(y-3)^2=3^2$$



* Por corona circular $A_{RS}=\pi\ (R^2-3^2)$

$$d(P;O)=R=\sqrt{(2+2)^2+(6-3)^2}=5$$

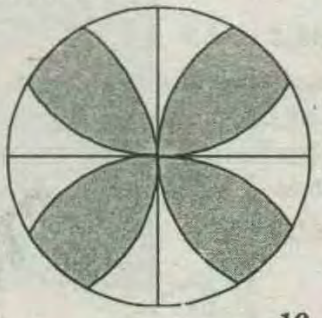
* reemplazando:

$$A_{RS}=\pi\ (5^2-3^2) \Rightarrow A_{RS}=16\pi u^2$$

RPTA : "C"

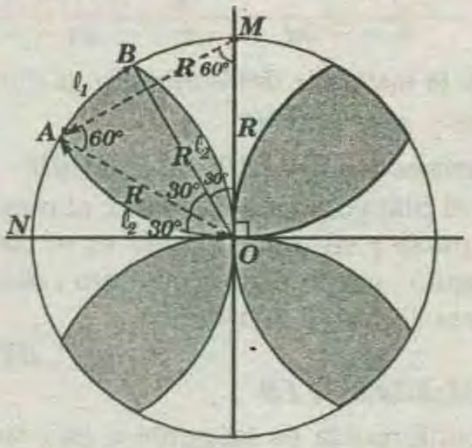
PROBLEMA 115 :

En la figura se muestra una circunferencia de radio R, y en dos diámetros perpendiculares. Con centro en los extremos de estos diámetros se trazan arcos de circunferencia de radio R. Halle el perímetro de la región sombreada.



A) $4\pi R$ B) $\frac{8}{3}\pi R$ C) $3\pi R$ D) $\frac{10}{3}\pi R$ E) $\frac{11}{3}\pi R$

RESOLUCIÓN :



* Piden el perímetro de la región sombreada :

$$2p = 4\ (\ell_1+2\ell_2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Del gráfico :

$$\ell_1=\frac{2\pi R}{12}=\frac{\pi R}{6}\ ;\ \ell_2=\frac{2\pi R}{6}=\frac{\pi R}{6}$$

* Reemplazando en (I) :

$$2p=\frac{10\pi R}{3}$$

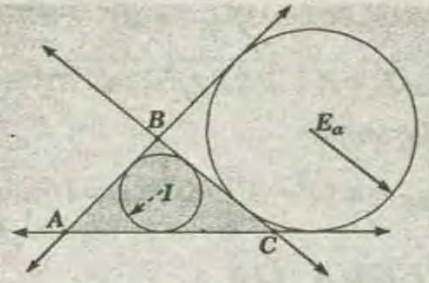
RPTA : "D"

PROBLEMA 116 :

Tres rectas se intersecan dos a dos , ¿Cuántos puntos del plano , determinado por dichas rectas , equidistan de las tres rectas?

A) uno B) dos C) tres D) cuatro E) cinco

RESOLUCIÓN :



* Piden el número de puntos del plano , determinado por las rectas , que equidistan con dichas rectas. Para el triángulo *ABC,* el incentro *(I)* y los tres ex centros *(E_a; E_b; E_c)* equidistan con las tres rectas. Luego el número de puntos es ***cuatro***.

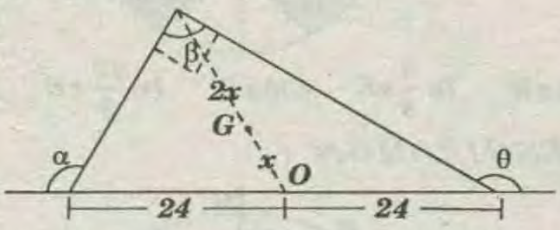
RPTA : "D"

PROBLEMA 117 :

La suma de dos ángulos exteriores de un triángulo mide ***270°*** ; el lado mayor mide ***48 m***. Halle la distancia del baricentro al circuncentro.

A)6 m B)8 m C)12 m D)16 m E)20 m

RESOLUCIÓN :



* Se pide la distancia del baricentro al circuncentro.
* Por dato : $\alpha+\theta = 270°$
* Por teorema: $\alpha+\theta = 180°+\beta \Rightarrow \beta=90°$
* Como el triángulo es rectángulo. el mayor lado es la hipotenusa y su punto medio es el circuncentro del triángulo ; como *G* es baricentro , piden $GO=x$.
* Entonces : $3x=24 \rightarrow x=8m$

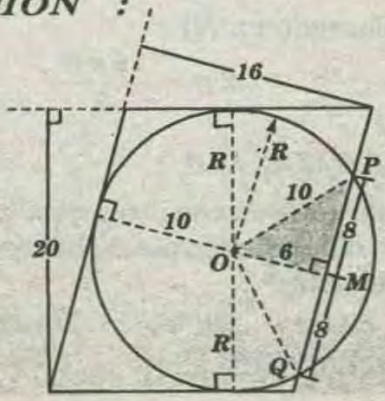
RPTA : "B"

PROBLEMA 118 :

Una circunferencia es tangente a tres lados de un paralelogramo . Si las alturas del paralelogramo miden ***16*** y ***20*** unidades. Calcule la longitud de la cuerda encerrada por la circunferencia en el lado no tangente.

A)12 u B)14 u D)18 u C)16 u E)20 u

RESOLUCIÓN :



* Piden : *PQ*
* Del gráfico :

$2R=20 \Rightarrow R=10$

$10+OM = 16 \Rightarrow OM=6$

* $\triangle OMP : PM=8 \rightarrow PQ=16u$

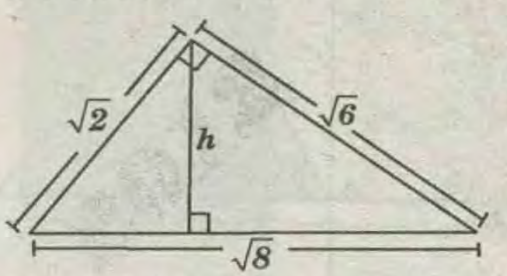
RPTA : "C"

PROBLEMA 119 :

Los lados de un triángulo miden en metros $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ y $\sqrt{8}$ Halle la longitud de la menor altura.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}m$ ***B)*** $\frac{\sqrt{6}}{2}m$ ***C)*** $\sqrt{2}m$ ***D)*** $\sqrt{6}m$ ***E)*** $\sqrt{8}m$

RESOLUCIÓN :



* Se pide la longitud de la menor altura *h*.
* Del gráfico : $(\sqrt{8})^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2$ entonces el triángulo es rectángulo
* Por relaciones métricas :

$$\sqrt{8}h = (\sqrt{2})(\sqrt{6}) \rightarrow h = \frac{\sqrt{6}}{2}m$$

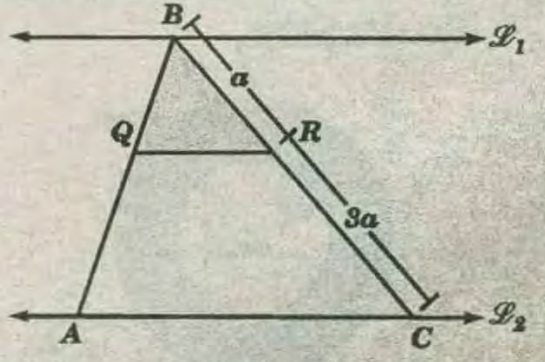
RPTA : "B"

PROBLEMA 120 :

Con base en una de dos rectas paralela se construye el triángulo *ABC* de base $AC = 16m$. Por el punto $Q \in \overline{AB}$ se traza otra paralela a las rectas determinando en el lado *BC* el punto *R* tal que *BR* y *RC* están en la proporción de *1* a *3*. Si el área del triángulo *ABC* es $192m^2$, determine el área del triángulo *QBR* .

A) 8 m² B) 10 m² C)12 m² D)20 m² E)24 m²

RESOLUCIÓN :



* Piden el área de la región triangular *QBR* : $A_{(DQBR)}$

* Según el enunciado : $\overline{QR} // \overline{\mathscr{L}_1} // \overline{\mathscr{L}_2}$

* Dato : $A_{(D\,ABC)} = 192m^2$

* Como : $\Delta QBR \sim \Delta ABC$

* Entonces :

$$\frac{A_{(\Delta QBR)}}{A_{(\Delta ABC)}} = \frac{(a)^2}{(4a)^2} \rightarrow A_{(\Delta QBR)} = \frac{A_{(\Delta ABC)}}{16}$$

* Reemplazando el dato :

$$A_{(\Delta QBR)} = \frac{192}{16} \rightarrow A_{(\Delta QBR)} = 12m^2$$

RPTA :"C"

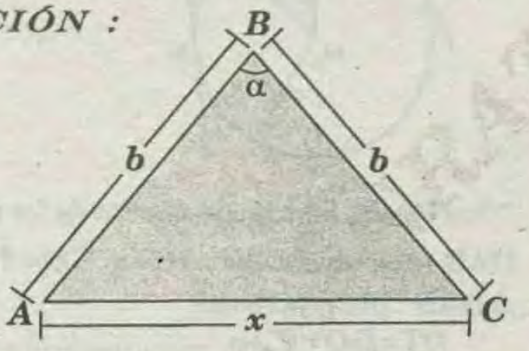
PROBLEMA 121 :

Se tiene un triángulo isósceles , cuyos lados de igual longitud miden b cm. Para poder obtener un triángulo con la mayor área posible , el tercer lado debe tener una longitud de :

A) $\sqrt{2}\ b\ cm$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2} b\ cm$ C) $\sqrt{3}\ b\ cm$

D) $b\ cm$ E) $\sqrt{3}\ b\ cm$

RESOLUCIÓN :



* Piden : x

* Dato :

* El área de ABC es máximo : $A_{\Delta ABC} = \frac{(b)(b)}{2} sen\alpha$

* Puesto que el área de ABC es máximo , entonces,

$$\alpha = 90°$$

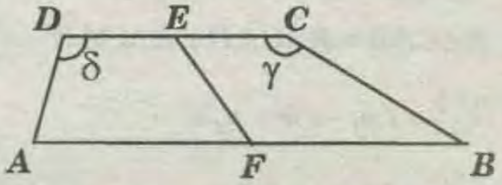
* Luego : $x = b\sqrt{2}$

RPTA :"A"

PROBLEMA 122 :

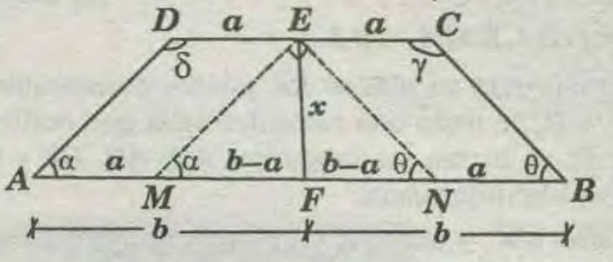
En el trapecio de la figura , los ángulos γ y δ son tales que $\gamma + \delta = \frac{3\pi}{2}$. Determine la medida del segmento $\overline{EF}$ que une los puntos medios de las bases.

A) $AD.\ BC/2$
B) $(BC - AD)/2$
C) $(AB - DC)/2$
D) $(AB + DC)/2$
E) $(AD + BC)/2$



RESOLUCIÓN :

* Del dato : $\gamma + \delta = \frac{3\pi}{2} \rightarrow \alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$



* Del gráfico , se traza $\overline{EM} // \overline{DA}$ y $\overline{EN} // \overline{CB}$

* En $\triangle MEN$: $x = b - a$ .....(I)

* Se tiene : $b = \frac{AB}{2}$ y $a = \frac{DC}{2}$

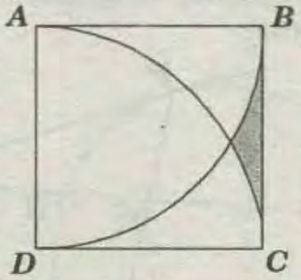
* En (I) :

$$x = \frac{AB}{2} - \frac{DC}{2} \rightarrow x = (AB - DC)/2$$

RPTA :"C"

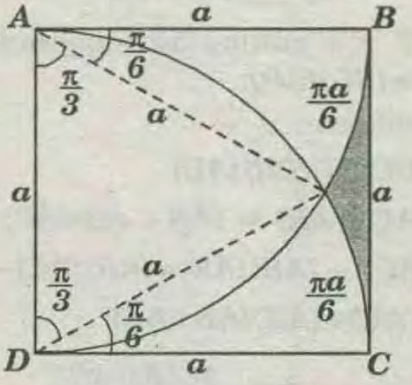
PROBLEMA 123 :

En el gráfico mostrado , $ABCD$ es un cuadrado de lado a unidades. Si $\widehat{AC}$ y $\widehat{BD}$ son arcos de circunferencia de radio a ; ¿para qué valor de m , el perímetro de la región sombreada mide $m(3+p)$ unidades?



A) $\frac{a}{8}$ B) $\frac{a}{6}$ C) $\frac{a}{4}$ D) $\frac{a}{3}$ E) $\frac{a}{2}$

RESOLUCION :



* Del gráfico , sea P el perímetro de la región sombreada : $P = \frac{\pi}{6}a + \frac{\pi}{6}a + a$

* Dato : $P = \frac{\pi}{3}a + a$

$\Rightarrow m(x+3)=\frac{a}{3}(x+3) \rightarrow m=\frac{a}{3}$

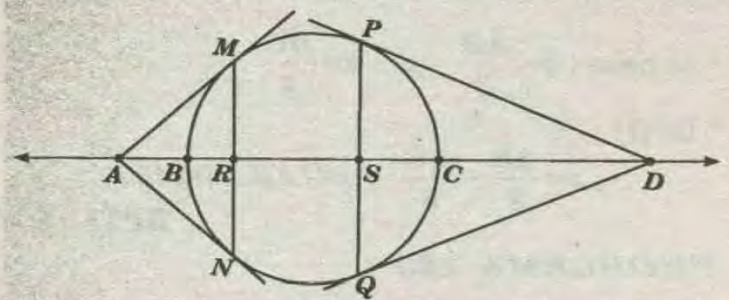
RPTA :"D"

PROBLEMA 124 :

En una recta se ubican los puntos consecutivos **A, B, C** y **D**. Se traza una circunferencia que contiene a **B** y **C;** se trazan las tangentes **AM, AN, DP** y **DQ** a dicha circunferencia.

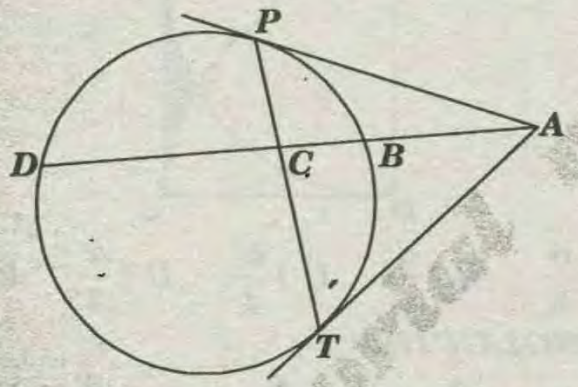
Si $\overline{MN}\cap\overline{BC}=\{R\}$ y $\overline{PQ}\cap\overline{BC}=\{S\}$, demuestre que la ubicación de los puntos **R** y **S** no depende de la circunferencia.

RESOLUCIÓN :



* Si la ubicación de **R** y **S** no depende de la circunferencia , ello implica que se puede calcular **AR** y **DS** en función de longitudes constantes del problema.

* Para calcular dichas longitudes recordemos el siguiente teorema .



* Si **P** y **T** son puntos de tangencia,entonces **(AB)(CD)=(BC)(AD)**

* En el problema :

$(AB)(RC)=(BR)(AC)$

$(AB)(AC-AR)=(AR-AB)(AC)$

$(AB)(AC)-(AB)(AR)=(AR)(AC)-(AB)(AC)$

$2(AB)(AC)=(AR)(AB+AC)$

$$\rightarrow AR=\frac{2(AB)(AC)}{AB+AC}$$

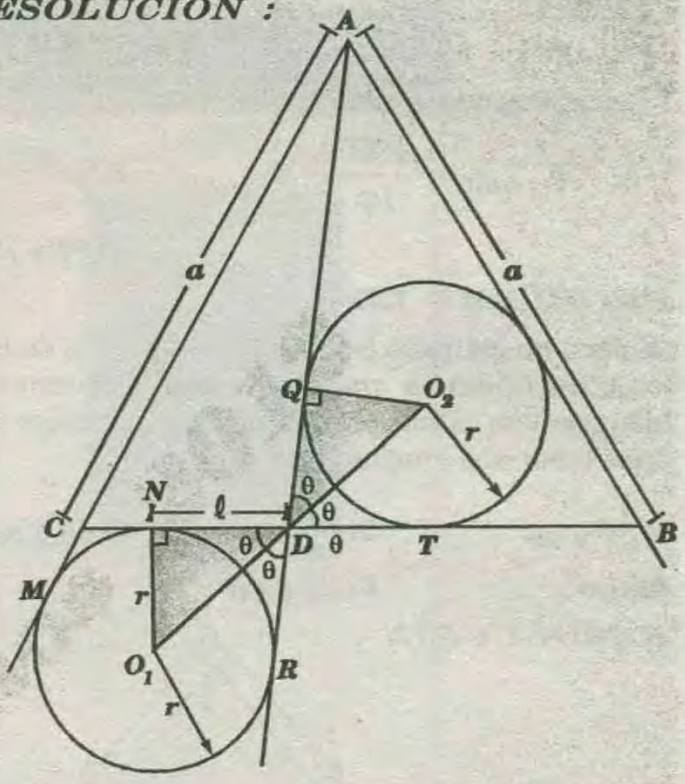
* Analogamente : $DS=\frac{2(BD)(CD)}{BD+CD}$

* De lo cual se concluye que **R** y **S** no depende de la circunferencia que pasa por **B** y **C**.

PROBLEMA 125 :

Sea un triángulo isósceles **ABC(AB=AC)** y $D\in\overline{BC}$, tal que , la circunferencia inscrita en el triángulo **ABD** es congruente a la circunferencia ex inscrita del triángulo **ADC** relativo a **DC**. Demuestre que el radio de dichas circunferencias es igual a un cuarto de la longitud de la altura del triángulo **ABC** trazada desde **B**.

RESOLUCIÓN :



* Sea P_1 y P_2 los semiperímetros de las regiones **CDA** y **DAB** respectivamente **AC=a** , **CD=ℓ** , **h** la altura del ΔDAB : por propiedad.

$DT=DQ=P_2-a$ .....(I)

* En el ΔCDA: por propiedad :

$AM=AR=p_1 \rightarrow CM=CN=p_1-a$ .....(II)

* $\triangle O_1ND \cong \triangle DQO_2$

$\rightarrow ND=DQ$ .....(III)

* Como : $CD=CN+DN$

* De **(I)**, **(II)** y **(III)** :

$\ell=p_1-a+p_2-a$

$2a=p_1+p_2-\ell$ .....(IV)

* Luego :

$A\Delta CAB=A\Delta CAD+A\Delta\square AB$

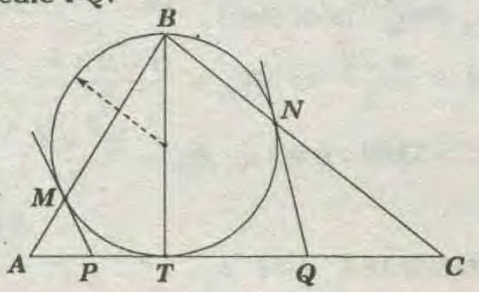
$$\frac{a\times h}{2}=(p_1-\ell)r+p_2.r$$

$$\frac{a\times h}{2}=(p_1+p_2-\ell)r$$ .....(V)

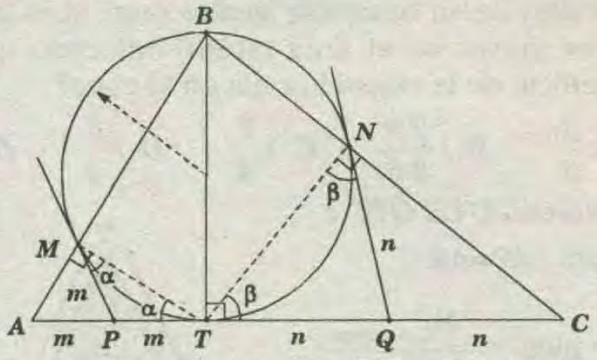
* de *(IV)* y *(V)*: $\frac{a\times h}{2}=2a\times r\rightarrow r=\frac{h}{4}$

PROBLEMA 126 :

En el gráfico *M, N* y *T* son puntos de tangencia si *AC=b* calcule *PQ*.



RESOLUCIÓN :



* Como es diámetro al trazar $\overline{TM}$ y $\overline{TN}$, los ángulos *TMA* y *TNC* son rectos.

* Además , por el teorema de circunferencia

$$PM=PT \text{ y } TQ=QN$$

* Luego en los triángulos *AMT* y *CNT*

$$m\sphericalangle MAT=90°-\alpha \text{ y } m\sphericalangle NCT=90°-\beta$$

* Además :

$$m\sphericalangle AMP=90°-\alpha \text{ y } m\sphericalangle QNC=90°-\beta$$

$\rightarrow$ *MPA* : isósceles

NQC: isósceles

* De donde $AP=PM=PT=m$ y $CQ=QN=QT=n$

* Por lo tanto :

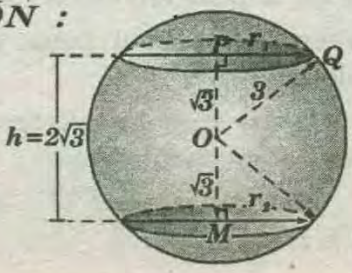
$$PQ=m+n=AC/2=b/2\rightarrow PQ=b/2$$

PROBLEMA 127 :

En una esfera de radio *3* se tiene un segmento esférico con bases iguales y de altura $2\sqrt{3}$. El volumen del segmento esférico es

A) $8\sqrt{3}\pi$ *B)* $16\sqrt{3}\pi$ *C)* $10\sqrt{3}\pi$

RESOLUCIÓN :



* piden el volumen del segmento esférico :

$$V_{SE}=\frac{\pi h^3}{6}+\frac{\pi r_1^2 h}{2}+\frac{\pi r_2^2 h}{2} \quad \text{.....(I)}$$

$\triangle$ *OPQ* (T. Pitágoras)

$$r_1=\sqrt{6}=r_2 \quad \text{.....(II)}$$

* Luego *(II)* en *(I)* : $V_{SE}=16\pi\sqrt{3}$

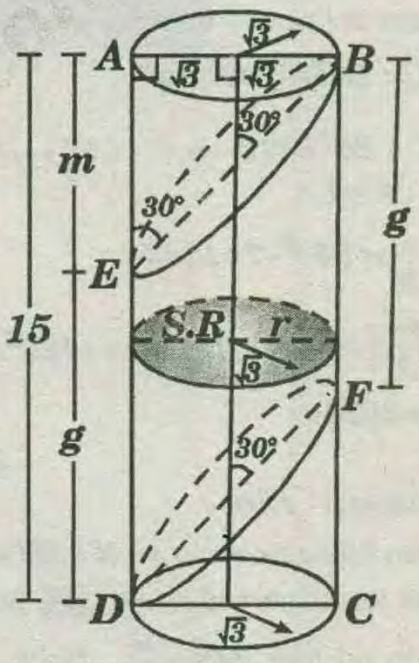
RPTA :"B"

PROBLEMA 128 :

Un cilindro circular recto de altura *15* y radio $\sqrt{3}$ es cortado por *2* planos paralelos que forman un ángulo de *30°* con el eje del cilindro ; cada uno de los planos corta a sólo una de las bases en un único punto. El área lateral de la parte del cilindro comprendida entre estos dos planos es :

A) $18\sqrt{3}\pi$ *B)* $15\sqrt{3}\pi$ *C)* $20\sqrt{3}\pi$

RESOLUCIÓN :



* Piden el área de la superficie lateral del cilindro oblicuo de generatriz $\overline{ED}(A_{S.L.})$

$$ED=BF=g \; ; \; A_{S.L.}=2\pi rg$$

(*S.R*, sección recta) $r=\sqrt{3}$

* Según la figura : $m+g=15$

$\triangle$ *EAB* : notable de *30°* y *60°* : $m=6$; $g=9$

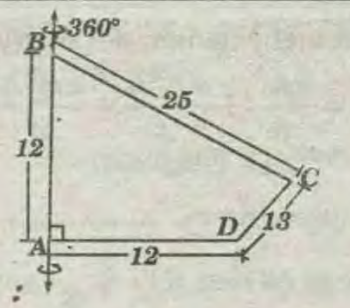
$A_{S.L.}=2\pi(\sqrt{3})(9)\Rightarrow A_{S.L.}=18\sqrt{3}\pi$

RPTA :"A"

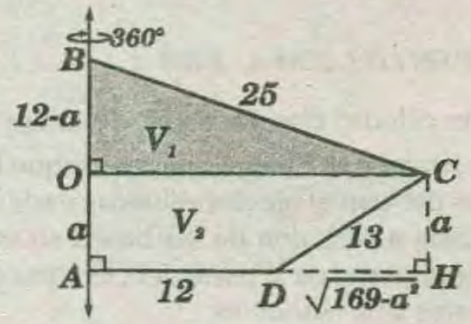
PROBLEMA 129 :

Calcule el volumen del sólido generado por el cuadrilátero *ABCD* al girar alrededor de $\overline{AB}$.

A) $3\,024\pi$
B) $2\,748\pi$
C) $3\,348\pi$
D) $3\,840\pi$
E) $3\,996\pi$



RESOLUCIÓN :



* Piden : $V_{S.G.}=V_1+V_2$

V_1: volumen del cono de revolución

V_2 : volumen del tronco de cono de revolución

$\triangle DHC : DH=\sqrt{169-a^2}$

$\triangle BOC : 25^2=(12-a)^2+(12+\sqrt{169-a^2})^2$

operando : $a=5$

$\Rightarrow V_1=\frac{1}{3}\pi(24)^2\times 7=1344\pi$

$V_2=\frac{\pi 5}{3}\left[(24)^2+24(12)+(12)^2\right]=1680\pi$

$\rightarrow V_{SG}=3024\pi$

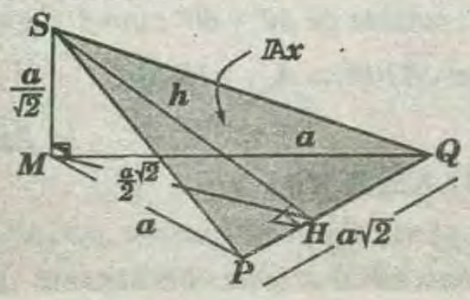
RPTA :"A"

PROBLEMA 130 :

Sea PMQ un triángulo recto en M y $MP=MQ=a$. Del vértice M se levanta el segmento $\overline{MS}$ perpendicular al triángulo tal que $MS=\frac{a}{\sqrt{2}}$. Halle el área del triángulo QSP.

A) $2a^2\sqrt{2}$ B) $a^2(\sqrt{2}+1)$ C) $a^2(\sqrt{2}-1)$
D) $a^2\sqrt{2}/2$ E) $a^2/2$

RESOLUCIÓN :



Piden $A_{(\triangle QSP)}=A_x$

Entonces se traza $\overline{MH}\perp\overline{PQ}$

$\Rightarrow$ Por el teorema de las 3 perpendiculares $\overline{SH}\perp\overline{PQ}$

Pero $\triangle PMQ$ (isósceles)

$MH=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow A_x=\frac{a\sqrt{2}\times h}{2}$

* Pero $\triangle SMH : h=a\Rightarrow A_x=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

RPTA :"D"

PROBLEMA 131 :

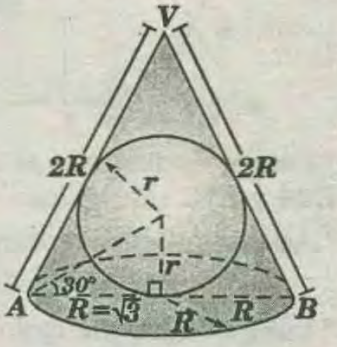
Si la generatriz de un cono recto circular y el diámetro de su base son iguales entre sí. ¿Cuántas veces mayor es el área lateral del cono que la superficie de la esfera inscrita en el cono?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{29}{20}$ C) $\frac{7}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Dato : $AV=AB$

* Se pide : $\frac{S_{L-cono}}{S_{S-esfera}}$



$S_{L-cono}=\pi R(2R)=2R^2\pi\Rightarrow S_{L-esfera}=4\pi r^2$

$\triangle AVB$: Equilátero , entonces $R=r\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{S_{L-cono}}{S_{S-esfera}}=\frac{2(r\sqrt{3})^2\pi}{4\pi r^2}\Rightarrow \frac{S_{L-cono}}{S_{S-esfera}}=\frac{3}{2}$

RPTA :"E"

PROBLEMA 132 :

Deduzca el valor de verdad de las afirmaciones siguientes:

I) El lugar geométrico de los puntos equidistantes de las caras de un diedro es el plano bisector del diedro.

II) La magnitud del ángulo plano de un diedro depende de la posición del vértice.

III) La intersección de un plano y una esfera nos da un círculo. .

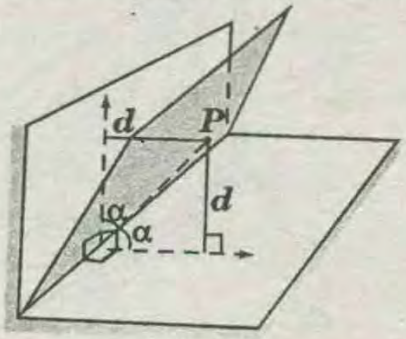
IV) Dos planos que se cortan forman diedros adyacentes suplementarios.

A)VFVV B)VVVV C)FFVV D)FVVV E)FFFV

RESOLUCIÓN :

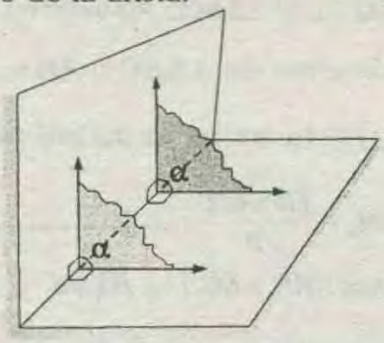
I) VERDADERA :

Todo punto del plano bisector equidista de las caras del diedro.



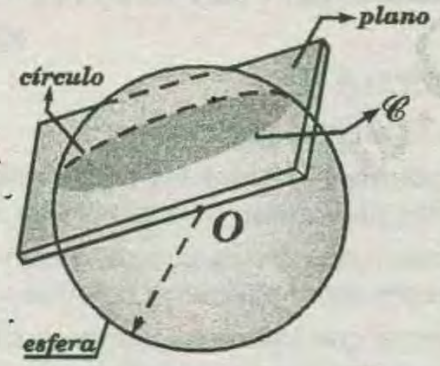
II) FALSA :

El vértice del ángulo plano se puede ubicar en cualquier punto de la arista.



III) VERDADERA :

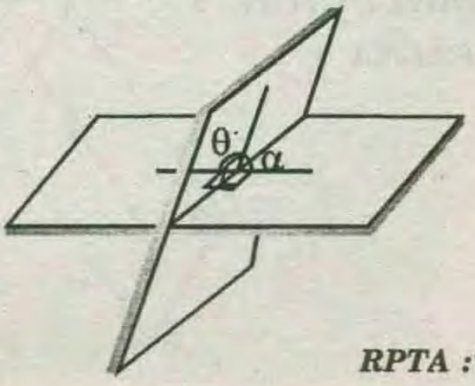
O equidista de todos los puntos de **C**, entonces **C** es una circunferencia , por lo tanto la región es un círculo.



IV) VERDADERA :

$\alpha+\beta=180°$

$\Rightarrow$ Los diedros adyacentes son suplementarios.



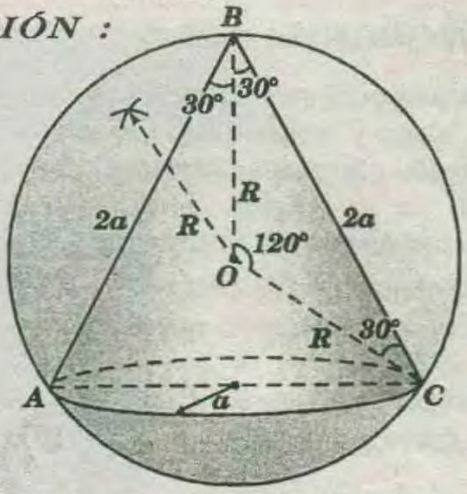
RPTA :"A"

PROBLEMA 133 :

Se inscribe un cono recto de revolución en una esfera, tal que la generatriz del cono sea igual al diámetro de su base e igual a $2a$. Calcule el área de la esfera.

A) $5{,}33\pi a^2$ *B)* $5{,}34\ \pi a^2$ *C)* $5{,}35\pi a^2$
D) $5{,}36\ \pi a^2$ *E)* $5{,}37\pi a^2$

RESOLUCIÓN :



* Piden A_{SE}: área de la superficie de la esfera

$$A_{SE}=4\pi R^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Dato : cono equilátero.

* Del $\triangle BOC$:

$$R\sqrt{3}=2a \rightarrow R=\frac{2a}{\sqrt{3}} \quad \ldots\ldots\ldots (II)$$

*Reemplazando *(II)* en *(I)*:

$$A_{SE}=4\pi\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 \rightarrow A_{SE}=\frac{16}{3}\pi a^2 \quad A_{SE}=5{,}33\pi a^2$$

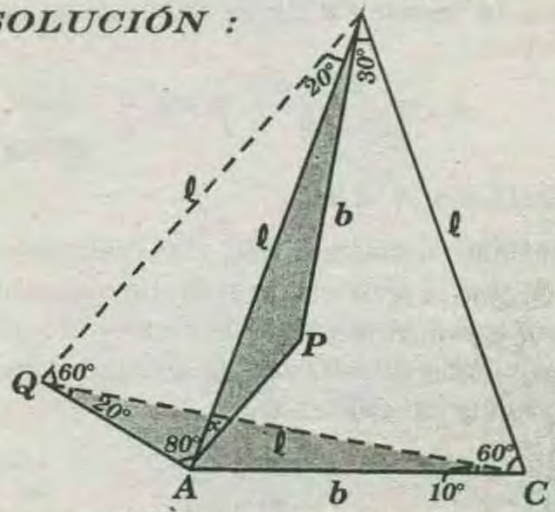
RPTA :"A"

PROBLEMA 134 :

En el interior de un triángulo **ABC (AB =BC)**, se toma el punto **«P»** tal que **PB =AC**, $m\sphericalangle PBA=10°$ y $m\sphericalangle PBC=30°$. Calcule la medida del ángulo **PAB**.

A) $15°$ *B)* $20°$ *C)* $25°$ *D)* $30°$ *E)* $35°$

RESOLUCIÓN :



* Piden : $m\sphericalangle PAB=x$

* Datos : $AB=BC=\ell$

* Se traza ΔBCQ equilátero $\rightarrow$ $m\sphericalangle BQC=60°$

* Se observa que : $BQ=BA=\ell$

* Luego :

$\Delta QAC \cong \Delta APB$ .....(caso LAL)

$\rightarrow m\sphericalangle AQC = m\sphericalangle BAP \rightarrow x=20°$

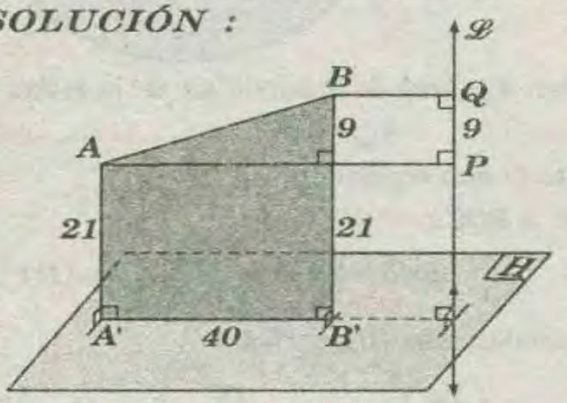
RPTA :"B"

PROBLEMA 135 :

Las proyecciones de un segmento de recta $\overline{AB}$ sobre un plano y sobre una recta perpendicular al plano son $40u$ y $9u$ respectivamente. Determine el área (en u^2) de la región encerrada por las rectas perpendiculares al plano trazadas por A y B. el segmento $\overline{AB}$ y la proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano, si la menor distancia que hay del segmento al plano es $21u$.

A)1020 B)1080 C)1140 D)1200 E)1260

RESOLUCIÓN :



* Piden el área de la región $A'B'BA$: A_x

* Según el enunciado :

$\overline{A'B'}$ es la proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\square H$.

$\overline{PQ}$ es la proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overline{\mathscr{L}}$.

* Por dato : $AA'=21$

* Como la región $A'B'BA$ es trapecial rectangular, entonces :

$$A_x=\left(\frac{21+30}{2}\right)(40)= 1020$$

RPTA : "A"

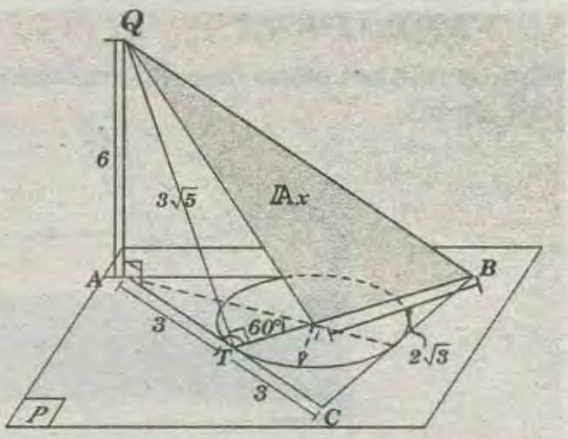
PROBLEMA 136 :

Un triángulo equilátero ABC está contenido en un plano P, por el vértice A se traza un segmento $\overline{AQ}$ perpendicular al plano P. Si I es el incentro del triángulo ABC y $AB=AO=6u$. Determine el área de la región triangular OIB en u^2.

A) $4\sqrt{15}$ B) $\sqrt{15}$ C) $\frac{3}{2}\sqrt{15}$

D) $3\sqrt{15}$ E) $2\sqrt{15}$

RESOLUCIÓN :



* Piden el área de la región triangular QIB : A_x

* Datos :

$\overline{AQ} \perp \square P, \Delta ABC$: equilátero ;

I: Incentro del ΔABC y $AB= AQ=6u$

$\overline{QT} \perp \overline{TB}$ (teorema de las tres perpendiculares)

$\rightarrow A_x=\frac{IB\times QT}{2}$.....(I)

$\triangle ATI$: not ($30°$ y $60°$) $\Rightarrow AT=3$ y $TI=\sqrt{3}$

ΔABC : equilátero $\Rightarrow IB=2(TI)=2\sqrt{3}$.....(II)

$\triangle QAT$: $(QT)^2=3^2+6^2 \Rightarrow QT=3\sqrt{5}$ .....(III)

* Reemplazando (II) y (III) en (I) : $A_x = 3\sqrt{15}$

RPTA :"D"

PROBLEMA 137 :

Dadas las siguientes proposiciones :

I) Si dos planos son paralelos a una misma recta , entonces los planos son paralelos entre sí.

II) Si se tienen dos rectas que se cruzan , entonces existe siempre una recta perpendicular a ambas.

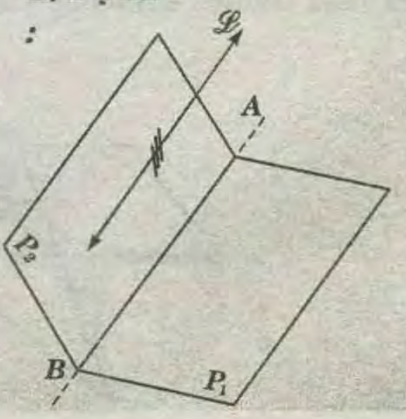
III) Una recta que interseca perpendicularmente a una de dos rectas que se cruzan siempre interseca a la otra. ¿Cuáles son verdaderas?

A) solo I B) solo II C) solo III

D) I y II E) I y III

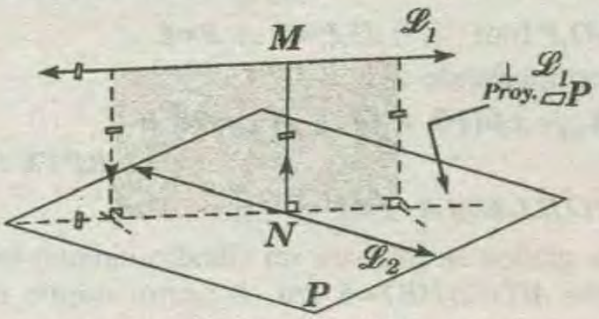
RESOLUCIÓN :

I) FALSA :



* Si dos planos son paralelos a una misma recta , entonces, los planos son paralelos entre sí. Es una proposición falsa , porque los planos pueden ser secantes.

II) VERDADERA :



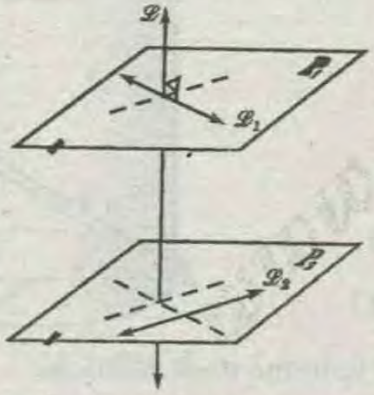
* Dadas dos rectas alabeadas $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

* Por $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ trazamos un plano **P** paralelo a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$.

* Proyectamos $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ sobre **P**, entonces , dicha proyección interseca a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ en **N**, entonces , **MN** es perpendicular a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

* Luego , si se tiene dos rectas que se cruzan , entonces , existe siempre una recta perpendicular a ambas. Es una proposición verdadera.

III) FALSA :



* Sean $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ dos rectas alabeadas y sean P_1 y P_2 dos planos paralelos que contienen a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ respectivamente.

* Si :

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp P_1 \rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp P_2 \rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$$

* Pero $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ no necesariamente interseca a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

*Luego, si una recta que interseca perpendicularmente a una de dos rectas que se cruzan siempre interseca a la otra , Es una proposición falsa.

Por lo tanto , solo ***II*** es verdadera.

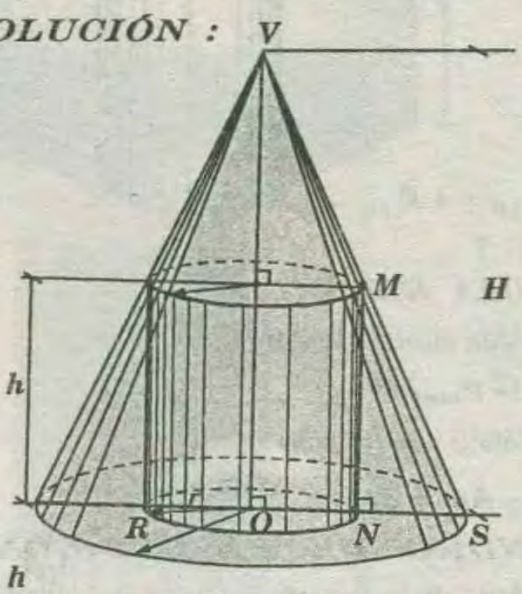
RPTA :"B"

PROBLEMA 138 :

El radio de la base de un cono circular recto mide **R** unidades y su altura mide **H** unidades. La altura del cilindro de mayor área lateral inscrito en el cono es

A) $\frac{H}{4}$ B) $\frac{H}{3}$ C) $\frac{2H}{5}$ D) $\frac{H}{2}$ E) $\frac{3H}{4}$

RESOLUCIÓN :



* Piden h

* h : Altura del cilindro inscrito de mayor área lateral

* Área de la superficie lateral del cilindro : A_{SL}

$$A_{SL} = (2\pi)\times h \quad \text{.....(I)}$$

$\triangle$ ***VOS - MNS***

$$\frac{H}{h} = \frac{R}{R-r} \rightarrow h = \frac{H}{R(R-r)} \quad \text{.....(II)}$$

* Reemplazando la ecuación ***(II)*** en la ecuación ***(I)***:

$$A_{SL} = \frac{2\pi Hr}{R}(R-r)$$

* Derivando A_{SL} en función de r e igualando a **0 :**

$$\rightarrow A_{SL}(r) = 0 \rightarrow \left(\frac{2\pi H}{R}(Rr - r^2)\right) = 0 \rightarrow R - 2r = 0$$

* Se obtiene que $R=2r$

$\triangle$ ***SOV:*** $\overline{MN}$ es base media ***(ON=NS=r)***

$$\rightarrow h = \frac{H}{2}$$

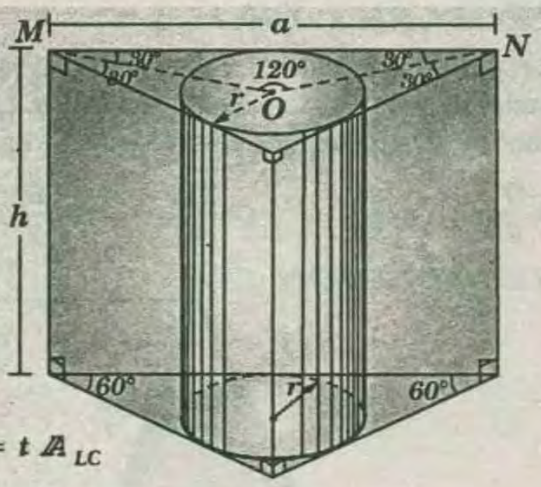
RPTA :"D"

PROBLEMA 139 :

En un prisma triangular regular se inscribe un cilindro. Si $\mathcal{A}_{LP}$ es el área lateral del prisma $\mathcal{A}_{LC}$ es el área lateral del cilindro y $\mathcal{A}_{LP} = \mathcal{A}_{LC}$ entonces t es igual a

A) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ B) $\frac{4\sqrt{3}}{\pi}$ C) $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$ D) $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$ E) $\frac{2\sqrt{6}}{\pi}$

RESOLUCIÓN :



* Si: $\mathcal{A}_{LP} = t\,\mathcal{A}_{LC}$
* Piden : t

PRISMA REGULAR :

$\mathcal{A}_{LP}$: Área superficie lateral del prisma

$\mathcal{A}_{LP} = (2p_{base})\times h$

* Del gráfico : $2p_{base} = 3a$

$\Rightarrow Ap = 3ah$.....(I)

CILINDRO DE REVOLUCIÓN :

Ac: Área de la superficie lateral del cilindro

$\mathcal{A}_{LC} = (2\pi r)\times h$.....(II)

* Dividiendo *(I)* y *(II)* :

$$\frac{\mathcal{A}_{LP}}{\mathcal{A}_{LC}} = \frac{3a}{2\pi r} \text{.....(III)}$$

$\Delta MON : a = 2r\sqrt{3}$

* Reemplazando en *(III)* :

$$\mathcal{A}_{LP} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\mathcal{A}_{LC} \rightarrow t = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$$

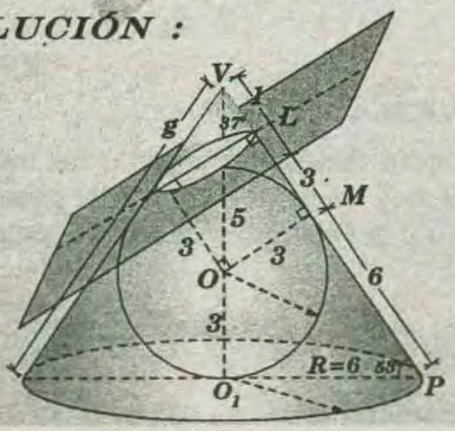
RPTA :"A"

PROBLEMA 140 :

Una esfera cuyo radio mide **3cm**, está inscrita en un cono circular recto. Se traza un plano tangente a la esfera y perpendicular a una generatriz del cono. Si el plano dista **1cm** del vértice del cono , el valor de la superficie en cm^2 es

A) 90 π C) 94π D) 96 π B) 92 π E) 98π

RESOLUCIÓN :



* Piden el área de la superficie total del cono $(\mathcal{A}_{ST})$
* El plano dista del vértice **1cm** $\Rightarrow$ **VL=1cm**

$$\mathcal{A}_{ST} = \pi R(g + R)$$

$\triangle VMO$ (not : 37°) $\Rightarrow VO = 5$

$\triangle VO_1P$ (not : 37°) : $O_1P = 6 \Rightarrow R = 6$

* Reemplazando :

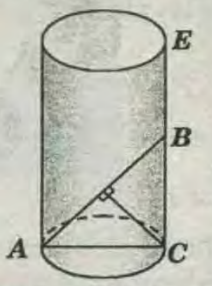
$\mathcal{A}_{ST} = \pi\,6(10 + 6) \rightarrow \mathcal{A}_{ST} = 96\,\pi$

RPTA :"D"

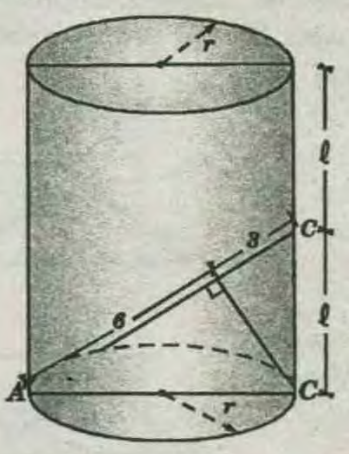
PROBLEMA 141 :

En la gráfica se muestra un cilindro circular recto , donde $AH = 2(HB) = 6$ **cm**, **B** punto medio de la generatriz $\overline{EC}$ y $\overline{AC}$ diámetro de la base. Calcule el volumen del cilindro en cm^3.

A) $64\sqrt{3}\pi$
B) $69\sqrt{3}\pi$
C) $72\sqrt{3}\pi$
D) $78\sqrt{3}\pi$
E) $81\sqrt{3}\pi$



RESOLUCIÓN :



* Piden

$V_{cilindro} = V$

$V = \pi r^2(2\ell)$

$\triangle ACB$: Por teorema de **R.** Métricas

$\ell^2 = 9(3)$

$\Rightarrow \ell = 3\sqrt{3}$ y $(2r)^2 = 9(6) \Rightarrow r^2 = \dfrac{27}{2}$

* En *(I)*: $V = \pi\left(\dfrac{27}{2}\right)\times(6\sqrt{3}) \rightarrow V = 81\sqrt{3}\pi$

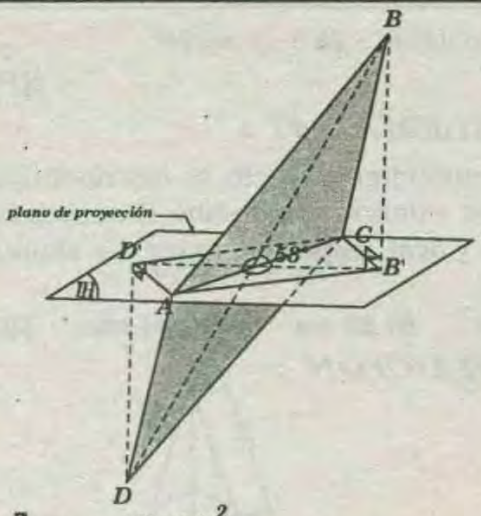
RPTA : "E"

PROBLEMA 142 :

El área proyectada de un cuadrado sobre un plano que pasa por una de sus diagonales es de **18,6** cm^2, si el ángulo formado por dichas superficies es de **53°**. Halle el área (en cm^2) del cuadrado.

A)30,0 B)30,5 C)30,75 D)31 E)31,5

RESOLUCIÓN :



* Piden : $A_{\square ABCD}$ en cm^2

* Sea $AB'CD'$ la proyección del cuadrado $ABCD$ sobre el plano $\mathbb{H}$.

* Dato : $A_{AB'CD'} = 18,6\ cm^2 \rightarrow m\sphericalangle diedro\ \overline{AC} = 53°$

* Por propiedad : $A_{AB'CD'} = A_{\square ABCD}\ \cos 53°$

$$18,6 = A_{\square ABCD}\left(\frac{3}{5}\right) \rightarrow A_{\square ABCD} = 31$$

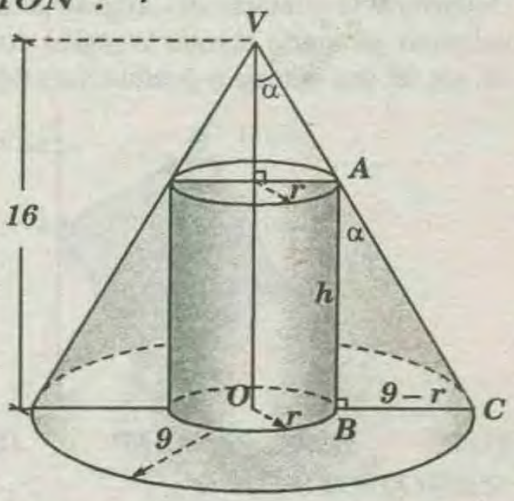
RPTA : "D"

PROBLEMA 143 :

En un cono de altura de $16\ cm$ y radio $9\ cm$ se inscribe un cilindro de radio r. Determine el radio y la altura del cilindro de mayor volumen si sabemos que tiene radio entero.

A) $4;\frac{64}{9}$ B) $5;\frac{80}{9}$ C) $6;\frac{16}{3}$ D) $7;\frac{32}{9}$ E) $8;\frac{16}{9}$

RESOLUCIÓN :



* Piden : r y h

* Dato : volumen del cilindro es máximo.

$\triangle ABC \sim \triangle VOC$

$$\frac{h}{9-r} = \frac{16}{9} \Rightarrow h = \frac{16}{9}(9-r) \quad \ldots\ldots (I)$$

$$V = \pi r^2 h = \frac{16\pi}{9}(9r^2 - r^3)$$

* Derivando solo la expresión $9r^2 - r^3$ obtenemos

$$18r - 3r^2 = 0$$

* Resolviendo : $\Rightarrow r_1 = 6\ v\ r_2 = 0$

* Por la condición : $r = 6$

* Reemplazando en (I) : $h = \frac{16}{3} \rightarrow 6; \frac{16}{3}$

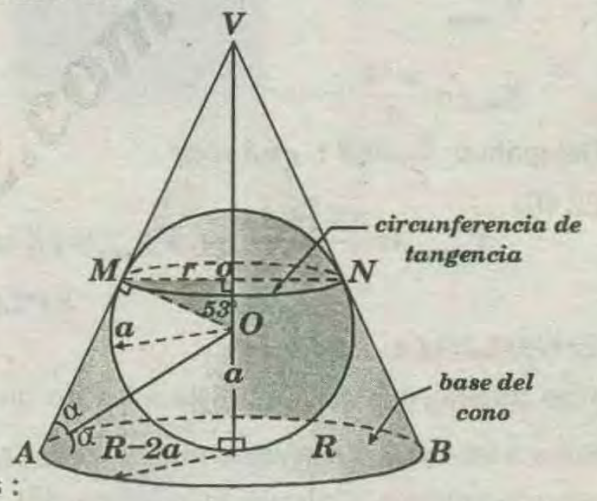
RPTA :"C"

PROBLEMA 144 :

En un cono circular recto está inscrita una esfera , cuya área de la superficie esférica es igual al área de la base del cono. ¿En qué relación están el área de la superficie lateral del cono limitado por la circunferencia de tangencia con la superficie esférica y la superficie lateral del cono?

A) $\frac{9}{25}$ B) $\frac{5}{21}$ C) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{4}{25}$ E) $\frac{4}{21}$

RESOLUCIÓN :



* Datos :

$$A_{(sup.esf)} = A_{base\ cono}$$

$$4\pi a^2 = \pi R^2$$

$$\Rightarrow R = 2a \Rightarrow \alpha = \frac{53°}{2}$$

* Piden : $AQ = x$

* En el triángulo AHR (notable de $60°$) :

$$AR = a\sqrt{3}\ \text{y}\ m\sphericalangle ARH = 90°$$

* Por teorema de las tres perpendiculares :

$$m\sphericalangle ARQ = 90°$$

* Dato :

$$2p_{\triangle ARQ} = 3\sqrt{3}a \rightarrow x + y + a\sqrt{3} = 3a\sqrt{3}$$

$$x + y = 2a\sqrt{3} \quad \ldots\ldots (I)$$

* ΔQR : Teorema de Pitágoras

$$x^2 = y^2 + (a\sqrt{3})^2 \quad \ldots\ldots (II)$$

* De (I) y (II): $x = \frac{5\sqrt{3}}{4}au$

RPTA : "C"

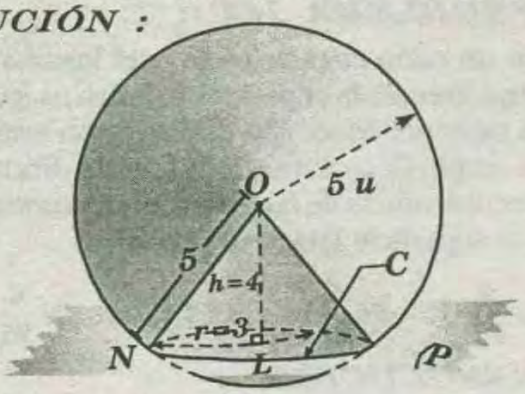
PROBLEMA 145 :

Se tiene una esfera de centro O y radio $5u$.

Un plano P corta a la esfera en una circunferencia C y la distancia de O a P es $4u$. Entonces el volumen del cono con vértice O y base el círculo limitado por C es igual a

A) $8\pi u^3$ B) $12\pi u^3$ C) $15\pi u^3$ D) $16\pi u^3$ E) $18\pi u^3$

RESOLUCIÓN :



* Piden : V_{cono}

$$V_{cono}=\frac{\pi r^2 h}{3} \quad \ldots\ldots (II)$$

* Del gráfico $\triangle OLN$: $r=3$ $h=4$

* En (I):

$$V_{cono}=\frac{\pi 3^2(4)}{3} \rightarrow V_{cono}=12\pi u^3$$

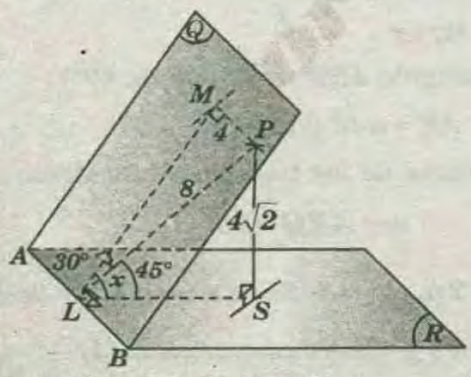
RPTA :"B"

PROBLEMA 146 :

En un ángulo diedro , las distancias de un punto interior a las caras y a la arista miden $4\sqrt{2}u, 4u$ y $8u$ respectivamente. Calcule la medida del ángulo diedro.

A) 65° B) 70° C) 75° D) 80° E) 85°

RESOLUCIÓN :



* Piden la medida del diedro AB : x

* Según los datos : $PS=4\sqrt{2}$; $PM=4$; $PL=8$

* Por el teorema de las tres perpendiculares :

$$\overline{SL} \perp \overline{AB} \rightarrow \overline{ML} \perp \overline{AB}$$

* LMP (notable : 30° y 60°)

* LSP (notable : 45°) $\Rightarrow x=75°$

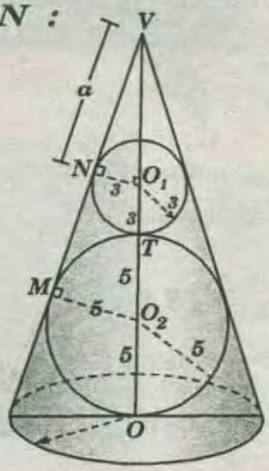
RPTA :"C"

PROBLEMA 147 :

En un cono circular recto se inscriben dos esferas tangentes exteriormente entre sí , cuyos radios son de $3\ cm$ y $5cm$ respectivamente. La altura de dicho cono es

A) 26 cm B) 25 cm C) 24 cm D) 23 cm

RESOLUCIÓN :



* Piden la longitud de la altura VO.

* Sea : $VO_1=a \Rightarrow VO=a+13$.

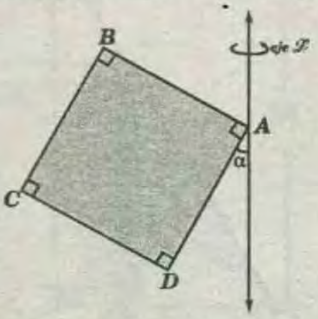
* De la semejanza de los triángulos VNO_1 y VMO_2

$$\frac{a}{a+8}=\frac{3}{5} \rightarrow a=12 \rightarrow VO=25\ cm$$

RPTA :"B"

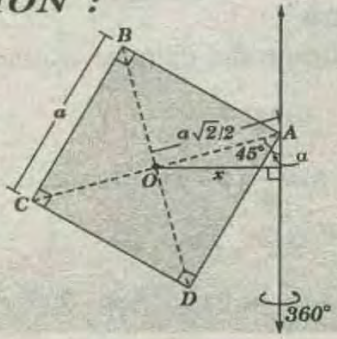
PROBLEMA 148 :

Determine la medida del ángulo α de modo que el volumen generado al rotar la región cuadrada en torno del eje $\mathscr{L}$. sea el mayor posible. (ver figura).



A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 90°

RESOLUCIÓN :



Piden α para que el volumen del sólido generado sea lo mayor posible, por teorema de Pappus – Gulding.

$$V_{SG} = 2\pi x A_{\square ABC} \rightarrow V_{SG} = 2\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} sen(45° + \alpha)\right).a^2$$

* Entonces V_{SG} será mayor posible cuando sen $(45°+\alpha)=1$

$$\Rightarrow 45° + \alpha = 90° \rightarrow \alpha = 45°$$

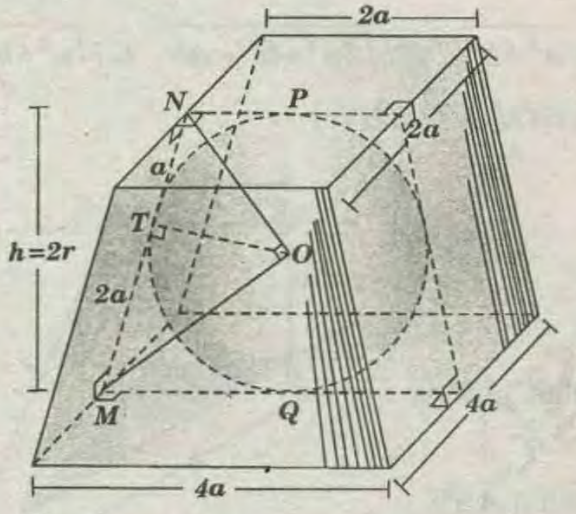
RPTA :"C"

PROBLEMA 149 :

La relación entre el volumen de un tronco de pirámide regular cuadrangular, de áreas $4a^2$ y $16a^2 (a>0)$ y el volumen de una esfera inscrita es

A) $\frac{11}{\pi}$ B) $\frac{9}{\pi}$ C) $\frac{8}{\pi}$ D) $\frac{7}{\pi}$ E) $\frac{\pi}{8}$

RESOLUCIÓN :



* Pide: $\frac{V_{tronco\ pirámide}}{V_{esfera}}$ .....(I)

* De los datos de las áreas se deduce que las longitudes de los lados de los cuadrados son $2a$ y $4a$. $\Rightarrow NT=NP=a$ y $MT=MQ=2a$

$\triangle MON$ $r^2=(a)(2a)$

$r=a\sqrt{2}$

$$V_{\substack{tronco\\pirámide}} = \frac{2\sqrt{2}a}{3}(4a^2 + \sqrt{4a^2 \times 16a^2} + 16a^2)$$

$$V_{\substack{tronco\\pirámide}} = \frac{56}{3}\sqrt{2}a^3 \quad .....(II)$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi(a\sqrt{2})^3 \rightarrow V_{esfera} = \frac{8}{3}\pi\sqrt{2}a^3 .....(III)$$

* Reemplazando (III) y (II) en (I): $\frac{V_{tronco\ pirámide}}{V_{esfera}} = \frac{7}{\pi}$

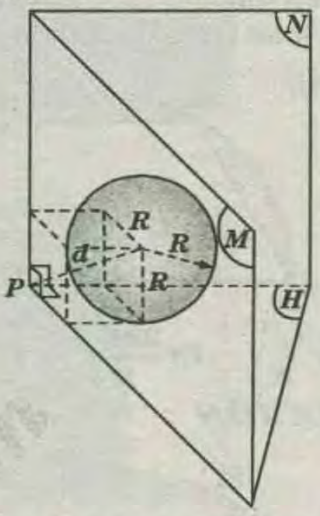
RPTA :"D"

PROBLEMA 150 :

Tres planos tangentes a una misma esfera de radio R son ortogonales entre sí y se intersectan en un punto P. La distancia del punto P al centro de la esfera es

A) $\sqrt{3}R$ B) $2R$ C) $\sqrt{2}R$ D) $3R$ E) $\frac{3}{2}R$

RESOLUCIÓN :



* Piden d, la distancia del centro al punto P. Sean los planos M, N, H angentes a la esfera y ortogonales en P.

* Se forma un triedro trirectángulo en P, al trazar los radios a los puntos de tangencia y proyectar dichos puntos en las aristas, se forma un cubo de arista R.

$$\Rightarrow d = \sqrt{3}R$$

RPTA :"A"

PROBLEMA 151 :

Dada la ecuación de la parábola $y^2 - 4y - 8x + 44 = 0$, entonces la suma de las coordenadas del foco de la parábola es :

A)7 B)8 C)9 D)10 E)11

RESOLUCIÓN :

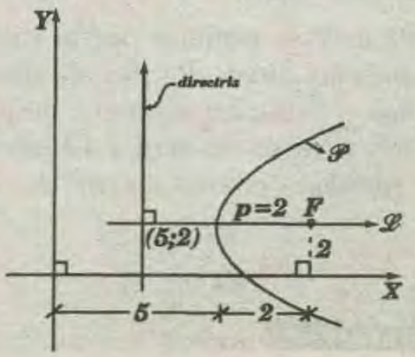
* Dada la parábola : $\mathcal{P}$: $y^2 - 4y - 8x + 44 = 0$

* Se pide la suma de las coordenadas del foco.

* Completando cuadrados se obtiene :

$$(y-2)^2 = 8(x-5) \Rightarrow V=(5;2) \text{ y } p=2$$

* Realizando el gráfico :



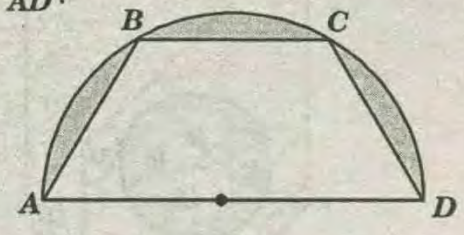
* Coordenadas del foco : $F(7;2)$

* Por lo tanto la suma de coordenadas del foco es 9.

RPTA :"C"

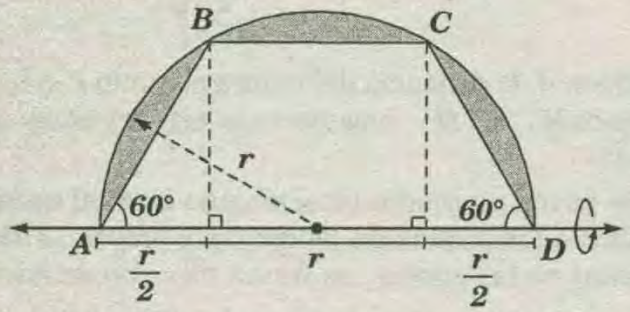
PROBLEMA 152 :

En la figura siguiente, $AB=BC=CO=r$, donde r es el radio de la semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$. Determine en función de r el volumen del sólido generado al rotar la región sombreada alrededor del segmento $\overline{AD}$.



A) $\frac{\pi r^3}{2}$ B) $\frac{\pi r^3}{6}$ C) $\frac{2\pi r^3}{3}$ D) $\frac{\pi r^3}{3}$ E) $\frac{\pi r^3}{12}$

RESOLUCIÓN :



* Piden el volumen de sólido generado por las regiones sombreadas : V_{SG}

$$V_{SG}=V_{SG_{AB}}+V_{SG_{BC}}+V_{SG_{CD}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Como :

$$AB=BC=CO=r$$

$$\Rightarrow m\widehat{AB}=m\widehat{BC}=m\widehat{CD}=60^\circ$$

* Por anillo esférico en (I) :

$$V_{SG}=\frac{1}{6}\pi(AB)^2\frac{r}{2}+\frac{1}{6}\pi(BC)^2 r+\frac{1}{6}\pi(DC)^2\frac{r}{2}$$

* Reemplazando : $V_{SG}=\frac{\pi r^3}{3}$

RPTA :"D"

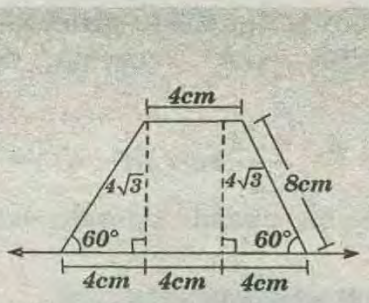
PROBLEMA 153 :

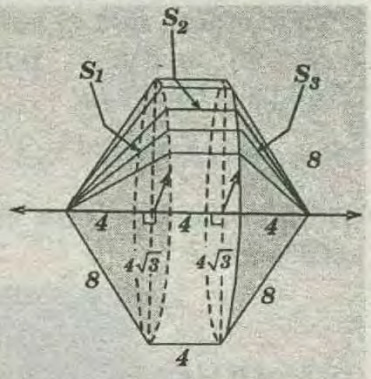
Una superficie S se obtiene por la rotación de un trapecio isósceles alrededor del eje que contiene a su lado mayor. Si dicho trapecio tiene un ángulo agudo de $60°$ y bases de $4cm$ y $12\ cm$ de longitud, ¿cuál es la medida del área en cm^2 de S?

A) $64\pi\sqrt{3}$ B) $128\pi\sqrt{3}$ C) $32\pi\sqrt{3}$

D) $112\pi\sqrt{3}$ E) $96\pi\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :





* Se pide :

$$S=S_1+S_2+S_3$$

$$\Rightarrow S=\pi(4\sqrt{3})(8)+2\pi(4\sqrt{3})(4)+\pi(4\sqrt{3})(8)=96\pi\sqrt{3}$$

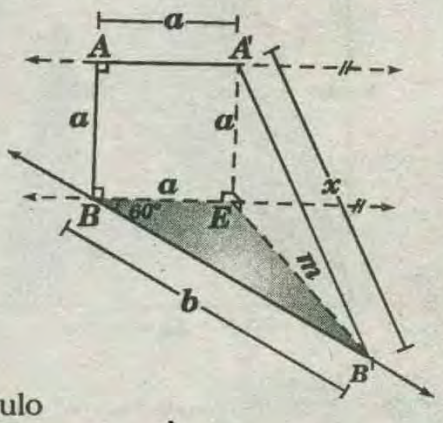
RPTA :"E"

PROBLEMA 154 :

Dos rectas $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ se cruzan y forman entre sí un ángulo de $60°$, Si AB es la mínima distancia y $M'=AB=a$, $BB'=b$. Calcule la longitud de $\overline{B'B'}$,

A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\sqrt{2a^2+b^2-ab}$ C) $\sqrt{a^2+b^2+ab}$

RESOLUCIÓN :



* Piden : $A'B'=x$

* Sea

$$\overline{BE}\ //\ \overline{AA'}$$

$\Rightarrow ABEA'$: rectángulo

$\triangle EBB'$ (Ley de cosenos)

$$m^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow m^2=a^2+b^2-ab$$

$\triangleleft A'EB'$: (T. Pitágoras) : $x^2=a^2+m^2$

* Reemplazando :

$$x^2=a^2+a^2+b^2-ab \Rightarrow x=\sqrt{2a^2+b^2-ab}$$

RPTA :"B"

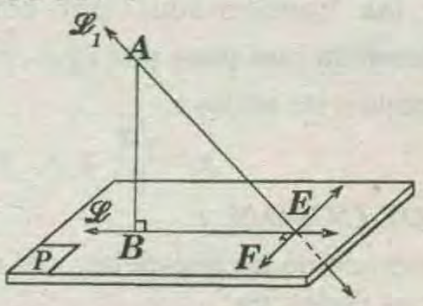
PROBLEMA 155 :

Sea un segmento de recta $\overline{AB}$ perpendicular a un plano $P(B\in P)$ y el segmento $\overline{EF}$ en el plano P. Si por el pie B se traza una recta $\mathcal{L}$ que pasa por E $(L\perp\overline{EF})$ y otra recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por los puntos A y E.¿Qué podemos afirmar de las rectas $\mathcal{L}_1$ y la recta

que contiene a $\overline{EF}$?

A) Son rectas coincidentes
B) Son rectas perpendiculares
C) Son rectas que se intersecan
D) Son rectas que se cruzan
E) Son rectas paralelas

RESOLUCIÓN :



* Por dato : $\overline{AB} \perp \square P$

$\overrightarrow{EF} \subset \square P$ y $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{\mathscr{L}}$

* Por el teorema de las tres perpendiculares:

$\overrightarrow{\mathscr{L}_1} \perp \overrightarrow{EF}$

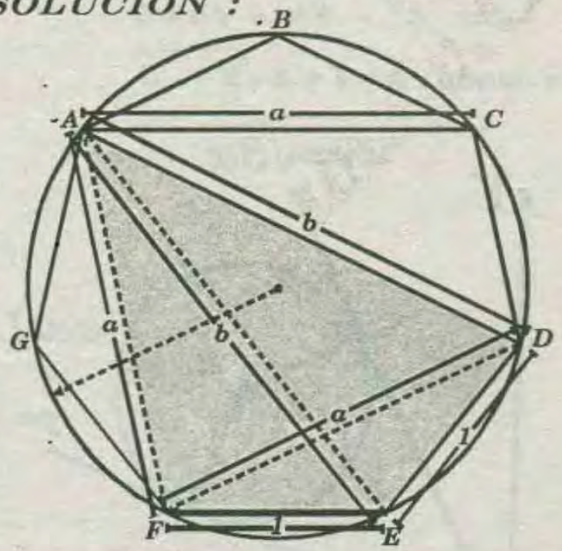
Además $\overrightarrow{L_1} \perp \overrightarrow{EF}$ son rectas secantes

RPTA :"D"

PROBLEMA 156 :

Dado un heptágono regular *ABCDEFG* de lado de longitud *1*, pruebe que las diagonales *AC* y *AD* verifican $\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=1$.

RESOLUCIÓN :



* Como *ABCDEFG* es un polígono regular , entonces es inscriptible.

* Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia circunscrita al heptágono regular (lados de igual longitud), por lo tanto , todos los arcos que subtiende cada lado tienen igual medida.

* Como :

$$m\widehat{ABC} = m\widehat{AGF} = m\widehat{DEF} \rightarrow AC=AF=FD$$

* También : $m\widehat{ACD} = m\widehat{EFA} \rightarrow AD = AE$

* Luego en el cuadrilátero *ADEF* aplicamos el Teorema de Ptolomeo.

$$a\times b=a\times 1+b\times 1 \rightarrow a\times b=a+b$$

* de donde :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1 \rightarrow \frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=1$$

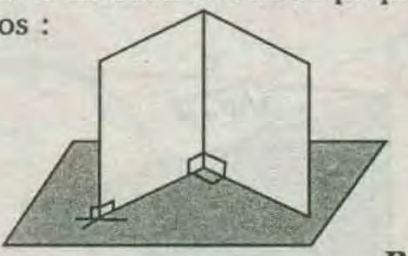
PROBLEMA 157 :

Si dos planos son perpendiculares , entonces :

A) Toda recta perpendicular a la intersección de ambas debe estar contenida en uno de ellos.
B) Todas las rectas de una de ellas son perpendiculares al otro.
C) Todo plano perpendicular a uno de ellos es perpendicular también al otro plano.
D) No siempre se intersectan.
E) Todo plano perpendicular a su intersección es perpendicular a ambos planos.

RESOLUCIÓN :

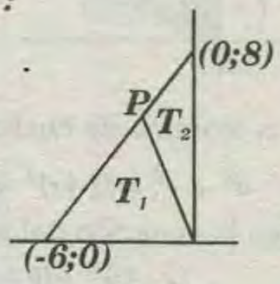
* Si dos planos son perpenducilares , todo plano perpendicular a su intersección es perpendicular a ambos planos :



RPTA :"E"

PROBLEMA 157 :

En la figura; *P* es un punto tal que el área del triángulo T_1 es tres veces el área del triangulo T_2



Hallar $\vec{P}$

RESOLUCION :

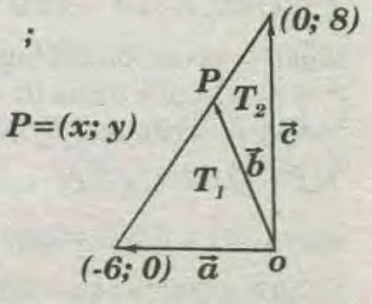
* Sean : A_1: área de T_1;
A_2: área de T_2 ;

* Entonces $A_t=A_1+A_2$;

* En la figura:

$$A_t=\frac{6\times 8}{2}=24$$

* Pero : $A_1 = 3A_2$; Luego



$$A_t = 3A_2 + A_2 = 24 \Rightarrow A_2 = 6u^2 \Rightarrow A_1 = 18u^2$$

* De la figura definimos los vectores:

$\vec{a}=(-6;0); \vec{b}=(x;y) \Rightarrow \vec{b}^{\perp}=(-y;x); \vec{c}=(0;8) \Rightarrow \vec{c}^{\perp}=(-8;0);$

* entonces: $A_1=\frac{1}{2}|\vec{a}.\vec{b}^{\perp}|=\frac{1}{2}|(-6;0).(-y;x)|=18$

$\Rightarrow A_1=\frac{1}{2}|6y|=3y=18 \Rightarrow y=6$

* $A_2=\frac{1}{2}|\vec{c}.\vec{b}^{\perp}|=\frac{1}{2}|(0;8).(-y;x)|=6 \Rightarrow A_2=\frac{1}{2}|8x|=6 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

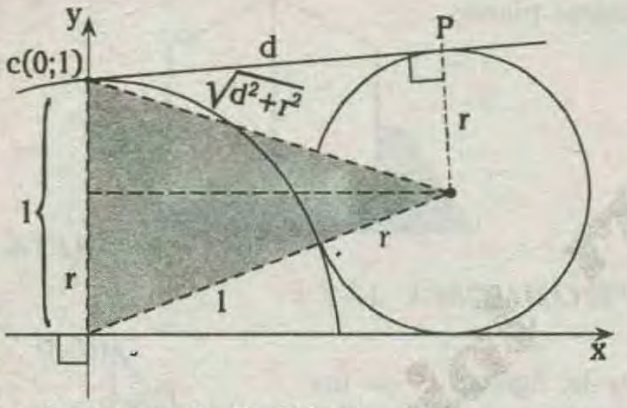
* Finalmente: $P=(-\frac{3}{2};6) \Rightarrow |\overline{P}|=|\overline{OP}|=\frac{3}{2}\sqrt{17}$

PROBLEMA 158 :

Con centro en el origen de coordenadas se traza un cuadrante de radio *1 u* (en el primer cuadrante), luego se dibuja una circunferencia tangente al eje *"x"*. Desde el punto de intersección del cuadrante con el eje *"y"* se traza una recta tangente a la circunferencia con punto de tangencia *P*. Halle la ecuación del lugar geométrico que describe el punto *P* cuando el radio de la circunferencia se hace variar

A) $x^2+(y-1)^2=2$ *B)* $(x-1)^2+y^2=2$ *C)* $x^2+y^2=2$
D) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ *E)* $x^2+(y-2)^2=1$

RESOLUCIÓN :



* Por el teorema de Euclides:

$$d^2+r^2=(1+r)^2+1^2-2r(1) \Rightarrow d^2=2$$

* Luego la ecuación del lugar geométrico será:

$$(x-0)^2+(y-1)^2=d^2$$
$$\Rightarrow x^2+(y-1)^2=2:$$

RPTA :"A"

PROBLEMA 159 :

Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P=(x;y)$ cuya suma de distancias a los puntos fijos $(c;0)$ y $(-c;0)$ sea igual a $2a, (0<c<a)$

RESOLUCIÓN :

$d(P,(c;0))+d(P,(-c;0))=2a$

$\rightarrow d(P,(c;0))^2=(2a-d(P,(-c;0)))^2 \rightarrow$

$\rightarrow (x-c)^2+y^2=4a^2-4ad(P,(-c;0))+(x+c)^2+y^2$

$\rightarrow ad((-c;0))=xc+a^2$

$\rightarrow a(x^2+2xc+c^2)+a^2y^2=x^2c^2+2a^2xc+a^4$

$$\rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1}$$

PROBLEMA 160 :

Hallar las coordenadas del centro de una circunferencia que pasa por $(2+\sqrt{3};2+\sqrt{3})$ que es tangente a las rectas :

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x \wedge y=\sqrt{3}x.$$

RESOLUCION :

* El cuadrado de las distancias , del centro $(h;k)$ a las rectas dadas, es :

$$r^2=(\frac{\sqrt{3}h-k}{2})^2=(\frac{h-\sqrt{3}k}{2}).....(I)$$

De donde : $h=k$, entonces $r^2=(\frac{2-\sqrt{3}}{2})h^2$

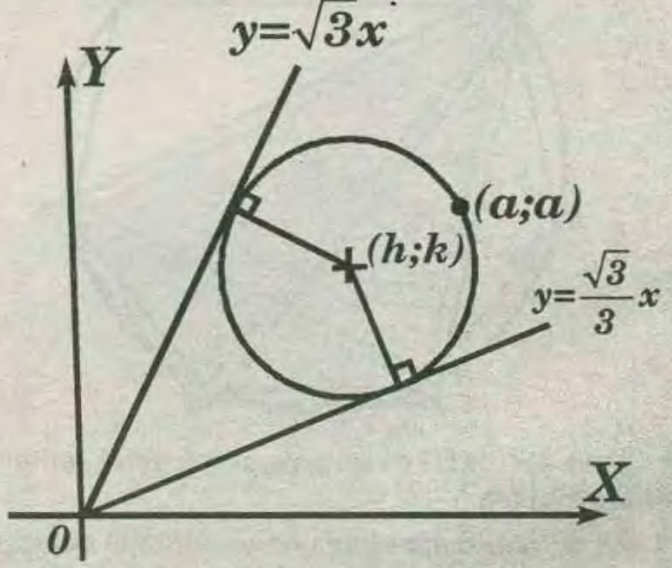
* Haciendo $a=2+\sqrt{3}$, entonces el cuadrado de la distancia de $(a;a)$ al centro $(h;k)$, estará dada por:

$$(a-h)^2+(a-h)^2=r^2=(\frac{2-\sqrt{3}}{2})h^2$$

* De donde :

$$(2+\sqrt{3})h^2-8ah+4a^2=0$$
$$\Rightarrow ah^2-8ah+4a^2=0$$
$$\Rightarrow h^2-8h+4a=0$$

* De donde : $h=4\pm 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$



* Por lo tanto las coordenadas del centro son:

$$(b;k)=(4\pm 2\sqrt{2-\sqrt{3}};4\pm 2\sqrt{2-\sqrt{3}})$$

PROBLEMA 161 :

Se tiene un polígono convexo de *8* lados circunscrito a una circunferencia . Si las longitudes de sus lados están en progresión geométrica de razón r, determine r^2+3r.

A)1 B)4 C)10 D)18 E)28

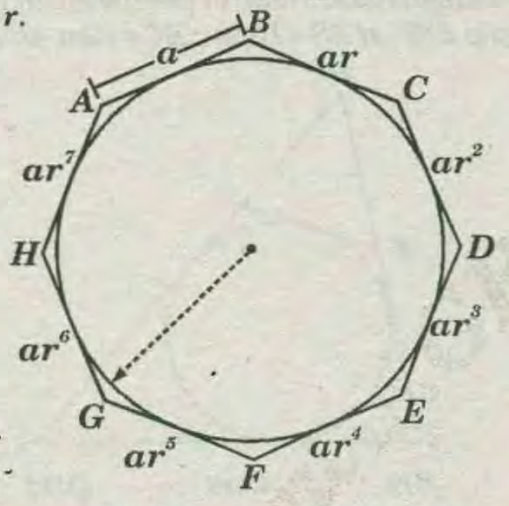
RESOLUCIÓN:

En un cuadrilátero circunscrito o circunscriptible, se cumple el teorema de Pithot , es decir, la suma de longitudes de lados opuestos son iguales.

En un polígono circunscrito o circunscriptible se cumple que la suma de longitudes de lugar par es igual a la suma de longitudes de lugar impar, es considerado para un cuadrilátero, hexágono, octógono, ..., en polígonos cuyo número de lados es par.

Piden r^2+3r.

Las longitudes de los lados del polígono convexo de *8* lados están en progresión geométrica de razón r.



además :

$$AB=\ell_1,\ BC=\ell_2,\ CD=\ell_3,\ DE=\ell_4,$$
$$EF=\ell_5,\ FG=\ell_6,\ GH=\ell_7\ y\ HA=\ell_8,$$

En el actógono circunscrito por el teorema de Pithot general, tenemos:

$$\ell_1+\ell_3+\ell_5+\ell_7=\ell_2+\ell_4+\ell_6+\ell_8$$
$$\Rightarrow a+ar^2+ar^4+ar^6=ar+ar^3+ar^5+ar^7$$

Factorizamos:

$$a(1+r^2+r^4+r^6)=ar(1+r^2+r^4+r^6)$$
$$\Rightarrow r=1$$

Se pide : $1^2+3\times3=4$

RPTA : "B"

PROBLEMA 162 :

Las bases de un tronco cilindro oblicuo cuya distancia entre los centros de dichas bases es de *16m*. La proyección ortogonal de las bases sobre un plano perpendicular a la generatriz es un círculo de radio *2m*. Calcule el volumen en m^3 de dicho tronco de cilindro.

A) 40π B) 48π C) 56π D) 64π E) 72π

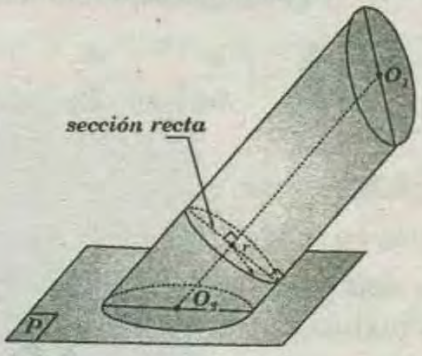
RESOLUCIÓN:

* Piden $\mathbb{V}$

$\mathbb{V}$: Volumen del tronco del cilindro

* Datos : $O_1O_2=16$ $(\overline{O_1O_2}; eje)$

$r=2$: longitud del radio de la sección recta



* Por teorema :

$$\mathbb{V}=\mathbb{A}_{S.R}(O_1O_2).....(I)$$

$\mathbb{A}_{S.R}$ = Área de la sección recta

$$\Rightarrow \mathbb{A}_{S.R}=\pi r^2 \Rightarrow \mathbb{A}_{S.R}=4\pi...(II)$$

* Como : $O_1O_2=16.....(III)$

* Reemplazando *(III)* *(II)* en *(I)* : $\mathbb{V}=64\pi$

RPTA : "D"

PROBLEMA 163:

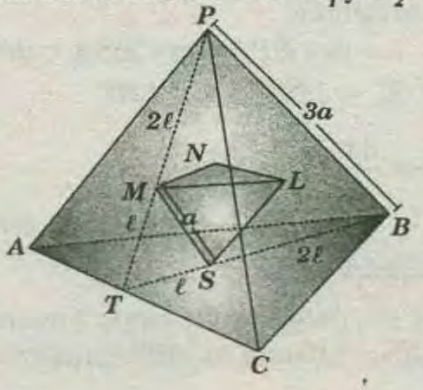
Uniendo todos los centros de las caras de un tetraedro regular se obtiene *otro* tetraedro regular. Si llamamos A_1 al área del primer tetraedro y A_2 al área del segundo tetraedro.

entonces $\frac{A_2}{A_1}$ es igual a :

A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{4}$

RESOLUCIÓN:

* En la figura se muestra a los tetraedros regulares citados cuyas áreas totales son $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$:



* Según el enunciado :

$\mathbb{A}_1$:Área de la superficie del tetraedro regular ***PABC.***

$\mathbb{A}_2$: Área de la superficie del tetraedro regular ***MNLS.***

* Piden : $\frac{\mathbb{A}_2}{\mathbb{A}_1}$

* Como ***M,N,L*** y ***S*** son centros de las caras del tetraedro ***PABC*** entonces los tetraedros ***MNSL*** y ***PABC*** son semejantes.

* Luego las aristas $\overline{MS}$ y $\overline{PB}$ son homólogas.

* Por teorema : $\frac{\mathbb{A}_2}{\mathbb{A}_1}=\left(\frac{a}{3a}\right)^2 \rightarrow \frac{\mathbb{A}_2}{\mathbb{A}_1}=\frac{1}{9}$

RPTA : "C"

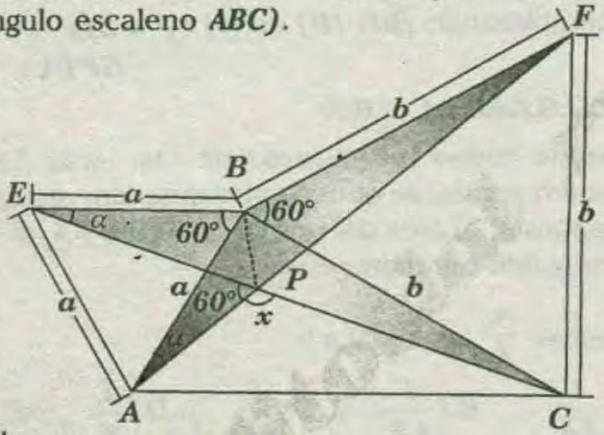
PROBLEMA 164 :

Se construyen exteriormente los triángulos equiláteros ***AEB*** y ***BFC*** sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo escaleno, tal que $\overline{AF}\cap\overline{CE}=\{P\}$.Calcule la $m\sphericalangle APC$.

A) $\frac{\pi}{2}$ ***B)*** $\frac{2\pi}{3}$ ***C)*** $\frac{3\pi}{4}$ ***D)*** $\frac{4\pi}{5}$ ***E)*** $\frac{5\pi}{6}$

RESOLUCIÓN:

* En la siguiente figura se observa a los triángulos equiláteros construidos sobre ***AB*** y ***BC*** (lados del triángulo escaleno ***ABC)***.



* Piden : ***x***

$\triangle EBC\cong\triangle ABF$.....***(caso L.A.L)***

$\Rightarrow m\sphericalangle BEC=m\sphericalangle BAF=\alpha$

$\square$***EAPB*** inscriptible

$\rightarrow m\sphericalangle EPA=m\sphericalangle EBA=60°$

* En ***P*** : $x+60°=180°\Rightarrow x=120°$

* Luego: $x=\frac{2\pi}{3}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 165 :

La suma de las medidas de cinco ángulos internos de un polígono convexo es ***760°***.Calcule la suma de las medidas de los ángulos externos correspondientes a los vértices restantes.

A)190° ***B)200°*** ***C)210°*** ***D)220°*** ***E)230°***

RESOLUCIÓN:

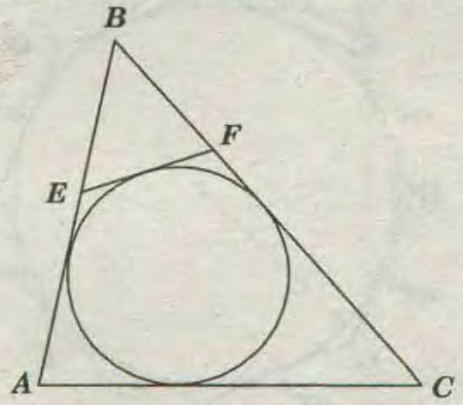
* Consideremos un polígono convexo de "***n***" lados y recordemos que la suma de las medidas de los ángulos externos , uno en cada vértice , es ***360°*** . Tenemos por dato que la suma de las medidas de ***5*** ángulos internos es ***760°*** , a partir de ello se deduce que la suma de las medidas de los ***5*** ángulos exteriores correspondientes es ***140°*** (ojo en un vértice las medidas de un ángulo interior y un ángulo exterior es ***180°***, para el caso de ***5*** vértices dicha suma debe ser ***900°***).

* Finalmente la suma de las medidas de los ángulos externos restantes será: ***360°–140°=220°***

RPTA : "D"

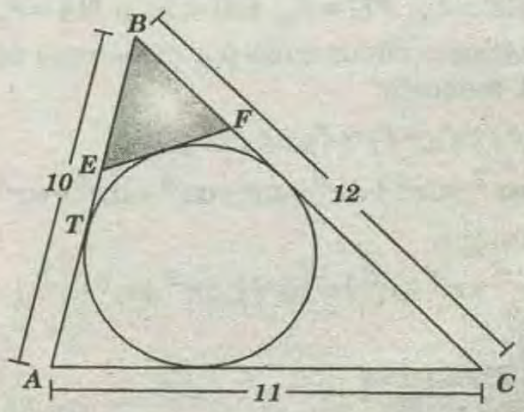
PROBLEMA 166 :

En la figura. $\overline{EF}$ es tangente a la circunferencia inscrita en el triángulo ***ABC***.Halle el perímetro en metros del triángulo ***EBF***; ***si AB=10 m ; BC=12m AC=11 m.***



A)8 ***B)9*** ***C)10*** ***D)11*** ***E)13***

RESOLUCIÓN:



* Piden :

Perímetro de la región triangular ***EBF:x***

* Sea ***T*** punto de tangencia; por teorema

$BT=P_{\triangle EBF}\Rightarrow BT=\frac{x}{2}\Rightarrow x=11$

RPTA : "D"

PROBLEMA 167:

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera *(V)* ó falsa *(F)*:

I) Dos triángulos rectángulos con la misma hipotenusa son congruentes.

II) Dos triángulos rectángulos isósceles con un cateto común son congruentes.

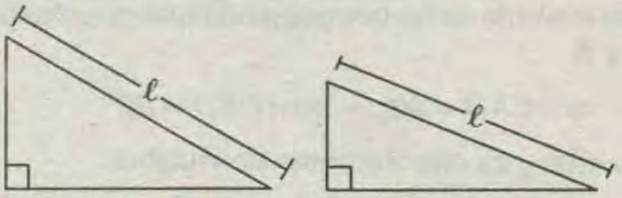
III) Dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo de igual medida son congruentes.

A)FFF B)FVF C)VFFF D)VVF E)FVV

RESOLUCIÓN:

I) FALSA:

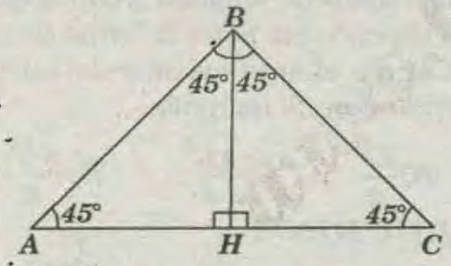
Dos triángulos con la misma hipotenusa ***no*** necesariamente son congruentes, es decir



Pues para ser congruentes dos triángulos rectángulos debe tener por los menos dos elementos congruentes respectivamente, siendo uno de ellos lado de los triángulos. En este caso solo tienen las hipotenusa congruentes.

II)VERDADERA:

Dos triángulos rectángulos isósceles, con un cateto en común, ***son*** triángulos congruentes, es decir :



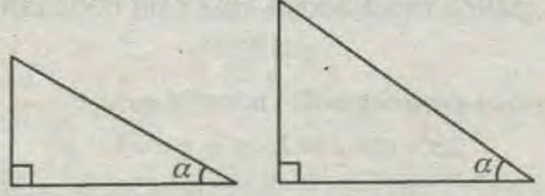
$\overline{BH}$: lado común

Caso ***A.L.A*** :

$\triangle AHB \cong \triangle CHB$

III) FALSA:

Dos triángulos rectángulos, con un ángulo agudo de igual medida, ***no*** necesariamente son congruentes.

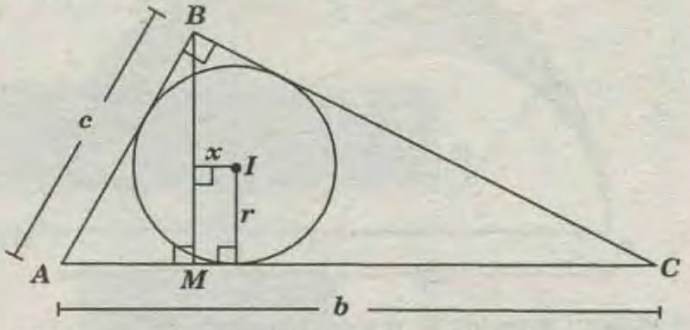


Como sólo hay dos elementos congruentes no se puede establecer la congruencia.

RPTA : "B"

PROBLEMA 168 :

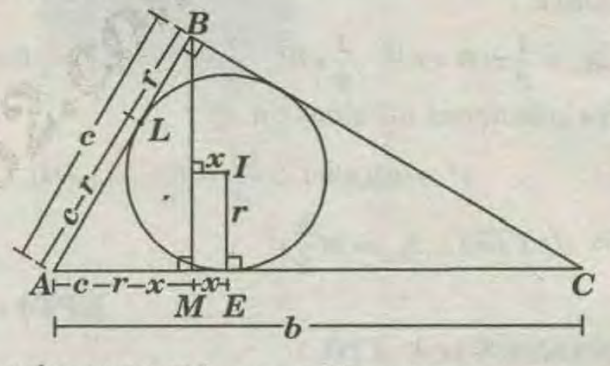
La figura muestra una circunferencia de radio r inscrita en el triángulo rectángulo ABC Si I es el incentro del triángulo ABC, calcule el valor de x (en función de c,b y r).



A) $\frac{b(b+c)}{c}-r$ *B)* $\frac{b(b-c)}{c}+r$ *C)* $\frac{b(b-c)}{c}-r$ *D)* $\frac{c(b-c)}{b}-r$ *E)* $\frac{c(c-b)}{b}+r$

RESOLUCIÓN:

* Se dan como datos b , c y r y se pide hallar x en función de ellos :



* Se sabe que : $BL = r \rightarrow AL = c - r$

* También :

$$AL = AE = c - r \rightarrow AM = c - r - x$$

$\triangle ABC$: Relaciones métricas

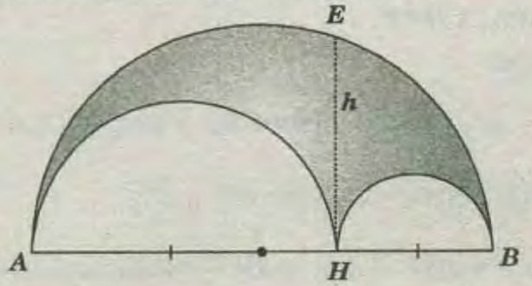
$$\rightarrow c^2 = b(c - r - x)$$

* Despejando : $x = \frac{c(b-c)}{b} - r$

RPTA : "D"

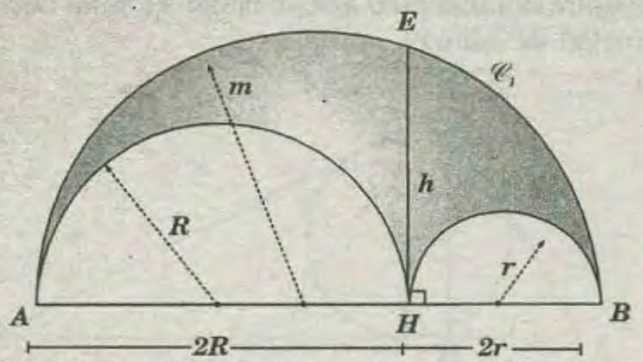
PROBLEMA 169 :

Se tiene tres semicircunferencias como se muestra en la figura. El segmento $\overline{HE}$ es perpendicular al diámetro $\overline{AB}$ y mide h. Determine el área de la región sombreada en términos de h.



A) $\pi\left(\frac{h}{5}\right)^2$ B) $\pi\left(\frac{h}{4}\right)^2$ C) $\pi\left(\frac{h}{3}\right)^2$ D) $\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2$ E) $\pi(h)^2$

RESOLUCION :



* Piden : Área de la región sombreada: $\mathbb{A}_x$

* Observamos que :

$$\mathbb{A}_x = \frac{1}{2}\pi m^2 - \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi r^2$$

* Como : $m=R+r$

$$\rightarrow \mathbb{A}_x = \frac{1}{2}\pi(R+r)^2 - \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow \mathbb{A}_x = \pi Rr \ldots\ldots (I)$$

* Por relaciones métricas en $\mathscr{C}_1$:

$$h^2 = (2R)(2r) \Rightarrow \frac{h^2}{4} = Rr \ldots\ldots\ldots (II)$$

* De *(I)* y *(II)* : $\mathbb{A}_x = \pi(\frac{h}{2})^2$

RPTA : "D"

PROBLEMA 170 :

Sean las rectas L_1 y L_2 que se cruzan en el espacio formando un ángulo recto y $\overline{AB}$ un segmento perpendicular a ambas rectas con $A \in L_1$ y $B \in L_2$. Sobre L_1 se ubica el punto C y sobre L_2 el punto D tal que:

$$AC^2+BD^2+AD^2+BC^2=32$$

Calcule la longitud del segmento $\overline{CD}$.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCION:

*La figura adjunta nos muestra a las dos rectas que se cruzan $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

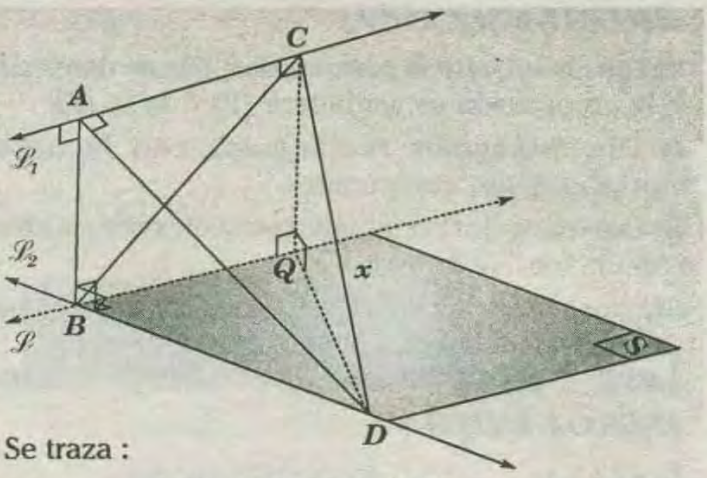
* Piden : $CD=x$

* Datos

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$: rectas alabeadas y perpendiculares.

$\overline{AB}$: distancia entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

$$AC^2+BD^2+AD^2+BC^2=32 \ldots\ldots\ldots (I)$$



* Se traza :

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \quad \overline{CQ} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$$

$$\rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \text{ y } \overline{CQ} \perp \square S$$

Por teorema de las tres perpendiculares, en los puntos A y B

$$m\sphericalangle CAD = 90^\circ \wedge m\sphericalangle CBD = 90^\circ$$

$\triangle CAD$ y $\triangle CBD$: teorema de Pitágoras

$$AC^2 + AD^2 = x^2 \wedge BC^2 + BD^2 = x^2$$

* Sumando las ecuaciones :

$$AC^2+AD^2+BC^2+BD^2=2x^2 \ldots\ldots\ldots (II)$$

* De *(II)* en *(I)* :

$$32=2x^2 \rightarrow x=4 \Rightarrow CD=4$$

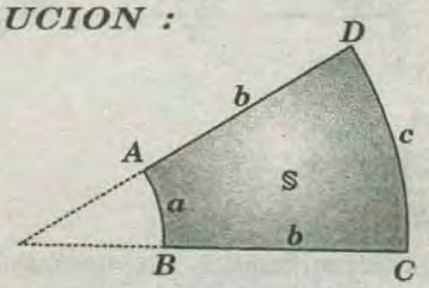
RPTA : "E"

PROBLEMA 171 :

Se tiene una malla de longitud L con la que se desea cercar un terreno que tiene la forma de un trapecio circular. Calcule el área máxima del terreno que se puede cercar con dicha malla.

A) L^2 B) $\frac{L^2}{2}$ C) $\frac{\pi L^2}{4}$ D) $\frac{\pi L^2}{8}$ E) $\frac{L^2}{16}$

RESOLUCION :



* Del gráfico mostrado,el área está dada por:

$$\mathbb{S} = \left(\frac{a+c}{2}\right)b$$

* Como el perímetro del terreno es:

$$2b+a+c=L \Rightarrow a+c=L-2b$$

* Reemplazando en *(I)* : $\mathbb{S} = \frac{(L-2b)}{2}b$

* Efectuando y completando el cuadrado para

maximizar: $\mathbb{S}=\frac{L^2}{16}-\left(b-\frac{L}{4}\right)^2$

* Para que $\mathbb{S}$ sea máximo $\left(b-\frac{L}{4}\right)^2$ debe ser mínimo es decir, igual a cero.

* Luego : $\mathbb{S}_{max}=\frac{L^2}{16}$

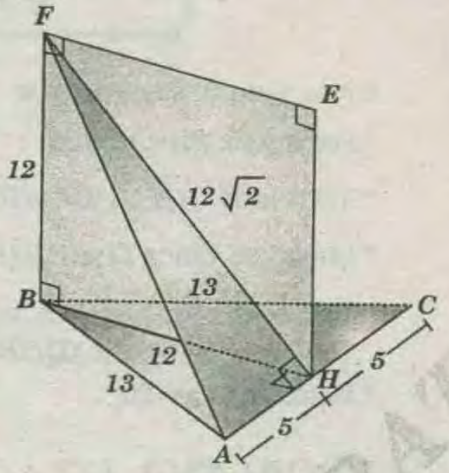
RPTA : "E"

PROBLEMA 172 :

En un triángulo isósceles ABC $(AB=BC=13\ m)$, $AC=10\ m$, se traza la altura $\overline{BH}$ y luego se construye el cuadrado $BHEF$ perpendicular al plano del triángulo. Calcule el área del triángulo FHA.

A) $20\sqrt{2}$ B) $25\sqrt{2}$ C) $30\sqrt{2}$ D) $35\sqrt{2}$ E) $40\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN:



* Nos piden: $\mathbb{A}_{\Delta FHA}$

ΔABC: $BH=12$, $FH=12\sqrt{2}$

* Luego por teorema de las tres perpendiculares tenemos:

$m\sphericalangle AHF=90°$

$$\mathbb{A}_{\Delta FHA}=\frac{(5)12\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \mathbb{A}_{\Delta FHA}=30\sqrt{2}$$

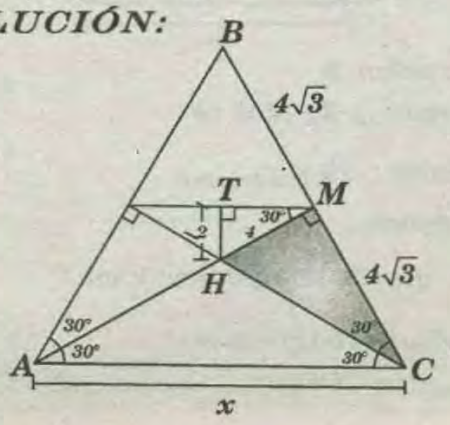
RPTA : "C"

PROBLEMA 173 :

Se tiene un triángulo equilátero , donde la distancia del ortocentro a la recta que une los puntos medios de dos lados del triángulo es 2, calcule la longitud del lado del triángulo.

A) 2 B) $2\sqrt{3}$ C) 4 D) $4\sqrt{3}$ E) $8\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:



* Nos piden: $AC=x$

* Por dato: ABC es equilátero de ortocentro H

* Entonces los $\triangle HTM$ y $\triangle HMC$ son: notables de $30°$ y $60°$

$$\Rightarrow HM=4\ \wedge\ MC=4\sqrt{3}$$

* Dado que: $BM=MC=4\sqrt{3}$

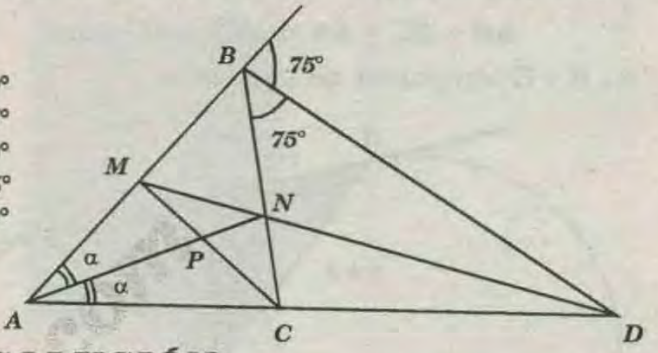
$$\Rightarrow BC=AC=x\Rightarrow x=8\sqrt{3}$$

RPTA : "E"

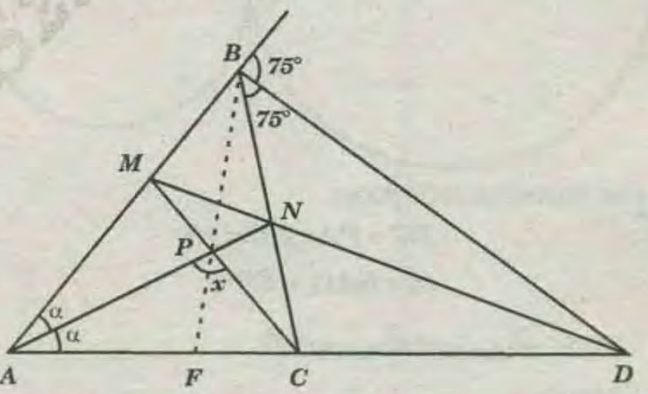
PROBLEMA 174 :

En la figura mostrada , calcule la medida del ángulo APC.

A) 100°
B) 105°
C) 110°
D) 115°
E) 120°



RESOLUCIÓN:



* Nos piden: $m\sphericalangle APC=x$.

* Se traza: $\overline{BF}$

* En el ΔABC: A, F, C y D forman una cuaterna armónica.

* Dado que $\overline{BD}$ es bisectriz exterior del ΔABC por tanto , $\overline{BF}$ es la bisectriz interior.

* Luego en el ΔABC: P es incentro.

* Finalmente por teorema resulta:

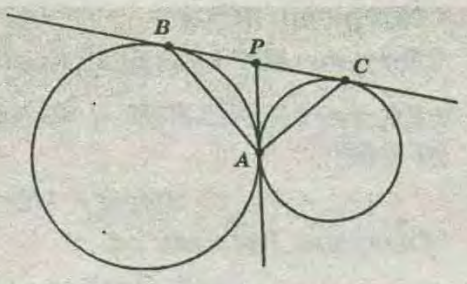
$$x=90+\frac{m\sphericalangle ABC}{2}\Rightarrow x=105°$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 175 :

En la figura A , B y C son puntos de tangencia. Sea P un punto del segmento $\overline{BC}$ tal que $\overline{PA}$ es tangente común a las circunferencias. Si $AP=10\ m$ y $AB-AC=4\ m$, calcule el área del triángulo APB.

A) $48m^2$
B) $49m^2$
C) $22\sqrt{10}m^2$
D) $45\sqrt{2}m^2$
E) $25\sqrt{5}m^2$



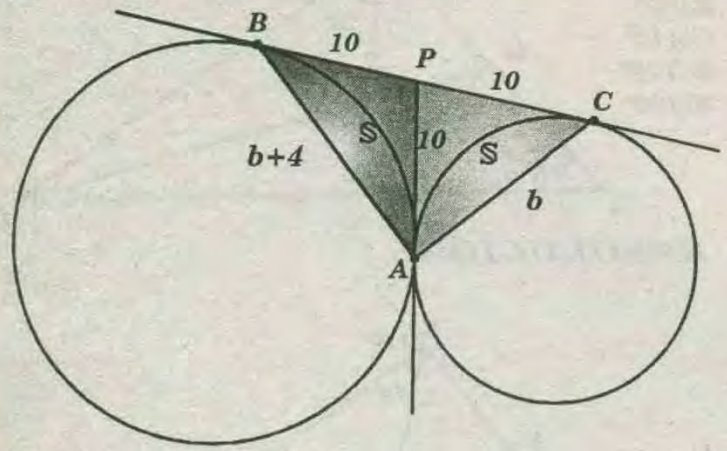
RESOLUCIÓN:

* Nos piden: $\mathbb{A}_{\triangle APB}=\mathbb{S}$

* Datos: $AP = 10m$

$AB - AC = 4m \Rightarrow AB = AC + 4m$

A, B y C son puntos de tangencia.



* Por teorema tenemos:

$BP=PA=PC=10$

$m\sphericalangle BAC = 90°$

* Luego: $\mathbb{A}_{\triangle APB}=\mathbb{A}_{\triangle APC}=\mathbb{S}$

* Entonces:

$$2\mathbb{S}=\frac{(b+4)b}{2} \Rightarrow \mathbb{S}=\frac{(b+4)b}{4} \quad \text{.....(I)}$$

* En el $\triangle BAC$ tenemos:

$(b+4)^2+b^2=(20)^2$

$\Rightarrow b=12$ .....(II)

* Finalmente (II) en (I) resulta:

$\mathbb{S} = 48m^2$

RPTA : "A"

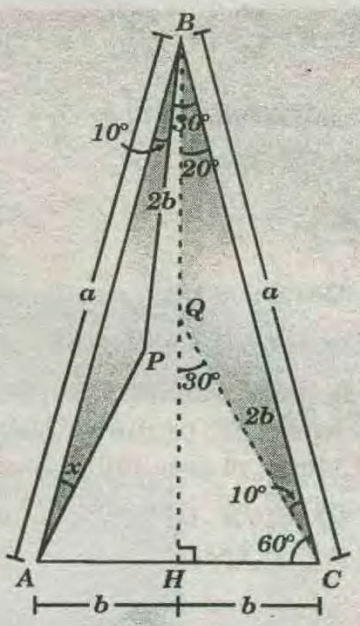
PROBLEMA 176 :

En el interior de un triángulo ABC $(AB=BC)$, se toma el punto "P" tal que $PB=AC$, $m\angle PBA=10°$ y $m\angle PBC=30°$

Halle $m\sphericalangle PAB$.

A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 30°

RESOLUCIÓN:



* Nos piden: $m\angle PAB = x$

* Por datos: $PB=AC=2b$; $AB=BC=a$

* Trazamos $\overline{BH} \Rightarrow AH=HC=b$

* Luego se ubica Q en $\overline{BH}$ tal que $QC=2b$

* Entonces el $\triangle QHC$ es: notable de 30° y 60°

$\triangle PBA \cong \triangle QCB(L.A.L.)$

* Entonces : $x=20°$

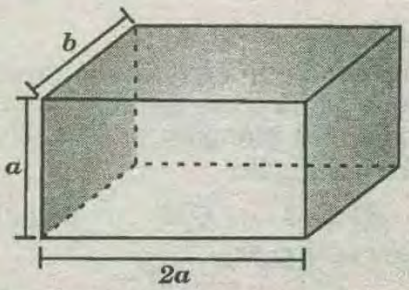
RPTA : "C"

PROBLEMA 177 :

Las tres dimensiones de un paralelepípedo rectángulo suman $14\,u$. Si una de ellas es el doble de otra y el área total del prisma es máxima determine la tercera dimensión de este sólido.

A) 3 u B) 4 u C) 5u D) 6 u E) 7u

RESOLUCIÓN:



* Nos piden: b

* Por dato : $3a+b= 14$

* Además : $\mathbb{A}_{ST(máxima)}$

* De donde :

$\mathbb{A}_{ST}$: área de la superficie total

$\mathbb{A}_{ST}=2(ab+(2a)b+2a(a))$

$\Rightarrow \mathbb{A}_{ST}=2a(3b+2a)$ .....(I)

* Del dato: $3a+b=14$

$\Rightarrow 9a+3b=42$

$\Rightarrow 3b=42-9a$ ..... *(II)*

* Reemplazando *(II)* en *(I)* se tiene:

$\mathbb{A}_{ST}=2a(42-9a+2a)$

$\Rightarrow \mathbb{A}_{ST}=14a(6-a)=14(6a-a^2)$

$\Rightarrow \mathbb{A}_{ST}=14\left[9-(a^2-6a+9)\right]=14\left[9-(a-3)^2\right]$

$\Rightarrow \mathbb{A}_{ST(máxima)}=14[9-\underbrace{(a-3)^2}_{mínimo}]$

* Luego: $(a-3)^2 \geq 0$ para que sea mínimo

$\Rightarrow (a-3)^2=0 \Rightarrow a=3$

* Finalmente del dato: $3(3)+b=14 \Rightarrow b=5$

RPTA : "C"

PROBLEMA 178 :

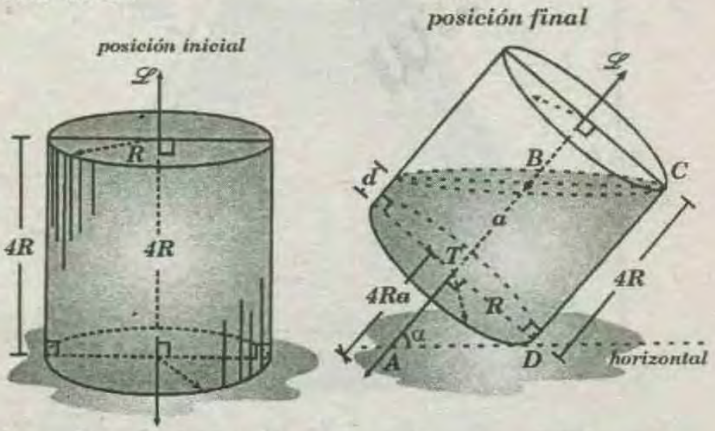
Se tiene un vaso en forma de cilindro recto , que tiene como altura el doble del diámetro de la base. Si el vaso inicialmente está lleno de agua , y comienza a inclinarse hasta derramar la mitad de su contenido , formando un ángulo α entre el eje del cilindro y la horizontal , entonces el valor de $tan(\alpha)$ es (aproximadamente):

A) 0,44 B) 0,46 C) 0,48 D) 0,50 E) 0,52

RESOLUCIÓN:

* La figura muestra al cilindro lleno de agua en su posición original y luego en la posición que adopta cuando se ha derramado la mitad del contenido.

El sólido que se forma con el agua que queda en el recipiente es un tronco de cilindro recto y tiene como volumen la mitad del volumen del cilindro cuando está lleno.-



* Nos piden. $tan\alpha$

* Por dato: $\mathbb{V}_{final}=\dfrac{\mathbb{V}_{inicial}}{2}$

* Por teorema: $\mathbb{V}=(\mathbb{A}_{SR})(O_1O_2)$

* De donde:

$\mathbb{V}$: volumen de un cilindro o tronco de cilindro

$\mathbb{V}_{SR}$:área de la sección recta

O_1O_2: distancia entre los centros de las bases

* Se observa que *ABCD* es paralelogramo.

$$tan\alpha=\frac{R}{4R-a}$$

* Luego del dato:

$$(\pi R^2)(TB)=\frac{(\pi R^2)(4R)}{2} \Rightarrow TB=a=2R$$

* Entonces Reemplazando resulta: $tan\alpha=0,5$

En el gráfico se demuestra que $d=0$.

RPTA :"D"

PROBLEMA 179 :

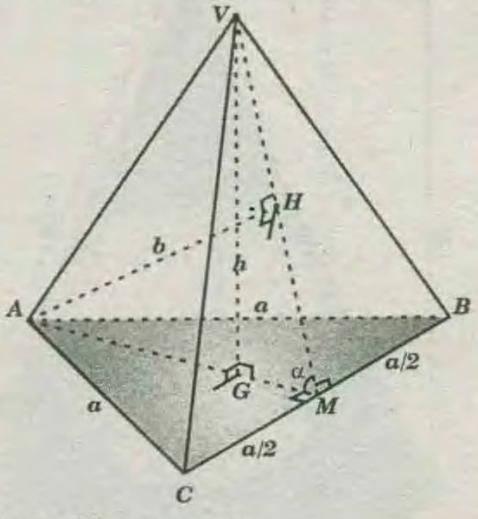
En una pirámide triangular regular , la arista de la base mide a unidades y la distancia de un vértice de la base a la cara lateral opuesta mide b unidades. Calcule el volumen de la pirámide.

A) $\dfrac{a^3b}{\sqrt{4b^2-a^2}}$ **B)** $\dfrac{a^3b}{9\sqrt{3a^2-4b^2}}$ **C)** $\dfrac{a^3b}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}$

D) $\dfrac{a^2b^2}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}$ **E)** $\dfrac{ab^3}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}$

RESOLUCIÓN:

* Para calcular el volumen pedido se requiere calcular $CG=h$ (altura), ya que en esta pirámide regular la base es una región triangular equilátera.



* Nos diden: $\mathbb{V}_{V-ABC}=x$

* Por dato: *V–ABC* Pirámide triangular regular

$$x=\frac{1}{3}\mathbb{A}base(h) \Rightarrow x=\frac{1}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)h$$

* En el $\triangle ABC$

$h=GM(tan\alpha)$ .....*(II)*

$$GM=\frac{1}{3}(AM)=\frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow GM=\frac{a\sqrt{3}}{2} \text{.....(III)}$$

* Luego en el $\triangle AHM$: $tan\alpha=\dfrac{b}{HM}$

* Como:

$$HM=\sqrt{(AM)^2-b^2} \Rightarrow HM=\sqrt{\frac{3a^2-4b^2}{4}}$$

$$\Rightarrow Tan\alpha=\frac{2b}{\sqrt{3a^2-4b^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (IV)$$

* Reemplazando *III* y *IV* en *(II)*:

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{6}\left(\frac{2b}{\sqrt{3a^2-4b^2}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (V)$$

* Luego *V* en *I*:

$$x=\frac{1}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)\frac{a\sqrt{3}}{6}\left(\frac{2b}{\sqrt{3a^2-4b^2}}\right) \Rightarrow x=\frac{a^3b}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}$$

RPTA : "C"

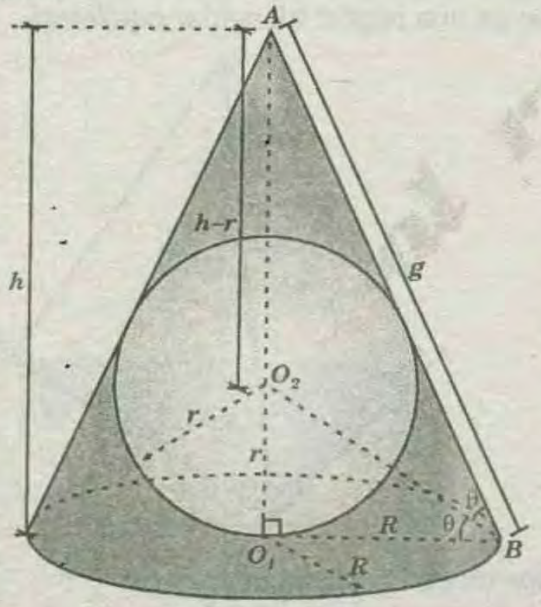
PROBLEMA 180 :

En un cono circular recto está inscrita una esfera. La relación entre los volúmenes del cono y de la esfera es igual a dos. Halle la relación entre el área de la superficie total del cono y el área de la superficie esférica.

A)2: 1 B)3: 2 C)5: 2 D)3: 1 E)5: 3

RESOLUCIÓN:

* En la figura se muestra al cono circular recto y a la esfera inscrita.



* Nos piden: $\dfrac{\mathbb{A}_{ST(cono)}}{\mathbb{A}_{SE}}=k$

$\mathbb{A}_{ST(cono)}$: área de la superficie total del cono.

$\mathbb{A}_{SE}$: área de la superficie esférica.

* Por dato: $\dfrac{\mathbb{A}_{(cono)}}{\mathbb{A}_{esfera}}=2$

* Se sabe que:

$$\mathbb{A}_{ST(cono)}=\pi R(g+R) \Rightarrow \mathbb{A}_{SE}=4\pi r^2$$

$$\Rightarrow k=\frac{\pi R(g+R)}{4\pi r^2}=\frac{R(g+R)}{4r^2}$$

* Luego del dato tenemos:

$$\mathbb{V}_{cono}=\frac{1}{3}\pi R^2 \times h \Rightarrow \mathbb{V}_{esfera}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 h}{\frac{4}{3}\pi r^3}=2 \Rightarrow \frac{R^2h}{4r^3}=2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Por Teorema de la bisectríz en el $\triangle AO_1B$:

$$\frac{R}{g}=\frac{r}{h-r} \Rightarrow R(h-r)=gr$$

$$\Rightarrow Rh-Rr=gr \Rightarrow Rh=r(g+R)$$

* Finalmenete en la ecuación *(I)* :

$$\frac{RRh}{4r^3}=\frac{Rr(g+R)}{4r^3}=2 \Rightarrow \frac{Rr(g+R)}{4r^2}=2 \Rightarrow k=2$$

RPTA : "A"

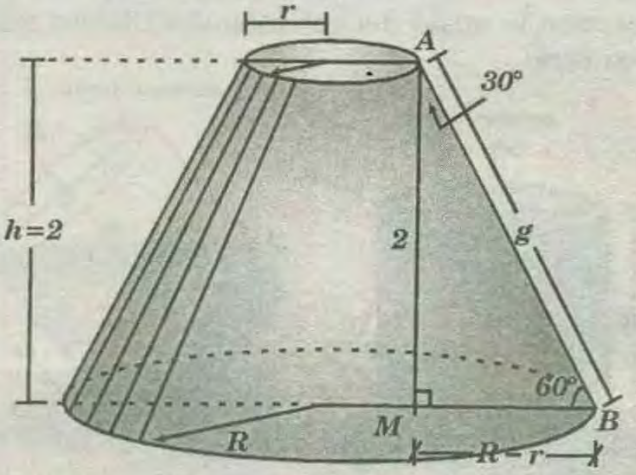
PROBLEMA 181 :

La suma de los radios de las bases de un tronco de cono de revolución es *2* , la altura *2* y la generatriz forma un ángulo de *60°* con la base mayor. Calcule el área total del tronco.

A) $8\pi(1+\sqrt{3})$ *B)* $\dfrac{8}{3}\pi(\sqrt{3}+1)$ *C)* $\dfrac{8}{\sqrt{3}}\pi(\sqrt{3}+1)$

D) $\dfrac{8}{3}\pi(\sqrt{3}-1)$ *E)* $\dfrac{8}{\sqrt{3}}\pi(\sqrt{3}-1)$

RESOLUCIÓN:



* Nos piden: $\mathbb{A}_{ST}$ Área de la superficie total del tronco de cono.

$$\Rightarrow \mathbb{A}_{ST}=\pi\left(R^2+r^2\right)+\pi g(R+r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Si:

$$R+r=2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* Luego el $\triangle AMB$ es notable *(30° y 60°)*

$R-r=2/\sqrt{3}$ .....(III)

$g=4/\sqrt{3}$ .....(IV)

* De (II) y (III) resulta:

$R^2+r^2=8/3$ .....(V)

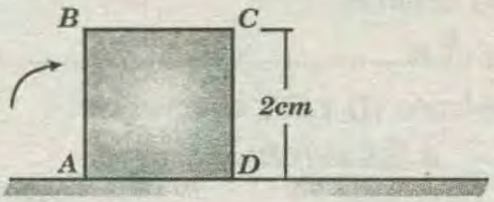
* Finalmente (II), (IV) y (V) en (I) se obtiene:

$$A_{ST}=\frac{8\pi}{3}+\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\times 2 \Rightarrow A_{ST}=\frac{8\pi}{3}(\sqrt{3}+1)$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 182 :

En la figura mostrada el cuadrado de lado **2cm** rueda sin resbalar hasta que el punto **A** vuelve a tocar el piso. Calcule la longitud **(en cm)** recorrida por el punto **A**.

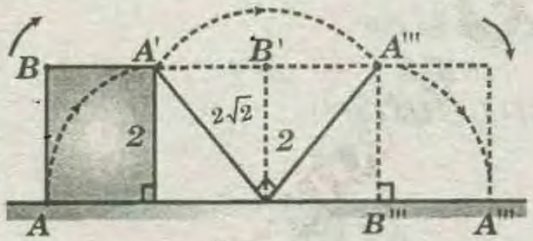


A) $(1+\sqrt{2})\frac{\pi}{2}$ B) $(1+\sqrt{2})\pi$ C) $\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$

D) $(2+\sqrt{2})\pi$ E) $(2+2\sqrt{2})\pi$

RESOLUCIÓN:

* Si queremos que el punto **A** vuelva a tocar el piso, este punto describe longitudes de arco como muestra el gráfico.



* Entonces, la longitud recorrida será:

$$L_{\overset{\frown}{AA'''}}=L_{\overset{\frown}{AA'}}+L_{\overset{\frown}{A'A''}}+L_{\overset{\frown}{A''A'''}}$$

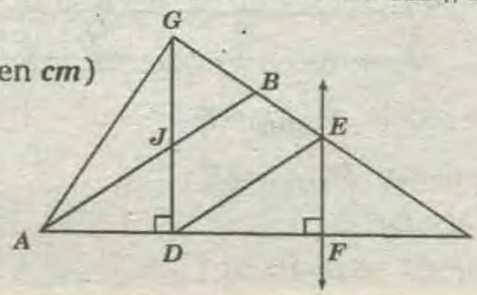
$$=\frac{\pi}{2}(2)+\frac{\pi}{2}(2\sqrt{2})+\frac{\pi}{2}(2) \Rightarrow L_{\overset{\frown}{AA'''}}=(2+\sqrt{2})\pi$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 183 :

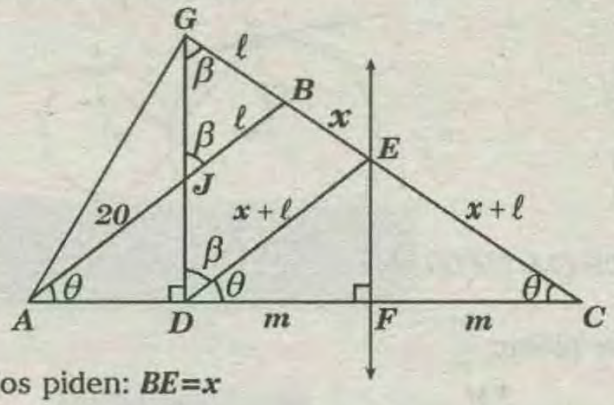
En la figura. $\overleftrightarrow{EF}$ es la mediatríz de $\overline{DC}$, $\overline{AB}//\overline{DE}$ y $AJ=20\ cm$.

Calcule BE (en cm)



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

RESOLUCIÓN:



* Nos piden: $BE=x$

* Por dato: $\overleftrightarrow{EF}$ Mediatriz de $\overline{DC}$

* En el $\triangle CDG$: $GE=EC=x+\ell$

DE: Mediana relativa a la hipotenusa del $\triangle CDG$

$\Rightarrow GE=EC=DE=x+\ell$

* El $\triangle GED$ es: isósceles dado que $\overline{AB}//\overline{DE}$

* El $\triangle JBG$ es: isósceles $BG=BJ=\ell$

* El $\triangle ABC$ es: isósceles $AB=BC$

$\Rightarrow 20+\ell=x+x+\ell \Rightarrow 20=2x \Rightarrow x=10$

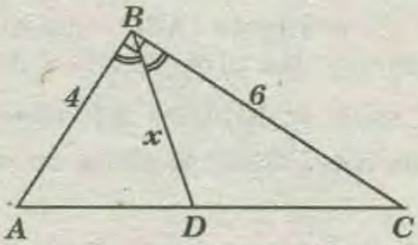
RPTA : "E"

PROBLEMA 184 :

En el triángulo ABC, recto en B, $\overline{BD}$ es bisectriz interior. Si sabemos que $BC=6$ y $AB=4$, entonces la longitud $\overline{BD}$ es:

A) $2\sqrt{2}$ B) $\frac{12}{5}\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $\frac{15}{4}\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN:



* Nos piden: x

* Aplicando el teorema de la bisectriz interior (forma trigonométrica), tenemos:

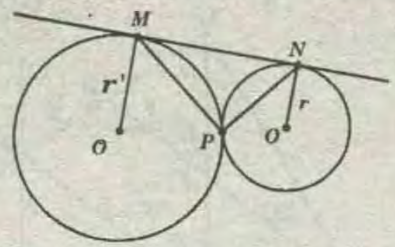
$$x=\frac{2(4)(6)}{4+6}\times \cos\left(\frac{90^\circ}{2}\right) \Rightarrow x=\frac{12\sqrt{2}}{5}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 185 :

En la figura mostrada ; M, N y P son puntos de tangencia ; O y O' centros de las circunferencias.

Si $PM=2PN$, calcule $\frac{r'}{r}$.

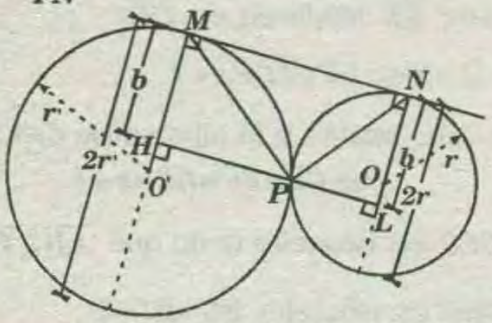


A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

RESOLUCIÓN:

* Nos piden: $\frac{r'}{r}$

* Se sabe: $\frac{PM}{PN}=2$ .....(I)



* Se observa del gráfico que: $MH=NL=b$

* Aplicando relaciones métricas tenemos:

$(MP)^2=2r'\times b$ .....(II)

$(NP)^2=2r\times b$ .....(III)

* Luego de (II) y (III) se tiene:

$$\left(\frac{MP}{NP}\right)^2=\frac{r'}{r} \quad \text{.....(IV)}$$

* Entonces (I) en (IV) resulta: $2^2=\frac{r'}{r} \Rightarrow \frac{r'}{r}=4$

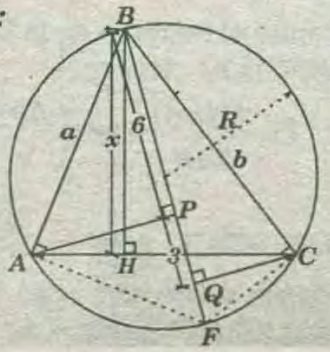
RPTA : "C"

PROBLEMA 186 :

Se tiene el triángulo ABC inscrito en una circunferencia, las proyecciones de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ sobre el diámetro $\overline{BF}$ miden $6m$ y $9m$ respectivamente. Calcule la altura en m relativa al lado $\overline{AC}$.

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $3\sqrt{6}$ D) $4\sqrt{6}$ E) $5\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN:



* Nos piden: $BH=x$

* Por datos:

$\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ son proyecciones ortogonales de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ sobre el diámetro $\overline{BF}$.

* Usando el teorema del triángulo inscrito $\triangle ABC$, resulta:

$ab=x(2R)$ .....(I)

* Aplicando relaciones métricas en el $\triangle BAF$ y en el $\triangle BCF$ se tiene:

$$\left.\begin{aligned} a^2&=(2R)\times 6\\ b^2&=(2R)\times 9\end{aligned}\right\} \text{.....(II)}$$

* De (II) se tiene:

$ab=6\sqrt{6}R$.....(II)

* Resolviendo (I) y (II) obtenemos:

$6\sqrt{6}R=x(2R) \Rightarrow x=3\sqrt{6}$

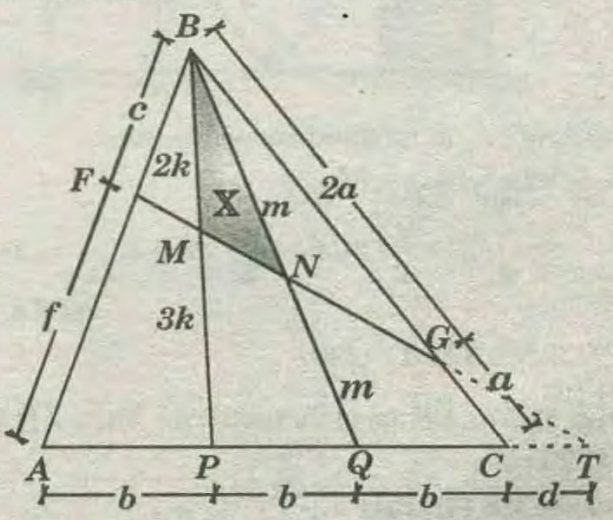
RPTA : "C"

PROBLEMA 187 :

En un triángulo ABC se trazan las cevianas $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ tal que $AP=PQ=QC$. Sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos F y G respectivamente tal que $AF=2FB$ y $BG=2GC$. Halle el área de la región triangular determinada por $\overline{FG}\times\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ si el área (ΔABC) es $45\ cm^2$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:



* Nos piden: $A_{\Delta BMN}=X$

* Por datos: $A_{\Delta ABC}=45°$

$AP=PQ=QC$

$AF=2(FB)$ $BG=2(GC)$

* Por teorema de Menelao en el $\triangle ABC$:

$$(2c)(2a)=d=ca(3b+d) \Rightarrow d=b$$

* Por teorema de Menelao en el $\triangle ABP$:

$$(2c)BM(3b)=c(MP)(4b) \Rightarrow \frac{BM}{MP}=\frac{2}{3}$$

* Por teorema de Menelao en el $\triangle ABQ$:

$$(2c)BN(2b)=c(NQ)(4b) \Rightarrow \frac{BN}{NQ}-1$$

* Luego por relación de áreas tenemos:

$$\frac{\mathbb{X}}{\mathbb{A}_{\triangle BPQ}}=\frac{2k(m)}{5k(2m)} \Rightarrow \mathbb{X}=\frac{1}{5}\mathbb{A}_{\triangle BPQ}$$

* Como: $\mathbb{A}_{\triangle BPQ}=\frac{1}{3}\mathbb{A}_{\triangle ABC}$

* Entonces : $\mathbb{A}_{\triangle BPQ}=15 \Rightarrow x=\frac{1}{5}(15) \Rightarrow x=3$

RPTA : "C"

PROBLEMA 188 :

En un plano H , está contenido un ángulo BAC de $60°$. Un punto Q que no pertenece al plano , dista 25 cm del vértice A ,7 cm del lado $\overline{AB}$ y 20 cm del lado $\overline{AC}$. Determine la distancia , en cm , del punto Q al plano H .

$A)\sqrt{29}$ $B)\sqrt{31}$ $C)\sqrt{33}$ $D)\sqrt{35}$ $E)\sqrt{37}$

RESOLUCIÓN:

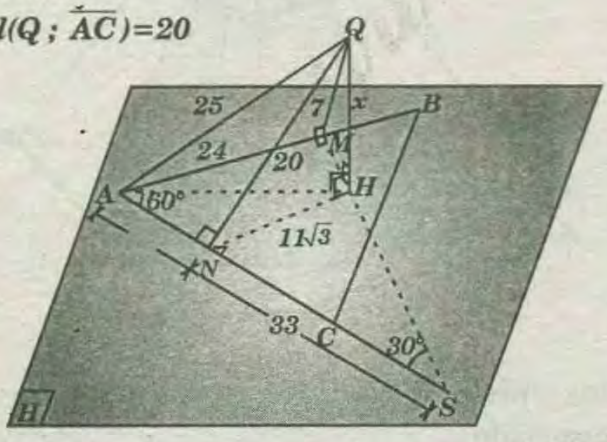
* Nos piden: $d(Q\,;\square H)=x$

* Por datos: $\triangle ABC \subset \square H (m\sphericalangle BAC=60°)$

$d(Q\,;A)=25$

$d(Q\,;\overline{AB})=7$

$d(Q\,;\overline{AC})=20$



$\triangle AHQ$

$x^2=(25)^2+(AH)^2$ .....(I)

* Por el Teorema de las tres perpendiculares:

$\Rightarrow \overline{HN} \perp \overline{AC}$ y $\overline{HM} \perp \overline{AB}$

* Entonces:

$\triangle ANQ(37° \text{ y } 53°)$, $\triangle AMQ(16° \text{ y } 74°)$ y $\triangle AMS(30° \text{ y } 60°)$

$\Rightarrow AM=24, AN=15, AS=48, NS=33$ y $NH=11\sqrt{3}$

* Luego en el $\triangle ANH$, se tiene:

$(AH)^2=(15)^2+(11\sqrt{3})^2$

$\Rightarrow (AH)^2=588$ .....(II)

*Finalmente resolviendo (I) y (II) resulta que:

$$x=\sqrt{37}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 189 :

En un dodecaedro , en cada cara levantamos una pirámide ; formándose un nuevo poliedro. Para este nuevo poliedro tenemos :

V' = número de vértices , A' = número de aristas, F' = número de caras ; entonces $V'-A'+F'$ es igual a:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

*Un dodecaedro regular tiene 12 caras pentagonales, 20 vértices y 30 aristas. Cuando sobre sus caras se construyen 12 pirámides de bases pentagonales.

* De acuerdos a los datos: V', A' y F' es el número de vértices , aristas y caras del nuevo poliedro construido. En dicho poliedro , por el teorema de Euler:

* Por lo tanto: $V'+F'=A'+2 \Rightarrow V'-A'+F'=2$

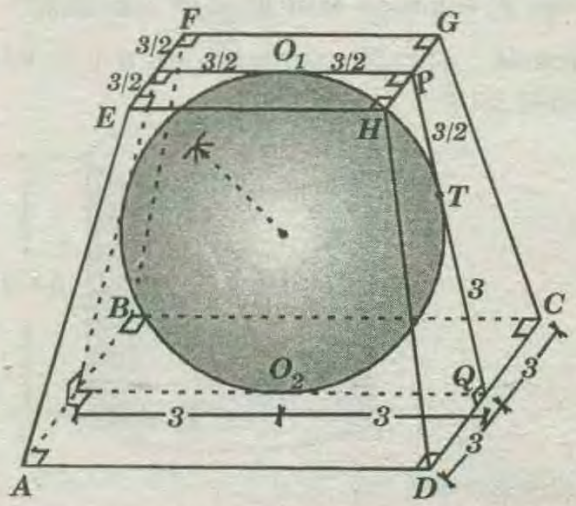
RPTA : "B"

PROBLEMA 190 :

Halle el área lateral , en m^2, de un tronco de pirámide cuadrangular regular circunscrita a una esfera , siendo las áreas de las bases del tronco 9 y 36.

A) 78 B) 79 C) 80 D) 81 E) 82

RESOLUCIÓN:



* Nos piden: $\mathbb{A}_{SL}$ Área de la superficie lateral del tronco piramidal cuadrangular regular.

* Dado que , el tronco de pirámide cuadrangular es regular y está circunscrita a una esfera , entonces , O_1 y O_2 son centros de las bases.

* Luego , se deduce que: $EF=3$ y $AB=6$

$\overline{PQ}$ es tangente a la esfera en T.

$$\Rightarrow PT=O_1P=3/2 \text{ y } TQ=QO_2=3$$

* Entonces , $\mathbb{A}_{SL}$: Suma de las áreas de todos los conos laterales.

$$\mathbb{A}_{SL}=4(\mathbb{A}_{\square HGCD})=4\times\frac{(3+6)}{2}\times\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}_{SL}=81$$

RPTA : "D"

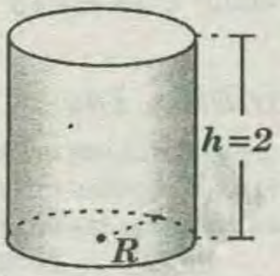
PROBLEMA 191 :

Al aumentar en **6** unidades el radio de un cilindro circular recto , su volumen se aumenta en **"x"** unidades cúbicas . Si la altura del cilindro original se aumenta en **6** unidades el volumen queda aumentado igualmente en **"x"** unidades cúbicas, Si la altura original es **2** unidades entonces el radio original es : (en unidades)

A) 4 B) 2p C) 6 D) 6p E) 8

RESOLUCIÓN:

* Sea R la medida del radio original del cilindro circular recto que es la incógnita cuyo valor se solicita y h Y $\mathbb{V}$ la altura y volumen originales respectivamente.

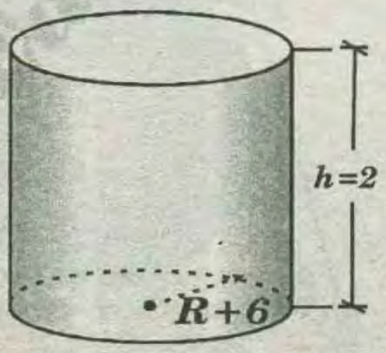


* Nos piden: R

* Por dato: $h=2$

* Luego el volumen será: $\mathbb{V}=\pi R^2\times 2=2\pi R^2$

* Además , el radio aumenta en **6** y el volumen aumenta en x.

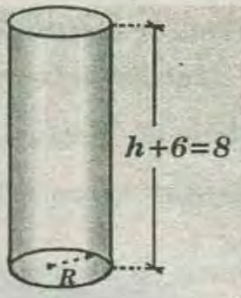


*El volumen: $\mathbb{V}'$

$$\mathbb{V}'=\mathbb{V}+x\Rightarrow\pi(R+6)^2\times 2=2\pi R^2+x \quad .....(I)$$

*La altura aumenta en **6** y el volumen aumenta en x.

* El volumen: $\mathbb{V}''$



$\mathbb{V}''=\mathbb{V}+x$

$\Rightarrow \pi R^2\times 8=2\pi R^2+x$

$\Rightarrow x=6\pi R^2$ .....(II)

* Finalmente (II) en (I) resulta:

$$2\pi(R+6)^2=2\pi R^2+6\pi R^2=8\pi R^2$$

$$\Rightarrow (R+6)^2=4R^2\Rightarrow R=6$$

RPTA : "C"

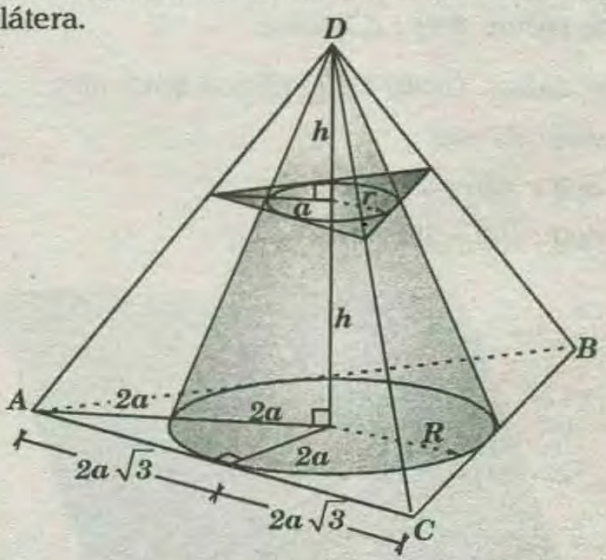
PROBLEMA 192 :

En un tetraedro regular cuya arista mide $3\sqrt{6}\ u$. está inscrito un cono de revolución (su base está inscrita en una cara del tetraedro y su vértice es el vértice opuesto). Si un plano corta al cono paralelamente a su base tal que el volumen del cono pequeño que resulta es la octava parte del cono grande. Calcule el volumen del tronco de cono resultante (aproximadamente)

A)$7,89\pi\ u^3$ B) $7,87\pi\ u^3$ C) $7,85\pi\ u^3$ D) $7,84\pi\ u^3$ E) $7,82\pi\ u^3$

RESOLUCIÓN:

* La generatriz del cono de revolución inscrito con el tetraedro y es a la vez altura de una cara triangular equilátera.



* Nos piden: $\mathbb{V}_x$ volumen del tronco de cono determinado

* Según el dato: $D-ABC$ es regular $(AC=3\sqrt{6})$

* Entonces:

$\mathbb{V}$: Volumen del cono pequeño

$8\mathbb{V}$: Volumen del cono mayor

* Por relación de semejanza de conos , tenemos:

$$\frac{V}{8V}=\left(\frac{r}{R}\right)^3 \Rightarrow R=2r$$

* En $\overline{AC}$: $3\sqrt{6}=4a\sqrt{3} \Rightarrow a=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

* Entonces: $r=\frac{3\sqrt{2}}{4}$; $R=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

* Luego: $2h=\frac{(3\sqrt{6})\sqrt{6}}{3} \Rightarrow h=3$

* Aplicando la fórmula conocida para el volumen de un tronco de cono:

$$V_x=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)$$

$$\Rightarrow V_x=\frac{1}{3}\pi(3)\left(\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow V_x=\frac{63\pi}{8} \Rightarrow V_x=7{,}87\pi\ u^3$$

RPTA : "B"

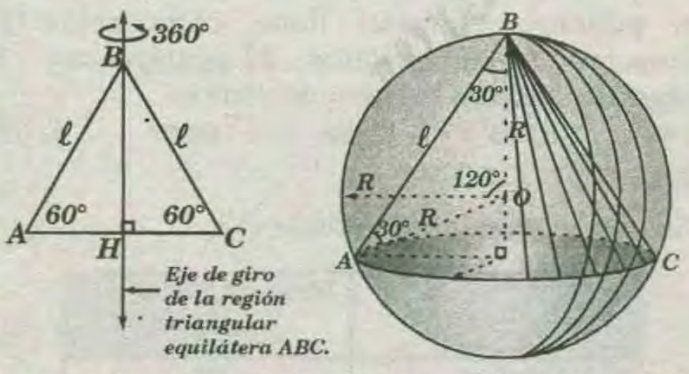
PROBLEMA 193 :

Se obtiene un cono girando un triángulo equilátero de lado ℓ alrededor de una de sus alturas. El volumen de la esfera circunscrita al cono es.

A) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\ell^3$ B) $\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}\ell^3$ C) $\frac{\pi\ell^3}{\sqrt{3}}$ D) $\frac{3\pi}{2\sqrt{3}}\ell^3$ E) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ell^3$

RESOLUCIÓN:

* La figura muestra una vista frontal del cono generado por la rotación del $\triangle ABC$ alrededor del eje que contiene a su altura y la correpondiente esfera circunscrita.



* Nos piden: V_x volumen de la esfera circunscrita al cono de revolución generado.

* Del gráfico se obtiene:

$$V_x=\frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{.....(I)}$$

*$\triangle AOB$

$$R=\frac{\ell}{\sqrt{3}} \quad \text{.....(II)}$$

* Resolviendo *(I)* y *(II)* resulta:

$$V_x=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right)^3 \Rightarrow V_x=\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}\ell^3$$

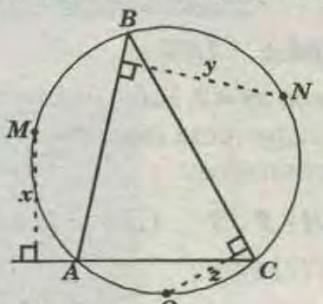
RPTA : "B"

PROBLEMA 194 :

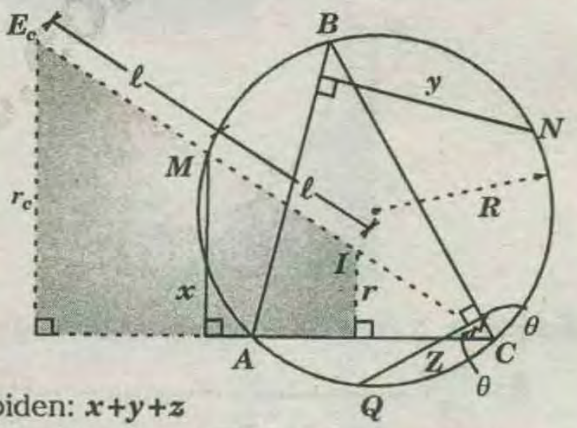
En la figura , ABC es un triángulo , su circunradio mide $R = 6\ m$ y su inradio $r = 2\ m$. Calcule $x + y + z$ en metros ,

Si $m\widehat{AM}=m\widehat{MB}$; $m\widehat{BN}=m\widehat{NC}$ y $m\widehat{AQ}=m\widehat{QC}$.

A) 12
B) 14
C) 16
D) 18
E) 20



RESOLUCIÓN:



* Nos piden: $x+y+z$

* Según los datos del problema tenemos:

$m\widehat{AM}=m\widehat{MB}$, $m\widehat{AQ}=m\widehat{QC}$, $m\widehat{BN}=m\widehat{NC}$

$R=6$, *inradio*: $r=2$

* Asumiendo:

I : incentro del triángulo ABC

E_c: ex centro

r_c: ex radio

* Analizando un caso tenemos:

Por teorema , E_c, M, I, C son colineales y $EM=MI$. Por teorema de la base media en la región sombreada.

$$x=\frac{r+r_c}{2} \quad \text{.....(I)}$$

* En forma análoga:

$$y=\frac{r+r_b}{2} \quad \text{.....(II)}$$

$$z=\frac{r+r_a}{2} \quad \text{.....(III)}$$

* Sumamos las expresiones escritas en *(I)* , *(II)* y *(III)*:

$$x+y+z=\frac{3r+r_a+r_b+r_c}{2} \quad \text{.....(IV)}$$

* Por el teorema de Steiner se sabe que:

$$r_a+r_b+r_c=4R+r \quad \text{.....(V)}$$

* Reemplazando *(V)* en *(IV)*:

$$x+y+z=\frac{3r+4R+r}{2} \Rightarrow x+y+z=2(R+r)$$

* Sabe por dato:

$$R=6 \text{ y } r=2 \Rightarrow x+y+z=16$$

RPTA : "C"

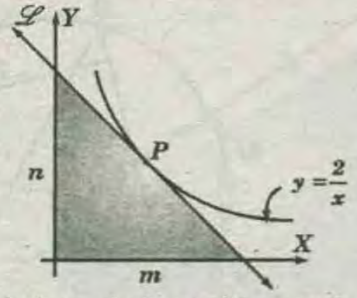
PROBLEMA 195 :

Sea la hipérbola $xy=2$. Halle el área del triángulo que se forma con una recta tangente a esta hipérbola , y los ejes coordenados.

A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 4 D) $3\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

* La hipérbola cuya ecuación cartesiana es $xy=2$, tiene como gráfica la figura siguiente:



* Nos piden: S área de la región sombreada

$$\mathbb{S}=\frac{mn}{2} \quad \text{.....(I)}$$

* Luego la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}: y=-\frac{n}{m}(x-m)$ y la hipérbola: $xy=2$ se intersecan en el punto P.

* De las ecuaciones se obtiene: $nx^2-mnx+2m=0$

* Dicha ecuación presenta solución única, entonces $(\Delta=0)$.

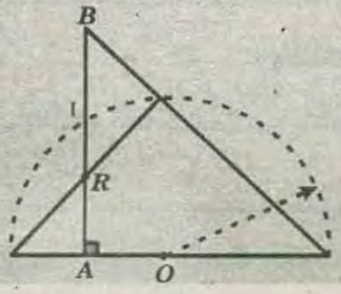
$$\Rightarrow (mn)^2-4(n)(2m)=0 \Rightarrow mn=8$$

* Finalmente en *(I)* resulta: $\mathbb{S}=4\ u^2$

RPTA : "C"

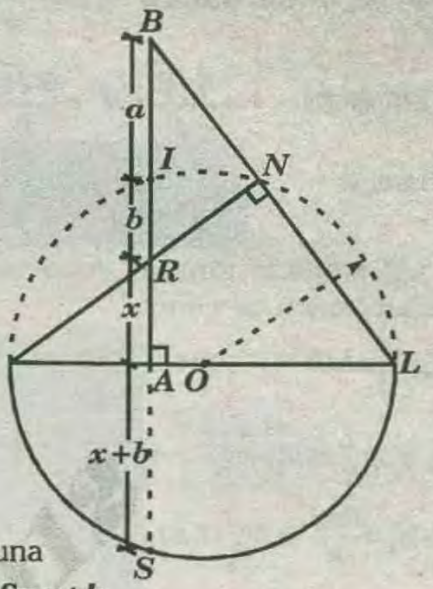
PROBLEMA 196 :

En la figura mostrada , calcule RA en cm si $BI=a$ cm; $IR=b$ cm $(b<a)$



A) $\frac{a^2+b^2}{a-b}$ B) $\frac{2b^2}{a-b}$ C) $\frac{b^2}{a-b}$ D) $\frac{2a^2}{a-b}$ E) $\frac{a^2}{a-b}$

RESOLUCIÓN:



* Se pide : $RA=x$

* Por teorema de una circunferencia : $AS=x+b$.

* Por teorema de las secantes :

$$(SB)(IB)=(BL)(BN)$$

$$\Rightarrow (a+b+x+x+b)a=(BL)(BN) \quad \text{.....(I)}$$

$\square ARNL$ es inscriptible

$$\Rightarrow (AB)(RB)=(BL)(BN)$$

$$(a+b+x)(a+b)=(BL)(BN) \quad \text{.....(II)}$$

* Igualamos *(I)* y *(II)*, y despejamos x : $x=\frac{b^2}{a-b}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 197 :

Un poliedro convexo tiene como caras *12* triángulos , *16* cuadriláteros , *24* pentágonos y *13* exágonos. Halle su número de vértices.

A) 84 B) 85 C) 86 D) 87 E) 88

RESOLUCIÓN:

* Se pide el número de vértices *(V)*.

Tipo de cara	*Número de dichas caras*
Triangular	*12*
Cuadrangular	*16*
Pentagonal	*24*
Hexagonal	*13*

* El número de caras (C):

$$C = 12 + 16 + 24 + 13 = 65$$

* El número de aristas (A):

$$A=\frac{12(3)+16(4)+24(5)+13(6)}{2} \Rightarrow A=149$$

★Teorema de Euler:

$C + V = A + 2$

$\Rightarrow V = A + 2 - C$

★Reemplazando:

$V = 149 + 2 - 65 = 86$

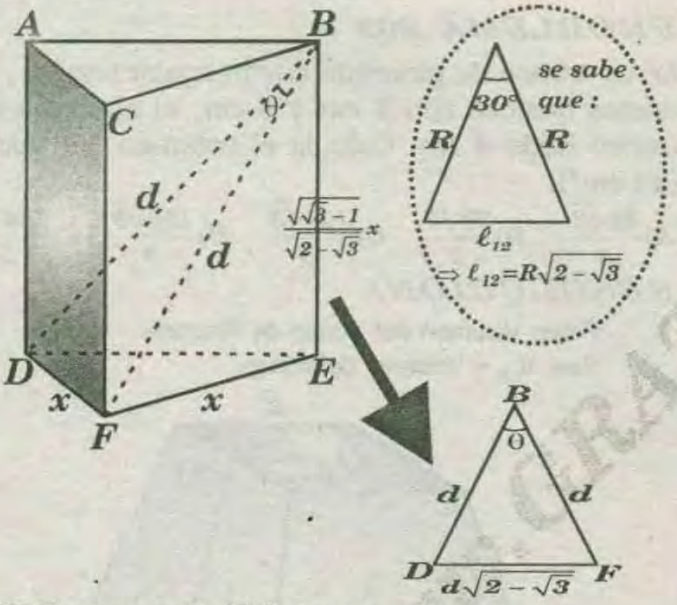
RPTA : "C"

PROBLEMA 198 :

En un prisma triangular regular , la arista de la base mide x unidades y la altura mide $\frac{\sqrt{\sqrt{3}-1}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}x$ unidades. Si θ es el ángulo formado por las diagonales de dos caras laterales que parten del mismo vértice. entonces el valor de θ es:

A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

RESOLUCIÓN:



△*FBE* teorema de Pitágoras :

$$d^2=x^2+\frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}}x^2 \Rightarrow x=d\sqrt{2-\sqrt{3}} \Rightarrow \theta=30°$$

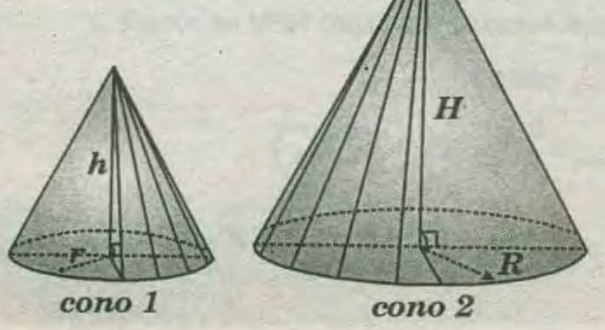
RPTA : "B"

PROBLEMA 198 :

Si se duplica simultáneamente , la media del radio de la base y la altura de un cono de revolución , de volumen V , entonces el nuevo volumen es :

A) 8V B) 6V C) 4V D) 2V E) 3V

RESOLUCIÓN :



Piden volumen del cono 2 : $\mathbb{V}_2$

Dato : volumen cono 1 = $\mathbb{V}$

$$H=2h \ \wedge \ R=2r$$

Como :

$$\mathbb{V}_2=\frac{1}{3}\pi(R)^2H=\frac{1}{3}\pi(2r)^2(2h).....(I)$$

$$\mathbb{V}=\frac{1}{3}\pi(r)^2h.....(II)$$

Dividiendo *(I)* ÷ *(II)* : $\frac{\mathbb{V}_2}{\mathbb{V}}=\frac{\frac{1}{3}\pi(2r)^2(2h)}{\frac{1}{3}\pi(r)^2h}$

Entonces : $\frac{\mathbb{V}_2}{\mathbb{V}}=8 \Rightarrow \mathbb{V}_2=8\mathbb{V}$

RPTA: "A"

PROBLEMA 199 :

Se inscribe una esfera en un cono de revolución. Sabiendo que en el cono , dos generatrices opuestas determinan un ángulo de *60°* y el diámetro de su base es *18* unidades. Calcule el volumen de la esfera (en unidades cúbicas).

A) $108\pi\sqrt{3}$ B) 324π C) $324\pi\sqrt{3}$

D) 972π E) $972\pi\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

Se pide volumen de la esfera (v)

AB = 18

$\Rightarrow AO_1 = 9$

Del gráfico ΔAO_1O (notable de 30° y 60°)

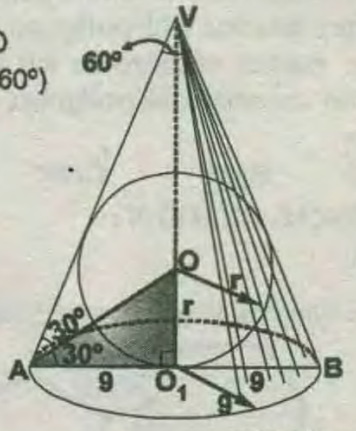
$r = 3\sqrt{3}$

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

Reemplazando

$V=\frac{4}{3}\pi(3\sqrt{3})^3$

$\Rightarrow V=108\pi\sqrt{3}$



RPTA : "A"

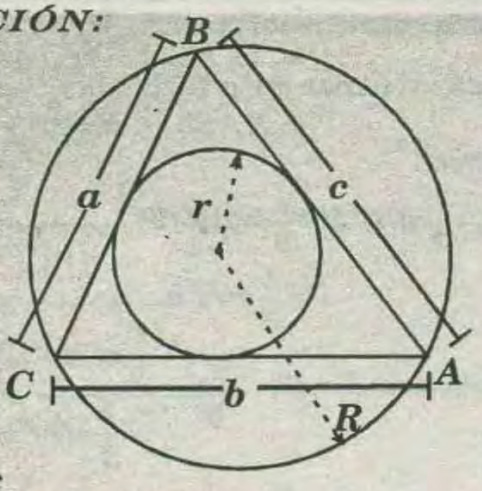
PROBLEMA 200 :

Sean *a, b, c* las longitudes de los lados de un triángulo. Supongamos que:

(1) a<b<c , y *(2) a, b, c* forman una progresión aritmética. Denotando por *r* el radio de la circunferencia inscrita y por *R* el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo , entonces el valor de *rR* es:

A) $\frac{(a+c)}{6}$ *B)* $\frac{(a+b)}{6}$ *C)* $\frac{ab}{6}$ *D)* $\frac{ac}{6}$ *E)* $\frac{bc}{6}$

RESOLUCIÓN:



* Piden: $R \cdot r$
* Dato: $a<b<c$

a, b y c están en progresión aritmética

* Luego , $b=\frac{a+c}{2} \Rightarrow a+c=2b$
* Por teorema :

$$\underbrace{A_{\Delta ABC}=\left(\frac{a+b+c}{2}\right)r=\frac{3b}{2}r \wedge A_{\Delta ABC}=\frac{abc}{4R}}$$

$$\Rightarrow \frac{3b}{2}r=\frac{abc}{4R} \Rightarrow Rr=\frac{ac}{6}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 201 :

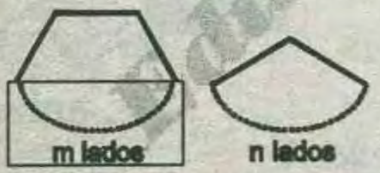
Dados dos polígonos regulares convexos , cuyos números de diagonales se diferencian en **4** y cuya medida de sus ángulos centrales están en la relación **5**: **6**. Determine la diferencia entre la medida del ángulo interior del polígono regular convexo que tiene menor número de los lados y la medida del ángulo exterior del polígono de mayor número de lados.

A)48° B)70° C)90° D)100° E)114°

RESOLUCIÓN:

Sean:

m y n números de lados de los polígonos (m > n)



Polígono	P_n	P_m
Números de lados	n	m
Números de diagonales	$\frac{n(n-3)}{2}$	$\frac{m(m-3)}{2}$
Medida del ángulo central	$\frac{360}{n}$	$\frac{360}{m}$

* Asumiendo $n>m$, por los datos:

$$\frac{n(n-3)}{2}-\frac{m(m-3)}{2}=4 \quad \ldots\ldots(I)$$

$$\frac{\frac{360}{n}}{\frac{360}{m}}=\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{5}{6} \quad \ldots\ldots(II)$$

* De (I) y (II): $\begin{cases} n=6 \text{ (Hexágono regular)} \\ m=5 \text{ (Pentágono regular)} \end{cases}$

* Piden $x=\left(\begin{array}{c}\text{medida del}\\ \text{ángulo interior}\\ \text{de } P_m\end{array}\right)-\left(\begin{array}{c}\text{medida del}\\ \text{ángulo exterior}\\ \text{de } P_n\end{array}\right)$

$$x=\frac{108°(m-2)}{m}-\frac{360°}{n} \Rightarrow x=108°-60° \Rightarrow x=48°$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 202 :

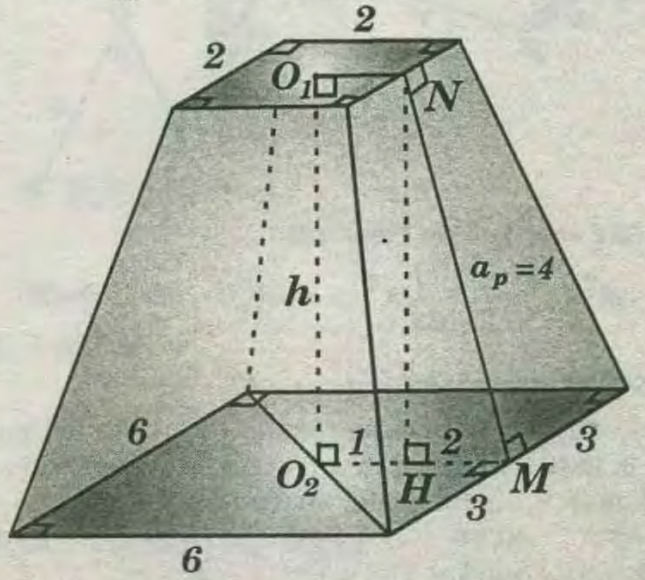
En un tronco de pirámide cuadrangular regular , las aristas básicas son **2 cm** y **6 cm**, el apotema del tronco mide **4 cm**. Calcule el volumen del tronco (en cm^3).

A) $\frac{52\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{78\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{104\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{130\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{156\sqrt{3}}{3}$

RESOLUCIÓN:

Piden Volumen del tronco de Pirámide.

Sea: $V_{T.P}$ = Volumen del tronco.



Trazamos $\overline{NH}$ perpendicular a la base mayor.

Luego el triangulo rectangulo NHM es notable.

En el $\triangle$ NHM: h = $2\sqrt{3}$

$$\mathbb{V}_{tronco}=\frac{h}{3}\left(\mathbb{B}_1+\mathbb{B}_2+\sqrt{\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}_{tronco}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(2^2+6^2+\sqrt{2^2\times 6^2}\right) \Rightarrow \mathbb{V}_{tronco}=\frac{104\sqrt{3}}{3}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 203 :

En un triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$. Por D se levanta una perpendicular al segmento $\overline{AC}$ que intersecta a $\overline{BC}$ en M.

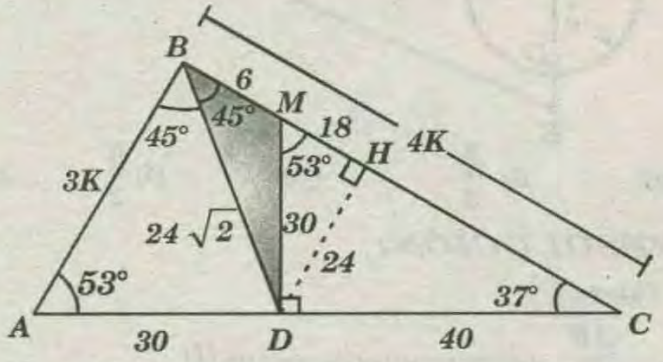
Si $AD=30\ cm$ y $DC=40\ cm$, entonces la medida del perímetro del triángulo BMD es:

A) $30+24\sqrt{2}$ B) $32+24\sqrt{2}$ C) $34+24\sqrt{2}$
D) $35+24\sqrt{2}$ E) $36+24\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN:

* Piden $(2p)_{\Delta BMD}$:

donde $(2p)_{\Delta BMD}$: perímetro de región triangular



* Como: $\overline{BD}$ es bisectriz

$\frac{AB}{Bc}=\frac{30}{40}\Rightarrow$ $\triangle$ABC es notable.

* Entonces m∢BCA = 37° .

* Trazamos $\overline{DH}\perp\overline{BC}$.

* por $\triangle$ Not.

DM = 30, DH = BH = 24

* Ademas: MH = 18

* Luego: BM = 6 y BD = $24\sqrt{2}$

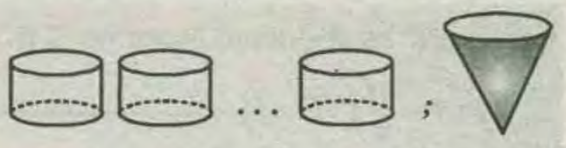
* Entonces: $2p_{(\Delta BMD)}=36+24\sqrt{2}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 204 :

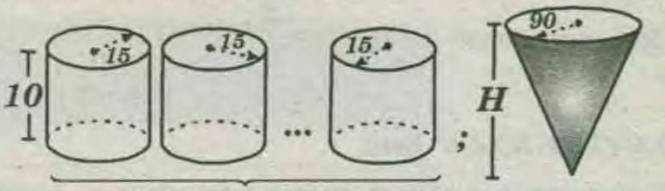
En la figura , se muestran 144 depósitos de forma cilíndrica , de $30\ cm$ de diámetro y $10\ cm$ de altura , llenos de aceite y un depósito de forma cónica , cuyo radio de la base mide $90\ cm$. Si queremos vaciar todo el aceite en el depósito cónico , ¿qué altura debe tener dicho depósito para que esté completamente lleno?

A) 90 cm
B) 120 cm
C) 150 cm
D) 130 cm
E) 160 cm



RESOLUCIÓN 17 :

* Del gráfico nos piden H.



144 depósitos

Se quiere que el contenido de los 144 depósitos alcancen totalmente en el recipiente cónico, entonces :

$$144(V_{cilindro})=V_{cono}$$

$$\Rightarrow 144\left[\pi(15)^2(10)\right]=\frac{\pi(90)^2H}{3}$$

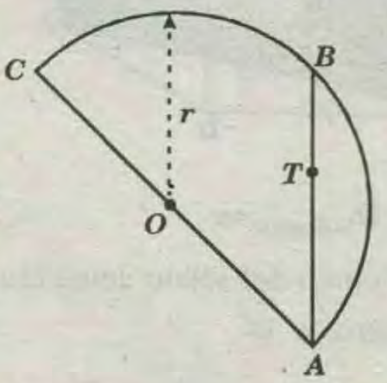
$$\Rightarrow H=120\ cm$$

RPTA : "B"

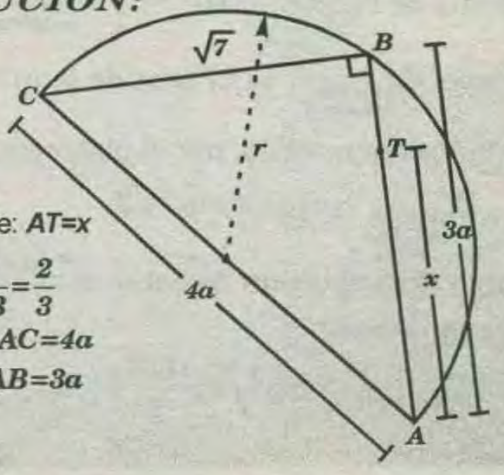
PROBLEMA 205 :

En la figura: $CB=\sqrt{7}$, O centro de la circunferencia , la razón de r y BA es de 2 a 3. Si $\overline{AT}$ es segmento áureo de $\overline{AB}$. Determine AT.

A) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$
B) $\frac{3}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$
C) $\frac{4}{3}\left(\sqrt{5}-1\right)$
D) $\frac{5}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$
E) $\frac{5}{3}\left(\sqrt{5}-1\right)$



RESOLUCIÓN:



* Se pide: $AT=x$

$\frac{r}{AB}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow AC=4a$

$\wedge\ AB=3a$

como $\overline{AT}$ es segmento áureo de $\overline{AB}$.

$$\Rightarrow x=\frac{3a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) \quad \ldots\ldots (I)$$

* $\triangle ABC$ por teorema de Pitágoras :

$$(\sqrt{7})^2+(3a)^2=(4a)^2 \Rightarrow a=1$$

* Reemplazando en *(I)*: $x=\frac{3}{2}(\sqrt{5}-1)$

RPTA : "B"

PROBLEMA 206 :

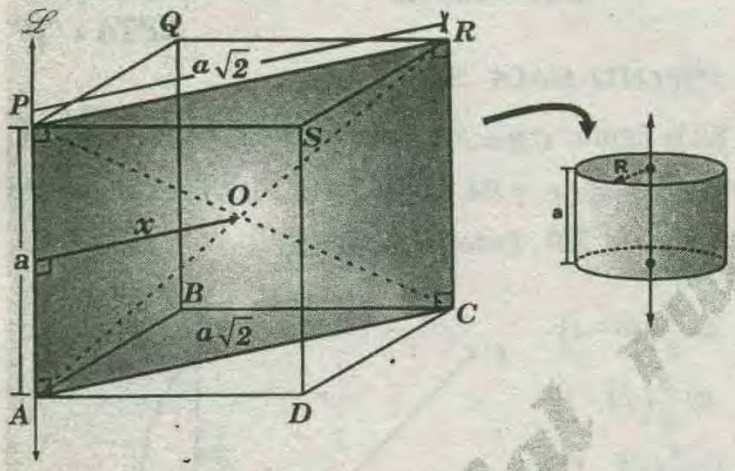
El volumen que genera un cubo de arista a, cuando gira $360°$ alrededor de una de sus aristas es.

A) πa^3 B) $\frac{3}{2}\pi a^3$ C) $2\pi a^3$

D) $3\pi a^3$ E) $4\pi a^3$

RESOLUCIÓN:

Al girar el cubo se genera un cilindro cuya base tiene radio «*R*» y su altura es «*a*»



* Piden : $\mathbb{V}_{SG(cubo)}=x$.

$\mathbb{V}_{SG}$: volumen del sólido generado por el cubo al girar en torno a $\overrightarrow{\mathscr{L}}$.

Teorema de Pappus: $\mathbb{V}_{SG}=2\pi\left(\mathbb{A}_{\substack{\text{sección}\\ \text{máxima}}}\right)\overline{x}$

* Donde: $\mathbb{A}_{\substack{\text{sección}\\ \text{máxima}}}$, es el área de la mayor sección determinada en sólido, por el plano que contiene a $\overrightarrow{\mathscr{L}}$. $\mathbb{A}_{\substack{\text{sección}\\ \text{máxima}}}=a(a\sqrt{2})=a^2\sqrt{2}$

* Como O es el centro de cubo: $\overline{x}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

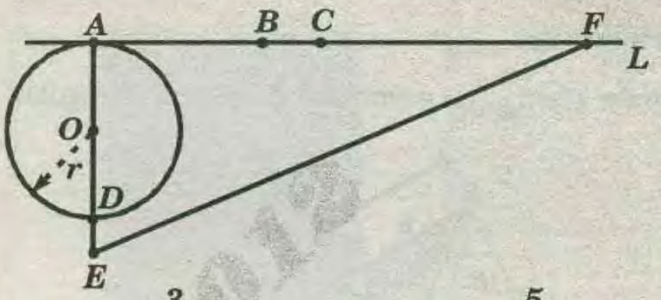
* Reemplazando:

$$\mathbb{V}_{SG(cubo)}=2\pi(a^2\sqrt{2})\frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \mathbb{V}_{SG(cubo)}=2\pi a^3$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 207 :

En la figura, $\overline{AD}$ es el diámetro de la circunferencia de centro O, por A se traza la recta tangente $\measuredangle$ que contiene a los puntos B, $C \wedge F$. Si $AB=\frac{11}{5}r$, $BC=\frac{2}{5}r$, $AE=OB$ y $\overline{OC}//\overline{EF}$. Determine $\frac{AF}{\ell_{\widehat{AD}}}$, donde $\ell_{\widehat{AD}}$: longitud del arco AD. Considere: $\pi=3,14$.

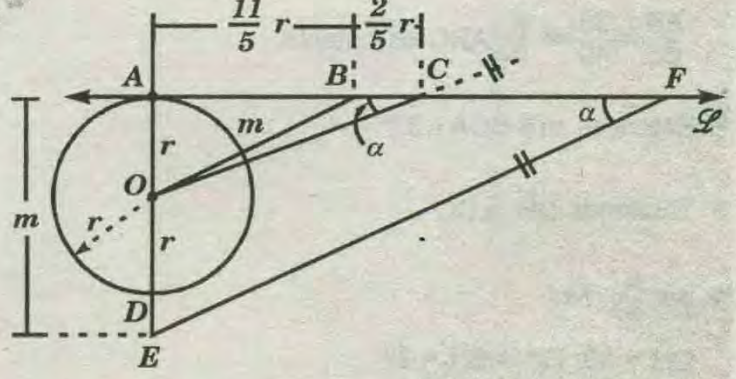


A)1 B) $\frac{3}{2}$ C)2 D) $\frac{5}{2}$ E)3

RESOLUCIÓN:

* Piden:

$$\frac{AF}{\ell_{\widehat{AD}}} \quad \ldots\ldots (I)$$



I) $\ell_{\widehat{AD}}=\pi\times r$ II) $\triangle AOC$ $m=\frac{\sqrt{146}}{5}r$;

además , $Cot\alpha=\frac{\frac{13}{5}\times r}{r}=\frac{AF}{m}$

* Luego:

$$\frac{13}{5}=\frac{AF}{\frac{\sqrt{146}}{5}r} \Rightarrow AF=\frac{13\sqrt{146}r}{25}=6,28r$$

En *(I)*: $\frac{AF}{\ell_{\widehat{AD}}}=\frac{6,28r}{\pi r}=2$

RPTA : "C"

PROBLEMA 208 :

Determine la medida del ángulo obtuso que forman las asíntotas de la hipérbola.

$$x^2-3y^2-8x-18y=14$$

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{18}$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{5}$

RESOLUCIÓN:

*9 Nos piden el mayor ángulo entre las asíntotas

$$x^2-3y^2-8x-18y=14$$

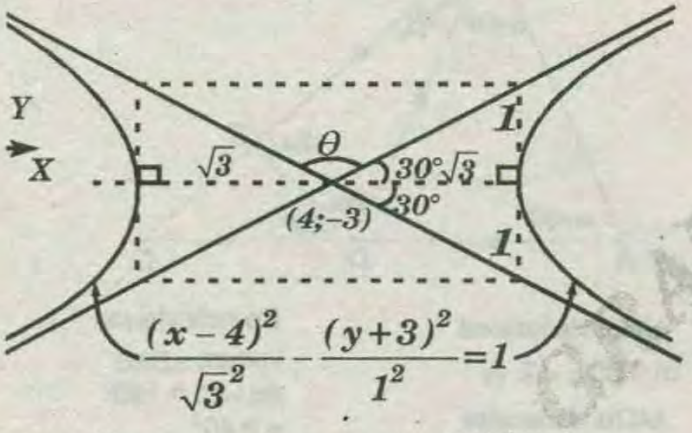
* completando cuadrados :

$$(x^2-8x+16)-3(y^2+6y+9)=14+16-27$$

$$\Rightarrow \frac{(x-4)^2}{\sqrt{3}^2}-\frac{(y+3)^2}{1^2}=1$$

* Sea θ el ángulo obtuso formado por las asíntotas :

* Graficamos la cónica :



* Del gráfico , tenemos que :$\theta = 120°$

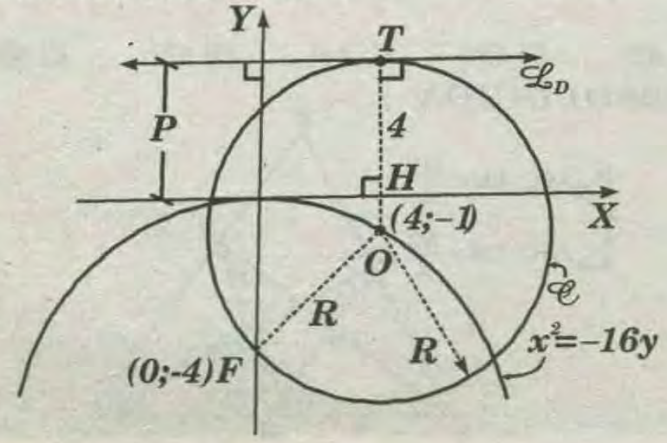
RPTA : "D"

PROBLEMA 209 :

La circunferencia con centro en el punto (4;-1) pasa por el foco de la parábola $x^2+16y=0$ y es tangente a la directríz de esta parábola. Calcular la suma de las coordenadas del punto de tangencia.

A) 8 B) 6 C) 10 D) 4 E) 12

RESOLUCIÓN 58 :



Piden de la suma de coordenadas del punto T. Si se sabe que $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_D}$ es directriz de la parábola $x^2=16y$, ordenando dicha ecuación $(x-0)^2=-(4)(y-0)$ el parámetro es $P=4$ y su vértice es $(0;0)$; luego, el foco F es $(0;-4)$.

Radio de la circunferencia:

$$R=OF=\sqrt{(4-0)^2+(-1+4)^2} \Rightarrow R=5$$

Como $OH=1$, entonces, $TH=4$.

Luego, $T=(4;4)$

$\Rightarrow$ la suma de coordenadas del punto T es 8.

RPTA: "A"

PROBLEMA 210 :

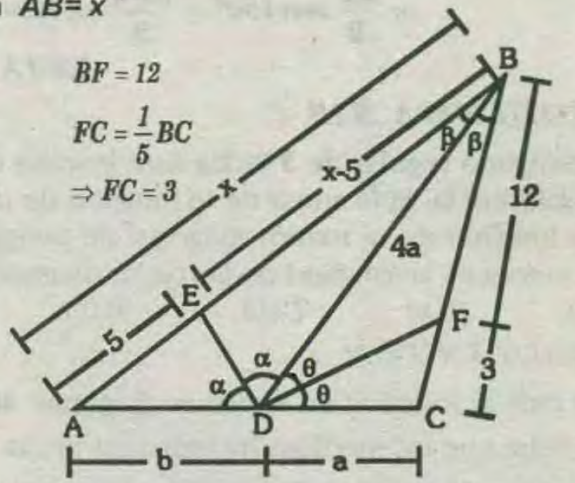
En un triángulo ABC, se trazan las bisectrices Interiores $\overline{BD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$ de los ángulos ABC, ADB y BDC respectivamente. (D, E y F puntos del triángulo).

Si $FC=\frac{1}{5}BC$, $BF=12$, $AE=5$ Calcule AB.

A)6 B)11 C)15 D)18 E)20

RESOLUCIÓN :

* Piden $AB=x$



Conclusiones

ΔBDC (Teorema de la bisectríz interior)

$$\frac{DC}{DB}=\frac{3}{12} \rightarrow \frac{DC}{DB}=\frac{1}{4} \rightarrow DC=a \rightarrow DC=4a$$

ΔABC (Teorema de la bisectríz interior)

$$\frac{x}{15}=\frac{b}{a} \quad \text{.....(I)}$$

ΔADB (Teorema de la bisectríz interior)

$$\frac{b}{4a}=\frac{5}{x-5} \quad \text{.....(II)}$$

(I) en (II)

$$\frac{1}{4}\left(\frac{x}{15}\right)=\frac{5}{x-5} \rightarrow x^2-5x-15(20)=0$$

$$\text{.....} x+15=0 \rightarrow \cancel{x=-15}$$

$$\text{.....} x-20=0 \rightarrow x=20$$

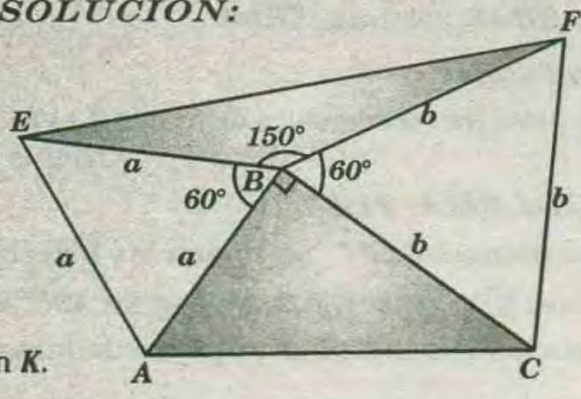
RPTA : "E"

PROBLEMA 211 :

En un triángulo rectángulo ABC , recto en B. Exteriormente se dibujan los triángulos equiláteros AEB y BFC. Si el área de la región triangular EBF es K veces el área de la región triangular ABC , calcule el valor de K.

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN:



Piden K.

* Dato: $\mathbb{A}_{\triangle EBF} = K\mathbb{A}_{\triangle ABC}$

*Luego :

$$\mathbb{A}_{\triangle EBF} = K\mathbb{A}_{\triangle ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{2}sen150° = \frac{Kab}{2} \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 212 :

Un polígono regular de 9 lados está inscrito en una circunferencia. Si la suma de la longitud de un lado y la longitud de la menor diagonal de polígono es 20 , entonces la longitud de la mayor diagonal es :

A)10 B)12 C)15 D)17 E)20

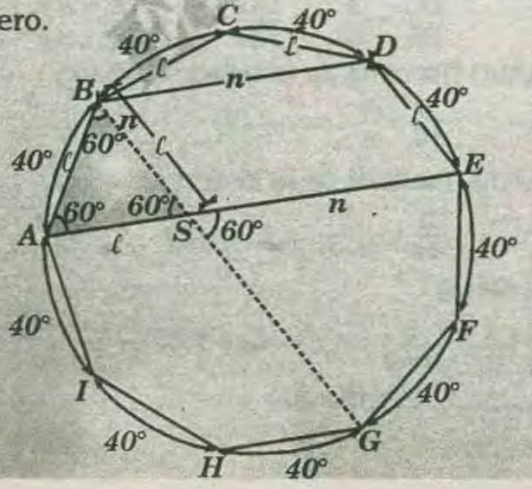
RESOLUCIÓN :

* Se pide la longitud de la mayor diagonal: AE

* Se sabe que las medidas de todos los arcos es $40°$.

* La suma de longitud de un lado y la longitud de la menor diagonal del polígono es 20.

* Trazamos BG , de lo cual se tiene ΔBAS : equilátero.



* Se aprecia que: $BC + BD = \ell + n = 20$

* Como :

$$\overline{SB} // \overline{DE} \wedge BS = ED$$

$$\Rightarrow SE = BD \Rightarrow AE = \ell + n = 20$$

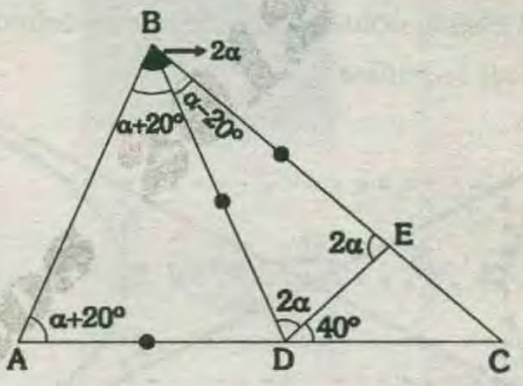
RPTA : "E"

PROBLEMA 213 :

Sobre los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo acutángulo ABC se ubican los puntos D y E , respectivamente , de tal modo que $AD = BD = BE$ y $m\sphericalangle DEB = m\sphericalangle ABC$. Si las bisectrices de los $\sphericalangle BAC$ y $\sphericalangle ACB$ se cortan en P y $m\sphericalangle EDC = 40°$, entonces $m\sphericalangle CPA$ es:

A) 110° B) 115° C) 120° D) 125° E) 130°

RESOLUCIÓN:



ΔDBE : Isósceles

$m\sphericalangle BDE = 2\alpha$

ΔADB : Isósceles

$m\sphericalangle BAD = m\ ABD = \alpha + 20°$

$\Rightarrow m\sphericalangle DBE = \alpha - 20°$

Conclusiones

Luego: ΔDBE

$5\alpha - 20 = 180°$

$\alpha = 40°$

Reemplazando en (I):

$\therefore m\sphericalangle CPA = 130°$

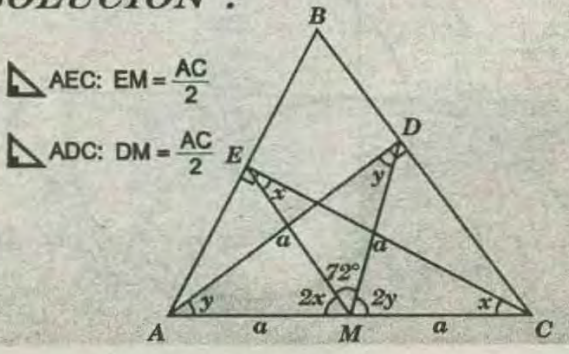
RPTA : "E"

PROBLEMA 214 :

En un triángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ ($E \in \overline{AB}$, $D \in \overline{BC}$). Si M es punto medio de $\overline{AC}$ y $m\sphericalangle EMD = 72°$, entonces $m\sphericalangle MEC + m\sphericalangle ADM$ es:

A) 52° B) 53° C) 54° D) 55° E) 56°

RESOLUCIÓN :



*Teorema de la menor mediana del triángulo rectángulo:

Δ EMC : Isósceles

Δ AMD : Isósceles

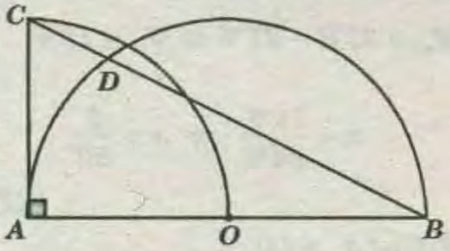
* Luego : $2x + 2y + 72° = 180°$

$\Rightarrow x + y = 54°$

RPTA : "C"

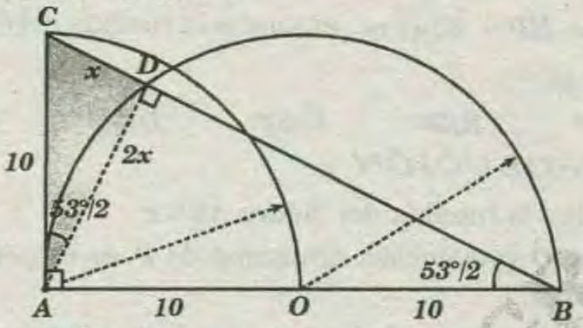
PROBLEMA 215 :

En la figura , $AO = 10\ cm$, O y A son centros de circunferencias. Calcule CD en cm.



A) $2\sqrt{5}$ B) $\frac{8}{3}\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{6}$ D) $\frac{8}{3}\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{7}$

RESOLUCIÓN :



* Piden : $CD = x$

Dato : $AO = 10$

* En el gráfico $\triangle CAB$(aprox., $53°/2$ y $127°/2$)

$$m\sphericalangle CBA = \frac{53°}{2}$$

* Trazamos $\overline{AD}$ $\triangle CDA$ (aprox. $53°/2$ y $127°/2$)

$\Rightarrow x\sqrt{5} = 10 \Rightarrow x = 2\sqrt{5}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 216 :

Se tiene el triángulo ABC en el plano P. Se trazan $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ perpendicularmente al plano P, el segmento $\overline{B'C'}$ no intercepta al plano P. Si $BB' = 3$, $CC' = 1$, $AC = \sqrt{17}$, $BC = \sqrt{14}$ y $m\sphericalangle BAB' = 30°$, entonces el área del triángulo $AB'C'$ es :

A) 3 B) $\frac{\sqrt{238}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{238}}{2}$ D) 8 E) 9

RESOLUCIÓN :

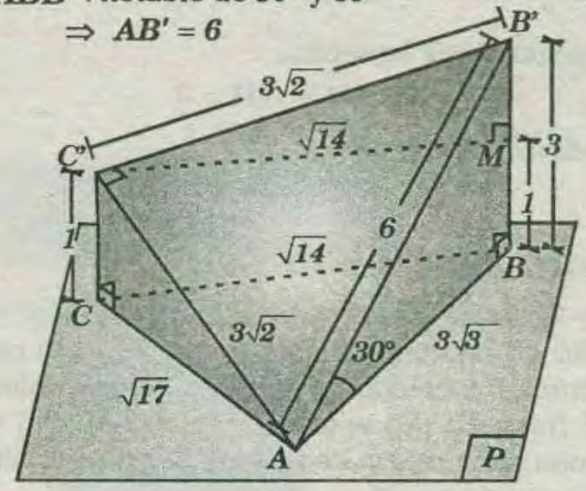
*Se pide : $S_{\Delta AB'C'}$

$\triangle CC'A : (AC')^2 = 1^2 + \sqrt{17}^2$

$\Rightarrow AC' = 3\sqrt{2}$

$\triangle ABB'$: notable de $30°$ y $60°$

$\Rightarrow AB' = 6$



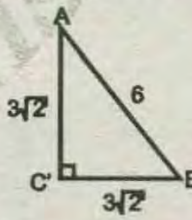
Se traza $\overline{C'M} \perp \overline{BB'}$; luego

$\triangle C'MB' : (B'C')^2 = \sqrt{14}^2 + 2^2$

$\Rightarrow B'C' = 3\sqrt{2}$

* Se observa que $\Delta AC'B'$ es isóceles y cumple con el teorema de Pitágoras.

$\Rightarrow m\sphericalangle AC'B' = 90°$



$S_{\Delta AB'C'} = \frac{(3\sqrt{2})(3\sqrt{2})}{2}$

$S_{\Delta AB'C'} = 9$

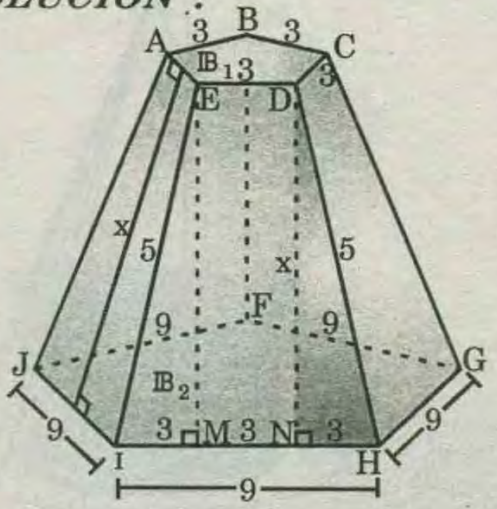
RPTA : "E"

PROBLEMA 217 :

Un tronco de pirámide pentagonal regular tiene de perímetros de sus bases $15\ cm$ y $45\ cm$ y la arista lateral mide $5\ cm$. Halle el apotema del tronco (en cm).

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

RESOLUCIÓN :



* Piden apotema

* Datos: $2P_{B_1} = 15$; $2P_{B_2} = 45$ y $DH = 5$

* Se trazan $\overline{DN} \perp \overline{IH}$ y $\overline{EM} \perp \overline{IH}$

* Trapecio $IEDH$ isósceles.

$\Rightarrow IM = NH = 3$

* $\triangle DNH$ notable ($37°$ y $53°$)

$\Rightarrow x = 4$

RPTA : "B"

PROBLEMA 218 :

En la figura se muestra un cilindro circular recto inscrito en un cono circular recto , el cono parcial de vértice P y el cilindro tienen el mismo volumen. ¿Qué fracción del volumen del cono total es el volumen de la región comprendida entre el cilindro y el tronco de cono?

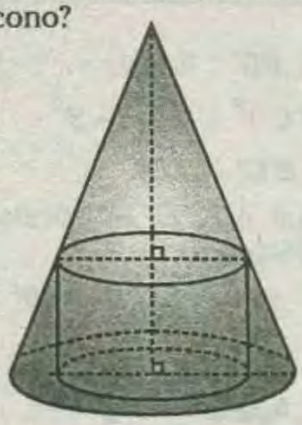
A) $\frac{5}{32}$

B) $\frac{7}{32}$

C) $\frac{9}{32}$

D) $\frac{11}{32}$

E) $\frac{13}{32}$

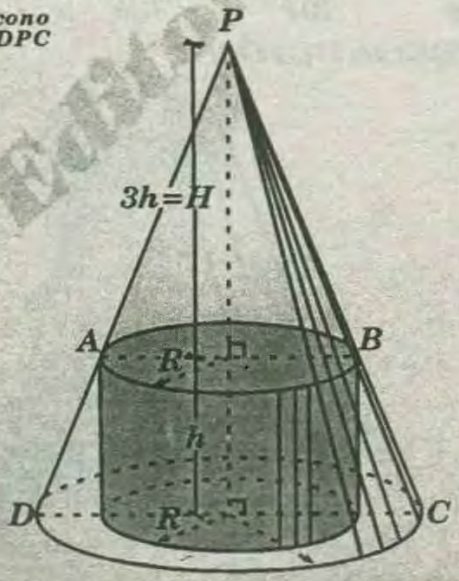


RESOLUCIÓN :

$\mathbb{V}_x$:Volumen de la región espacial comprendida entre el cilindro y el tronco de cono.

$$\mathbb{V}_x = \mathbb{V}_{\substack{tronco \\ ABCD}} - \mathbb{V}_{cilindro} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Piden : $x = \dfrac{\mathbb{V}_x}{\mathbb{V}_{\substack{cono \\ DPC}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$



* Por dato :

$$\mathbb{V}_{\substack{cono \\ APB}} = \mathbb{V}_{cilindro} \Rightarrow \frac{1}{3}\pi R^2 H = \pi R^2 h$$

$$\Rightarrow H = 3h$$

* Por semejanza de conos :

$$\frac{\mathbb{V}_{\substack{cono \\ APB}}}{\mathbb{V}_{\substack{cono \\ DPC}}} = \left(\frac{3h}{4h}\right)^3 \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{V}_{\substack{cono \\ APB}} = 27\mathbb{V} = \mathbb{V}_{cilindro} \\ \mathbb{V}_{\substack{cono \\ DPC}} = 64\mathbb{V} \end{cases}$$

* Por diferencia : $\mathbb{V}_{\substack{trono \\ ABCD}} = 64\mathbb{V} - 27\mathbb{V} = 37\mathbb{V}$

* En (I) : $\mathbb{V}_x = 37\mathbb{V} - 27\mathbb{V} \Rightarrow \mathbb{V}_x = 10\mathbb{V}$

* En (II) : $x = \dfrac{10\mathbb{V}}{64\mathbb{V}} \Rightarrow x = \dfrac{5}{32}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 219 :

Un plano H contiene un segmento $\overline{AB}$ de longitud $16m$ y P es un punto que dista de H $8m$. Si $AP = BP = 2\sqrt{41}\,m$, entonces la medida del diedro $\overline{AB}$ es :

A)37° B)50° C)53° D)55° E)60°

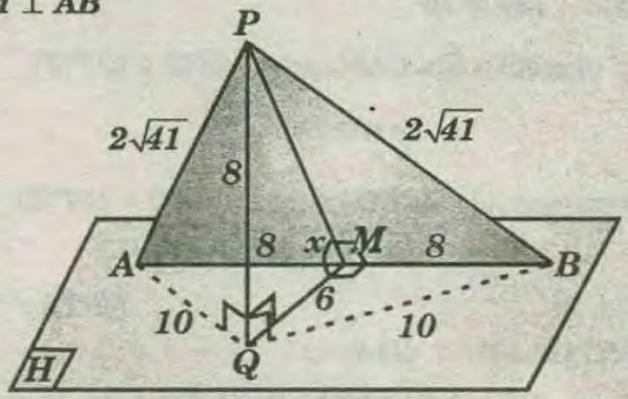
RESOLUCIÓN :

* Piden la medida del diedro $AB=x$

* Sea Q proyección ortogonal de P es respecto al plano H.

* Por el teorema de las tres perpendiculares :

$\overline{PM} \perp \overline{AB}$



* En los $\triangle$ AQP y $\triangle$ AMQ: AQ=10 y QM=6

* En el $\triangle PQM$ (notable de $37°$ y $53°$)

$\Rightarrow x = 53°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 220 :

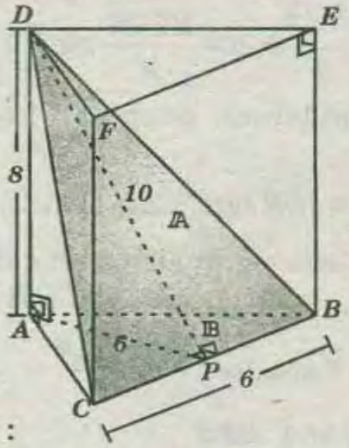
En un prisma triangular recto $ABC–DEF$, $AD = 8cm$, $BC = 6\ cm$ y su volumen $144\ cm^3$. Halle el área (en cm^2) del triángulo BDC.

A)10 B)20 C)30 D)40 E)50

RESOLUCIÓN :

*Se pide : $Área_{\triangle CDB} = \mathbb{A}$

* Dato : volumen del prisma : $\mathbb{V} = 144$



*Se sabe que :

$$\mathbb{V} = (Área_{B})8 \Rightarrow 144 = \frac{6(AP)8}{2} \Rightarrow AP = 6$$

* Teorema de la tres perpendiculares :

$$m\sphericalangle DPB = 90° \Rightarrow \mathbb{A} = \frac{6(DP)}{2} = 3(DP).....(I)$$

* $\triangle DAP$ notable ($37°$ y $53°$) : $DP = 10$

* En (I) : $\mathbb{A} = 30$

RPTA : "C"

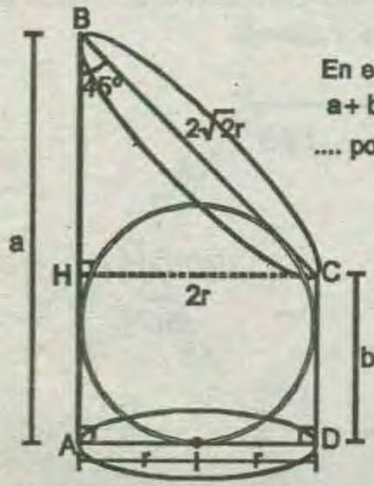
PROBLEMA 221 :

Se tiene una esfera inscrita en un tronco de cilindro circular recto. Si el volumen de la región encerrada por el tronco es numéricamente igual a $(\sqrt{2}+1)\pi$ y el ángulo que forma la báse superior del tronco con su máxima generatríz es $45°$, entonces el radio de la esfera es:

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Piden el radio de la esfera : r



En el gráfico:

$a + b = 2\sqrt{2}r + 2r$

.... por el Teorema de Pitot.

$$V = \pi r^2 \frac{(a+b)}{2}$$

Conclusiones

$$\pi r^2 \frac{(2\sqrt{2}r + 2r)}{2} = (\sqrt{2}+1)\pi$$

Resolviendo: $r = 1$

RPTA : "B"

PROBLEMA 222 :

En un triángulo ABC se cumple $AB = 2$ m y $AC = 32$ m. Calcule el perímetro del triángulo en metros, sabiendo que es un número entero y el ángulo en A es obtuso.

A)65 B)66 C)67 D) 68 E) 69

RESOLUCIÓN :

Clasificación de triángulos: Triángulo obstusángulo.

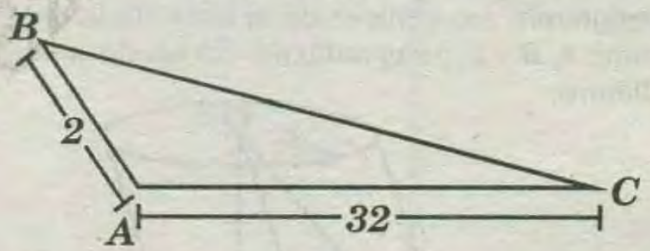
Para realizar el cálculo del perímetro, es necesario conocer BC, el cual, por dato, debe ser entero. Como las longitudes de los otros dos lados son conocidas, podemos restringir a BC mediante el teorema de existencia; pero como la medida de un ángulo interior es mayor de $90°$ (obtuso), se puede realizar la restricción de BC por la naturaleza de triángulos.

Por dato del problema tenemos

$$AB=2\,,\ AC=32 \ \wedge\ m\sphericalangle BAC>90°$$

Piden

$$2P_{\triangle ABC} = 2+32+BC = 34+BC.$$



En el $\triangle ABC$: Existencia de triángulos.

$$32-2<BC<32+2 .....(I)$$

* Como $m\sphericalangle BAC>90°$

$$32^2+2^2<BC^2$$

$$32{,}06<BC .....(II)$$

* Luego, relacionamos las restricciones (I) y (II).

$$32{,}06<BC<34 .....(III)$$

* $2P_{\triangle ABC} = 34+BC$

Como el perímetro es entero, entonces, BC es entero.

* Luego, de la expresión (3) obtenemos $BC=33$

$$\Rightarrow 2P_{\triangle ABC} = 67$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 223 :

En la figura se tiene una pirámide inscrita en un cilindro circular oblicuo.

La base de la pirámide es un triángulo equilátero.

El volumen de la pirámide es $\frac{27\sqrt{3}}{\pi}\ cm^3$. Calcule el volumen del cilindro *(en cm^3)*

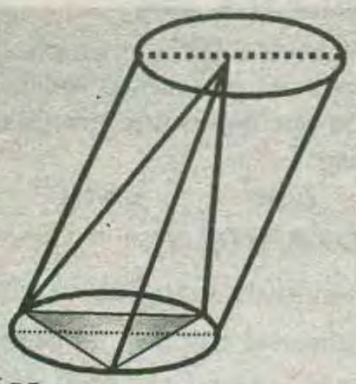
A) $\frac{27}{\pi}$

B) $\frac{54}{\pi}$

C) $\frac{108}{\pi}$

D) 54

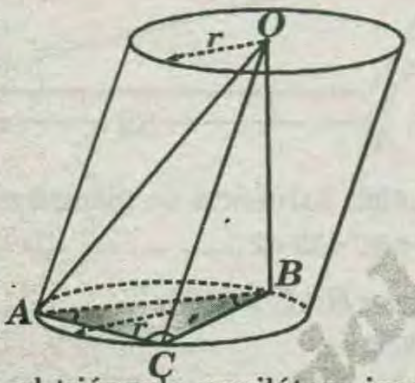
E) 108



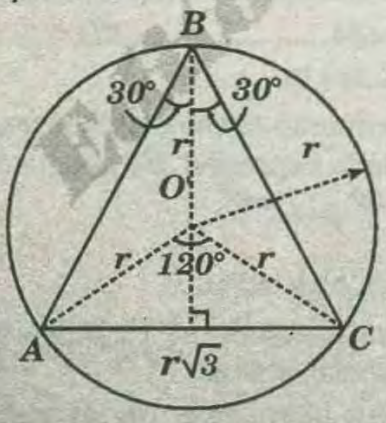
RESOLUCIÓN :

Para calcular el volumen de una pirámide se necesita conocer el área de su base y la altura de la pirámide, mientras que para calcular el volumen del cilindro se requiere conocer el área de su base y su altura. Como el cilindro es circular oblicuo, su base es un círculo, mientras que la base de la pirámide es un triángulo equilátero.

Del gráfico que nos dan como dato podemos notar que ambos sólidos tienen la misma altura y el triángulo de la base de la pirámide está inscrita en la circunferencia que limita la base del cilindro. Denotemos los vértices de la base de la pirámide como ***A, B*** y ***C***, y ***r*** el radio del círculo de la base del cilindro.



Graficando el triángulo equilátero inscrito en la circunferencia tenemos:



En el $\triangle AO'C$: $AO=r=OC$

$m\sphericalangle AOC=120°$

$\Rightarrow AC=r\sqrt{3}=AB=BC$

Ahora podemos calcular el volumen de la pirámide.

$$V_{O-ABC}=\frac{1}{3}(V_{base})\times h=\frac{1}{3}\left(\frac{(r\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}\right)\times h$$

$$V_{O-ABC}=\frac{r^2\sqrt{3}}{3}\times h=\frac{27\sqrt{3}}{\pi}cm^3$$

De aquí podemos despejar las variables y obtenemos:

$$\pi r^2\times h=108\,cm^3 \quad .....(I)$$

Ahora calculamos el volumen de cilindro.

$$V_{cilindro}=A_{base}\times h=\pi r^2\times h$$

de I : $V_{cilindro}=108\,cm^3$

RPTA : "E"

PROBLEMA 225 :

En un polígono convexo equiángulo ***ABCDEF*** se tiene ***AB=7, CD=6*** y ***DE=8***. Calcule ***BF***.

A) $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ B) 7 C) $5\sqrt{3}$ D) $7\sqrt{2}$ E) $7\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

Dentro del grupo de los polígonos tenemos al polígono equiángulo, que se caracteriza por que sus medidas angulares internas y externas son, respectivamente, iguales.

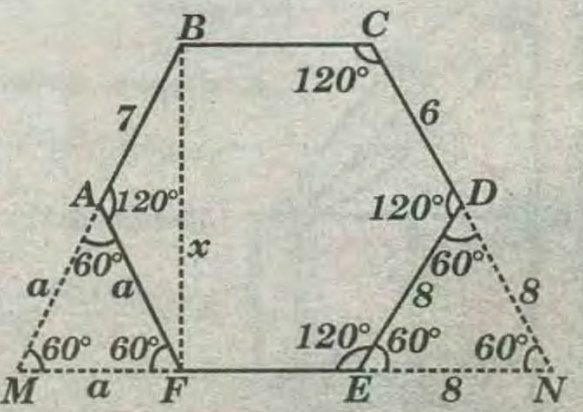
Como se conoce que la suma de las medidas ángulares de un polígono convexo es $180°(n-2)$ y n es el número de lados, entonces, la medida de un ángulo interior será:

$$i=\frac{180°(n-2)}{n}$$

Según el dato del problema, el polígono equiángulo es ***ABCDEF***, es decir, tiene seis lados $(n=6)$;

entonces, $i_{(6)}=\frac{180°(6-2)}{6}=120°$.

Grafiquemos el hexágono con las condiciones del problema: ***AB=7, CD=6*** y ***ED=8***



Al prolongar los lados $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ y $\overline{CD}$, las

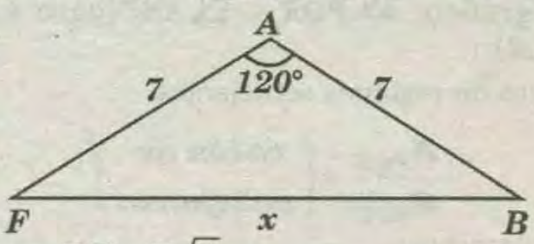
medidas de los ángulos externos en A, F, E y D es $60°$, además, se forman los triángulos AFM y DEN; estos, a la vez, forman el trapecio isósceles $MBCN$, donde $MB=CN$.

Como $DE=8 \Rightarrow DN=EN=8$

Así también si $AF=a \Rightarrow AM=MF=a$.

Luego: $a+7=6+8 \Rightarrow a=7$

Por lo tanto, en el triángulo notable BAF tenemos.



Entonces, $BF=7\sqrt{3}$.

RPTA : "E"

PROBLEMA 226 :

Un punto $M=(x; y)$ dista de un punto $C=(2 ; 5)$, $\sqrt{10}$ unidades. La pendiente de la recta que pasa por M y $A=(7; 5)$ es $1/2$. Determine el punto M de mayor abscisa.

A) (–1; 4) B) (–1; 6) C) (1; 8) D) (3; 2) E) (5; 4)

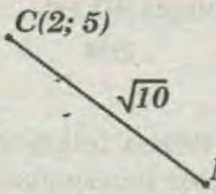
RESOLUCIÓN :

* Distancia entre dos puntos

* Ecuación de una recta

De la condición tenemos

*



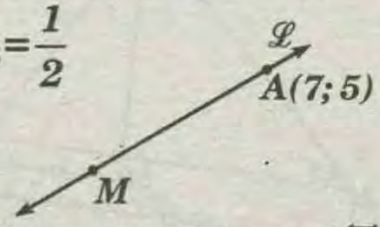
Por distancia entre los puntos se cumple que.

$$\sqrt{10}=\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}$$

Elevando el cuadrado, tenemos:

$$(x-2)^2+(y-5)^2=10 \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Dato: $m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}}=\frac{1}{2}$



Calculamos la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

$$y-5=m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}}(x-7)$$

$$\Rightarrow y-5=\frac{1}{2}(x-7) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

Reemplazamos (II) en (I):

$$(x-2)^2+\left(\frac{1}{2}(x-7)\right)^2=10 \Rightarrow (x-2)^2+\frac{1}{4}(x-7)^2=10$$

Reduciendo, tenemos $x^2-6x+5=0$

$x \quad -5$

$x \quad -1$

$x=5 \ \vee \ x=1$

Piden el punto M de mayor abscisa<, entonces, $x=5$.

Reemplazamos en (II):

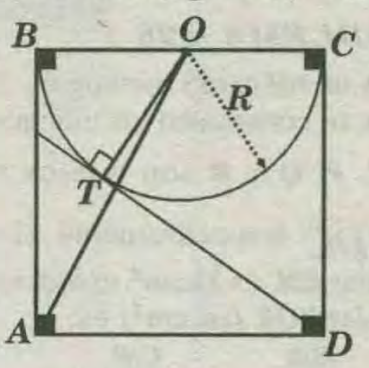
$$y-5=\frac{1}{2}(5-7) \Rightarrow y=4$$

Entonces, $M=(5; 4)$.

RPTA : "E"

PROBLEMA 227 :

En la figura mostrada $ABCD$ es un cuadrado de lado $2R$, además $\overline{BC}$ es diámetro de la semicircunferencia de centro O y radio de longitud R. Si T es un punto de tangencia, entonces $m\sphericalangle TOA$ es:

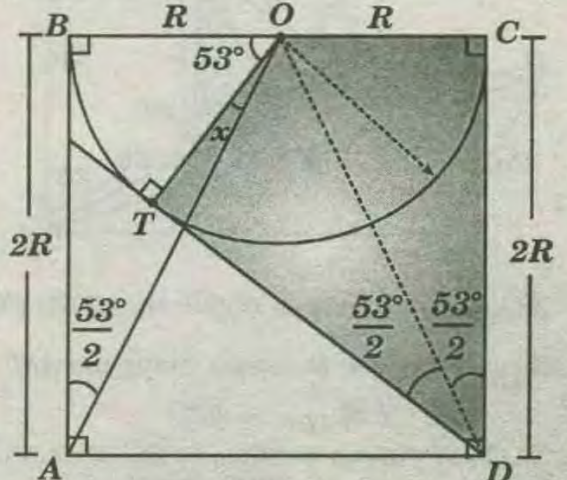


A)7,5 B)8 C)10 D)10,5 E)12,5

RESOLUCIÓN:

En la pregunta nos piden la medida de un ángulo; entonces, debemos ubicarlo en una figura donde se puede obtener dicha medida; por ejemplo, un triángulo; además, como se observa una semicircunferencia debemos aplicar los teoremas que se cumplen en la circunferencia.

En el gráfico, nos piden x.



Como $\square ABCD$ es un cuadradro

$$\Rightarrow BC = CD = 2(BO) = (OC) = 2R$$

Trazamos $\overline{OD} \rightarrow \overline{OD}$: Bisectriz del $\sphericalangle CDT$

Luego, $\triangle OCD$ (not 53°/2)

$$m\sphericalangle CDO = 53°/2 \text{ y } m\sphericalangle ODT = 53°/2$$

En $\square TOCD$: inscriptible

$$\Rightarrow m\sphericalangle BOT = m\sphericalangle CDTt$$

$$m\sphericalangle BOT = 53°$$

$\triangle OBA$ (not 53°/2)

$$m\sphericalangle BAO = \frac{53°}{2}$$

En $\triangle OBA$

$$53° + x + \frac{53°}{2} = 90° \Rightarrow x = \frac{21°}{2} \Rightarrow x = 10,5$$

La medida del ángulo *TOA* es *10,5°*.

RPTA : "D"

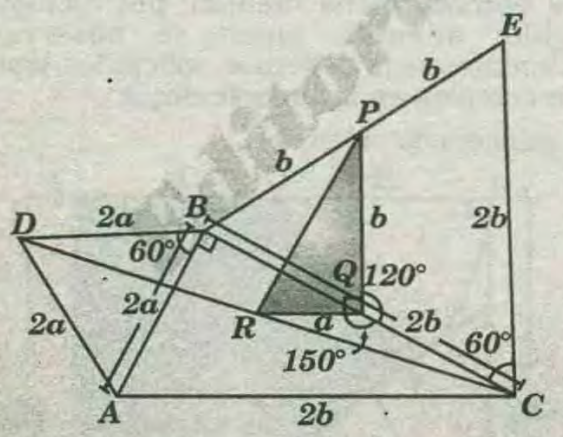
PROBLEMA 228 :

ABC es un triángulo rectángulo. Exteriormente a los catetos se construyen los triángulos equiláteros *ABD* y *BEC*, *P*, *Q* y *R* son puntos medios de $\overline{BE}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$ respectivamente. Si el área de la región triangular *ABC* es *32 cm²*, entonces el área de la región triangular *PQR (en cm²)* es:

A)4 B)6 C)8 D)12 E)16

RESOLUCIÓN:

Para relacionar las áreas de dos regiones triangulares, se busca la relación entre los elementos de ambos triángulos (lados, alturas, medida de ángulos, etc.).



Piden A_{PQR} : área de la región triangular *PQR*.

Dato A_{ABC}: área de la región triangular *ABC*.

$$(A_{ABC} = 32)$$

Por ser *P*, *Q* y *R* puntos medios, se determinan bases medias en los triángulos *BEC* y *DBC*.

$$\overline{QR} // \overline{DB}$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle RQC = 150° \text{ y } RQ = \frac{BD}{2}$$

$$\overline{PQ} // \overline{EC} \Rightarrow m\sphericalangle PQC = 120° \text{ y } PQ = \frac{EC}{2}$$

Luego

$$\Rightarrow m\sphericalangle PQR = 90°$$

En el gráfico, $\triangle PQR \sim \triangle ABC$ (caso *LAL* de razón *1/2*)

Por áreas de regiones semejantes

$$\frac{A_{PQR}}{A_{ABC}} = \left(\begin{matrix}\text{razón de} \\ \text{semejanza}\end{matrix}\right)^2$$

Reemplazamos:

$$\frac{A_{PQR}}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow A_{PQR} = 8$$

El área de la región triangular *PQR* (en cm^2) es *8*.

RPTA : "C"

PROBLEMA 229 :

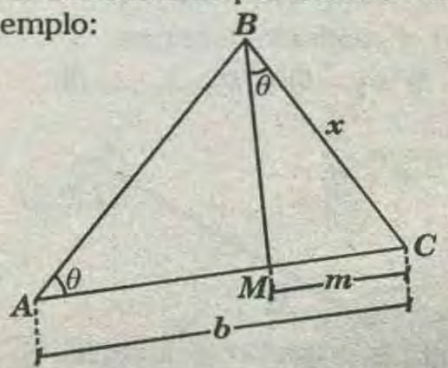
Se da un triángulo $\overline{ABC}$ cuyos lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ miden *8 m* y *6 m*, respectivamente. Sobre $\overline{AB}$ se toma el punto *D*.

Si $m\measuredangle BAC = m\measuredangle BCD$, entonces *AD* es:

A)3,5 B)4 C)4,5 D)5 E)5,5

RESOLUCIÓN :

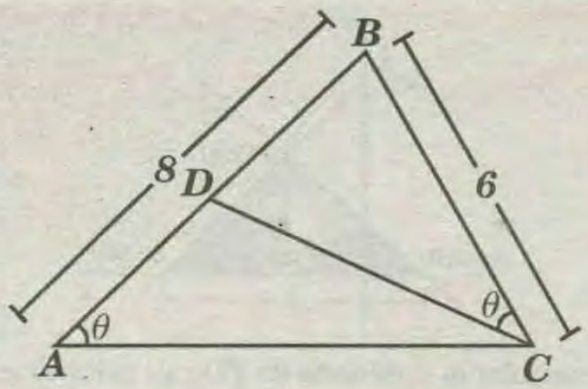
Cuando en un triángulo se desea relacionar las longitudes de lados y segmentos determinados por una ceviana, se puede recurrir a la teoría de semejanza, y más aún si la medida de un ángulo es igual al ángulo determinado por dicha ceviana y un lado; por ejemplo:



TEOREMA:

En el $\triangle ABC$

$$m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle MBC = \theta \Rightarrow x^2 = bm$$



Piden **AD**.

DATOS:

$$AB=8,\ BC=6$$

$$m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle BCD$$

$\triangle ABC$: Por teorema de semejanza tenemos:

$$(BC)^2=(AB)(BD)$$

También:

$$BD=8-AD$$

Reemplazamos:

$$6^2=8(8-AD)\Rightarrow AD=3{,}5$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 230:

En la figura , se muestra un cilindro de revolución y un trapecio **ABCD** , cuya área es $6\sqrt{3}\ cm^2$. Halle el volumen del cilindro, sabiendo que **C** es centro de la base superior y $\overline{AD}$ es el diámetro de la base inferior.

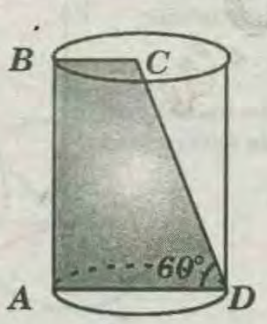
A) $6\sqrt{3}\pi\ cm^3$

B) $10\sqrt{3}\pi\ cm^3$

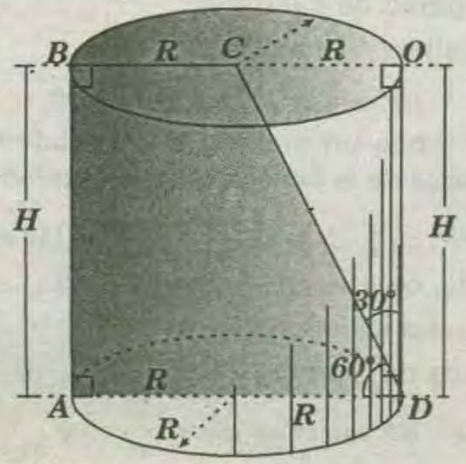
C) $8\sqrt{3}\pi\ cm^3$

D) $\frac{8}{\sqrt{3}}\pi\ cm^3$

E) $10\pi\ cm^3$



RESOLUCIÓN :



Piden : $V_{cilindro}=(\pi R^2)H$.....*(I)*

Dato

$$A_{\square ABCD}=6\sqrt{3}=\left(\frac{R+2R}{2}\right)H\text{.....(II)}$$

$\triangle COD$ (notable de *30°* y *60°*)

$$H=R\sqrt{3}\text{.....(III)}$$

(III) en *(II)*:

$$6\sqrt{3}=\left(\frac{3R}{2}\right)(R\sqrt{3})\Rightarrow R=2\ \wedge\ H=2\sqrt{3}$$

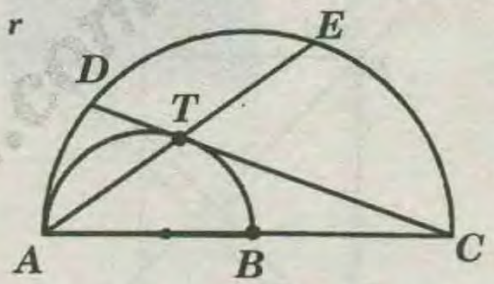
* Reemplazamos en *(I)*:

$$V_{cilindro}=8\sqrt{3}\pi\ cm^3$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 231 :

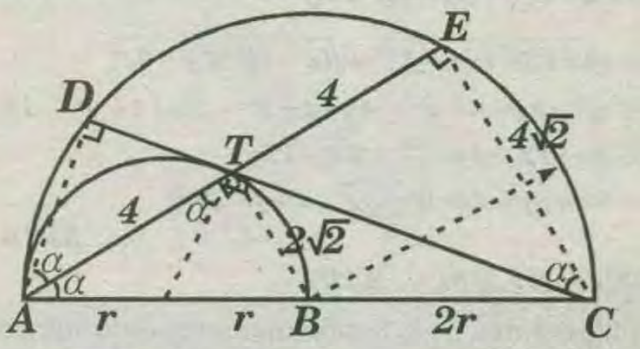
En la figura $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son diámetros , $\overline{CT}$ es tangente al arco $\widehat{AB}$, $AB=BC=2r$ y $ET=4$. Calcule **r**



A) $2\sqrt{3}$ ***B)*** $2\sqrt{2}$ ***C)*** $\sqrt{3}$ ***D)*** $\sqrt{6}$ ***E)*** $3\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

En el problema nos piden calcular el radio de la semicircunferencia menor, para ello debemos relacionar el dato numérico con la variable, utilizando los teoremas que se cumplen en circunferencias tangentes interiores. Luego, para obtener el valor del radio debemos establecer una operación que relacione la incógnita con los datos.



Trazamos $\overline{BT}\Rightarrow m\sphericalangle BTA=90°$

Por teorema: *ET=TA=4*

Trazamos $\overline{AD}$

$\Rightarrow \overline{AT}$ es bisectriz del $\sphericalangle DAC$

$$m\sphericalangle DAT=m\sphericalangle TAC=\alpha$$

Luego: $m\sphericalangle ECD = m\sphericalangle DAE = \alpha$

En $\triangle AEC$: Teorema de semejanza

$$(EC)^2 = (8)(4) \Rightarrow EC = 4\sqrt{2}$$

$\triangle AEC$: Teorema base media $\Rightarrow TB = 2\sqrt{2}$

$\triangle ATB$: $(2r)^2 = 4^2 + (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow r = \sqrt{6}$

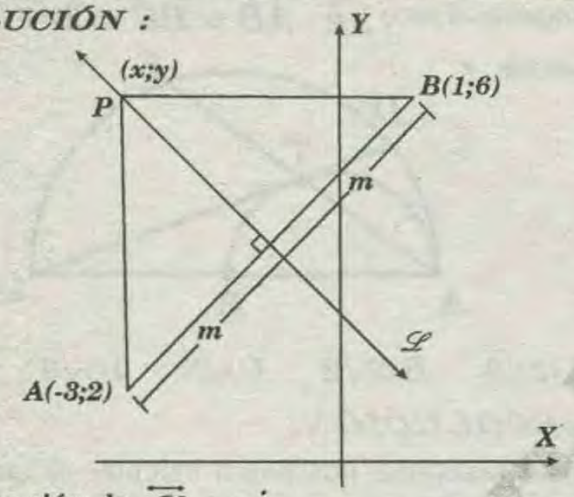
RPTA : "D"

PROBLEMA 232 :

Los puntos $A(-3;2)$ y $B(1;6)$ son los extremos del segmento $\overline{AB}$. Hallar la ecuación de la mediatriz de $\overline{AB}$.

A) $x+y-3=0$ B) $x-y+3=0$ C) $3x-y-1=0$
D) $x-3y+1=0$ E) $x-y+5=0$

RESOLUCIÓN :



Piden ecuación de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es el conjunto de todos los puntos coplanares y equidistantes de A y B.

Luego $d(P;A) = d(P;B)$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-6)^2}$$

$$\Rightarrow x^2+6x+9+y^2-4y+4 = x^2-2x+1+y^2-12y+36$$

$$\Rightarrow 6x+13-4y = 37-2x-12y$$

$$\Rightarrow 8x+8y-24=0 \Rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}} : x+y-3=0$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 233:

Hallar el área de la región triangular determinada por las rectas $L_1: 3x-4y+6=0$, $L_2: 3x+y-9=0$ y el eje X.

A) 8 u² B) 7,5 u² C) 8,5 u² D) 9 u² E) 10 u²

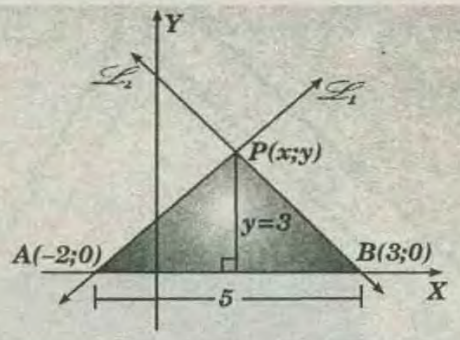
RESOLUCIÓN:

Sean las ecuaciones de las rectas:

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} : 3x-4y+6=0$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} : 3x+y-9=0$$

Graficamos:



Para calcular la ordenada de $P(x;y)$ resolvemos las ecuaciones de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

$$3x-4y+6 = 3x+y-9 \Rightarrow y = 3$$

Nos piden el área de la región triangular APB: $\mathbb{S}$

$$\mathbb{S} = \frac{5\times 3}{2} \Rightarrow \mathbb{S} = 7{,}5\ u^2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 234 :

Halle la suma de los valores de k, tales que la recta $y=kx$ sea tangente a la curva

$$x^2+y^2-6x-2y+6=0.$$

A) $-6/5$ B) $5/6$ C) $-5/6$ D) $6/5$ E) $3/5$

RESOLUCIÓN :

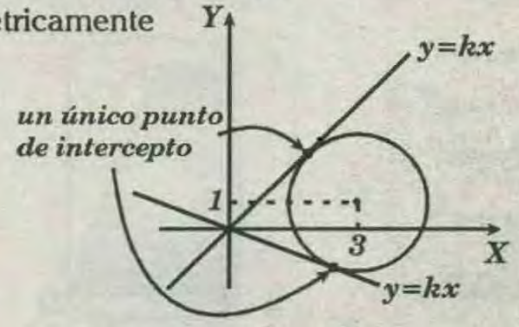
Datos: $y = kx$.....(I)

$$x^2+y^2-6x-2y+6=0 \ldots (II)$$

De (II) : $\underbrace{(x-3)^2+(y-1)^2=2^2}_{\text{Ecuación de una circunferencia}}$

* (I) debe ser tangente a (II)

Geométricamente



* Dependiendo de k, existen dos posibilidades para un único punto de intercepto.

Reemplazamos (I) en (II) :

$$(k^2+1)x^2-2(k+3)x+6=0$$

Para que tenga un único punto de intercepto, el discriminante de la ecuación anterior debe ser cero.

Luego, $\triangle = 0 \Rightarrow [-2(k+3)]^2 - 4(k^2+1)6 = 0$

reduciendo, obtenemos : $5k^2-6k-3=0$.....(α)

Piden la suma de valores de k.

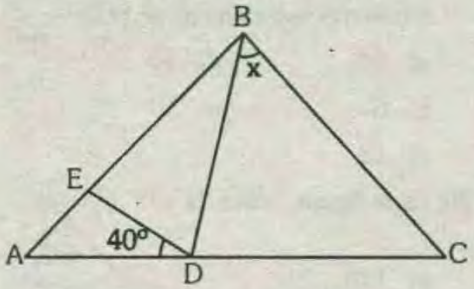
Por teorema de Cardano en (α) :

$$\Rightarrow \text{suma de valores de } k = \frac{6}{5}$$

RPTA "D"

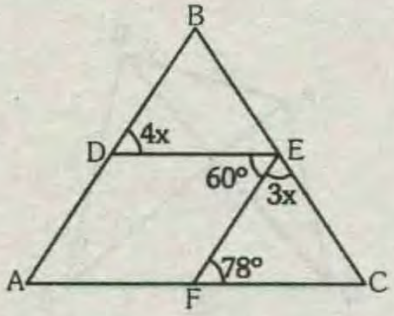
MISCELANEA 1

01. En la figura, AB = BC y BE = DB.
Hallar : **x**



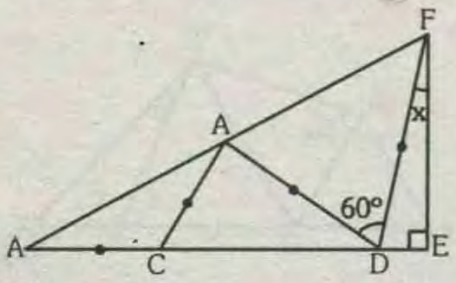
a) 60° d) 90°
b) 45° e) 85°
c) 80°

02. En la figura, AB = BC. Hallar: **x**



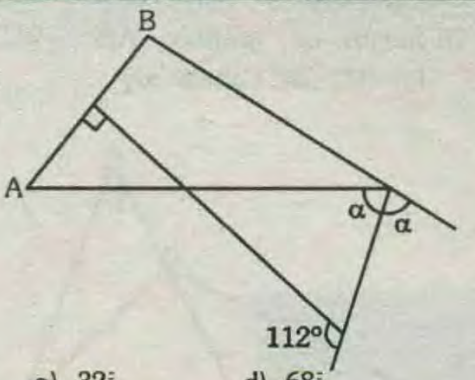
a) 8° d) 15°
b) 10° e) 12°
c) 18°

03. En la figura. Hallar: **x**



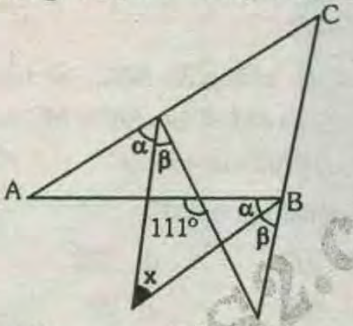
a) 15° d) 12°
b) 9° e) 10°
c) 13°

04. En la figura, hallar m∢B – m∢A.



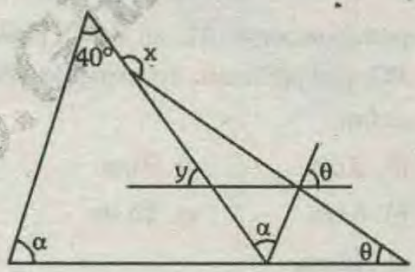
a) 32° d) 68°
b) 84° e) 72°
c) 44°

05. En el gráfico, AB = BC, calcule **x**.



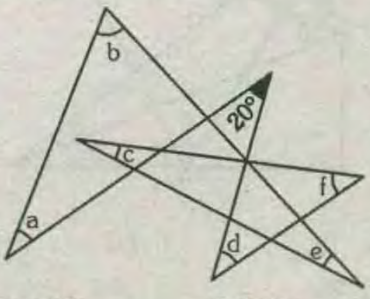
a) 10° d) 37°
b) 40° e) 20°
c) 50°

06. En el gráfico, calcule x + y.



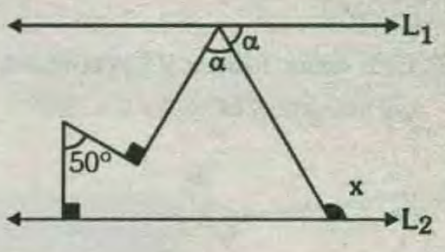
a) 200° d) 230°
b) 210° e) 240°
c) 220°

07. En el gráfico mostrado, calcule a + b + c + d + e + f.



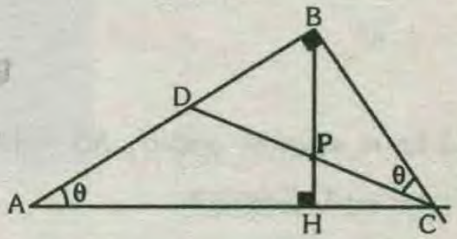
a) 150° d) 210°
b) 230° e) 200°
c) 220°

08. En la figura $\overline{L_1} // \overline{L_2}$. Calcular: **x**



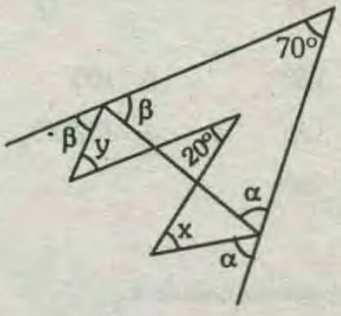
a) 115° d) 90°
b) 120° e) 130°
c) 100°

09. En el gráfico BP = 8; calcule: DC



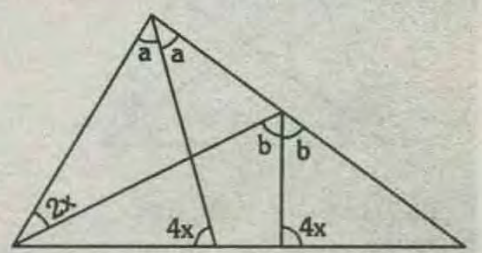
a) 8 d) 16
b) 16 e) 18
c) 20

10. Del gráfico, calcule: x + y



a) 30° d) 60°
b) 40° e) 70°
c) 50°

11. En la figura, hallar el valor de **x**

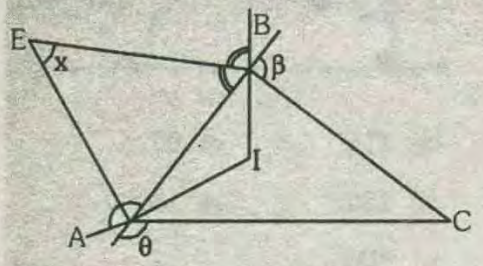


a) 40° d) 15°

WWW.GRATIS2.COM

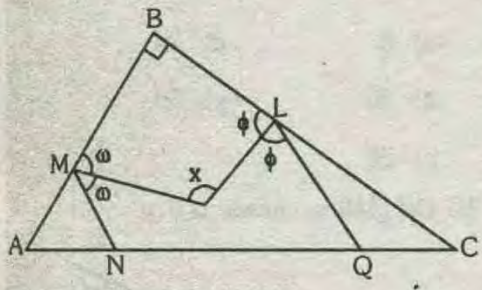
b) 30° e) 45°
c) 20°

12. En la figura, hallar **x** si **I** es el incentro del triángulo ABC y $\beta + \theta = 190°$



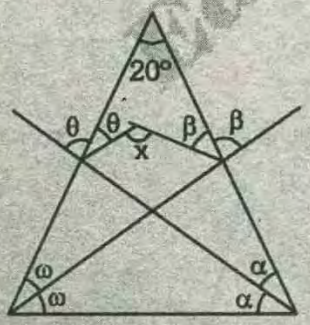
a) 42°30' d) 41°
b) 41°30' e) 95°
c) 42°

13. En el siguiente gráfico, AN = MN LQ = QC. Calcule **x**.



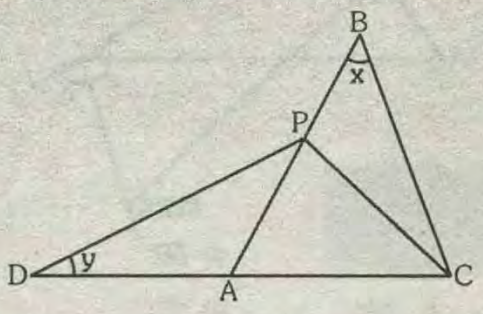
a) 130° d) 100°
b) 135° e) 157°30'
c) 150°

14. Del gráfico, calcule **x**.



a) 120° d) 150°
b) 130° e) 160°
c) 140°

15. Según el gráfico, AB = BC, PD = PC = AC Calcule: x/y



a) 1 d) 1/3
b) 2 e) 3
c) 1/2

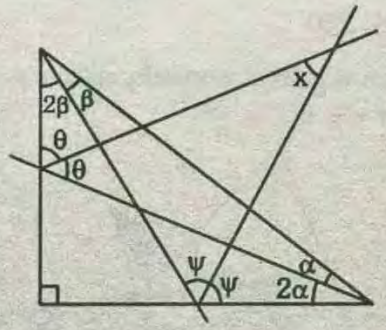
16. En un triángulo ABC, se traza la ceviana AM tal que AM = MC = AB y $m\sphericalangle BAM = m\sphericalangle ACB$.
Calcule : $m\sphericalangle AMC$

a) 100° d) 120°
b) 108° e) 72°
c) 112°

17. En un triángulo ABC, por B se trazan paralelas a las bisectrices interiores de A y C, intersectando a las prolongaciones $\overline{AC}$ en P y Q. Hallar PQ, si el perímetro del triángulo ABC es 6m.

a) 3 cm d) 9 cm
b) 6 cm e) 15 cm
c) 12 cm

18. De la figura calcule: **x**

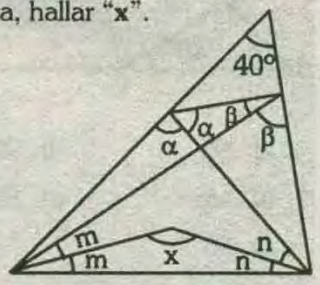


a) 45° d) 40°
b) 20° e) 35°

19. Sea el triángulo PQR en las prolongaciones de $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ se ubican los puntos M y T respectivamente, tal que $m\sphericalangle QMT = m\sphericalangle QRT$, PR = 6 y QR = 4. Calcule la suma del máximo y mínimo valor entero de PQ.

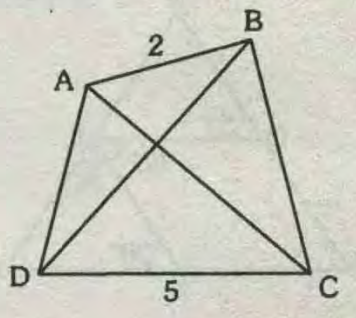
a) 14 d) 16
b) 6 e) 10
c) 12

20. En la figura, hallar "**x**".



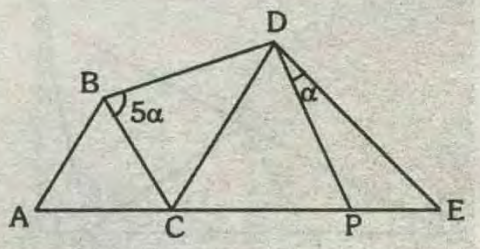
a) 110
b) 110°
c) 120°
d) 125°
e) 132°

21. Del gráfico calcular el mínimo valor entero de "AC+BD"



a) 6 d) 9
b) 7 e) 10
c) 8

22. En el gráfico; los triángulos ABC y CDE son equiláteros y AC = PE; calcule α.



a) 5° d) 20°
b) 10° e) 30°
c) 15°

23. En un triángulo ABC se traza la ceviana BE. Hallar la $m\sphericalangle ABC$, si AB = BE = EC y la $m\sphericalangle BCE = 20°$

a) 90° d) 120°
b) 100° e) 130°

c) 110°

24. En un triángulo ABC la bisectriz exterior del $\measuredangle A$, con la bisectriz interior del $\measuredangle C$ se intersectan formando un ángulo de 40°.

Si se sabe que $m\measuredangle A - m\measuredangle C = 24°$, hallar la medida del $m\measuredangle ACB$.

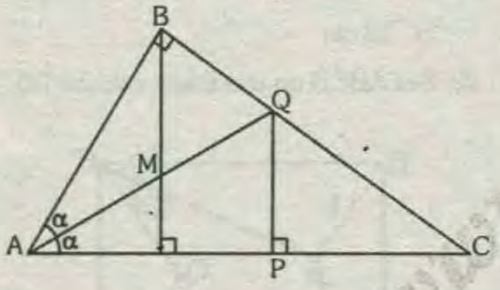
a) 30° d) 38°
b) 32° e) 40°
c) 36°

CUADRO DE RESPUESTAS

01. c	09. d	17. b
02. e	10. d	18. a
03. e	11. c	19. a
04. c	12. a	20. d
05. d	13. b	21. c
06. c	14. c	22. d
07. e	15. b	23. d
08. a	16. b	24. d

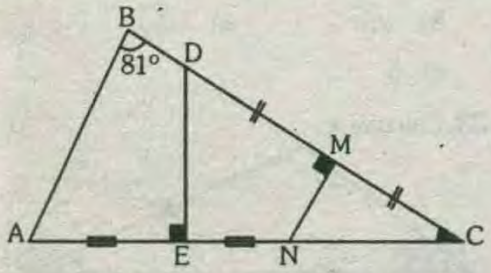
MISCELANEA 2

01. En la figura, BM = 40m. Calcular PQ.



a) 30 m d) 50 m
b) 20 m e) 15 m
c) 40 m

02. Calcular x, si AB = NC.



a) 27° d) 26°
b) 37° e) 24°
c) 47°

03. La mediatriz del lado $\overline{AC}$ de un triángulo ABC corta a $\overline{BC}$ en M, tal que ; MC = 2(BM).

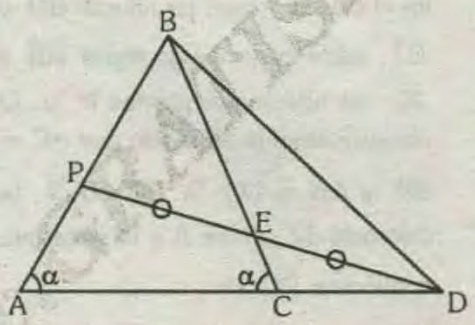
Hallar la $m\measuredangle BCA$, si $m\measuredangle ABC = 90°$

a) 15° d) 60°
b) 30° e) 75°
c) 45°

04. En un triángulo rectágulo ABC recto en B, se traza la bisectriz interior AN, si 3(NC) = 5(BN). Calcular la $m\measuredangle BAN$.

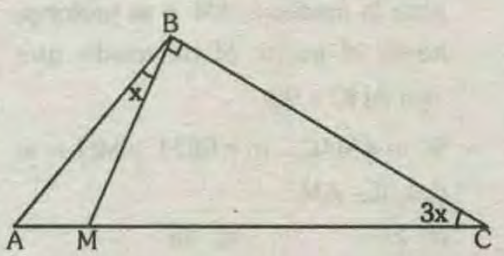
a) 27°/2 d) 40°
b) 53°/2 e) 15°
c) 45°

05. Si BE = 14 m y EC = 8 m. Calcular BP.



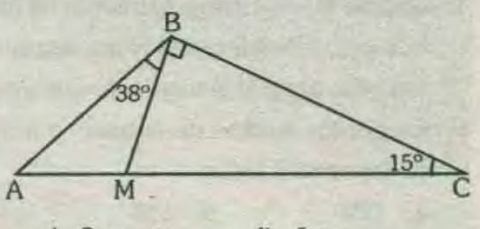
a) 6 d) 9
b) 7 e) 10
c) 8

06. Calcular "x", si MC = 2(AB)



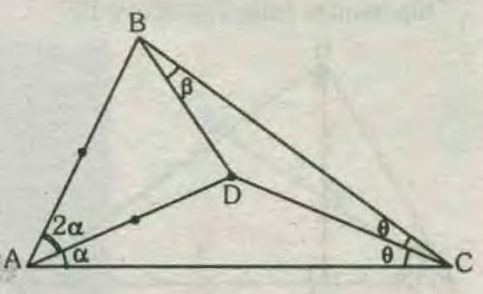
a) 9° d) 30°
b) 10° e) 11°
c) 15°

07. En el gráfico mostrado calcular AB, si MC = 12 m.



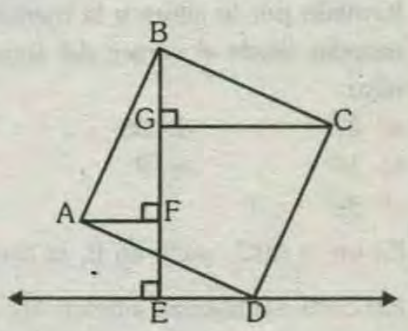
a) 3 m d) 6 m
b) 4 m e) 7 m
c) 5 m

08. En la figura, calcule "β".



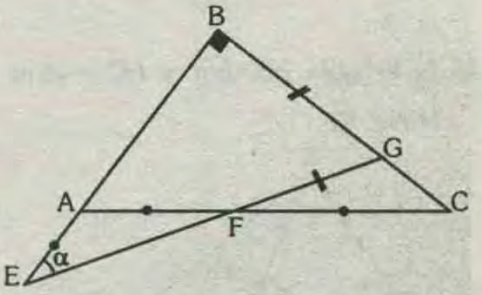
a) 15° d) 53°
b) 30° e) 45°
c) 37°

09. Si ABCD es cuadrado, siendo ED = a.
Calcule "GF"



a) a d) 2a
b) a/2 e) 2a/3
c) a/3

10. En la figura, calcule "α"

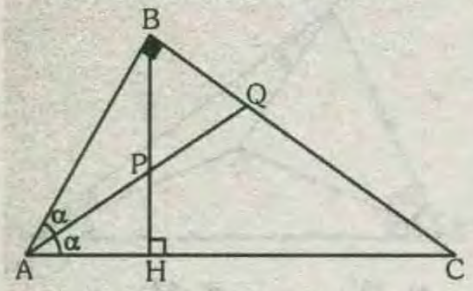


a) 15° d) 45°
b) 18° e) 20°
c) 30°

11. Calcule el mayor ángulo interior de un triángulo isósceles, si la altura relativa a la base es igual al segmento que une los puntos medios de la base y uno de los otros 2 lados.

a) 120° d) 115°
b) 110° e) 122°
c) 100°

12. En la figura la distancia de P al cateto AB es 3 y la distancia de Q a la hipotenusa mide 7. Calcular BH.



a) 21 d) 12
b) 10.5 e) 9
c) 10

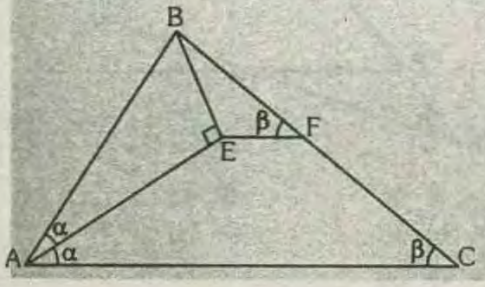
13. Las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo están en la razón 3/7. Hallar la medida del ángulo formado por la altura y la mediana trazadas desde el vértice del ángulo recto.

a) 27° d) 36°
b) 10° e) 9°
c) 20°

14. En un ΔABC, recto en B, la altura BH corta a la bisectriz interior $\overline{AD}$ en el punto E. Si BE = 12, hallar la distancia del punto medio de $\overline{DC}$ a $\overline{AC}$.

a) 6 d) 5
b) 4 e) 9
c) 3

15. En la figura, AB=8m y AC = 14 m. Hallar: EF.



a) 3 m d) 4 m
b) 1 m e) 5 m
c) 2 m

16. La mediana $\overline{AM}$ y la altura $\overline{BH}$ de un triángulo ABC se cortan en "P" si AP = PM. Calcular BP si PH = 1 u.

a) 1 u d) 4 u
b) 2 u e) 2,2 u
c) 3 u

17. ABC es un triángulo en el cual $m\sphericalangle C = 75°$, la altura BH mide la mitad de lo que mide AC. Halle la $m\sphericalangle ABC$.

a) 75° d) 37°
b) 60° e) 30°
c) 45°

18. Se tiene un triángulo acutángulo ABC en el cual se trazan las alturas $\overline{BH}$ y $\overline{CJ}$, sobre las prolongaciones $\overline{HB}$ y $\overline{JC}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente de modo que AC = BP y AB = CQ. Si $PQ = 6\sqrt{3}$, la distancia del vértice A a la recta que contiene a $\overline{PQ}$ es:

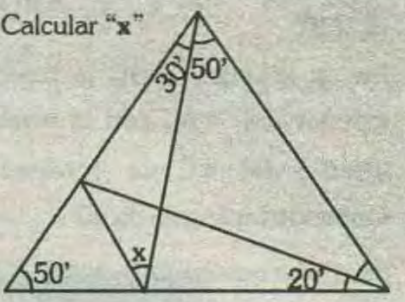
a) 3 d) $3\sqrt{3}$
b) 4 e) $4\sqrt{3}$
c) $2\sqrt{3}$

19. En un triángulo ABC (AB = BC) se traza la mediana $\overline{AM}$ y se prolonga hasta el punto H de modo que $m\sphericalangle AHC = 90°$.

Si $m\sphericalangle MAC = m\sphericalangle BCH$ y MH = a. Calcule: AM.

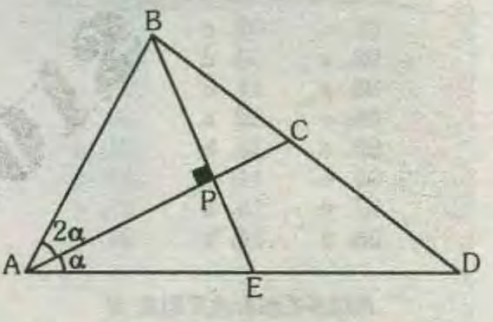
a) 2a d) 4a
b) $\frac{3}{4}a$ e) 6a
c) $\frac{4}{3}a$

20. Calcular "x"



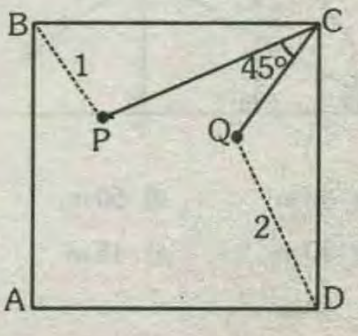
a) 20° d) 45°
b) 30° e) 50°
c) 40°

21. En la figura, calcular "PC", si: AB = 20 cm, BC = CD



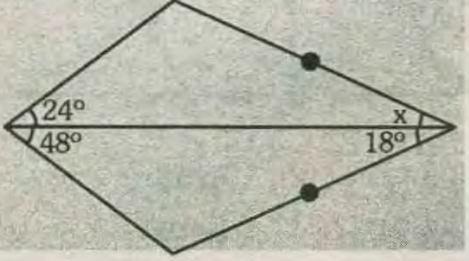
a) 10 cm d) 16 cm
b) 6 cm e) 8 cm
c) 12 cm

22. Sea ABCD un cuadrado; calcular PQ.



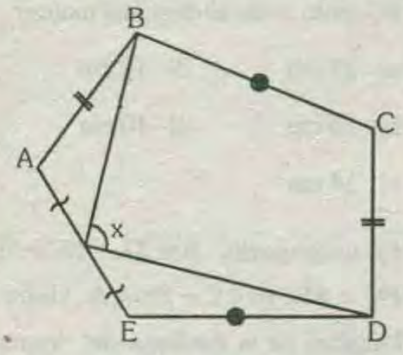
a) 3 d) $\sqrt{7}$
b) $\sqrt{5}$ e) $\sqrt{10}$
c) 6

23. Calcular x.



a) 6° d) 9°
b) 12° e) 36°
c) 10°

08. Calcular **x**; si $m\hat{ABC} + m\hat{EDC} = 180°$



a) 90° d) 120°
b) 60° e) 75°
c) 45°

CUADRO DE RESPUESTAS

01. c	09. a	17. a
02. a	10. b	18. d
03. b	11. a	19. e
04. b	12. c	20. c
05. a	13. d	21. a
06. a	14. a	22. b
07. c	15. a	23. a
08. b	16. c	24. a

MISCELANEA 3

01. En un trapecio isósceles, las bases miden 8 y 14 cm respectivamente. Si los lados no paralelos determinan con la base ángulos de 53°, ¿cuánto mide la altura?

a) 3 d) 6
b) 4 e) 7
c) 5

02. La base mayor de un trapecio mide el triple de la menor. Si la mediana mide 12 cm, ¿cuánto mide la base menor?

a) 6 d) 12
b) 10 e) 11
c) 9

03. En un trapecio ABCD isósceles (AB=CD), la diagonal $\overline{AC}$ es perpendicular al lado $\overline{CD}$. Si $m\sphericalangle CAD = 30°$ y AD = 8 cm, ¿cuánto mide la mediana?

a) 6 d) 5
b) 3 e) 7
c) 4

04. En un paralelogramo ABCD la bisectriz del ángulo ABC intersecta a $\overline{AD}$ en E. Si CD = 12 m, calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{BD}$ y $\overline{EC}$.

a) 6 m d) 10 m
b) 7 m e) 12 m
c) 8 m

05. En un triángulo ABC, $\overline{AC}$ mide 12 cm. Si M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ ¿cuánto mide la mediana del trapecio AMNC?

a) 8 cm d) 11 cm
b) 9 cm e) 12 cm
c) 20 cm

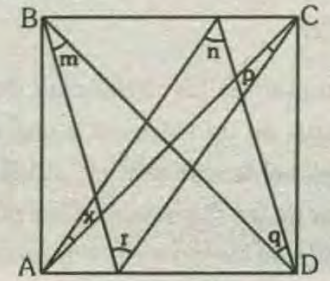
06. Los ángulos adyacentes a un lado no paralelo de un trapecio, se diferencian en 50°. ¿Cuánto mide el menor de ellos?

a) 50° d) 65°
b) 55° e) 70°
c) 60°

07. Las bases de un trapecio isósceles miden 8 y 14 cm, y la altura 4 cm. ¿Cuánto miden los lados no paralelos?

a) 6 cm d) 8 cm
b) 5 cm e) 9 cm
c) 7 cm

08. En la figura. el cuadrilátero ABCD es un cuadrado. si m + n + p + q + r = 158°. Hallar **x**.



a) 23° d) 21°
b) 20° e) 24°
c) 22°

09. El perímetro de un rombo es 80 cm y uno de sus ángulos agudos miden 60°. ¿Cuál es la diferencia entre la diagonal mayor y la diagonal menor?

a) $20(\sqrt{3}-1)$ cm
b) $20(\sqrt{2}-1)$ cm
c) $10\sqrt{2}$ cm
d) $20\sqrt{3}$ cm
e) $10(\sqrt{3}-1)$ cm

10. En un cuadrado ABCD desde un punto interior "E" se traza el triángulo equilátero ECD, luego se traza la mediana $\overline{CF}$ en el triángulo BCE, si la suma de la distancia de F a $\overline{BC}$ y ED es 5μ. Calcule BD.

a) $\sqrt{2}\mu$ d) $4\sqrt{2}\mu$
b) $2\sqrt{2}\mu$ e) $5\sqrt{2}\mu$
c) $3\sqrt{2}\mu$

11. Se tiene un rectángulo ABCD en la cual $m\sphericalangle BCA = \alpha$, calcule AC si al trazar la ceviana $\overline{DE}$ que mide 3μ en el triángulo ACD, $m\sphericalangle AED = 2\alpha$.

a) 3μ. d) 6μ
b) 4μ e) 8μ
c) 5μ

12. Dado el trapezoide ABCD, calcular la medida del ángulo formado por la bisectriz interior del ángulo $\hat{A}$ y la bisectriz exterior del ángulo $\hat{D}$, si $m\hat{B} = 130°$ y $m\hat{C} = 100°$.

a) 25° d) 30°
b) 35° e) 20°
c) 50°

13. La porción de mediana comprendido entre las diagonales de un trapecio mide 30 cm. Calcular la longitud de toda la mediana sabiendo que la base

mayor mide el cuádruple de la base menor.

a) 40 cm d) 24 cm
b) 48 cm e) 100 cm
c) 50 cm

14. Un rectángulo ABCD tiene por lados AB = 24 cm y AD = 14 cm. Trazamos la bisectriz $\overline{AE}$, con E sobre $\overline{DC}$, y una paralela a $\overline{AB}$ que pasa por el punto I de intersección de las diagonales y corta a $\overline{AE}$ en M. Determinar MI.

a) 8 d) 6
b) 4 e) 10
c) 5

15. En un rombo, las diagonales miden 6 y 8 cm. Hallar la distancia que hay entre 2 lados opuestos.

a) 9,2 cm d) 6.8 cm
b) 9,4 cm e) 4.8 cm
c) 9,6 cm

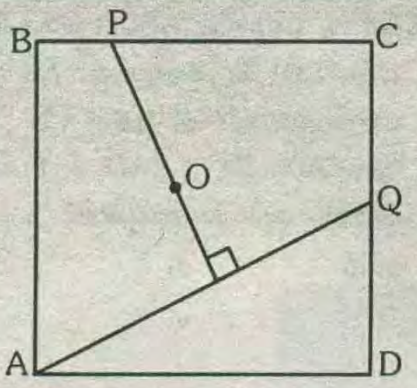
16. En un trapecio rectángulo las bases miden 4 y 10 cm respectivamente. Si un lado no paralelo determina un ángulo de 60° con la base, ¿cuánto mide dicho lado?

a) 14 cm d) 12 cm
b) 7 cm e) 6 cm
c) $14\sqrt{3}$ cm

17. El perímetro de un cuadrado es 24 cm. Hallar el perímetro del cuadrilátero determinado por los puntos medios de los lados.

a) 12 cm d) 6 cm
b) $12\sqrt{2}$ cm e) 18 cm
c) $12\sqrt{3}$ cm

18. En el gráfico ABCD es un cuadrado cuyo centro es O. Si CQ = 4, calcular BP.

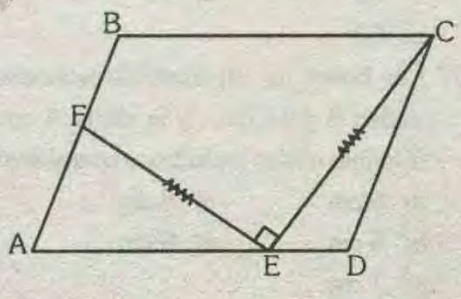


a) 2 d) 4
b) 1 e) 1,5
c) 3

19. En un triángulo ABC se toma un punto interior "O", de modo que AO=BC=a. Hallar el perímetro del cuadrilátero MNPQ, siendo M, N, P y Q puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente.

a) 2a d) 3a
b) 4a e) $\frac{5a}{2}$
c) $\frac{3a}{2}$

20. En la figura.Calcule $m\sphericalangle FEA$, si: BF = FA y ABCD es romboide.



a) 15 d) 53°/2
b) 37°/2 e) 45°
c) 30°

21. Si sumamos las distancias de los vértices de un triángulo a una recta exterior obtenemos 62 cm. ¿Cuál es la suma de las distancias de los puntos medios de los lados a la misma recta?

a) 58 cm d) 31 cm
b) 62 cm e) 40 cm
c) 50 cm

22. El perímetro de un rombo es 40 cm y sus diagonales son como 3 a 4. ¿Cuánto mide la diagonal mayor?

a) 18 cm d) 12 cm
b) 16 cm e) 10 cm
c) 14 cm

23. En un trapecio ABCD, $\overline{BC} // \overline{AD}$, BC < AD; $m\sphericalangle C = 2m\sphericalangle A$. Hallar la longitud de la mediana del trapecio si BC = 12 cm y CD = 18 cm.

a) 21 cm d) 24 cm
b) 18 cm e) 26 cm
c) 15 cm

24. En un trapecio rectángulo ABCD, si $P \in \overline{CD}$ (lado oblicuo), $Q \in \overline{AD}$ (base mayor), $m\hat{ABP} = 70°$ y $\hat{mD} = 23°$. Hallar $m\hat{BPQ}$, si $\hat{BPC} \cong \hat{QPD}$.

a) 157° d) 174°
b) 160° e) 175°
c) 165°

CUADRO DE RESPUESTAS

01. b	09. a	17. b
02. a	10. d	18. a
03. a	11. d	19. a
04. a	12. a	20. d
05. b	13. c	21. b
06. d	14. c	22. b
07. b	15. c	23. a
08. c	16. d	24. d

MISCELANEA SOBRE PUNTOS NOTABLES

01. Los puntos notables que equidistan de los lados y vértices de un triángulo son respectivamente:
a) Circuncentro y Baricentro
b) Incentro y Ortocentro
c) Circuncentro e Incentro
d) Incentro y Circuncentro
e) Incentro y Baricentro

02. "I" es el incentro del triángulo ABC si el exradio relativo al lado BC mide 4 y BI = 5. Calcular la distancia del incentro al excentro si el ángulo exterior del vértice B mide 106°
a) $5\sqrt{2}$ d) 4
b) $5\sqrt{3}$ e) $\sqrt{3}$
c) 2

03. En un triángulo ABC el incentro es "I" y los excentros son I_a , I_b , I_c para el triángulo cuyos vértices son I_a , I_b , I_c entonces "I" es:
a) Ortocentro d) a ó b
b) Incentro e) b ó c
c) Excentro

04. En un triángulo ABC $m\measuredangle C = 40°$, se trazan la altura $\overline{BH}$ y la bisectriz $\overline{BD}$ del ángulo ABC. Si $m\measuredangle HBD = 20°$, calcular $m\measuredangle ABC$.
a) 30° d) 60°
b) 45° e) 75°
c) 50°

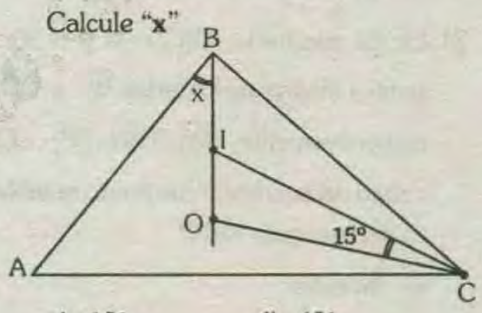
05. En un triángulo ABC isósceles las medianas iguales son perpendiculares. Si la distancia del baricentro al vértice común a los lados iguales mide 4u. Calcular la base.
a) 1 u d) 4 u
b) 2 u e) 3,5 u
c) 2,5 u

06. ¿Qué puntos notables pueden estar sobre el triángulo?
a) Incentro y Ortocentro
b) Incentro y Baricentro
c) Circuncentro y Excentro
d) Ortocentro y Baricentro
e) Ortocentro y Circuncentro

07. En un triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{CF}$, siendo "O" el circuncentro del ΔAFC.
Calcular $m\measuredangle C$, si $m\measuredangle B = m\measuredangle OCF$
a) 45° d) 75°
b) 30° e) 90°
c) 60°

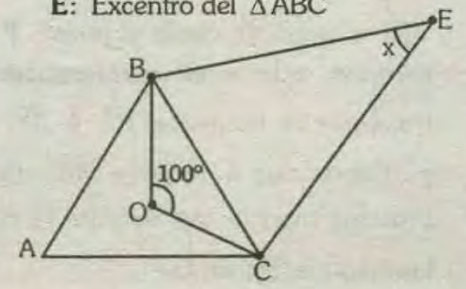
08. En un triángulo equilátero la suma de los tres exradios es $15\sqrt{3}$. Calcular el perímetro del triángulo equilátero.
a) 10 d) 25
b) 15 e) 30
c) 20

09. Siendo:
O : Ortocentro del ΔABC
I : Incentro del ΔABC
Calcule "x"



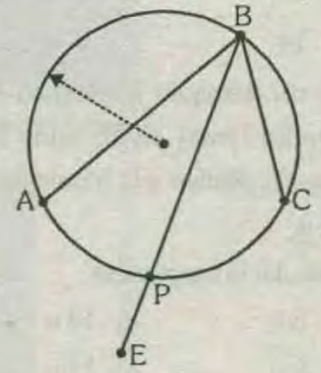
a) 10° d) 40°
b) 20° e) 45°
c) 30°

10. Siendo:
O: Ortocentro y
E: Excentro del ΔABC



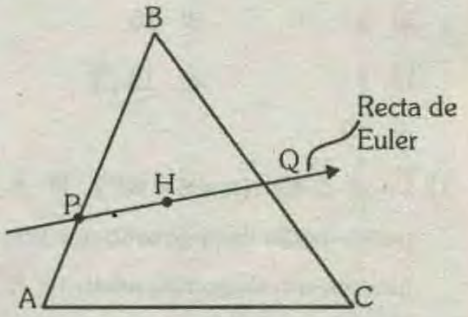
a) 20° d) 50°
b) 30° e) 60°
c) 40°

11. En la figura E ← Excentro del ΔABC ; calcular $\frac{AP}{PE}$.



a) 2 d) 1
b) 3 e) 1.5
c) 4

12. Si "H" es ortocentro del ΔABC y $mA\hat{H}C = 120°$.
¿Qué triángulo es PBQ?.



a) Escaleno d) Rectángulo
b) Equilátero e) Obtuso
c) Isósceles

13. Las rectas de Euler de los triángulos ABC (recto en **B**) y **ADC** (equilátero) se cortan sobre la hipotenusa en el punto **M** y formando 40°.
Calcule: $m\measuredangle C$.
a) 15° d) 30°
b) 20° e) 35°
c) 25°

14. En un triángulo isósceles ABC (AB=BC) si "**G**" es el baricentro, GM = 20 y la base mide 48; siendo **AM** mediana. Calcular la distancia del baricentro a la base.

a) 9 d) 16
b) 12 e) 32
c) 14

15. En un triángulo rectángulo ABC el inradio (recto en B) mide 2u y el exradio relativo a la hipotenusa mide 15 u.
Calcular la hipotenusa.

a) 5 u d) 13 u
b) 8 u e) 17 u
c) 15 u

16. En un triángulo equilátero ABC la paralela a $\overline{AC}$ por "**B**" corta a la prolongación de $\overline{AI}$ en **M** ("**I**" incentro).
Calcular la distancia del ortocentro al punto "**M**" si BI = 5.

a) 5 d) 15
b) 7 e) $15\sqrt{3}$
c) 10

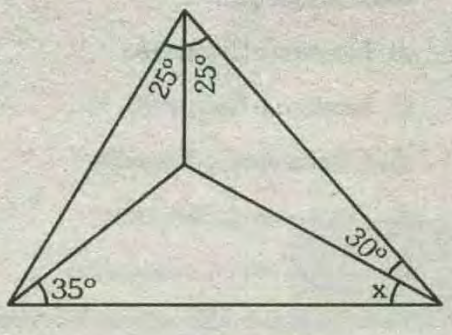
17. En el $\triangle ABC (m\sphericalangle B = 40°)$, **M** es el punto medio del segmento que une el incentro con el excentro relativo a $\overline{AC}$.
Hallar : $m\sphericalangle AMC$.

a) 60° d) 140°
b) 80° e) 90°
c) 120°

18. En un triángulo MNP, se ubica el punto exterior **Q** relativo al lado MN.
Si: $m\sphericalangle MNP = 84°$, además,
$\frac{m\sphericalangle QMN}{2} = \frac{m\sphericalangle NMP}{2} = \frac{m\sphericalangle QPM}{3} = 12$,
entonces la $m\sphericalangle NQP$ es:

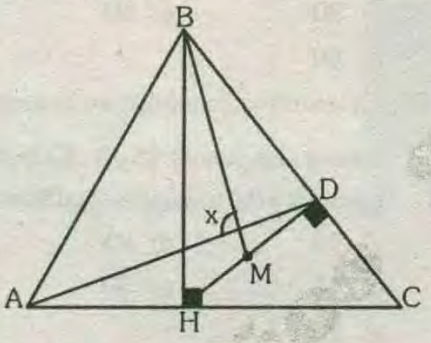
a) 15° d) 30°
b) 45° e) 53°
c) 75°

19. Calcular "x"



a) 25° d) 20°
b) 30° e) 50°
c) 35°

20. Calcular "x"; AB = BC y HM = MD



a) 60° d) 45°
b) 75° e) 120°
c) 90°

21. En un cuadrado ABCD, M y N son puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, $\overline{AM} \cap \overline{BN} : \{P\}$. ¿El centro del cuadrado que punto notable es del triángulo APN?

a) Incentro
b) Ortocentro
c) Circuncentro
d) Baricentro
e) Incentro y Baricentro

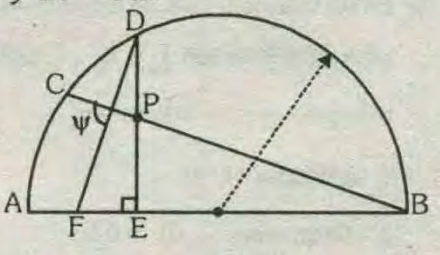
22. En una semicircunferencia de diámetro $\overline{MN}$ y centro **O**, desde el punto **P** exterior a la semicircunferencia trazamos la tangente $\overline{PT}$ y $\overline{TH}$ perpendicular a $\overline{MN} (H \in \overline{OM})$, la bisectriz interior del ángulo TPH intercepta a $\overline{TM}$ en **Q**.
Si la $m\sphericalangle PHN$ es ϕ, entonces la $m\sphericalangle QHM$ es:

a) $90 - \frac{\phi}{3}$ d) $135 - \frac{\phi}{2}$
b) $90 - \frac{\phi}{2}$ e) $60 - \frac{\phi}{2}$
c) $45 - \frac{\phi}{3}$

23. Uno de los ángulos de un triángulo mide 140°. Calcule uno de los ángulos del $\triangle$ exicentral (sus vértices son los excentros) relativo al triángulo órtico.

a) 30° d) 80°
b) 40° e) 60°
c) 50°

24. En el gráfico calcular " ψ " si: AF = FE y DP = PE.



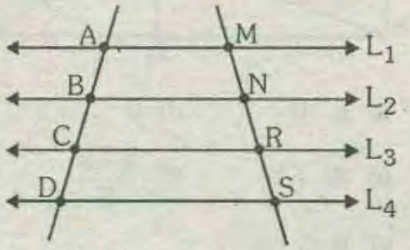
a) 75° d) 90°
b) 60° e) 120°
c) 80°

CUADRO DE RESPUESTAS

01. d	09. b	17. d
02. a	10. d	18. d
03. a	11. d	19. c
04. d	12. b	20. c
05. d	13. c	21. a
06. e	14. e	22. d
07. e	15. d	23. b
08. e	16. c	24. d

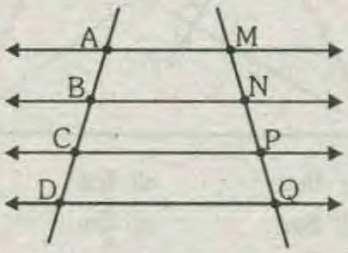
MISCELANEA SOBRE PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA

01. En la figura $\overline{L_1} // \overline{L_2} // \overline{L_3} // \overline{L_4}$, (BC) (CD) = 225 y (NR) (RS) = 256, hallar $\frac{AB}{MN}$.



a) 16/15 d) 8/15
b) 15/16 e) 3/4
c) 15/8

02. Si: $\overline{AM} // \overline{BN} // \overline{CP} // \overline{DQ}$, AB = 10, CD = 14, NP = 9 y MQ = 45. Calcular PQ – MN.

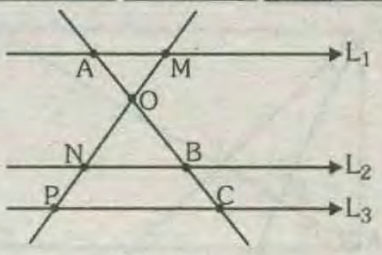


a) 3 d) 6
b) 4 e) 7
c) 5

03. En un triángulo ABC, de incentro I, por este punto se traza $\overline{EF} // \overline{AC}$, estando E sobre $\overline{AB}$ y F en $\overline{BC}$. Calcular EF, si AB = c, BC = a y AC = b.

a) $\frac{ac}{a+b+c}$ d) $\frac{b(a+c)}{a+b+c}$
b) $\frac{a+b}{a+b+c}$ e) $\frac{abc}{a+b+c}$
c) $\frac{2ac}{a+b+c}$

04. En la figura, $\frac{AO}{2} = \frac{OB}{3} = \frac{BC}{4}$. Hallar OM, si MP = 45. $\left(\overline{L_1} // \overline{L_2} // \overline{L_3}\right)$

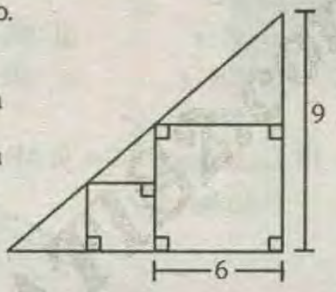


a) 10 d) 16
b) 12 e) 18
c) 14

05. En un cuadrado ABCD cuyo centro es **O**. Calcular la distancia del punto medio de $\overline{BO}$ al lado CD si AB = 4m.

a) 4m d) 3m
b) 2m e) 3,5m
c) 2,5m

06. Hallar la longitud del lado del menor cuadrado.

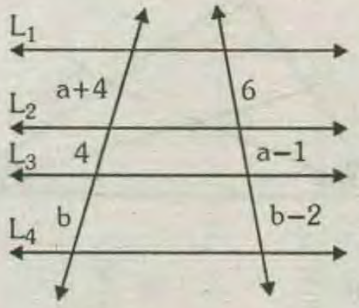


a) $\sqrt{6}$m
b) $\sqrt{2}$m
c) 2m
d) 3m
e) 4m

07. En el triángulo ABC: AB = 6, BC = 8 y AC = 7. Se traza la bisectriz exterior BE, calcular AE.

a) 14 d) 21
b) 17 e) 24
c) 19

08. En la figura si: $\overline{L_1} // \overline{L_2} // \overline{L_3} // \overline{L_4}$; calcular a + b.

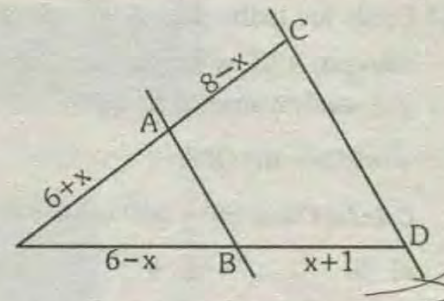


a) 7 d) 10
b) 5 e) 12
c) 8

09. En un triángulo rectángulo un cateto mide 24n. Calcular la distancia del baricentro al otro cateto.

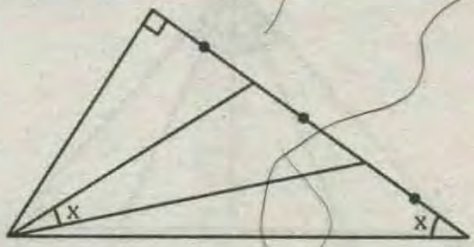
a) 3m d) 8m
b) 4m e) 9m
c) 6m

10. En la figura $\overline{AB} // \overline{CD}$. Calcular CD si AB = 5.



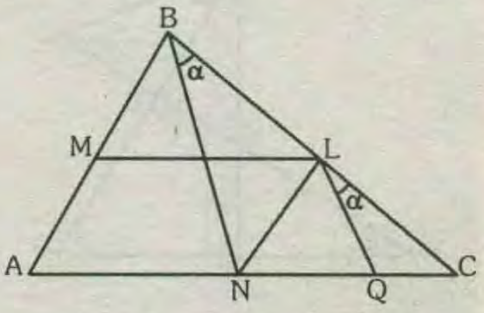
a) 10.5 d) 14/3
b) 12 e) 35/4
c) 12,5

11. Del gráfico, calcular x.



a) $\frac{53°}{2}$ d) $\frac{37°}{2}$
b) 53° e) 74°
c) 37°

12. En el gráfico: 2(AM) = 3(BM), AMLN es un romboide. Calcular $\frac{NQ}{AN}$.



a) 1/2 d) 2/7
b) 2/3 e) 3/4
c) 3/5

13. Los lados de un rectángulo miden 12 y 8. Hallar los lados de otro

rectángulo semejante al primero cuyo perímetro es 60.

a) 11 y 19 d) 16 y 14
b) 10 y 20 e) 18 y 12
c) 13 y 17

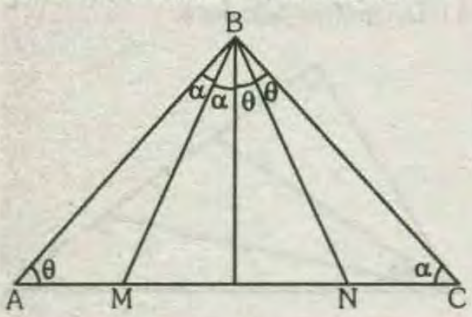
14. Sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo ABC, se toman los puntos P y Q respectivamente, tal que :

$m\sphericalangle BCA = m\sphericalangle QPA$.

Calcular CQ. si 6BP = 3AP = AC = 6.

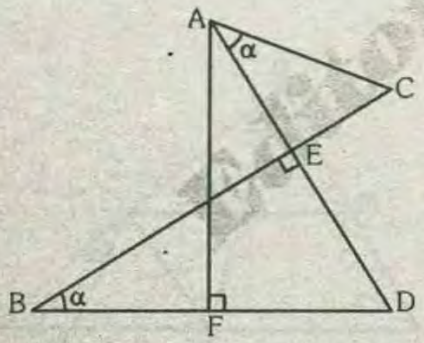
a) 5 d) 8
b) 6 e) 9
c) 7

15. Si: AM = 2; NC= 8, hallar MN.



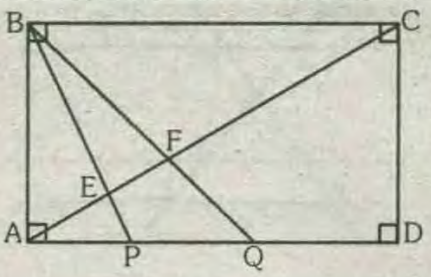
a) 3 d) 6
b) 4 e) 7
c) 5

16. En la figura AF = 3m , AE = 2m y AD es mayor que AC en 2m. Hallar AC.



a) 2m d) 5m
b) 3m e) 6m
c) 4m

17. En la figura, AC=40m y AP=PQ=QD; hallar EF.

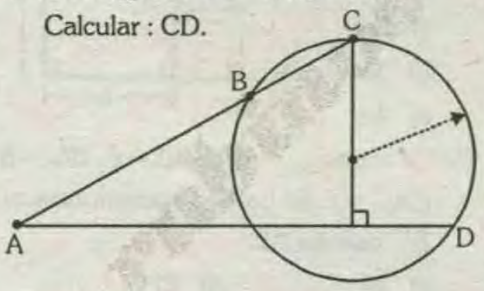


a) 4m d) 6m
b) 5,5m e) 6,5m
c) 5m

18. Sobre una circunferencia de radio **R** se ubica el punto **F**, haciendo centro en él se traza otra circunferencia de radio **r** (r<R). Sobre la circunferencia mayor se ubica una cuerda $\overline{AB}$ que al prolongarlo es tangente en T. Halle FA. FB.

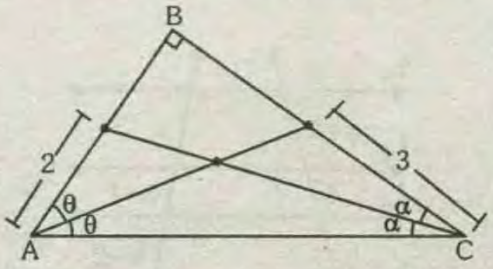
a) R . r d) 4R . r
b) 2R . r e) 5R . r
c) 3R . r

19. En la figura BC = 9, AB = 16. Calcular : CD.



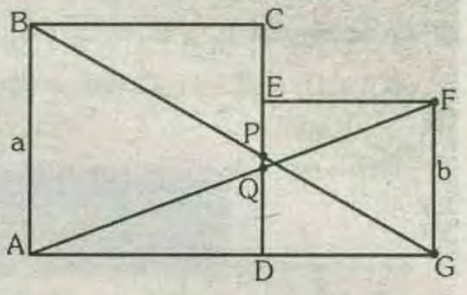
a) 10 d) 14
b) 12 e) 15
c) 13

20. Calcular el inradio del $\triangle ABC$.



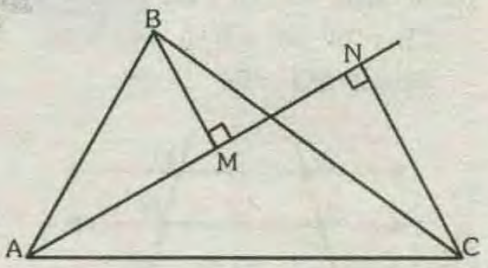
a) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{5}{3}$
b) $\frac{6}{5}$ e) 1
c) $\frac{3}{5}$

21. ABCD y EDGF son cuadrados. Calcular : PQ.



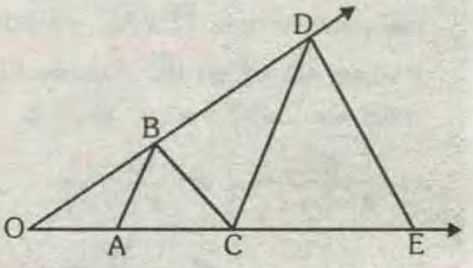
a) a – b d) 0
b) 2a + b e) $\frac{a-b}{2}$
c) b

22. En el triángulo ABC, $\overline{AN}$ es bisectriz, BM = 2μ , CN = 6μ y MN = 4μ . Hallar : AN.



a) 9m d) 6m
b) 8m e) 5m
c) 7m

23. En la figura, $\overline{AB} // \overline{CD}$ y $\overline{BC} // \overline{DE}$. Si: OA = 1m y AC = 2m, hallar CE.



a) 2 d) 5
b) 3 e) 6
c) 4

24. En un triángulo ABC se traza $L // \overline{AC}$ que corta en "**P**" y "**Q**" a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Calcule QC , si BP = 4, AP = BQ = 6.

a) 6 d) 8
b) 9 e) 14
c) 7

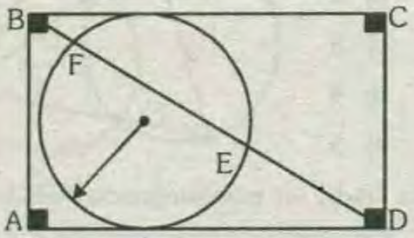
CUADRO DE RESPUESTAS

01. b	09. d	18. d
02. d	10. e	19. b
03. d	11. d	20. e
04. a	12. c	21. b
05. d	13. e	22. d
06. e	14. a	23. d
07. d	15. b	24. e
08. e	16. c	25. b

MISCELANEA SOBRE RELACIONES METRICAS I

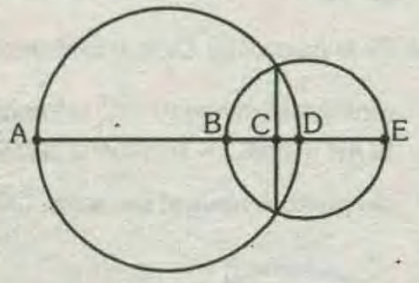
01. Desde un punto "**P**" exterior a una circunferencia se trazan la tangente PA y ña secante PBC. Calcular "**PA**".
Si: AB = 12; BC = 14 y AC = 16
a) 20 d) 28
b) 22 e) 24
c) 25

02. Hallar BC si: BF = 3 ; FE = 9 y DE = 16



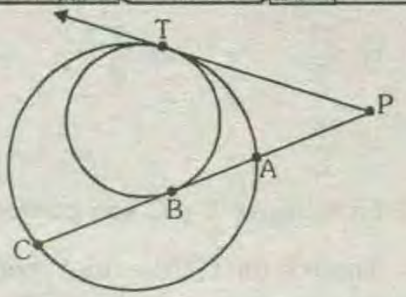
a) 28 d) 34
b) 25 e) 14
c) 26

03. Hallar "**DE**"
Si: AB = 5 ; BC = 2 y CD = 1



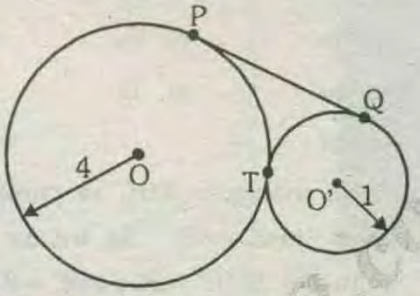
a) 1 d) 2.5
b) 1.5 e) 3
c) 2

04. Hallar "**PT**". Si: BC = 2 y AB = 1
(T y B con puntos de tangencia)



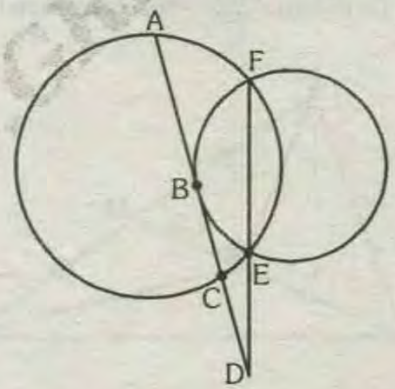
a) 2 d) 3.5
b) 3 e) 3
c) 2.5

05. En la figura P. Q y T son puntos de tangencia, calcule la m∢PQO .



a) 30° d) 36°
b) 60° e) 37°
c) 45°

06. Hallar "**BC**". Si: AB = 3 y CD = 4.

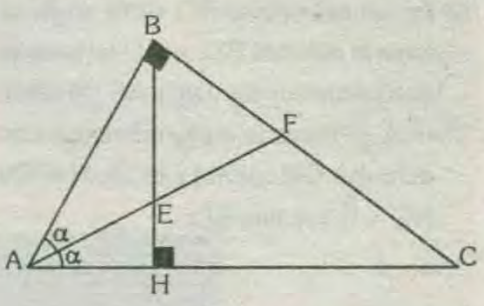


a) 2 d) 3
b) 1.5 e) 4
c) 2.5

07. En un triángulo rectangulo ABC recto en B, se traza la bisectriz AP que interseca a la altura BH en el punto Q; tal que AQ = 8 y PQ = 6. Calcule BQ.

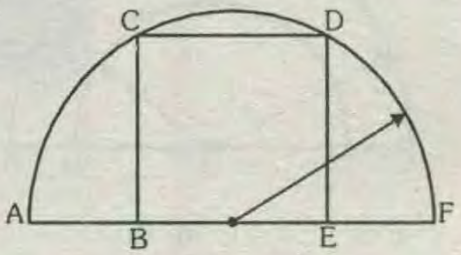
a) $\frac{6}{5}$ d) 4
b) $\sqrt{42}$ e) 1

08. Si: AF×EF = 32. Hallar: BE.



a) 4 d) 9
b) 6 e) 5
c) 8

09. Hallar el producto de AD por DF, si el cuadrado está inscrito en la semicircunferencia de radio $2\sqrt{5}$.



a) $6\sqrt{5}$ d) $3\sqrt{5}$
b) $15\sqrt{5}$ e) $10\sqrt{5}$
c) $16\sqrt{5}$

10. Se tiene un triángulo rectángulo ABC recto en B, en el cual las bisectrices de los ángulos internos de A y C cortan a los catetos $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ en E y F respectivamente. Si la proyección de $\overline{EF}$ sobre la hipotenusa mide 2u. Halle la media del inradio del triángulo ABC (en u).
a) 0.5 d) 2
b) 1 e) 0.75
c) 1.5

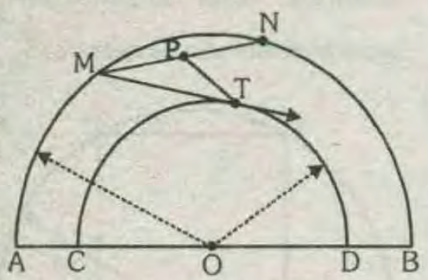
11. Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa se diferencian en 1m. Calcular la hipotenusa si la altura relativa a ella mide $6\sqrt{2}$.
a) 17 d) 18
b) 16 e) 20

c) 15

12. En un triángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz BD; por D se levanta una perpendicular DM a AC (M sobre BC). Al trazar una circunferencia con diámetro DM cortará a BC en N si MN NC = 8, cálcular BD.

a) 4 d) 6
b) 9/2 e) 2
c) 3

13. De la figura "**O**" es centro MN = 14; AC = 10 ; OD = 15. Hallar "**PT**" si "**P**" es punto medio.



a) 5 d) 15
b) 10 e) 20
c) 12

14. Se tiene un cuadrado ABCD inscrito en una circunferencia en $\overset{\frown}{BC}$ se ubica el punto "**M**" tal que: $BM = \sqrt{2}$ y MC= 3 Hallar : AB.

a) 17 d) $\sqrt{17}$
b) 19 e) $\sqrt{19}$
c) 13

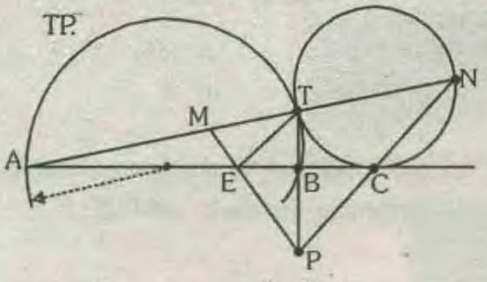
15. Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo estan en P.A. de razón "**r**". Encuentre uno de los ángulos agudos

a) 30° d) 18°30'
b) 37° e) 26°30'
c) 15°

16. En un triángulo rectángulo de perímetro 10μ , el producto de sus catetos es 5, entonces la altura relativa a la hipotenusa es:

a) $\frac{8}{9}$ d) $\frac{10}{9}$
b) $\frac{11}{2}$ e) $\frac{7}{9}$
c) $\frac{9}{2}$

17. En la figura T y C son puntos de tangencia (MT) (TN) = $16\mu^2$; calcular TP.

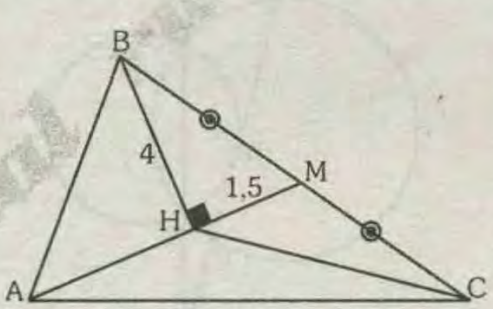


a) 6μ d) 2μ
b) 4μ e) 1μ
c) 3μ

18. En el triángulo ABC se cumple $m\sphericalangle B - m\sphericalangle C = 90°$. Se trazan la altura $\overline{AH}$. Si HC = 36 u y BC = 27u, entonces AH (en u) es:

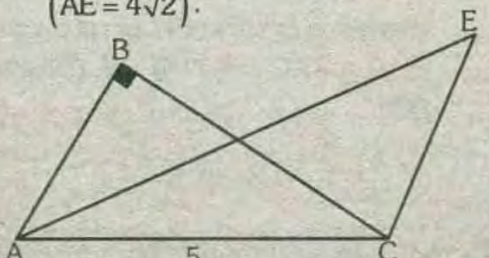
a) 12 d) 20
b) 16 e) 24
c) 18

19. En la figura BM = MC, encuentre HC.



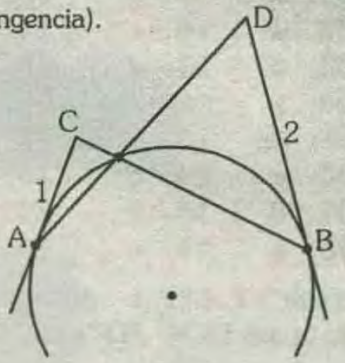
a) 7 d) 5
b) 6 e) 8
c) 4

20. En el triángulo rectángulo ABC de excentro "**E**". Encuentre EC $\left(AE = 4\sqrt{2}\right)$.



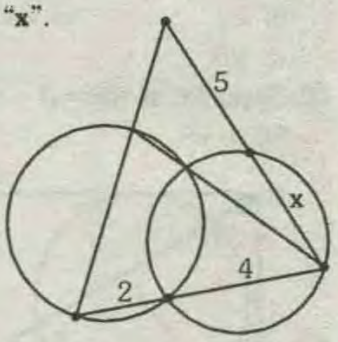
a) 1 d) 1.5
b) 2 e) 2.5
c) 3

21. Calcular CD (A y B son puntos de tangencia).



a) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{7}$
b) 2 e) 3
c) $\sqrt{3}$

22. Calcular "**x**".

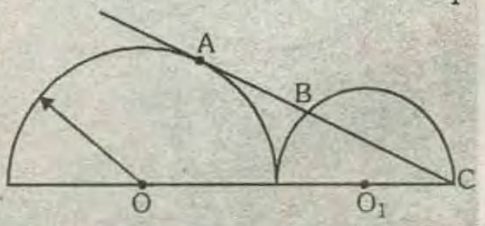


a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

23. Dado un paralelogramo ABCD, la circunferencia que contiene a B, A y D intersecta a $\overline{BC}$ en M. Calcular $m\sphericalangle BAD$, si AB = 5 y MC = 6.

a) 37° d) 106°
b) 53° e) 76°
c) 74°

24. En la figura, O y O_1 son centros de la semicircunferencias y $\overline{AC}$ es tangente. Si AB = 2(BC) = 6, hallar la distancia del punto A hacia el segmento $\overline{OO_1}$.



a) 4 d) $4\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{3}$ e) 8

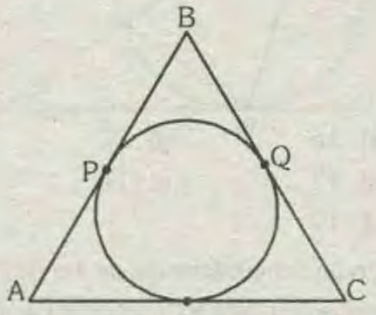
c) 6

CUADRO DE RESPUESTAS

01. e	09. c	17. b
02. c	10. b	18. c
03. d	11. a	19. d
04. a	12. a	20. a
05. c	13. d	21. c
06. a	14. d	22. c
07. b	15. b	23. b
08. a	16. d	24. c

MISCELANEA SOBRE RELACIONES METRICAS II

01. En la figura, AB =13, BC=14, AC=15 Calcule. "**PQ**"



a) 6.6 d) 4.6

b) $\sqrt{101}$ e) $\sqrt{107}$

c) 7.6

02. Dado un triángulo ABC, donde:

$$a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{3}bc$$

Calcule la medida del ángulo "**A**"

a) 120° d) 105°

b) 135° e) 165°

c) 150°

03. Dado un triángulo ABC, se cumple: $a^2 = b^2 + c^2 + 1{,}6bc$, calcule el mayor angulo interior del triángulo.

a) 120° d) 150°

b) 137° e) 143°

c) 135°

04. En un cuadrilátero ABCD las diagonales se intersectan perpendicularmente de tal modo que $m\hat{CAD} = 10°$, $m\hat{DBA} = 20°$, $m\hat{ACB} = 40°$. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Si: $AD^2 + DC^2 = 100$.

a) 5 d) 4

b) 25 e) 10

c) 3.5

05. Calcule la longitud de la menor altura de un triángulo, si cuyos lados miden 7; 8 y 9 centimetros.

a) 5 cm d) $4\sqrt{5}$ cm

b) $\frac{8}{3}\sqrt{5}$ cm e) $3\sqrt{5}$ cm

c) $8\sqrt{5}$ cm

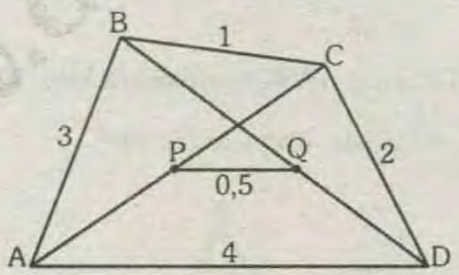
06. Los lados de un triángulo ABC miden AB = 11u, BC = 13u y C = 16u. Calcule la menor mediana del triángulo.

a) 12 u d) 8 u

b) 13 u e) 10 u

c) 9 u

07. En la figura AP = PC, BQ = QD; calcule: $AC^2 + BD^2$.



a) 26 d) 29

b) 27 e) 30

c) 28

08. Calcular el perímetro de un triángulo cuyos lados son proporcionales a los números 13; 37 y 40 sabiendo que además que la longitud de su menor altura es 24.

a) 45 d) 40

b) 90 e) 95

c) 180

09. La proyección del lado CD de un romboide ABCD sobre el lado AD mide 2u, calcule BC. Si AM = 10u, MD = 8u, siendo **M** punto medio de $\overline{BC}$.

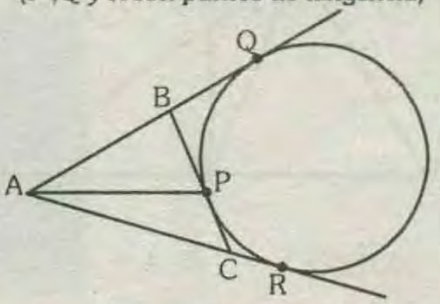
a) 9 u d) 10.5 u

b) 8.4 u e) 9.5 u

c) 7.5 u

10. En la figura mostrada. Si: AB=5, BC=6 y AC=7. Hallar: AP.

(P ,Q y R son puntos de tangencia)



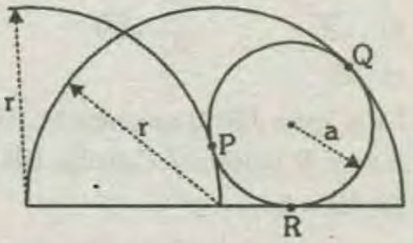
a) $2\sqrt{13}$ d) $\sqrt{21}$

b) $3\sqrt{11}$ e) $\sqrt{17}$

c) $\sqrt{33}$

11. Calcular: "**a**". Si: r = 2m

(P, Q y R son puntos de tangencia)

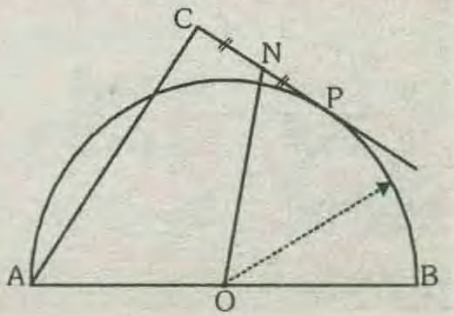


a) $\sqrt{3}/2$ m d) $\sqrt{2}$ m

b) 4 m e) $\sqrt{3}$ m

c) 1 m

12. Del gráfico: $AC^2 + BC^2 = 37u^2$, CP=3u Hallar: **ON**. (CN = NP)



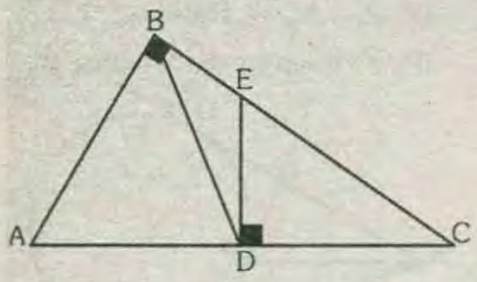
a) $\sqrt{5}$ u d) $2\sqrt{7}$ u

b) $\sqrt{7}$ u e) $2\sqrt{5}$ u

c) $4\sqrt{7}$ u

13. En la figura.

Hallar: BD. Si: AB + BE = $\sqrt{2}$; BD: Bisectriz $A\hat{B}C$.



a) 1 d) 4

b) 2 e) $\sqrt{2}$

c) 3

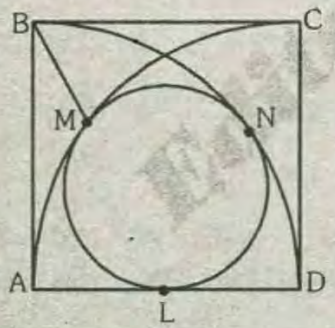
14. En un triángulo ABC, si: AB = 5m, BC = 7m, AC = 6m y AD = 4m. Calcule la longitud de la ceviana $\overline{BD}$.

a) $2\sqrt{33}$ d) $\sqrt{33}$

b) $\sqrt{37}$ e) $\sqrt{29}$

c) 33

15. De la figura ABCD cuadrado M, N y L puntos de tangencia. Calcular: BM. Si: AB = 8.

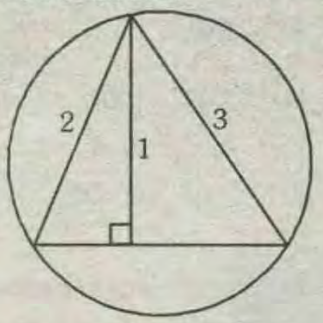


a) $3/5\sqrt{5}$ d) $7/5\sqrt{5}$

b) $4/5\sqrt{5}$ e) $8/5\sqrt{5}$

c) $6/5\sqrt{5}$

16. Calcule el diámetro.



a) 3 d) 6

b) 4 e) 7

c) 5

17. Los lados de un romboide ABCD miden AB = 40m, BC = 70m y una de las diagonales miden 90m. Encuentre la otra diagonal.

a) 56 m d) 70 m

b) 60 m e) 66 m

c) 68 m

18. Sobre los lados de un triángulo ABC se construyen los cuadrados ABDF, BCFG y ACHI. Hallar: $EI^2 + DG^2 + FH^2$

Si: $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 15$.

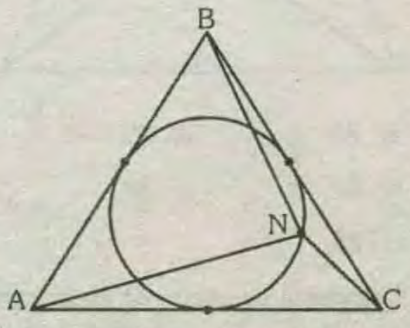
a) 30 d) 40

b) 20 e) 45

c) 25

19. Sea el ΔABC equilátero de lado "L".

Calcule: $BN^2 + NC^2 + AN^2$

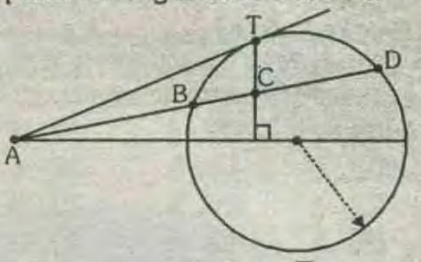


a) $\frac{L^2}{2}$ d) $\frac{3}{4}L^2$

b) $\frac{3L^2}{2}$ e) $\frac{5}{4}L^2$

c) $2L^2$

20. En la figura BC = 2; CD = 4 y T es punto de tangencia. Calcular AT.

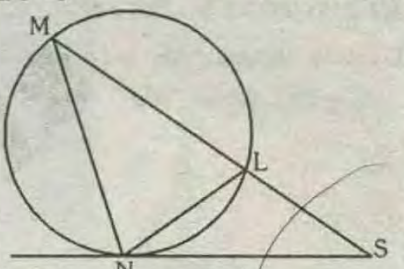


a) 6 d) $6\sqrt{2}$

b) $4\sqrt{2}$ e) 7

c) $5\sqrt{2}$

21. Calcular: MS ; LN =4 , MN =8 y LM =9



a) 15 d) 21

b) 17 e) 12

c) 19

22. En una circunferencia de 4m de radio se traza una cuerda **ST** y sobre ella se ubica el punto **L** de tal manera que el producto de los segmentos **IS** y **LT** sea $12m^2$.

Hallar la medida de la distancia del punto **L** al centro de la circunferencia.

a) 1 d) 4

b) 2 e) 5

c) 3

CUADRO DE RESPUESTAS

01. a	**09. a**	**17. d**
02. c	**10. c**	**18. e**
03. e	**11. a**	**19. e**
04. a	**12. b**	**20. d**
05. b	**13. a**	**21. e**
06. c	**14. d**	**22. b**
07. d	**15. e**	
08. c	**16. d**	

MISCELANEA SOBRE POLIEDROS

01. Un poliedro convexo tiene cinco caras. Entonces su número de vértices es:

a) 5 d) 5 ó 6
b) 6 e) 8
c) 7

02. En un poliedro, la suma del número de caras, vértices y aristas es 32. Calcule el número de aristas de dicho poliedro.

a) 12 d) 15
b) 13 e) 16
c) 14

03. Si A es el número total de aristas de un prisma, entonces el número total de vértices es:

a) $\frac{2}{3}A$ d) $\frac{2}{3}A-1$
b) $\frac{2}{3}A-2$ e) $\frac{2}{3}A+1$
c) $\frac{2}{3}A+2$

04. En un sólido cuyas caras son regiones poligonales convexas, esta rodeada de un hexágono, cuatro cuadriláteros y seis triángulos, si A es número de aristas, V es número de vértices, entonces: $\frac{A}{V}$, es:

a) $\frac{7}{5}$ d) $\frac{9}{5}$
b) $\frac{11}{5}$ e) $\frac{8}{5}$
c) $\frac{20}{11}$

05. ¿Cuántos vértices tiene el poliedro formado por 6 regiones triángulares, 10 regiones cuadrangulares y 20 pentagonales?

a) 42 d) 48
b) 47 e) 40
c) 45

06. En un tetraedro regular A – BCD, M es punto medio de su respectiva altura AH, H es el pie de dicha altura. Calcule la $m\sphericalangle DMB$.

a) 45° d) 60°
b) 30° e) 53°
c) 90°

07. En un hexaedro regular ABCD – EFGH cuya arista mide $\sqrt{2}m$, calcule el volumen del poliedro ACFH.

a) $5\sqrt{2}m^3$ d) $\frac{4}{3}\sqrt{2}m^3$
b) $10\sqrt{2}m^3$ e) $12m^3$
c) $\frac{2}{3}\sqrt{2}m^3$

08. Un octaedro regular cuya arista mide a, halle la distancia entre 2 caras opuestas.

a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$
b) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

09. Se tiene un paralelepípedo recto ABCD – A'B'C'D', sobre ABCD se construye el cuadrado PQRS y su proyección sobre A'B'C'D' es el cuadrado P'Q'R'S' y se considera el punto O exterior al paralelepípedo. Entonces la relación entre el número de caras (C), el número de vértices (V) y el número de aristas (A) del sólido O – PQRS – ABCD – A'B'C'D' – P'Q'R'S' es:

a) C + V = A + 2
b) C + V = A + 1
c) C – V = A + 2
d) C + V = A + 3
e) C + V = A – 1

10. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

A. Dos triángulos simétricos respecto a una recta que no los intercepta son congruentes.

B. Una figura que es simétrica respecto de un punto y simultáneamente respecto de una recta que contiene a dicho punto necesariamente tiene que ser un punto.

C. Existen figuras geométricas que tienen dos centros de simetría.

a) VFV d) FVV
b) FFF e) VVV
c) VFF

11. Un prisma tiene C caras y V vértices, halle $E=\frac{V+C+4}{V-C}$.

a) $\frac{3C}{C+2}$ d) $\frac{C}{C+4}$
b) $\frac{3C}{C-2}$ e) $\frac{3C}{2C+3}$
c) $\frac{3C}{C-4}$

12. En un octaedro regular O – ABCD – O', se ubican los puntos medios M y N de $\overline{OA}$ y $\overline{O'A}$ respectivamente. Calcule la medida del ángulo diedro determinado por las regiones triangulares BND y BMD.

a) 30° d) 60°
b) 37° e) 90°
c) 45°

13. En un hexaedro regular ABCD – EFGH cuya arista mide 4m, en $\overline{HG}$ se ubica el punto P tal que HP = 1, en $\overline{FP}$ se ubica el punto M tal que MP = 2.
Calcule: BM.

a) 4 d) 9
b) 5 e) 10
c) 8

14. En un hexaedro regular se unen consecutivamente los puntos medios de dos aristas consecutivas de cada cara si el área de la sección obtenida es $6\sqrt{3}cm^2$. Halle la longitud de la diagonal de dicho poliedro.

a) $\sqrt{6}$ d) $4\sqrt{6}$
b) $2\sqrt{6}$ e) $5\sqrt{6}$
c) $3\sqrt{6}$

15. En un tetraedro regular A – BCD cuya arista mide 2cm, calcule el área de la región cuadrangular cuyos vértices son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{DC}$ y $\overline{CB}$ respectivamente.

a) $1m^2$ d) $3m^2$
b) $2m^2$ e) $1,5m^2$
c) $\sqrt{2}m^2$

16. En un octaedro regular P – ABCD – Q, la suma de las áreas de las caras del poliedro PABD es $2(\sqrt{3}+2)m^2$.

Calcule el volumen del octaedro regular.

a) $3\sqrt{2}m^3$ d) $10m^3$
b) $5\sqrt{3}m^3$ e) $\frac{8}{3}\sqrt{2}m^3$
c) $12m^3$

17. Un tetraedro regular ABCD tiene a su cara BCD contenida en un plano Q. Si A'B'CD es el tetraedro simétrico con respecto a un plano P perpendicular a Q y la arista de los tetraedros miden a; halle AB'.

a) a d) $a\sqrt{2}$
b) $\frac{2a}{3}$ e) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$
c) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

18. En las siguientes proposiciones, indique el valor de verdad:

A. La distancia entre dos aristas opuestas de un tetraedro regular de arista a es $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. La razón entre el volúmen de un tetraedro regular y el volúmen de su poliedro regular conjugado es 27.

C. La razón entre el volúmen de un hexaedro regular y el volúmen de su poliedro regular conjugado es 6.

D. La razón entre el volúmen de un cubo y el volúmen del poliedro regular conjugado del cubo es 27.

a) VFFV d) FVVF
b) VVVF e) VVVV
c) FVVV

19. Calcule la razón entre las áreas de las superficies de un octaedro regular y el poliedro cuyos vértices son los centros de sus caras.

a) $\sqrt{3}$ d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
b) $2\sqrt{3}$ e) $\sqrt{5}$
c) $3\sqrt{3}$

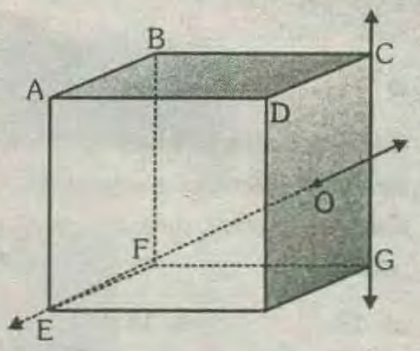
20. En un tetraedro O – ABC; el triedro O es trirrectángulo. Halle la distancia trazada del vértice O a la cara ABC, si: $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{4a^2}$.

a) 2a d) $\frac{2}{3}a$
b) a e) $\frac{2}{3}$
c) 4a

21. Se desea construir un objeto de la forma de un poliedro cuyas caras serian regiones cuadrangulares y regiones triangulares. ¿Con cuántas regiones triangulares se debe construir este objeto para que su número de vértices sea igual al número de caras?

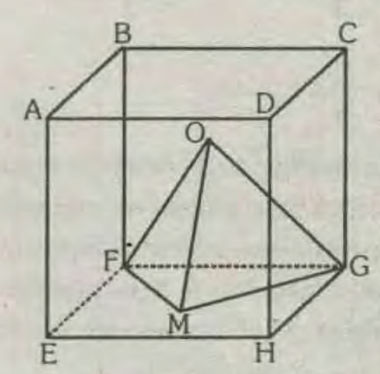
a) 1 d) 4
b) 2 e) 5
c) 3

22. En la figura, ABCD – EFGH es un hexaedro regular, O es centro de la cara CDHG. Calcule la medida del ángulo entre $\overline{EO}$ y $\overline{CG}$.



a) 30° d) 75°
b) 15° e) Arc Tg($\sqrt{5}$)
c) 45°

23. En el gráfico mostrado, ABCD – EFGH es un exaedro regular y O – FGM, un tetraedro regular. Si $CG = 2\sqrt{6}$, calcule la distancia de O hacia la cara ABCD.



a) $2(\sqrt{6}+2)$ d) $3(\sqrt{6}-1)$
b) $2(\sqrt{6}-2)$ e) $2\sqrt{6}$
c) $3(\sqrt{6}+1)$

24. En un hexaedro regular ABCD – EFGH cuya arista mide 10u, $Q \in \overline{AE}$, $P \in \overline{CG}$, AQ = QE, CP = 4PG, el plano que pasa por los puntos B, Q y P intercepta a la arista $\overline{EH}$ en T.

Hallar : $\frac{TE}{TH}$.

a) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{7}{3}$

b) $\frac{5}{3}$ e) $\frac{8}{3}$

c) 2

CLAVES DE LA TAREA

01. c	09. a	17. d
02. d	10. c	18. b
03. a	11. c	19. d
04. c	12. e	20. a
05. c	13. b	21. d
06. c	14. b	22. e
07. c	15. a	23. b
08. c	16. e	24. b

MISCELANEA SOBRE PIRAMIDE Y CONO

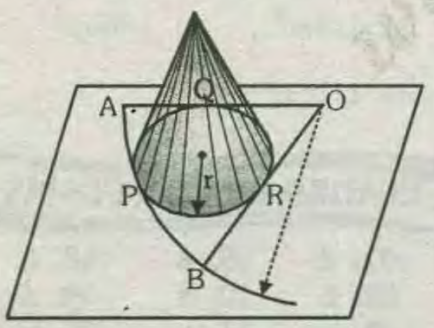
01. Se tiene una pirámide exagonal regular V – ABCDEF, en el cual AB = 6cm, BV = 12cm. Calcule el volumen del sólido V – BCDE.

a) $250\,cm^3$ d) $162\,cm^3$

b) $312\,cm^3$ e) $200\,cm^3$

c) $400\,cm^3$

02. Según el gráfico la generatriz del cono circular recto es $4\sqrt{2}$ cm, además, P, Q y R son puntos de tangencias; $m\sphericalangle AOB = 60°$, OA = OB = 12cm, calcule el volumen del cono.

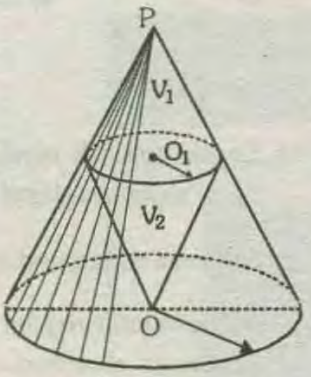


a) $64\pi\,cm^3$ d) $65\pi\,cm^3$

b) $60\pi\,cm^3$ e) $72\pi\,cm^3$

c) $50\pi\,cm^3$

03. En el gráfico mostrado, los conos son circulares rectos, tal que: $V_2 = 2(V_1)$. Calcule la razón de áreas de las superficies laterales de los conos cuyos vértices es P y O; O_1 y O son centros de sus bases; V_1 y V_2 son los volúmenes de los conos cuya base tiene por centro O_1.



a) $\frac{4}{9}$

b) $\frac{5}{7}$

c) $\frac{3}{7}$

d) $\frac{2}{7}$

e) $\frac{1}{9}$

04. En un prisma cuadrangular regular, un plano secante a dicho prisma paralelo a las bases divide al prisma en otros dos de igual volumen. Calcule la razón entre el volumen del prisma y el volumen de la pirámide cuya base es la sección determinada por el plano secante en el prisma y su vértice pertenece a una de las bases del prisma.

a) 6 d) 8

b) 7 e) 9

c) 5

05. Calcule el volumen de un cono circular recto, si la longitud de su altura es 8u y la medida del ángulo de desarrollo es 120°.

a) $\frac{32\pi}{3}u^3$ d) $\frac{17\pi}{3}u^3$

b) $\frac{64\pi}{3}u^3$ e) $\frac{20\pi}{3}u^3$

c) $\frac{19\pi}{3}u^3$

06. En una pirámide triangular A – BCD los puntos M y N son los baricentros de las caras BCD y ABC respectivamente. Si $\overline{AM} \cap \overline{ND} = \{F\}$ y FM = 7cm, entonces la longitud de AF es:

a) 20 cm d) 23 cm

b) 21 cm e) 24 cm

c) 22 cm

07. Se tiene una pirámide cuadrangular regular V – ABCD, donde las caras laterales son regiones equiláteras, M es punto medio de $\overline{VC}$. Si el área de la superficie total de la pirámide es $4(\sqrt{3}+1)u^2$, calcule AM.

a) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{5}$

b) $2\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{2}$

c) 2

08. Dada una pirámide cuya altura mide h unidades. ¿A qué distancia del vértice se debe traza un plano paralelo a la base para que los sólidos determinados sean equivalentes?

a) $\frac{h}{4}$ d) $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\frac{h}{3}$ e) $\frac{h}{1}$

c) $\frac{h}{2}$

09. En una pirámide cuadrangular regular V – ABCD, si $m\sphericalangle AVB = 37°$ y la distancia del vértice de dicha pirámide al baricentro de una de las caras laterales es 6u. Calcule el volumen de dicha pirámide.

a) $72\sqrt{2}\,u^3$ d) $50\sqrt{2}\,u^3$

b) $70\sqrt{2}\,u^3$ e) $80\sqrt{2}\,u^3$

c) $60\sqrt{2}\,u^3$

10. Si la altura de un cono recto de revolución es de 4cm y su generatriz es de 5cm, determinar a qué distancia del vértice se debe hacer pasar un plano paralelo a la base de modo que el área del círculo determinado sea igual al área lateral del tronco de cono determinado.

a) $\sqrt{10}$ cm d) $\sqrt{11}$ cm

b) 3 cm e) $2\sqrt{3}$ cm

c) $2\sqrt{2}$ cm

11. Se tiene tetraedro regular ABCD cuya arista mide a unidades, en la arista $\overline{AD}$ se ubica el punto O, si la altura de la pirámide ABCO es es congruente al segmento OD, la longitud de $\overline{OD}$, es:

a) $(\sqrt{6}-2)a$ d) $a\sqrt{3}$

b) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ e) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

c) $\frac{a}{2}$

12. Calcular el volúmen de un cono recto de revolución sabiendo que un punto cualquiera de una de sus generatrices dista de la base 6m, del vértice del cono 5m y de la altura 3m.

a) $187,5\pi m^3$ d) $187,5\pi m^3$

b) $1875\pi m^3$ e) $20\pi m^3$

c) $18,75\pi m^3$

13. En una pirámide de base triangular regular, la longitud del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo de la base es 2cm y la longitud del radio de la circunferencia inscrita a una cara lateral es 3cm, luego el área de la superficie lateral de la pirámide (en cm^2) es.

a) $\frac{75}{2}\sqrt{3}$ d) $96\sqrt{3}$

b) $144\sqrt{3}$ e) $36\sqrt{3}$

c) $\frac{45}{2}\sqrt{3}$

14. Calcular el volúmen de un tronco de cono cuyas bases son circulos de 2 y 6m de radio y sabiendo que el área del tronco de cono es igual a la suma de las áreas de las bases.

a) $52\pi m^3$ d) $55\pi m^3$

b) $53\pi m^3$ e) $56\pi m^3$

c) $54\pi m^3$

15. En un hexaedro regular ABCD – EFGH, la proyección del vértice H sobre $\overline{EC}$ es el punto Q. siendo "a" la longitud de la arista del hexaedro regular. Entonces el volumen de la pirámide de vértice Q y base ABCD es:

a) $\frac{2}{9}a^3$ d) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

b) $\frac{a^3}{6}$ e) $\frac{a^3}{2}$

c) $\frac{2}{3}a^3$

16. En una pirámide regular el desarrollo de su superficie lateral de una región poligonal correspondiente a los $\frac{2}{3}$ de un hexágono regular de lado "a". Entonces el volumen del sólido limitado por la pirámide es:

a) $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ d) $a^3\sqrt{2}$

b) $\frac{a^3\sqrt{2}}{5}$ e) $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

c) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

17. El volumen de un cono es $27m^3$, su altura se divide en tres partes iguales y por los puntos de división se trazan dos planos paralelos a las bases. El volumen de la porción central es:

a) $5m^3$ d) $14m^3$

b) $9m^3$ e) $4m^3$

c) $7m^3$

18. Una pirámide regular triangular ha sido intersectada por un plano que pasa por uno de los vértices de la base y por los puntos medios de dos de sus aristas laterales, si el plano secante es perpendicular a la cara lateral, entonces la relación entre el área de la superficie lateral de la pirámide y el área de su base, es:

a) 3 d) $\sqrt{6}$

b) 2 e) $2\sqrt{2}$

c) $\sqrt{5}$

19. El área de la cara lateral de una pirámide regular de base hexagonal es Su^2. Calcular el área de la sección que pasa por el punto medio de la altura de la pirámide y paralelamente a la cara lateral.

a) $\frac{25}{16}Su^2$ d) $19/8Su^2$

b) $15/7u^2$ e) $5/4Su^2$

c) $19/8u^2$

20. En un cono con generatriz constante esta inscrito un prisma hexagonal regular cuyas aristas son iguales. ¿Con que valores del ángulo entre la generatriz del cono y el plano de la base el área lateral del prisma será la máxima?

a) 30° d) 60°

b) 37° e) 53°

c) 45°

21. En un cubo ABCDEFGH cuya arista mide 1m, se tiene P, O y R centros de las diagonales ED, EG y DG respectivamente. Halle el volumen de la pirámide formada por los puntos BPOR.

a) $1/10m^3$ d) $1/4m^3$

b) $1/8m^3$ e) $1/15m^3$

c) $1/12m^3$

CUADRO DE RESPUESTAS

01. d	09. a	18. c
02. a	10. a	19. d
03. e	11. a	20. a
04. a	12. d	21. c
05. b	13. a	
06. b	14. a	
07. d	16. a	
08. d	17. c	

PRIMER SEMINARIO CEPREUNI

01 De las siguientes proposiciones. Cuáles son verdaderos:

I. Si A. B. son 2 conjuntos convexos. $A \cap B$ es un conjunto convexo.
II. Todo punto separa a la recta en dos conjuntos no vacíos. llamados semirectas.
III. Si la intersección de dos conjuntos no es un conjunto convexo. entonces ninguno de los dos conjuntos es convexo.

A) VVF B) VVV C) FVV
D) FFV E) FFF

02 De las siguientes proposiciones. Cuales son verdaderos y falsos.

I. Alguna diferencia de dos conjuntos no convexos es un conjunto convexo.
II. Si la intersección de dos conjuntos es convexa. entonces ninguno de los dos conjuntos es no convexo.
III. El conjunto de los puntos interiores de un polígono equilátero $(n \geq 3)$ es siempre un conjunto convexo.

A) VFF B) VVF C) VVV
D) FFF E) FFV

03 Si una recta L de un plano P. la cual separa a éste plano en 2 conjuntos de puntos L_1. y L_2. indique la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

I. L_1. y L_2 no incluyen a L.
II. L_1. y L_2 son convexos.
III. L_1. y L_2 se llaman planos.

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FVF E) FVV

04 Indique el valor de la verdad de las siguientes proposiciones:

I. Un círculo sin el borde es un conjunto convexo.
II. La intersección de 2 círculos es un conjunto convexo.
III. Un cuadrilátero siempre es un conjunto convexo.

A) VVV B) VVF C) VFV
D) VFF E) FVV

05 Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La región que se obtiene al quitar 2 lados a una región cuadrangular regular es un conjunto convexo.
II. La semirecta es un conjunto convexo.
III. Una región triangular cuyos vértices se han omitido es un conjunto convexo.

A) VVV B) FVF C) FVV
D) VFV E) VFF

06 De las siguientes proposiciones. Cuáles son verdaderos:

I. Una región poligonal limitado por un polígono convexo. donde se ha excluido su perímetro es un conjunto convexo.
II. Alguna región triangular donde se ha excluido el circunscentro es un conjunto convexo.
III. Ningún conjunto convexo resulta de la reunión de dos conjuntos no convexos.

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFF E) FFV

07 De las siguientes proposiciones. Cuáles son verdaderas y falsas.. Datos: L es una recta y C una circunferencia (considerar a P como el plano que los contiene).

I. $P-(L \cup C)$ resulta un máximo de dos regiones convexas y 2 regiones no convexas.
II. $(L \cap C)$. Puede ser una región no vacía y convexas.
III. Existe 5 elementos en partición.

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFF E)FFV

08 Indique el valor de verdad:

I. Una recta y un ángulo contenidos en un plano. pueden determinar una participación de 5 elementos.
II. Todo plano separa al espacio en dos semiespacios E_1 y E_2 tal que $E_1 \cup E_2$ es un conjunto convexo.
III. Sea C: Conjunto de puntos de un cono sólido.
T: Conjunto de puntos de una de las generatrices.
(C – T) es un conjunto convexo.

A) VFV B) VVV C) FFV
D) FFF E) VVF

09 Dadas las siguientes proposiciones. Cuáles son verdaderos y falsos.

I. Sea C: un polígono regular de 5 lados con su región interior.
L: una diagonal del polígono regular anterior entonces: C – L es un conjunto convexo.
II. La diagonal de un rombo divide a esta en 2 conjuntos convexos.
III. Sea Q: Un triángulo con su región interior.
T: 2 cevianas del triángulo anterior.
Entonces T divide en Q en un máximo de 3regiones convexas.

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFF E) FFV

10 Indique el valor de verdad (V) o falsedad (F) de lsa siguientes proposiciones:

I. Las particiones de un conjunto. incluidas sus fronteras siempre son conjuntos convexos.
II. Si: C_1 y C_2 son conjuntos convexos. entonces $C_1 \cap C_2$ es un conjunto convexo.
III. Si: C_1 y C_2 son conjuntos no convexos. entonces $C_1 \cap C_2$ es siempre un conjunto no convexo.

A) VVF B) VVV C) FVF
D) FFF E) FFV

11 De las siguientes proposiciones. Cuáles son vedaderas y falsas:

I. En todo polígono. ningún par de lados se intersectan excepto en sus extremos.
II. Toda recta que pase por un punto interior a un polígono convexo intersecta al contorno en dos puntos y solo en dos.
III. En todo polígono. ningún par de lados son colineales.

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFF E) FFV

12 Los ángulos de un pentágono convexo se encuentran en progresión aritmética. Halle el máximo valor entero de la razón.

A) 1 B)2 C)3
D) 4 E)5

13 ¿Cuánto debe medir uno de los ángulos obligatoriamente de un nonágono conociendo que todos sus ángulos interiores se encuentran en progresión aritmética?.

A) 100° B) 120° C) 130°
D) 140° E) 150°

14 Si el ángulo interior y el ángulo exterior de un polígono regular mide α y $k\alpha$. Cuáles son los valores enteros que puede tener K para que el polígono exista.

A) $K \leq 3$ B) $K \leq 2$ C) $K \leq 1$
D) $K \leq 4$ E) $K \leq 5$

15 Se tiene un polígono regular cuyo perímetro es P y en el cual el número que expresa su número de diagonales es igual al perímetro. Además su ángulo interior es P veces su ángulo exterior. ¿Cuánto mide el lado del polígono regular?.

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{2}$ E)1

16 Se tienen 2 polígonos regulares cuyos números de diagonales se diferencian en

27. y cuyos ángulos centrales están en la relación de 3/4. Calcule la diferencia de las medidas de sus ángulos centrales.

A) $\frac{1}{8}$ B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

17 En un polígono regular ABCDEFG.... de n lados $m\angle ACF = 150°$. Halle el número de diagonales medias.

A) 270 B) 272 C) 274
D) 276 E) 278

18 Halle el número de lados de un polígono de M diagonales.

19 Cuál es el máximo número de ángulos obtusos que se pueden tener en un polígono convexo de n lados cuyo número mayor a 4.

A) n B) n+4 C) n – 2
D) n+1 E) n – 3

20 Cuál es el polígono en el que se pueden trazar 21 diagonales desde 4 vértices consecutivos.

A) octágono B)nonágono
C)decágono D)pentadecágono
E)icoságono

21 En un polígono convexo de n lados. sobre cada lado se ubica un punto si se unen entre si todos los puntos ubicados. Halle el número de segmentos que se obtienen.

22 Calcule el valor del ángulo agudo que hacen las diagonales AC y BD de un polígono regular ABCDE.... de n lados.

23 En un polígono regular el número de diagonales que se pueden trazar de los 6 últimos vértices. es al número de diagonales que se pueden trazar de los 4 primeros vértices como 2 es a 5. Determine la medida del ángulo del vértice de la estrella que se forma al intersectarse las prolongaciones de sus lados de dicho polígono.

A) 100° B) 102° C) 104°
D) 106° E) 108°

24 En un polígono convexo se cumple que . las raíz cuadrada de su número de lados aumentado en K veces el máximo número de ángulos interiores agudos que tiene el polígono. es igual a la diferencia que hay entre los números totales de diagonales medias y número total de diagonales. Calcule el menor valor entero de K.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

25 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. En un triángulo ABC se cumple que AB>AC. las bisectrices interiores de los ángulos B y C. se intersectan en el punto I. Entonces IB>IC.
II. M es un punto cualquiera del lado BC de un triángulo ABC. entonces AM<p: siendo p el semiperímetro del triángulo.
III. La suma de las longitudes de lsa tres medianas de un triángulo está comprendida entre el perímetro y el semiperímetro del triángulo.

A) VVV B) VFV C) FFV
D) FVF E) FVV

26 En un triángulo ABC. en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica un punto Q a partir del cual se traza el rayo secante que intersecta a $\overline{BC}$ en E y $\overline{AD}$ en D. Halle la $m\angle ABC$ siendo entero y $m\angle BCQ = 134°$. AQ=AB=QD.

A) 39° B) 41° C) 43°
D) 45° E) 46°

27 En un triángulo escaleno sus lados miden 4u. 3u y $\sqrt{x^2 - 2u}$. ¿Cuántos valores enteros tiene x.

A) 6 B) 7 C) 5
D) 8 E) 9

28 ¿Cuál es el número de triángulos esaalenos. tal que las longitudes de sus lados son números enteros y su perímetro es menor que 13?.

A) 3 B) 4 C) 7
D) 5 E) 8

29 El número de rectas distintas que contienen a las alturas. medianas y bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo isósceles no equilátero es:

A) 9 B) 7 C) 6
D) 5 E) 3

30 En un triángulo PQR. se traza la bisectriz interior RT. se ubica el punto M en $\overline{QR}$ por dicho punto se traza una recta perpendicular a la bisectriz. La recta intersecta al lado RP en el punto F. Si $m\angle RQP + m\angle RQP = 0$: calcule la $m\angle RMF$.

A) θ B) θ C) $\frac{\theta}{2}$
D) $\frac{2\theta}{3}$ E) $\frac{3\theta}{4}$

31 En un triángulo ABC se traza la mediana BM. Si: AC<2BM y la medida del ángulo ABC es el mayor valor entero posible. calcule dicha meida.

A) 55° B) 60° C) 69°
D) 75° E) 89°

32 En un triángulo ABC se cumple: $m\angle ABC - m\angle ACB = 100°$. Calcule la medida del ángulo agudo que determinan la altura y la bisectriz exterior trazadas desde el vértice A.

A) 50° B) 40° C) 60°
D) 48° E) 55°

33 En el lado BC de un triángulo ABC se tiene el punto D. tal que se verifica: $m\angle CDA \frac{m\angle BAC + m\angle ABC}{2}$ y CD=I. Calcule la longitud del lado AC.

A) L B) $\frac{L}{2}$ C) $\frac{L}{3}$
D) $\frac{2L}{3}$ E) $\frac{2L}{3}$

34 En un triángulo ABC (recto en B) se traza la altura BH. Las bisectrices de los ángulos ABH y HBC intersectan a la hipotenusa en los puntos M y N. Si: AB+BC – AC=K: calcule MN.

A) K B) $\frac{2K}{3}$ C) $\frac{K}{2}$
D) $\frac{3K}{4}$ E) $\frac{3K}{5}$

35 En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores AB. BD y CG intersectándose en el punto I. Si: $m\angle AID = 78°$ y $m\angle DIC = 58°$. Calcule: $m\angle BAC - m\angle BCA$.

A) 40° B) 38° C) 44°
D) 25° E) 20°

36 En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores BD y CE. luego se trazan los rayos DP y EP tal que: $m\angle BEP = 2m\angle PEC$. $m\angle CDP = 2m\angle PDB$.

Si: $m\angle BAC = w$. Calcule la $m\angle EPD$.

A) $\frac{w}{2}$ B) $\frac{90}{w}$ C) $\frac{180}{2w}$
D) 45° E) 60°

37 En un triángulo ABC. el punto I es el incentro. el punto D es el punto de intersección de la prolongación de $\overline{AI}$ con el lado BC. IE es la perpendicular trazada del punto I al lado BC. La medida del ángulo BID es igual a la:

A) $m\angle BAC$ B) $m\angle ICE$ C) $m\angle EIC$
D) $m\angle DIE$ E) $m\angle IBD$

38 En un triángulo ABC las medianas AM y BN miden 18u y 21u. Caalcule el mayor perímetro entero del triángulo ABC.

A) 101u B) 100u C) 102u
D) 103u E) 104u

39 En un triángulo ABC. se trazan las cevianas AM y CE. las prolongaciones de las cevianas trazadas desde M y N en los triángulos AMC y ANC se intersectan en Q. tal que:

$m\angle MNC = 2m\angle MAC$.

$m\angle NAM = 2m\angle ACN$.

$m\angle ANQ = 3m\angle AMQ$ y

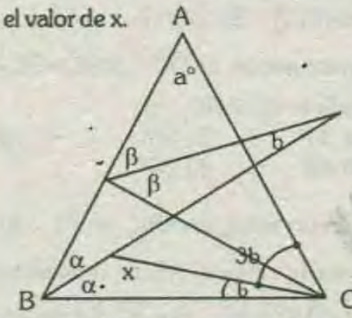
$m\angle QMC = 3m\angle QNC$

Si la $m\angle BAC = w$.

Calcule la $m\angle EPD$

A) 90 B) 100 C) 105
D) 110 E) 120

40 En la figura se cumple $a+2b=100°$. Halle el valor de x.



A) 140° B) 110° C) 120°
D) 130° E) 135°

41 En un triángulo ABD se ubica un punto exterior Q relativo al lado BD tal que AD=DQ; $m\angle BAQ = 30°$. $m\angle ABD = 18°$ y $m\angle BDQ = 42°$. Halle: $m\angle DBQ$.

A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 60°

42 En un triángulo rectángulo isósceles ABC($m\angle B = 90°$). en su interior se tiene el punto cualquiera Q. tal. $m\angle QBC = 3x$ $m\angle ACQ = x$. y $m\angle QBC = 3x$. Halle: x.

A) 10 B) 12 C) 15
D) 18 E) 20

43 En un triángulo ABD se trazan las cevianas AE y BC. tal que AB=BE=AC. CE=ED y $m\angle BAC = 60°$. Halle: $m\angle EAC$.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 12 E) 15

44 En un triángulo ABC isósceles la $m\angle ABC = 100°$ se trazan lsa cevianas $\overline{BP}$ y $\overline{CQ}$ $(P \in \overline{AC}$ y $Q \in \overline{AB})$ tal que: $m\angle ABP = m\angle BCQ = 30°$. Calcule la $m\angle CQP$.

A) 20° B) 40° C) 30°
D) 50° E) 36°

45 En un triángulo ABC isósceles (AB=BC). Se trazan las cevianas AM y CN. Tal que la $m\angle BAM = m\angle ABC = 20°$

$m\angle BCN = 30°$. Calcule la: $m\angle MNC$.

A) 70° B) 60° C) 75°
D) 80° E) 85°

46 En un triángulo isósceles ABC(AC=BC). la $m\angle C = 20°$. Se traza la ceviana BD de modo que AB=DC. halle la $m\angle DBC$.

A) 5° B) 8° C) 9°
D) 10° E) 17°

47 Dado el triángulo isósceles ABC (AB=BC). sea $P \in$ a la prolongación de $\overline{AB}$ de modo que BP=AC. Si $m\angle BPC = 30°$. halle $m\angle BAC$.

A) 10° B) 15° C) 20°
D) 18° E) 22.5°

48 En un triángulo ABC se tiene que $m\angle A = 30°$. se traza la ceviana CD de modo que CB=BD y CD=AB. Halle la medida del ángulo DCA.

A) 5° B) 7° C) 10°
D) 12° E) 15°

49 Con el triángulo ABC. $m\angle B = 20°$. $m\angle C = 80°$ y $P \in \overline{BC}$. tal que BP=AC. Halle la $m\angle APC$.

A) 10° B) 12° C) 18°
D) 20° E) 30°

50 En un triángulo rectángulo ABC se trazan las cevianas BD y BE de modo que AB=DC.BD=BE.

Si $m\angle BAC = 2m\angle EBC$. Halle la $m\angle ABD$.

A) 45° B) $\frac{45°}{2}$ C) 37°
D) $\frac{37}{2}$ E) $\frac{53}{2}$

51 En el triángulo ABC (AB=BC). sea $P \in$ a la porlongación de $\overline{AC}$ tal que BP=AC. $2m\angle A - m\angle BPC = 60°$. Halle $m\angle B$.

A) 60 B) 75 C) 90
D) 100 E) 120

52 Dado el triángulo isósceles ABC (AB=AC) desde el vértice A se levanta un segmento AD exterior al triángulo de modo que $m\angle DAB = m\angle ABC$.

Si $m\angle ADC = \frac{m\angle ABC}{2}$. DC=BC+AC.

Halle la medida del ángulo A del triángulo ABC.

A) 20° B) 40° C) 60°
D) 70° E) 80°

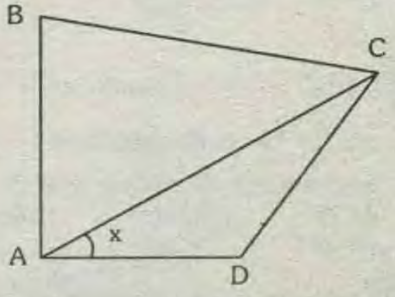
53 El ángulo A de un triángulo ABC mide α. Se traza la bisectriz interior BP y la mediatriz del segmento BP la cualcorta a la prolongación de $\overline{AC}$ en el punto Q. Halle la $m\angle QBC$.

A) $\frac{\alpha}{2}$ B) $\frac{\alpha}{3}$ C) $\frac{2\alpha}{3}$
D) $\frac{3\alpha}{2}$ E) α

54 El ángulo exterior de A de un triángulo ABC mide 71. Las mediatrices de los lados AB y AC se intersectan en P y al lado BC lo intersecta en E y F respectivamente. Halle la $m\angle PA.F$.

A) 12° B) 17° C) 26°
D) 41° E) 19°

55 En la figura se cumple que AB=AD. $m\angle BAC = 57°$. $m\angle BCA = 22°$ y $m\angle ACD = 11°$. Halle x.



A) 15° B) 16° C) 19°
D) 22° E)27°

56 En un triángulo rectángulo ABC($m\angle B = 90°$, $AB < BC$), $D \in \overline{BC}$ de modo que DC=AB. Si AB=a. Halle la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

A) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{a}{\sqrt{3}}$ C) a

D) $\frac{a}{\sqrt{4}}$ E) $\frac{a}{\sqrt{5}}$

57 Dado el triángulo ABC. sobre $\overline{AC}$ se tiene un punto F de modo que AF=3FC. En el triángulo ABF se traza la mediana AM cuya prolongación intersecta a $\overline{BC}$ en N. Si AM=17cm. Halle MN.

A) 1cm B) 2cm C) 3.2cm
D) (9/5)cm E)(17/7)cm

58 En un triángulo ABC acutángulo. se trazan las bisectrices interiores de los ángulosA y C. Desde B se trazan las perpendiculares a dichas bisectrices BP y BQ respectivamente. Si $\frac{PQ}{AC} = \frac{1}{4}$. Halle la razón entre el perímetr del triángulo ABC y la longitud del segmento PQ.

A) 10 B) 2 C) 3
D) 5 E) 6

59 ABC es un triángulo en el que $m\angle C = 75°$. la altura BH mide la mitad de lo que mide AC. Halle la $m\angle ABC$.

A) 75° B) 60° C) 45°
D) 37° E) 30°

60 En un triángulo ABC (recto en B). halle la $m\angle C = 15°$ se traza la altura BH. Por H se traza $\overline{HF} \perp \overline{BM}$ que al prolongarse intersecta en P a $\overline{BC}$. Si AC=b. Halle FP.

A) $\frac{b}{3}$ B) $\frac{b(\sqrt{3}-1)}{2}$ C) $\frac{b(\sqrt{3}-2)}{2}$

D) $\frac{b}{2}$ E) $\frac{b(2-\sqrt{3})}{8}$

61 ABC es un triángulo en el que $m\angle C = 75°$. la altura BH mide la mitad de lo que mide AC. Halle la $m\angle ABC$.

A) 75° B) 60° C) 45°
D) 37° E) 30°

62 En un triángulo rectángulo ABC se tiene que $m\angle A = 2m\angle AMB$. Si M punto medio de $\overline{BC}$ y AC=22cm. Halle AB.

A) 10cm B) 12cm C) 14cm
D) 16cm E) (22/3)cm

63 En un triángulo ABC (recto en A) $\overline{AM}$ es mediana. $\overline{BN}$ es ceviana. $\angle BCN \cong \angle CBN$ y la $m\angle ABN = 38°$. Si L es punto medio de $\overline{BN}$. Calcule la $m\angle LAM$..

A) 37° B) 27° C) 26°
D) 19° E) 13°

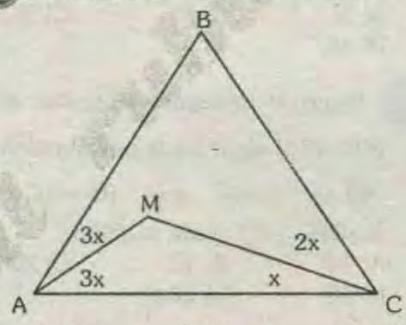
64 En un triángulo ABC. $\overline{BM}$ mediana. N: punto medio de $\overline{BM}$. la prolongación de $\overline{CN}$ interseca a $\overline{AB}$ en P. Si PM=3u y $m\angle MBC = 90°$. Halle la longitud de $\overline{AC}$.

A) 18u B) 15u C) 12u
D) 10u E)6u

65 En un triángulo PAN. E es excentro relativo al lado AN. $m\angle AEP = 25°$ y $m\angle PEN = 40°$. Halle la medida del ángulo que determinan $\overline{AN}$ y $\overline{PE}$.

A) 45° B) 60° C) 75°
D) 65° E) 70°

66 En la figura. si: MC=BC. Halle x.



A) 25° B) 3° C) 7.5°
D) 4° E) 4.5°

67 En un triángulo acutángulo DRA. O es ortocentro y C circunscentro. Halle la $m\angle ORC$ .si: $m\angle ODC + m\angle OAC = 38°$.

A) 36° B) 38° C) 48°
D) 35° E) 45°

68 En un triángulo ABC (AB=BC) se traza la mediana AM y se prolonga hasta el punto H de modo que $m\angle AHC = 90°$. Si $m\angle MAC = m\angle BCH$ y MH=a. halle AM.

A) 2a B) 3a/2 C) 4a/3
D) 4a E) 6

69 En un cuadrilátero ABCD. $m\angle A = 54°$. $m\angle B = 108°$. AB=BC=CD. Halle la $m\angle C$.

A) 37° B) 40° C) 44°
D) 48° E) 49°

70 En un triángulo ABC recto en B (AB<BC). se traza la altura BH. Los puntos I_1 e I_2 son los incentros de los triángulos ABH y HBC. La recta que pasa por los incentros intersecta al cateto BC en el punto D. Si $m\angle BCA = \alpha$. calcule la $m\angle BDI_1$.

A) α B) 2α C) $90 - \alpha$
D) 60 E) 45

71 En un triángulo ABC. se traza la ceviana BQ. tal que AB=QC: $m\angle A = 40°$. $m\angle C = 30°$. Halle $m\angle QBC$.

A) 55° B) 45° C) 50°
D) 60° E) 30°

72 En un triángulo ABC la $m\angle A = 22$. $m\angle C = 8$. Se construye exteriormente y sobre el lado AC otro triángulo ADC. la $m\angle CAD = 22°$ y $m\angle ACD = 23°$. Si BC=22. Halle DC.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

73 En el lado AC de un triángulo ABC se construye el triángulo rectángulo ACD (recto en D) de manera que $m\angle ECB = 2m\angle CAD$ ($\in$ la prolongación de $\overline{DC}$). Si AD+DC=CB. Halle la $m\angle ABC$.

A) 30° B) 35° C) 40°
D) 45° E) 60°

74 En un triángulo ABC. $m\angle B = 90°$. se traza la ceviana AF. de manera que la $m\angle BAF = 12$. $G \in \overline{AC}$ de modo que $m\angle AFG = m\angle C = 54°$.
Si BF=a. Halle FG.

A) 2a B) $\frac{4a}{3}$ C) $\frac{3a}{2}$

D) 3a E) $\frac{5a}{3}$

75 Dado un triángulo ABC obtuso en B por el punto B trazamos una perpendicular al lado $BC(\overline{BC} \cap \overline{AC}) = \{Q\}$. Si AB a y $m\angle BAC = 2m\angle BAC$. Halle QC.

A) a B) 2a C) 3a

D) $\frac{a}{2}$ E) $\frac{a}{3}$

76 En un triángulo ABC (recto en B). la $m\angle C = 15°$. se traza la altura BH y la mediana BM. Por H se traza $\overline{HF} \perp \overline{BM}$ que al prolongarse intersecta en P a $\overline{BC}$. Si AC=b. Halle FP.

A) $\frac{b}{3}$ B) $\frac{b(2-\sqrt{3})}{8}$ C) $\frac{b(\sqrt{3}-2)}{2}$

D) $\frac{b}{2}$ E) $\frac{b(2-\sqrt{3})}{2}$

77 En un triángulo ABC (AC=BC). M es punto medio de $\overline{AB}$. Considere el punto P en el exterior del triángulo de modo $m\angle APC = 90°$. Si $m\angle ABC = 40°$. Halle x.

Si: $m\angle APM = m\angle BCP = x$.

A) 10° B) 20° C) 25°
D) 30° E) 35°

78 Determine el valor de verdad (V o F) de las proposiciones:

I. Un cuadrilátero de diagonales congruentes. es un rectángulo.
II. Un cuadrilátero de diagonales perpendiculares. es un trapezoide simétrico.
III. Un cuadrilátero de lados congruentes es un rombo.

A) FFF B) FFV C) FVV
D) VVV E) VFF

79 Se tiene un cuadrilátero ABCD en el cual $m\angle BAD = 30°$. $m\angle ABC = 150°$. $m\angle BCD = 120°$. BC=10 y CD=12. Halle AD.

A) 34 B) 32 C) 30
D) 28 E) 26

80 ABCD es un cuadrilátero tal que $m\angle BAD = m\angle BDA = 60°$. $m\angle DBC = 45°$. $m\angle BCA = 30°$. Halle $m\angle BDC$.

A) 45° B) 60° C) 70°
D) 72° E) 90°

81 En el cuadrilátero ABCD. $m\angle DAB = m\angle BCD = 90°$. BC=CD. Halle AC sabiendo que la distancia de C a $\overline{AD}$ es 2.

A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{8}$

82 En el cuadrilátero ABCD. $m\angle ADB = 90°$. $m\angle BCA = m\angle ACD = 15°$ y $m\angle CAD = 30°$. Halle $m\angle BAC$.

A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 30°

83 En un paralelogramo ABCD. por las vértices A y C se trazan perpendiculares a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. las que se intersectan en F. Halle la $m\angle ADF$. si $m\angle DFC = 16°$.

A) 106° B) 105° C) 104°
D) 103° E) 102°

84 ABCD es un trapezoide. Se traza $\overline{CH} \perp \overline{AC}(H \in \overline{AC})$ y $AH = \frac{AD}{2}$.

Si $m\angle CDA = 75°$. $m\angle BAD = 90°$.

Halle la $m\angle HCA$.

A) 15° B) 30° C) 37°
D) 45° E) 60°

85 En un cuadrilátero convexo ABCD. AB=BC=CD y además $m\angle ACD - m\angle ACB = 60°$. Se traza la mediatriz de $\overline{AC}$ que intersecta a $\overline{AD}$ en M. Halle la medida del menor ángulo que determinan la mediatriz y el lado AD.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 72° E) 80°

86 En el interior de un paralelogramo ABCD se ubica el punto Q. Si $m\angle AQD = 134°$. $\overline{QD} \perp \overline{CD}$. $m\angle ABD = m\angle BDC$ y $m\angle BAQ + 16° = m\angle ABD$. Halle $m\angle ABD$.

A) 40° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 80°

87 En un paralelogramo ABCD: AB<BC y $m\angle BAC$ es menor que 45°. exteriormente al lado AD se ubican F y E de modo los triángulos ABF y BEC son equiláteros. Halle la medida del ángulo FDE.

88 En un cuadrado ABCD se ubica Q. P. S y R en los lados AB. BC. CD y AD se ubica un punto interior O. tal que $m\angle OSD = m\angle AQO = m\angle CPO = m\angle ORD$ y OQ=5. OP=4. OS=2.5. Halle OR:

89 Exteriormente el paralelogramo ABCD y considerando los lados AB. BC y CD. se construyen cuadrados cuyos centros son 0_1. 0_2 y 0_3 respectivamente. Si $0_1 0_3 = a$. Halle la distancia de 0_2 a la recta que contiene a la recta $0_1 0_3$.

90 ABCD es un paralelogramo (AB<BC). Se traza $\overline{BN}$ y a $\overline{CM}$. tal que N y M son puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$. $\{P\} = \overline{CM} \cap \overline{BD}$. $\{Q\} = \overline{BN} \cap \overline{AC}$. $\{R\} = \overline{AQ} \cap \overline{BM}$. T es punto medio de $\overline{AB}$ y $\{S\} = \overline{BD} \cap \overline{CT}$. Si AB=m y QP=n. Halle RS.

A) $\frac{2m-n}{2}$ B) $\frac{m-n}{2}$ C) $\frac{m+n}{2}$

D) $\frac{2m-n}{3}$ E) $\frac{m-n}{4}$

91 En un trapezoide simétrico ABCD (BD>AC). las diagonales se intersectan en 0. tal que. OD=3(OB). Calcule la distancia de O a la recta que contiene al vértice A. si las distancias de los vértices B y D a dicha recta miden 3 y 2 respectivamente.

A) 1.75 B) 2.75 C) 1.25
D) 2.25 E) a y b

92 ABCD es un trapecio tal que $m\angle A + m\angle D = 90°(\overline{BC} // \overline{AD}, BC < AD)$. Si M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente y $m\angle D = 40°$. halle la $m\angle MNA$.

A) 60° B) 66° C) 70°
D) 76° E) 80°

93 En un trapecio la diferencia de la longitud de la mediana del segmento que une los puntos medios de las diagonales es 12. Halle la longitud de la base menor.

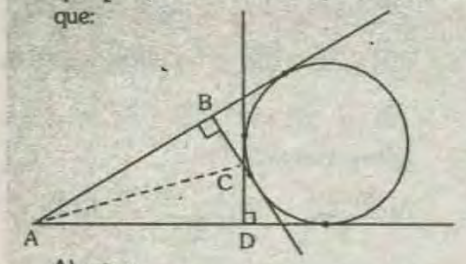
A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

CUADRO DE RESPUESTAS

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
A	A	B	B	A	B	A	A	D	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	C	D	B	E	C	*	*	A	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
*	*	E	B	*	D	A	A	A	C
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
E	B	A	A	A	E	C	D	A	A
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	C	C	A	D	D	*	C	E	B
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
C	*	E	E	C	A	E	A	A	E
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
A	E	C	A	C	C	B	E	D	E
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
C	A	D	A	B	E	*	A	A	E
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
C	B	A	A	C	*	*	*	*	*
91	92	93							
B	E	D							

SEGUNDO SEMINARIO CEPREUNI

01 Con respesto a los inradios ABC y ADC r_1 y r_2 respectivamente se puede afirmar que:



A) $r_1 > r_2$
B) $r_1 < r_2$
C) $r = r_2$
D) falta información

02 En un triángulo rectángulo ABC recta en B. I es el Incentro tal que m $\angle$ AID = 90° (D $\in \overline{AC}$) $\overline{DE} \perp \overline{BC}$. Si AB + BC = 34. AC = 26. Calcule BE.

A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

03 En un cuadrilatero ABCD. circunscrito a una circunferencia. Si m $\angle A = 60°$. AD+BC= 14. CD= 6. Calcular la medida del radio de la circunsferencia. (m$\angle$B=90°)

A) $2(\sqrt{3}-1)$ B)$3(\sqrt{3}-1)$ C)$4(\sqrt{3}-1)$
D)$3(\sqrt{2}-1)$ E)$4(\sqrt{2}-1)$

04 En un cuadrilátero ABCD circunscrito a una circunferencia las diagonales se interceptan perpendicularmente en el punto "O". si los radios de las circunsferencias inscritas en los triángulos AOB. BOC y COD miden r_1. r_2 y r_3 respectivamente. Halle el radio de la ciscunsferencia inscrita en el triámgulo AOD.

A) $\frac{r_1+r_2+r_3}{2}$ B)$r_1 - r_2 - r_3$
C) $r_1 - r_3 - r_2$ D)$r_2 - r_3 - r_1$
E) $2r_1 + 3r_2 - r_3$

05 Un exagono ABCDEF circunscrito a una. circunferencia tal que AB= 4u; BC= 3u; CD= 2u; DE= 1u; AF= u. Halle EF

A) 3u B) 3. 5 C) 4u
D) 4. 5 E) 6u

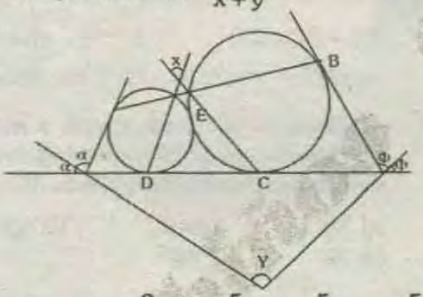
06 En un cuadrilátero ABCD circunscrito en una circunferencia si AB = 7k. BC= k. m $\angle$ ADC = 90°. m $\angle$ ACD = 60°. Calcule la medida del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ADC.

A) k B) 3k C) 4k
D) $\sqrt{2}$k E) $\sqrt{3}$k

07 Dos circunferencias O y O' se intersectan en A y B. Por A se trazan una secante CAD y luego. las tangentes AT y AT' respecticamente a las circunferencia O y O'. Calcule el valor del ángulo CBD sabiendo que el ángulo formado por las tangentes mide α.

A) 180 – α B)90 – α C)180– $\frac{\alpha}{2}$
D) 180 – $\frac{\alpha}{3}$ E)180– $\frac{\alpha}{4}$

08 En el gráfico A. B. C. D y E son puntos de tangencia Halle: $\frac{2x+3y}{x+y}$



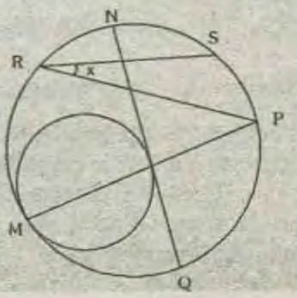
A) 3 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{5}{3}$

09 Por un punto exterior P se traza una tangente PD a una circunferencia de centro O. El punto D se une a los extremos de un diámetro AB. Las rectas DA y DB intersectan a PO en M y N respectivamente. Calcule MN sabiendo que PD= ℓ y $\overline{PO}$ es perpendicular a AB.

A) $\frac{\ell}{4}$ B) $\frac{\ell}{3}$ C) $\frac{\ell}{2}$
D) 3 ℓ E)2 ℓ

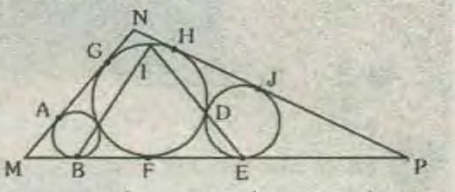
10 Las 2 circunferencias son tangentes interiormente. NQ es tangente a la circunferencia menor.

Si $m\widehat{PQ} = \phi$. $\widehat{NS} \cong \widehat{SP}$. Halle lam $\angle$ SRP.



A) $\frac{\phi}{4}$ B) $\frac{\phi}{2}$ C) $\frac{\phi}{6}$
D) $\frac{\phi}{8}$ E) $\frac{2\phi}{5}$

11 En la figura A. B. F. E. J. H. G. C. D son puntos de tangencia. Si m $\angle$ MNP= ϕ. hallar m $\angle$ BIE.

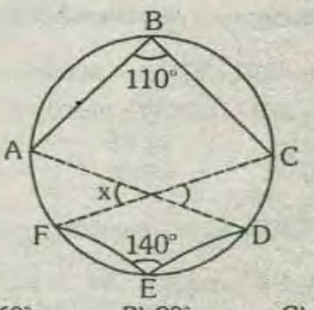


A) $15+\frac{\phi}{3}$ B) $30+\frac{\phi}{4}$ C) $45+\frac{\phi}{4}$
D) $45+\frac{\phi}{3}$ E) $45+\frac{\phi}{2}$

12 En una circunferencia se inscribe un triángulo isósceles MNP (MN=MP= ℓ) se toma un punto cualquiera. Q en el arco MP se prolonga $\overline{NQ}$ hasta S. Si QS = QP . Calcule $\frac{MN}{MS}$

A) $\frac{1}{2}$ B)1 C) $\frac{1}{3}$
D)2 E) $\frac{2}{3}$

13 De la figura. Halle x.



A) 60° B) 90° C) 67. 5°
D) 12. 5° E) 112. 5°

14 Sea el cuadrilatero inscrito ABCD en una circunferencia de centro O. $\overline{ABC}\overline{DC} = \{P\}$ y $\overline{BC}\overline{CAD} = \{Q\}$.

Las bisectrices de los ángulos APD y BQA se interceptan en T.

Halle la $m\angle PTQ$.

A) 15° B)30° C)45°
D)75° E)90°

15 Se tiene un triángulo acutángulo MNP. se trazan las alturas $\overline{NA}, \overline{MC}$ y $\overline{PB}$.

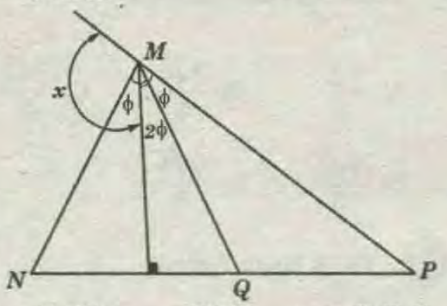
si la $m\angle NMP = \phi$

Halle la $m\angle BCA$.

A) $60 - \phi$ B) $90+2\phi$ C) $180 - \phi$
D) $180 - 2\phi$ E) $120 - 2\phi$

16 En el siguiente gráfico $\overline{MQ}$ es mediana del triángulo MNP.

Halle x.



A) 60° B) 90° C) 67.5°
D) 12.5° E) 112.5°

17 En un cuadrilátero convexo ABCD

la $m\angle ABD = 2m\angle ACD = 60°$
la $m\angle ADB = 2m\angle ACB = 34°$
Halle la medida del ángulo que determinan sus diagonales.

A) 72° B) 74° C) 77°
D) 80° E) 82°

18 En un cuadrilátero convexo ABCD. La $m\angle BAC = m\angle CAD = 3$. la $m\angle BCA = 5$. $m\angle ACD = 82°$.
Calcula la $m\angle BDC$

A) 80° B) 82° C) 85°
D) 90° E) 92°

19 Se tiene un triángulo ABC. recto en B. Se ubica un punto interior M. Si MC= 8. y la $m\angle BCM = m\angle MAC$
$m\angle AMB = 3m\angle ACB$. Halle MB.

A) 4 B) 4. 5 C) 5
D) 5. 5 E) 6

20 ABCD es un cuadrilatero. Si ABCD. Si AB= AD y la $m\angle CBA = 3m\angle CAD$. y la $m\angle ACD = m\angle DAC$. Halle $m\angle DBC$.

A) 20° B) 30° C) 32°
D) 35° E) 40°

21 En un triángulo ABC se ha trazado la altura BH. luego $\overline{HD} \perp \overline{AB}$ y $\overline{HE} \perp \overline{BC}$. Si $m\angle AED = 15°$. Calcule la $m\angle DCA$.

A) 8° B) 10° C) 12
D) 15° E) 20°

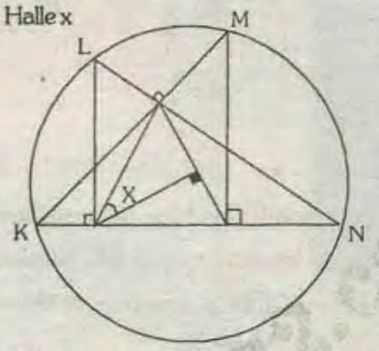
22 En el triángulo ABC se ha trazado la altura BH. Si $m\angle ABM + m\angle ACB = 90°$. Halle $m\angle ABC$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

23 En un circunferencia se trazan dos cuerdas perpendiculares y por los extremos de esas cuerdas se trazan tangentes a la circunferencia. Demuestre que cuadrilátero que se obtiene es inscriptible.

24 En el gráfico mostrado $m\widehat{KN} = \phi$.

Halle x



A) $180° - \phi$ B) $\phi - 90°$ C) $\phi - 60°$
D) $\phi - 75°$ E) $\phi - 45°$

25 En unn triángulo acutángulo ABC. la recta de Euler determine con sus lados un cuadrilátero inscriptible. Calcule la medida del ángulo que forma dicah recta de Euler y el diámetro que pasa por la vértica de donde parten los lados que intersectan a la recta de Euler.

A) 60° B) 75° C) 80°
D) 90° E) 95°

26 En un triángulo acutángulo ABC inscrito en una circunferencia sobre el arco $\widehat{BC}$. se ubi ca el punto D y se traza la recta de Simpson. L. correspondiente. Si H es el ortocentro de ABC. $\overline{HD} \cap \overline{L} = \{E\}$.
si HE = 5. Halle ED.

A) 3 B) 4 C) 4.5
D) 5 E) 6

27 En un triángulo MNP. $m\angle MNP = 60°$. Halle la medida del ángulo obtuso que determina la recta Euler con el lado NP.

A) 110° B) 120° C) 115°
D) 100° E) 140°

28 Se tiene una semicircunferencia de diámetro AB; H y T son puntos de diámetro y de la semicircunferencia respectivamente tal que $\overline{HT} \perp \overline{AB}$, por T y H pasan una recta tangente y una recta secante ques intersectan en C. Si desde el ángulo TCH se traza una bisectriz que intersecta a $\overline{AT}$ en E. Si $m\angle CHB = 70°$. Halle $m\angle AHE$.

A) 5° B) 10° C) 15°
D) 20° E) 25°

29 Dado el triángulo ABC. donde la $m\angle BAC = 32°$ y la $m\angle ACB = 88°$. además O. I y H son el circunscentro. incentro y ortocentro respectivamente. Halle la $m\angle OIH$.

A) 150° B) 151° C) 152°
D) 153° E) 155°

30 Con un cuadrilatero ABCD. la $m\angle DBA = 20°$. $m\angle CBD = 80°$. la $m\angle CDB = 70°$ y la $m\angle BDA = 40°$. Calcular la $m\angle ACD$.

A) 8° B) 10° C) 12°
D) 15° E) 20°

31 En una triángulo isósceles ABC. (AB=BC). se ubica el punto interior T tal que la $m\angle BAT = 40°$. $m\angle TAC = 30°$. $m\angle BCT = 20°$. Calcule la $m\angle CBT$.

A) 6° B) 8° C) 10°
D) 15° E) 18°

32 En un triángulo ABC. AB= 4. BC=8. Se inscribe el rombo BDEF $\left(D \in \overline{AC}, F \in \overline{AB}\right)$. Calcule BD.

A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{8}{3}$ D) 3 E) $\frac{7}{2}$

33 En un triángulo se trazan las medidas $\overline{CM}$ y $\overline{BP}$ que se interceptan en F. Si $E \in \overline{BP}$ tal que $\overline{AE} \cap \overline{CM} = \{G\}$ y BE = FP. Calcule GF. si FC = 6u.

A) 1. 5 B) 2 C) 2. 5
D) 1. 8 E) 3. 2

34 En un triángulo rectángulo ABC (recto en B). se traza la bisectriz BD.
Si AB =m. BC = m y BD=t. ¿En qué relación están m. n y t?.

A) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{t}$ B) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{t}$

C) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{\sqrt{2}}{t}$ D) $m+n = 2t$

E) $m+n = \sqrt{2}t$

35 En un triángulo isósceles ABC (AB =AC) el segmento DE $\left(D \text{ en } \overline{AB} \text{ y } E \text{ en } \overline{BC}\right)$ es

paralelo a $\overline{AC}$ y es tangente a la circunferencia inscrita. Si G y F son puntos de tangencia con $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente y BG = a. AC = tr. calcule DF.

A) $\frac{ab}{a+b}$ B) $\frac{b^2}{a+b}$ C) $\frac{a^2}{a+b}$
D) $\frac{ab}{b-a}$ E) $\frac{a^2}{b-a}$

36 Si C es un punto del interior de un triángulo ABC. $\overline{DE} \cap \overline{FG} = \{O\}$ siendo $\overline{DE}$ y $\overline{FG}$ segmentos paralelos a $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente $(D \in \overline{AB}\ E \in \overline{AC}, F \in \overline{BC}, G \in \overline{AC})$ y $\overline{BP}$ es una ceviana que contiene a O; sabiendo que $\frac{BO}{OP} = K$. calcule $\frac{AC}{GE}$

A) $\frac{1}{k}$ B) k C) k –1
D) k+1 E) $\frac{k+1}{k}$

37 En un prolongación de $\overline{DC}$ de un paralelogramo se toma un punto P de manera que $\overline{AP}$ intercepta a $\overline{BD}$ en E y F respectivamente.
Si AE=a y EF= b. Halle FP.

A) $\frac{ab}{a+b}$ B) $\sqrt{ab}$ C) $\frac{a^2-b^2}{a}$
D) $\frac{a^2-b^2}{b}$ E) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$

38 Se tiene el cuadrilatero ABCD. por los puntos medios M y N de los diagonales AC y BD se traza una recta que intercepta a los lados AD y BC en los puntos P y Q respectivamente. y a la prolongación de $\overline{CD}$ en F. si AP= a. PD= b y BQ=c. Halle CD.

A) $\frac{bc}{a+b}$ B) $\frac{bc}{a}$ C) $\frac{ab}{c}$
D) $\frac{ac}{b}$ E) $\sqrt{ab+ac+bc}$

39 Sobre una recta se ubican los puntos A. B y C (AB < BC). luego se dibujan las circunferencias con diámetros AB. BC y AC. sobre la circunferencia mayor se ubican los puntos P y D tal que $\overline{PD}$ intersecta a $\overline{AC}$. Si $\overline{AP}$ intersecta a la circunferencia menor en M y $\overline{CD}$ a la circunferencia intermedia en N.
Si: AM = 1dm. MP = 3dm y CN= 4dm. halle ND en dm.

A) $\frac{2}{3}$ B)1 C) $\frac{4}{3}$
D) $\frac{5}{3}$ E) 2

40 En un triángulo equilatero ABC se ubica un pnto interior P. por el cual se trazan paralelas a sus tres lados. si dichos segmentos de paralelas miden 5cm. 6cm y 7cm respectivamente. calcule la razón de la longitud del lado del triángular ABC. con la longitud del lado del triángulo ABC.

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{2}{7}$
D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{1}{3}$

41 En un triángulo ABC. cuyo circunscentro es O y su circunsradio mide 6u. la bisectriz interior $\overline{BM}$ intersecta a $\overline{OH}$ en F ($\overline{BH}$ es la altura). Si BH= 8u y OF= 2u. Halle HF.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$
D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{8}{3}$

42 En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$ y la ceviana $\overline{AE}$ que se biseca a $\overline{BD}$. si EC = 3u BE= 12u. Halle AB.

A) 2u B) 4u C) 5u
D) 8u E) 10u

43 En un triángulo ABC. m ∠BAC=m ∠ BAC= 2m ∠ABC. Si la mediatriz de $\overline{AB}$ intersecta a $\overline{BC}$ en T. si TC= 1. Calcule AC.

A) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ C)2
D) $\frac{5}{2}$ E)3

44 En un triángulo ABC se cumple que la m ∠A = 2m ∠C. BC – AB= 2. AC= 5. Halle el perímetro del triángulo.

A) 16 B) 18 C) 14
D) 15 E) 12

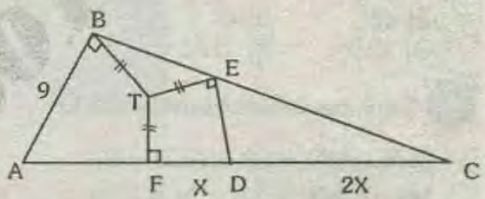
45 En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores BM y BN de modo que: $\frac{AM}{NC} = \frac{6}{5}$ y $\frac{AM}{MN} = \frac{3}{2}$.
Si la m ∠ABM = m ∠ ABM = m ∠MBN = m ∠NBC. halle la m ∠ MBN.

A) 15° B) 120° C) 30°
D) 45° E) 60°

46 En un triángulo ABC se trazan las cevianas $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$ $(D \in \overline{AC} \wedge E \in \overline{DC})$ tal que la m ∠ ABD = m ∠EBC = m ∠DBE = m ∠ EBC. Si AD= 2dm. DE= 1dm y EC=3dm. halle BE (en dm)

A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$
D) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

47 De la figura. Halle x



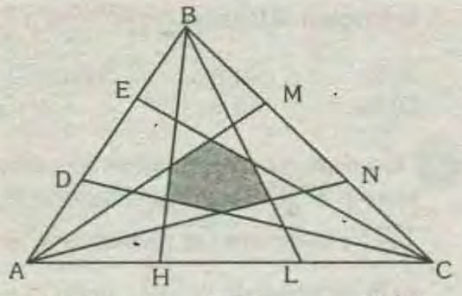
A) 2 B) 3 C) $\frac{7}{2}$
D) 4 E) $\frac{9}{2}$

48 Dado un triángulo escaleno. demostrar que los puntos de intersección de cada bisectriz exterior con la prolongación del lado opuesto. se encuentran en línea recta.

49 En un triángulo ABC se traza la bisectriz $\overline{BP}$ y una secante que pasa por su punto medio que se intercepta a $\overline{AB}$ en E. a $\overline{BC}$ en D y a la prolongación de $\overline{CA}$ en F. Si BC= 6u. AB= 4u y AC= 3AF. calcule BD.

A) $\frac{66}{31}$u B) 3u C) $\frac{67}{31}$u
D) $\frac{68}{31}$u E) $\frac{65}{31}$u

50 En la figura mostrada. si la suma de la ceviana interiores el triángulo ABC es 200 dm. Calcule el perímetro del exágono interior:
Si: AD = DE = EB
BM = MN = NC
AH = HL = LC



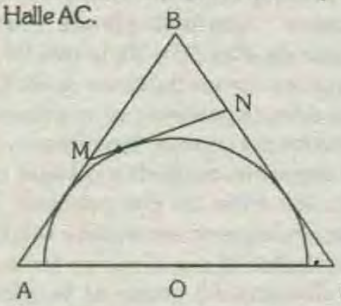
A) 20 B) 24 C) 25
D) 30 E) 32

51 En un triángulo ABC. BC =a. por el incentro se traza una recta que intercepta respectivamente a los lados AB y AC en D y E. si: AD = m. DB =m. AE= 1. Entonces EC es igual a:

A) $\frac{mnt}{a}$ B) $\frac{m^2+n^2}{a+t}$ C) $\frac{m^2+a^2-n^2}{t}$

D) $\frac{amt-nt^2}{mn+nt+n^2}$ E) $\frac{\sqrt{at}}{m+n}$

52 En la figura mostrada triángulo ABC es isósceles: AB = BC $\overline{MN}$ es tangente a la semicircunferencia. Si AM= a y NC= b. Halle AC.



A) $\sqrt{a\times b}$ B) $2\sqrt{a\times b}$ C)$3\sqrt{a\times b}$
D) $4\sqrt{a\times b}$ E)$5\sqrt{a\times b}$

53 Sean dos circunferencias tangentes interiores . sea T el puntos de las circunferencias de radios r y R. r<R. Los puntos: T. A y C; y T. B y C son colineales. $T\in\vec{L}$ tal que $\vec{L}\cap\overline{AB}=\{M\}$ y $\vec{L}\cap\overline{CD}=\{N\}$. Si 3r=2R y TM =12cm. Halle MN.

A) 2 cm B) 4 cm C) 6 cm
D) 8 cm E) 10 cm

54 En un triángulo ABC. en el interior se elige el punto T de manera que $m\angle ABT = n\angle TAC = m\angle BCT$. luego por B se traza una paralela al lado $\overline{AC}$ que se intersecta en F ala prolongación de $\overline{AT}$. Si BF= 4. AC=5. Calcule BC.

A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{6}$

55 En un triángulo ABC. se traza la mediana $\overline{AM}$ ($M\in\overline{BC}$). Si la $m\angle BAM = m\angle BCA$. Calcule $\frac{AB}{BC}$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) 1 E) $\frac{3}{2}$

56 Se tiene una semicircunferencia de centro O yde diámetro AB. se traza $\overline{HA}\perp\overline{AB}$. luego de H la tangente $\overline{HC}$ (C sobre la semicircunferencia). se prolonga $\overline{AC}$ hasta un punto D y trazamos $\overline{HM}\perp\overline{OD}$. Si: OM= 2dm. MD= 6dm. Calcule AB (en dm.)

A)6 B) 8 C) $4\sqrt{2}$
D) $5\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$

57 En un triángulo ABC. AB =6u. AC= 8u y BC= 4u. Se trazan las bisectrices $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ y el rayo $\overline{DE}$ que intercepta a AB en P. Calcular BP.

A) 5u B) 6u C) 7u
D) 4.5u E) 5.5u

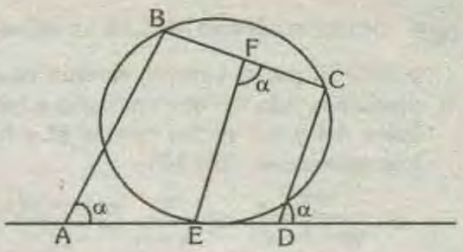
58 En un triángulo ABC (AB<BC). la mediatriz de $\overline{AC}$ intercepta a $\overline{BC}$ en Q y a la prolongación de $\overline{AB}$ en P. Si O es el circunscentro y OQ= a. PQ= b. calcule el circunsradio

A) $\sqrt{a(a+b)}$ B) $\sqrt{b(a+b)}$ C) $\sqrt{ab}$
D) $\sqrt{b(b-a)}$ E) $\sqrt{\frac{a(a+b)}{2}}$

59 En un triángulo ABC. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ al mismo nivel que tienen sus longitudes en progresión aritmética de razón igual a 6. Calcular la distancia del incentro al baricentro.

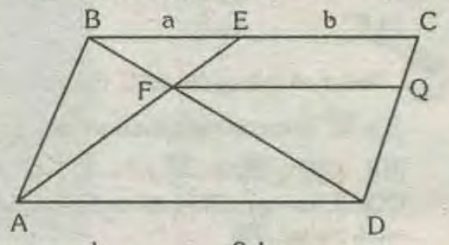
A) 1.5 B) 2 C) 2.5
D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{7}{3}$

60 En la siguiente figura. AB = m y CD= n. Calcular EF.



A) $\frac{m+n}{2}$ B) $\frac{2mn}{m+n}$ C) $\sqrt{mn}$
D) $\sqrt{\frac{mn}{2}}$ E) $\frac{\sqrt{mn}}{m+n}$

61 ABCD es un paralelogramo $\overline{FQ}//\overline{AD}$. Si BE=a; EC= b. Halle FQ



A) $\frac{ab}{a+b}$ B) $\frac{2ab}{a+b}$ C) $\sqrt{ab}$
D) $\frac{(a+b)^2}{(2b+a)}$ E) $\frac{(a+b)^2}{2a+b}$

62 En un triángulo ABC. la $m\angle B - m\angle C = 90°$. Se traza la altura $\overline{AH}$ y se resulta que: BC= 8BH = 8a. Calcular AH:

A) 2a B) 2.5a C) 3.5a
D) 4a E) 3a

63 En una circunferencia de radio R. se traza una cuerda $\overline{BC}$. sea A un punto de la circunferencia; con centro en A se traza una circunferencia tangente a la cuerda: halle el radio de esta circunferencia AB / AC = K.

A) $\frac{2k}{R}$ B) $\frac{k}{R}$ C) $\frac{k}{2R}$
D) $\frac{k\sqrt{2}}{R}$ E) $\frac{\sqrt{k}+R}{R}$

64 Desde un punto P exterior a una circunferencia de centro O. se trazan las secantes PNA y PQS. luego se traza el diámetro AB perpendicular a la cuerda QS. si: PM=a y MA = b. Halle AS.

A) $\sqrt{ab}$ B) $\frac{ab}{a+b}$ C) $\sqrt{b(a+b)}$
D) $\sqrt{b(a-b)}$ E) $\frac{a+b}{2}$

65 Se tiene el triángulo ABC. AB=c. BC=a y AC= b. por el incentro se traza una paralela al lado AC que intercepta a los lados AB y BC en los puntos M y N respectivamente. Halle MN.

A) $\frac{abc}{\sqrt{a+b+c}}$ B) $\frac{ab}{a+c}$ C) $\frac{(a+b)^2}{c}$

D) $\frac{b(a+c)}{a+b+c}$ E) $\sqrt{b(a-c)}$

66 Se tiene el triángulo ABC. se traza la ceviana BD de manera que la $m\angle AID = 90°$. si I es el incentro y $BC \times CD = 64$.

A) 7 B) 5 C) 4
D) 8 E) 3

67 Dado el triángulo ABC circunscrito $F \in \overline{AC}$ a una circunferencia en los puntos P.Q y $F(P \in \overline{AB}, Q \in \overline{BC}$ y $F \in \overline{AC})$. AP=4. CQ=3. los rayos PQ y AC se interceptan en R. Hallar: CR.

A) 20 B) 18 C) 1
D) 21 E) 24

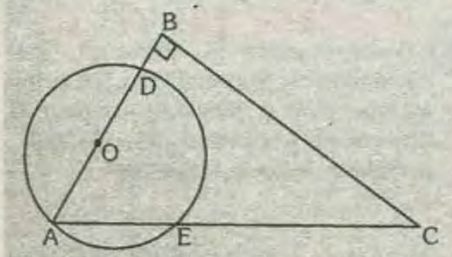
68 En un triángulo ABC (BC=12u)se trazan las medianas BM y CN y luego $\overline{MP}$ paralelo a $\overline{CN}$(P en $\overline{AB}$) . Si la prolongación de $\overline{BC}$ en Q calcule CQ.

A) 4u B) 8u C) 5u
D) 6u E) 9u

69 En un triángulo ABC. se traza la secante que intersecta a $\overline{AB}$ en P. a $\overline{BC}$ en Q a la prolongación de $\overline{AC}$ en R. si BQ = QC. PB = 24. PQ =3u y QR= 7u. Halle AP(en u).

A) 3.0 B) 3.5 C) 4.0
D) 4.5 E) 5.0

70 Si $\overline{AD}$ es un diámetro. Halle AE siendo OA= BD=2. CE=5



A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B) 4 C) 2
D) 3 E) 1

71 Una circunferencia de radio r. está inscrita en un sector circular AOB. de centro O y radio R. Calcule la longitud de la cuerda AB.

A) $\frac{Rr}{R+r}$ B) $\frac{2Rr}{R-r}$ C) $\sqrt{Rr}$

D) $\frac{2Rr}{R+r}$ E) $\sqrt{R^2+r^2}$

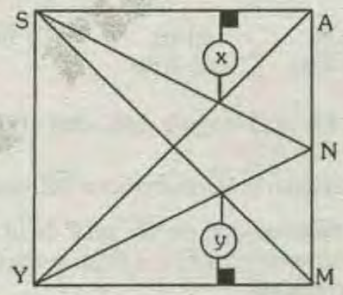
72 Dado un paralelogramo PQRS. PQ= 8u. QR= 16u. en la diagonal $\overline{PR}$. Se elige el punto A. Si (A. $\overline{PR}$)= 4u. calcule d(A $\overline{PS}$).

A) 1u B) 2u C) $\sqrt{2}$u
D) $\sqrt{3}$u E) 4u

73 Dos circunferencia son tangentes exteriores y sus radios miden R y r (R>r). Halle la distancia trazada desde el punto de tangencia a una recta tangente común exterior a las dos circunferencias. sabiendo que: $\frac{1}{R}+\frac{1}{r}=\frac{1}{4}$

A) 8 B) 12 C) 16
D) 6 E) 4

74 SAMY es un cuadrado de lado " ℓ " . N es punto medio de $\overline{AM}$. calcule . x +y es función de ℓ .



A) $\frac{2\ell}{3}$ B) $\frac{\ell}{3}$ C) $\frac{3\ell}{2}$
D) $\frac{3\ell}{4}$ E) $\frac{\ell}{2}$

75 Sean dos circunferencias cuyos radios miden 8m y 4m. La circunferencia menor tiene su centro en la circunferencia mayor. Entonces la distancia entre el punto de intersección de la tangencia exterior común con la recta que pasa por los centros y el centro de la circunferencia mayor es:

A) 8m B) 12m C) 14m
D) 16m E) 20m

76 En un triángulo ABC se cumple que la $m\angle ABC = m\angle BAC + 90°$. se traza la altura CH. Si AB=5u y BH= 4u. entonces la longitud de la altura CH es:

A) 5u B) 6u C) 7u
D) 8u E) 9u

77 En un triángulo ABC. se trazan la bisectriz exterior BP (P esta en la prolongación de $\overline{AB}$) y finalmente $\overline{QR}$ paralelo a $\overline{BC}$ (R en la prolongación de $\overline{AP}$). Halle QR si AB=8 y BC= 2.

A) $\frac{13}{4}$ B) $\frac{14}{3}$ C) $\frac{15}{4}$
D) $\frac{16}{3}$ E) $\frac{16}{5}$

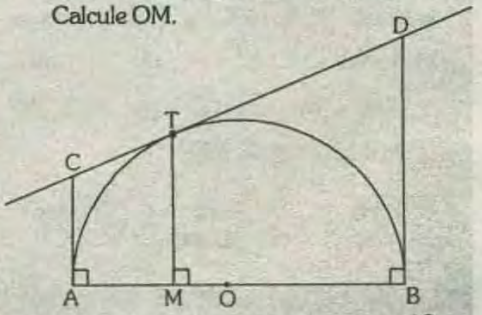
78 En el triángulo ABC se trazan la bisectriz interior BP y la mediana BM. $\overline{PQ}$ es paralelo con $\overline{MB}$ (Q pertenece a $\overline{AB}$) . $\overline{QR}$ es paralelo a $\overline{BC}\left(R \in \overline{MC}\right)$ sabiendo que AB=4 y BC= 6. Halle QR.

A) 4.2 B) 4.5 C) 4.8
D) 5.2 E)5.9

79 A ambas orillas de un rio crece unas palmeras . una frente a la otra . la altura de una de ellas 30 y de la otra 20. La distancia entre sus troncos es de 50. En la copa de cada palmera hay un pájaro. De súbito los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua. en la dirección entre las dos palmeras. Los pajaros se la nzaron con la misma velocidad y alcanzaron al pez al mismo tiempo. A que distancia del tronco de la palmera mayor apareció el pez.

A) 10 B) 15 C) 20
D) 25 E)30

80 En la figura O es el centro de la circunferencia. T es punto de tangencia $m\angle TMB = 90°$. Si CT=4u y TD=12u. Calcule OM.



A) 5u B) 4u C) $\frac{18}{5}$u
D) 3u E) 2u

81 A un lado de una calle de 5 de ancho se encuentran árboles separados a distancias

iguales de 5. Justo frente a uno de los árboles. pero el otro lado de la calle se encuentra un matemático y observa que si retrocedex se encontrará a 13 del siguiente árbol. Halle x.

A) 6 B) 8 C) 7
D) 5 E) 9

82 En un triángulo rectángulo. la suma de las longitudes de las alturas es 47 y la hipotenusa mide 25. Halle la longitud de la menor altura.

A) 12 B) 13 C) 12.5
D) 10 E) 8

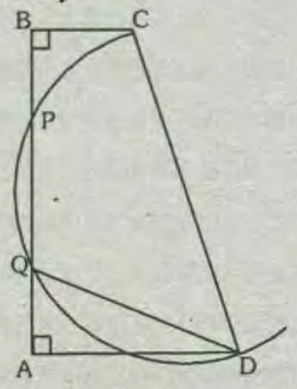
83 En un triángulo isósceles ABC (AB=BC). La altura AF. intersecta a la altura BH en O. Si OB = 5 y OH =1. Calcule OA

A) $\sqrt{7}$ B) $2\sqrt{7}$ C) $3\sqrt{7}$
D) $\frac{2}{3}\sqrt{7}$ E) $\frac{3}{2\sqrt{7}}$

84 En una semicircunferencia de diámetro AB y centro O se ubica un punto F y en $\overline{AF}$ se ubica un punto M de tal manera que $\overline{MO} \perp \overline{AB}$ Si el radio de la circunferencia es $(2+\sqrt{2})$ y la $m\angle MBF = 45°$. halle la longitud del segmento perpendicular a $\overline{OF}$ trazado desde M.

A) 0.5 B) 1 C) 2.5
D) 3 E) 5

85 En la figura mostrada se cumple que $\overline{CD}$ es diámetro. Si PB= 7 y AD= 24. Calcule QD



A) 19 B) 21 C) 23
D) 25 E) 27

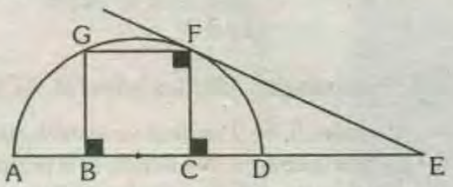
86 Los lados consecutivos de un trapezoide miden 2. 3. 4. Si las diagonales son perpendiculares. determine ola longitud del cuarto lado.

A) 5 B) 3 C) 4
D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{11}$

87 En un parelogramo ABCD $m\angle ABD = 90°$. la circunferencia P de centro O inscrita en el triángulo ABD es tangente con $\overline{AD}$ en F. AF=4. FD= 6. BC= OC. $OC \cap P = \{E\}$. Calcule CE.

A) 6 B) 5 C) 9
D) 7 E) 8

88 En la figura AB= 2. DE= 3. Halle GB

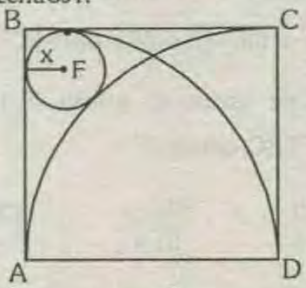


A) 5 B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{2}$

89 En un triángulo ABC . recto en B. la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{BC}$ en el punto M. si : $m\angle BCA = 2m\angle BAM$. Halle $m\angle BCA$

A) 53° B) 37° C) 45°
D) 30° E) 60°

90 ABC es un cuadrado de lado a se trazan los arcos BD y AC con centros A y D. Halle la longitud del radio de la circunferencia de centros F.



A) $\frac{a}{8}$ B) $\frac{a}{6}$ C) $\frac{a}{5}$
D) $\frac{a}{4}$ E) $\frac{a}{3}$

91 Dado el pentágono ABCDE. la $m\angle B = m\angle D = m\angle E$. AB= c. BC =a. $\overline{AC} // \overline{DE}$. AC= DC. Halle BD

A) $\sqrt{2a^2+2ac+c^2}$ B) $\sqrt{a^2+2ac}$
C) $\sqrt{2c^2+2ac}$ D) $\sqrt{2c^2-2ac+a^2}$
E) $\sqrt{a^2+ac+c^2}$

92 La raíces de la ecuación: $2x^2+2(k-3)x-3k(5k-6)=0$. representan los catetos de un triángulo rectángulo. Determine los valores de k de modo que la hipotenusa mida 5.

A) $2;-\frac{1}{2}$ B) 1. 2 C) – 2. 1
D) 3: 4 E) – 5: 5

93 En un triángulo rectángulo ABC. recto en C. sean a y b los catetos y c la hipotenusa. Halle x

si: $x\log_{c+a} b.\log_{c-a} b = \log_{c-a} b + \log_{c+a} b$

A) 1 B) 2 C) 3
D) $\sqrt{6}$ E) 4

94 En un cuadrado ABCD se traza $\overline{PQ} \perp \overline{AD}\left(P \in \overline{BC}, Q \in \overline{AD}\right)$ intersectando a la semicircunferencia de diámetro AD en el punto F(F en el interior del cuadrado). Si AF= 6 y la distancia de B al segmento AP es 2. Halle AP.

A) 15 B) $12\sqrt{2}$ C) $18\sqrt{3}$
D) 18 E) $36\sqrt{2}$

95 En una circunferencia de diámetro AB se trazan las cuerdas $\overline{AF}$ y $\overline{AS}$ tal que AS=2(AF). La longitud de la proyectante de S sobre $\overline{AB}$ y cuya prolongación intersecta a $\overline{AS}$ en N. $\overline{AB} \cap \overline{FN} = \{M\}$. calcule MN.

A) 1u B) 2u C) 3u
D) 4u E) 5u

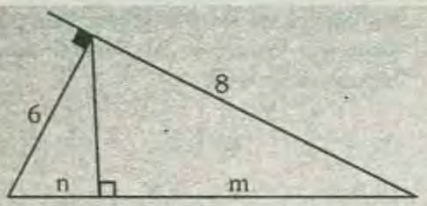
96 Dato el triángulo A B C. al $m\angle C = 90°$. $E = \overleftrightarrow{AB}$. $m\angle EDB = m\angle BDC$ .AD= 25. DC= 10. BC=5. calcule DE.

A) $\frac{140}{23}$ B) 5 C) 4
D) 3 E) $\frac{75}{23}$

97 En untriángulo rectángulo BCA. el cateto menor BC. mide a; las medianas relativas a los catetos son perpendiculares; carcular la longitud del cateto mayor.

A) $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ B) 2a C) $a\sqrt{3}$
D) $a\sqrt{4}$ E) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

98 Si la figura mostrada es un triángulo rectángulo. entonces $\frac{3m+4n}{3m-4n}$ es:



A) 6 B) 8 C) 7
D) 9 E) 10

99 Un cuadrilátero ABCD. se encuentra inscrito en una circunferencia: sus diagonales son perpendiculares y su punto de intersección e es O. si $AO > OC$: $AB^2 > AD^2 = K_1$. $BC^2 > CD^2 = K_2$. $K_1 > K_2$ y $AC = q$. Calcule: $AO - OC$.

A) $\frac{K_1 - K_2}{2q}$ B) $\frac{K_1 + K_2}{q}$

C) $\sqrt[3]{K_1 K_2 q}$ D) $K_1 + K_2 + q$

E) q

100 Dado un ángulo de vértice A y de medida 60: un punto P interior al ángulo y las distancias de P a los lados a; b. Calcule la distancias de P al vértice A.

A) $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$ B) $\frac{a+b}{2}$ C) $\sqrt[3]{ab}$

D) $\frac{2\sqrt{a^2b^2 + ab}}{3}$ E) $2\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + ab}{3}}$

101 En un triángulo ABC. AC= b. AB= c. BC=a. se trazan las alturas : h_a. h_b. h_c relativas a los lados a.b.c respectivamente Sea H el ortocentro y x_a. x_b. x_c las distancias de H a los vértices A. B. C respectivamente Demostrar que:

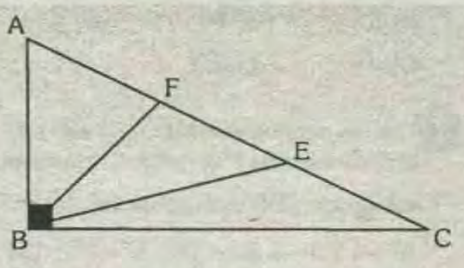
$$h_a h_a + h_b x_b + h_c x_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

102 Los tres lados de un triángulo miden 10u. 9u y 7u determine el menor valor entero de una lomgitud x. tal que si se le quita a cada la do el triángulo es obtusángulo.

A) 2u B) 3u C) 4u
D) 5u E) 6u

103 El triángulo rectángulo ABC. recto en B se encuentra inscrito en una circunferencia de 5 de radio. A partir de C se traza una cuerda CX se intersecta al diámetro BM en P. Si XC = 8 y PB =2. Halle AB.

104 En la figura mostrada si AB = 3; BC= 4; FE=EC=2. Halle $(BE)^2 - (BF)^2$



105 En un triángulo ABC sus lados miden AB=5. BC= 7 y AC=6. La circunferencia inscrita al triángulo determina el punto a M en el lado AC. Halle BM.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

106 En el triángulo ABC sus lados AB. AC y BC miden 5. 6 y 7 respectivamente. luego se traza la ceviana BM siendo M el punto de tangencia entre la circunfemcia inscrita al triángulo y al lado AC. Calcule BM.

A) 5 B) 6 C) 4
D) 3 E) 2

107 Desde un punto exterior C de una circunferencia. se trazan las tangentes CB y CP (B y P son puntos de tangencia). Luego se ttraza la cuerda BQ. $\overline{BQ} \cap \overline{CP} = \{A\}$. Si AQ= 1. AP = 2 y BQ= 6. Calcule PB.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

108 En un triángulo ABC. AC= 8. se trza la bisectriz interior BR. $\overline{AE} \perp \overline{BR} = \left(E \in \overline{BR}\right)$. $AE^2 + EC^2 = 40$. en $\overline{RC}$ se ubica el punto F tal que $\overline{EF} // \overline{BC}$, calcule EF.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

109 Dado un rectángulo ABCD. en los lados AD y AB se ubidcan los puntos M y P respectivamente. Si $BC + AM = \sqrt{13}$. $AP - PB = \sqrt{3}$. halle la longitud del segmento que une P con el punto de $\overline{MC}$.

A) 1 B) 2 C) 2. 5
D) 5 E) 3. 5

110 Dado un triángulo ABC. AB= 2. BC= 8. al longitud de la mediana relativa al lado AC es un número natural. Halle AC.

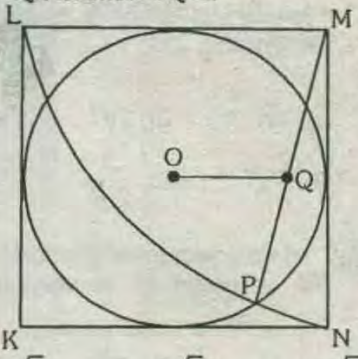
A) 5 B) 6 C) 7
D) $6\sqrt{2}$ E) 9

111 En un triángulo ABC. se traza la altura CH; se ubican los baricentros G. G_1 G_2 de los triángulos ABC. CHB. CHA en ese orden: sea $\overline{CM}$ una mediana del triángulo ABC. si: AB= 3CM. Si: $HG_1^2 + HG_2^2 = K(CG)^2$. Halle : K.

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{10}{7}$

D) $\frac{9}{10}$ E) $\frac{13}{8}$

112 KLMN es un cuadrado de centro O y lado a. si M es centro del arco NPL y MQ=QP. entonces OQ es:



A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

D) $\frac{a\sqrt{2}}{5}$ E) $\frac{a\sqrt{2}}{6}$

113 En un triángulo ABC. AB = 5u. BC=7u. AC=8u se traza la altira BH y la bisectriz interior BD. Halle la magnitud del segmento HD

A) $\frac{8}{7}$u B) $\frac{7}{6}$u C) $\frac{4}{5}$u D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{6}{5}$u

CUADRO DE RESPUESTAS

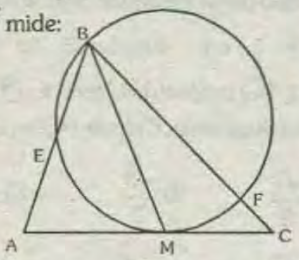
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
C	B	C	C	E	B	A	D	E	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	B	C	E	D	E	C	C	A	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	E	A	B	D	D	B	B	C	E
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	C	B	C	A	D	D	D	C	D
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
E	A	B	D	C	B	B	*	A	D
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
D	B	C	D	C	B	B	A	B	C
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
E	E	C	C	D	D	D	D	*	D
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
B	B	A	A	D	B	D	C	C	D
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
C	A	A	B	D	E	E	B	B	B
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
*	A	B	D	C	B	*	C	A	E
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
*	C	*	*	B	A	B	B	A	B
111	112	113							
E	C	D							

TERCER SEMINARIO CEPREUNI

01 Sea ABCD un paralelogramo donde AB<BC y el ángulo BAD agudo. La semicircunferencia de diámetro AD intercepta a $\overline{AB}$ en Q y es tangente a $\overline{BC}$ en P. Si BP= $\sqrt{5}$ y BQ=1. calcule la longitud del radio.

A) $2\sqrt{5}$ B)3 $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}$
D) 4 E) 5

02 En el triángulo ABC de mediana BM. $\overline{AC}$ es tangente en M a la circunferencia siendo AB=8. BE=6. BC=10. Entonces $\overline{BF}$ mide:



A) 8 B) 8.1 C) 8.2
D) 8.3 E) 8.4

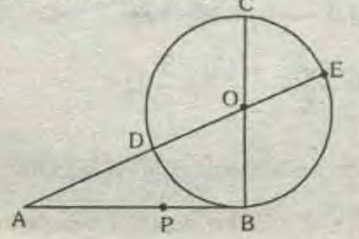
03 A es un punto exterior a una circunferencia de centro O. por el punto A se trazan la tangente TA y la secante ACB. siendo $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{1}$ y AC=1. calcule AT.

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$
D) 2 E) 2.5

04 En una circunferencia cuyo radio mide R. se traza un diámetro AB. Por el punto B se traza una tangente a la circunferencia y por el punto A se traza una cuerda que intercepta a la circunferencia en un punto C y a la tangente en otro D. Halle el valor de (AC)(AD).

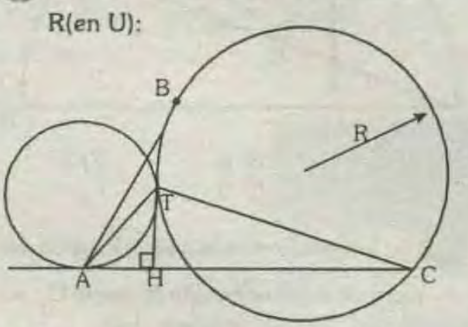
A) $6R^2$ B) $2R^2$ C) $3R^2$
D) $5R^2$ E) $4R^2$

05 Sea la circunferencia de centro el punto O. tal que se cumple: $\overline{AB}\perp\overline{BC}$, $\overline{ADOE}$ es un segmento de recta. AP=AD y AB=2R. siendo R la longitud del radio de la circunferencia. Halle AP^2.



A) $AP^2=AB.PB$ B) $AP^2=PB.AD$
C) $AP^2=AD.DE$ D) $AP^2=OB.AO$
E) $AP^2=OB.OC$

06 Si $AB^2-AT^2=8u^2$. TH=2u Halle R(en U):

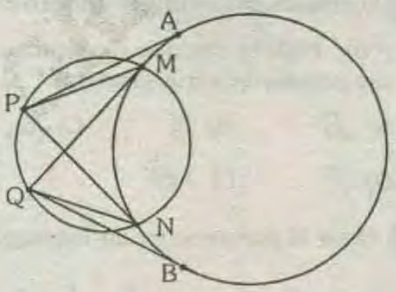


A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

07 Dado un rectángulo ABCD. AD=2AB se inscriben las semicircunferencias de diámetros AD y AB intersectándose en el punto N. Si $\overline{CN}$ intersecta a la semicircunferencia mayor en M y AB= $\sqrt{65}$u . halle CM(en u).

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

08 En la figura .mostrada A y B son puntos de tangencia. PM=4u. PN=7. 5u; QN=5u. QB=10u. QM=6u. Calcule PA(en u).



A) 10 B) 12 C) 9
D) 13 E) 8

09 En un cuadrilátero ABCD. $m\measuredangle ABD=m\measuredangle ACD=90$. El segmento BH perpendicular a $\overline{AD}$. intercepta a $\overline{AC}$ en P de modo que: (AP)(AC)=81. Calcule AB.

A) $3\sqrt{8}$ B) $4\sqrt{6}$ C) 7
D) 8 E) 9

10 Un diámetro LM y una cuerda ST se intercepta en un punto P. en una circunferencia de centro O. Si $m\overset{\frown}{MS}=3\theta$ y $m\overset{\frown}{LT}=\theta$ y LP=a; calcule ST en función de a y el radio r de la circunferencia.

A) 2r-a B) $\frac{r^2}{r-a}$ C) $\frac{r^2}{r+a}$
D) $\frac{2a^2}{r}$ E) r-a

11 La suma de los cuadrados de los radios de dos circunferencias concéntricas es 25 cm^2. En la circunferencia mayor se traza la cuerda CD que intersecta a la otra en los puntos E y F. luego en la circunferencia menor se traza la cuerda EH $\left(\overline{EH}\perp\overline{CD}\right)$. Calcule: $CE^2+DE^2+HE^2$(en cm^2).

A) 25 B) 50 C) 75
D) 100 E) 125

12 En una circunferencia de centro O se trazan las cuerdas AB y CD perpendiculares entre sí en el punto M. Si $(AM)^2+(BM)^2+(CM)^2+(MD)^2=64u^2$. Calcule AO(en u).

A) 4 B) 8 C) 6
D) 16 E) 12

13 El triángulo ABC esta inscrito en una circunferencia y la prolongación de su bisectriz BD intersecta a la circunferencia en F. calcule (BD)(DF). siendo AB= 6. BC=8 y AC=10.

A) $\frac{1200}{49}$ B) $\frac{1200}{47}$ C) $\frac{600}{49}$
D) $\frac{900}{47}$ E) $\frac{900}{49}$

14 En una circunferencia C se traza una cuerda AB y con centro en un punto del arco menor AB. se traza otra circunferencia tangente a $\overline{AB}$ en P. Si el radio de esta última mide 2m y AP=4m. BP=6m. calcule la longitud del radio de la circunferencia C (en m).

A) 5 B) $5\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{3}$
D) 6 E) 4

15 Se tienen una circunferencia de centro O y de diámetro AB. Sean C. D dos puntos de la circunferencia $\overline{CD}\cap\overline{AB}:\{Q\}$. $\overline{AF}\perp\overline{CD}$ $\left(F\in\overline{CD}\right)$. $\overline{CE}\perp\overline{AB}\left(E\in\overline{AB}\right)$. $\overline{DH}\perp\overline{AB}$ AE > AH, AE.AH = 169 . Calcule AF.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

16 Dos circunferencia de centro A y B se

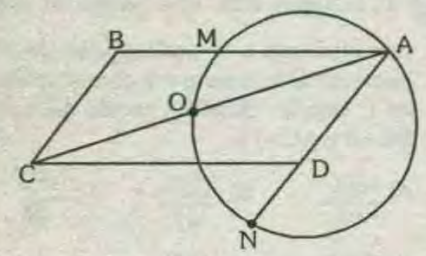
intesectan en los puntos C y D. La tangente a la circunferencia de centro A trazada por el punto C pasa por el punto B y la tangente trazada C a la circunferencia de centro B pasa por el punto A. Si los diámetros de las circunferencias tienen por longitud $6\sqrt{5}$ m y $12\sqrt{5}$ m. calcule la longitud de la cuerda común CD (en m).

A) 12 B) 16 C) 20
D) 24 E) 28

17 En un triángulo ABC. m $\angle$ABC=60. el punto I es el incentro y el punto O es el circuncentro del triángulo AIC. si AB+BC= ℓ. halle OB.

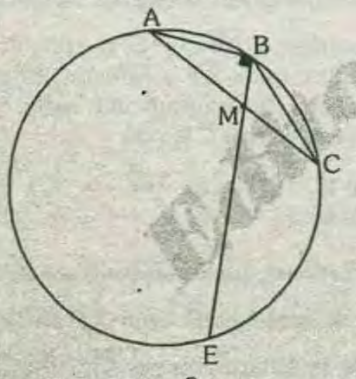
A) $\frac{\ell}{2}$ B) $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\ell\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{2\ell}{3}$ E) $\frac{4\ell}{3}$

18 En el romboide ABCD. calcule AC si O y M son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ y se sabe que: $AB^2+2AD.AN=289$.



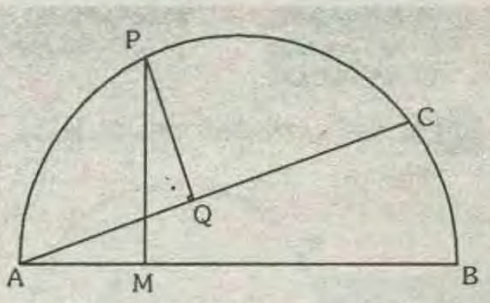
A) 17 B) 15 C) 16
D) 14 E) 13

19 Si AB=BC. $\overline{AB}\perp\overline{BE}$. BM=1m. ME=3m. halle AB(en m).



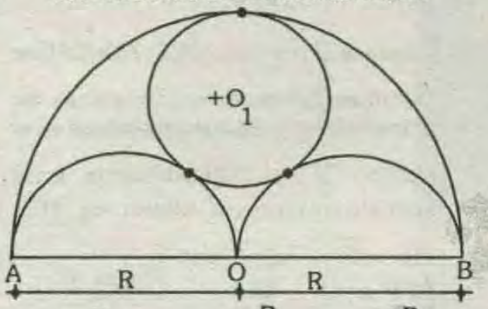
A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2
D) $\frac{5}{2}$ E) 3

20 En la figura $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia. QC=4(AM). si PM.PQ=16u². calcule QC(en u).



A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

21 En la figura mostrada halle la longitud del radio de la circunferencia de centro O_1. en función de R. $\overline{AO}, \overline{OB}$, y $\overline{AB}$ son los diámetros de las semicircunferencias.



A) $\frac{R}{4}$ B) $\frac{R}{3}$ C) $\frac{R}{5}$
D) $\frac{2R}{7}$ E) $\frac{R}{6}$

22 Los catetos de un triángulo miden 6 cm y 8 cm. Halle la distancia del incentro al circuncentro del triángulo(en cm).

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{6}$
D) $\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{2}$

23 Halle el perímetro de un heptágono regular ABCDEFG si: $\frac{1}{AE}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{6}$.

A) 40 B) 41 C) 42
D) 43 E) 44

24 Se tiene el hexágono regular ABCDEF inscrito en una circunferencia. en el arco AB se ubica un punto P. si PF=a y PC=b. Halle PD: Además a>b.

A) $\frac{a+b\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{b+a\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{a+b}{2}$
D) $\frac{2ab}{a+b}$ E) $\frac{ab\sqrt{3}}{a+b}$

25 En un polígono regular de 13 lados ABC.....LM. Si AD=m. AE=n. Calcule DJ.

A) $\sqrt{m^2+2n^2}$ B) $\sqrt{n^2-mn}$
C) $\sqrt{m^2+mn}$ D) $\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}}$
E) $\sqrt{m^2+2mn}$

26 En un polígono regular de 13 lados $A_1A_2A_3...A_{13}$. si $A_1A_4=a$ y $A_1A_5=b$. Entonces A_1A_{10} mide:

A) $\sqrt{a^2+ab}$ B) $\sqrt{a^2+b^2}$
C) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ D) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{3}}$
E) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$

27 El lado de un hexágono regular ABCDEF mide 1 cm. desde B se trazan $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ perpendiculares a $\overline{CF}$ y $\overline{DF}$ respectivamente. Calcule PQ(en m).

A) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{7}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

28 Sea ABCDEFGH un octágono regular inscrito en una circunferencia cuyo radio mide 1cm. calcule la longitud de la cuerda EB(en cm)

A) $\sqrt{4-\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$
C) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ D) $\sqrt{3+\sqrt{2}}$
E) $\sqrt{4-\sqrt{2}}$

29 Se tiene un octágono regular ABCDEFGH cuyo circunradio mide $(\sqrt{2}+1)$. si $\overline{BE}\cap\overline{CF}=\{P\}$ y $\overline{BG}\cap\overline{AF}=\{Q\}$. Halle PQ.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

30 En un octógono regular ABCDEFGH. las diagonales BG y DG intersectan a la diagonal AE en P y Q respectivamente. si AP=2u. halle PQ(en u).

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

31 En un triángulo ABC. el lado AB mide $2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$. los ángulos A y B miden 30°

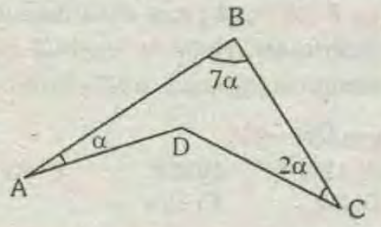
y 45°. Calcule la longitud del segmento que une los pies de las alturas trazadas desde A y B.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

32 En un triángulo ABC acutángulo. de ortocentro H. se trazan las alturas AJ y CF. Calcule FH si: $m\angle BAC=75°$ y la distancia del circuncentro al lado AC mide 12.

A) $3\sqrt{2+\sqrt{3}}$ B) $6\sqrt{2-\sqrt{2}}$
C) $3\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ D) $4\sqrt{3}$
E) $12\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$

33 En la figura mostrada se cumple AD=DC=BC=6cm. Halle BD(en cm).



A) $5\sqrt{2-\sqrt{3}}$ B) $3\sqrt{2-\sqrt{3}}$
C) $3\sqrt{3-\sqrt{2}}$ D) $4\sqrt{3-\sqrt{2}}$
E) $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$

34 Un triángulo ABC está inscrito en una circunferencia y $BC=\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. $m\angle A=72°$. Calcule la longitud del radio de la circunferencia (en u).

A) 1 B) 2 C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{5}{2}$ E) 1.2

35 Calcule la longitud del lado del dodecágono regular circunscrito a una circunferencia. cuyo radio mide $\left(2+\sqrt{3}\right)$.

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

36 Halle el lado del cuadrado inscrito en un sector circular de 60° de radio R y conociendo que dos de sus vértices están sobre el arco del sector.

A) $R\sqrt{3-\sqrt{2}}$ B) $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$
C) $2R\sqrt{3-\sqrt{2}}$ D) $2R\sqrt{2-\sqrt{3}}$
E) $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$

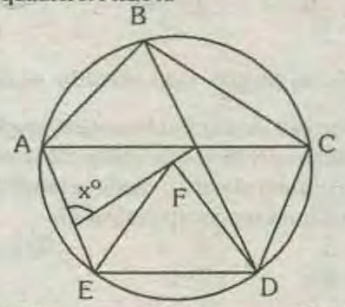
37 Dado el pentágono regular ABCDE. AB=L. $\overline{BE}$ y $\overline{BD}$ intersectan a $\overline{AC}$ en los puntos M y N. Halle MN.

A) $\frac{L}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$ B) $\frac{L}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$
C) $\frac{L}{2}\left(\sqrt{5}+4\right)$ D) $\frac{L}{2}\left(\sqrt{6}+2\right)$
E) $\frac{L}{2}\left(\sqrt{6}+3\right)$

38 En un triángulo rectángulo ABC. se traza $\overline{BN}$ perpendicular a la bisectriz interna de C. BC=16. $m\angle A=54°$. Halle BN.

A) $\frac{\sqrt{5}+2}{3}$ B) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
C) $3\left(\sqrt{5}-1\right)$ D) $4\left(\sqrt{5}-1\right)$
E) $5\left(\sqrt{5}-2\right)$

39 En la siguiente figura el pantágono ABCDE es regular. el radio de la circunferencia es R. EL triángulo DEF es equilatero. Halle x.



A) 80 B) 82 C) 84
D) 86 E) 88

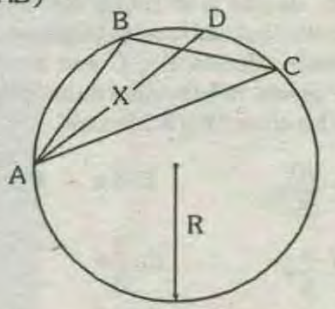
40 En un triángulo rectángulo ABC. AC=8. la $m\angle BCA=9$. Entonces la longitud de la altura relativa a la hipotenusa AC es:

A) $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$ B) $\sqrt{5-1}$ C) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
D) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ E) $\sqrt{5+1}$

41 En un decágono regular ABCD.....IJ. el radio de la circunferencia circunscrita mide 12. Entonces la distancia del vértice A al punto medio del lado DE es:

A) $3\sqrt{10+26\sqrt{5}}$ B) $4\sqrt{26+5\sqrt{10}}$
C) $3\sqrt{26+10\sqrt{5}}$ D) $5\sqrt{5+26\sqrt{10}}$
E) $26\sqrt{5+\sqrt{10}}$

42 En la figura AB=BC=ℓ_5. $\widehat{BD}\cong\widehat{DC}$. si $\left(\frac{AC}{AB}\right)R=4$. halle AD.

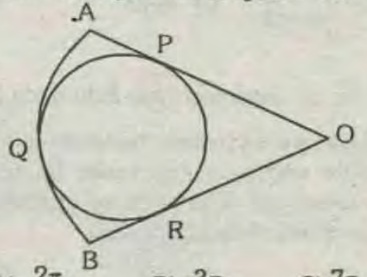


A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

43 En un ángulo agudo cuya medida es 60° se inscriben dos circunferencias tangentes exteriormente. Halle la longitud de la circunferencia mayor si la longitud de la circunferencia menor es 1u.

A) 3u B) π u C) 2 u
D) 2π u E) 3π u

44 En la figura la circunferencia esta inscrita en el sector circular AOB. Si la $m\angle AOB=60°$ y los puntos P. Q. R son puntos de tangencia y AO=BO=6cm. halle la longitud del $\widehat{PQR}$ (en cm).



A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{3\pi}{2}$ C) $\frac{7\pi}{2}$
D) $\frac{8\pi}{3}$ E) $2\pi\sqrt{41}$

45 La distancia del centro de una circunferencia hacia una cuerda que mide 10 cm es igual a 4cm. Halle la longitud de dicha circunferencia(en cm).

A) 4π B) 3π C) π
D) $\frac{7\pi}{2}$ E) 6π

46 En una circunferencia cuyo radio mide 10 cm se traza una cuerda PQ. siendo $m\widehat{PQ}=72°$. Halle la longitud del arco PQ.

A) 2π B) 3π C) 4π

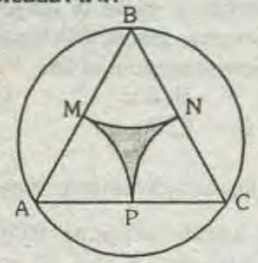
D) 5π E) $\frac{4}{3}\pi$

47 Se tiene dos circunferencias tangentes exteriormente cuyos radios $r_a=6cm$ y $r_b=2$ cm. siendo A el punto de tangencia común. se traza la recta tangente común exterior donde B y C son puntos de tangencia. halle la suma de las longitudes de los arcos AB y AC (en cm)

A) $\frac{10}{3}\pi$ B) 4π C) $\frac{8}{3}\pi$

D) $\frac{4}{3}\pi$ E) $\frac{2}{3}\pi$

48 En la figura M. N. P son puntos medios de los lados del triángulo equilátero ABC inscrito en una circunferencia de radio R. Halle el perímetro de la región sombreada MNP.



A) $\frac{1}{3}\pi r\sqrt{3}$ B) $\frac{1}{2}\pi r\sqrt{3}$ C) $\frac{2}{3}\pi r\sqrt{3}$

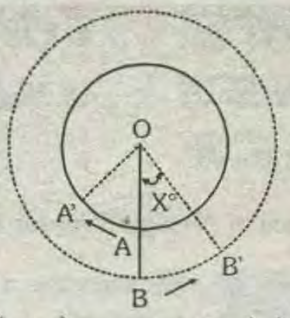
D) $\frac{3}{4}\pi r\sqrt{3}$ E) $\pi r\sqrt{3}$

49 En un cuadrado cuyo lado mide L. se trazan arcos interiores. haciendo centro en cada vértice y con radio L. que al intersectarse determinan un cuadrilátero curvilíneo. Halle su perímetro.

A) $\frac{3\pi L}{4}$ B) $\frac{2\pi L}{3}$ C) $\frac{\pi L}{5}$

D) $\frac{3\pi L}{5}$ E) $\frac{4\pi L}{7}$

50 En la figura se tienen dos circunferencias concentricas de centro O. radios r y R (r<R). A y B recorren una igual longitud en el sentido indicado hasta alcanzar las nuevas posiciones A'. B' respectivamente. Si $m\angle A'OB'=90°$. calcule x.



A) $\left(\frac{r}{R-r}\right)90$ B) $\left(\frac{r}{R}\right)90$

C) $\left(\frac{-r+R}{R}\right)90$ D) $\left(\frac{R-2r}{R}\right)90$

E) $\left(\frac{r}{R+r}\right)90$

51 La figura muestra un cuadrado cuyo lado mide L. una circunferencia y cuatro semicircunferencias. Halle el perímetro de la región sombreada.

A) $\frac{5}{3}\pi L$ B) $2\pi L$ C) $\frac{4}{3}\pi L$

D) $\frac{7}{3}\pi L$ E) $\frac{8}{3}\pi L$

52 En un ángulo cuya medida es 60° se inscriben dos circunferencias tangentes exteriormente. si la longitud de la menor circunferencia es 1u. halle la longitud de la circunferencia mayor(en u).

A) 3 B) π C) 2π

D) 6π E) 3

53 Dado el pentágono regular ABCDE inscrito en una circunferencia de centro O y un circunradio que mide R. Se traza un arco de circunferencia que une los puntos C y E. pasando por el centro O. Halle la longitud de dicho arco.

A) $\frac{\pi R}{10}$ B) $\frac{\pi R}{10}\left(\sqrt{5}+1\right)$

C) $\frac{\pi R}{10}\left(\sqrt{5}-1\right)$ D) $\frac{\pi R}{10}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

E) $\frac{\pi R}{10}\left(\sqrt{6}-1\right)$

54 En un cuadrado ABCD. cuyo lado mide L y con centro en cada uno de sus vértices se traza un cuadrante cuyo radio mide 2L. los cuales se enlazan con segmentos. entonces la relación entre la longitud de la figura trazada y el perímetro del cuadrado es:

A) $\frac{\pi-2}{2}$ B) $\pi+1$ C) $\frac{\pi-1}{2}$

D) $\pi-2$ E) $\frac{\pi+2}{2}$

55 En una semicircunferencia ξ de diámetro AB están inscritos las circunferencias ξ_1 y ξ_2 tal que ξ_1 es tangente a ξ en M y al diámetro en E: ξ_2 es tangente a ξ en N y al diámetro en F (ξ_1 y ξ_2 son circunferencias exteriores). Halle la longitud de la semicircunferencia ξ .si AE=3u; FB=4u y $m\widehat{MN}=90°$.

A) 12π B) 10π C) 9π

D) 8π E) 15π

56 En un triángulo ABC la hipotenusa BC mide 2 cm y ángulo BCA mide 30. se traza la mediana AM y por los puntos A y B se trazan paralelas a $\overline{BC}$ y a $\overline{AM}$ intersectandose en P. Halle el área de la región APBC(en cm^2)

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

57 En un triángulo ABC sus alturas miden $h_a=12u$. $h_b=15u$ y $h_c=20u$. Calcule el área de la región triangular ABC(en u^2)

A) 120 B) 140 C) 150

D) 160 E) 128

58 Halle el área de una región triangular equilátera en función de la longitud de un ex radio r_a.

A) $2r^2_a$ B) $3r^2_a$ C) $\frac{r^2_a\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{r^2_a\sqrt{6}}{3}$ E) $\frac{r^2_a\sqrt{6}}{3}$

59 En tres circunferencias tangentes exteriormente entre si dos a dos. cuyos

radios miden: a. b y c. halle el área de la región triangular que determinan los segmentos que unen los centros.

A) $(a+b+c)c$ B) $\sqrt{abc(a+b+c)}$

C) $2\sqrt{abc(a+b+c)}$ D) $(a+b+c)a$

E) $(a+b+c)b$

60 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6u y 8u. halle el área de la región triangular cuyos vértices son el ortocentro. incentro y circuncentro del triángulo rectángulo (en u^2)

A) 1.0 B) 1.5 C) 2.0
D) 2.5 E) 3.0

61 En el lado AC de un triángulo ABC; se ubica un punto O. centro de una circunferencia tangente a los lados AB y BC. Halle la longitud del radio de la circunferencia si:
Área(triángulo ABC)=A; AB+BC=K

A) $\frac{A}{4k}$ B) $\frac{A}{2k}$ C) $\frac{A}{k}$

D) $\frac{2A}{k}$ E) $\frac{3A}{2k}$

62 En un triángulo ABC se traza la mediana BM y luego $\overline{MF}$ perpendicular a $\overline{BC}$ ($F \in \overline{BC}$); si A dista $8\sqrt{3}$ u de $\overline{BM}$. MF=6u y m$\angle$MBC=30°, halle el área dela región triangular MFC(en u^2).

A) $24\sqrt{3}$ B) $30\sqrt{3}$ C) 24
D) 30 E) $12\sqrt{3}$

63 El inradio de un triángulo rectángulo ABC mide 3 cm. Se traza un segmento QP perpendicular a la hipotenusa AC($Q \in \overline{AC}$; $P \in \overline{BC}$) y que es tangente a la circunferencia inscrita en el punto T. Si PT=2 cm. halle el área de la región triángular ABC(en cm^2).

A) $\frac{135}{2}$ B) $\frac{137}{2}$ C) $\frac{141}{5}$

D) $\frac{147}{2}$ E) $\frac{153}{7}$

64 Sea un cuadrado ABCD. cuyo lado mide a. en $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ se tiene N y M tal que m$\angle$MAN=45° y MN=b. Halle el área de la región ANCM.

A) a^2-ab B) $a^2-\frac{ab}{8}$ C) $a^2-\frac{ab}{4}$

D) $a^2+\frac{ab}{5}$ E) $a^2-\frac{ab}{2}$

65 En un triángulo ABC. recto en B AB=c. BC=a. se traza la mediatriz EF ralativa al lado AC. $E \in \overline{BC}$. Halle el área de la región FEC.

A) $\frac{c}{8a}(a^2+c^2)$ B) $\frac{c}{4a}(a^2-c^2)$

C) $\frac{a^2c^2}{3\sqrt{a^2+c^2}}$ D) $\frac{a^2+c^2}{ac}$

E) $4\sqrt{ac}(a+c)$

66 La altura desigual de un triángulo isósceles mide 8u. y el perímetro es 32u. El área de la región triangular(en u^2) es:

A) 56 B) 48 C)40
D) 32 E) 24

67 Si en un triángulo rectángulo los ex radios relativos a la hipotenusa y un cateto miden 6 cm y 4 cm respectivamente. halle el área de la región triangular(en cm^2).

A) 24 B) 12 C) 10

D) $\frac{24}{5}$ E) $\frac{12}{5}$

68 El lado de un triángulo regular mide ℓ. el baricentro del triángulo es el centro de la circunferencia cuyo radio mide $\frac{\ell}{3}$. Halle el área de la parte de la región triangular que se encuentra fuera de la circunferencia.

A) $\frac{\ell^2}{9}(3\sqrt{3}-\pi)$ B) $\frac{\ell^2}{18}(3\sqrt{3}-\pi)$

C) $\frac{\ell^2}{12}(3\sqrt{3}-\pi)$ D) $\frac{\ell^2}{4}(3\sqrt{3}-\pi)$

E) $\frac{\ell^2}{20}(3\sqrt{3}-\pi)$

69 Sea el cuadrado PQRT circunscrito a una circunferencia de centro O y radio igual a 4u. Se traza con centro en P. el cuadrante $\overset{\frown}{QPT}$ que intercepta a la circunferencia en M y N. Halle el área de la región triángular OMP(en u^2).

A) $3\sqrt{7}$ B) $4\sqrt{7}$ C) $2\sqrt{7}$

D) $\frac{5}{2}\sqrt{7}$ E) $\frac{7}{2}\sqrt{7}$

70 En un triángulo ABC. el segmento que une el baricentro con el incentro es paralelo al lado AC. Si AC=8m y el inradio mide 2m. Calcule el área de la región triangular ABC(en m^2).

A) 12 B) 16 C) 18
D) 21 E) 24

71 Sea el triángulo ABC si su área es $12m^2$ y su circunradio es 4m. Se traza la altura BH. $\overline{HN} \perp \overline{AB}$ y $\overline{HM} \perp \overline{BC}$. Calcule NM(en m).

A) 3 B) 4 C) 6
D) 5 E) 2

72 En un triángulo ABC. el lado AC mide 10cm y la altura relativa a éste lado mide 5cm. halle el área de la ragión cuadrada PQRS(en cm^2) inscrita en el triángulo donde $\overline{PS} \subset \overline{AC}$.

A) $\frac{101}{9}$ B) $\frac{100}{9}$ C) $\frac{98}{9}$

D) $\frac{97}{9}$ E) $\frac{89}{9}$

73 Se tiene el triángulo rectángulo ABC. I es el incentro. si el área de ABI es X y el área de BCI es W y $X^2+W^2=16$. Halle el área de AIC.

A) 3 B) 5 C) 4
D) 2 E) 2.5

74 En un triángulo ABC se traza una recta paralela al lado AC. tangente a la circunferencia inscrita y que intersecta a los otros dos lados en los puntos M y N. Si AB=30. BC=14 y AC=40. Halle el área de la región MBN.

A) $\left(\frac{1}{2}\right)$ B) $\left(\frac{3}{2}\right)$ C) $\left(\frac{8}{21}\right)$

D) $\left(\frac{1}{8}\right)$ E) $\left(\frac{21}{8}\right)$

75 En el triángulo ABC se trazan las alturas AF y CH. Si AB=12. BF=4. CH=12. calcule el área de la región BFH.

A) 12 B) 8 C)10
D) 6 E) 7.5

76 En un triángulo ABC se traza la ceviana BE tal que AE=2CE. Por O punto medio $\overline{BE}$ se trazan $\overline{MN} \parallel \overline{BA}$ ($M \in \overline{BC}$. $N \in \overline{AC}$) y $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ($P \in \overline{AB}$. $Q \in \overline{AC}$). Si el área de la región

ABC es 120m². calcule las diferencias de las áreas de las regiones APON y CQOM(en m²).

A) 30 B) 45 C) 40
D) 50 E) 60

77 El área de la región triangular ABC es 10u², además AB=4u y AC=6u, se traza la bisectriz interior AP. Halle el área de la región triangular ABP(en u²).

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

78 En un triángulo ABC se trazan las alturas AE y CF. Si: AB=20 cm y BE=10 cm y área ABC=80 cm². Halle al área de la región AFEC(en cm²).

A) 20 B) 30 C) 45
D) 60 E) 75

79 En un cuadrilátero inscriptible ABCD sus lados miden AB=7cm. BC=CD=15cm y AD=25 cm. halle el área de la región triangular ABC(en m²).

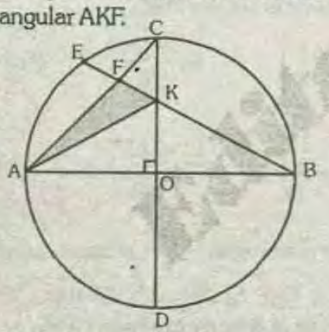
A) 42 B) 84 C) 21
D) 63 E) 33

80 El área de una región triangular KLM es Su². la bisectriz LN divide al lado opuesto dos segmentos que miden KN=m. MN=n. Halle el área de la región triangular KLN(en u²).

A) $\frac{Sn}{m+n}$ B) $\frac{Sm}{m+n}$ C) $\frac{S(m-n)}{m-n}$

D) $\frac{S(m+n)}{m-n}$ E) $\frac{2Sn}{m+n}$

81 En la figura . O centro de la circunferencia. BK=a y FE=b. Halle el área de la región triangular AKF.



A) 3ab B) 2ab C) ab

D) $\frac{ab}{2}$ E) $\frac{ab}{3}$

82 Sobre los lados de un triángulo ABC. se ubican los puntos P en $\overline{AB}$ Q en $\overline{BC}$ y R en $\overline{AC}$. de modo que: PB=3AP; BQ=QC y AR=2RC. Halle que fracción del área de la región triangular ABC resulta ser el área de la región triangular PQR.

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{4}{15}$ C) $\frac{7}{18}$

D) $\frac{7}{24}$ E) $\frac{5}{17}$

83 En un triángulo rectángulo ABC. recto en B los lados miden AB=a. BC=b. AC=c. Halle el área de la región triangular formado al unir el incentro. ortocentro y circuncentro.

A) $\frac{(b-a)(b+a-c)}{8}$

B) $\frac{(c-a)(c+a-b)}{8}$

C) $\frac{(c-b)(b+c-a)}{8}$

D) $\frac{c}{4}\sqrt{ab}$

E) $\frac{a(ab)}{a+b}$

84 Dado el triángulo ABC cuya región tiene como área 128 cm². en el interior se tiene el triángulo PQR de manera que las prolongaciones de los lados PQ. QR y RP pasen por los vértices B.C y A y la $m\measuredangle PAC = m\measuredangle ABQ = m\measuredangle BCR$. si QR=3. BC=8. Halle el área de la región PQR(en cm²).

A) 15 B) 16 C) 36
D) 17 E) 18

85 Las bases de un trapecio miden 1 y 3u. Halle la longitud de la paralela a las bases que determina dos regiones equivalentes.

A) 2 B) 1.5 C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{10}$ E) $2\sqrt{2}$

86 En un triángulo ABC se traza $\overline{DE} // \overline{AB}$ tal que $D \in \overline{AC}$ y $E \in \overline{BC}$. Si la razón entre las áreas de las regiones CDE y ABC es igual a $\frac{1}{9}$. halle la razón entre las áreas de las regiones ADE y ABC.

A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{3}{8}$

87 En un triángulo ABC que limita una región de área 64 cm². se traza $\overline{DE}$ paralela al lado AC(D en $\overline{AB}$. E en $\overline{BC}$). El área de la región DEB es 49 cm². Si ubicamos un punto F en $\overline{AC}$ cualquiera. halle el área de la región triangular DFE(en cm²).

A) 5 B) 3 C) 7
D) 10 E) 11

88 Se tiene el triángulo ABC cuya área es S. las cevianas BP y CQ se interceptan en R de manera que AQ=2QB y CP=3AP. Calcule el área de BQR.

A) $\frac{S}{8}$ B) $\frac{S}{25}$ C) $\frac{S}{20}$

D) $\frac{S}{30}$ E) $\frac{S}{15}$

89 En el triángulo ABC. se trazan las cevianas AN y CM que se interceptan en O. si las áreas de MBN. MON y AOC son a. b y c respectivamente. Halle el área de ABC.

A) $\frac{3}{2}(a+b+c)$ B) $\frac{ab}{c}$ C) $\frac{ac}{b}$

D) $\frac{bc}{a}$ E) $\sqrt{ab+bc+ac}$

90 En un triángulo ABC de área 180 cm². $E \in \overline{BC}$ y $F \in \overline{AC}$. BE=EC. CF=2AF. si las cevianas AE y BF se interceptan en G. halle el área de AGF(en cm²).

A) 36 B) 30 C) 15
D) 24 E) 56

CUADRO DE RESPUESTAS

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
A	E	B	E	A	B	A	A	E	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	A	A	B	B	A	C	A	C	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	B	C	A	C	A	E	B	B	B
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	E	E	B	A	B	B	D	C	B
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	D	A	D	C	C	A	B	B	E
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A	A	*	B	C	C	C	C	B	A
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
D	B	A	E	A	*	D	B	B	E
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A	B	C	C	B	A	C	D	A	B
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
D	D	A	E	C	A	C	D	C	C

CUARTO SEMINARIO CEPREUNI

01 En un triángulo ABC se trazan las cevianas BM y AN $\left(M \in \overline{AC} \text{ y } N \in \overline{BC}\right)$. tal que: MC=2AM y BN=2NC.
Si las cevianas se intersectan en el punto P. entonces la relación entre las áreas de las regiones triangulares BPN y APM es:

A) 5÷1 B) 6÷1 C) 7÷1
D) 5÷2 E) 8÷1

02 En un triángulo las medianas miden 6u. 8u y 10u. Entonces el área de la región triangular es (en u^2):

A) $26u^2$ B) $32u^2$ C) $36u^2$
D) $48u^2$ E) 52^2

03 ABCD es un cuadrado. en donde T es un punto de $\overline{CD}$ y se cumple que $\frac{CT}{TD}=\frac{2}{1}$ .la recta que pasa por los puntos B y T intersecta a $\overline{AD}$ en Q. Si el área de la región triangular TDQ es S unidades cuadradas. calcule el área de la región cuadrada.

A) $3S^2$ B) $6S^2$ C) $\frac{S^2}{3}$
D) $12S^2$ E) $15S^2$

04 En un cuadrado ABCD se traza la diagonal AC y en $\overline{AD}$ se ubican los puntos E y F de manera que $\overline{BE} \cap \overline{AC} = \{M\}$. AF=b. AE(FD)=EF(AD). Halle el área del cuadrado cuya diagonal es AM.

A) $\frac{b^2}{5}$ B) $\frac{b^2}{4}$ C) $\frac{b^2}{2}$
D) $\frac{b^2}{3}$ E) b^2

05 Dado un punto exterior A a una circunferencia de centro O se trazan las tangentes AN y AM de modo que la $m\angle NAM=90$. Una recta tangente a la circunferencia intersecta a los segmentos AN y AM en P y Q respectivamente. Las perpendiculares $\overline{AN}$ y $\overline{AM}$ trazadas desde P y Q respectivamente intersectan a $\overline{OM}$ y $\overline{ON}$ en E y F respectivamente y $\overline{PE} \cap \overline{QF} = \{T\}$. Si el área de la región APTQ es S entonces el área de TFOE es.

A) S B) $\frac{S}{2}$ C) $\frac{S}{3}$
D) $\frac{S}{4}$ E) $\frac{S}{5}$

06 Se tiene un trapecio cuyas bases miden 20cm y 34cm. Si además sus lados laterales miden 13cm y 15cm. entonces su área es (en cm^2):

A) 324 B) 172 C) 170
D) 320 E) 400

07 Dado un paralelogramo ABCD; $F \in \overline{BC}$; $\overline{AF} \cap \overline{BD} = \{0\}$ donde el área (BOF)=A_1. área (AOD)=A_2. Calcule el área de la región OFCD.

A) $\sqrt{A_1}\left(1+\sqrt{A_2}\right)$
B) $\sqrt{A_2}\left(\sqrt{A_1}+\sqrt{A_2}\right)-A_1$
C) $\sqrt{A_1}\left(\sqrt{A_2}-\sqrt{A_1}\right)$
D) $\frac{A_1+A_2}{2}$
E) $\sqrt{A_1}\left(\sqrt{A_1}+\sqrt{A_2}\right)+A_2$

08 El área de una región rectangular ALCD es igual a $50u^2$. Desde el incentro O del triángulo ADC. se trazan las perpendiculares OP y OQ hacia los lados BC y AB respectivamente. Halle el área de la región rectangular BPOQ (en u^2).

A) 30 B) 25 C) 20
D) 32 E) 24

09 En un cuadrado ABCD. el área de su región es $48m^2$. Si M y N son los puntos que se trisecan el lado BC $\left(BM < MC, N \in \overline{MC}\right)$,

$\overline{AM} \cap \overline{BD} = \{P\}$. $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{O\}$ y $\overline{AC} \cap \overline{DN} = \{Q\}$. entonces el área de la región OPMNQ es (en m^2):

A) 4 B) 6 C) 7
D) 8 E)9

10 ABC es un triángulo isósceles (AB=BC). se trazan las medianas CM y AN al nivel que se intersectan en el punto O perpendicularmente. Si BO=6 entonces el área de la región cuadrangular AMNC es (en u^2):

A) $\frac{61}{2}$ B) $\frac{67}{2}$ C) $\frac{71}{2}$
D) $\frac{77}{2}$ E) 21

11 ABCD es un cuadrado. se traza $\overline{AE}$ y $\overline{MN}\left(M \in \overline{BC}, N \in \overline{AE}, E \in \overline{CD}\right)$ O centro del cuadrado y $O \in \overline{MN}$. Si $\overline{MN}$ es perpendicular a $\overline{AE}$. MO=4u y ED=2u. entonces el área de la región cuadrada ABCD es (en u^2):

A) 60 B) 56 C) 54
D) 50 E) 48

12 En un triángulo rectángulo ABC. se traza la altura BH. y una recta secante que intersecta a $\overline{AB}$ en M y $\overline{BC}$ en N; además contiene a los incentros de los triángulos rectángulos AHB y BCH. Si BM=m. AM=ℓ y CN=n. Halle el área de AMNC.

A) $\frac{3}{2}\ell(m+n)$
B) $\frac{\ell}{2}(m+n)+\frac{mn}{2}$
C) $\frac{3\ell}{2}(m+n)-\frac{mn}{2}$
D) $mn+\ell\,(m+n)$
E) $\frac{mn}{2}+\frac{3\ell}{2}(m+n)$

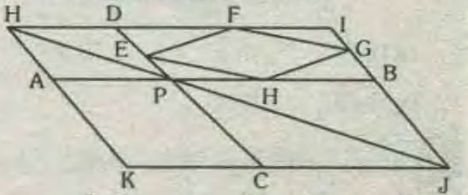
13 En un cuadrilátero convexo ABCD. AC=m y BD=n. Halle el área de la mayor región que limita el cuadrilátero convexo.

A) m^3+n^2 B) $\frac{mn}{4}$ C) mn
D) $\frac{mn}{2}$ E) 2mn

14 Dado el paralelogramo ABCD. E y F son puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ tal que $\overline{BE} \cap \overline{AF} = \{T\}$. Si el área de la región paralelogramica ABCD es W. entonces el área de la región triangular ATE es:

A) $\frac{W}{30}$ B) $\frac{W}{25}$ C) $\frac{W}{22}$
D) $\frac{W}{20}$ E) $\frac{W}{18}$

15 La figura HIJK es un paralelogramo. P es cualquier punto de la diagonal $\overline{HJ}$. $\overline{DPC} // \overline{HK}$ y $\overline{APB} // \overline{HI}$. donde A. B. C y D están sobre los lados del paralelogramo. Si E. F. G y H son puntos medios del cuadrilátero PDIB y área (EFGH)=M. entonces al área (APCK) es:



A) $\frac{3}{2}M$ B) $\frac{4}{3}M$ C) $\frac{5M}{4}$
D) 2M E) 3M

16 Sea A el área de un cuadrilátero convexo.

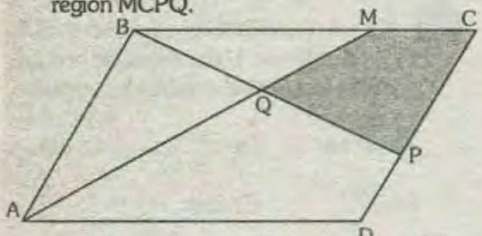
A_1 el área del cuadrilátero. obtenido uniendo los puntos medios de los lados del cuadrilátero A: análogamente sea A_2 el área del cuadrilátero obtenido uniendo los puntos medios de los lados del cuadrilátero A_2: y así sucesivamente.
Entonces. la suma de las áreas $A+A_1+A_2+\ldots$ .... es:

A) A B) 2A C) 3A
D) 4A E) 5A

17 Se tiene el cuadrado ACDE de centro O. B es un punto exterior y relativo a $\overline{AC}$ tal que $m\angle ABC = 90$. BO=6cm. Halle el área de la región limitada por el cuadrilátero ABCO (en cm^2).

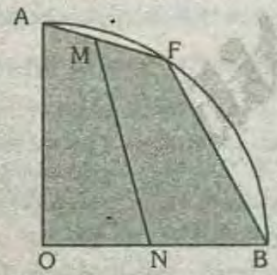
A) 3 B) 6 C) 9
D) 12 E) 18

18 En la figura. ABCD es un paralelogramo. BM=2MC. CP=2PD. El área de la región paralelogramica es S. Calcule el área de la región MCPQ.



A) $\frac{2S}{13}$ B) $\frac{4S}{13}$ C) $\frac{3S}{13}$
D) $\frac{5S}{13}$ E) $\frac{6S}{13}$

19 En la figura AOB es un cuadrante de radio 2u. M y N son puntos medios de $\overline{AF}$ y $\overline{OB}$ respectivamente.
Si: $MN = \sqrt{3}u$ entonces el área de la región limitada por el cuadrilátero OAFB es: (en u^2)

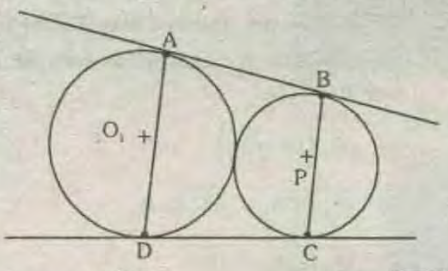


A) $2\sqrt{2}$ B) 3 C) 2
D) $3\sqrt{2}$ E) 4

20 En un cuadrilátero ABCD se ubican M y N puntos medios de las diagonales AC y BD respectivamente. donde $\{L\} = \overline{AN} \cap \overline{DM}$ y $\{F\} = \overline{AC} \cap \overline{BD}$. si la suma de las áreas de las regiones de los triángulos AML y BMF es 10 dm^2. entonces la suma de las áreas de las regiones triangulares DLN y CFN en (dm^2) es:

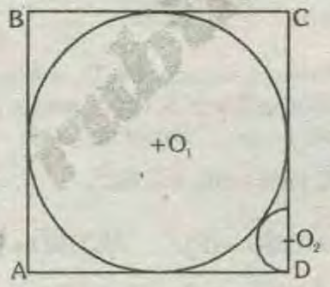
A) 7.5 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

21 En la figura $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son tangentes comunes a las circunferencias de radios R y r. O y P son centros. Halle el área de la región limitado por el trapecio ABCD.



A) $\frac{Rr\sqrt{R\times r}}{R+r}$ B) $\frac{2R\times r\sqrt{R\times r}}{R+r}$
C) $\frac{3R.r\sqrt{R\times r}}{R+r}$ D) $\frac{5R\times r\sqrt{R\times r}}{R+r}$
E) $\frac{8R.r\sqrt{R\times r}}{R+r}$

22 En la figura mostrada ABCD es un cuadrado. Si el radio de la semicircunferencia de centro O_2 mide r. entonces el área de la región cuadrada ABCD es:



A) $32r^2$ B) $40r^2$ C) $64r^2$
D) $81r^2$ E) $128r^2$

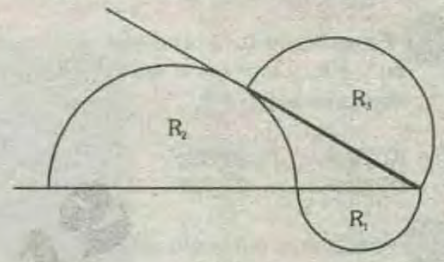
23 En un triángulo equilátero el lado mide a. considerando como centro el baricentro de la región poligonal regular se traza una circunferencia cuyo radio mide $\left(\frac{a}{3}\right)$.
Entonces. el área de la parte de la región triangular exterior a la circunferencia es.

A) $\frac{a^2}{18}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$ B) $\frac{a^2}{9}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$
C) $\frac{a^2}{18}\left(4\sqrt{3}-\pi\right)$ D) $\frac{a^2}{18}\left(2\sqrt{3}-\pi\right)$
E) $\frac{a^2}{12}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$

24 En una circunferencia de centro O y radio R se tienen los diámetros perpendiculares $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ por A se traza un arco CD de radio AC. calcule el área de la región exterior al arco $\overset{\frown}{CD}$ e interior a la circunferencia.

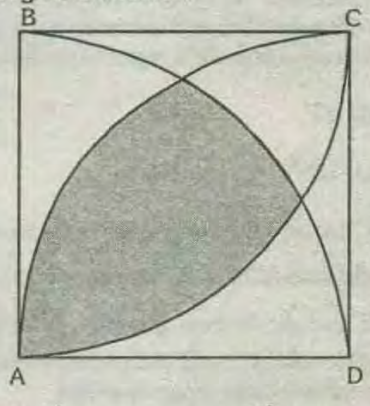
A) $\frac{R^2}{\sqrt{2}}$ B) R^2 C) $\sqrt{2}R^2$
D) $\frac{\sqrt{2}\pi R^2}{3}$ E) $\sqrt{3}R^2$

25 En el diagrama adjunto las áreas de las 3 semicirculos R_1. R_2 y R_3 son: 4. 9 y x respectivamente. Halle el valor de x.



A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

26 En la figura si AB=L. halle el área de la región sombreada.

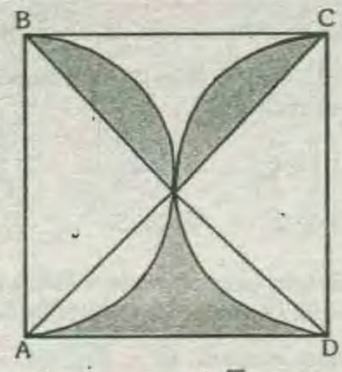


A) $\frac{L^2}{12}(\pi-1)$ B) $\frac{L^2}{3}$
C) $\frac{L^2}{4}$ D) $\frac{L^2}{12}\left(5\pi-6\sqrt{3}\right)$
E) $\frac{L^2}{6}\left(\pi-\sqrt{2}\right)$

27 En una semicircunferencia de diámetro AB donde AB=20 se ubica el punto C en el arco $\overset{\frown}{AB}$ tal que $m\angle BAC = 18$. $M \in \overline{AC}$. AM=MC. halle el área de la región limitada por $\overline{MC}, \overline{MB}, \overline{BC}$. (en u^2)

A) $15\pi\ u^2$ B) $4\pi\ u^2$ C) $12\pi\ u^2$
D) $10\pi\ u^2$ E) $8\pi\ u^2$

28 Se tiene un cuadrado ABCD de lado L como se muestra en la figura. Halle el área de la región sombreada. si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son diámetros.



A) $\frac{L^2}{4}$ B) $\frac{L^2\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{L^2\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{L^2\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{L^2\sqrt{2}}{5}$

29 ABCD es un cuadrado de lado a; M y N son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita. con los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. Sean E y F los puntos de intersección de $\overline{BN}$ y $\overline{CM}$ con la circunferencia. Halle el área del segmento circular EF.

A) $a^2(\pi-2)$ B) $\frac{a^2}{8}(\pi-2)$

C) $\frac{a^2}{16}(\pi-2)$ D) $\frac{a^2}{12}(\pi-2)$

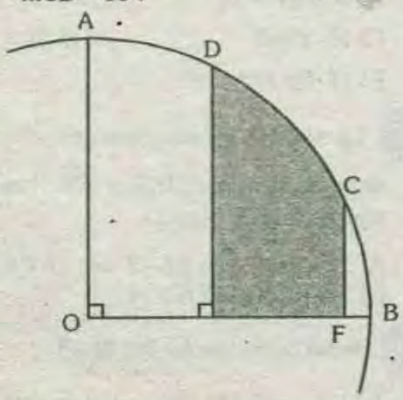
E) $\frac{a^2}{4}(\pi-2)$

30 Un sector circular de 60° de ángulo central tiene $18u^2$ de área. Halle el área del círculo inscrito en el sector (en u^2).

A) 9 B) 12 C) $6\sqrt{5}$

D) 14 E) 15

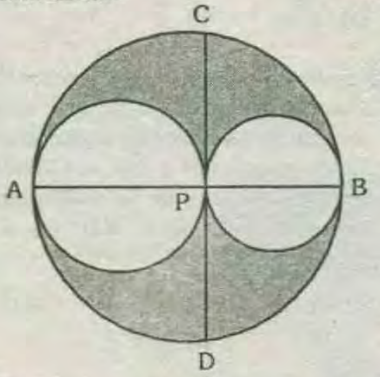
31 En la figura: Halle el área de la región sombreada si: AOB es un cuadrante $AO=OB=4$. $m\angle COB=20$. $m\widehat{CD}=50$.



A) $\frac{4\pi}{15}$ B) $\frac{5\pi}{12}$ C) $\frac{20\pi}{9}$

D) $\frac{16\pi}{3}$ E) $\frac{12\pi}{5}$

32 En la figura: Los puntos A. P y B son puntos de tangencia. $\overline{AB}$ es diámetro. $CD=4$. Halle el área de la región sombreada.



A) π B) $\frac{3\pi}{2}$ C) 2π

D) $\frac{5\pi}{2}$ E) 3π

33 En la figura. O es el centro de la circunferencia de radio R. entonces el área de la región sombreada es:

A) $\frac{(180-\alpha)}{360}\pi R^2$ B) $\frac{(90-2\alpha)}{360}\pi R^2$

C) $\frac{\alpha}{180}\pi R^2$ D) $\frac{\alpha}{360}\pi R^2$

E) $\frac{\alpha-30}{360}\pi R^2$

34 Dos circunferencias congruentes son tangentes exteriores en A. se traza. el segmento de tangente exterior $\overline{BC}$. Si el radio de una circunferencia mide 2m entonces el área de la región triangular mixtilínea ABC es (en m^2):

A) $6-\pi$ B) $8-2\pi$ C) $7-\pi$

D) $8-\pi$ E) $9-2\pi$

35 En un ángulo están inscritos tres circunferencias tangentes exteriormente de dos a dos. si las áreas de los círculos menores es S_1 y S_2. Halle el área del círculo mayor.

A) $\sqrt{S_2S_1}$ B) $\frac{S_2^2}{S_1}$ C) S_2+S_2

D) $\sqrt{2S_1S_2}$ E) $\frac{2S_1S_2}{S_1+S_2}$

36 En una circunferencia cuyo radio mide 5m. se ubican los puntos consecutivos A. B y C tal que: $m\widehat{AB}=72$. $m\widehat{BC}=54$. Calcule el área de la región limitada por $\widehat{AB}$. $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ (en m^2).

A) 2π B) 3π C) 4π

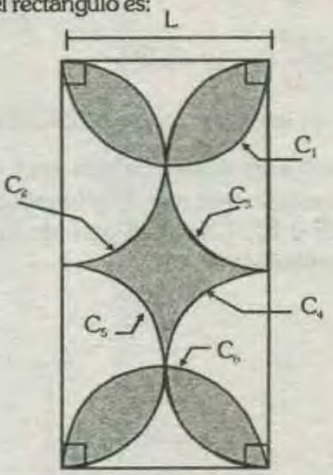
D) 5π E) 6π

37 Se tiene una semicircunferencia de diámetro AB y centro O. en la cual se inscribe la circunferencia de centro O' que es tangente al arco AB en C y al diámetro AB en C y al diámetro AB en D. luego se traza la cuerda BC que intersecta a la circunferencia inscrita en E. Si $O'C=2m$. $OB=6m$. Calcule el área de la región limitada por $\widehat{AC}$. $\widehat{CDE}$. $\overline{EB}$ y $\overline{AB}$. (en m^2).

A) $\frac{\pi}{3}+5$ B) $\frac{2\pi}{3}+6$ C) $\frac{2\pi}{3}+8$

D) $\pi+8$ E) $\pi+9$

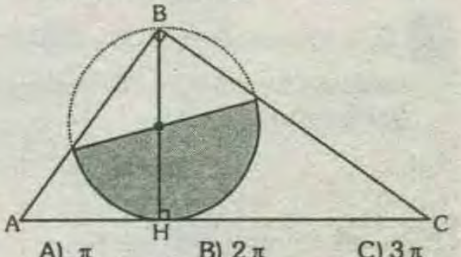
38 Si: C_1. C_2. C_3. C_4. C_5 y C_6 son semicírculos de radios congruentes. entonces el área de la figura sombreada en función del lado L del rectángulo es:



A) $\frac{\pi L^2}{64}$ B) $\frac{\pi L^2}{32}$ C) $\frac{\pi L^2}{16}$

D) $\frac{\pi L^2}{8}$ E) $\frac{\pi L^2}{4}$

39 En la siguiente figura. $m\angle ABC=90$. H es punto de tangencia: $AH=2cm$ y $HC=8cm$. Halle el área de la región sombreada (en cm^2).



A) π B) 2π C) 3π

D) 4π E) 5π

40 En el semicírculo de diámetro AB y centro O. se trazan los radios $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ con $\overline{OD}$ bisectriz del $\angle AOC$. Si los segmentos

www.CRATIS.com

circulares determinados por $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ tienen por áreas A_1 y A_2. calcule el área del sector circular BOC.

A) $A_2 - A_1$ B) $\frac{A_2+A_1}{2}$ C) A_2-2A_1

D) $\frac{A_2-A_1}{2}$ E) $\frac{A_2+2A_1}{3}$

41 Sea el sector circular AOB (OA=OB=R) cuyo ángulo central mide 30. Se trazan $\overline{BD} \perp \overline{OA}$ y $\overline{AE} \perp \overline{OB}$. Si $\overline{BD}$ y $\overline{AE}$ se intersectan en P. Calcule el área de la región del triángulo mixto APB.

A) $\frac{R^2}{12}(\pi - 18 + 12\sqrt{3})$

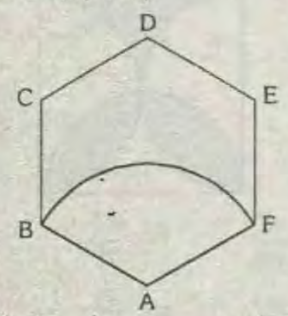
B) $\frac{R^2}{12}(\pi + 18 - 12\sqrt{3})$

C) $\frac{R^2}{12}(\pi + 12 + 6\sqrt{3})$

D) $\frac{R^2}{12}(\pi + 12 - 6\sqrt{3})$

E) $\frac{R^2}{12}(\pi - 12 + 6\sqrt{3})$

42 En la figura mostrada ABCDEF es un hexágono regular de lado igual a $\sqrt{6}$u. haciendo centro en A se trazan los arcos CE y BF. Calcule el área de la región sombreada (en u^2).

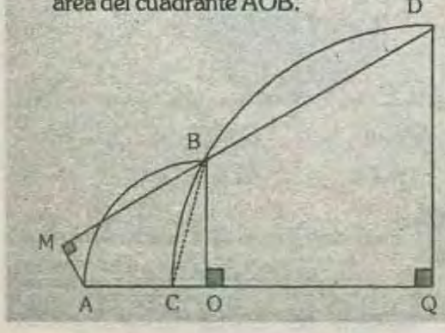


A) $(3\sqrt{3} - \pi)$ B) $(2\sqrt{3} - \pi)$

C) $(3\sqrt{3} + \pi)$ D) $(2\sqrt{3} + \pi)$

E) $\sqrt{3}\pi$

43 En la figura mostrada AOB y CQD son cuadrantes. Si: $BM.BC = \sqrt{2}u^2$. calcule el área del cuadrante AOB.



A) $\sqrt{2}\pi$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) 2π

D) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ E) $\frac{\pi}{2}$

44 Se tiene el cuadrante AOB. sobre $\overline{OB}$ se ubica N tal que ON: OB:: 2: 3. luego se dibujan las semicircunferencias interiores de diámetros ON y NB. si OA=26dm. entonces el área de la región circular tangente al arco AB y a las semicircunferencias (en dm^2) es:

A) 15π B) 18π C) 20π

D) 24π E) 25π

45 En una región triangular ABC se trazan $\overline{MN} // \overline{AC}, \overline{EF} // \overline{BC} (E y M \in \overline{AB})$ D e s punto de concurrencia de $\overline{NM}$ y $\overleftrightarrow{FE}$. Si la suma de los inradios de las regiones triangulares MBN. MDE y AEF es 10dm. entonces el área del círculo inscrito en la región triangular ABC(en dm^2) es:

A) 64π B) 81π C) 100π

D) $100\sqrt{2}\pi$ E) $100\sqrt{3}\pi$

46 Sean los siguientes puntos del plano A(–5; 7). B(–6; 2). C(–2; –4). D(10; 2). Verifique la verdad de las siguientes proposiciones:

I) $m\angle ABC + m\angle ADC = 180$

II) $m\angle BAD + m\angle BCD = 180$

III) $AB.CD + BC.AD = AC.BD$

IV) $m\angle ACD = m\angle ABD$

V) $m\angle CAB = m\angle BDC$

A) VVVV B) VVFFF C) FFFFF

D) VVFFV E)VVVVF

47 Sea el paralelogarmo ABCD tal que: A(3;–4). B(6;5) y C(–3;–2). entonces. las coordenadas de vértice D es:

A) (–6; –10) B)(–6; –11) C)(–5; –11)

D) (–5; –12) E) (–6; –14)

48 El segmento que une A(–2; –1) con B(2; 2) se prolonga hasta C. Si BC=3AB. Halle las coordenadas de C.

A) (6; 12) B) (10; 14) C) (12; 8)

D) (14: 11) E) (10;12)

49 Los puntos A=(2; 3). B=(5; 7) y C=(–5; 12) son los vértices de un triángulo. calcule las coordenadas del baricentro del triángulo.

A) $\left(\frac{5}{3}, \frac{25}{3}\right)$ B) $\left(\frac{4}{3}, \frac{23}{3}\right)$ C) $\left(\frac{2}{3}, \frac{22}{3}\right)$

D) (2: 11) E) (–1; 7)

50 En un triángulo ABC. A(–1; 5). B(4; 2) y C(0: –4). entonces las coordenadas del baricentro es:

A) $\left(2; \frac{3}{2}\right)$ B) $\left(2; \frac{5}{2}\right)$ C) (1; 1)

D) (2; 2) E) (3; 3)

51 Se tiene un paralelogramo ABCD. donde A=(0; 0). B=(1; 2). C=(11: 2). Si M es punto medio de $\overline{AD}$ y $\overline{CM} \cap \overline{BD} = \{E\}$. Halle las coordenadas de E.

A) $\left(7, \frac{2}{3}\right)$ B) $\left(3, \frac{7}{3}\right)$ C) $\left(2, \frac{7}{3}\right)$

D) $\left(7, \frac{3}{2}\right)$ E) $\left(3, \frac{7}{2}\right)$

52 Los puntos A(a; b). B(c; d). C(e; f) son los vértices de un triángulo. si G es su baricentro y D es punto medio de $\overline{BG}$. entonces la cordenada del punto D. es:

A) $\frac{b+4d+f}{6}$ B) $\frac{b+3d+f}{6}$

C) $\frac{b+2d+f}{6}$ D) $\frac{b+d+f}{6}$

E) $\frac{b+d+f}{3}$

53 En un triángulo rectángulo ABC (recto en B). A(1; 1) y C(6; 11). El cateto BC mide 5. Calcule la suma de las coordenadas del punto B.

A) 16 B) 15 C) 14

D) 17 E) 18

54 Halle la ecuación de la curva tal que la distancia de cualquier puto de ella al origen de coordenadas y al punto F=(6; 0) están en la relación de 2 a 1.

A) $X^2+8Y^2=16$ B) $X^2+Y^2=8$

C) $X^2-Y^2=2$ D) $X-3Y=1$

E) $(X-8)^2+Y^2=16$

55 La abscisa de un punto es –6 y su distancia al punto A(1; 3) es $\sqrt{74}$. Halle la coordenada del punto.

A) 3 ó –1 B) 2 ó –2 C) 8 ó –2

D) 5 ó –3 E) 6 ó –4

56 Dados los puntos A=(–3; 4) y B=(1; –2). $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz del segmento AB. Si (r; r) $\in \overleftrightarrow{L}$. calcule r.

A) 4 B) 5 C) 6

D) 7 E) 8

57 Dos vértices de un triángulo son los puntos (–10; 2) y (6; 4). Si el ortocentro del triángulo es el punto (5; 2). entonces las coordenadas del tercer vértice del triángulo es:

A) (4; –4) B) (5; –5) C) (6; –6)
D) (7; –7) E) (8; –8)

58 La suma de las longitudes de los segmentos que una recta L determina sobre los ejes es 3. Si además la recta pasa por el punto (2; 10). halle la ecuación de la recta L.

A) $\frac{Y}{14}-\frac{X}{11}=1$ B) $\frac{X}{-2}+\frac{Y}{5}=1$

C) $\frac{X}{-3}+\frac{Y}{6}=1$ D) $\frac{X}{10}-\frac{Y}{9}=1$

E) A y B

59 Se tienen las ecuaciones de las rectas
L_1: 3X+2Y–18=0
L_2: 3X+2Y–12=0
Halle la ecuación de la recta L_3 que equidista de las rectas L_1 y L_2.

A) 3X+2Y–12= B)3X+2Y+15=0
C) 3X+2Y–8=0 D)3X+2Y+12=0
E) 3X+2Y–15=0

60 Halle la ecuación de una recta que intercepta el eje positivo de las X un segmento de longitud igual a 7. que pase además por el punto de abscisa X=4. perteneciente a la recta: 5X+3Y=30.

A) 10X–9Y+70=0 B) 9X+10Y–70=0
C) 10X+9Y–70=0 D) 9X–10Y+70=0
E) X+9Y–17=0

61 Dados los puntos A(3; 4) y B(–5; 2). hallar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los puntos A y B.

A) Y=4X–1 B) Y=–3X–1
C) Y=–4X+2 D) Y=–4X+3
E) Y=–4X–2

62 Los vértices de un triángulo son los puntos A=(2; 6); B=(3; 7) y C=(5; 9). halle la ecuación de la recta que contiene a la mediana relativa al lado BC.

A) X–Y+4=0 B) X+Y+4=0
C) X–Y–4=0 D) X–Y+2=0
E) X–Y–2=0

63 Los vértices de un triángulo son los puntos A=(–2; 1); B=(4; 7); C=(6; –3). Halle la ecuación de la recta que contiene a la altura BH.

A) 2X–Y–1=0 B)X+Y+7=0
C) X–Y+2=0 D)3X+Y–1=0
E) 2X+Y+10=0

64 Los vértices de un triángulo son los puntos A(2; 3). B(4; 6). C(6; 1). Halle la ecuación de la recta que contiene a la altura relativa al lado AC.

A) Y=X–2 B) Y=X+2 C) Y=2X–2
D) Y=2X+2 E) Y=X

65 Sea la recta $\overleftrightarrow{Lo}$ que pasa por el origen y determina sobre las rectas L_1: 2X–Y=0 y L_2: X+2y–15=0 un triángulo isósceles con su lado desigual sobre $\overleftrightarrow{Lo}$. Halle $\overleftrightarrow{L_1} \cap \overleftrightarrow{Lo}$.

A) (3; 9) B) (9; 3) C) (3; 6)
D) (6; 3) E)(4; 5)

66 Dadas las rectas L_1 y L_2:
L_1: Pasa por los puntos (–2; 3) y (1; 5)
L_2: 2ax–(a+3)Y=5
Si: $\overleftrightarrow{L_1}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{L_2}$. Halle: a –1.

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{16}{7}$ C) $-\frac{2}{7}$
D) $-\frac{16}{7}$ E) $\frac{3}{7}$

67 Se tiene el rombo ABCD. donde A=(2; 2) y C=(4; 6). Calcule la ecuación de la recta que contiene a la diagonal BD.

A) X+2Y–3=0 B) X+2Y–7=0
C) X+2Y+11=0 D) X+2Y–11=0
E) X+Y–3=0

68 Un rayo de luz que parte de (5; 5) incide en un espejo plano que está sobre el eje Y. Si el rayo reflejado forma con los ejes coordenados en el primer cuadrante un triángulo de $\frac{5}{8}u^2$ de área. halle la ecuación cartesiana del rayo reflejado.

A) $Y=-\frac{5}{4}X-1$ B) $Y=-\frac{4}{5}X+1$
C) $Y=-\frac{4}{5}X-1$ D) $Y=-\frac{5}{4}X+1$
E) $Y=-\frac{4}{5}X-2$

69 Al moverse el vértice C de un triángulo de base fija AB sobre una recta. entonces su baricentro se mueve sobre:

A) Circunferencia B) Parábola
C) Elipse D) Una recta
E) Hipérbola

70 Si los puntos A(1; –2); B(2; 3) y C(–2; 1) son los vértices del triángulo mediano del triángulo MNP. Halle la suma de la abscisa y de la ordenada de uno de los vértices del triángulo MNP.

A) –7 B) –3 C) –2
D) 0 E) 4

71 Dado el vértice A(8; 12) de un triángulo. su ortocentro H(3; –3) y su circuncentro O (6; 1). Calcule las coordenadas de los otros dos vértices.

A) (–4; –3) (11; –8) B)(–4; 3) y (11; 8)
C) (–3; 4) y (8; 11) D)(–4; 6) y (–9; 11)
E) (–4; –4) y (11; –9)

72 El área de una región rectangular ABCD es $50u^2$. si las coordenadas de B y C son (1; 4) y (9; –2) respectivamente. halle las coordenadas positivas del vértice A.

A) (3; 8) B) (2; 8) C) (4; 8)
D) (4; 10) E) (2; 10)

73 Sea ABC un triángulo rectángulo isósceles. si las coordenadas de la hipotenusa A y B son (3; 4) y (9; 12) respectivamente. halle las coordenadas del tercer vértice.

A) (5; 10) B) (10; 5) C) (2; 5)
D) (11; 2) E) (5; 11)

74 Dado los vértices de un triángulo: A(–10; –13). B(–2; 3). C(2; 1) y la mediana CM. La longitud de la perpendicular trazada del vértice B a la mediana CM mide (en u):

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

75 Los vértices de un triángulo son A(3; 5). B(–2; 6) y C(8; 4). Halle la distancia trazada desde el baricentro del triángulo ABC a la altura relativa al lado AC.

A) $2\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{7}$ C) $2\sqrt{5}$
D) $\sqrt{26}$ E) $3+\sqrt{6}$

76 Halle el valor de K tal que el punto P(2; K) sea equidistante a las rectas L_1: X+Y–2=0 y L_2: X–7Y=–2.

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{2}{3}$ E) 2

77 Una circunferencia cuyo centro es (1; –1) pasa por el punto (3; 5). halle la ecuación.

A) $(X+11)^2+(Y+1)^2=2\sqrt{10}$
B) $(X-1)^2+(Y+1)^2=2\sqrt{10}$
C) $(X+1)^2+(Y+1)^2=40$
D) $(X+1)^2+(Y-1)^2=40$
E) $(X-1)^2+(Y+1)^2=40$

78 Sean las curvas: C_1. C_2 de ecuaciones $X^2+Y^2=1$. $X^2+Y^2-2X-2Y+1=0$. halle la ecuación de la recta que pasa por las intersecciones de C_1 y C_2.

A) $X+2Y=1$ B) $X+Y=1$
C) $X-Y=3$ D) $X=5$
E) $X-3Y=2$

79 Dadas las circunferencias C_1: $X^2+Y^2-6X+8Y-1=0$ y C_2: $X^2+Y^2+4X-2Y-11=0$. halle la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es la cuerda común de las circunferencias dadas.

A) $X^2+Y^2+3X-2Y-6=0$
B) $X^2+Y^2+2Y-7=0$
C) $X^2+Y^2-2Y+6=0$
D) $X^2+Y^2+3X+6=0$
E) $X^2+Y^2+2X-3Y+5=0$

80 Halle la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el eje Y. y una cuerda cuyos extremos sonlos puntos A(2; 7) y B(4; 1).

A) $X^2+Y^2=20$
B) $(X-3)^2+Y^2=20$
C) $X^2+(Y-3)^2=20$
D) $X^2+(Y-5)^2=20$
E) $X^2+(Y-7)^2=20$

81 Dada la ecuación de la circunferencia: $X^2+Y^2-10X+16=0$ y la recta: $Y=KX$. si dicha recta es tangente a la circunferencia. Calcule los valores de K.

A) $\pm\frac{1}{2}$ B) $\pm\frac{4}{2}$ C) $\pm\frac{1}{3}$
D) $\pm\frac{3}{4}$ E) $\pm\frac{3}{5}$

82 Sea la circunferencia de ecuación $X^2-Y^2=16$. el punto $P\left(3;\sqrt{7}\right)$ pertenece a la circunferencia. Halle la ecuación de la recta tangente a la circunferencia trazada por el punto P.

A) $7Y=-3\sqrt{7}X+16\sqrt{7}$
B) $7Y=-2\sqrt{7}X+15\sqrt{7}$
C) $6Y=-3\sqrt{3}X+16\sqrt{7}$
D) $7Y=-3\sqrt{7}X+9\sqrt{7}$
E) $7Y=-3\sqrt{7}X+15\sqrt{7}$

83 Una circunferencia 10u de radio pasa por el origen e intercepta a eje X en un punto que resulta ser el punto de tangencia de esta circunferencia con una recta de pendiente igual a $\frac{3}{4}$. Halle la suma de las coordenadas del centro de la circunferencia.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 18

84 Una circunferencia de radio $\sqrt{10}$ que pasa por P(7; 5) y es tangente a coordenadas del centro de la circunferencia.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

85 Los vértices de un triángulo son(3; 5). (4; 7) y (8; 5). Halle la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo.

A) $\left(X-\frac{11}{2}\right)^2+(Y-5)^2=\frac{25}{4}$
B) $(X-8)^2+\left(Y-\frac{11}{2}\right)^2=5$
C) $(X-11)^2-(Y+5)^2=25$
D) $(X+11)^2+(Y-5)^2=25$
E) $(X-11)^2+(Y-5)^2=25$

86 Si los puntos K(4; 1). L(14; 1). N(a; b). son los vértices de un triángulo rectángulo recto en N. entonces la ecuación de circunferencia que pasa por éstos tres puntos es:

A) $(X-1)^2+(Y-9)^2=9$
B) $(X-9)^2+(Y-1)^2=16$
C) $(X-1)^2+(Y-9)^2=25$
D) $(X-9)^2+(Y-1)^2=25$
E) $(X+9)^2+(Y+1)^2=25$

87 Halle la ecuación de la recta tangente en P(0. 0) a la circunferencia $X^2+Y^2+6X-4Y=0$.

A) $3X-2Y=0$ B) $2X-3Y=0$
C) $X-2Y=0$ D) $2X-Y=0$
E) $X-Y=0$

88 Halle la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $X^2+Y^2-2X+Y=5$ en el punto de tangencia T(3: 1).

A) $3X+4Y=5$ B) $4X+2Y=1$
C) $3X+4Y=15$ D) $4X+3Y=15$
E) $5X+3Y=4$

89 Halle la ecuación de la circunferencia que pasa por A(0: 2) y es tangente a la recta L_1: $2X+Y=0$ en el origen.

A) $(X-1)^2-(Y+3)^2=10$
B) $(X-2)^2+(Y-3)^2=5$
C) $(X-2)^2+(Y-3)^2=25$
D) $(X+1)^2+(Y-2)^2=15$
E) $(X+2)^2+(Y-1)^2=5$

90 Halle una de las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia C: $X^2+Y^2+6X-8=0$. que son perpendiculares a la recta L: $4X-Y+31=0$.

A) $X-4Y+20=0$ B) $X+4Y-20=0$
C) $X-4Y+14=0$ D) $X+4Y+16=0$
E) $X+4Y-14=0$

91 Desde el punto $A=\left(\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right)$ se ha trazado tangentes a la circunferencia $X^2+Y^2=5$. Halle la ecuación de la recta tangente de pendiente mayor.

A) $2X-Y-1=0$ B) $2X-Y-3=0$
C) $2X-Y-5=0$ D) $2X-Y-6=0$
E) $2X-Y-7=0$

92 La ecuación de la circunferencia es $X^2-Y^2=50$. El punto medio de una cuerda de ésta circunferencia es el punto P(–2: 4). Halle la ecuación de la recta que contiene a dicha cuerda:

A) $X-2Y+10=0$ B) $X+2Y-10=0$
C) $X+2Y+5=0$ D) $X-2Y-5=0$
E) $X+Y+10=0$

93 Una parábola cuyo vértice es (2; 1) y su foco tiene como coordenadas el punto (5; 1). halle la ecuación de la parábola.

A) $12X-Y^2+2Y=0$
B) $12X-Y^2+2Y-25=0$
C) $12X-Y^2+2Y+61=0$
D) $12X-2Y^2+2Y-61=0$
E) $12X+2Y^2+2Y-61=0$

94 C es una parábola con vértice V. eje focal contenido en el eje Y. $\overline{MP}$ es una cuerda que pasa por el foco F. el eje y divide a $\overline{MP}$ en dos segmentos $\overline{FP}$ y $\overline{MF}$ donde FP=5. $\overline{VP}$ determina con el eje y un ángulo que mide 45. halle el parámetro de la parábola.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$
D) 1 E) 2

95 En una parábola. su foco es (12: 0) y la directriz es perpendicular al eje X e intercepta al eje X en (8: 0). entonces la ecuación de la parábola es:

A) $Y^2=18(X-10)$ B) $Y^2=20(X-10)$
C) $Y^2=6(X+10)$ D) $Y^2=8(X-10)$
E) $Y^2=10(X-8)$

96 Una parábola pasa por P(4: –2) y Q(–2; 4). La recta tangente L: $Y+4=0$ pasa por el vértice V de la parábola. Halle la ecuación de la parábola.

A) $(X+2)^2=2(Y+4)$
B) $(X-2)^2=2(Y-4)$
C) $(X+2)^2=2(Y-4)$
D) $(X-10)^2=18(Y+4)$
E) $(X+10)^2=18(Y+4)$

97 Un cable de acero esta colgado por los dos extremos; los puntos de suspensión

están situados a una misma altura y a una distancia de 20m. La magnitud de la flexión a la distancia de 2m de los puntos de suspensión en sentido horizontal es igual a 14. 4cm. Si el cable tiene la forma de un arco de parábola. Determine (en cm) la longitud e la suspensión de este cable en su punto medio.

A) 34 B) 36 C) 38
D) 40 E) 44

98 Un depósito de agua tiene sección transversal parabólica cuando el nivel del agua alcanza una altura de 18m. su ancho mide 24m. cuando el nivel del agua desciende 10m. el nuevo ancho del nivel del agua (en m) es igual a:

A) 12 B) 15 C) 16
D) 18 E) 20

99 Demuestre que la longitud del lado recto de cualquier parábola es $4|P|$. donde $|P|$ es la distancia del vértice al foco.

100 Una parábola que pasa por el origen y cuyo eje focal es el eje X. es tal que el segmento que une el foco con uno de sus puntos mide ℓ y determina 60 con el eje X (rama positivo). Halle la longitud del lado recto.

A) ℓ B) $\frac{\ell}{2}$ C) $\frac{2\ell}{3}$
D) $\frac{3\ell}{4}$ E) $\frac{3\ell}{2}$

101 Dada la parábola de ecuación: $Y^2=4pX$ y el punto $P(X_1; Y_1)$ de la parábola. Demuestre que la pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto P es:

$\frac{2p}{Y_1}$

102 Sea la parábola $\varsigma: Y^2 = 4px$. Halle la ecuación de la recta tangente a ς de pendiente m.

A) $Y = mx - \frac{P}{m}$ B) $Y = 2mx + \frac{P}{m}$
C) $Y = mx + \frac{P}{m}$ D) $Y = 2mx - \frac{P}{m}$
E) $Y = -2mx + \frac{P}{m}$

103 Demostrar que por un punto P de una parábola (distinto al vértice) al trazar la recta tangente y la recta normal. estas intersectan al eje de la parábola en los puntos A y B que equidistan del foco.

104 Sea la parábola cuya ecuación $X=Y^2$.

Por el punto P(1: 1) se traza una recta tangente a la parábola. dicha recta se intersecta al eje de las abscisas en el punto $(X_o. O)$. Entonces. X_o es:

A) –2 B)–3 C) –1
D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{3}{2}$

105 Se tiene una parábola cuyo vértice es (0; 0). Sea P un punto de la parábola y F su foco. M es un punto de la directriz. $\overline{PM}$ es tangente a la curva. Halle la medida del ángulo MFP.

A) 45 B) 60 C) 75
D) 90 E) 120

106 Sea P: $Y^2=8X$ la ecuación de una parábola. halle la ecuación de la recta tangente a P y paralela a la recta $2X+2Y-3=0$.

A) $X+Y+1=0$ B) $X+Y+2=0$
C) $X+Y-2=0$ D) $X+Y-3=0$
E) $X+Y+5=0$

107 Sea la parábola P: $Y^2 - 12X+2Y+1=0$. Halle el área de la región triangular que forman los ejes coordenados con la recta tangente a dicha parábola. la cual es paralela a $L_1: 3X-2Y+32=0$.

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{7}{8}$

108 Si el foco de una parábola está ubicado en F(–5. –1) y su directriz es $X+Y-2=0$ y además la ecuación de la parábola se obtiene $AX^2+BXY+CY^2+DX+EY+F=0$. halle $A+B+C$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

109 Dada la ecuación de la elipse:

$\frac{X^2}{25}+\frac{Y^2}{9}=1$

Halle las coordenadas del centro focal. los focos. los vértices y las ecuaciones de las rectas directrices.

110 Los focos de una elipse son los puntos (–2; 3) y (6; 3) y uno de sus vértices es el punto (8; 3). halle su ecuación.

A) $\frac{(X-2)^2}{36}+\frac{(Y-3)^2}{20}=1$

B) $\frac{(X-2)^2}{36}+\frac{(Y+3)^2}{20}=1$

C) $\frac{(X+2)^2}{36}+\frac{(Y-3)^2}{20}=1$

D) $\frac{(X-2)^2}{20}+\frac{(Y+3)^2}{36}=1$

E) $\frac{(X-2)^2}{20}+\frac{(Y-3)^2}{36}=1$

111 Los vértices de un elipse son: $V_1(3. 5)$; $V_2(3. -1)$. además su excentricidad es $\frac{1}{3}$. Halle la longitud del ángulo recto.

A) 3 B) $\frac{11}{3}$ C) 5
D) $\frac{16}{3}$ E) 9

112 Halle la ecuación de la elipse de eje mayor 2a en la que el eje menor. se vea bajo un ángulo que mide 90 desde uno de los focos.

A) $X^2+2Y^2=a^2$ B)$2Y^2+X^2=a^2$
C) $4Y^2+X^2=a^2$ D)$X^2+2Y^2=2a^2$
E) $4Y^2+X2=2a^2$

113 Halle la ecuación y la excentricidad de la elipse cuyas directrices son las rectas $L_1: X-1=0$ y $L_2: X-9=0$. uno de sus focos es F=(7; 0).

A) $(X-5)^2+2Y^2=8,\ e=\frac{\sqrt{2}}{2}$

B) $(X-5)^2+2(Y-1)^2=8,\ e=\frac{\sqrt{2}}{4}$

C) $(X-1)^2+2Y^2=1,\ e=\frac{\sqrt{2}}{8}$

D) $(X-1)^2+2(Y-1)^2=1,\ e=\frac{\sqrt{2}}{3}$

E) $(X-1)^2+2(Y+1)^2=1,\ e=\frac{\sqrt{2}}{5}$

114 Los focos de una elipse son $F_1(4. -2)$ y $F_2(-2. -2)$. Halle la ecuación de la elipse si uno de sus vértices está sobre la recta $L: X-Y-8=0$.

A) $\frac{(X+1)^2}{25}+\frac{(Y-3)^2}{16}=1$

B) $\frac{(X+1)^2}{16}+\frac{(Y-2)^2}{25}=1$

C) $\frac{(X+1)^2}{25}+\frac{(Y+2)^2}{16}=1$

D) $\frac{(X-4)^2}{25}+\frac{(Y-2)^2}{16}=1$

E) $\frac{(X-1)^2}{25}+\frac{(Y+2)^2}{16}=1$

115 Demostrar que longitud el semi eje menor de una elipse es media proporcional entre los segmentos del eje mayor determinados por uno de los focos.

116 Halle el lugar geométrico de los puntos que dividen a las abcisas de los puntos de la circunferencia $X^2+Y^2=25$ en la relación $\frac{4}{5}$.

A) Recta B) Circunferencia
C) Parábola D) Elipse
E) Hipérbola

117 Sea la elipse cuya ecuación es: $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$. Calcule el área de la región cuadrada inscrita a la elipse.

A) $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ B) $\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$ C) $\frac{3a^2b}{a^2+b^2}$
D) $\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$ E) $\frac{6a^2b^2}{a^2+b^2}$

118 En la elipse de ecuación $9X^2+16Y^2=576$ se inscribe un cuadrado. halle la suma de las coordenadas de uno de sus vértices del cuadrado.

A) –15 B) –12.5 C) –9.6
D) –8.4 E) – 4.5

119 En la elipse $\varsigma: b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. se traza la cuerda MN. el punto $(X_o; Y_o)$ pertenece a $\overline{MN}$ y esta ubicado en el punto medio de $\overline{MN}$. Halle la ecuación de la recta que contiene a $\overline{MN}$.

A) $bx_ox+ay_oy+bx_o-ay_o=o$
B) $b^2x_ox+a^2y_oy+b^2x^2+a^2y^2_o=o$
C) $ax_ox-by_oy-ax_o-by_o=o$
D) $b^2x_ox+a^2y_oy-b^2x_o^2-a^2y_o^2=o$
E) $ax_ox+by_oy+ax_o+by_o=o$

120 Determine la distancia de la recta $4X+3Y-12=0$ al foco mas cercano de la elipse $9Y^2+13X^2=13$.

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2
D) $\frac{5}{2}$ E) 3

121 Deducir la ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas. que tiene un vértice en (13; 0) y un foco en (5; 0).

A) $\frac{X^2}{144}+\frac{Y^2}{169}=1$ B) $\frac{X^2}{169}+\frac{Y^2}{144}=1$
C) $\frac{X^2}{81}+\frac{Y^2}{100}=1$ D) $\frac{X^2}{100}+\frac{Y^2}{81}=1$
E) $\frac{X^2}{225}+\frac{Y^2}{400}=1$

122 Desde el punto (0; 9) se traza una recta tangente a la elipse $2X^2+Y^2=9$. Halle el intercepto de esta recta tangente con la parte positiva del eje X.

A) $\frac{7}{4}$ B) $\frac{9}{4}$ C) 2
D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{5}{3}$

123 Sea la ecuación de la elipse $X^2+4Y^2=20$ y la recta $\overleftrightarrow{L}: 2X-2Y-13=0$. Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse y perpendiculares a la recta $\overleftrightarrow{L}$.

A) $\begin{matrix}X+Y+5=0\\X+Y-5=0\end{matrix}$ B) $\begin{matrix}X+Y+7=0\\X+Y-7=0\end{matrix}$
C) $\begin{matrix}X-Y+5=0\\X-Y-5=0\end{matrix}$ D) $\begin{matrix}X-Y+7=0\\X-Y-7=0\end{matrix}$
E) $\begin{matrix}X+Y+9=0\\X+Y-9=0\end{matrix}$

124 Una recta intersecta a los ejes positivos de coordenadas en A y B. se ubica P en $\overline{AB}$ de manera que $AP=a$ y $a\neq b$. Si los interceptos se desplazan sobre los ejes X e Y. Entonces P describe una figura geométrica llamada:

A) Elipse B) Circunferencia
C) Parábola D) Hipérbola
E) Recta

125 Halle la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos A(3; –2) y B(7; –6). tiene su centro en el origen y el eje transverso coincide con el eje X.

A) $\frac{X^2}{4}-\frac{5Y^2}{16}=1$ B) $\frac{X^2}{4}-\frac{16Y^2}{5}=1$
C) $\frac{5Y^2}{9}-\frac{X^2}{125}=1$ D) $\frac{9Y^2}{125}-\frac{5Y^2}{144}=1$
E) $\frac{9Y^2}{125}-\frac{X^2}{5}=1$

126 Los focos de una hipérbola son (–3; 0) y (3; 0) teniendo sus vértices las coordenadas de (–2; 0) y (2; 0). halle la ecuación de su asíntota cuya pendiente es positiva.

A) $Y=\frac{\sqrt{5}}{3}X$ B) $Y=\frac{\sqrt{5}}{2}X$
C) $Y=\frac{2}{\sqrt{5}}X$ D) $Y=\frac{2}{3}X$
E) $Y=\frac{3}{2}X$

127 Una asíntota de una hipérbola es $y=\frac{4}{3}X$. el eje focal es el eje Y y un foco está en el punto (0; –10). Escriba la ecuación cartesiana de esta hipérbola.

A) $9Y^2-16X^2=576$
B) $16Y^2-9X^2=576$
C) $8Y^2-4X^2=228$
D) $9Y^2-16X^2=584$
E) $12Y^2-9X^2=636$

128 Halle la ecuación de la recta que es asíntota a $\varsigma: 9X^2-4Y^2=36$.

A) $Y=3X$ B) $Y=-3X$ C) $2X=-3Y$
D) $Y=\frac{3}{2}X$ E) $3X=4Y$

129 Halle las ecuaciones de las asíntotas de la curva $144^2-25y^2=3600$.

A) $2X\pm15Y=0$ B) $5X\pm12Y=0$
C) $12X\pm5Y=0$ D) $12X\pm Y=0$
E) $15X\pm7Y=0$

130 Halle la ecuación de una hipérbola cuyas asíntotas son $Y=\pm\frac{5}{3}X$ y pasa por el punto (2; –5).

A) $\frac{3Y^2}{5}-\frac{4X^2}{7}=1$ B) $\frac{9Y^2}{125}-\frac{X^2}{4}=1$
C) $\frac{5Y^2}{9}-\frac{X^2}{125}=1$ D) $\frac{9Y^2}{125}-\frac{5Y^2}{144}=1$
E) $\frac{9Y^2}{125}-\frac{X^2}{5}=1$

131 Sea la hipérbola $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{9}=1$ y la recta L: $9X+2Y-24=0$. Calcule el área de la región triangular determinado por la recta L y las asíntotas de la hipérbola.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 10 E) 12

132 Los focos de la elipse $\frac{(X-1)^2}{8}+\frac{(Y-4)^2}{14}=1$. son los vértices de una hipérbola y a su vez los focos de ésta última coincide con los vértices de la elipse. Halle la ecuación de la hipérbola.

A) $\frac{(Y-2)^2}{6}-\frac{(X-1)^2}{8}=1$
B) $\frac{(Y-4)^2}{6}-\frac{(X-1)^2}{8}=1$
C) $\frac{(y-4)^2}{8}-\frac{(x-1)^2}{6}=1$
D) $\frac{(y-4)^2}{8}-\frac{(x+1)^2}{6}=1$
E) $\frac{(Y-2)^2}{8}-\frac{(X-1)^2}{6}=1$

133 Halle la ecuación de una hipérbola con centro en el origen de coordenadas. focos sobre el eje Y. lado recto de $\frac{16}{3}$ y la pendiente de una de sus asíntotas es $\frac{3}{4}$.

A) $16Y^2-9X^2=36$ B) $9Y^2-3X^2=36$
C) $16X^2-9Y^2=36$ D) $9X^2-3Y^2=36$
E) N. A.

134 La ecuación de la hipérbola $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ tiene excentricidad de $\frac{3}{2}$ y directriz $X=\pm\frac{4}{3}$. Halle a^2+b^2.

A) 4 B) 5 C) 7
D) 9 E) 11

135 Halle la ecuación de la hipérbola $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ tiene excentricidad de $\frac{3}{2}$ y la directriz $X=\pm\frac{4}{3}$.

A) $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{3}=1$ B) $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{6}=1$

C) $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{5}=1$ D) $\frac{X^2}{3}-\frac{Y^2}{5}=1$

E) $\frac{X^2}{3}-\frac{Y^2}{7}=1$

136 Dada la ecuación de la hipérbola: $H:\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$. Halle la ecuación del diámetro de la hipérbola (lugar geométrico de los puntos medios de cualquier sistema de cuerdas paralelas a los ejes).

137 Sea la hipérbola cuya ecuación es: $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$. Halle la distancia del foco de la hipérbola a una de las rectas asíntotas.

A) a B) b C) c
D) $\frac{bc}{a}$ E) $\frac{ab}{c}$

138 En una hipérbola. con centro en el origen y el eje transversal contenido en el eje de las abscisas. la distancia del foco $F(2\sqrt{3},0)$ a una de sus asíntotas es $\sqrt{3}$. Halle la ecuación de dicha hipérbola.

A) $3X^2-Y^2=9$ B) $2X^2-3Y^2=8$
C) $X^2-Y^2=8$ D) $X^2-2Y^2=8$
E) $X^2-3Y^2=9$

139 Un punto P(x; y) está a igual distancia del punto (4; 0) que de la circunferencia $X^2+Y^2=4$. entonces P pertenece a una:

A) Recta B)Circunferencia
C) Parábola D) Elipse
E) Hipérbola

140 Halle el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancia a las rectas $3X-4Y-11=0$; $3X+4Y+5=0$ sea igual a $\frac{144}{25}$.

A) Recta B)Circunferencia
C)Elipse D)Parábola
E) Hipérbola

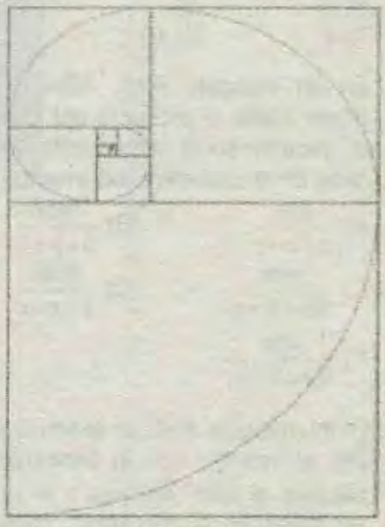
CLAVES DE RESPUESTAS

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
E	B	D	B	B	A	B	B	D	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	D	D	D	B	E	C	A	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
E	C	A	*	C	D	D	A	C	B
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	C	D	B	B	D	C	E	B	A
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	A	B	E	C	A	B	D	C	C
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A	A	A	E	C	B	C	E	E	C
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
A	A	A	C	*	D	D	B	*	A
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
E	C	B	C	D	E	E	B	*	C
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
D	A	C	C	A	D	A	D	B	E
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
*	A	B	D	D	*	*	C	*	A
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
*	*	*	C	D	B	B	A	*	A
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
D	A	A	E	*	D	D	C	D	C
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
B	B	A	A	A	B	B	D	C	E
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
E	B	A	D	C	*	B	E	E	E

EL NÚMERO DE ORO EN LA NATURALEZA

En primer lugar, vamos a hablar de las espirales que forman los cuerpos de algunos seres vivos, por ejemplo, los caracoles:

A primera vista, quizá no veamos por ningún lado la proporción áurea. Sin embargo, si dividimos la imagen en rectángulos (quedándonos solo con la espiral, sin la imagen del caracol), queda de la siguiente manera:



En la imagen observamos muchos rectángulos áureos, que ya explicamos anteriormente. Si unimos, mediante una línea en espiral, como vemos en la fotografía, obtenemos lo que se llama espiral áurea.
Esta imagen de una piña también ofrece algunas espirales áureas.

CUARTO SEMINARIO CEPREUNI-B

1. ABCD es un cuadrado y A'B'C'D es su simétrico si $\overline{AD}$ forma con el eje de simetría L un ángulo de 30°, y $CC' = 4\sqrt{3}$, entonces la distancia entre los centros del cuadrado ABCD y su simétrico es:
   A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2+2\sqrt{3}$
   D) $3+2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

2. En un triángulo ABC, se trazan las cevianas $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$. Si $\overline{AD} \cap \overline{BE} = \{F\}$, DC=3(BD), AF=3(FD) y área de la región triangular ABC es $16u^2$, entonces el área de la región triangular AFC en u^2 es:
   A) 6 B) 7 C) 8
   D) 9 E) 10

3. En un triángulo ABC, AB=c, AC=b BC=a. Halle el producto del radio de la circunferencia circunscrita por el radio de la circunferencia inscrita.
   A) $\frac{abc}{a+b+c}$ B) $\frac{2abc}{a+b+c}$
   C) $\frac{abc}{3(a+b+c)}$ D) $\frac{3abc}{a+b+c}$
   E) $\frac{abc}{2(a+b+c)}$

4. En un triángulo ABC, el segmento que une el incentro con el baricentro es paralelo al lado $\overline{AB}$, sea r el inradio del triángulo, si $AB.r = 40u^2$, entonces el área de la región triangular ABC es:
   A) 45 B) 50 C) 52
   D) 58 E) 60

5. En un triángulo ABC, recto en C, se inscribe una circunferencia, tangente a $\overline{AB}$ en E y a $\overline{BC}$ en H. Si $\overleftrightarrow{EH} \cap \overline{AC} = \{F\}$ y AE=3, BE=10, entonces el área de la región triangular EFC es:
   A) $\frac{160}{13}$ B) $\frac{170}{13}$ C) $\frac{180}{13}$
   D) $\frac{190}{13}$ E) $\frac{200}{13}$

6. AOB es un cuadrante, se traza al interior una semicircunferencia con diámetro OB y la tangente $\overline{AQ}$ a la semicircunferencia (Q en la semicircunferencia). Si $OA = \sqrt{10}$ entonces el área de la región triangular OQB es:
   A) 1 B) 2 C) 3
   D) 4 E) 5

7. En un triángulo ABC, se traza la altura $\overline{BH}$ tal que $m\angle ABH = 2m\angle HBC$. Si AH=8 y HC=3 entonces el área de la región triangular ABH es:
   A) 12 B) 14 C) 16
   D) 20 E) 24

8. ABCD es un cuadrado, al interior se traza la semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ y la tangente $\overline{BQ}$ con Q en la semicircunferencia. Si $AB = 2\sqrt{5}$, entonces el área de la región triangular BQC es:
   A) 4 B) 5 C) 6
   D) 7 E) 8

9. ABC es un triángulo escaleno, se trazan la altura y la mediana $\overline{BH}$ y $\overline{BM}$ respectivamente de modo que $m\angle ABH = m\angle MBC = \frac{m\angle HBM}{2}$. Si $BH = \sqrt{2}$ entonces el área de la región triangular BHM es:
   A) 1 B) 2 C) 3
   D) 4 E) 5

10. En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, $O \in \overline{AB}$ (AO = OB) se prolonga $\overline{AB}$ hasta C, se traza la secante CDE (D y E en la semicircunferencia). Si ED=2m y DC=7m y $\overline{EO} \perp \overline{AB}$ entonces el área de la región triangular EOC es:
    A) $3\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{2}$
    D) $8\sqrt{2}$ E) $9\sqrt{2}$

11. ABC es un triangulo rectángulo, se traza la altura $\overline{BH}$ relativa a la hipotenusa. Si la suma de los inradios relativos a los triángulo AHB, BHC y ABC es 8 y AC=20 entonces el área de la región triangular ABC es:
    A) 40 B) 50 C) 70
    D) 80 E) 90

12. En un triángulo ABC sus lados miden AB=6u, BC=8u y AC=10u. Entonces, el área de la región triangular que se forma al unir el ortocentro, incentro y circuncentro del triángulo ABC es:
    A) $1u^2$ B) $1{,}5u^2$ C) $2u^2$
    D) $2{,}5u^2$ E) $0{,}5u^2$

13. En un triángulo isósceles ABC ($\overline{AB} \cong \overline{BC}$) se inscribe una circunferencia; luego se dibuja otra circunferencia tangente a la circunferencia inscrita y tangente a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Si los radios de las circunferencias miden 3u y 1u, entonces el área de la región triangular ABC es:
    A) $24\sqrt{3}u^2$ B) $27\sqrt{3}u^2$ C) $36\sqrt{3}u^2$
    D) $45\sqrt{3}u^2$ E) $42\sqrt{3}u^2$

14. En un triángulo ABC recto en B, I es el incentro y O es el circuncentro. Si $m\angle AIO = 90$ y área $(\triangle AIO) = 5u^2$, entonces el área de la región triangular ABC es:
    A) $20u^2$ B) $24u^2$ C) $30u^2$
    D) $36u^2$ E) $48u^2$

15. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se trazan la mediana $\overline{BM}$ y su mediatriz que intercepta a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q respectivamente. Calcule el área (PBQ) si AB=c, BC=a y AC=b.
    A) $\frac{b^4}{12ac}$ B) $\frac{b^4}{24ac}$ C) $\frac{b^4}{36ac}$
    D) $\frac{b^4}{25ac}$ E) $\frac{b^4}{32ac}$

16. Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan las secantes PAB y PCD de modo que $(PC)(CD) = 24u^2$, $\overline{AB}$ es diámetro y el arco BD mide 90°. Calcule el área (ABC) en u^2.
    A) 6 B) 8 C) 12
    D) 24 E) $4\sqrt{3}$

17. Se tiene un hexágono equiángulo cuyos lados miden 1,4,5,2,3 y 6 respectivamente. Calcule el área de la región hexagonal.
    A) $\frac{69\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{71\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{63\sqrt{3}}{4}$
    D) $\frac{65\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{67\sqrt{3}}{4}$

18. En un triángulo ABC se tiene que el ángulo ABC mide 60°. Exteriormente al triángulo se construyen las semicircunferencias cuyos diámetros son $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Calcule el área de la región(ABC) sabiendo que la tangente común a las semicircunferencias mide 2.
    A) $6\sqrt{3}$ B) 12 C) $4\sqrt{3}$
    D) 9 E) $3\sqrt{3}$

19. Se tiene una circunferencia tangente a los lados AB y BC de un triángulo equilátero ABC, en los puntos P y Q. Desde A se traza la tangente $\overline{AT}$ a dicha circunferencia de modo que P, T y C son colineales. Calcule el área de la región(APC) si AC=4u.
    A) $3\sqrt{3}u^2$ B) $\sqrt{8}u^2$ C) $2\sqrt{3}u^2$
    D) $3\sqrt{2}u^2$ E) $2\sqrt{6}u^2$

20. Sea "r" el inradio del triángulo ABC y r_a el ex radio relativo al lado $\overline{BC}$. Si BC=a demuestre que el área de la región triangular es $\frac{a.r.r_a}{(r_a-r)}$

21. Demostrar que el área de un triángulo rectángulo es igual al producto de los ex radios relativos a los catetos

22. En un cuadrilátero convexo KLMN, la $m\angle LKN = m\angle LNM = 90°$, $m\angle NLM = 45$ y $m\angle KLN = 30°$. Si $KN = 2\ell$, entonces el área de la región triangula KMN es:

A) $2\ell^2$ B) ℓ^2 C) $\frac{\ell^2}{2}$

D) $3\ell^2$ E) $\frac{3}{2}\ell^2$

23. En un cuadrilátero ABCD se tiene que P, Q, R y T son los puntos medios de $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Por los puntos P y Q se trazan dos rectas paralelas a $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$, las cuales se interceptan en el punto G. Determine la relación entre las áreas de las regiones cuadrangulares ABCD y DRGT.

A) 6 B) 4,5 C)4
D) 3,5 E) 5,5

24. Se tiene un cuadrado ABCD de centro "O", cuyo lado mide 3u. Dicho cuadrado gira 30° alrededor de "O" obteniéndose otro cuadrado A'B'C'D'. Determine el área de la región común a ambos cuadrados (en u^2).

A) $3(2+\sqrt{3})$ B) $3(3+\sqrt{2})$
C) $4(\sqrt{3}+1)$ D) $9(\sqrt{3}-1)$
E) $6(3-\sqrt{3})$

25. En un cuadrado ABCD, M y N son puntos que trisecan al lado $BC(BM<MC,\ N\in\overline{MC})$ $\overline{AM}\cap\overline{BD}=\{P\}$, $\overline{AC}\cap\overline{BD}=\{O\}$ y $\overline{AC}\cap\overline{DN}=\{Q\}$. Si el área de la región ABCD es $48u^2$, entonces el área de la región OPMNQ es:

A) $5u^2$ B) $6u^2$ C) $7u^2$
D) $8u^2$ E) $9u^2$

26. Se tiene un cuadrado ABCD, en la prolongación de $\overline{AD}$ se ubica el punto E, tal que DE=AD. Desde "B" se traza la tangente BT a la semicircunferencia de diámetro DE, "T" es el punto de tangencia. Calcule el área de la región cuadrangular(ABCD) si $BT=\sqrt{3}u$.

A) $1u^2$ B)$1{,}25u^2$ C) $0{,}75u^2$
D) $1{,}5u^2$ E) $2u^2$

27. La circunferencia inscrita a un trapecio ABCD, es tangente a los lados laterales $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en los puntos P y Q respectivamente, tal que AP=4, BP=3 y CQ=2. Calcule el área (ABCD).

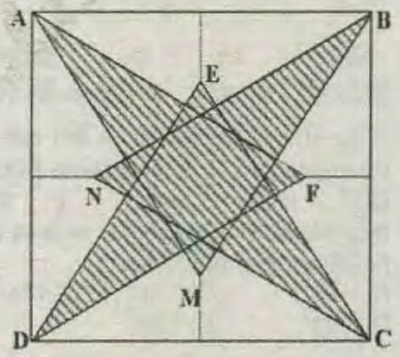
A) $28\sqrt{3}$ B) $30\sqrt{3}$ C) $36\sqrt{2}$
D) $32\sqrt{3}$ E) $40\sqrt{2}$

28. Calcule el área de una región pentagonal ABCDE sabiendo que BD=6u, AB=BC, CD=DE, los ángulos ABC y CDE son rectos.

A) 18 B) 24 C) 16
D) 20 E) 12

29. En un triángulo ABC acutángulo de circuncentro O, se trazan las alturas $\overline{AF}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CP}$.
Demostrar que el área de la región triangular ABC es igual al semiperimetro del triángulo pedal multiplicado por la longitud del radio de al circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

30. En la figura mostrada, ABCD es una región cuadrada cuyo lado mide ℓ. Los triángulos ABM, BCN, CDE y ADF son equiláteros.
Entonces, el área de la región sombreada es:



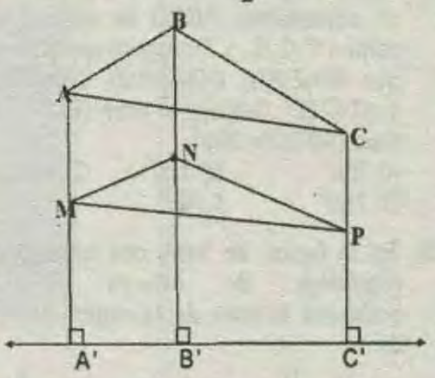
A) $\ell^2(4\sqrt{3}-3)$ B) $\frac{\ell^2}{2}(2\sqrt{3}-3)$
C) $\ell^2(2\sqrt{3}-1)$ D) $\ell^2(3\sqrt{2}-2)$
E) $\ell^2(2\sqrt{3}-3)$

31. En un cuadrilátero convexo ABCD, M y N son puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Las prolongaciones de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ se interceptan en el punto P. Demostrar que: $Area(\triangle MPN)=\frac{Area(\square ABCD)}{4}$

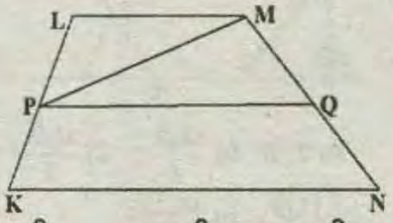
32. En un rectángulo ABCD las diagonales se interceptan en el punto O. Se ubican M y N puntos medios de $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, los segmentos $\overline{BM}$ y $\overline{MN}$ interceptan a las diagonales en los puntos Q y P. Si el área de la región rectangular ABCD es $48u^2$, entonces el área de la región cuadrangular POQM.

A) $4u^2$ B)$5u^2$ C)$6u^2$
D)$8u^2$ E)$10u^2$

33. En la figura mostrada, M, N y P son puntos medios de $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$. Demuestre que:
$Area(\triangle MNP)=\frac{Area(\triangle ABC)}{2}$

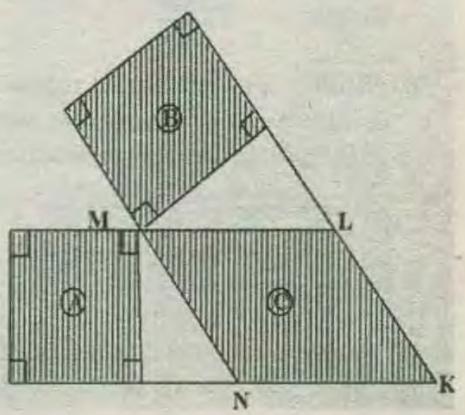


34. En la figura KLMN es un trapecio de área Su^2. Si P y Q son puntos medios, entonces el área de la región triangular PMQ es(en u^2):



A) $\frac{2}{3}S$ B) $\frac{S}{2}$ C) $\frac{S}{3}$
D) $\frac{S}{4}$ E) $\frac{S}{5}$

35. En la siguiente figura, KLMN es un paralelogramo. Si A y B son regiones cuadradas, y $(NM)(ML)(LK)(KN)=\ell$, entonces el área de al región C es:

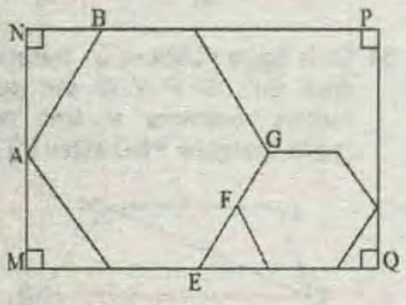


A) $\sqrt[4]{2AB\ell}$ B) $\sqrt[4]{3AB\ell}$ C) $\sqrt[4]{AB\ell}$
D) $2\sqrt{2AB\ell}$ E) $2\sqrt[4]{AB\ell}$

36. El área de una región rectangular de ℓ unidades de perímetro, inscrito en un círculo de radio R unidades es:
A) $\frac{\ell^2-16R^2}{10}$ B) $\frac{\ell^2-16R^2}{9}$
C) $\frac{\ell^2-16R^2}{7}$ D) $\frac{\ell^2-16R^2}{6}$
E) $\frac{\ell^2-16R^2}{8}$

37. Sobre los lados AB, BC, CD y AD de un cuadrilátero ABCD se ubican los puntos P,Q,R, y T respectivamente tal que AP=2(PB), CQ=2(BQ), CR=2(RD) y AT=2TD. Calcule el área (PQRT) si área (ABCD)= $36u^2$.
A) $18u^2$ B) $12u^2$ C) $16u^2$
D) $24u^2$ E) $9u^2$

38. En la figura, se tiene dos hexágonos regulares. Si $AB=\ell$ y EF=FG, entonces el área de la región MNPQ es:



A) $3\sqrt{3}\ell^2$ B) $\frac{13\sqrt{3}}{4}\ell^2$ C) $\frac{11\sqrt{3}}{3}\ell^2$
D) $\frac{11\sqrt{3}}{4}\ell^2$ E) $\frac{11\sqrt{3}}{5}\ell^2$

39. En un trapecio ABCD($\overline{AB}//\overline{CD}$), M es punto medio del lado $\overline{AD}$. Luego se traza $\overline{MQ}$, perpendicular al lado $\overline{BC}$. Si BC=a y MQ=b, entonces el área de la región limitada por el trapecio es:
A) ab B) 2ab C) $\frac{ab}{2}$
D) $\frac{3}{2}ab$ E) $\frac{4ab}{3}$

40. ABCDE... es un decágono regular. Si $AD=(1+\sqrt{5})m$ entonces el área de la región limitada por el decágono es:
A) $5\sqrt{10-2\sqrt{5}}m^2$ B) $4\sqrt{10-2\sqrt{5}}m^2$
C) $5\sqrt{10-5}m^2$ D) $5\sqrt{10+\sqrt{5}}m^2$
E) $5\sqrt{10+2\sqrt{5}}m^2$

41. El área de la región rectangular ABCD es $64u^2$. "O" es el centro de la circunferencia tangente a $\overline{BC}$ y a las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Se trazan las perpendiculares $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ hacia $\overline{AD}$ y la prolongación de $\overline{DC}$. Calcule el área (OPDQ).
A) $36u^2$ B) $48u^2$ C) $32u^2$
D) $45u^2$ E) $35u^2$

42. Se tiene un pentágono ABCDE donde AB=AE=ED y los ángulos BAE, AED y BCD son rectos. Calcule el área (ABDE) sabiendo que la suma de las áreas de las regiones ABC y CDE es igual a $48u^2$.
A) $84u^2$ B) $72u^2$ C) $76u^2$
D) $92u^2$ E) $96u^2$

43. Un cuadrilátero ABCD está inscrito en una circunferencia de modo que AB=BC, CD=6u y $\overline{AD}$ es diámetro. Calcule el área (ABCD) si el radio mide 5u.
A) $32u^2$ B) $36u^2$ C) $24u^2$
D) $35u^2$ E) $42u^2$

44. En un cuadrado ABCD, se inscribe una circunferencia. E, F y G son los puntos tangencia a los lados $\overline{AD}$, $\overline{DC}$ y $\overline{CB}$ respectivamente, $\overline{AG}$ intercepta a la circunferencia en el punto J. Si ABCD tiene un área de $16u^2$ entonces el área de la región cuadrangular EJGF es:
A) $\frac{20}{5}u^2$ B) $\frac{24}{5}u^2$ C) $\frac{30}{5}u^2$
D) $\frac{34}{5}u^2$ E) $\frac{36}{5}u^2$

45. ABCD es un trapecio ($\overline{BC}//\overline{AD}$ y BC<AD), se trazan $\overline{BF}//\overline{CD}$ (F en $\overline{AD}$) y $\overline{CQ}//\overline{AB}$ (Q en $\overline{AF}$) que se interceptan en O. Si el área de BOC y QOF miden $4m^2$ y $9m^2$ respectivamente entonces el área del paralelogramo ABCQ es:
A) $16m^2$ B) $17m^2$ C) $18m^2$
D) $19m^2$ E) $20m^2$

46. ABEC es un trapecio rectangular, $\overline{BE}\perp\overline{CE}$ y CE<AB. Si $m\angle CAB=m\angle CBA=60$ y $AE=\sqrt{7}m$, entonces el área de la región trapecial es:
A) $\frac{\sqrt{3}}{2}m^2$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}m^2$ C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}m^2$
D) $\frac{5\sqrt{3}}{2}m^2$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{5}m^2$

47. En un trapecio rectángulo se encuentra inscrita una circunferencia, si el punto de tangencia de dicha circunferencia con el lado oblicuo divide a este en segmentos de 1u y 9u. Halle el área de la región trapecial (en u^2).
A) 2 B) 5 C) 48
D) 50 E) 52

48. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B se traza la altura BH. ($H\in\overline{AC}$) y luego $\overline{HF}\perp\overline{AB}$ y $\overline{HG}\perp\overline{BC}$. Si AF=2 y CG= 7, entonces área (BFHG) es:
A) 4,5 B) 6 C) 9
D) 10 E) 14

49. M es un punto exterior a una circunferencia, desde el cual se trazan las secante MBC y MAD, si el área (ABCD)=S y 3(AB)=2(CD), Halle el área (△BAM).
A) $\frac{2}{3}S$ B) $\frac{3}{4}S$ C) $\frac{4}{5}S$
D) $\frac{2}{5}S$ E) $\frac{3}{5}S$

50. ABCDEFGH y A'B'CD'EF'G'H' son dos polígonos regulares simétricos. Si el lado del polígono es 4., el área de la región D'CDE es:
A) $4\sqrt{2-\sqrt{2}}$ B) $6\sqrt{6-\sqrt{2}}$
C) $8\sqrt{2}$ D) $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$
E) $8\sqrt{2+\sqrt{2}}$

51. En un rectángulo ABCD($\overline{BC}>\overline{AB}$) se traza $\overline{MN}//\overline{AB}$ tal que $m\angle MAN=m\angle NCD$. Si AM=5u y CN=12u, entonces el área de la región rectangular es:
A) 45 B) 50 C) 58
D) 60 E) 62

52. En un triángulo ABC, se inscribe una circunferencia que es tangente a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en los puntos M, N y P. Demostrar que: $\frac{\text{Area }(\triangle ABC)}{\text{Area }(\triangle MNP)}=\frac{2R}{r}$ Siendo R el circunradio y r el inradio del triángulo ABC

53. En un triángulo ABC, se ubican los puntos M, N y P en los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ tal que: AM=2MB, CN=2AN y BP=2CP. La ceviana $\overline{BN}$ intercepta a la cevianas $\overline{CM}$ y $\overline{AP}$, D y P respectivamente y las cevianas $\overline{AP}$ y $\overline{CM}$ se interceptan en el punto T. Si área (△ABC)=S, entonces el área de la región triangular PQT es:
A) $\frac{S}{5}$ B) $\frac{S}{6}$ C) $\frac{S}{7}$
D) $\frac{S}{8}$ E) $\frac{S}{10}$

54. En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BR}$ que intercepta a las cevianas $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ en los puntos F y G respectivamente. Calcule el área (FAG). Si BP=PQ=QC y área (ABC) es $40u^2$.
A) $9u^2$ B) $6u^2$ C) $8u^2$
D) $5u^2$ E) $12u^2$

55. BCD es un paralelogramo, E punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{EC}$ y $\overline{BD}$ se intersecan en el punto F. Si la distancia de E al lado $\overline{AD}$ es 3m y AD=10m, entonces el área de la región AFCD es:
A) $20m^2$ B) $30m^2$ C)$40m^2$
D) $50m^2$ E) $60m^2$

56. ABCD es un paralelogramo M, N puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, $P\in\overline{BC}$, $\overline{AP}$ interseca a $\overline{MN}$ en T y $\overline{PD}$ interseca a $\overline{TN}$ en S. Si el área de AMT y SND es $4m^2$ y $9m^2$ respectivamente, entonces el área de la región triangular TPS es:
A) $10m^2$ B) $11m^2$ C)$12m^2$
D) $13m^2$ E) $14m^2$

57. ABC es un triángulo acutángulo, se ubican los puntos D, E y M en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ respectivamente. Si AD=DB, DM=MC y $\frac{BE}{BC}=\frac{1}{5}$ y área ABC de $60m^2$ entonces el área de la región BME es:
A) $6m^2$ B) $5m^2$ C)$4m^2$
D) $3m^2$ E) $2m^2$

58. En el triángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{AD}$, se ubica el punto E en $\overline{AD}$. Si $\frac{BD}{BC}=\frac{ED}{AD}=\frac{1}{4}$ y el área de la región AEC es de $9u^2$ entonces el área de la región ABD es:
A) $2u^2$ B) $3u^2$ C) $4u^2$
D) $5u^2$ E) $6u^2$

59. En un paralelogramo ABCD, M es el punto medio de $\overline{AD}$, $\overline{BD}\cap\overline{MC}=\{O\}$, AB=8, las distancia de M a $\overline{AB}$ es 3. Halle el área de la región triangular COD.
A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

60. En un triángulo ABC, desde un punto Q exterior a $\overline{BC}$ se trazan paralelas a $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ tal que interceptan a $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en los puntos E, R y H respectivamente, además $\overline{QH}\cap\overline{BC}=\{F\}$. Si área($\triangle$EBF)=$S_1$, área ($\triangle$ERQ)=$S_2$, área($\triangle$HRC)=$S_3$. Halle el área ($\triangle$ABC).

A) $\frac{\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+2\sqrt{S_3}\right)^2}{4}$

B) $\frac{\left(\sqrt{S_1}+2\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2}{3}$

C) $\left(\sqrt{S_2}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_2}\right)^2$

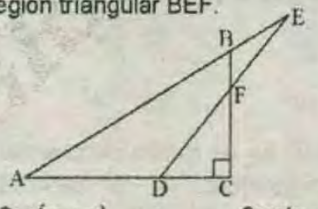
D) $\frac{\left(\sqrt{S_2}+\sqrt{S_2}\right)^2}{\sqrt{S_3}}$

E) $\frac{\left(2\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)}{\sqrt{S_3}}$

61. En un triángulo ABC, sus medianas miden 13u, 14u y 15u. Entonces, el área de la región triangular ABC es:
A) $96u^2$ B) $112u^2$ C) $132u^2$
D) $136u^2$ E) $148u^2$

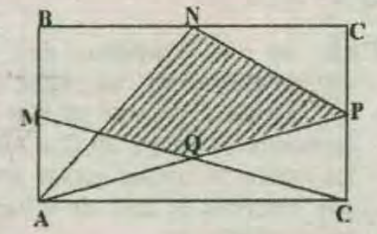
62. En un triángulo isósceles ABC AB=BC=30u. Desde el punto medio M de $\overline{BC}$ se traza $\overline{ME}\perp\overline{BC}(E\in\overline{AB})$. Si $\frac{AE}{EB}=\frac{1}{5}$. Halle el área de la región triangular ABC(en u^2).
A) 320 B) 340 C) 350
D) 360 E) 370

63. En la figura mostrada BF=FC=a. AD=m y DC=n. Halle el área de la región triangular BEF.



A) $\frac{2an(m+n)}{m-n}$ B) $\frac{2am(n-n)}{m+n}$
C) $\frac{3an(m+n)}{m-n}$ D) $\frac{3am(m-n)}{m+n}$
E) $\frac{an(m+n)}{2(m-n)}$

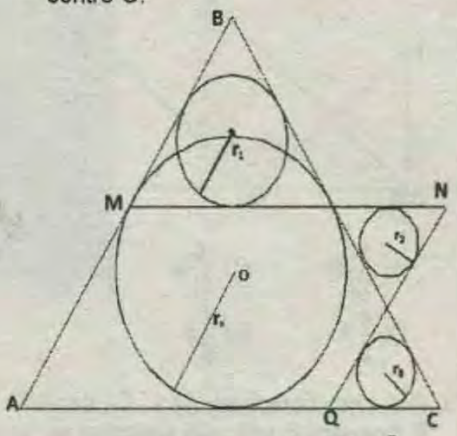
64. En un rectángulo ABCD de la figura, M,N y P son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Si el área de la región rectangular es $40u^2$, entonces el área de la región cuadrangular ONPQ (en u^2) es:



A)8 B) 10 C) 12
D) 14 E) 16

65. En un pentágono ABCDE se tiene que AB=BC, CD=DE, los triángulos ABC y CDE son semejantes, $\overline{AC}\cap\overline{BE}=\{P\}$, $\overline{AD}\cap\overline{BE}=\{Q\}$ y $\overline{CE}\cap\overline{AD}=\{R\}$. Halle área (RCD). Si área (PBC)=15, área(APQ)=10 y área(RQE)=12.
A) 14 B)16 C)13
D)12 E) 17

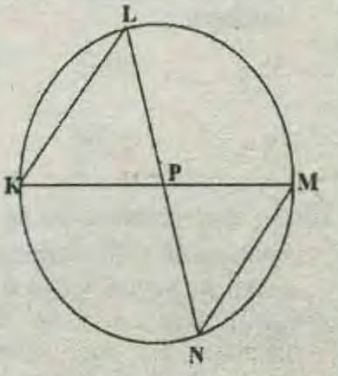
66. En la figura $\overline{MN}//\overline{AC}$, $\overline{NQ}//\overline{AB}$. Calcule el área de la región circular de centro O.



A) $\pi(r_1+2r_2+r_3)^2$ B) $3\frac{\pi(r_1+r_2+r_3)^2}{3}$
C) $\frac{\pi(r_1+r_2+r_3)^2}{4}$ D) $\pi(r_1+r_2+r_3)^2$
E) $2\pi(r_1+r_2+r_3)^2$

67. Sea el triángulo ABC, $M\in\overline{BC}$ y $Q\in\overline{AC}$ tal que: $\frac{BM}{MC}=\frac{3}{2}$ y $\frac{AQ}{QC}=\frac{2}{3}$, $\overline{AM}\cap\overline{BQ}=\{P\}$. Halle la relación de las áreas de las regiones ABP y PMCQ.
A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C)1 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

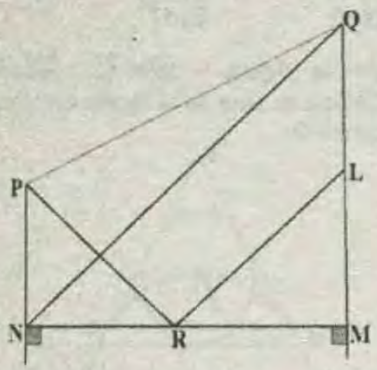
68. En la figura siguiente, el área de la región triangular PMN=A u^2. Si se sabe que: $\frac{PM}{PL}=\frac{1}{\ell}$, entonces el área de la región triangular PKL, (en u^2), es:



A) $2A\ell^2$ B) $A\ell^2$ C) $\frac{A\ell^2}{2}$

D) $\frac{3}{2}A\ell^2$ E) $3A\ell^2$

69. En la figura MQ=3(NP) sean R y L los puntos medios de $\overline{MN}$ y $\overline{MQ}$, respectivamente. Si S es el área de la región triangular MNQ, entonces el área de la región PRLQ es:



A) $\frac{11}{12}S$ B) $\frac{10}{11}S$ C) $\frac{9}{10}S$

D) $\frac{8}{9}S$ E) $\frac{7}{8}S$

70. Dos circunferencias C_1 y C_2 de radio R y centros P y Q, son secantes en los puntos M y N, de modo que PQ=R. La tangente común es $\overline{AB}$ ($A\in C_1$ y $B\in C_2$), la prolongación de $\overline{AQ}$ intercepta a C_2 en T y el ángulo AMB es obtuso. Calcule el área de la región limitada por $\overline{QT}$, $\overline{QM}$ y $\overline{MBT}$.

A) $\frac{R^2}{24}(7\pi+6\sqrt{3})$ B) $\frac{R^2}{32}(4\pi+9\sqrt{3})$

C) $\frac{R^2}{24}(6\pi+7\sqrt{3})$ D) $\frac{R^2}{32}(9\pi+4\sqrt{3})$

E) $\frac{R^2}{16}(\pi+\sqrt{3})$

71. Se tiene un cuadrado ABCD de lado 6u. Calcule el área de la región limitada por la circunferencia inscrita en el cuadrado y la circunferencia que triseca a los cuatro lados del cuadrado.

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$

D) π E) $\frac{3\pi}{2}$

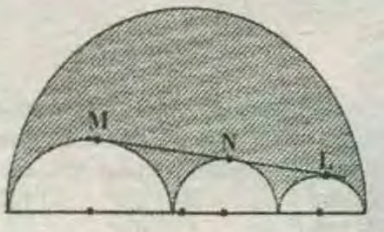
72. En una circunferencia se trazan las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ concurrentes en el punto P, tal que PC=4 y el ángulo ADC mide 30°. Se traza una circunferencia que contiene a los puntos P, B y C. Calcule el área del menor segmento circular determinado por $\overline{PC}$

A) $\frac{8\pi}{3}-4\sqrt{3}$ B) $\frac{7\pi}{4}-2\sqrt{3}$

C) $\frac{3\pi}{2}+\sqrt{3}$ D) $\frac{3\pi}{4}+\sqrt{3}$

E) $\frac{7\pi}{3}-\sqrt{3}$

73. En la figura se muestran 4 semicircunferencias , donde MN=a y NL=b. Calcule el área de la región sombreada.



A) $\frac{\pi}{4}(a^2-ab+b^2)$ B) $\frac{\pi}{4}(a^2+ab+b^2)$

C) $\frac{\pi}{2}(a^2+ab+2b^2)$ D) $\frac{\pi}{2}(2a^2+ab+b^2)$

E) $\frac{\pi}{4}(2a^2+ab+2b^2)$

74. ABCD es un cuadrado, se inscribe una circunferencia, se traza la diagonal $\overline{BD}$ que intercepta a la circunferencia en el punto E (DE>EB). Si $AE=\sqrt{3}u$ entonces el área del círculo es:

A) $\frac{\pi}{4}u^2$ B) $\frac{\pi}{3}u^2$ C) $\frac{\pi}{2}u^2$

D) πu^2 E) $\frac{3\pi}{2}u^2$

75. ABCD es un rombo circunscrito a una circunferencia. Si el perímetro del rombo es de 16m y $m\angle BCA=30°$ entonces el área del círculo es:

A) $6\pi m^2$ B) $5\pi m^2$ C) $4\pi m^2$

D) $3\pi m^2$ E) $2\pi m^2$

76. ABCDE... es un octógono regular, $\overline{AD}$ y $\overline{GC}$ se intersecan en P, O centro del octógono. Si PO=1m, entonces el área de la circunferencia circunscrita en m^2 es:

A) $(1+\sqrt{2})\pi$ B) $(2+\sqrt{2})\pi$

C) $(3+\sqrt{2})\pi$ D) $(3+2\sqrt{2})\pi$

E) $(3+3\sqrt{2})\pi$

77. $\overline{AB}$ es el diámetro de una semicircunferencia, se traza una circunferencia tangente en D y a la semicircunferencia y en C a $\overline{AB}$. Si los radios de ambas curvas miden 4m, entonces el área de la región triangular BDC es:

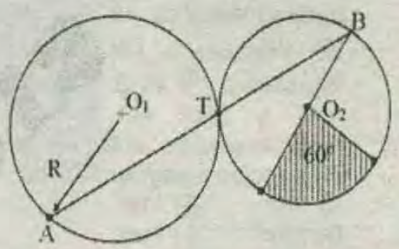
A) $2(\sqrt{3}-1)m^2$ B) $3(\sqrt{3}-1)m^2$

C) $4(\sqrt{3}-1)m^2$ D) $5(\sqrt{3}-1)m^2$

E) $6(\sqrt{3}-1)m^2$

78. Un triángulo ABC esta inscrito en una semicircunferencia de diámetro AC, teniendo como diámetro AB y BC se trazan semicircunferencias exteriores al triángulo. Demostrar que la suma de las lúnulas formadas, es igual al cuadrado de la tangente común a las semicircunferencias construidas sobre los catetos.

79. Halle el área del sector circular, donde O_1 y O_2 son centros de las circunferencia. T es punto de tangencia, y AT=a, BT=b, $O_1A=R$



A) $\frac{\pi a^2R^2}{6b^2}$ B) $\frac{\pi a^2}{6bR^2}$

C) $\frac{\pi b^2R^2}{6a^2}$ D) $\frac{\pi b^2}{6Ra^2}$

E) $\frac{\pi a^2b^2}{6R^2}$

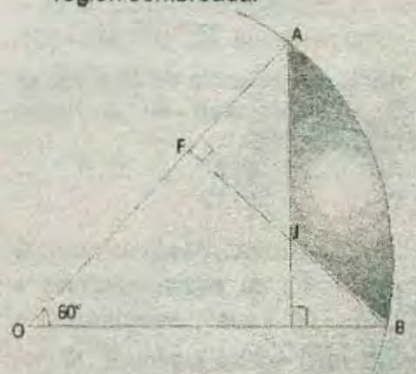
80. Un círculo esta inscrito en un sector circular de 90° y de radio R, entonces el área de dicho círculo es:

A) $\pi R^2(3-2\sqrt{2})$ B) $\pi R^2(3-\sqrt{2})$

C) $\frac{\pi R^2}{2}(3-2\sqrt{2})$ D) $\frac{\pi R^2}{3}(3-2\sqrt{2})$

E) $\pi R^2(2\sqrt{2}-1)$

81. En la figura OF=2 halle el área de la región sombreada.



A) $\pi-\sqrt{3}$ B) $2(\pi-\sqrt{3})$

C) $\frac{7}{2}(\pi-\sqrt{3})$ D) $\frac{2}{3}(4\pi-5\sqrt{3})$

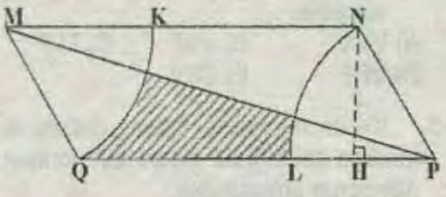
E) $\frac{11}{3}(\pi-\sqrt{3})$

82. ¿Para cuál valor del radio, se hace máximo el área de un sector circular de perímetro ℓp?

A) ℓp B) $\frac{\ell p}{2}$ C) $\frac{\ell p}{3}$

D) $\frac{\ell p}{4}$ E) $\frac{\ell p}{5}$

83. La figura MNPQ es un paralelogramo, donde NH=h, $m\angle NPQ=\phi$, MN=b, NP=a. Si $\overset{\frown}{QK}$ y $\overset{\frown}{NL}$ son arcos de circunferencia, cuyos centros son M y P respectivamente, entonces el área de la región sombreada es:



A) $\frac{1}{180}\left[360bh-\frac{\pi a^2\phi}{3}\right]$

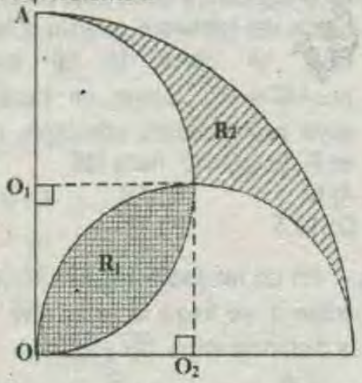
B) $\frac{1}{180}\left[720bh-\frac{\pi a^2\phi}{3}\right]$

C) $\frac{1}{360}\left[180bh-\pi a^2\phi\right]$

D) $\frac{1}{360}\left[720bh-\frac{\pi a^2\phi}{3}\right]$

E) $\frac{1}{180}\left[90bh-\frac{\pi a^2\phi}{3}\right]$

84. En la figura mostrada AOB es un cuadrante cuya radio mide R. Los puntos O_1 y O_2 son los centros de la semicircunferencias. Demostrar que las regiones sombreadas R_1 y R_2 son equivalentes.



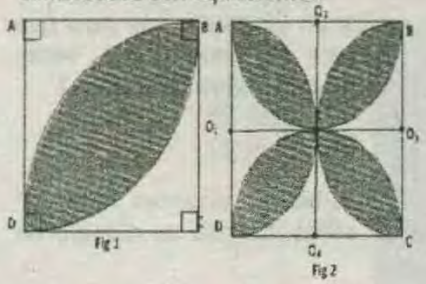
85. En un triángulo regular cuyo lado mide ℓ, con centro en él baricentro de la región triangular y radio $\frac{\ell}{3}$ se dibuja una circunferencia. Halle el área de la parte de la región triangular exterior a la circunferencia.

A) $\frac{\ell^2}{4}(3\sqrt{3}-\pi)$ B) $\frac{\ell^2}{3}(3\sqrt{3}-\pi)$

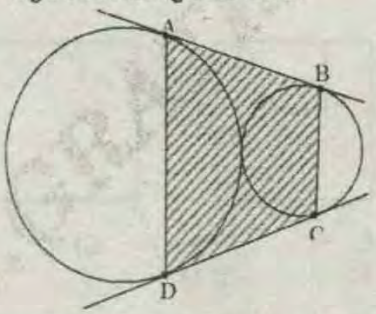
C) $\frac{\ell^2}{6}(3\sqrt{3}-\pi)$ D) $\frac{\ell^2}{18}(3\sqrt{3}-\pi)$

E) $\frac{\ell^2}{9}(3\sqrt{3}-\pi)$

86. En la figura mostrada ABCD es una región cuadrada cuyo lado mide ℓ unidades.
En la figura 1, los arcos tienen centro en C y A. En la figura 2, las semicircunferencias tienen centros en O_1, O_2, O_3 y O_4. Demostrar que las regiones sombreadas son equivalentes.



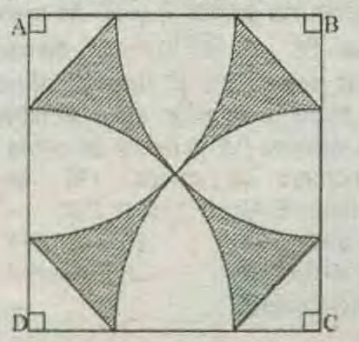
87. En la figura mostrada, las circunferencias son tangentes exteriores y sus radios miden R y r. Los puntos A, B, C y D son puntos de tangencia. Halle el área de la región cuadrangular ABCD.



A) $\frac{8Rr\sqrt{Rr}}{(R+r)}$ B) $\frac{4Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$ C) $\frac{6Rr\sqrt{Rr}}{R-r}$

D) $\frac{8Rr\sqrt{Rr}}{R-r}$ E) $\frac{9Rr\sqrt{Rr}}{R-r}$

88. En la figura mostrada ABCD es una región cuadrada. Considerando como centros los vértices del cuadrado y radio la mitad de la longitud de la diagonal se trazan arcos.
Demuestre que el área de la cruz de malta es aproximadamente la cuarta parte del área de la región cuadrada.



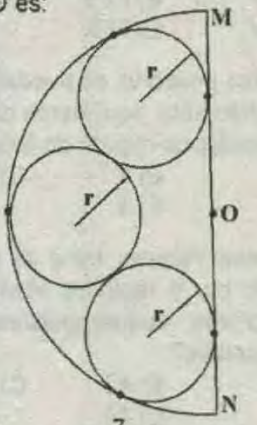
89. En una circunferencia de centro se trazan los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ perpendicular entre si. Se traza la cuerda $\overline{AQ}$ que intercepta al radio $\overline{OC}$ en el punto M. Luego se dibuja la circunferencia circunscrita al triángulo CMQ. Si MC=d, entonces el área del segmento circular CM. es:

A) $\frac{d^2}{4}(\pi-2)$ B) $\frac{d^2}{8}(\pi-2)$

C) $\frac{d^2}{6}(\pi-2)$ D) $\frac{d^2}{8}(\pi-3)$

E) $\frac{d^2}{4}(\pi-3)$

90. Si las tres circunferencias son congruentes y radio r, entonces el área de la región semicircular de centro O es:



A) $\frac{5}{2}\pi r^2$ B) $\frac{7}{2}\pi r^2$ C) $4\pi r^2$

D) $\frac{9\pi r^2}{2}$ E) $5\pi r^2$

CUADRO DE RESPUESTAS

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
C	D	E	E	C	B	E	C	A	E
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	A	B	B	E	C	D	C	E	*
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
*	A	C	C	D	A	B	A	*	E
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
*	B	*	D	C	E	C	D	A	A
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	E	A	E	E	B	C	E	C	C
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
D	*	C	B	C	D	D	C	B	C
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
B	D	E	C	E	D	C	B	A	A
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
D	A	B	D	D	D	C	*	C	A
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
E	D	C	*	D	*	A	*	B	D

QUINTO SEMINARIO CEPREUNI

1. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
I. En todo poliedro se cumple que el número de caras aumentado en su número de vértices es igual a su número de aristas aumentado en dos unidades.
II. Existen poliedros no convexos cuyas caras son todas regiones poligonales convexas.
III. Un poliedro que tiene sus ángulos diedros y sus ángulos poliedros congruentes y cuyas caras son regulares y congruentes es un poliedro regular.
A) VVV B) FFV C) FVF
D) VVV E) FFF

2. ¿Cuántos poliedros se pueden formar con 6 triángulos equiláteros de lado L y un hexágono regular de lado L.
A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

3. ¿Cuántos vértices tiene el poliedro formado por 6 regiones triangulares, 10 regiones cuadrangulares y 20 pentagonales?
A) 40 B) 42 C) 45
D) 47 E) 48

4. En un poliedro convexo, el número de caras, más el número de vértices y más el número de aristas es 28. Si los ángulos en todas las caras suman 1800°. Halle el número de caras.
A) 8 B) 9 C) 10
D) 12 E) 14

5. En un poliedro convexo se cumple C+V+A=30. Donde C representa el número de caras. V el número de vértices y A el número de aristas. Si las medidas de todas las caras suman 1800°, halle el número de caras.
A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

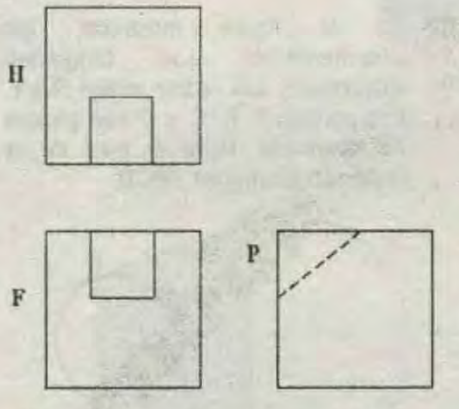
6. Un poliedro convexo tiene 33 vértices y esta conformado por 8 caras que son regiones triangulares, 9 caras que son regiones cuadrangulares y m caras que son regiones pentagonales. Calcule el número de diagonales del poliedro.
A) 250 B) 390 C) 410
D) 528 E) 560

7. Un poliedro convexo tiene 33 vértices y está conformado por 8 caras triangulares, 9 caras cuadrangulares y m caras pentagonales. Halle m.
A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

8. Un poliedro convexo está formado por n regiones cuadradas y 4n regiones triangulares. Siendo 8 el número de vértices, halle: n.
A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

9. Las caras de un poliedro convexo son regiones pentagonales; si las caras fueran regiones triangulares, se necesitarían 20 caras más para que el número de aristas no varíe. ¿Cuántas caras tiene el poliedro.?
A) 20 B) 25 C) 30
D) 35 E) 40

10. Dadas las proyecciones H, F y P de un sólido. Calcule su número de caras.



A) 8 B) 9 C) 10
D) 12 E) 14

11. Se tiene un prisma de C caras y V vértices, simplifique: $E=\frac{V-C}{V+C+4}$
A) $\frac{C+4}{C-4}$ B) $\frac{C-4}{2C}$ C) $\frac{C+4}{3C+8}$
D) $\frac{C-4}{3C}$ E) $\frac{C+4}{C}$

12. En un plano P se ubica un cuadrilátero ABCD, y en el interior del cuadrilátero se ubica el cuadrilátero $A'B'C'D'$. Exterior al plano P se ubican los puntos E y E' de manera que $\overline{EE'}\perp P$, $\overline{EE'}\cap P=\varnothing$, siendo E más alejado que E' respecto al plano P. Halle la relación entre el número de vértices (V), número de caras (C) y número de aristas (A) en el poliedro E ABCD $D'C'B'A'E'$
A) V+C=A+2 B) V–C=A+1
C) V+C=A+3 D) V+C=A+4
E) V–C=A+2

13. Un poliedro convexo tiene cinco caras. Entonces el número de vértices es:
A) 5 B) 6 C) 7
D) 5 ó 6 E) 6 ó 7

14. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
I. Sólo existen 3 pares de poliedros regulares conjugados.
II. Si se unen los puntos medios de las aristas de un hexaedro regular, se obtiene un poliedro de 12 caras.
III. En todo poliedro regular, la intersección de los ejes de simetría contiene a su centro de simetría.
A) VVV B) VVF C) FVF
D) VFF E) VFV

15. En un tetraedro regular, calcule la medida del ángulo diedro que forman dos caras adyacentes.
A) $Arccos\left(\frac{2}{3}\right)$ B) $Arccos\left(\frac{1}{3}\right)$
C) $Arccos\left(\frac{1}{4}\right)$ D) $Arccos\left(\frac{1}{5}\right)$
E) $Arccos\left(\frac{1}{6}\right)$

16. En un tetraedro regular , la suma de las longitudes de sus aristas es 48 cm. Halle el área de la superficie total en cm^2.
A) $24\sqrt{3}$ B) $32\sqrt{3}$
C) $48\sqrt{3}$ D) $64\sqrt{3}$
E) $80\sqrt{3}$

17. En un tetraedro regular ABCD, G es el baricentro de la cara DAC. En la altura del tetraedro relativo a la cara BAD se ubica M tal que la $m\angle AMD=90$. Luego se traza $\overline{GM}$ cuya prolongación intercepta a $\overline{BC}$ en F. Si GM=12, halle MF.
A) 6 B) 7,5 C) 9
D) 10,5 E) 12

18. En un tetraedro regular ABCD, de arista a, se traza la altura $\overline{DH}$. Halle la distancia entre $\overline{DH}$ y $\overline{BC}$.
A) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ B) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$
D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

19. En un octaedro regular de arista a, halle la longitud del segmento que une los baricentros de dos caras consecutivos.

A) $\frac{a\sqrt{2}}{6}$ B) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ E) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

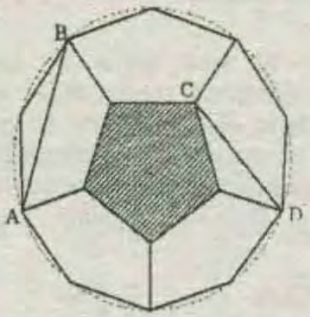
20. En un tetraedro regular ABCD tiene por arista a, halle la distancia entre dos aristas opuestas.

A) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ B) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{a}{3}$ E) $\frac{a}{2}$

21. Se proyecta un octaedro regular de arista a sobre un plano que contiene a una de sus caras. Halle el área de la proyección.

A) $\frac{a^2}{2}\sqrt{3}$ B) $a^2\sqrt{3}$ C) $\frac{5}{8}a^2\sqrt{3}$
D) $\frac{5}{2}a^2\sqrt{3}$ E) $3a^2\sqrt{3}$

22. En la figura mostrada se tiene un dodecaedro regular, calcule el valor del ángulo que forman $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.



A) 30° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 90°

23. En un tetraedro regular ABCD, de arista a, se ubican los puntos medios M y N de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. Halle el área de la sección que produce un plano que contiene a M, N y es paralelo a $\overline{AC}$.

A) $\frac{a^2}{8}$ B) $\frac{a^2}{6}$ C) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$
D) $\frac{a^2}{4}$ E) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$

24. Se traza un plano secante a un tetraedro ABCD, tal que la sección determinada sea paralela a las aristas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Si estas aristas son cruzadas y forman un ángulo que mide α. Halle el área máxima de la sección determinada.

A) $\frac{AB.CD}{2}Sen\alpha$ B) $\frac{AB.CD}{4}Sen\alpha$
C) $\frac{AB.CD}{8}Sen\alpha$ D) $\frac{AB.CD}{16}Sen\alpha$
E) $AB.CD\ Sen\alpha$

25. Halle la distancia entre dos caras opuestas de un octaedro regular de arista a.

A) $\frac{a\sqrt{2}}{6}$ B) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$
D) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ E) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

26. Se tienen dos tetraedros regulares donde la altura de uno de ellos es la mitad de la arista del otro. ¿En qué relación están sus áreas?.

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{2}{5}$

27. En un octaedro regular, calcule la medida del ángulo diedro que determinan dos caras adyacentes.

A) $Arc\cos\left(\frac{1}{3}\right)$ B) $Arc\cos\left(-\frac{1}{3}\right)$
C) $Arc\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ D) $Arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right)$
E) $Arc\cos\left(-\frac{1}{5}\right)$

28. La longitud de la arista de un octaedro regular es el triple de la longitud de la arista de un icosaedro regular. Halle la relación entre las áreas de las superficies de tales poliedros.

A) $\frac{16}{5}$ B) $\frac{17}{5}$ C) $\frac{18}{5}$
D) $\frac{19}{5}$ E) $\frac{21}{5}$

29. En un hexaedro regular de arista 2u. Halle la menor longitud del recorrido que se puede realizar pasando por todas sus caras. Partiendo de un extremo y llegando al otro extremo de la misma arista.

A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

30. Dado un tetraedro regular de arista "a", determine el área total del poliedro que se forma al unir los puntos medios de los lados de cada cara del poliedro dado. Área del tetraedro es St.

A) $\frac{St}{4}$ B) $\frac{St}{3}$ C) $\frac{St}{2}$
D) $\frac{2St}{3}$ E) $\frac{4}{5}St$

31. En un cubo ABCD–EFGH, Q es punto medio de $\overline{HG}$; L, M y N son los centros de las caras BCGF, ADHE, EFGH respectivamente, calcule la medida del ángulo que forman $\overline{LQ}$ y $\overline{MN}$.

A) 60 B) 75 C) 85
D) 90 E) 121

32. En un octaedro regular ABCDEF de diagonales $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{EF}$, M es punto medio de $\overline{DF}$, calcule la medida del ángulo formado por las rectas EM y AF.

A) $Arc\ sen\frac{3\sqrt{5}}{10}$ B) $Arc\cos\frac{3\sqrt{5}}{10}$
C) $Arc\ Cos\frac{\sqrt{5}}{10}$ D) $Arc\ sen\frac{3\sqrt{5}}{5}$
E) $Arc\cos\frac{3\sqrt{5}}{5}$

33. Halle el valor de verdad:
- El tetraedro tiene 6 planos de simetría.
- El hexaedro regular tiene 9 planos de simetría.
- El octaedro regular tiene 9 planos de simetría.

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFF E) FVV

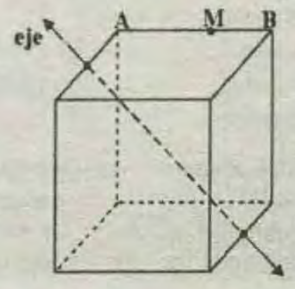
34. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
I. Todos los poliedros regulares tienen centro de simetría.
II. El octaedro regular tiene 9 planos de simetría.
III. El icosaedro regular tiene 15 ejes de simetría

A) VFV B) VVF C) VVV
D) VFF E) FVV

35. En un tetraedro regular de arista a, se traza un plano de simetría por una arista; halle el área de la sección que determina el plano.

A) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{a^2\sqrt{6}}{6}$ E) $\frac{a^2}{2}$

36. En la figura se tiene un hexaedro regular y uno de sus ejes de simetría . AM=2MB; si M' es el simétrico de M con respecto al eje en que relación divide M' a la arista que lo contiene.



A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

37. En un hexaedro regular ABCD–EFGH con centro de simetría en O se ubican M en $\overline{DH}$ al que DM=MH y P en $\overline{AM}$ tal que AP=3(PM). Se traza una recta L perpendicular al plano AMG y que pase por O. Si la longitud de la arista del hexaedro es 8 cm. y P' es el simétrico de P recto a L, halle la distancia de P' a la arista $\overline{FG}$ en cm.

A)1,5 B) 2 C) 2,5
D) 3 E) 3,5

38. Se tiene un rectángulo ABCD, tal que $\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2}$, $AB'CD'$ es el simétrico de ABCD respecto al lado AC, si: $\overline{BC}\cap\overline{AD'}=\{M\}$ y el área de la región rectangular ABCD es igual a S^2. Halle MD'.

A) $\frac{3\sqrt{2}}{8}S$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{8}S$ C) $\frac{3\sqrt{5}}{8}S$
D) $\frac{3\sqrt{2}}{4}S$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{4}S$

39. Un tetraedro regular ABCD tiene su cara BCD, contenida en un plano P. Si $A'B'CD$ es el tetraedro simétrico con respecto a un plano Q perpendicular al plano P. Si la arista del tetraedro mide a. Halle el área de la región $ABB'A'$.

A) $\frac{\sqrt{2a^2}}{3}$ B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^2$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$
D) $\sqrt{2a^2}$ E) $2\sqrt{2a^2}$

40. Si A es el número total de aritas de un prisma. Halle el número total de sus vértices.

A) $\frac{1}{3}A$ B) $\frac{2}{3}A$ C) A
D) $\frac{3}{2}A$ E) 2A

41. En un paralelepípedo rectangular su diagonal mide 10u y forma un ángulo de 45° con la base y un ángulo de 30° con una cara lateral. Calcule el volumen del paralelepípedo en u^3.

A) $100\sqrt{2}$ B) $110\sqrt{2}$
C) $115\sqrt{2}$ D) $120\sqrt{2}$
E) $125\sqrt{2}$

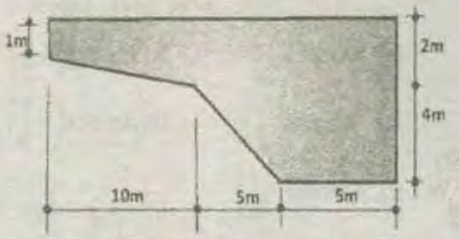
42. La suma de las medidas de las aristas de un paralelepipedo rectangular es 48 cm. La suma de los cuadrados de las medidas de su ancho, altura y profundidad es 50 cm^2. El área de la base es 12 cm^2. Halle su volumen en cm^3.

A) 50 B) 60 C) 70
D) 80 E) 90

43. En un prisma oblicuo cuyo número de aristas es A. Halle la suma de las medidas de los ángulos diedros.

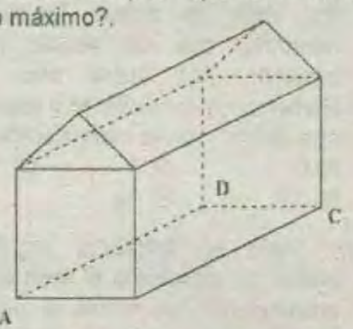
A) 120 (A–1) B) 120(A–2)
C) 120(A–3) D) 120(A–4)
E) 120(A–5)

44. Una piscina de 10 m de ancho tiene una sección longitudinal que se muestra en la figura. Halle la cantidad de agua que se necesita para llenarla en m^3.



A) 650 B) 700 C) 750
D) 800 E) 850

45. En la figura el sólido esta constituido por dos prismas rectos con bases cuadradas y triangulares, con la particularidad de que la base triangular es un triangulo rectángulo isósceles. Si el perimetro de la cara ABCD es 24u ¿Cuál debe ser el lado del cuadrado para que el volumen sea máximo?.



A)6u B) 7u C) 8u
D) 8,4u E) 9,6u

46. En un prisma triangular oblicuo, el área de una cara lateral es A u^2, la distancia de la arista opuesta a dicha cara es a u. Halle el volumen.

A) $\frac{Aa}{6}$ B) $\frac{Aa}{4}$ C) $\frac{Aa}{3}$
D) $\frac{Aa}{2}$ E) Aa

47. En un prisma oblicuo la medida del ángulo diedro que forma el plano de la base con su sección recta es 60°, si la altura del prisma es 20u Calcule la longitud de su arista lateral (en u).

A) 20 B) 25 C) 30
D) 35 E) 40

48. Las área en u^2 de tres caras de un paralelepipedo rectángulo son: A, B, C. Demuestre que el volumen se expresa: $\sqrt{ABC}$.

49. La altura de un prisma regular es h y la diagonal del rectángulo que resulta al desarrollar su área lateral mide d, si la base del prisma es una región exagonal. Calcule su volumen.

A) $\frac{\sqrt{3}}{24}(d^2-h^2)h$ B) $\frac{\sqrt{3}}{36}(d^2-h^2)h$
C) $\frac{\sqrt{3}}{4}d^2h$ D) $\frac{\sqrt{3}}{12}(d^2-h^2)h$
E) $\frac{\sqrt{3}}{8}(d^2h)$

50. El área lateral de un prisma pentagonal oblicuo es A, la sección recta del prisma es un pentágono circunscrito a una circunferencia de radio r. Halle el volumen del prisma.

A) $\frac{Ar}{4}$ B) $\frac{Ar}{3}$ C) $\frac{Ar}{2}$
D) Ar E) $\frac{3}{2}Ar$

51. Se tiene un prisma recto cuyas bases son trapecios rectangulares cuyas diagonales son perpendiculares, los lados paralelos miden a y b donde (a<b) además se cumple: $\frac{2}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Si h es la altura del prisma. Halle el volumen del prisma.

A)$(ab)^{1/2}$ B) $(ab)^{1/3}$ C)ab
D)$(ab)^{1/4}$ E) $(ab)^2$

52. Halle el volumen(en u^3) de un prisma oblicuo; si el área lateral, el área de la sección recta y el perimetro de la sección recta mide $200u^2$, $40u^2$ y 4u.

A)1000 B) 1200 C) 1500
D)1800 E) 2000

53. El área lateral de un prisma triangular oblicuo es A , el radio de la circunferencia inscrita en la sección recta mide r . Halle el volumen del prisma.

A) $\frac{Ar}{6}$ B) $\frac{Ar}{3}$ C) $\frac{Ar}{2}$

D) $\frac{Ar\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{Ar\sqrt{6}}{6}$

54. En una piscina de largo a metros, ancho b metros y c metros de alto, se introducen L litros de agua. ¿A qué distancia del borde llega el agua?

A) $\frac{1000abc-L}{1000\,ab}$ B) $\frac{100abc-L}{100\,ab}$

C) $\frac{10abc-L}{10\,ab}$ D) $\frac{10000abc-L}{10000\,ab}$

E) $\frac{abc-1000L}{1000\,ab}$

55. En un tronco de prisma oblicuo, las aristas laterales miden 6u, 8u y 10u. Si el área de la sección recta es Su^2, entonces el volumen (en u^3) del sólido limitado por el tronco de prisma oblicuo es:

A) 6S B) 7S C) 8S
D) 9S E) 12S

56. En un prisma oblicuo ABC–DEF. Tal que la proyección de B sobre la base DEF es F. El ángulo que determinan $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ mide θ. AB=EF , $m\angle BCA=\varnothing$ y FC=a. Halle el volumen del prisma.

A) $\frac{a^3}{4}Cos\theta.Sen2\theta.Sen2\varnothing$

B) $\frac{a^3}{8}Cos\varnothing.Sen2\varnothing.Sen2\theta$

C) $\frac{a^3}{4}Sen\theta.Sen2\varnothing.Cos2\theta$

D) $\frac{a^3}{8}Sen\theta.Sen2\varnothing.Cos2\theta$

E) $\frac{a^3}{2}Cos\theta.Sen2\varnothing.Sen2\theta$

57. Demostrar: Si un tetraedro se proyecta ortogonalmente sobre un plano perpendicular a una de sus aristas, el volumen del sólido limitado por el tetraedro es la tercera parte del producto de la arista perpendicular al plano por el área de la superficie proyectada.

58. En un triángulo ABC se trazan $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ perpendiculares al plano que contiene dicho triángulo y en un mismo semiespacio. Si BN=2(MA) y S es punto medio de $\overline{MC}$, halle la razón de los volúmenes de los poliedros MSBN y ABCM.

A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 2,5

59. En un tronco de paralelepípedo el área de la sección recta es S y las aristas laterales miden a, b, c y d. Halle el volumen del tronco de paralelepípedo.

A) $S(a+b+c+d)$

B) $\frac{S(a+b+c+d)}{2}$

C) $\frac{S(a+b+c+d)}{4}$

D) $\frac{S(a+b+c+d)}{5}$

E) $\frac{S(a+b+c+d)}{6}$

60. El tronco de prisma regular ABCDEF–AGHIJF, AF=a, BG=b. Si la base AGHIJF, es regular. Halle el volumen del tronco.

A) $\frac{3}{2}a^2b\sqrt{3}$ B) $\frac{a^2}{3}b\sqrt{3}$ C) $\frac{4}{3}a^2b\sqrt{3}$

D) $\frac{5}{4}a^2b\sqrt{3}$ E) $\frac{6}{5}a^2b\sqrt{3}$

61. Se tiene un prisma triangular oblicuo ABC–DEF cuya arista lateral mide 12u, M es punto medio de $\overline{FC}$ y $Q \in \overline{BE}$ los volúmenes de los sólidos ABC–DQM y DEF–DQM están en la relación de 3 a 1. Calcule BQ en u.

A) 4 B) 6 C) 8
D) 9 E) 10

62. La base de un tronco de prisma regular es un cuadrado de 3u de lado; las bases forman un ángulo diedro de 45° entre si, y 2 aristas laterales opuestas miden 8u cada una. Halle el volumen del tronco de prisma en u^3.

A) 64 B) 68 C) 70
D) 72 E) 76

63. Se tiene un prisma triangular recto $ABC-A'B'C'$, en las aristas laterales $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$ se ubican los puntos D y E respectivamente, de modo que $\frac{DA'}{DA}=\frac{EC}{EC'}=\frac{1}{2}$. Si M es el punto medio de $\overline{AB}$ y el volumen del prisma es V. Halle que fracción del volumen del sólido limitado por el prisma, comprendido entre el plano ABC y el plano DEM.

A) $\frac{5V}{81}$ B) $\frac{5V}{72}$ C) $\frac{5V}{64}$

D) $\frac{5V}{36}$ E) $\frac{5V}{27}$

64. En un prisma triangular recto ABC–DEF, se cumple : AB=4u, BE=6u y DC=10u. O es punto medio de $\overline{BE}$ y la longitud del segmento que une el punto O, con el centro de la cara ACFD es 5u. Entonces, el área (en u^2) de la región triangular OFA es:

A) $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ C) $15\sqrt{3}$

D) $\frac{35\sqrt{3}}{2}$ E) $10\sqrt{3}$

65. En un prisma de base rectangular $ABCD-A'B'C'D'$, la $m\angle A'AD=60$, la $m\angle A'AB=120$, AB=4u, BC=3u y la arista lateral mide 5u. Halle la distancia de A hacia $\overline{A'C}$.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{3}{2}\sqrt{5}$

D) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{2}$

66. La base de un prisma oblicuo es un triángulo equilátero de lado a y sus aristas laterales miden b . Si una arista lateral y los lados de la base adyacentes a ella forman un ángulo de 45°. Halle el área total del prisma.

67. Dos aristas opuestas de un tetraedro miden a y b , el ángulo entre las aristas mide α y la distancia entre ellas es d . Calcule el volumen.

A) $abd\cos\alpha$ B) $\frac{1}{3}abd\,sen\alpha$

C) $\frac{1}{6}abd\,sen\alpha$ D) $abd\,tg\alpha$

E) $\frac{\sqrt{6}}{3}abd\cos\alpha$

68. En una pirámide cuadrangular regular S–ABCD. El lado de la base AB=6u, la altura mide 4u. Halle la distancia desde el vértice "A" al plano SCD (en u).

A) 4,8 B) 5,0 C) 5,2
D) 5,8 E) 6,0

69. En un prisma oblicuo de base paralelográmico ABCD–EFGH. Si el volumen de la pirámide AEHC es V, halle el volumen del prisma.

A) 2V B) 3V C) 4V
D) 5V E) 6V

70. Las aristas de la base de una pirámide triangular regular miden a cm. Si los diedros laterales miden 90°, halle su volumen en cm^3.

A) $\frac{\sqrt{2}}{24}a^3$ B) $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$ C) $6\sqrt{6}a^3$

D) $\frac{\sqrt{6}}{24}a^3$ E) $\frac{a^3}{8}$

71. La base de una pirámide es un trapecio isósceles en el que sus lados no paralelos y la base menor miden a u respectivamente, en tanto que las

aristas laterales son congruentes y forman con la base 60°. Halle el volumen de la pirámide.

A) $\frac{3}{4}a^3$ B) $\frac{4}{5}a^3$ C) $\frac{3}{5}a^3$
D) $\frac{5}{6}a^3$ E) $\frac{6}{7}a^3$

72. Se ubica el punto M interior al cuadrado ABCD; por M se traza una perpendicular $\overline{ME}$ al plano del cuadrado. Si la suma de los volúmenes de las pirámides E–MAB y E–MCD es igual a V. Halle la suma de los volúmenes de las pirámides E–MAD y E–MBC.

A) $\frac{V}{4}$ B) $\frac{V}{3}$ C) $\frac{V}{2}$
D) V E) $\frac{3}{2}V$

73. En una pirámide de base triangular A–BCD las aristas opuestas BD y AC son perpendiculares entre sí, AB=4, BC=3 y AD=5. Halle CD.

A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$
D) 6 E) $3\sqrt{5}$

74. En una pirámide regular P–ABCD $m\angle APC = 90$ y AD=4. Halle el volumen de la pirámide.

A) $\frac{28}{3}\sqrt{2}$ B) $\frac{31}{3}\sqrt{3}$ C) $\frac{32}{3}\sqrt{2}$
D) $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ E) $\frac{35}{3}\sqrt{3}$

75. La altura de una pirámide triangular regular mide H. El ángulo diedro entre dos caras laterales mide 120°. Halle su volumen.

A) $H^3\sqrt{3}$ B) $2H^3\sqrt{3}$ C) $3H^3\sqrt{3}$
D) $\frac{3}{2}H^3\sqrt{3}$ E) $\frac{H^3\sqrt{3}}{3}$

76. La base de una pirámide regular es una región cuadrada inscrita en una circunferencia de radio R y la medida de los diedros determinados por las caras laterales y la base es 45°; halle el área lateral.

A) $\sqrt{6}R^2$ B) $2\sqrt{2}R^2$ C) $3R^2$
D) $4R^2$ E) $6\sqrt{2}R^2$

77. Dado una pirámide triangular de volumen V u^3, halle el volumen del sólido poliédrico que se forma al unir los puntos medios de los lados de cada cara en u^3.

A) $\frac{V}{6}$ B) $\frac{V}{4}$ C) $\frac{V}{3}$
D) $\frac{V}{2}$ E) $\frac{V\sqrt{3}}{2}$

78. La altura de una pirámide mide 8 cm., halle la distancia del vértice a un plano paralelo a la base que determina dos sólidos equivalentes.

A) $2\sqrt[3]{2}$ B) $\sqrt[3]{12}$ C) 4
D) 6 E) $4\sqrt[3]{4}$

79. Un triángulo equilátero BCE y un cuadrado ABCD están contenidos en planos perpendiculares. Si el segmento que une los puntos medios de $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ es ℓ. Calcule el volumen de la pirámide E–ABCD.

A) $\frac{\ell^3}{6}\sqrt{2}$ B) $\frac{\ell^3}{6}\sqrt{3}$ C) $\frac{\ell^3}{3}\sqrt{2}$
D) $\frac{\ell^3}{6}\sqrt{5}$ E) $\frac{\ell^3}{3}\sqrt{5}$

80. En una pirámide O–ABC, las caras laterales forman un ángulo diedro de 60° con la base triangular ABC. Si AB=13u, BC=15u y AC=14u. Halle el volumen de la pirámide en u^3.

A) $100\sqrt{3}$ B) $112\sqrt{3}$ C) $118\sqrt{3}$
D) $120\sqrt{3}$ E) $130\sqrt{3}$

81. Halle el volumen de la pirámide O–ABC, donde las caras laterales forman diedros de 45° con la base triangular ABC. Si AB=13u, BC=15u y CA=14u.

A) $110u^3$ B) $112u^3$ C) $113u^3$
D) $114u^3$ E) $115u^3$

82. El producto de las diagonales de un octoedro regular es Ku^3, halle el volumen del sólido limitado por el octoedro regular (en u^3).

A) $\frac{K}{9}$ B) $\frac{K}{8}$ C) $\frac{K}{6}$
D) $\frac{K}{3}$ E) $\frac{K}{2}$

83. El volumen de una pirámide triangular es V, halle el volumen de la pirámide cuyos vértices son los baricentros de las caras de la pirámide inicial.

A) $\frac{V}{36}$ B) $\frac{V}{30}$ C) $\frac{V}{27}$
D) $\frac{V}{24}$ E) $\frac{V}{12}$

84. Sea O–ABCD una pirámide regular de base cuadrada, M y N son puntos medios de $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$; el volumen de O–ABCD es V. Halle el volumen del sólido comprendido entre el plano de la base y el plano que contiene a M, N y el centro de la base.

A) $\frac{1}{6}V$ B) $\frac{1}{5}V$ C) $\frac{4}{15}V$
D) $\frac{5}{16}V$ E) $\frac{5}{12}V$

85. En una pirámide regular de base cuadrangular O–ABCD y volumen V se ubican en $\overline{OD}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ los puntos P, Q y S respectivamente. Tal que: PD=2(OP), AQ=2QB y SC=2BS. El plano que pasa por P, Q y S determina una sección. En que relación divide este plano a la pirámide.

A) $\frac{59}{22}$ B) $\frac{61}{22}$ C) $\frac{63}{22}$
D) $\frac{65}{22}$ E) $\frac{67}{22}$

86. En una pirámide O–ABC de volumen V sus aristas OA, OB y OC miden 8, 10 y 13 respectivamente. En la arista OA se ubican M y R tal que OM=1 y OR=3. En OB se ubican P y S tal que OP=3 y OS=4. En $\overline{OC}$ se ubican Q y T tal que OQ=2 y OT=5. Halle el volumen de MPQ–RST.

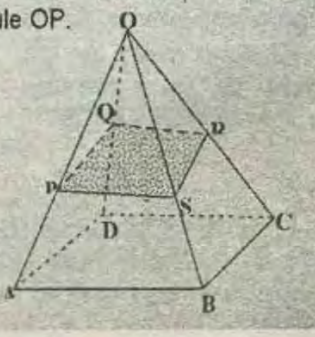
A) $\frac{29}{520}V$ B) $\frac{27}{520}V$ C) $\frac{31}{520}V$
D) $\frac{33}{520}V$ E) $\frac{37}{520}V$

87. Dado una pirámide triangular O–ABC por M $(M \in \overline{OC})$, se trazan planos paralelos a ABC y AOB determinándose dos pirámides parciales de volúmenes V_1 y V_2. Demostrar que: el volumen de OABC, se expresa: $\left(\sqrt[3]{V_1}+\sqrt[3]{V_2}\right)^3$.

88. En una pirámide O–ABC, se ubican los puntos D, E y F sobre $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ respectivamente. Si OD=DA, OE=2EB, FC=2(OF). Si el volumen del sólido limitado por la pirámide O–ABC es de $135u^3$. Halle el volumen limitado por ABC–DEF en u^3.

A) 115 B) 118 C) 120
D) 125 E) 130

89. En la figura O–ABCD es una pirámide regular cuya arista lateral mide 6u. OR=RC, SB=OQ=2u. Calcule OP.



A) 2,4u B) 3,0u C) 3,2u
D) 3,6u E) 4u

90. Un plano P intercepta a la arista $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$ y $\overline{VD}$ de una pirámide regular V–ABCD en los puntos M, N, P y Q respectivamente, de manera que VM=2u, VN=5u, VP=4u. Halle: VQ.

A) $\frac{15}{11}$ B) $\frac{20}{11}$ C) $\frac{23}{11}$
D) $\frac{24}{11}$ E) $\frac{25}{11}$

91. En una pirámide hexagonal regular O–ABCDEF; el ángulo entre una arista lateral y la base mide 60°. Si la distancia entre $\overline{BF}$ y $\overline{OD}$ es $3\sqrt{3}$, halle el área lateral.

A) $18\sqrt{15}$ B) $20\sqrt{15}$ C) $22\sqrt{15}$
D) $24\sqrt{15}$ E) $26\sqrt{15}$

92. En una pirámide triangular, el área de dos caras laterales perpendiculares entre si miden S_1 y S_2 y la arista común mide 6u. Calcule el volumen de la pirámide.

A) $\frac{S_1S_2}{32}$ B) $\frac{S_1S_2}{24}$ C) $\frac{S_1S_2}{16}$
D) $\frac{S_1S_2}{12}$ E) $\frac{S_1S_2}{9}$

93. V–ABCD es una pirámide regular en el cual la distancia de B a $\overline{VD}$ es $4\sqrt{2}$u y las regiones AVC y ABCD son equivalentes. Halle su volumen.

A) $\frac{40}{3}\sqrt{10}u^3$ B) $\frac{20}{3}\sqrt{2}u^3$ C) $20\sqrt{3}u^3$
D) $\frac{40\sqrt{3}}{3}u^3$ E) $\frac{20\sqrt{3}}{3}u^3$

94. En una pirámide regular de base cuadrangular, desde el punto medio de la altura se trazan distancias a una cara y una arista lateral que miden a y b. Halle el área lateral de la pirámide.

A) $\frac{ab^3\sqrt{ab}}{3a^2-b^2}$ B) $\frac{4a^2b^2\sqrt{a^3+b^2}}{(a^2-b^2)ab}$
C) $\frac{4a^2b^2\sqrt{2(a^2+b^2)}}{(a^2-b^2)ab}$ D) $\frac{a^2b^2\sqrt{a+b}}{a^2-b^2}$
E) $\frac{2ab}{\sqrt{3b^2-a^2}}$

95. Se tiene una pirámide hexagonal regular P–ABCDEF. Si todas sus aristas básicas miden L y las laterales 2L, halle el volumen de la pirámide superior determinada por el plano que contiene a la arista básica $\overline{AP}$ y que pasa por el punto medio de la altura de la pirámide original.

A) $\frac{16+3\sqrt{3}}{64}L^3$ B) $\frac{16+3\sqrt{3}}{32}L^3$
C) $\frac{16+\sqrt{3}}{3}L^3$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}L^3$
E) $\frac{\sqrt{67}}{16}L^3$

96. Un cartón tiene la forma de un triángulo isósceles acutángulo cuya base mide 2a y los lados congruentes miden 2b (2a<2b). Es el desarrollo de una pirámide cuya base tiene como vértices los puntos medios de los lados del triángulo. Demostrar que su volumen es igual a:

$$V=\frac{a}{24}\sqrt{(4b^2-a^2)(4b^2-2a^2)}$$

97. En una pirámide regular de base cuadrangular. Las distancias del punto medio de la altura a una cara lateral y a una arista lateral miden b y a respectivamente. Halle el volumen de la pirámide.

A) $\frac{8}{3}\frac{1}{(a^2-b^2)(2b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}$
B) $\frac{16}{3}\frac{1}{(a^2-b^2)(2b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}$
C) $\frac{32}{3}\frac{1}{(a^2-b^2)(2b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}$
D) $\frac{8}{3}\frac{1}{(a^2-b^2)(2a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}$
E) $\frac{16}{3}\frac{1}{(a^2-b^2)(2a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}$

98. En un tronco de pirámide regular de bases cuadradas, la diferencia de las longitudes de los lados de las bases es $\sqrt{6}u$ y las aristas laterales tienen una inclinación de 60° con la base mayor. Halle la longitud de una arista lateral (en u).

A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{6}$

99. En un tronco de pirámide $A'B'C'-ABC$ triangular de bases paralelas los volúmenes de ABCC' y A'B'C'A son V_1 y V_2. Halle el volumen de ABC'B'.

A) $\frac{V_1+V_2}{2}$ B) $\sqrt{V_1V_2}$ C) V_1-V_2
D) $\frac{V_1V_2}{V_1-V_2}$ E) $\frac{V_1V_2}{V_1+V}$

100. En un tronco de pirámide regular ABCD–EFGH se traza un plano secante que contiene los puntos medios M y N de $\overline{EH}$ y $\overline{HG}$ respectivamente, y al vértice A; determinando una sección cuadrangular regular de lado igual a 4u. Halle el volumen del tronco de pirámide (en u^3).

A) $\frac{112}{3}$ B) $\frac{112\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{112\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{113\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{115\sqrt{2}}{2}$

101. En una pirámide regular de base cuadrangular O–ABCD la sección que se obtiene por un plano definido por AOC, tiene un área de $16\sqrt{3}u^2$ y está limitado por un triángulo equilátero. La sección transversal que pasa por el punto medio de una arista lateral determinan los puntos A',B',C' y D' en las aristas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ respectivamente obteniéndose un tronco de pirámide $A'B'C'D'-ABCD$. En dicho tronco se traza un plano secante por los puntos A',C' y el punto medio de la arista $\overline{BC}$ obteniéndose una sección de área:

A) $16u^2$ B) $25u^2$ C) $16\sqrt{3}u^2$
D) $36u^2$ E) $40u^2$

102. En un tronco de pirámide regular de base cuadrangular ABCD–EFGH. $m\angle FHD=45°$. Halle el valor de la razón geométrica entre el área de la región BDHF y el área lateral del tronco.

A) $\frac{\sqrt{3}}{7}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{5}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

CUADRO DE RESPUESTAS

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
B	A	C	A	C	B	D	A	C	B
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
D	C	C	D	B	D	*	*	*	*
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
*	*	*	B	E	A	B	C	*	C
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
D	A	E	E	A	D	D	A	B	B
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
E	B	C	A	C	D	E	*	A	C
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
D	E	C	E	C	A	*	B	C	A
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
D	D	E	A	C	*	C	A	E	A
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
*	D	B	C	B	B	E	E	B	B
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
B	C	C	D	A	B	*	C	A	B
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
D	E	A	*	*	*	*	D	B	C
181	182								
A	B								

SEXTO SEMINARIO CEPREUNI

01 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Tres puntos determinan un plano.
II) Dos rectas cruzadas están contenidos en un plano.
III) La intersección de tres planos pueden ser un punto.

A) FFV B) FVV C) VFV
D) VVF E) FFF

02 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) Dos rectas perpendiculares a una misma recta son paralelas
b) Dos rectas perpendiculares al mismo plano son paralelas
c) La intersección de tres planos es un punto.

A) VFF B) FFF C) VVV
D) FVV E) FVF

03 Si un recta es perpendicular a tres rectas dadas. entonces:

A) Las tres rectas tienen que ser paralelas.
B) Las tres rectas tienen que estar en un mismo plano que contenga a la perpendicular.
C) Por las tres rectas pueden pasar planos paralelos entre sí.
D) Por las tres rectas no pueden pasar planos paralelos entre sí.
E) Las tres rectas son perpendiculares entre sí.

04 Si dos ó mas rectas determinan ángulos congruentes con un plano. entonces es siempre verdad:

A) Las rectas tendrán longitudes congruentes
B) Las rectas sopn paralelas
C) Las rectas son perpendiculares
D) Las rectas no necesariamente son paralelas
E) Las rectas serán paralelas únicamente cuando el ángulo que determinan con el plano mide 90°.

05 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Dos rectas paralelas al mismo plano son paralelas entre sí
II) Por un punto de un plano solo se puede trazar una recta perpendicular al plano
III) Todas las rectas paralelas entre si son coplanares

A) FVF B) FFF C) VVV
D) FVV E) VFF

06 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Dos rectas paralelas a un mismo plano son paralelos entre sí
II) Dos rectas perpendiculares a una tercera recta son necesariamente paralelas entre sí
III) Por una recta cualquiera del espacio se puede trazar un plano perpendicular a otro plano dado.

A) FVV B) VFV C) VVF
D) VVV E) FFV

07 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Dos rectas cruzadas determinan un plano
II) Todos los planos paralelos a un plano dado son paralelos entre sí
III) Por un punto del plano. se puede trazar solo una recta perpendicular al plano

A) VVV B) FFV C) FFF
D) FVV E) VFF

08 En las siguientes proposiciones decir cuales son verdaderos o falsos:

I) Si las proyecciones ortogonales de una figura sobre dos planos perpendiculares son rectas. entonces dicha figura es una recta
II) Si dos planos son perpendiculares a un tercer plano. entonces los dos primeros planos son paralelos
III) Si las medidas de los ángulos entre una recta y dos planos son congruentes. entonces dichos planos son paralelos

A) FFF B) FFV C) FVV
D) VVV E) VVF

09 Dadas las siguientes proposiciones. ¿Cuáles son correctas?

I) Todos los planos paralelos a una recta son paralelos entre si
II) Si la recta $\vec{L}_1$ es paralela al plano P. un plano Q contiene a $\vec{L}_1$ y Q intersecta a P en una recta L_2. entonces $\vec{L}_2$ es paralelo a $\vec{L}_1$
III) Dos rectas perpendiculares a una tercera necesariamente son paralelos

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) I. II y III

10 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) La proyección ortogonal de dos rectas paralelas sobre un plano son 2 rectas paralelas
II) La proyección ortogonal de 2 rectas perpendiculares sobre un plano forman un ángulo agudo
III) La proyección ortogonal de 2 rectas cruzadas sobre un plano son dos rectas paralelas

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FFF E) FVV

11 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I) Sean una recta y un plano; si la recta es paralela a una recta del plano. entonces la recta es paralela al plano
II) Sean dos rectas cruzadas. por todo punto exterior a dichas rectas se traza un plano paralelo a las rectas dadas
III) Si dos planos tienen un punto común. entonces tienen una recta común

A) VVV B) VFV C) FFF
D) FVF E) FFV

12 Si un plano es paralelo a una línea recta. Entonces es verdad que:

A) Toda recta paralela al plano será paralela a la recta dada
B) Todo plano perpendicular al plano dado será paralelo a la recta dada
C) Toda recta que es perpendicular al plano tendrá que ser perpendicular a la recta
D) Toca recta perpendicular a la recta dada será paralela al plano
E) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta

13 Sea L una recta de un plano P; O un punto exterior al plano; se une O con un punto A de $\vec{L}$ y se traza por O el plano Q perpendicular a $\overline{OA}$. Demuestre que las rectas de intersección de los plano Q y P. cuando A se desplaza en $\vec{L}$. pasan por un punto fijo.

14 Dados dos puntos fijos A y B; sea K un valor dado. Halle el lugar geométrico de los puntos M del espacio tales que : $MA^2-MB^2=K^2$

15 Calcule el número máximo de plano que se pueden determinar con 10 puntos en el espacio. tal que 3 puntos no son colineales

A) 120 B) 45 C) 55
D) 240 E) 60

16 Desde un punto exterior A se trazan 3 rectas secantes a un plano P en G. B y F en cada una de las rectas se ubican los puntos W. D y E respectivamente. de manera que AF=FE. AB=BD=BE=EG. WE=DE halle la m $\angle$ GFA

A) 60° B) 72° C) 81°
D) 90° E) 110°

17 Dos rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se cruzan determinando un ángulo que mide 60°. Si AC es la mínima distancia. y la $m\angle ABC=45°$. $m\angle ADC=30°$ y $BD=6\sqrt{5-\sqrt{3}}$ m. Calcule AC. (en m)

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

18 $\overline{AB}$ y $\overline{PR}$ se cruzan en el espacio. AP=9 cm y BR=6 cm respectivamente. Halle la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{PR}$ sabiendo que es el mayor entero posible (en cm)

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E)10

19 Se tienen las rectas cruzadas $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$. AB es la menor distancia entre dichas rectas (A pertenece a $\vec{L}_1$ y B pertenece a $\vec{L}_2$). se toman los puntos en C en $\vec{L}_1$ de manera que: $m\angle CDB=90°$. AC=2BD. Halle la medida del ángulo que determinan $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$.

A) 30 B)60 C) 90
D) 45 E) 15

20 El triángulo equilátero ABC está contenido en un plano perpendicular a la región cuadrada ABEF. Halle la medida del ángulo determinado por $\overline{CF}$ y $\overline{AE}$.

A) 120° B) 135° C) Arc cos $\left(-\frac{1}{3}\right)$

D) Arc cos $\left(-\frac{1}{4}\right)$ E) Arc cos $\left(-\frac{2}{5}\right)$

21 Dos segmentos AB y CD se cruzan y son ortogonales. demuestre que:
$CA^2-CB^2=DA^2-DB^2$

22 En un tetraedro regular. halle la medida del ángulo que determinan una altura del tetraedro y una altura de una de sus caras si estas se cruzan.

A) Ar cos $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ B)Arc cos $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

C) Arc cos $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ D)60

E) 45

23 ABCD y ABEF son regiones rectangulares donde AB=b=BE. BC=a. La proyectante de E sobre el plano P que contiene a ABCD mide $\frac{b\sqrt{3}}{2}$. si $2a^2+\frac{5}{2}b^2-ab=50$. halle la distancia de D al punto medio de $\overline{BE}$.

A) 6 B) 5 C) 4
D) 3 E) 7

24 Cuales son verdaderos o falsos.

I) Si una recta es perpendicular a dos rectas contenidas en un plano. dicha recta es perpendicular al plano.
II) Dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelos
III) Dos rectas cruzadas pueden estar contenidas en dos planos paralelos

A) FFF B) FFV C) FVV
D) VVV E) VVF

25 Demuestre que por un punto dado pasa un plano y solo uno. perpendicular a una recta dada.

26 Una circunferencia de centro O esta contenida en un plano P. se inscribe en la circunferencia un triángulo rectángulo ABC. por B se traza $\overline{BF}\perp P$. Si AB= 6. BC=8. BF=AC y O es el centro de la circunferencia. entonces OF es:

A) $5\sqrt{5}$ B) $5\sqrt{7}$ C) $5\sqrt{3}$

D) $5\sqrt{7}$ E) $5\sqrt{8}$

27 Se traza $\overline{HQ}$ perpendicular al plano del triángulo ABH de modo que
$m\angle BQH=m\angle BAH$. $m\angle AHB=90°$.
$m\angle QAH=45°$
$m\angle AQB+m\angle QAB=120°$. Calcule la $m\angle AQB$

A) 45° B) 50° C) 55°
D) 60° E) 72°

28 Una recta $\vec{L}$ es perpendicular a un plano $\vec{P}$. Se proyecta ortogonalmente un segmento AB sobre la recta L y sobre dicho plano P. Si las longitudes de las proyecciones miden a y b recpectivamente. Calcule AB

A) $\sqrt{a^2+b^2+ab}$ B) $\sqrt{a^2+b^2+-ab}$

C) $\sqrt{a^2+b^2}$ D) $\frac{a+b}{2}$

E) $\sqrt{ab}$

29 En un plano se tiene una circunferencia de centro O y diámetro AB. se trata $\overline{AQ}$. si PQ=7u. Calcule la longitud de $\overline{QB}$ (en u).

A) $\sqrt{45}$ B) $\sqrt{55}$ C) $\sqrt{65}$
D) 8 E) 9

30 Si por el vértice A de un triángulo ABC se traza una perpendicular $\overline{AD}$ al plano del triángulo. luego por el vértice A se traza las perpendiculares $\overline{AM}$ y $\overline{BD}$ y $\overline{AN}$ a $\overline{CD}$. entonces el cuadrilátero BMNC es

A) Equiángulo B)Circunscriptible
C) Inscriptible D)Un trapecio
E) Un trapezoide

31 Por el incentro I de un triángulo rectángulo se traza una perpendicular al plano del triángulo. en la cual se toma un punto P. tal que PI= 2. Halle la distancia desde el punto P a la hipotenusa. si los catetos miden 3 y 4 .

A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{8}$

32 Sea la circunferencia C de diámetro AB. Por A se traza $\overline{AE}$ perpendicular al plano C. Si $P\in C$ y $AE^2+BP^2=16$. halle la distancia del centro de C al punto medio de $\overline{EP}$.

A) 3 B) 2 C) 1.5
D) 2.5 E) 1.8

33 Por el vértice A de un triángulo equilátero ABC de u^2 de área. se levanta una perpendicular $\overline{AP}$ al plano del triángulo. Si $AP=\frac{AB}{2}$ y $M\in\overline{AB}/AM=MB$; calcule el área de la región triangular PMC (en u^2).

A) $\frac{5}{2}S$ B) $\frac{5\sqrt{3}}{2}S$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}S$

D) $\frac{\sqrt{3}}{3}S$ E) $\frac{3}{4}S$

34 Por el vértice K del triángulo KLM se traza $\overline{KN}$ perpendicular al plano de KLM. luego se traza $\overline{KQ}\perp\overline{NM}$. Si NP=a. MQ=b y NQ=c. calcule PL.

A) $\frac{c(b+c)-a^2}{a}$ B) $\frac{c(b+c)-b^2}{a}$

C) $\frac{c(b+c)-c^2}{a}$ D) $\frac{b(a+c)-a^2}{a}$

E) $\frac{a(b+c)-a^2}{a}$

35 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Una recta perpendicular a otra recta contenida en un plano, también es perpendicular a dicho plano.

II) La intersección de dos planos perpendiculares, paralelo a una recta determinan un plano perpendicular a los dos planos anteriores.

III) Tres rectas paralelas pueden determinar un plano

A) FFV B) FVV C) FVF
D) VVV E) FFF

36 Demostrar que si 2 planos son perpendiculares, entonces toda recta situada en uno de ellos y perpendicular a su intersección, es perpendiculares a su intersección, es perpendicular al otro plano.

37 Se tiene dos regiones cuadradas ABCD y ABEF contenidos en planos perpendiculares. AB=L. M es punto medio de $\overline{FE}$. halle la longitud del segmento $\overline{MC}$.

A) $\frac{3}{2}L$ B) $\frac{3}{4}L$ C) $\frac{2}{3}L$
D) $\frac{2}{5}L$ E) $\frac{3}{5}L$

38 ABC es un triángulo recto en A. $\overline{EA} \perp$ ABC. P es un plano que contiene a $\overline{AB}$. $\overline{EC} \perp P$. D es un punto de P y del plano que contiene a CAE tal que EB=BD=BC. Si EC= 15m. Halle la distancia de D a $\overline{AC}$ (en m)

A) 6 B) 6.5 C) 7
D) 7.5 E) 8

39 En una circunferencia de centro O y radio 4 se tiene al arco AB cuya medida es 60°. se traza $\overline{OE}$ perpendicular al plano de la circunferencia tal que OE=4. Calcule la distancia $\overline{AE}$ y $\overline{OB}$.

A) $\frac{4}{7}\sqrt{21}$ B) $\frac{2}{7}\sqrt{7}$ C) $\frac{3}{7}\sqrt{21}$
D) $\frac{3}{7}\sqrt{7}$ E) $\sqrt{7}$

40 En un triángulo ABC. la m∠B= 90°. AB=6u y BC= 8u. Por su incentro I se traza $\overline{IH}$ perpendicular al plano ABC. Si IH= 3u. Calcule HC (en u).

A) 6 B) 7 C) 8
D) 10 E) 12

41 ABC y CFED son regiones cuadradas contenidos en planos perpendiculares. M punto medio de $\overline{EF}$ y N punto medio de $\overline{BM}$. Si AB= 2a entonces $\overline{DN}$ mide:

A) $\frac{\sqrt{19}}{2}a$ B) $\frac{\sqrt{17}}{2}a$
C) $\frac{\sqrt{15}}{2}a$ D) $\frac{\sqrt{13}}{2}a$
E) $\frac{\sqrt{11}}{2}a$

42 Se tiene un cuadrado de centro O y un triángulo equilátero BCE. ubicados en planos perpendiculares. Halle la longitud de $\overline{OM}$ si M es punto medio de $\overline{CE}$ y AB= 4

A) $\sqrt{2}$ B) 3 C) 2
D) $3\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

43 Un cuadrado ABCD y un triángulo rectángulo APB están contenidos en dos planos perpendiculares. Halle la distancia entre el vértice D y el baricentro del triángulo APB; si se sabe que: AP= 3 y BP=4

A) $\frac{17}{3}$ B) $\frac{16}{3}$ C) $\frac{\sqrt{277}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{276}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{275}}{3}$

44 Si dos planos son perpendiculares. entonces:

A) Toda recta perpendicular a la intersección de ambas debe estar contenida en una de ellos
B) Todas las rectas de una de ellas son perpendiculares al otro
C) Todo plano perpendicular a uno de ellos es perpendicular también al otro plano
D) No siempre se intersectan
E) Todo plano perpendicular a su intersección es perpendicular a ambos planos

45 Dos regiones cuadradas están contenidos en planos perpendiculares: ABCD y ABEF. Halle la medida de ángulo que determinan las rectas $\overline{AC}$ y $\overline{BF}$

A) 45° B) 120° C) 90°
D) 120° E) 135°

46 Dados 2 planos P y Q perpendiculares entre si. una recta intersecta a los planos P y Q en los puntos A y B respectivamente. Si AB= K. m∠($\overline{AB}$. P)=30°. m∠($\overline{AB}$. Q)=45°. Halle la distancia entre $\overline{AB}$ y la recta de intersección de los planos.

A) K B) $\frac{3K}{2}$ C) $\frac{K}{2}$
D) $\frac{K}{2}\sqrt{3}$ E) $\frac{K}{6}\sqrt{6}$

47 Las regiones rectangulares ABCD y ABMN determinan un dietro que mide 120°. Si 2BM=AB=2BC=2a. Halle la distancia de D al punto medio de $\overline{MN}$.

A) a B) $\frac{3a}{2}$ C) 2a
D) $\sqrt{3a}$ E) $\frac{5}{2}a$

48 Dado un hexágono regular ABCDEF de y de centro al punto O y AB= 4. Se traza $\overline{OS}$ perpendicular al plano del hexágono. de modo que el diedro S – $\overline{AB}$ – O mide 60°. Halle la distancia del punto O al plano ABS.

A) 4 B) 3 C) 5
D) 2 E) 1

49 ABCD y ABEF son regiones rectangulares. contenidos en los planos P y Q respectivamente. F' es un punto en la prolongación de $\overline{DA}$ tal que $\overline{F'C} \cap \overline{AB} = \{W\}$. WC=EC= 25u. EW=14u. si la distancia de C al plano Q es 4u. halle la medida del ángulo diedro determinado por el plano Q y el plano que contiene a F'CE.

A) Arc sen $\frac{1}{6}$ B) Arc sen $\frac{1}{7}$
C) Arc sen $\frac{1}{8}$ D) Arc sen $\frac{1}{9}$
E) Arc sen $\frac{1}{3}$

50 Se tiene dos regiones cuadradas ABCD y ABEF formando un ángulo diedro que mide 120°. La proyección de F sobre el plano ABCD es F'. Halle el área de la región triangular obtenida al intersectar el ángulo diedro con la región triangular FF'C. si AB=L.

A) $\frac{\sqrt{39}}{12}L^2$ B $\frac{\sqrt{40}}{12}L^2$ C) $\frac{\sqrt{35}}{11}L^2$
D) $\frac{\sqrt{27}}{10}L^2$ E) $\frac{\sqrt{10}}{2}L^2$

51 Un cuadrado ABCD de lado a y un triángulo aquilátero ABF forman un ángulo diedro AB recto. Calcule la longitud del segmento que une el baricentro del triángulo ABF y el punto medio de AD.

A) $\frac{a\sqrt{21}}{6}$ B) $\frac{a\sqrt{21}}{3}$ C) $\frac{a\sqrt{21}}{2}$

D) $a\sqrt{21}$ E) $2a\sqrt{21}$

52 Desde un punto O exterior a un plano P. se trazan rayos. que intersecan a P en $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tal que $A_1A_2A_3\ldots A_n$ es un polígono convexo: demuetre que si los diedros de aristas $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ son congruentes. entonces el poligono $A_1A_2A_3\ldots A_n$ es circunscriptible.

53 ABCDEF es un hexágono regular contenido en un plano P. Se traza $\overline{AH}$ perpendicular al plano. tal que los planos HBC y P formen un diedro que mide 45°. Si el área de la región triangular AHF es 8 cm^2. Calcule (en cm^2) el área de la región triangular HBC.

A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) 8

D) $8\sqrt{2}$ E) 16

54 Se tiene un triángulo ABC recto en B. contenido en un plano P. se ubica E un punto exterior a dicho plano tal que EA=EB=EC. si la distancia de E al plano P es 49 y AB= 14. Halle la medida del ángulo diedro (BC).

A) Arc tg 5 B)Arc tg 7 C) Arc tg10
D) Arc tg 11 E) Arc tg 13

55 Un plano P. contiene el lado AB de una región cuadrangular ABCD. El área de la región cuadrangular es 24 u^2. El diedro que forma el plano P mide 60°. Halle el área (en u^2) de la proyección de la región cuadrangular sobre el plano P.

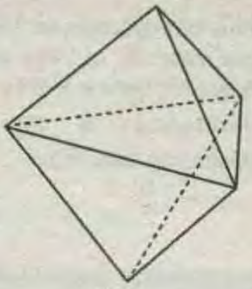
A) 12 B) 8 C) 16
D) 18 E) 20

56 ABCD–EFGH es un cubo de artista ℓ. si M y N son centros de las caras EFGH y ABCD. entonces la medida del ángulo diedro MABN es:

A) 45 B) $\frac{37}{2}$ C) $\frac{127}{2}$

D) 37 E) 53

57 En el siguiente poliedro ¿ Cuántos ángulos poliedros tiene?



A) 1 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

58 Dado un triedro O–ABC y un rayo interior $\overrightarrow{OX}$. Demuestre que:

$m\measuredangle XOB+m\measuredangle XOC<m<AOB+mAOC$

59 Por un punto exterior P a un plano se traza 4 rectas secantes que ABCD sea un rectángulo y PA=AB=PB=PC. halle el valor máximo entero de $m\measuredangle PBC+m\measuredangle PCD$

A) 61° B) 81° C) 89°
D) 291° E) 179°

60 Dado un ángulo poliedro O–ABCDE. las medidas de cada una de las caras es 60°. Halle la medida del diedro OA.

A) 45° B) 53° C) 60°

D) Arc cos $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ E)Arc cos $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

61 En todo ángulo triedro. la suma de las medidas de sus ángulos diedros es:

A) Menor de 360° y mayor de 180°
B) Menor de 360° y mayor de 90°
C) Menor de 540° y mayor de 270°
D) Menor de 270° y mayor de 90°
E) Menor de 540° y mayor de 180°

62 En ángulo triedro polar o suplementario de un ángulo trirrectángular es:

A) Un ángulo triedro trirrectángulo
B) Un ángulo triedro birrectángulo
C) Un ángulo triedro rectángulo
D) Un ángulo triedro cualquiera
E) Un ángulo triedro equilátero

63 En un tetraedro O–ABC. OA=BC. OB=AC y OC=AB. Además se cumple máximo y mínimo entero de la cara AOC.

A) 90° B) 100° C) 120°
D) 150° E) 160°

64 Se tiene un cuadrado ABCD. desde el punto medio M de $\overline{BC}$ se levanta una perpendicular $\overline{MP}$ de modo que el triángulo PBC es equilátero. Halle la suma de las medidas de las caras del ángulo tetraedro PABC.

A) $150°+\text{arc cos}\frac{3}{4}$ B)187° C)204°

D) 200° E) 210°

65 Dos caras de un triedro miden 80° y 118° respectivamente. Halle los valores enteros. mínimos de la medida de la tercera cara.

A) 40°. 161° B) 60°. 161° C)30°. 161°
D) 28°. 161° E) 39°. 161°

66 En un triedro O–ABC. los diedros $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ miden 164°. Halle la medida del diedro $\overline{OA}$. si su medida es menor a 150° y es entero.

A) 145° B) 130° C) 140°
D) 149° E) 148°

67 ABC es un triángulo equilátero y BDC un triángulo rectángulo contenidos en planos perpendiculares. AC=8. DC=4. Determine la medida de la cara ADC en el triedro D–BAC.

A) Arc cos $\left(\frac{1}{2}\right)$ B)Arc cos $\left(\frac{1}{3}\right)$

C) Arc cos $\left(\frac{1}{4}\right)$ D)Arc cos $\left(\frac{1}{4}\right)$

E) Arc cos $\left(\frac{1}{6}\right)$

68 En un triedro O–ABC. los ángulos diedros $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ miden 135° y la cara opuesta a la arista $\overline{OA}$ mide 90°.

Calcule la medida del diedro $\overline{OA}$.

A) 90° B) 100° C) 115°
D) 120° E) 135°

69 Dados los triángulos ABC y ABD. no situados en un mismo plano. demostrar que:

$m\measuredangle CAD+m\measuredangle CBD+m\measuredangle ACB+m\measuredangle ADB=360°$

70 Se tiene un ángulo triedro isósceles O–ABC. Las caras miden:

$m\measuredangle AOB=m\measuredangle AOC=45°$.

$m\measuredangle BOC=60°$ y OA=8. Halle la longitud de la proyección de OA sobre la cara BOC.

A) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ B) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ C) $3\sqrt{6}$

D) $2\sqrt{6}$ E) $\sqrt{6}$

71 Se tiene un ángulo triedro equilátero cuyas

caras miden 45°. entonces la medida de uno de sus ángulos diedros es:

A) Arc cos $\sqrt{2}$ B)Arc cos $(\sqrt{2}-1)$

C) Arc cos $(\sqrt{2}+1)$ D)Arc cos $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

E) Arc cos $\left(\frac{1}{2}\right)$

72 En un triedro. cada arista se traza un plano perpendicular a la cara opuesta. Demuestre que los tres planos tienen una recta común.

73 Si en un triedro O–ABC. el diedro A mide 90° y las caras b=c=45°. entonces la cara a es:

A) 15° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 75°

74 Si las caras de un triedro O–ABC miden: a=b=45°. c=60°. Calcule la medida del diedro en la arista (OA).

A) 60° B)Arc cos $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

C) Arc cos $\left(\frac{2}{3}\right)$ D)Arc cos $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

E) Arc cos $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

75 Los diedros OA y OB del triedro O–ABC miden 60 c/u y la cara AOB mide 90°. Calcule la medida del diedro OC.

A) Arc cos $\left(-\frac{1}{4}\right)$ B)Arc cos $\left(-\frac{1}{3}\right)$

C) 120 D)Arc cos $\left(\frac{1}{4}\right)$

E) Arc cos $\left(\frac{1}{3}\right)$

76 En un triedro O–ABC. m ∡ BOC=90°. m ∡ AOB=m ∡ AOC=60°. Halle la medida del ángulo que forman la recta $\overline{OA}$ con el plano OBC.

A) 15° B) 20° C) 25°
D) 30° E) 45°

77 Se traza un plano secante a un ángulo triedro V–ABC cuyas medidas de sus caras son 60°. 60° y 30°. a VA. VB. VC en M. Q y P respectivamente. de manera que MP=MQ. la proyección de $\overline{VM}$ sobre la cara que mide 30° es VH y mide 8. los planos que contiene a MPH y MQH son perpendiculares a $\overline{VC}$ y $\overline{VB}$ respectivamente. halle PQ.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

78 Se tiene un ángulo triedro O–ABC tal que c=b=90° y a=60°. Halle la suma de las medidas de los ángulos diedros OC y OB.

A) 120° B) 60° C) 100°
D) 150° E) 180°

79 Un plano secante a las aristas de un triedro equilátero de vértice S determina en sus aristas los puntos A. B. y C tal que SA=SB=SC. Si los planos SAB y ABC forman un ángulo diedro que mide 45°. Halle la medida del ángulo que forma la recta $\overline{SC}$ y el plano ABC.

A) $\text{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ B) $\text{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ C) 30°
D) 37° E) 45°

80 Demostrar que en todo tetraedro regular. al unir el punto medio de una de sus alturas con los vértices de donde se traza la altura. se determina un triedro trirrectángulo.

81 Se tiene el triedro V–ABC trirrectángulo. se toma M punto medio de $\overline{AC}$. Si AB=9. BC=13 y AC=10. halla la m ∡ VMB.

A) 130° B) 45° C) 53°
D) 90° E) 75°

82 Si se tiene el triedro trirrectángulo O–ABC. demostrar que:

$S^2_{ABC} = S^2_{AOC} + S^2_{BOC} + S^2_{AOB}$. donde S es el área de la región limitada en cada cara.

83 Un poliedro convexo esta formado por 2 caras hexágonales. 4 caras cuadrangulares y 10 caras triangulares. si A es el número de aristas y V el número de vértices calcule $\frac{A}{V}$.

A) $\frac{32}{9}$ B) $\frac{26}{5}$ C) $\frac{29}{15}$

D) $\frac{33}{12}$ E) $\frac{35}{9}$

84 Calcule el número de caras de un poliedro convexo. sabiendo que la suma de las medidas de los ángulos internos de todas sus caras es 10800° y la suma entre el número de caras. de vértices y de aristas es 90.

A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

85 En un poliedro convexo. el número de caras. más el número de vértices y más el número de aristas es 28. Si las medidas de los ángulos de todas las caras suman 1800°. Halle el número de caras.

A) 7 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

86 Las suma de las medidas de los ángulos internos de las caras de un poliedro convexo de V vértices. C caras y A aristas es igual a:

A) 360(A – C) B) 360(A – 2)
C) 360(V – C) D) 360(C A)
E) 360(A – V)

87 La suma de todas las medidas. los ángulos de las caras de un prisma es 20880°. entonces su número de aristas es:

A) 62 B) 70 C) 80
D) 86 E) 90

88 Si un poliedro convexo tiene 5 caras. entonces el número de vértices que puede tener es:

A) 4 6 5 B) 5 6 6 C) 6 6 7
D) 7 6 8 E) 9 6 10

89 Dado un tetraedro ABCD. demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias de un punto a los vértices. es mínima. para el punto medio del segmento que une los puntos medios de dos aristas opuestas.

90 En un tetraedro O–MNP. trirrectángulo en O. Si las áreas de las regiones MON. NOP y MOP son respectivamente A. B y C. Halle la distancia trazada de O a la cara MNP.

91 Se tiene un hexaedro cuyas caras triangulares son regulares. Halle el poliedro que se forman al unir los puntos medios de todas sus aristas.

A) Nonaedro
B) Poliedro de 10 caras
C) Poliedro de 13 caras
D) Poliedro de 14 caras
E) Pentadecaedro

92 ABCDEF es un poliedro de 6 caras y en donde sus aristas cumplen las siguientes condiciones: FE=FB. $\overline{FA} \perp \overline{AB}$. $\overline{FA} \perp \overline{AE}$. FD=FC. $\overline{BA} \perp \overline{EA}$. $\overline{CB} \perp \overline{AB}$. $\overline{DE} \perp \overline{AE}$. calcule la

m∠BED.
A) 15° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 72°

93 Sea un prisma pentagonal regular $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son aristas básicas y laterales respectivamente. Si AB=a. BC=2(AB) entonces determine la longitud de la mayor diagonal que se puede trazar en el prisma.

A) $\frac{a}{2}\sqrt{20+2\sqrt{5}}$ B) $\frac{a}{2}\sqrt{22+2\sqrt{5}}$
C) $\frac{a}{2}\sqrt{24+2\sqrt{5}}$ D) $\frac{a}{2}\sqrt{26+2\sqrt{5}}$
E) $\frac{a}{2}\sqrt{28+2\sqrt{5}}$

94 Cuales son verdaderos o falsos:

I. El tetraedro regular tiene 6 planos de simetría y 3 ejes de simetría.
II. El hexaedro regular tiene 9 planos de simetría. 9 ejes de simetría y 1 centro de simetría.
III. El octeto regular tiene 9 planos de simetría. 9 ejes de simetría y 1 centro de simetría.

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFF E) FFV

95 ¿Cuántos planos de simetría tiene un tetraedro regular?
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

96 Determine la medida del menor ángulo formado por los ejes de simetría de un hexaedro regular.

A) 45° B) Arccos$\left(\frac{3}{4}\right)$ C) 37°
D) Arc cos$\left(\frac{1}{2}\right)$ E) 30°

97 En un cuadrado ABCD. AB=6. se ubica M punto medio de $\overline{CD}$ y se dibuja un cuadrado AB'C'D' simétrico del primero con relación a $\overline{AM}$. Halle DD'.

A) 5 B) $2\sqrt{5}$ C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
D) $3\sqrt{5}$ E) $\frac{16\sqrt{5}}{5}$

98 Halle el área de la región limitada por la sección hecha en un tetraedro regular de 10 cm de arista por un plano de simetría que pasa por una de sus aristas (en cm^2).

A) 15 B) $15\sqrt{2}$ C) 20
D) 25 E) $25\sqrt{2}$

99 Un tetraedro regular ABCD tiene su cara BCD contenido en un plano Q. A'B'CD es el tetraedro simétrico con respecto a un plano P perpendicular a Q. si la arista de los tetraedros miden a. Calcule AB'.

A) $a\sqrt{2}$ B) $a\sqrt{3}$ C) $\frac{3}{2}a$
D) 2a E) $\frac{3}{4}a$

100 En el cubo ABCD–EFGH ¿Qué arista es el simétrico de la arista AE con respecto al plano BDHF?

A) $\overline{BF}$ B) $\overline{DH}$ C) $\overline{CG}$
D) $\overline{EF}$ E) $\overline{EG}$

101 Sean F' y F'' dos figuras simétricas de una figura F respecto de: un plano y de una recta perpendicular al plano respectivamente. Demostrar que F' y F'' son figuras simétricas respecto de un punto.

102 ABCE y EB'C'A' son poliedros simétricos respecto a un plano P de manera que $\overline{BC}$ // P. AEC ⊥ P. si BB' + CC' + AA' = 12u. halle la distancia entre los baricentros de los triángulos ABC y A'B'C' (en u).
A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

103 Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Todo paralelepípedo tiene centro de simetría.
II. No existe figura geométrica que tenga más de 3 centros de simetría.
III. Todo poliedro regular tiene centro de simetría.

A) VVF B) FFF C) FVF
D) VFV E) VFF

104 Sobre una mesa horizontal se encuentra un espejo vertical y frente a el un tetraedro regular O–ABC con una cara (ABC) sobre la mesa y una arista BC paralela a la intersección del espejo con la mesa. Si la imagen del sólido es O'–A'B'C' y AB= ℓ. si la distancia entre $\overline{B'C'}$ y $\overline{BC}$: calcule OB' $3\ell\sqrt{3}$ y OO'>AA'.

A) $3\ell\sqrt{3}$ B) 5ℓ C) $4\ell\sqrt{3}$
D) 6ℓ E) $\frac{9}{2}\ell$

105 Sea M el punto medio de la arista AB del tetraedro regular ABCD. Si el simétrico de M respecto a su eje es simetría que pasa por $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$. es M'. Si la arista del tetraedro mide a. Halle BM?

A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ E) a

106 En un tetraedro regular. halle la medida del ángulo diedro obtuso determinado por dos de sus planos de simetría.
A) 120° B) 90° C) 100°
D) 60° E) 75°

107 Un tetraedro regular se proyecta sobre un plano perpendicular a una arista. Si la longitud de la arista del tetraedro es L; calcule el área de dicha proyección.

A) $\frac{L^2\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{L^2\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{L^2\sqrt{2}}{6}$
D) $\frac{L^2\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{L^2\sqrt{6}}{2}$

108 Al unir los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular. se determina un:
A) Tetraedro regular
B) Hexaedro regular
C) Octaedro regular
D) Dodecaedro regular
E) Una región cuadrada

109 Si la arista de un tetraedro regular es ℓ. entonces la distancia entre dos de sus aristas opuestas es:

A) $\frac{\ell\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{\ell\sqrt{2}}{4}$ C) $2\ell\sqrt{2}$
D) $\ell\sqrt{2}$ E) $\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$

110 Sea el tetraedro regular O–ABC de arista a por los vértices A.B y C se trazan paralelas a sus mismos lados formándose el triángulo MNQ que al unirse con O se forma el tetraedro O–MNQ. calcule el área total.

A) $3a^2$ B) $a^2(3+\sqrt{3})$ C) $4a^2$
D) $a^2(4+\sqrt{3})$ E) $a^2(5+\sqrt{3})$

111 En un tetraedro regular P–ABC. se traza la altura $\overline{PH}$. en la cual se ubica el punto Q tal que QB=QP. AB=12. Halle: QC –

QH.

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $3\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

112 En un tetraedro regular ABCD de 4u de arista. M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Halle la mínima distancia entre $\overline{MN}$ y $\overline{CD}$ (en u).

A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{6}$ E) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

113 ABCD es un tetraedro regular M es el punto medio de la arista $\overline{DB}$ y O es el centro de la cara ABC. si OA=4m. entonces la longitud de $\overline{OM}$ (en m) es:

A) $5\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

114 Dado un cubo ABCD–EFGR. Si P y Q son puntos medios de los lados AB y CD. indique el polígono que se determina cuando es intersecado por el plano (P. Q. R).

A) triangular B)cuadrangular
C) pentagonal D) hexagonal
E) heptagonal

115 En un cubo ABCD – EFGH de arista ℓ se ubican los puntos medios N y M en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. calcule la distancia de N a $\overline{HM}$

A) $\frac{\sqrt{66}\ell}{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}\ell}{2}$ C) $\frac{\ell}{6}\sqrt{17}$
D) $\frac{\ell}{4}$ E) $\ell\sqrt{2}$

116 Si ABCD – EFGH es un cubo de arista ℓ. entonces la longitud de menor camino para ir de A a G recorriendo la superficie cúbica es:

A) $\frac{5\ell\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{3\ell\sqrt{5}}{4}$ C) $\frac{3\ell\sqrt{5}}{2}$
D) $\ell\sqrt{5}$ E) $2\ell\sqrt{5}$

117 En un hexaedro regular ABCD–EFGH. se ubican los puntos medios M y N de las aristas AD y FG respectivamente. Halle la medida del ángulo que determinan $\overline{MN}$ y $\overline{EF}$

A) 45 B) 60 C) 30
D) 45 E) 90

118 Se tienen 27 cubitos de arista igual a 1u. con ellos se forma un cubo mayor que es pintado exteriormente en forma total. Al desarmar el cubo. Halle el área que ha quedado sin pintar en todos los cubitos.

A) 108 B)110 C) 96
D) 115 E) 105

119 En un hexaedro regular ABCD–EFGH. en la arista BF se ubica el punto T. Si AB=10m. TB=8m. Halle la longitud del camino más corto partiendo de A hasta llegar al punto T recorriendo 3 caras verticales del poliedro (en m).

A) 31 B) $2\sqrt{241}$ C) $10\sqrt{10}$
D) $11\sqrt{10}$ E) $2\sqrt{257}$

120 En el hexaedro regular ABCD–A'B'C'D' de arista ℓ. calcule la distancia del centro de la cara ADD'A a punto de trisección de la diagonal $\overline{BC'}$ en la cara opuesta.

A) ℓ B) $\ell\frac{\sqrt{19}}{18}$ C) $\ell\frac{\sqrt{18}}{19}$

121 Al unir los puntos medios de las aristas de un octaedro regular se determina un poliedro de ..... caras.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 14 E) 16

122 En un dodecaedro regular de caras adyacentes ABCDN y ABEFG. Halle la medida del ángulo que determinan las rectas AD y GF.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 90° E) 120°

CUADRO DE RESPUESTAS

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
E	E	A	D	A	E	D	A	B	D
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	C	*	*	A	*	C	B	B	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
*	B	B	C	*	A	D	C	C	C
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	B	C	A	A	*	A	D	A	B
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	E	C	E	D	E	C	B	A	A
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A	*	D	B	A	C	D	*	*	*
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
*	4	D	A	E	D	C	D	*	B
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
B	*	D	D	A	E	D	E	B	*
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
D	*	C	C	B	A	E	B	*	*
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
B	C	B	A	E	D	C	E	A	C
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
*	C	A	*	A	A	B	C	E	B
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
B	*	D	B	C	D	A	A	B	B
121	122								
E	D								

LA GEOMETRIA

La geometría es una de las más antiguas ciencias. Inicialmente, constituía un cuerpo de conocimientos prácticos en relación con las longitudes, áreas y volúmenes. En el Antiguo Egipto estaba muy desarrollada, según los textos de Heródoto, Estrabón y Diodoro Sículo. Euclides, en el siglo III a. C. configuró la geometría en forma axiomática, tratamiento que estableció una norma a seguir durante muchos siglos: la geometría euclidiana descrita en «Los Elementos».

El estudio de la astronomía y la cartografía, tratando de determinar las posiciones de estrellas y planetas en la esfera celeste, sirvió como importante fuente de resolución de problemas geométricos durante más de un milenio. René Descartes desarrolló simultáneamente el álgebra y la geometría, marcando una nueva etapa, donde las figuras geométricas, tales como las curvas planas, podrían ser representadas analíticamente, es decir, con funciones y ecuaciones. La geometría se enriquece con el estudio de la estructura intrínseca de los entes geométricos que analizan Euler y Gauss, que condujo a la creación de la topología y la geometría diferencial.

SEPTIMO SEMINARIO CEPREUNI

1. ABCD es un tetraedro regular de arista a. Halle la altura de un prisma recto secante con el tetraedro de volumen igual a la mitad del volumen del tetraedro siendo ABC una de sus bases

A) $\frac{a\sqrt{6}}{9}$ B) $\frac{a\sqrt{6}}{18}$ C) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$
D) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ E) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

2. En una pirámide ABCD, M y N son los baricentros de las regiones triangulares BCD y ABC, $\overline{AM}\cap\overline{DN}=\{F\}$, FM=7. Halle AF.

A)14 B) 15 C) 18
D) 21 E) 28

3. En un hexaedro regular ABCD–EFGH, calcule el volumen de la pirámide M–ABCD, siendo M el baricentro de la región triangular BGD si $EC=6\sqrt{6}$.

A) $24\sqrt{2}$ B) $36\sqrt{2}$ C) $48\sqrt{2}$
D) $60\sqrt{2}$ E) $70\sqrt{2}$

4. Se tiene un cuadrado ABCD de lado $\sqrt{2}$dm, luego se traza $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ perpendiculares al plano del cuadrado. Si AE=6 dm y CF= dm, entonces el volumen del tetraedro BDEF (en dm^3) es:

A) 6.0 B) 5.5 C) 5.0
D) 4.5 E) 4.0

5. En un hexaedro regular ABCD–A'B'C'D' de arista a, halle el volumen del sólido común a las pirámides A–A'B'C'D' y A'–ABCD.

A) $\frac{a^3}{15}$ B) $\frac{a^3}{12}$ C) $\frac{a^3}{10}$
D) $\frac{a^3}{9}$ E) $\frac{a^3}{8}$

6. En una pirámide O-ABC, el triedro de vértice O es trirrectángulo. AB=7u, BC=6u, AC=5u. Halle el volumen de OABC (en u^3).

A) $\sqrt{95}$ B)$2\sqrt{95}$ C) $3\sqrt{95}$
D) $4\sqrt{95}$ E) $5\sqrt{95}$

7. Las caras laterales de una pirámide regular forman con la base cuadrangular ángulos diedros de 60°. Se ubica un punto interior a la pirámide que, equidista de las caras de la pirámide. En qué relación divide dicho punto a la altura de la pirámide.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{5}$

8. En una pirámide V–ABCD la base ABCD es un trapecio $(\overline{AB}//\overline{CD})$. Si éste poliedro se proyecta sobre un plano perpendicular a $\overline{AB}$, el área proyectada es 20 dm^2, si AB=12 dm. Entonces el volumen de la pirámide (en dm^3) es:

A) 90 B) 100 C) 120
D) 125 E) 150

9. El área total de una pirámide cuadrangular regular es los $\frac{3}{2}$ de su área lateral, si su arista básica mide 2u. Calcule el volumen de la pirámide.

A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}u^3$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{4}u^3$ C) $\frac{5\sqrt{3}}{3}u^3$
D) $\frac{7\sqrt{5}}{5}u^3$ E) $\frac{3\sqrt{2}}{2}u^3$

10. Dado un tetraedro regular O–ABC de volumen V, por O se trazan rectas perpendiculares a las caras del tetraedro que tiene a O como vértice común, estas perpendiculares interceptan al plano ABC en los puntos A', B' y C'. Calcule el volumen O–A'B'C'.

A) 6V B) 10V C) 12V
D) V E) 16V

11. Se tiene un tetraedro cuyas aristas que concurren en un vértices miden 2u, 4u y 6u. Además determinan un ángulo triedro cuyas caras miden 60° cada una. Calcule el volumen del tetraedro.

A) $6\sqrt{2}u^3$ B) $5\sqrt{2}u^3$ C) $4\sqrt{2}u^3$
D) $3\sqrt{2}u^3$ E) $2\sqrt{2}u^3$

12. El plano que pasa por el vértice E de un hexaedro regular ABCD–EFGH, intercepta a las aristas $\overline{AD}$,$\overline{DC}$ y $\overline{HG}$ en los puntos P, Q y R respectivamente. Si =PD. Calcule la razón de los volúmenes de la pirámide P–EHR y R–PDQ.

A) 1 B)2 C)3
D) 4 E) 5

13. A qué distancia del vértice de una pirámide cuya altura es H debe pasar un plano paralelo a la base para que las dos porciones sean equivalentes.

A) $2^{\frac{1}{3}}H$ B) $2^{-\frac{1}{3}}H$ C) $2^{-1}H$
D) $2^{-\frac{2}{3}}H$ E) $2^{\frac{2}{3}}H$

14. ABCD es un tetraedro regular de volumen V halle el volumen del sólido poliédrico cuyos vértices son los puntos medios de las aristas de ABCD.

A) $\frac{V}{8}$ B) $\frac{V}{6}$ C) $\frac{V}{4}$
D) $\frac{V}{3}$ E) $\frac{V}{2}$

15. En una pirámide O–ABC, se ubica un punto F en OC. Por el punto F se trazan los planos secantes P y Q. El plano P es paralelo a la cara ABC y el plano Q es paralelo a la cara OAB. Si el vértice O y la sección determinada por el plano P determina un sólido de volumen V_1, y el vértice C y la sección determinada por el plano Q determinan un sólido de volumen V_2. Halle el volumen del sólido determinado por la pirámide O–ABC.

A) $\sqrt[3]{V_1V_2}$ B) $\left(\sqrt{V_1}+\sqrt{V_2}\right)^3$
C) $\left(\sqrt{V_1V_2}\right)^3$ D) $\left(\sqrt[3]{V_1}+\sqrt[3]{V_2}\right)^3$
E) $\left(\sqrt{V_1}+\sqrt{V_2}\right)^3$

16. Se tiene un tronco de pirámide regular cuadrangular cuyas aristas básicas miden 6u y 8u respectivamente, la longitud de la diagonal de una cara es igual a la longitud de una arista básica. Calcule su volumen.

A) $\frac{145}{4}\sqrt{14}u^3$ B) $4\sqrt{14}u^3$
C) $\frac{148}{3}\sqrt{14}u^3$ D) $\frac{148}{5}\sqrt{14}u^3$
E) $\frac{148}{3}\sqrt{15}u^3$

17. Las bases de un tronco de pirámide miden y $2m^2$. Se construye un prisma equivalente de igual altura y base cuadrada. Halle la medida del lado de esta base.

A) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{14}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$

18. En un tronco de pirámide de bases paralelas ABC–DEF, los volúmenes de las pirámides ABCE, DEFC son V_1 y V_2. Halle el volumen de la pirámide ACED.

A) V_1+V_2 B) $\frac{V_1+V_2}{2}$

C) $\sqrt{V_1V_2}$ D) $\frac{\sqrt{V_1V_2}}{2}$

E) $\frac{V_1V_2}{V_1+V_2}$

19. Un tronco de pirámide, cuyas bases son regiones cuadradas y una cara lateral es perpendicular a las bases, esta circunscrita a una esfera. Calcule el volumen el tronco de pirámide, si los perímetros de las bases suman S y el producto de las longitudes de dos aristas básicas diferentes es P.

A) $\frac{P}{6S}(S^2-16P)$ B) $\frac{P}{6S}(S^2-15P)$

C) $\frac{P}{6S}(S^2-13P)$ D) $\frac{P}{6S}(S^2-12P)$

E) $\frac{P}{6S}$

20. En un tronco de pirámide regular ABCD–EFGH se traza un plano secante que contiene a los puntos medios M y N de $\overline{EH}$ y $\overline{HG}$ respectivamente y el vértice A, determinando así una sección cuadrangular regular cuyo lado mide 4u. Calcule el volumen del tronco de pirámide.

A) $37\sqrt{3}u^3$ B) $\frac{112\sqrt{3}}{3}u^3$

C) $\frac{112}{3}u^3$ D) $\frac{112\sqrt{2}}{3}u^3$

E) $\frac{112\sqrt{5}}{3}u^3$

21. En un tronco de pirámide regular de base cuadrangular se ha inscrito una esfera, si la relación de las áreas básicas del tronco de pirámide es de 1 a 4 y "r" es el radio de la esfera, entonces el volumen del tronco de pirámide es:

A) $8r^3$ B) $9r^3$ C) $\frac{28}{3}r^3$

D) $10r^3$ E) $\frac{32}{3}r^3$

22. En un tronco de pirámide triangular regular, los inradios de las bases mayor y menor miden u y u. Si las caras laterales son circunscriptibles. Halle el volumen del tronco (en u^3).

A) $7\sqrt{69}$ B) $6\sqrt{69}$ C) $5\sqrt{69}$

D) $4\sqrt{59}$ E) $3\sqrt{59}$

23. El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro de revolución cuya sección axial tiene un área de $60u^2$ es congruente con el desarrollo de la superficie lateral de un prisma recto de bases circunscriptibles a circunferencias de radio igual a 3u. Calcule el volumen del prisma.

A) $75\pi u^3$ B) $90\pi u^3$ C) $120\pi u^3$

D) $150\pi u^3$ E) $180\pi u^3$

24. Una cinta de papel de 40 cm. de largo, 5cm de ancho y 0,1 cm. de espesor, se enrolla como un cilindro circular recto. Halle el radio de la base del cilindro (en cm.).

A) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ B) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ C) $\frac{3}{\sqrt{\pi}}$

D) $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ E) $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$

25. Un recipiente de forma de un cilindro circular, contiene agua, tendido horizontalmente tiene una longitud de 8m y un diámetro de base de 10m. El agua determina una superficie rectangular de 64 m^2 de área. Halle la profundidad máxima del agua (en m)

A) 4 B) 5 C) 6

D) 7 E) 8

26. Un cilindro de revolución cuyo radio mide a esta interceptado por un plano que determina en las bases dos cuerdas de longitud a. Si el plano forma ángulos diedros de con los planos de las bases, calcule el área de la sección que resulta de la intersección del plano con el cilindro.

A) $4a^2$ B) $5a^2$ C) $6a^2$

D) $6\sqrt{3}a^2$ E) $2\sqrt{3}a^2$

27. En un cilindro oblicuo de bases circulares $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$ son diámetros paralelos de sus respectivas bases. Si $\overline{AM}$ es la generatriz cuyo ángulo de inclinación respecto a la base mide 60° y AN=7u, BN=5u. El volumen del cilindro es:

A) $40\sqrt{3}\pi u^3$ B) $16\sqrt{3}\pi u^3$

C) $\frac{45}{3}\sqrt{3}\pi u^3$ D) $\frac{45}{2}\sqrt{3}\pi u^3$

E) $45\sqrt{3}\pi u^3$

28. En un hexaedro regular ABCD–EFGH de arista a, halle el volumen del cilindro de bases circulares inscritas en EBD y FHC.

A) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$ B) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$

C) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{18}$ D) $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$

E) $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{9}$

29. La generatriz de un cilindro oblicuo de base circular mide igual que el diámetro de la base, sean M y N los centros de las bases y $\overline{AB}$ un diámetro de la base inferior que contiene a N. Si AM=13dm y MB=9 dm, entonces el volumen del cilindro (en dm^3) es:

A) $40\pi\sqrt{7}$ B) $50\pi\sqrt{10}$

C) $60\pi\sqrt{7}$ D) $60\pi\sqrt{14}$

E) $50\pi\sqrt{14}$

30. Las bases circulares de un cilindro oblicuo tienen como área 36 dm^3, una sección recta que tiene un punto común con el plano de la base inferior determina con ella un ángulo diedro que mide 30°. Si el plano de la sección recta interseca al eje del cilindro en la razón de 17 a 3, entonces el volumen del cilindro (en dm^3) es:

A) $300\pi\sqrt{3}$ B) $320\pi\sqrt{3}$

C) $360\pi\sqrt{3}$ D) $400\pi\sqrt{3}$

E) $420\pi\sqrt{3}$

31. Un cilindro de revolución de radio igual a 5 dm es interceptado por los planos paralelos de manera que los ejes mayores de la elipses que se determinan miden 16 dm y la generatriz del cilindro oblicuo determinado es 30 dm. Halle la altura del cilindro oblicuo (en dm)

A) 16,25 B) 16,75 C) 18,00

D) 18,50 E) 18,75

32. Se tiene un tronco de cilindro oblicuo cuyos planos que contienen a las bases son perpendiculares, si las generatrices forman con el plano de una base un ángulo que mide 75°, la diferencia de los cuadrados de las medidas de las generatrices mayor y menor es $30u^2$ y su sección recta es circular, entonces el área lateral del tronco de cilindro (en u^2) es:

A) $\frac{10}{3}\pi$ B) $\frac{12}{5}\pi$ C) $\frac{15}{4}\pi$

D) $\frac{18}{5}\pi$ E) $\frac{20}{3}\pi$

33. En un cilindro de revolución de radio R y altura 2h se inscribe un octaedro P–ABCD–Q, donde P y Q son los puntos medios de dos generatrices diametralmente opuestas, AB y DC son diámetros de las bases del cilindro ortogonales a PQ. Si se trazan los planos que determinan las caras ABQ, ABP, DCQ y DPC. Halle el volumen del tronco de cilindro resultante.

A) $\frac{1}{3}(6\pi-8)R^2h$ B) $\frac{1}{3}(\pi R^2h)$

C) $\frac{1}{8}8\pi R^2h$ D) $\frac{1}{3}(8\pi+6)R^2h$

E) $\frac{1}{3}\pi(h+R)R^2$

34. De todos los cilindros de revolución de área total: πa, halle el volumen del cilindro de máximo volumen.

A) $\frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}$ B) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$

C) $\frac{3\pi a^3\sqrt{3}}{6}$ D) $\frac{2\pi a^3\sqrt{2}}{9}$

E) $\frac{3\pi a^3\sqrt{3}}{8}$

35. En un tronco de cilindro oblicuo, las bases congruentes se encuentran contenidos en planos que determinan un diedro que mide 60°. Las generatrices mayor y menor miden 2a y a. Calcule su volumen.

A) $\frac{9\pi a^3}{32}$ B) $\frac{9\pi a^3}{64}$ C) $\frac{9\pi a^3}{12}$

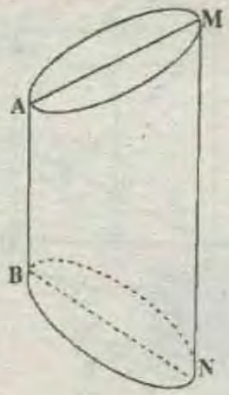
D) $\frac{9\pi a^3}{256}$ E) $\frac{9\pi a^3}{200}$

36. Calcule el radio de la base(en u) de un tronco de cilindro circular recto cuyas bases forman un ángulo diedro cuya medida es 60°, además la suma de las áreas de las bases es S y la generatriz mínima mide 0u.

A) $\sqrt{\frac{S}{5\pi}}$ B) $\sqrt{\frac{S}{5\pi}}$ C) $\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$

D) $\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$ E) $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

37. Según la figura se tiene un tronco de cilindro recto de sección recta circular, MN=2AB, AM=BN, $m\angle BAM=135°$ y el área de la superficie lateral es numéricamente igual al volumen de dicho sólido. Calcule el área de su superficie lateral.



A) 40π B) 42π C) 44π
D) 46π E) 48π

38. Un recipiente cilíndrico cuya altura es tres veces el radio de la base contiene agua en un 75% de su capacidad. ¿Qué ángulo se debe inclinar el cilindro para que el agua llegue al borde del cilindro?.

A) 15 B) 30 C) 45
D) 53 E) 60

39. Un cilindro oblicuo se encuentra circunscrito a una esfera de radio R. Si el plano que contiene a la sección recta de dicho cilindro y el plano que contiene a su base forman un ángulo diedro cuya medida es 30°. Calcule el volumen de dicho cilindro.

A) $\frac{4}{3}\pi R^3$ B) $\frac{4}{3}\pi R^3\sqrt{2}$

C) $\frac{4}{3}\pi R^3\sqrt{3}$ D) $\frac{4}{3}\pi R^3\sqrt{5}$

E) $\frac{4}{3}\pi R^3\sqrt{7}$

40. En un tronco de cilindro oblicuo cuyas generatrices máxima y mínima son $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. La generatriz AB forma con la base inferior un ángulo que mide 15° y con la base superior forma un ángulo cuya medida es 75°. Si: $=30u^2$. Halle el área lateral del cilindro oblicuo.

A) $\frac{15\pi}{8}$ B) $\frac{15\pi}{7}$ C) $\frac{15\pi}{6}$

D) $\frac{15\pi}{5}$ E) $\frac{15\pi}{4}$

41. Un tronco de cilindro de revolución está inscrito en un cono de revolución, donde sus generatrices están inclinadas formando un ángulo de 30° con respecto a la base. Si el diámetro AB de la base del cilindro, está contenido en el diámetro $\overline{MN}$ de la base del cono, tal que MA=AB=2BN. Halle la relación de los volúmenes de los sólidos limitados por el tronco de cilindro y el cono de revolución.

A) $\frac{9}{64}$ B) $\frac{15}{64}$ C) $\frac{36}{125}$

D) $\frac{27}{125}$ E) $\frac{18}{125}$

42. Al trazar un plano secante a un cilindro recto de revolución cuya base es un círculo cuyo radio mide 1u, se obtiene un tronco de cilindro cuyas generatrices menor y mayor mide 4u y 6u respectivamente. Halle el área de una sección axial del tronco de cilindro (en u^2).

A)8 B) 10 C) 12
D) 14 E)16

43. En un hexaedro regular ABCD – A'B'C'D' se inscribe un cilindro recto de tal manera que sus bases están inscritas en las caras ABCD y A'B'C'D'. En que razón queda dividido el volumen del sólido limitado por el cilindro al trazar el plano CB'D'.

A) $\frac{\pi+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{\pi-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

C) $\frac{2\pi-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{3\pi-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

E) $\frac{2\pi+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

44. El desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución es un semicírculo. Halle la medida del ángulo que forman dos generatrices opuestas.

A) 45 B) 60 C) 75
D) 90 E) 120

45. El área lateral de un cono de revolución es S y el área total es S_1. Determine el ángulo que forma la altura y la generatriz.

A) $\text{ArcSen}\left(\frac{S_1-S}{S}\right)$

B) $\text{ArcSen}\left(\frac{S_1}{S}\right)$

C) $\text{ArcSen}\left(\frac{S}{S_1}\right)$

D) $\text{ArcSen}\left(\frac{S}{2S_1}\right)$

E) $\text{ArcSen}\left(\frac{S_1-S}{2S}\right)$

46. Se tiene una lámina metálica circular, si se corta un sector circular de dicha lámina. Halle la medida del ángulo del sector que permita construir con el resto un cono de capacidad máxima.

A) $120(3-\sqrt{3})$ B) $120(3-\sqrt{6})$
C) $90(2-\sqrt{2})$ D) $90(3-\sqrt{3})$
E) $120(3-\sqrt{2})$

47. Una esfera esta inscrita en un cono recto, una de las generatrices del cono ha quedado dividido por el punto de tangencia en dos segmentos de longitudes y , determine el volumen de la esfera.

A) $\frac{5}{4}\left(\frac{mn}{\sqrt{m^2+2mn}}\right)^3$
B) $\frac{4}{3}\left(\frac{mn}{\sqrt{m^2+2m}}\right)^3$
C) $\frac{2\pi}{3}\left(\frac{mn}{\sqrt{m^2+n}}\right)^3$
D) $\frac{3\pi}{2}\frac{m^3n^2}{\sqrt{m^2+mn}}$
E) $\frac{\pi m^3n^3}{\sqrt{m^2+mn}}$

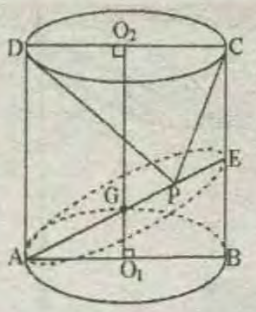
48. La altura de un cono de revolución es H y R el radio de la base. Halle el área lateral del cilindro de revolución inscrito de máxima área.

A) $\frac{\pi RH}{9}$ B) $\frac{\pi RH}{6}$ C) $\frac{\pi RH}{4}$
D) $\frac{\pi RH}{2}$ E) $\frac{\pi RH\sqrt{2}}{2}$

49. En un cono circular recto están inscritas dos esferas tangentes exteriores entre si y tangentes a la superficie latéral, además la esfera mayor es tangente a la base. Si los radios de las esferas miden a y b (a>b). Halle el volumen del cono.

A) $\frac{\pi}{3}\left(\frac{a^5}{ab-b^2}\right)$ B) $\frac{2\pi}{3}\left(\frac{a^5}{ab-b^2}\right)$
C) $\frac{3\pi}{3}\left(\frac{a^4}{ab-b^2}\right)$ D) $\frac{4\pi}{3}\left(\frac{a^5}{ab-b^2}\right)$
E) $\frac{2\pi}{3}\left(\frac{a^4}{ab-b^2}\right)$

50. Según la figura, calcule EC, si el cono de vértice P y el tronco de cilindro recto son equivalentes, AD=8m y AP=3PE.



A) $\frac{10}{9}$ B) $\frac{29}{9}$ C) $\frac{40}{9}$
D) $\frac{50}{9}$ E) $\frac{70}{9}$

51. En un octaedro regular P–ABCD–Q, la arista mide L. Halle el volumen del cono circular, cuya base se encuentra inscrita en la cara BCQ y su vértice se encuentra en un punto del plano APD.

A) $\frac{\sqrt{6}\pi L^3}{220}$ B) $\frac{\sqrt{6}\pi L^3}{100}$ C) $\frac{\sqrt{6}\pi L^3}{108}$
D) $\frac{\pi L^3\sqrt{3}}{100}$ E) $\frac{\pi L^3\sqrt{2}}{108}$

52. En un cono de revolución de base circular de área A, se inscribe un cilindro recto de revolución cuya base tiene un área igual a B. Si la altura del cono es h. Halle el área lateral del tronco de cono determinado por la base superior del cilindro.

A) $\sqrt{h^2\pi+A}\left(2\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)$
B) $\sqrt{\pi(A+h^2)}\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\pi}\right)$
C) $\sqrt{\pi A+h^2}\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)$
D) $\sqrt{h^2\pi+A}\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)$
E) $\sqrt{\pi A+h^2}\left(2\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)$

53. ABCDEF es un hexágono regular cuyo lado mide ℓ y cuyo centro es O. Si L es la recta que contiene a $\overline{AO}$, determine el área de la superficie de revolución generada al girar $\overline{BE}$ alrededor de L.

A) $\sqrt{3}\ell^2\pi$ B) $\pi\sqrt{2}\ell^2$ C) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\ell^2$
D) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\ell^2$ E) $\pi\sqrt{6}\ell^2$

54. Se tiene un cilindro de revolución y un tronco de cono oblicuo de bases circulares, la base menor del tronco de cono coinciden con la base superior del cilindro, y la base inferior del cilindro está incluida en la base mayor del tronco de cono. El área de la sección del tronco determinada por dos generatrices opuestas es y dicha sección forman con la base mayor un diedro que mide 30. Si el área de una sección axial del cilindro es de $4m^2$. Calcule el volumen del tronco de cono.

A) $\frac{100\pi}{3}$ B) $\frac{105\pi}{3}$ C) $\frac{110\pi}{3}$
D) $\frac{114\pi}{3}$ E) $\frac{119\pi}{3}$

55. Un tronco de cono de altura 6 dm, tiene como base mayor una región circular de radio 5 dm, si el volumen del tronco de cono es 78π dm^3, entonces el volumen del cono deficiente (en dm^3) es:

A) $\frac{18}{5}\pi$ B) $\frac{16}{5}\pi$ C) $\frac{16}{3}\pi$
D) $\frac{15}{4}\pi$ E) $\frac{14}{3}\pi$

56. Una generatriz de un tronco de cono de revolución mide **g**, forma con la base mayor un ángulo de 60° y es perpendicular al segmento que une su extremo superior con el extremo inferior de la generatriz opuesta. Halle el área lateral del tronco de cono.

A) πg^2 B) $\frac{2}{3}\pi g^2$ C) $\frac{3}{2}\pi g^2$
D) $\frac{5}{2}\pi g^2$ E) $\frac{1}{2}\pi g^2$

57. Un tronco de cono de revolución de área total A esta circunscrito a una esfera de radio R. Halle el volumen del tronco.

A) $\frac{AR}{6}$ B) $\frac{\pi AR}{3}$ C) $\frac{\pi}{3}R^2\sqrt{A}$
D) $\frac{AR}{3}$ E) AR

58. En un cono recto cuya generatriz es congruente con el diámetro de la base, está inscrito una semiesfera de radio R de modo que su círculo mayor se encuentra en el plano de la base del cono. Calcule el volumen del tronco de cono que tiene como bases la base del cono y el circulo limitado por la circunferencia de tangencia entre la semiesfera y el cono.

A) $\frac{37}{16}\pi R^3$ B) $\frac{37}{72}\pi R^3$ C) $\frac{37}{36}\pi R^3$
D) $\frac{41}{12}\pi R^3$ E) $\frac{43}{15}\pi R^3$

59. Se tiene un tronco de cono de revolución de radios de bases R y R . El área lateral es igual a la suma de las áreas de las bases. Calcule el volumen del tronco de cono.

A) $\frac{10}{3}\pi R^3$ B) πR^3 C) $\frac{13}{2}\pi R^3$

D) $5\pi R^3$ E) $\frac{4\pi R^3}{3}$

60. Se tienen un cono circular recto cuya sección axial es un triángulo rectángulo, se inscribe en el cono un cubo tal que una de sus caras se encuentra contenido en la base del cono, si la arista del cubo mide 2u. Calcule el volumen del cono (en u^3).

A) $\frac{2\pi}{3}(10+7\sqrt{2})$ B) $\frac{\pi}{3}(15+7\sqrt{2})$

C) $\frac{5\pi}{3}(12+5\sqrt{2})$ D) $\frac{3\pi}{2}(2+\sqrt{2})$

E) $\frac{3\pi}{2}(6+5\sqrt{2})$

61. Se tiene una esfera de radio R, se traza un plano que divide a la esfera en dos casquetes cuyas áreas están en la relación de 3 a 2. Halle la distancia del centro de la esfera al plano

A) $\frac{R}{4}$ B) $\frac{R}{5}$ C) $\frac{3R}{5}$

D) $\frac{R}{8}$ E) $\frac{R}{6}$

62. En una esfera de radio 1u se trazan dos planos secantes, equidistantes del centro, el área de la zona esférica determinada es igual a la suma de las áreas de las bases, halle la distancia entre los planos.

A) $\sqrt{2}-1$ B) $2(\sqrt{2}-1)$

C) $3(\sqrt{2}-1)$ D) $4(\sqrt{2}-1)$

E) $5(\sqrt{2}-1)$

63. Un hexaedro regular de arista a se encuentra inscrito en una semiesfera. Halle el volumen de la semiesfera.

A) $\frac{\sqrt{6}}{2}\pi a^3$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi a^3$

C) $\frac{\sqrt{5}}{2}\pi a^3$ D) $\frac{\sqrt{10}}{2}\pi a^3$

E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi a^3$

64. En una esfera de radio R una zona esférica de altura $R/$ es equivalente a un huso esférico. Calcule la medida del ángulo correspondiente al huso.

A) 15° B) 30° C)37°

D) 45° E) 60°

65. De V punto exterior a una esfera de centro O se trazan todas las rectas tangentes a la superficie esférica formándose un cono equilátero, cuya base es un circulo menor de la esfera. Halle la relación de volúmenes del cono y la esfera.

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{3}{16}$ C) $\frac{4}{16}$

D) $\frac{9}{32}$ E) $\frac{5}{16}$

66. Halle el radio de la esfera inscrita en un tetraedro O–ABC trirrectángulo, OA=12, OB=24, OC=36.

A) 1 B)2 C)3

D)4 E)5

67. En una pirámide P–ABCD, el área de la superficie esférica inscrita es $36\pi u^2$. Calcule el volumen de la pirámide, si la cara APB es regular y la medida del diedro AB es 90 (ABCD es un rectángulo).

A) $216\sqrt{3}$ B) $218\sqrt{3}$ C)$220\sqrt{3}$

D)$222\sqrt{3}$ E)$225\sqrt{3}$

68. Una cuerda de radio r= mm se enrolla fuertemente obteniéndose una esfera de radio R= cm; suponiendo que no hay espacios vacíos en el enrollamiento. Calcule la longitud de la cuerda.

A) 6m B)6,5m C)8m

D)8,5m E)9m

69. Una esfera esta inscrita en un cono de revolución de altura 12 y radio de base 5. Un plano es paralelo a la base del cono y tangente con la esfera. Halle el radio de la sección determinada por el plano.

A) $\frac{10}{3}$ B) $\frac{20}{3}$ C) $\frac{10}{9}$

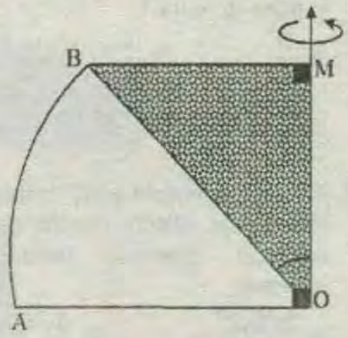
D) $\frac{20}{9}$ E) $\frac{14}{3}$

70. Una superficie esférica de área $144\pi u^2$ es interceptado por dos planos que forman entre si un ángulo diedro que mide 60° de modo que la recta de intersección de los dos planos es tangente a la esfera y el plano bisectriz contiene un diámetro de la esfera. Calcule el volumen de la parte de la esfera comprendido en el ángulo diedro.

A)180π B)188π C)130π

D)198π E)200π

71. En la figura el volumen que genera el sector circular AOB es el cuadruplo el volumen del sólido que genera la región triangular BMO al girar ambos alrededor de $\overleftrightarrow{OM}$. Calcule la $m\angle BOM$.



A) 30° B) 37° C)45°

D) 53° E) 60°

72. Para determinar el radio de una esfera, se traza con un compás esférico a partir de un punto A como polo, una circunferencia cuyo radio es $\sqrt{34}$dm. En la circunferencia trazada se ubica los puntos B, C y D tal que BC=6 dm, CD= dm y BD=10dm, entonces el radio de la esfera (en dm) es:

A) 5 B) $\frac{16}{3}$ C) $\frac{17}{3}$

D) 6 E) $\frac{20}{3}$

73. En una esfera de radio R está inscrito un cono de revolución de volumen máximo, halle la altura del cono.

A) $\frac{2R}{5}$ B) $\frac{8R}{3}$ C) $\frac{4R}{3}$

D) $\frac{5R}{3}$ E) $\frac{7R}{3}$

74. En una pirámide O–ABC, el vértice O es un ángulo triedro trirrectángulo OA=1, OB=2 y OC=3. Halle el radio de la esfera inscrita.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{7}$

75. Demostrar que si en una esfera se inscriben un cilindro equilátero y un cono equilátero, el volumen del cilindro es media proporcional entre los volúmenes de la esfera y del cono.

76. Se tiene un cono equilátero inscrito en una esfera de radio R. ¿A qué distancia del centro de la esfera habrá que trazar un plano secante paralelo a la base del cono para que la diferencia de las secciones determinadas sea igual al círculo de la base del cono?

A) $\frac{R}{4}$ B) $\frac{3}{10}R$ C) $\frac{R}{5}$
D) $\frac{R}{3}$ E) $\frac{5}{16}R$

77. En una semiesfera de radio R se inscribe un cilindro circular recto de volumen máximo, halle dicho volumen.

A) $\frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{5}$ B) $\frac{3\sqrt{3}\pi R^3}{4}$
C) $\frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{9}$ D) $\frac{\pi\sqrt{3}R^3}{9}$
E) $\frac{9\sqrt{3}\pi R^3}{2}$

78. Un tronco de cono cuya generatriz y radio de la base mayor tienen igual longitud, está inscrito en una semiesfera, el área lateral del tronco es π. Halle el volumen de la semiesfera.

A) $\frac{11\pi}{3}$ B) $\frac{13\pi}{3}$ C) $\frac{14\pi}{3}$
D) $\frac{16\pi}{3}$ E) $\frac{17\pi}{3}$

79. Halle el radio de la esfera tangente a 3 aristas de un tetraedro regular, que pasa por los vértices de una cara, siendo a la arista.

A) $\frac{a\sqrt{2}}{5}$ B) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$
D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ E) $a\sqrt{2}$

80. Sobre una mesa de billar se colocan tres bolas iguales de radio R, entonces el radio de una bolita que es tangente a los tres y que se apoya también en la mesa es:

A) $\frac{R}{5}$ B) $\frac{R}{4}$ C) $\frac{R}{3}$ D) $\frac{R}{2}$ E) $\frac{3R}{16}$

81. Halle la longitud del radio de una esfera inscrita en un octante de esfera de radio R.

A) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{R}{3}(\sqrt{3}-1)$ C) $\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)$
D) $\frac{R}{4}(\sqrt{2}-1)$ E) $\frac{R}{3}(\sqrt{2}-1)$

82. El diámetro de una esfera mide 12 dm y las dimensiones de un paralelepípedo recto son 12x12x dm, si dicho paralelepípedo es tangente a la superficie esférica a 3 dm de su base inferior, entonces el volumen de la esfera limitado por las bases del paralelepípedo (en dm^3) es:

A) $404\frac{\pi}{3}$ B) $400\frac{\pi}{3}$ C) $202\frac{\pi}{3}$
D) $200\frac{\pi}{3}$ E) $372\frac{\pi}{3}$

83. Halle el radio de la base del cilindro recto circular de mayor volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio R.

A) $\frac{R\sqrt{6}}{6}$ B) $\frac{R\sqrt{6}}{3}$ C) $\frac{R\sqrt{3}}{6}$
D) $\frac{R\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$

84. El volumen en decímetros cúbicos de una esfera es numéricamente igual a su área. Si el área de huso es $\frac{1}{5}$ del área de la esfera, entonces el volumen de la cuña esférica correspondiente (en dm^3) es:

A) 5.0π B) 6.0π C) 7.0π
D) 7.2π E) 7.8π

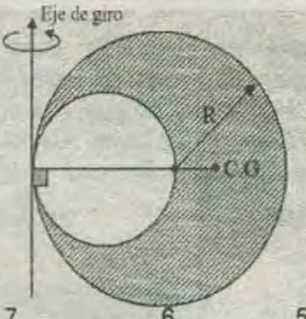
85. Una cuña esférica inscrita en un prisma triangular regular, tal que una arista lateral de éste coincida con la arista de la cuña y que el huso de ésta sea tangente a la cara opuesta de dicha arista, si el volumen el prisma es V, entonces el volumen de la cuña es:

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi V$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi V$
C) $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi V$ D) $\frac{\sqrt{3}}{8}\pi V$
E) $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi V$

86. Usando el teorema de Pappus– Guldin deducir la posición del centro de gravedad de:

A) Una semicircunferencia de radio R
B) Un semicírculo de radio R
C) Un cuarto de circunferencia de radio R
D) Un cuarto de círculo de radio R

87. Halle la distancia del centro de gravedad (CG) de la figura sombreada al eje de giro.



A) $\frac{7}{6}R$ B) $\frac{6}{5}R$ C) $\frac{5}{4}R$
D) $\frac{5}{3}R$ E) $\frac{7}{3}R$

88. Una región cuadrada ABCD de lado 10dm se hace girar 360° alrededor de un eje coplanar exterior que pasa por el vértice D y que forma un ángulo que mide con $\overline{CD}$, entonces el volumen del sólido generado (en dm^3) es:

A) $400\pi\sqrt{3}$ B) $450\pi\sqrt{3}$
C) $500\pi\sqrt{3}$ D) $400\pi\sqrt{6}$
E) $500\pi\sqrt{6}$

89. En un círculo de radio R y diámetro AC, se traza la cuerda AB, tal que $m\widehat{AB}=120$. Halle el volumen del sólido generado por la rotación de la región ABC alrededor de $\overleftrightarrow{AC}$.

A) $\frac{7\pi R^3}{12}$ B) $\frac{5\pi R^3}{12}$ C) $\frac{5\pi R^3}{8}$
D) $\frac{3\pi R^3}{4}$ E) $\frac{\pi R^3}{2}$

CLAVES DE RESPUESTAS

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
B	D	C	C	B	A	A	C	A	E
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	D	B	E	D	C	D	C	A	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	A	B	B	E	E	A	C	D	C
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
E	C	A	A	A	C	E	D	C	E
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	B	D	B	A	B	B	D	B	C
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
C	*	A	D	C	C	D	B	C	A
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
B	B	A	D	D	D	A	E	D	D
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
C	C	C	B	*	A	C	D	D	C
81	82	83	84	85	86	87	88	89	
C	*	B	D	E	*	A	E	A	

OCTAVO SEMINARIO CEPREUNI

01 A es el número de arista de un prisma. determinar el número de caras.

A) $\frac{A}{3}+1$ B) $\frac{A}{3}+2$ C) $\frac{A+2}{3}$

D) $\frac{A+3}{2}$ E) 2A

02 En un prisma regular. su número total de aristas es A. entonces el número total de caras es:

A) $\frac{A}{4}+3$ B) $\frac{A}{2}+1$ C) $\frac{A}{2}+2$

D) $\frac{A}{3}+2$ E) $\frac{A}{3}+1$

03 En un hexaedro regular cuya arista mide 4m. Determine la longitud del segmento que une un vértice y el centro de la cara opuesta (en m).

A) $2\sqrt{6}$ B) $\sqrt{6}$ C) $3\sqrt{6}$

D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

04 Un hexaedro regular se intersecta por un plano que pasa por una de sus diagonales. Si la arista del hexaedro mide K. Calcule el área mínima de la sección determinada.

A) $\frac{K^2\sqrt{6}}{2}$ B) $\frac{K^2\sqrt{7}}{2}$ C) $K^2\sqrt{2}$

D) $\frac{3K^2}{2}$ E) $\frac{K^2\sqrt{10}}{2}$

05 La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo circunscrito a una circunferencia que determine sobre la hipotenusa dos segmentos de 6 y 4. Si la arista lateral mide 10. entonces el volumen del sólido limitado por el prisma es:

A) 150 B) 180 C) 210

D) 240 E) 250

06 Se tiene un prisma triangular regular. tales que las diagonales de dos caras laterales se cruzan ortogonalmente y cuya longitud de una de ellas es $\sqrt{6}$ cm . Halle el volumen del sólido limitado por el prisma (en cm^3).

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{7}$

07 Las dimensiones de un recipiente. cuya forma es la de un paralelepípedo rectangular son 3m de largo. 2m de ancho y 1m de altura. ¿Si se vierten 1800 litros de agua. a que distancia de borde llega el líquido? (en m)

A) 0. 10 B) 0. 15 C) 0. 20

D) 0. 25 E) 0. 30

08 Determine el volumen de un prisma regular triangular. si las diagonales de dos caras laterales miden $\sqrt{6}$ y se cruzan ortogonalmente.

A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{8}$ C) $\sqrt{6}$

D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

09 Se tiene un prisma regular ABC – A' B'C'. P es un. punto de la arista BC de modo que $\frac{CP}{PB}=\frac{1}{3}$ y Q es el punto medio de $\overline{B'C'}$. El plano (APQ) intersecta a la arista $\overline{A'B'}$ en un punto R. Halle la razón $\frac{A'B'}{RB'}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{5}$ E) 1

10 En un prisma triangular regular ABC – A' B'C' con todas sus aristas congruentes. se ubica el punto M en la prolongación de $\overline{AB}$ de modo que AM = 2BM. si F es el punto medio de $\overline{AC}$. calcule la medida del ángulo diedro determinado por los planos MB'F y ABC.

A) ARC tg$\frac{\sqrt{39}}{2}$ B) ARC tg$\left(\frac{26}{39}\sqrt{39}\right)$

C) ARC tg$\left(\frac{\sqrt{39}}{3}\right)$ D) ARC tg$\left(\frac{\sqrt{39}}{26}\right)$

E) ARC tg$\left(\frac{\sqrt{39}}{39}\right)$

11 En tronco de prisma recto de base triangular. sus aristas laterales miden AA' =3. OO' =6. BB' = 2. Si la base perpendicular a las aristas laterales AOB. es una región equilátera. El plano de la base A'O'B' intersecta a las prolongaciones de $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ en M y N respectivamente. Si MN= $4\sqrt{13}$. Calcule el volumen del tronco de prisma recto. AOB – A'O'B'.

A) $50\sqrt{3}$ B) $\frac{157}{3}\sqrt{3}$ C) $\frac{176}{3}\sqrt{3}$

D) $\frac{184}{3}\sqrt{3}$ E) $\frac{191}{3}\sqrt{3}$

12 En un prisma oblicuo ABCDE – EFGH. la m $\angle$ ABE = 90 m $\angle$ BAD = m $\angle$ ADC =60. 2BC = AB = 6. $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$. m $\angle$ EAB = m $\angle$ EAD = 60. Calcule el volumen.

A) $120\sqrt{7}$ B) $150\sqrt{5}$ C) $216\sqrt{2}$

D) $64\sqrt{3}$ E) 400

13 ABCD – EFGH es un prisma de base rectangular. se traza un plano secante que intersecta a las aristas $\overline{OA}$, $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ en los puntos P. Q y R respectivamente. Si AQ = QE. $\frac{DP}{PH}=\frac{1}{3}=\frac{BR}{RF}$

2(EH) = EA = 4m . entonces determine el área lateral del menor tronco de prisma (en m^2).

A) 8 B) 6 C) 9

D) 7 E) 5

14 En cubo ABCD – EFGH de arista a. si N es punto medio de $\overline{AE}$ y M $\in$ $\overline{CG}$ tal que $GM=\frac{1}{3}BC$. entonces el volumen del tronco de prisma triangular NBM – EFG es:

A) $\frac{7}{36}a^3$ B) $\frac{11}{36}a^3$ C) $\frac{13}{36}a^3$

D) $\frac{9}{36}a^3$ E) $\frac{10}{36}a^3$

15 En un prisma triángular rect o ABC – A'B'C' se ubican los puntos M. N y P sobre $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ respectivamente de manera que AM=2 MA' y BN=PC'. Si el volumen del prisma es $9m^2$. entonces al volumen del prisma ABCMNP (en m^3)

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

16 Se tiene un tronco de paralelepípedo

oblícuo. cuyas área de dos caras laterales opuestas son S_1 y S_2 y la longitud de su distancia entre ellas es d. Calcule el volumen del tronco.

A) $d(S_1+S_2)$ B) $\frac{d}{2}(S_1+S_2)$

C) $\frac{d}{3}(S_1+S_2)$ D) $\frac{d}{4}(S_1+S_2)$

E) $\frac{d}{5}(S_1+S_2)$

17 Un sólido está limitado por una región rectangular ABCD. dos regiones triangulares equiláteras ABE y CDF inclinadas 60° con respecto a la región rectangular y las dos regiones trapeciales AEFD y BEFC. Si AB= $4\sqrt{3}$ y BC=8. calcule el volumen del sólido.

A) 160 B) 162 C) 164
D) 172 E) 108

18 En un tronco de prisma recto ABC – A'B'C'. ABC es la base menor: AB=BC=4. El plano A'B'C' intercepta entonces a las prolongaciones de $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ en E y F respectivamente. Si AE =2. FC=1. Halle la relación entre los volúmenes de los troncos del prisma dado respecto a B' – EBF.

A) $\frac{170}{87}$ B) $\frac{175}{88}$ C) $\frac{180}{89}$

D) $\frac{184}{225}$ E) $\frac{190}{79}$

19 Se tienen una pirámide regular P – ABCD. se traza la base media $\overline{EF}$ de la cara lateral $PDC\left(E \in \overline{PD}\right)$. Si las aristas laterales de la pirámide son congruentes a las aristas de la base y su longitud es L. halle el volumen del sólido EF – ABCD.

A) $\frac{5\sqrt{2}}{48}L^3$ B) $\frac{5\sqrt{2}}{24}L^3$

C) $\frac{3\sqrt{2}}{40}L^3$ D) $\frac{3\sqrt{3}}{48}L^3$

E) $\frac{2\sqrt{8}}{48}L^3$

20 En una pirámide regular. ¿Cuáles de. las proposiciones son correctas?

Si: A es su número total de aristas
B es su número total de caras
V es su número total de vértices

I) $C=\frac{A}{2}+1$

II) C = V

III) A > V

IV) A < V

A) II. III. IV B) I. III. IV C) I. II. III
D) II y III E) I y II

21 En una pirámide cuadrangular regular. la altura y la arista de la base miden Lm. entonces la suma de las medidas (en m) de las aristas es:

A) $\left(\sqrt{6}+2\right)L$ B) $2\left(\sqrt{6}+2\right)L$

C) $3\left(\sqrt{6}+2\right)L$ D) $\left(\sqrt{6}+1\right)L$

E) $\frac{\left(\sqrt{6}+1\right)L}{3}$

22 En una pirámide S – ABC. el pie de la altura coincide con el centro de la circunferencia inscrita en la base si AB = 14cm. AC= 13cm y BC= 15 cm y SA = $2\sqrt{22}$ cm. Halle el volumen limitado por la pirámide (en cm^3).

A) 160 B) 162 C) 164
D) 166 E) 168

23 En la pirámide cuadrangular regular O–ABCD. si el lado de la base y la altura miden 6m y 4m respectivamente. Halle la distancia de vértice A al plano OCD.

A) 3. 8 B) 4. 6 C) 4. 8
D) 5. 2 E) 5. 8

24 En un cubo ABCDEFGH de arista a. se traza $\overline{AA'} \perp \overline{EC}$. Halle el volumen de la pirámide A' – ABCD.

A) $\frac{2}{7}a^3$ B) $\frac{3}{5}a^3$ C) $\frac{2}{9}a^3$

D) $\frac{a^3}{6}$ E) $\frac{a^3}{3}$

25 Dado un hexaedro regular y un punto interior O. demostrar que la suma de las distancias de O a las caras. es igual a la altura del tetraedro.

26 Calcule la altura de una pirámide regular cuadrangular. si el punto medio de la altura dista de una cara lateral y de una arista lateral 3u y 4u respectivamente (en u).

A) $9\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) 12

D) $12\sqrt{2}$ E) $12\sqrt{3}$

27 En una pirámide V – ABC. $\overline{VA}$ determina con el plano P que contiene a ABC un ángulo de 45° y AB=AC. VB=VC. el ángulo diedro BC mide α. si el cuadrado de la distancia de V a P multiplicado por la longitud de $\overline{BC}$ es 60. calcule el volumen de sólido piramidal cuyo vértice es V y cuya base es la protección de la cara VBC sobre P.

A) $Ctg\,\alpha$ B) $\frac{3}{\tan\alpha}$ C) $\frac{4}{\tan\alpha}$

D) $\frac{5}{\tan\alpha}$ E) $\frac{10}{\tan\alpha}$

28 En una pirámide O – ABC. en sus aristas laterales $\overline{OA}, \overline{OB}$ y $\overline{OC}$ se ubican los puntos D. L y M. tal que. OD= 4. DA=6. OM=8. MC=2. OL=6 y LB=3. El plano DLM intersecta a las rectas AB y AC en E y F. Halle la relación entre los volúmenes de las pirámides O – ABC y D – AEF.

A) $\frac{50}{27}$ B) $\frac{52}{27}$ C) $\frac{55}{27}$

D) $\frac{58}{27}$ E) $\frac{59}{27}$

29 En la pirámide O – ABCD regular. la $m\angle AOB=33.75°$ y la arista OA mide 8u. Calcule el mínimo recorrido que debe ejecutar una hormiga que partiendo de A se desplaza sobre la superficie lateral hasta llegar al punto medio de OA (en u).

A) $4\sqrt{5+2\sqrt{2}}$ B) $4\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

C) $4\sqrt{5+\sqrt{2}}$ D) $4\sqrt{5-\sqrt{2}}$

E) $4\sqrt{5+3\sqrt{2}}$

30 Dado un tetraedro regular S – ABC de volumen V. por S se trazan rectas perpendiculares a las caras del tetraedro que tienen a S como vértice común. estas rectas intersectan al plano ABC en A'. B' y C'. Entonces al volumen del S – A'B'C' es:

A) 6V B) 8V C) 12V
D) 16V E) 20V

31 El lado de la base de una pirámide triangular regular mide a la longitud de la altura trazada desde el vértice de la base hasta la cara lateral opuesta es b unidades. Entonces. el volumen del sólido limitado por la pirámide triangular regular es:

A) $\frac{a^3b}{8\sqrt{3a^2-4b^2}}$ B) $\frac{ab^3}{6\sqrt{3a^2-4b^2}}$

C) $\frac{b^3a}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}$ D) $\frac{a^3b}{6\sqrt{3a^2-4b^2}}$

E) $\frac{a^3b}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}$

32 En un cuadrado ABCD. por A y C se trazan perpendiculares $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ al plano del cuadrado tal que AE = 4. CF=6 y AD = $3\sqrt{2}$. Calcule el volumen del sólido F – BED.

A) 25 B) 26 C) 28
D) 30 E) 36

33 Las bases de un tronco de pirámide regular triangular están circunscritas a circunferencias cuyos radios miden $\sqrt{3}$ y $2\sqrt{3}$. Si las caras laterales son circunscriptibles. calcule el área lateral de este sólido.

A) $81\sqrt{5}$ B) $48\sqrt{5}$
C) $84\sqrt{5}$ D) $72\sqrt{5}$
E) $41\sqrt{5}$

34 En un tronco de pirámide regular de base cuadrangular ABCD – EFGH. la $m\angle FHD=45°$. Halle la razón entre el área de la región trapecial BDHF y área lateral de dicho tronco.

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

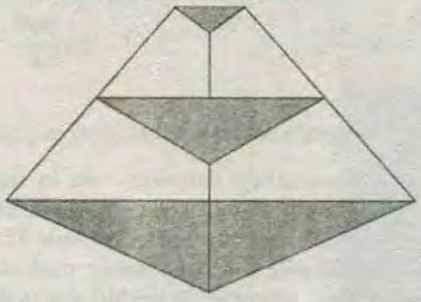
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

35 En un tronco de pirámide regular de base cuadrangular ABCD – EFGH. si $m\angle BFE = 60°$ y $m\angle FHD = 45°$. Calcule la razón entre el área de la región BDHF y el área lateral del tronco.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

36 En la figura mostrada. las áreas de las bases de un tronco de pirámide son S_1 y S_2 ($S_1 < S_2$). Entonces. el área de la sección transversal que dista m de la base menor y las n de la base mayor es:



A) $\left(\frac{m\sqrt{S_1}+n\sqrt{S_2}}{m+n}\right)^2$

B) $\left(\frac{n\sqrt{S_1}+m\sqrt{S_2}}{m+n}\right)^2$

C) $\left(\frac{n\sqrt{S_1}-m\sqrt{S_2}}{m+n}\right)^2$

D) $\left(\frac{m\sqrt{S_1}-n\sqrt{S_2}}{m-n}\right)^2$

E) $\left(\frac{m\sqrt{S_1}+m\sqrt{S_2}}{n-m}\right)^2$

37 Una pirámide triangular se intersecta con el plano en dos poliedros. Si el plano secante divide a las aristas que convergen en un vértice de la pirámide en dos segmentos cuyas longitudes están en la relación 1+2. 1+2 y 2+1. entonces la razón entre los volúmenes de los sólidos que limitan los poliedros es:

A) $\frac{25}{2}$ B) $\frac{25}{4}$ C) $\frac{27}{4}$

D) $\frac{27}{5}$ E) $\frac{25}{9}$

38 Se tiene una pirámide P – ABCD de base paralelográmica de modo que $\overline{PD}$ es perpendicular al plano (ABC). Se ubican los puntos E. F y G en las aristas $\overline{PA}$, $\overline{BP}$ y $\overline{PC}$ de modo que PE = EA. PF=FB y PG= 3GC. Si el volumen de la pirámide P – ABCD es V. entonces el volumen de la pirámide de vértice P y limitada por la pirámide original y el plano EFG es:

A) $\frac{15}{64}V$ B) $\frac{15}{32}V$ C) $\frac{17}{32}V$

D) $\frac{19}{64}V$ E) $\frac{2}{35}V$

39 En una pirámide V – ABC de volumen V. se ubican los puntos M y D en AV y VC de manera que AM = MV. VD=2DC. calcule el volumen del tronco de pirámide MDBAC.

A) $\frac{2}{3}V$ B) $\frac{1}{2}V$ C) $\frac{2}{9}V$

D) $\frac{1}{3}V$ E) $\frac{3}{5}V$

40 Se desea elaborar un cilindro de revolución de radio R. se inscribe un tetraedro regular de modo que los aristas opuestas son diámetros de las bases del cilindro. Halle la altura del cilindro.

A) 28π B) 30π C) 32π
D) 34π E) 36π

41 En un cilindro de revolución de radio R. se inscribe un tetraedro regular de modo que dos aristas opuestas son diámetros de las bases del cilindro. Halle la altura del cilindro.

A) $\frac{2}{3}R$ B) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ C) $R\sqrt{2}$

D) $R\sqrt{3}$ E) $\frac{R\sqrt{6}}{2}$

42 Se tiene paralelepípedo rectángular ABCD – EFGH inscrito en un cilindro de revolución cuyas bases se encuentran inscritas en las bases del cilindro. Si la distancia G a $\overline{FH}$ es 2u y AC=6u. Halle la relación de volúmenes entre el cilindro y el paralelepípedo.

A) $\frac{4}{3}\pi$ B) $\frac{6\pi}{2\sqrt{3}}$ C) $\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$

D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$

43 En un cilindro de bases circulares de valor r. se ubican los diámetros paralelos $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ en cada base. de manera que la proyección de C sobre una base en el punto medio C' de $\overline{AB}$. un plano P pasa por B y es perpendicular a las generatriz AC del cilindro en E. $m\angle EC'C = \alpha$ y la $m\angle ACB = 45$. calcule el volumen del cilindro.

A) $\pi r^3 \operatorname{sen}\alpha$ B) $\pi r^3\sqrt{3+4\operatorname{sen}\alpha}$

C) $\pi r^3\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha}$ D) πr^3

E) $\pi r^3\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}$

44 Se tiene un cilindro oblicuo cuya sección recta tienen área de $10u^2$. $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son dos generatrices diametralmente opuestas de modo que B es la proyección ortogonal de D sobre el plano P de la base que contiene a los puntos A y B. Sea C' la proyección de C sobre P. Calcule (en u^3). el volumen del tronco de cilindro interior determinado por un plano que contiene a la recta DC'. Si la generatriz del cilindro mide 12u.

A) 90 B) 45 C) 70
D) 75 E) 100

45 Se tiene un tetraedro regular en el cual se inscribe un cilindro cuya base inferior esta contenido en una cara del tetraedro y su altura es la $\frac{3}{4}$ partes de la altura del tetraedro. Halle la relación entre el volumen del tetraedro y el volumen del cilindro.

A) $\frac{64\sqrt{3}}{\pi}$ B) $\frac{12\sqrt{3}}{\pi}$ C) $\frac{2}{\pi}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ E) $\frac{1}{\pi}$

46 En un tetraedro regular de arista a. esta inscrito un cilindro recto de revolución. Halle el volumen del cilindro.

A) $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{36}$ B) $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{72}$ C) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{8}$

D) $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{45}$ E) $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{32}$

47 Si un cilindro está inscrito en un cubo. entonces: $\frac{\text{Volumen de cilindro}}{\text{Volumen del cubo}}$ es:

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{5}$ C) $\frac{\pi}{2}$

D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{3}$

48 En un cilindro de revolución se inscribe un prisma cuadrangular regular de volumen V. Determinar el sólido cilindrico.

A) $2\pi V$ B) πV C) $\frac{\pi V}{3}$

D) $\frac{\pi V}{2}$ E) $\frac{3\pi V}{4}$

49 Una vaso de forma cilíndrica en el cual la altura es igual al diámetro de la base contiene un líquido de volumen V. Si al indicar el vaso un ángulo que vale 45° el líquido está por derramarse. cuál es el máximo volumen de líquido que puede contienen.

A) 2V B) $\frac{8V}{3}$ C) $\frac{3V}{2}$

D) $\frac{5V}{2}$ E) 3V

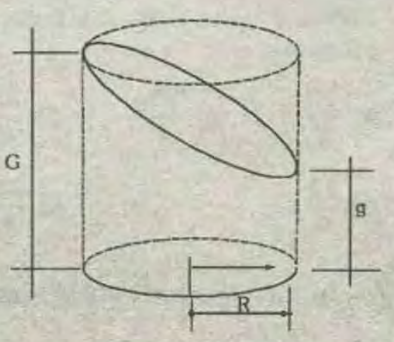
50 La esfera inscrita en un tronco de cilindro circular recto. determinar un punto de tangencia en el eje mayor de la elipse de una base y dos segmento de longitudes a y b. Determine el eje del tronco.

A) $a+b+\sqrt{ab}$ B) $\frac{ab}{a+b}$ C) $\frac{2ab}{a+b}$

D) $\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}$ E) $4\sqrt{ab}$

51 Del siguiente gráfico demostrar que el volumen del tronco de cilindro recto es:

$\frac{\pi R^2}{2}(G+g)$



52 En un tronco de cilindro recto se inscribe una esfera si las longitudes de las generatrices menor y mayor del tronco son a y b. Entonces el volumen del sólido limitado por el tronco de cilindro recto es:

A) $\frac{\pi a^2b^2}{3(a+b)}$ B) $\frac{\pi a^2b^2}{2(a+b)}$

C) $\frac{\pi a^2b^2}{(a+b)}$ D) $\frac{\pi a^2b^2}{4(a+b)}$

E) $\frac{\pi a^2b^2}{5(a+b)}$

53 Se tiene un tronco de cilindro de revolución circunscrito a una esfera. la generatriz mayor mide 12m y la generatriz menor mide 6m. Halle el volumen del tronco de cilindro (en m^3)

A) 120π B) 132π C) 138π
D) 144π E)152π

54 Sea un tronco de cilindro oblicuo cuyas generatrices son $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tal que $AB^2 - CD^2 = 32\ cm^2$. La generatriz $\overline{AB}$ hace con las bases inferior y superior ángulos cuyas medidas son 15 y 75 respectivamente. Halle el área lateral (en cm^2).

A) π B) 2π C) 3π
D) 4π E) 5π

55 La cara superior de un tronco de cilindro recto determina con la base un ángulo diedro que vale 60°. Si las generatrices máxima y mínima miden 12u y 8u. Calcule la relación entre el área lateral y el área de la cara superior.

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $5\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

56 Los ejes mayores de las regiones elípticas que son las bases de un tronco de cilindro oblicuo de sección recta circular determinar con la generatriz máxima un triángulo equilátero. Si las dos generatrices extremas miden 4 y 2. Calcule el volumen de cilindro.

A) 2π B) $\frac{7}{4}\pi$ C) $\frac{9}{4}\pi$

D) 5π E) $\frac{11}{4}\pi$

57 Los tres lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética. siendo el perímetro del triángulo 90m. Calcule el volumen del cilindro de revolución de 10m de altura cuya base es el círculo inscrito en el triángulo rectángulo (en m^3).

A) 510π B) 500π C) $\frac{1125}{2}\pi$

D) $\frac{1126}{3}\pi$ E) 520π

58 Un triángulo ABC recto en B. gira alrededor de $\overline{BC}$ generando un cono. Para calcular el volumen del sólido formado es necesario:

I. La longitud de la altura.

II. El ángulo A mide 30

A) I por si sola B) II por si sola

C) I y II D)I ó II

E) falta información

59 Calcule el volumen del cono de revolución inscrito en un tetraedro regular cuya arista mide t.

A) $\frac{\pi\sqrt{6}t^3}{118}$ B) $\frac{\pi\sqrt{6}t^3}{108}$ C) $\frac{\pi\sqrt{6}t^3}{98}$

D) $\frac{\pi\sqrt{6}t^3}{88}$ E) $\frac{\pi\sqrt{6}t^3}{78}$

60 Un cono circular recto cuya altura mide 10m esta circunscrito a una esfera cuyo radio mide 4m. Calcule el volumen del cono (en m^3).

A) $\frac{600}{3}\pi$ B) $\frac{700}{3}\pi$ C) $\frac{800}{3}\pi$

D) $\frac{850}{3}\pi$ E) $\frac{900}{3}\pi$

61 Al desarrollar la superficie lateral de cono de revolución. se obtiene un semicirculo. la medida del ángulo que determinan dos generatrices diametralmente opuestas del cono es:

A) 30° B) 45° C) 60°

D) 90° E) 120°

62 En la base de un cono circular recto se inscribe un triángulo rectángulo. los planos que pasan por los catetos y el vértice del cono forman con la base. ángulos diedros que miden 30° y 60° respectivamente. Si la altura del cono (en m^3).

A) 24π B)18π C) 20π

D) 25π E)30π

63 Por el vértice de un cono recto cuyo volumen es $\frac{64}{3}\pi\sqrt{3}cm^3$ se trazan 3 planos tangentes a la circunferencia de la base. determinándose en dicha base una región triangular de lados cuyas longitudes 13cm. 14cm y 15cm. Entonces el volumen del sólido determinándose por los planos y el plano de la base del cono es (es cm^3)

A) $110\sqrt{3}$ B) $112\sqrt{3}$ C) $114\sqrt{3}$

D) $116\sqrt{3}$ E) $120\sqrt{3}$

64 En un rectángulo AOB. la hipotenusa $\overline{AB}$ mide a. Se hace girar el triángulo en torno a $\overline{AB}$ determinando un sólido de volumen V. Calcule el volumen máximo de V.

A) $\frac{\pi a^3}{4}$ B) $\frac{\pi a^3}{12}$ C) $\frac{\pi a^3}{9}$

D) $\frac{\pi a^3}{8}$ E) $\frac{\pi a^3}{6}$

65 En un cono de revolución cuya sección axial determina una región equilátera de lado $4\sqrt{3}$. Se traza un plano secante que pasa por la vértice y determina en el cono una sección limitada por un triángulo isósceles de base 6. Halle el área de sección.

A) $\sqrt{39}$ B) $2\sqrt{39}$ C) $3\sqrt{39}$

D) $4\sqrt{39}$ E) $5\sqrt{39}$

66 Halle el área lateral de un cono circular recto. inscrito en una pirámide regular de base triángular. tal que el vértice de la pirámide. la base de la pirámide mide a y su arista lateral mide 4a.

A) $\frac{\pi a^3}{108}\sqrt{141}$ B) $\frac{\pi a^3}{108}\sqrt{143}$

C) $\frac{\pi a^3\sqrt{141}}{54}$ D) $\frac{\pi a^3\sqrt{141}}{72}$

E) $\frac{\pi a^3}{8}$

67 La proyección de la superficie cónica sobre un plano es un círculo de área $9\pi u^2$. si la altura del cono es 5u. si el contorno es una circunferencia de longitud $8\pi u$. entonces el volumen es (en u^3):

A) 45π B) 40π C) 32π

D) 24π E) 20π

68 El área lateral de un cono circular recto cuyo radio de la base es R unidades cuadradas. es igual a la suma de las áreas de la base y de la sección axial. Entonces. el volumen del sólido limitado por el cono.

A) $\frac{2\pi^2R^3}{3(\pi^2-1)}$ B) $\frac{2\pi^2R^3}{2(\pi^2-1)}$

C) $\frac{\pi^2R^3}{3(\pi^2-1)}$ D) $\frac{3\pi^2R^3}{2(\pi^2-1)}$

E) $\frac{4\pi^2R^3}{5(\pi^2-1)}$

69 Se tiene un tetraedro regular P – ABC de arista L. calcule el volumen del cono de revolución inscrito en el tetraedro cuyo vértice es P y su base esta inscrita en el triángulo ABC.

A) $\frac{\pi\sqrt{6}}{50}L^3$ B) $\frac{\pi\sqrt{6}}{100}L^3$ C) $\frac{\pi\sqrt{6}}{108}L^3$

D) $\frac{\pi\sqrt{6}}{120}L^3$ E) $\frac{\pi\sqrt{6}}{200}L^3$

70 En que relación se encuentran los volúmenes de un cono de revolución y el cilindro circular recto de mayor volumen inscrito en el cono.

A) $\frac{3}{8}$. B) $\frac{7}{9}$ C) $\frac{5}{9}$

D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{5}{8}$

71 En un cono de revolución la medida del radio de la base y su altura es 8m y 6m respectivamente. Se traza un plano paralelo a la base de modo que el área del círculo que se determina en el plano sea igual al área lateral del tronco de cono recto. Calcule la distancia de la base al plano (en m).

A) $\frac{5}{2}$ B) $2\left(3-\sqrt{3}\right)$

C) $2\left(3-\sqrt{5}\right)$ D) 3

E) $\frac{7}{2}$

72 Halle las dimensiones del cono de revolución de menor volumen circunscrito a un cilindro circular recto de radio de la base R y la altura H.

A) $\frac{3R}{2};3H$ B) $\frac{5R}{4};2H$ C) $\frac{3R}{2};2H$

D) $3R\frac{3}{2}H$ E) 2R; 3H

73 Calcule el volumen de un tronco de cono de revolución. sabiendo que los radios de sus bases son r y R (r< R) respectivamente. y que el sólido se puede inscribir una esfera.

A) $\pi\sqrt{Rr}\left(\frac{R^3-r^3}{R-r}\right)$ B) $\frac{2\pi\sqrt{Rr}}{3}\left(\frac{R^3-r^3}{R-r}\right)$

C) $\pi\sqrt{Rr}\left(\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\right)$ D) $\frac{2\pi}{3}\left(R^2+r^2+Rr\right)$

E) $\frac{2\pi}{3}\sqrt{Rr}\left(R^2-r^2-Rr\right)$

74 El desarrollo de la superficie lateral de un tronco de cono de revolución es un trapecio circular cuya área es de 30π. Calcule el volumen del tronco de cono si la altura y la generatriz miden 3 y 5 respectivamente.

A) 28π B) 30π C) 31π

D) 32π E) 36π

75 En un tronco de cono de revolución se inscribe un cono recto con su base congruente con la base menor del tronco y su vértice en el centro de la base mayor del tronco. Si la altura del tronco mide 2u y la generatriz $\sqrt{13}$u y el volumen de la región comprendida entre las superficies del tronco de cono y el cono inscrito en 54π. calcule el volumen del tronco (en u^3).

A) 54π B) 38π C) 40π

D) 42π E) 45π

76 En un tronco de cono de revolución se encuentra inscrita una esfera. si la suma de su diámetro con una de las generatrices del tronco cono es 25 y la suma de los radios de las bases del tronco es 13. Calcule el volumen del tronco de cono.

A) 532π B) 548π C) 600π

D) 624π E) 680π

77 En un cono de revolución su altura y su radio miden 5cm y 3cm respectivamente. Halle el volumen del mayor cilindro recto que se puede inscribir (en cm^3).

A) $\frac{5\pi}{3}$ B) $\frac{10\pi}{3}$ C) $\frac{20\pi}{3}$

D) $\frac{25\pi}{3}$ E) $\frac{28\pi}{3}$

78 Halle la razón entre los volúmenes de los sólidos obtenidos durante la rotación de un triángulo alrededor de la base y de una recta paralela a ella y que pasa por la vértice del triángulo.

A) 1 ÷ 1 B) 1 ÷ 3 C) 2 ÷ 3

D) 1 ÷ 2 E) 3 ÷ 4

79 En un trapecio isósceles. ángulo agudo mide 45° y las longitudes de los lados laterales son iguales a la longitud de la base menor. y gira alrededor del lado lateral. Si la longitud del lado lateral del trapecio es b. entonces el volumen del sólido de revolución obtenido es:

A) $\frac{1}{2}\pi b^3\left(5+3\sqrt{2}\right)$ B) $\frac{1}{2}\pi b^3\left(7+3\sqrt{2}\right)$

C) $\frac{1}{2}\pi b^3\left(3+\sqrt{2}\right)$ D) $\frac{\pi b^3}{6}\left(5+3\sqrt{3}\right)$

E) $\frac{\pi b^3}{6}\left(1+3\sqrt{2}\right)$

80 En un cono revolución de altura 8u y 5u se inscribe un cilindro de revolución. calcule el volumen máximo el cilindro(en u^3).

A) $\frac{700}{30}\pi$ B) $\frac{750}{23}\pi$ C) $\frac{800}{27}\pi$

D) $\frac{900}{32}\pi$ E) $\frac{830}{23}\pi$

81 En un cono equilátero se inscribe un cubo cuya arista mide "a" con una de sus caras contenida en la base del cono. Calcule el volumen del cono

A) $\frac{\pi a^3}{24}\left(11+6\sqrt{6}\right)$ B) $\frac{\pi a^3}{36}\left(22+9\sqrt{6}\right)$

C) $\frac{\pi a^3}{36}\left(11+6\sqrt{6}\right)$ D) $\frac{\pi a^3}{24}\left(22+9\sqrt{6}\right)$

E) $\frac{\pi a^3}{36}\left(11+9\sqrt{6}\right)$

82 La sección axial de un cono de revolución es una región equilátera de área $36\sqrt{3}$. Se traza un plano secante al cono. perpendicular a una generatriz y que pasa por un punto de la circunferencia de la base del cono. se determina una sección de área igual a:

A) $6\pi\sqrt{6}$ B) $8\pi\sqrt{6}$ C) $9\pi\sqrt{6}$

D) $10\pi\sqrt{6}$ E) $12\pi\sqrt{6}$

83 ¿Cuál es correcta?

I. La intersección de un plano con una esfera. es una circunferencia.

II. La superficie esférica. es un círculo.

III. Si el plano y una esfera son tangentes. entonces su intersección es un punto.

IV. La intersección de una recta secante con una esfera. es un segmento de recta.

A) I, II, III, IV B) I y III C) III y IV

D) II y IV E) I y IV

84 La arista de un hexaedro regular mide K. Halle la longijtud del radio de 2 esferas congruentes que puede ser introducidas en el hexaedro de forma que ellas no puedan desplazarse en el interior del hexaedro cuando éste es movido.

A) $\frac{K}{2}$ B) $\frac{3K}{8}$

C) $\frac{K}{4}\left(3-\sqrt{3}\right)$ D) $\frac{K}{5}\left(4-\sqrt{3}\right)$

E) $\frac{K}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)$

85 Halle en que relación se encuentran las áreas totales de una esfera y un cilindro de revolución. si la esfera esta inscrita en el cilindro .

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

86 Una esfera se encuentra en el interior de un tubo cilíndrico de manera que la superficie esférica esta en contacto con la superficie lateral del cilindro. Si el área de la esfera es numéricamente igual al volumen del cilindro.

A) 4 B) 6 C) 5

D) 7 E) 8

87 Si una esfera está inscrita en un cubo y el área de la superficie esférica es K veces el área lateral del cubo. Calcule K:

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{3}$

D) $\frac{\pi}{5}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

88 En un cono de revolución se inscribe una esfera. En el cono 2 generatrices diametralmente opuestas determinan un ángulo que 90°. Si el diámetro de la base mide $4\sqrt{2}$m . entonces el área de la superficie esférica es (en m^2):

A) $24(3-2\sqrt{2})\pi$ B) $28(3-2\sqrt{2})\pi$

C) $30(3-2\sqrt{2})\pi$ D) $32(3-2\sqrt{2})\pi$

E) $36(3-2\sqrt{2})\pi$

89 El área de la base de una pirámide cuadrangular es $16u^2$ y su apotema mide $2\sqrt{3}$u . Halle el área de la superficie total de la semiesfera inscrita en dicha pirámide. donde el círculo máximo está contenido en la base de la pirámide (en u^2).

A) 16π B) 12π C) 10π

D) 8π E) 6π

90 En una octante de esfera cuyo radio mide R esta inscrita una esfera. Halle el área de dicha superficie esférica.

A) $2(3-\sqrt{2})R^2\pi$ B) $2(2-\sqrt{3})R^2\pi$

C) $3R^2\pi$ D) $\frac{9}{2}R^2\pi$

E) $5R^2\pi$

91 Una esfera se encuentra inscrita en un tronco de cono de revolución si la suma de su diámetro con una de las generatrices del tronco de cono es 25 y la suma de los radios de las bases del tronco es 13. Halle el área de la superficie esférica.

A) 120π B) 144π C) 256π

D) 180π E) 216π

92 Halle el área (en m^2) de una superficie esférica sabiendo que las áreas de los círculos menores paralelos y distantes 3m y situados un mismo lado del centro miden π m 2 y 16 π m 2.

A) 65π B) 66π C) 68π

D) 70π E) 72π

93 Una superficie esférica de radio igual a $(\sqrt{5}+2)$cm se intercepta con un plano de modo que la diferencia de las áreas de los casquetes resultantes es igual al área de la región limitada por la sección determinada. A qué distancia del centro se trazo el plano (en cm).

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

94 En una esfera inscribimos un cono de revolución cuya base divide a la superficie esférica en 2 casquetes cuyas áreas están en razón de $\frac{1}{3}$. Si el radio de la esfera es 8m y el cono se encuentra en el mayor casquete. determine el volumen del sólido (en m^3).

A) 192π B) 190π C) 188π

D) 186π E) 184π

95 Una superficie esférica de centro O y radio R es interceptada por una superficie esférica de centro O. y radio 2R y por otra superficie esférica de centro O_2 y radio 5R. las superficies de centros O_1 y O_2 pasan por O. Halle en que relación se encuentran las áreas de los casquetes esféricos determinados por O en las superficies esféricas O_2 y O_3.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{2}{3}$ E) 1

96 Una pirámide regular cuadrangular tiene dos aristas laterales opuestas formando un ángulo recto y su volumen es $\frac{9\sqrt{2}}{2}u^3$. Si ésta pirámide está inscrita en un casquete esférico con su base inscrita en la base del casquete. halle el área del casquete (en u^2).

A) 9π B) 8π C) 12π

D) 10π E) 6π

97 Un plano P determina en superficie de una esfera una superficie esférica de área $25\pi\ u^2$. A es un punto de ésta superficie esférica que equidista de los puntos de la curva C de intersección en la superficie de la esfera con el plano P. halle AB si $B \in C$.

A) 3u B) 4u C)5u

D) 6u E) 7u

98 En un hexaedro regular cuya arista mide ℓ . se dibuja una esfera tangente a una cara y tangente a las cuatro aristas de la cara opuesta. Entonces. el área de la parte de la superficie esférica exterior al hexaedro es:

A) $\frac{15\pi\ell^2}{16}$ B) $\frac{7\pi\ell^2}{8}$ C) $\frac{15\pi\ell^2}{19}$

D) $\frac{15\pi\ell^2}{32}$ E) $\frac{7\pi\ell^2}{16}$

99 Se tiene un cono equilátero de altura H invertido (su vértice hacia abajo). Se inscribe una superficie esférica de diámetro $\frac{H}{2}$. Halle el área del casquete esférico mayor determinado por el plano que conviene a la circunferencia tangente.

A) $\frac{3\pi H^2}{8}$ B) $\frac{3\pi H^2}{16}$

C) $\frac{3\pi H^2}{32}$ D) $\frac{2\pi H^2}{17}$

E) $\frac{\pi H^2}{9}$

100 Se tiene una superficie esférica de radio R. Un plano secante divide a un diámetro perpendicularmente en dos segmentos de longitudes m y n (m<n) y determina en la superficie esférica una circunferencia menor de diámetro 4. Halle el producto de las áreas de los casquetes esféricos determinados en la superficie esférica por el plano.

A) $16\pi^2R^2$ B) $4\pi^2R^2$ C) $2\pi^2R^2$

D) π^2R^2 E) $\frac{\pi^2R^2}{2}$

101 En una esfera de radio R se taza un plano variable perpendicular el diámetro $\overline{AA'}$. halle el mayor radio del círculo que determina el plano variable si el área lateral de los conos es K veces el área del círculo variable que determina el plano.

A) $\frac{3R}{K^2}$ B) $\frac{4R}{K^2}$ C) $\frac{2R}{K^2}$

D) $\frac{R}{K^2}$ E) $\frac{3R}{K}$

102 En un cilindro recto de revolución se inscribe una superficie esférica de radio R tal que. sea una tangente a todas las

generatrices y a una base. se traza un plano secante al cilindro y tangente a la superficie esférica. determinandose así una sección limitada por las generatrices máximas y mínima que se obtienen miden 10 y 7 y R=4. halle el área de la sección (en u^2).

A) $\frac{27}{2}\pi\sqrt{2}$ B) $\frac{29}{2}\pi\sqrt{2}$

C) $\frac{31}{2}\pi\sqrt{2}$ D) $\frac{33}{2}\pi\sqrt{2}$

E) $\frac{35}{2}\pi\sqrt{2}$

103 Dos círculos máximos determinan al intersectarse un ángulo diedro que mide 60° y una cuña esférica de $\frac{500}{4}\pi$ de área total. halle la longitud del radio de la esfera.

A) 8 B) 8. 5 C) 9. 5
D) 9 E) 10

104 Al trazar un plano secante a una esfera de radio R. se determina una sección de área 9π. si la distancia del centro de la esfera al plano secante es 4. halle el valor de R.

A) 3 B) 3. 5 C) 4
D) 4. 5 E) 5

105 Un cono recto está circunscrito a una esfera cuyo radio mide R. Entonces. la longitud de la altura del cono que tiene el volumen mínimo es:

A) 2R B) 3R C) 4R

D) $\frac{3R}{2}$ E) $\frac{3R}{5}$

106 Una esfera descansa en la base cuadrangular de una pirámide regular de volumen V de manera que la arista lateral sea tangente a la esfera y la cara lateral determine con la base un ángulo diedro que mide de 60°. calcular el volumen de la pirámide cuyo vértice es el centro de la esfera y con base. es la base de la pirámide regular.

A) $\frac{1}{3}\left(\sqrt{10}-2\right)V$ B) $\frac{1}{4}\sqrt{5}V$ C) $\sqrt{5}V$

D) $\sqrt{2}V$ E) $\frac{2}{3}V$

107 Halle el volumen máximo de una pirámide hexagonal regular inscrito en una esfera cuyo radio mide R.

A) $\frac{\sqrt{2}R^3}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}R^3}{2}$ C) $\frac{4\sqrt{3}R^3}{9}$

D) $\frac{5\sqrt{3}R^3}{9}$ E) $\frac{16\sqrt{3}R^3}{27}$

108 Halle el volumen de la esfera inscrita en un octaedro regular de arista L.

A) $\frac{\pi\sqrt{6}}{27}L^3$ B) $\frac{\pi\sqrt{3}}{27}L^3$ C) $\frac{\pi\sqrt{6}}{25}L^3$

D) $\frac{27\pi}{108}L^3$ E) $\frac{25\pi}{27}L^3$

109 Una esfera es tangente a las aristas de un hexaedro regular de arista t. entonces el volumen de la esfera es:

A) $\frac{\pi t^3}{2}$ B) $\pi t^3\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{3}{4}\pi t^3$

D) $\frac{7}{8}\pi t^3$ E) πt^3

110 Un hexaedro regular de lado 4m está inscrito en una esfera. Determine el volumen de la esfera.

A) $\frac{96\pi\sqrt{5}}{7}$ B) $\frac{96\pi\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{96\pi\sqrt{3}}{5}$

D) $\frac{96\pi\sqrt{3}}{11}$ E) $\frac{86\pi\sqrt{3}}{3}$

111 De un cilindro macizo de plomo. se han obtenido al fundirlo un cono circular recto y una esfera. Si la altura y el diámetro tanto del cono como del cilindro miden 9cm. Halle el diámetrode la esfera (en cm).

A) 3 B) 6 C) 9
D) 12 E)15

112 Si M y N es el área lateral y el área de la base de un cono de revolución. entonces el radio de la esfera inscrita en el cono recto de revolución mide:

A) $\sqrt{\frac{N(M+N)}{\pi(M-N)}}$ B) $\sqrt{\frac{N(M-N)}{\pi(M+N)}}$

C) $\sqrt{\frac{\pi(M-N)}{(M+N)}}$ D) $\frac{N}{\pi}\sqrt{\frac{M-N}{M+N}}$

E) $\sqrt{\frac{N(M-N)}{M+N}}$

113 En una esfera de radio R. se inscribe un cilindro de revolución de mayor volumen. Halle sus dimensiones.

A) $\frac{R}{2}\sqrt{3};\frac{R}{2}\sqrt{6}$ B) $\frac{R}{3}\sqrt{6};\frac{2}{3}R\sqrt{3}$

C) $\frac{R}{2}\sqrt{6};\frac{R}{3}\sqrt{3}$ D) $\frac{R}{4};\frac{R}{3}$

E) $\frac{R}{2}\sqrt{6};\frac{R}{3}\sqrt{2}$

114 En una esfera de radio R se inscribe un cono circular recto de mayor volumen. Halle dicho volumen.

A) $\frac{32}{57}\pi R^3$ B) $\frac{32}{33}\pi R^3$ C) $\frac{32}{87}\pi R^3$

D) $\frac{32}{61}\pi R^3$ E) $\frac{32}{55}\pi R^3$

115 En una esfera de radio R se inscribe un cono circular recto de máximo volumen. Calcule el radio de la base de dicho cono.

A) $\frac{\sqrt{2}R}{3}$ B) $\frac{3\sqrt{2}R}{3}$ C) $\frac{2\sqrt{2}R}{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}R}{3}$ E) $\frac{2\sqrt{3}R}{3}$

CUADRO DE RESPUESTAS

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
B	D	A	A	D	D	C	C	A	D
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	C	A	B	E	B	E	D	A	C
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	E	C	C	*	D	E	A	A	D
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
E	D	B	B	C	B	A	A	A	C
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	D	*	A	A	*	D	D	A	D
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
*	B	D	D	D	C	C	C	B	C
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
C	E	B	B	C	A	C	A	C	D
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
C	A	E	C	D	A	C	D	*	C
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
B	C	C	C	B	A	A	D	D	B
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
B	C	A	A	E	A	*	*	*	A
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
*	*	C	E	C	A	E	A	B	E
111	112	113	114	115					
C	B	B	D	C					

PREGUNTAS RESUELTAS TIPO ADMISION UNI

CAPITULO 55

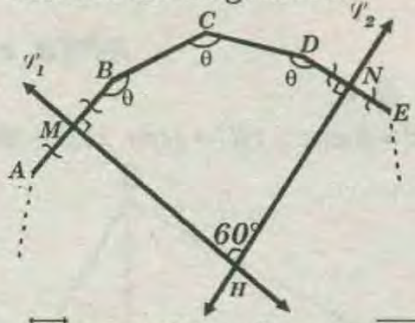
PROBLEMA 1 :

Halle el número de diagonales de un polígono regular *ABCDE*... sabiendo que las mediatrices de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ forman un ángulo de $60°$.

A) 90 B) 105 C) 120 D) 135 E) 150

RESOLUCIÓN :

Sea N_D: número de diagonales.



$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$: *mediatrices de* $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$

Sea n el número de lados del polígono regular.

Del hexágono *MBCDNH* tenemos que:

$$\sum m\sphericalangle i = 720°$$

$$3\theta + 180° + 60° = 720°$$

$$\Rightarrow \theta = 160° \text{ y } \theta = \frac{180°(n-2)}{n}$$

Entonces, $n = 18$

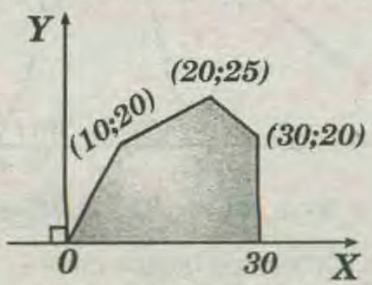
$$N_D = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow N_D \frac{(18)(15)}{2}$$

$$\Rightarrow ND = 135$$

RPTA : "D"

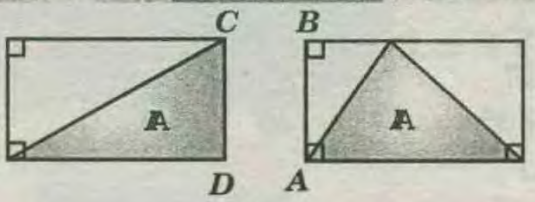
PROBLEMA 2 :

En la figura, la región sombreada se divide en dos partes equivalentes. Halle el área de una de ellas.



A) 572 u² B)275u² C)550u² D)375u² E)250u²

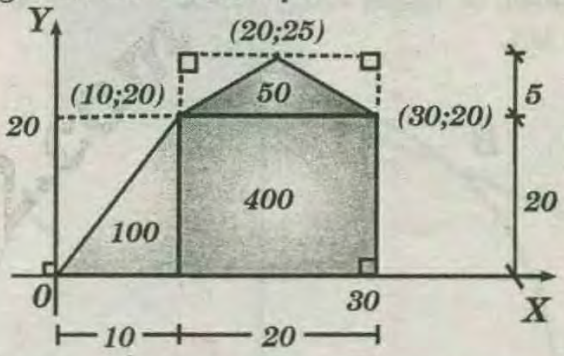
RESOLUCIÓN :



$$A = \frac{A_{\square ABCD}}{2}$$

Se pide la mitad del área sombreada.

En el gráfico se deduce que

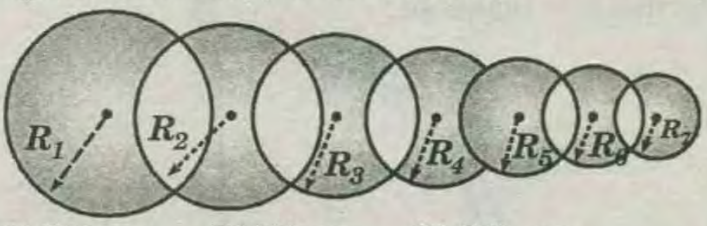


$$\Rightarrow \frac{\text{Área sombreada}}{2} = 275$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

En la figura $\sum_{i=1}^{7} R_i = \sum_{i=1}^{7} i^2$. Halle el perímetro de la región sombreada, en centímetros.

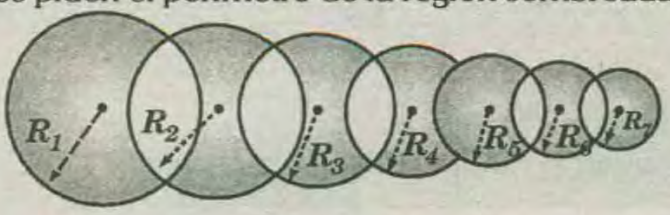


A) 280πcm B)300πcm C) 250πcm

D) 320πcm E) 270πcm

RESOLUCIÓN :

Nos piden el perímetro de la región sombreada



En el gráfico observamos que el perímetro de la región sombreada equivale a la suma de longitudes de todas las circunferencias

$$\Rightarrow Perimetro = 2\pi R_1 + 2\pi R_2 + ... + 2\pi R_7$$
$$= 2\pi(R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_7)$$

Del dato tenemos

$$\sum_{i=1}^{7} R_i = \sum_{i=1}^{7} i^2 \Rightarrow R_1 + R_2 + ... + R_7 =$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 7^2 = 140$$

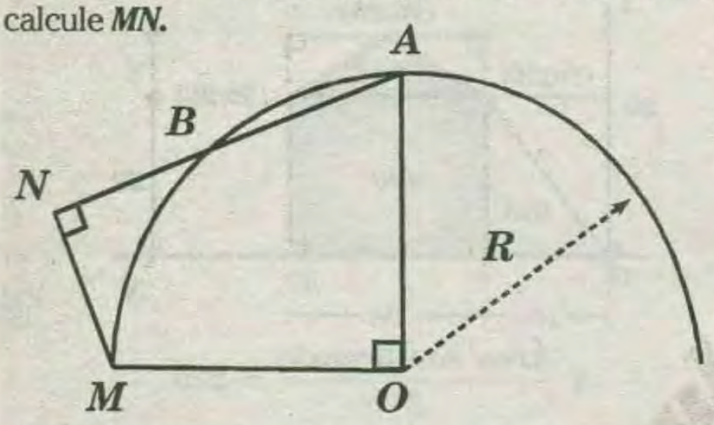
Luego :

$$Perímetro = 2\pi(140) = 280\pi$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 4 :

En la figura, si $m\widehat{BA}=30°$ y el radio mide R cm, calcule MN.

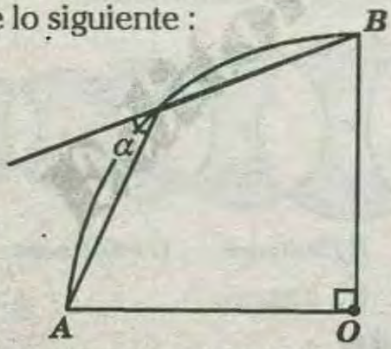


A) $\sqrt{2R}$ cm B) $2\sqrt{2R}$ cm C) $4\sqrt{2R}$ cm

D) $\frac{\sqrt{2}}{4}R$ cm E) $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ cm

RESOLUCIÓN :

* Recuerde lo siguiente :

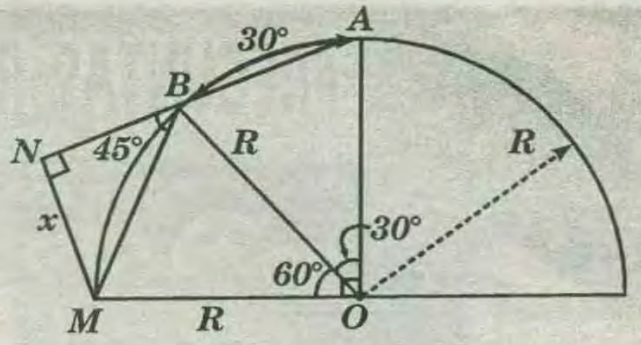


En el cuadrante AOB se tiene que :

$$\alpha = \frac{90°}{2} = 45°$$

Nos piden $MN=x$.

De los datos, resulta el siguiente gráfico.



Del ΔMNB (equilátero): $MB=R$.

En el $\triangle MNB$ notable de $45°$

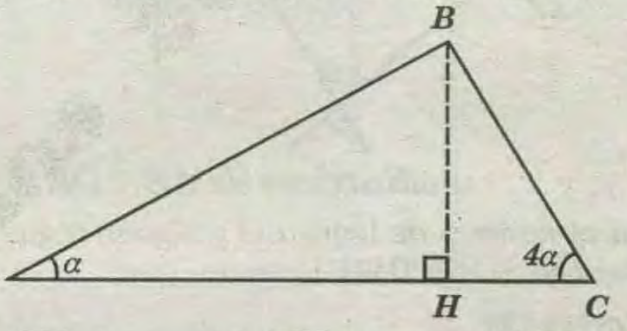
$$MB = x\sqrt{2} = R \Rightarrow x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}R \text{ cm}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 5 :

En la figura, $AH=8$ cm y $HC=1$cm. Halle BC.



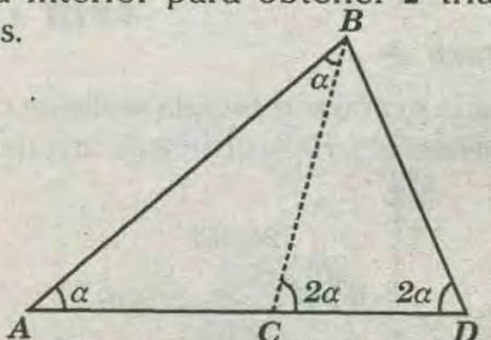
A) $(\sqrt{110}-8)$cm B) $(\sqrt{113}-8)$cm C) $(\sqrt{115}-8)$cm

D) $(\sqrt{107}-8)$cm E) $(\sqrt{119}-8)$ cm

RESOLUCIÓN :

Recordemos :

Cuando se tiene un triángulo donde un ángulo es el doble del otro, se traza convenientemente una ceviana interior para obtener 2 triángulos isósceles.



$$m\sphericalangle ABC = \alpha \Rightarrow AC = BC \text{ y } BC = BD$$

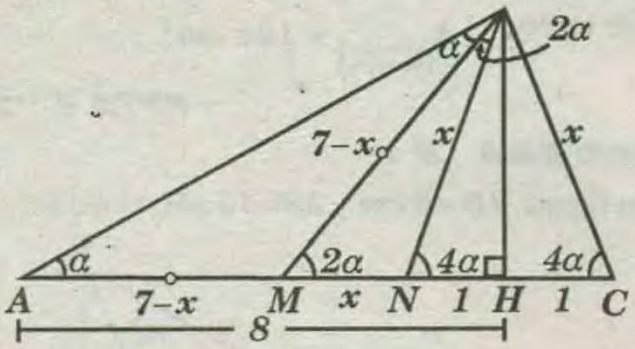
En el gráfico se hacen los trazos convenientes.

Se traza $\overline{BM}$ tal que $m\sphericalangle ABM=\alpha$.

$$\Rightarrow AM=BM \wedge m\sphericalangle BMN=2\alpha$$

Se traza $\overline{BN}$, tal que $m\sphericalangle MBN=2\alpha$.

$\Rightarrow MN=NB \wedge m\sphericalangle BNH=4\alpha$



ΔNBC es isósceles

$\Rightarrow BN=BC=x$

Luego, en el $\triangle MHB$ y $\triangle BHC$ aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$(7-x)^2-(x+1)^2=x^2-1^2$$

entonces $x^2+16x-49=0$

Completando cuadrados

$$x^2+16x+64-113=0 \Rightarrow (x+8)^2=113$$

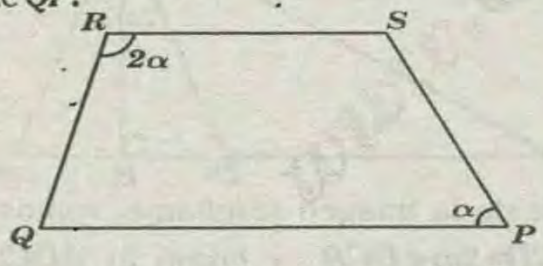
$$\Rightarrow x+8=\sqrt{113} \Rightarrow x=\sqrt{113}-8$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 6 :

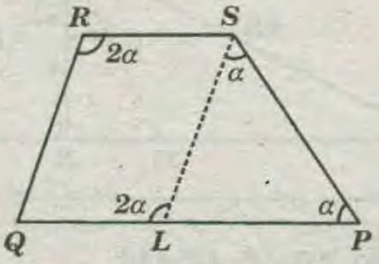
En la figura, $\overline{QP} // \overline{RS}$; $RS=6$ cm y $QR=9$ cm.

Calcule QP.

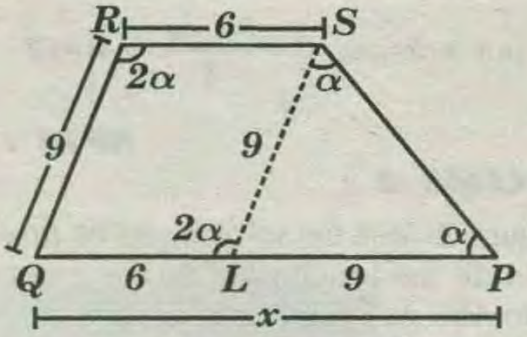


A) 12 cm B) 14 cm C) 15 cm
D) 16 cm E) 18 cm

RESOLUCIÓN :



Sabiendo que $\square QRSP$ (trapecio) y $m\sphericalangle QRS = 2m\sphericalangle QPS$, es recomendable trazar $(\overline{SL})//(\overline{RQ})$, ya que así aprovecharemos el triángulo isósceles SLP.



Vemos que: $m\sphericalangle QRS=2m\sphericalangle QPS$

Se nos pide hallar: $QP=x$

$\square QRSL$ (paralelogramo)

$QL=6$; $SL=9$

ΔLSP es isósceles

$LP=9 \Rightarrow x=6+9 \Rightarrow x=15$

RPTA : "C"

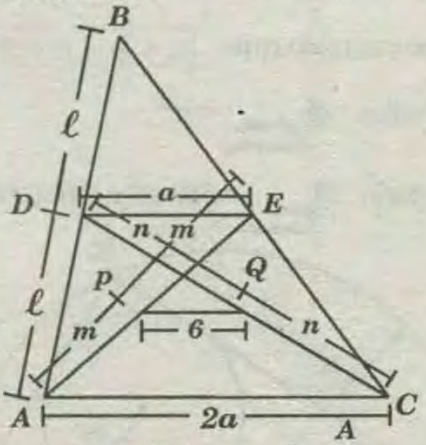
PROBLEMA 7 :

En un triángulo ABC, D es punto medio de $\overline{AB}$ y E es un punto sobre $\overline{BC}$, tal que $\overline{DE} // \overline{AC}$. Si P y Q son los puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{DC}$, respectivamente, y $PQ=6$ cm, halle AC.

A) 16 cm B) 28 cm C) 22 cm
D) 24 cm E) 18 cm

RESOLUCIÓN :

Nos piden hallar: AC.



Ya que $AD=BD$ y $\overline{DE} // \overline{AC}$

Al aplicar el teorema de la base media en el triángulo ABC, tenemos:

$$DE=\frac{AC}{2}=a$$

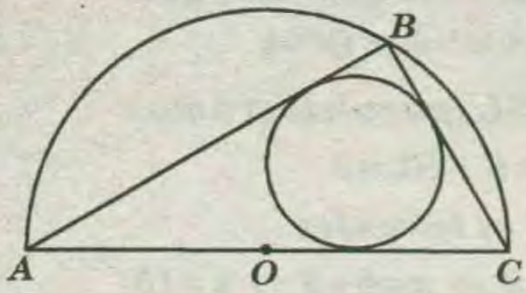
Del enunciado tenemos que P y Q son puntos medios de las diagonales $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ del trapecio; también, $PQ=6$.

Luego, por teorema: $6=\frac{2a-a}{2} \Rightarrow a=12$

RPTA : "D"

PROBLEMA 8 :

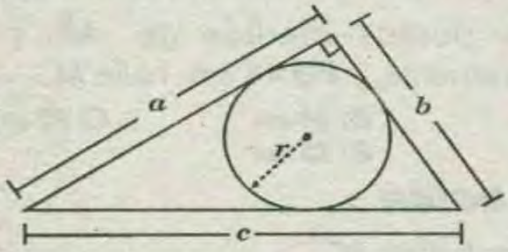
En la figura, el área del semicírculo es $50\pi cm^2$ y la suma de las longitudes de los catetos del triángulo ABC es $28cm$. Halle el área del círculo inscrito en el triángulo ABC.



A) $8\pi\,cm^2$ B) $12\pi\,cm^2$ C) $4\pi\,cm^2$
D) $16\pi\,cm^2$ E) $10\pi\,cm^2$

RESOLUCIÓN :

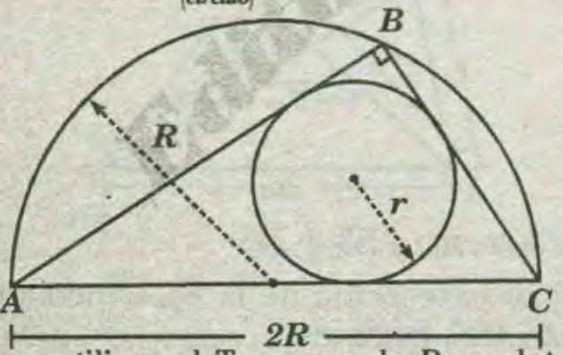
Recordando el Teorema de Poncelet:



en donde se cumple que: $\boxed{a+b=c+2r}$

Se nos pide hallar : $A_{\left(\substack{círculo\\inscrito}\right)}=\pi r^2$

Según enunciado : $A_{\left(\substack{semi\\círculo}\right)}=50cm^2$ y $AB+BC=28cm$



Vamos a utilizar el Teorema de Poncelet para hallar r. $\underbrace{AB+BC}=2R+2r$

$28\,cm=2R+2r$.....(I)

Según el enunciado, tenemos:

$\frac{\pi(R)^2}{2}=50\pi\,cm^2 \Rightarrow R=10$.....(II)

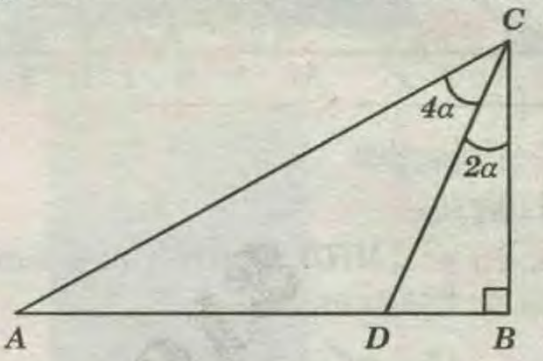
Remplazando R en (I) obtenemos que $r=4$

Por lo tanto: $A_{\left(\substack{círculo\\inscrito}\right)}=16\pi\,cm^2$

RPTA : "D"

PROBLEMA 9 :

En la figura, $AD=8\,cm$ y $AB=10\,cm$. Halle BC.

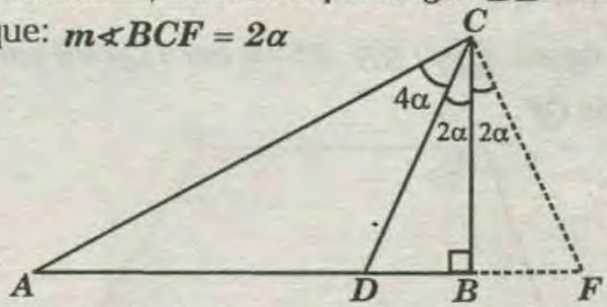


A) $2\sqrt{7}\,cm$ B) $4\sqrt{2}\,cm$ C) $2\sqrt{6}\,cm$
D) $3\sqrt{3}\,cm$ E) $4\sqrt{3}\,cm$

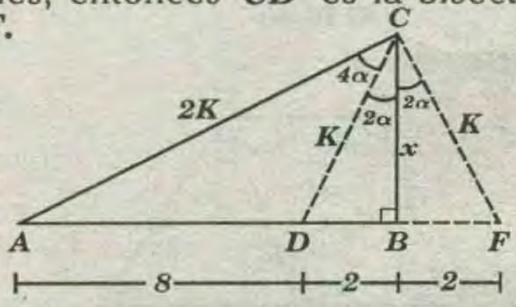
RESOLUCION :

Recordando las relaciones métricas de los triángulos.

En tal sentido, debemos prolongar $\overline{DB}$ hasta F tal que: $m\measuredangle BCF=2\alpha$



A partir de la imagen resultante, vemos que $m\measuredangle ACD=2m\measuredangle DCB$; y como el ΔDCF es isósceles, entonces $\overline{CD}$ es la bisectriz del $\measuredangle ACF$.



Del enunciado: $AD=8;\ AB=10$.

Se nos pide hallar: BC.

Por teorema de la bisectriz interior en ΔACF, tenemos:

$$\frac{AC}{CF}=\frac{8}{4}\Rightarrow AC=2(CF)$$

Operando por el teorema del cálculo de la bisectriz interior en ΔACF, tenemos:

$$(CD)^2=(AC)(CF)-(AD)(DF)$$

$$K^2=(2K)(K)-(8)(4)$$

$$K=4\sqrt{2}$$

Se concluye aplicando en el $\triangle DCB$ el teorema de Pitágoras:

$$(4\sqrt{2})^2=x^2+2^2\Rightarrow x=2\sqrt{7}$$

RPTA : "A"

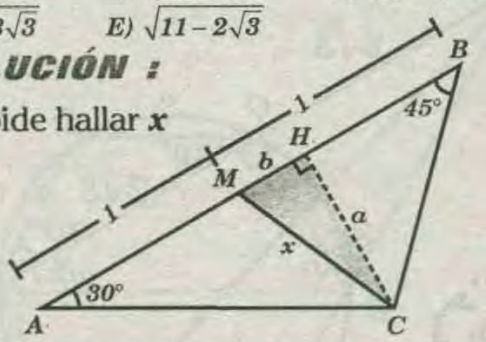
PROBLEMA 10 :

En un triángulo ABC, el lado $\overline{AB}$ mide 2 cm, $m\sphericalangle A=30°$ y $m\sphericalangle B=45°$. Calcule la longitud (en cm) de la mediana relativa al lado $\overline{AB}$.

A) $\sqrt{11-6\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{11-5\sqrt{3}}$ C) $\sqrt{11-4\sqrt{3}}$
D) $\sqrt{11-3\sqrt{3}}$ E) $\sqrt{11-2\sqrt{3}}$

RESOLUCIÓN :

Se nos pide hallar x



Siendo $\overline{CM}$ la mediana relativa al lado $\overline{AB}$. Utilizando triángulos notables:

$\triangle CHB$: $HB=a$

$\triangle CHA$: $HA=a\sqrt{3}$

Ya que:

$$HA+HB=AB=2\Rightarrow a=2/(1+\sqrt{3})$$

$$HM=1-HB=1-a\Rightarrow b=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

Finalmente: $x^2=a^2+b^2\Rightarrow x=\sqrt{11-6\sqrt{3}}$

RPTA : "A"

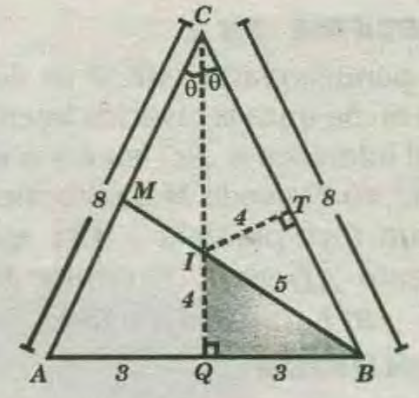
PROBLEMA 11 :

ABC es un triángulo isósceles $(AC=BC)$. I es el incentro del triángulo. Si $AB=6$ cm, $AC=8$ cm, la distancia de I al lado $\overline{BC}$ es 4cm y la prolongación de $\overline{BI}$ corta a $\overline{AC}$ en M, calcule la longitud (en cm) de $\overline{BM}$.

A) $\frac{44}{7}$ B) $\frac{55}{7}$ C) $\frac{57}{7}$ D) $\frac{60}{7}$ E) $\frac{65}{7}$

RESOLUCIÓN :

Nos piden BM.



* Por dato : $IT=4$

I: incentro del triángulo ABC

* Teorema : $IQ=IT=4$; $\Rightarrow BI=5$

ΔABC: teorema del incentro

$$\frac{BI}{IM}=\frac{8+6}{8};\ BI=5\Rightarrow IM=\frac{20}{7}$$

* Entonces : $BM=BI+IM\Rightarrow BM=\frac{55}{7}$

NOTA:

Dado que los ángulos de los vértices A y B son de $106°$, afirmamos que el problema es absurdo.

RPTA : "B"

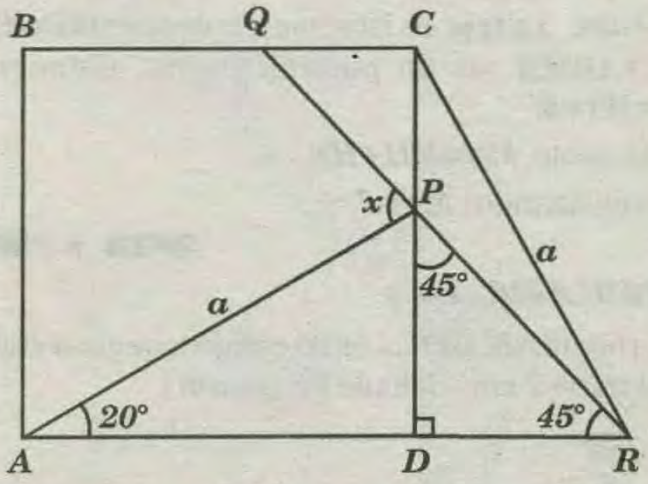
PROBLEMA 12 :

En un cuadrado $ABCD$ se prolonga el lado $\overline{AD}$ hasta el punto R. Desde un punto Q de $\overline{BC}$ se traza $\overline{QR}$ que interseca a $\overline{CD}$ en P. Determine la medidadel ángulo APQ si $PA=CR$ y $m\sphericalangle PAR=20°$.

A) 55° B) 60° C) 65° D) 70° E) 75°

RESOLUCIÓN :

Esquematizando:



De la figura, $\triangle ADP\cong\triangle CDR$.

Luego : $DP=DR$

Entonces :

$m\sphericalangle PRD=45°$

ΔAPR : $x=45°+20°=65°$

RPTA : "B"

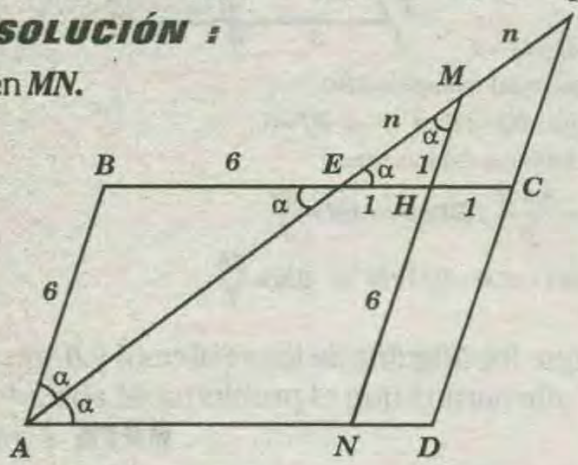
PROBLEMA 13 :

En el paralelogramo $ABCD$ se tiene $AB=6\ m$ y $BC=8\ m$. Se traza la bisectriz interior del ángulo A la cual interseca a $\overline{BC}$ en E y a la prolongación de $\overline{DC}$ en F; desde M, punto medio de $\overline{EF}$, se traza un rayo paralelo a $\overline{CD}$ que interseca al segmento $\overline{AD}$ en N. Determine MN (en m).

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

RESOLUCIÓN :

Piden MN.



Del dato, $\overline{AE}$ es bisectriz del $\sphericalangle BAD$, entonces

$m\sphericalangle BAE=m\sphericalangle EAD=\alpha$.

Además, $\overline{BC}//\overline{AD}$, entonces

$m\sphericalangle AEB=m\sphericalangle EAD=\alpha$.

Luego:

$\triangle ABE$ isósceles, $AB=BE=6$ y $EC=2$.

También M es punto medio de $\overline{EF}$ y $\overline{MN}//\overline{FD}$

Entonces, $EH=HC=1$.

Además, $\triangle EHM$ es isósceles, entonces $EH=HM$ y $\square ABHN$ es un paralelogramo, entonces $AB=HN=6$.

Finalmente, $MN=MH+HN$

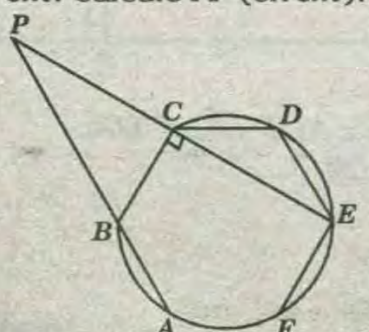
Reemplazando : $MN=7$

RPTA : "B"

PROBLEMA 14 :

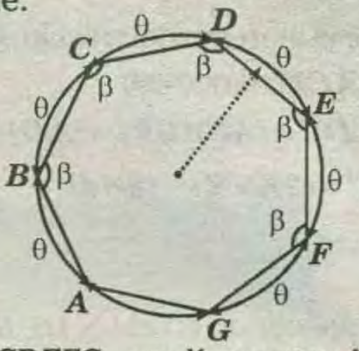
En la figura $ABCDEF....$ es un polígono regular cuyo lado mide $2\ cm$. Calcule PF (en cm).

A) $4\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{13}$
C) $3\sqrt{6}$
D) $6\sqrt{2}$
E) $4\sqrt{6}$



RESOLUCIÓN :

Recuerde que:



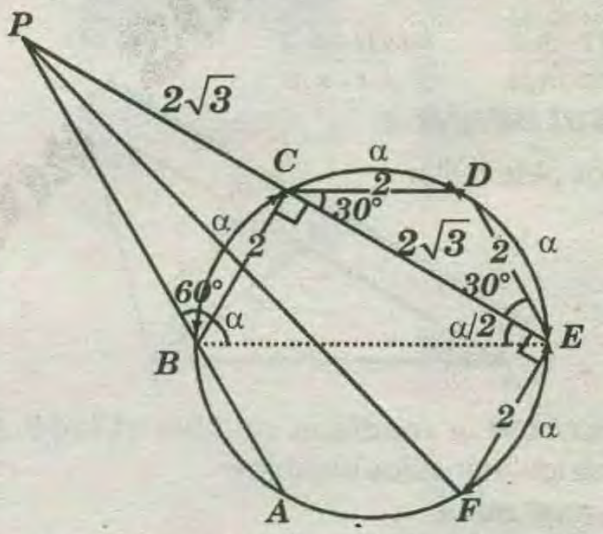
$ABCDEFG...$: polígono regular

$$\boxed{m\widehat{AB}=m\widehat{BC}=m\widehat{CD}=...}$$

Piden PF.

- Del gráfico $m\widehat{BC}=m\widehat{CD}=m\widehat{DE}=\alpha$
- $\triangle BCE$

$$\alpha+\frac{\alpha}{2}=90^\circ \Rightarrow \alpha=60^\circ$$



- $m\sphericalangle CEF=90^\circ$ y del $\triangle PEF$

$$(PF)^2=2^2+(4\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow PF=2\sqrt{3}$$

RPTA : "B"

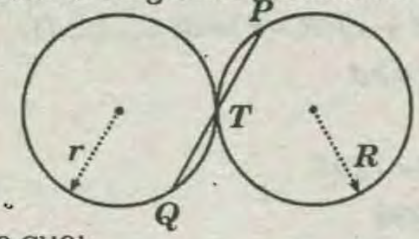
PROBLEMA 15 :

Dos circunferencias C_1 y C_2 de centro O y O', respectivamente, son tangentes exteriormente en T. Desde O se traza una tangente a C_2 en P y desde O' se traza una tangente a C_1 en Q ($\overline{OP}$ no se interseca con $\overline{O'Q}$). Si se tiene que $\overline{PQ}$ se interseca con $\overline{OO'}$ en T, entonces la relación de los radios de dichas circunferencias es:

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3

RESOLUCIÓN :

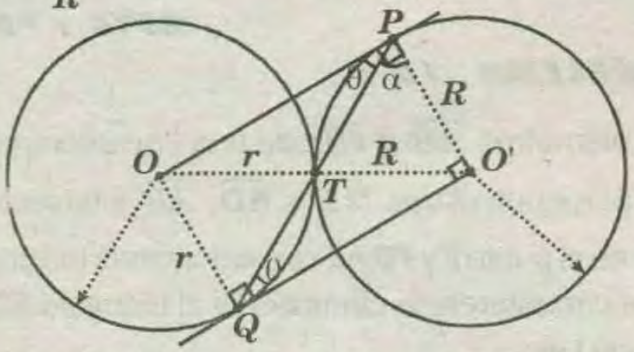
Circunferencias tangentes exteriores.



Se cumple que:

$m\widehat{QT} = m\widehat{TP}$

Piden $\frac{r}{R}$



Debido a la propiedad $m\widehat{QT} = m\widehat{TP}$, tenemos

$m\measuredangle PQO' = m\measuredangle QPO = \theta$

En P, $\alpha + \theta = 90°$

$\Rightarrow m\measuredangle QO'P = 90°$

Luego, $OPO'Q$ es un rectángulo.

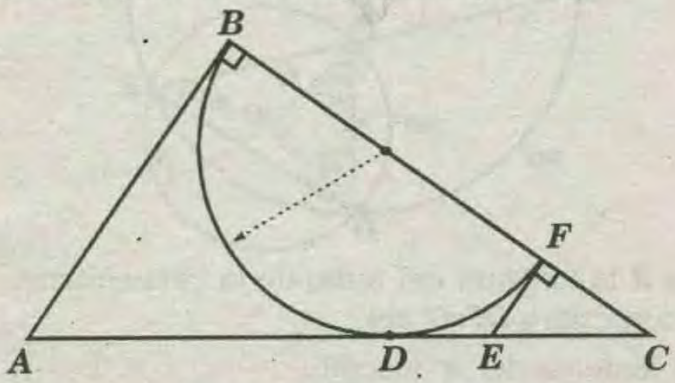
$\Rightarrow r = R$

$\Rightarrow \frac{r}{R} = 1$

RPTA : "C"

PROBLEMA 16 :

En la figura, se tiene una semicircunferencia con diámetro $\overline{BF}$, donde D es punto de tangencia. Si $AD=3$ cm, $EC=2$ cm. Calcule AC (en cm).



A) 6,0 B) 6,4 C) 6,8 D) 7,2 E) 7,6

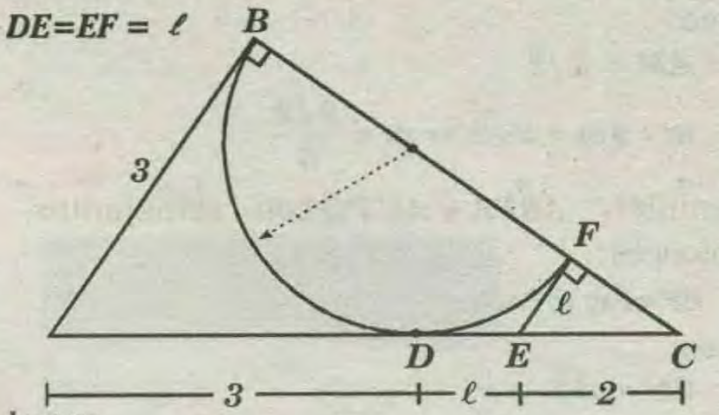
RESOLUCIÓN :

Piden $DE = \ell$

Al tener los puntos de tangencia B, F y D, se cumple que :

$AD=AB=3$

$DE=EF=\ell$



Luego

$\triangle ABC \sim \triangle EFC$

$$\frac{3}{5+\ell} = \frac{\ell}{2} \Rightarrow 6 = \underset{1}{\ell}(5+\underset{1}{\ell})$$

Entonces : $\ell = 1 \Rightarrow DE = 1$

RPTA : "A"

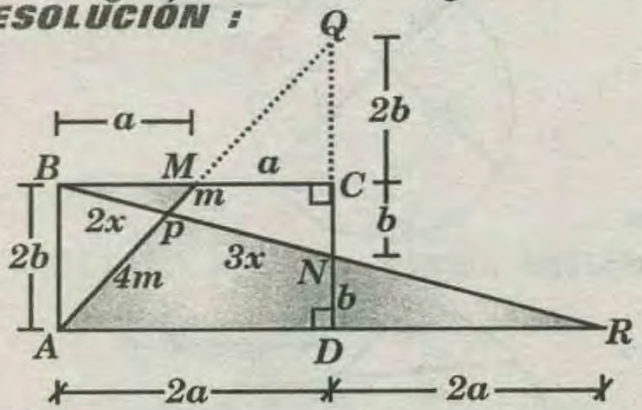
PROBLEMA 17 :

En un rectángulo $ABCD$, M y N son puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, tales que $AM = 2\sqrt{2}$ cm y $BN=\sqrt{17}$ cm. Si P es el punto de intersección de los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$, entonces el valor de $PM+PN$ en cm es:

A) $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{17}}{5}$ B) $\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{17}}{5}$ C) $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{17}}{5}$

D) $\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{17}}{5}$ E) $\frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{17}}{5}$

RESOLUCIÓN :



Nos piden:

$PM+PN$

Datos:

$AM = 2\sqrt{2}$; $BN=\sqrt{17}$

Se observa que ΔBPM y ΔRPA son semejantes, entonces:

$PM=m;\ AP=4m$

Pero:

$AM = 2\sqrt{2}$

$$m+4m=2\sqrt{2} \Rightarrow m=\frac{2\sqrt{2}}{5}$$

También $\triangle BPA$ y $\triangle NPQ$ son semejantes, entonces:

$BP=2x;\ PN=3x$

Pero:

$BN=\sqrt{17}$

$$2x+3x=\sqrt{17} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{17}}{5}$$

Luego:

$$PN=\frac{3\sqrt{17}}{5}$$

$$\Rightarrow PM+PN=\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{17}}{5}$$

RPTA : "D"

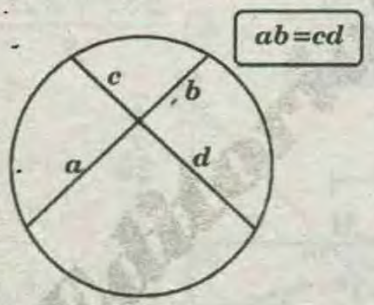
PROBLEMA 18 :

En una circunferencia de $10\ cm$ de radio, dos cuerdas se cortan de manera que el producto de los segmentos que cada una determina sobre sí es $1296\ cm^4$. Determine a qué distancia (en cm) del centro se halla el punto de intersección.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

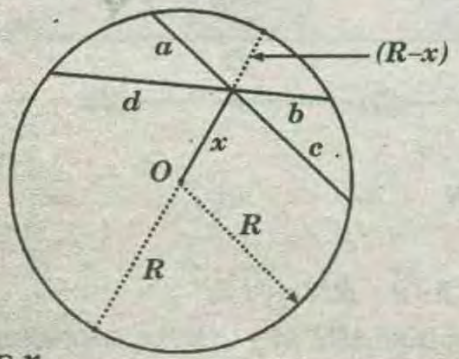
RESOLUCIÓN :

Recordemos el teorema de las cuerdas en la circunferencia.



Dato:

$abcd=1296$ y $R=10$



Nos piden x.

Por teorema de las cuerdas tenemos:

$$(R+x)(R-x)=ac \ .....(I)$$

También $ac=bd$

En el dato:

$(ac)(bd)=1296$

$\Rightarrow (ac)^2=1296$

Luego: $ac=36$ y $R=10$

En (I) tenemos : $(10+x)(10-x)=36$

Resolviendo $x=8$.

RPTA : "D"

PROBLEMA 19 :

Los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de una circunferencia son perpendiculares. Si $E \in \widehat{BD}$, $\widehat{AE}$ interseca a $\overline{CD}$ en el punto F y $FD=1\ cm$, entonces la longitud de la circunferencia circunscrita al triángulo FED (en cm) es:

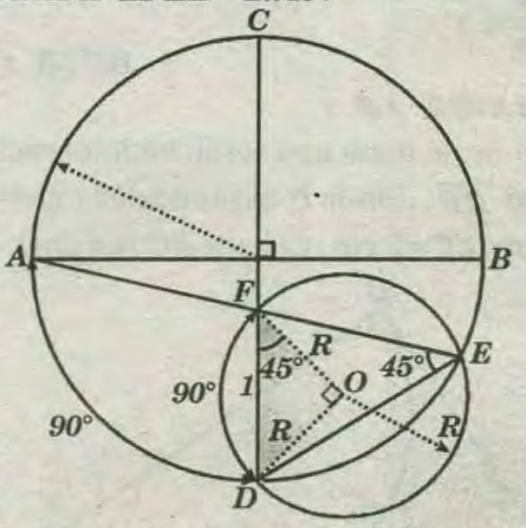
A) $\pi\sqrt{2}$ B) $2\pi\sqrt{2}$ C) $2\pi\sqrt{3}$ D) $3\pi\sqrt{2}$ E) $3\pi\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :

Se sabe que la longitud de una circunferencia de radio R es igual a $2\pi R$.

Nos piden la longitud de la circunferencia circunscrita al $\triangle FED = 2\pi R$.

Datos:



Sea R la longitud del radio de la circunferencia circunscrita y $DF=1\ cm$.

Por teorema del $\measuredangle$ inscrito:

$m\measuredangle AED = 45°$

$\Rightarrow m\widehat{DF} = 90°$

En el $\triangle DOF$: notable $45°$, $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Luego la longitud de la circunferencia es igual a :

$2\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \pi\sqrt{2}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 20 :

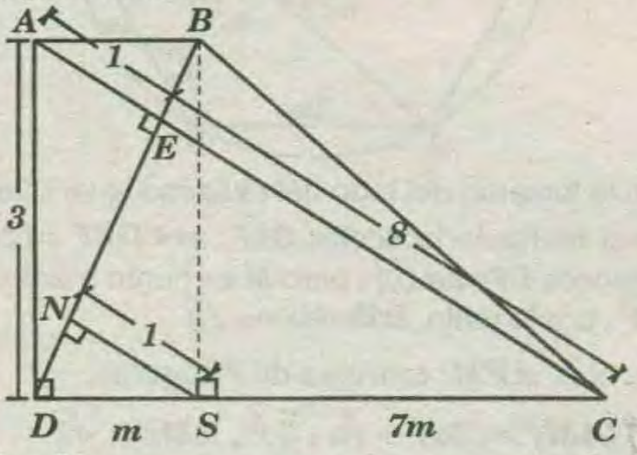
En un trapecio rectángulo $ABCD$ (recto en A y D) sus diagonales se intersecan perpendicularmente en E. Si $AD=3\ m$ y $AE=1\ m$. Determinar (en m) la proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{DC}$.

A) $\frac{21\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{21\sqrt{2}}{2}$ C) 9

D) 10 E) $11\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

* Esquematizando :



Piden SC.

Del gráfico

. $\overline{SC}$: proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{DC}$

. $\triangle ACD$

$(3)^2=AC \times 1$

$\Rightarrow AC=9$ y $EC=8$

. $\triangle ADC$

$(DC)^2+(3)^2=(9)^2$

$\Rightarrow DC=6\sqrt{2}$

. $\triangle DAB \cong \triangle DBS$

$\Rightarrow SN=AE=1$

. $\triangle DNS \sim \triangle DEC$

$\frac{DS}{DC}=\frac{1}{8} \Rightarrow DS=m$ y $CS=7m$

. Luego :

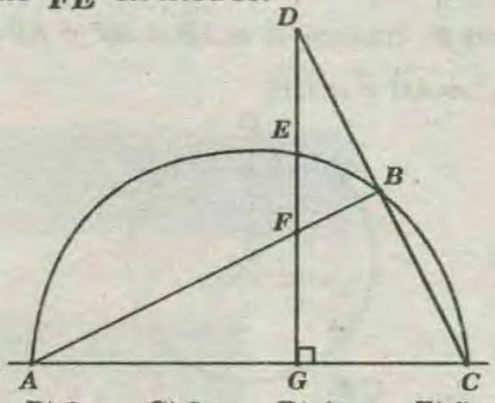
$$8m=6\sqrt{2} \Rightarrow m=\frac{3}{4}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow SC=7m=7\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)=\frac{21}{4}\sqrt{2}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 21 :

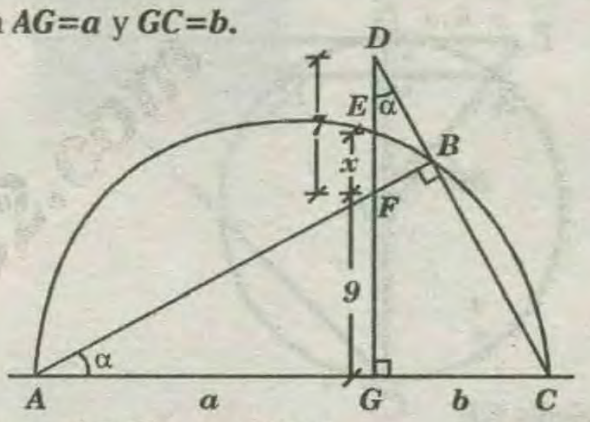
La figura muestra un semicircunferencia donde $GF=9\ m$ y $FD=7\ m$. Calcule la longitud del segmento $\overline{FE}$ en metros.



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

Sean $AG=a$ y $GC=b$.



Como $m\angle BAC=m\angle GDC$

$\triangle AGF \sim \triangle DGC$

$\frac{a}{16}=\frac{9}{b} \Rightarrow ab=9(16).....(I)$

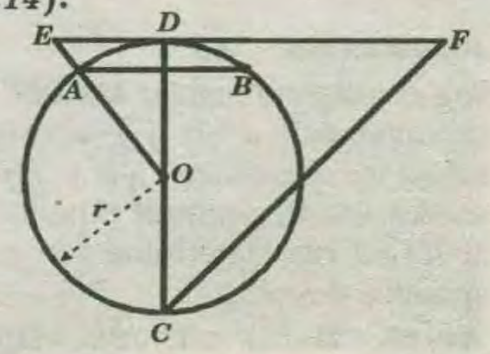
Para la circunferencia

$(x+9)^2=ab$, entonces $(x+9)^2=9(16) \Rightarrow x=3$

RPTA : "C"

PROBLEMA 22 :

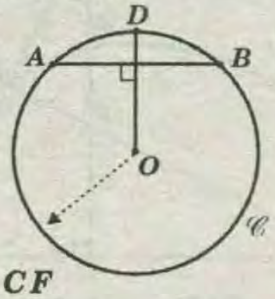
En la figura, $\overline{AB}$ es el lado de un exágono regular inscrito en la circunferencia de centro O. El diámetro $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y D es punto de tangencia. Si $EF=3r$, determine el valor de $\frac{CF}{\ell\widehat{CD}}$ $(\pi=3,14)$.



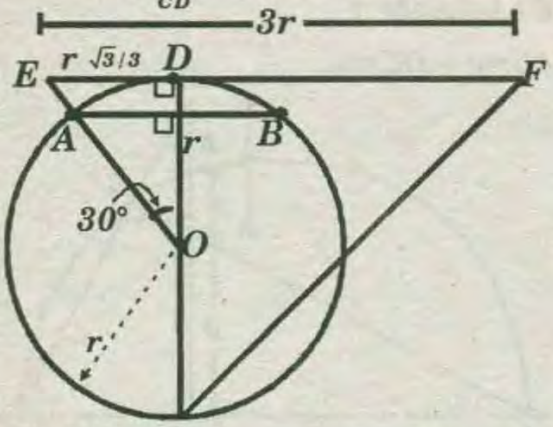
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

RESOLUCIÓN :

Sabiendo que $\overline{AB}$ es lado de un exágono regular inscrito en $\mathscr{C}$, entonces la $m\widehat{AB} = 60°$ y $AB=r$; también, $m\widehat{AD} = m\widehat{DB}$.



Se nos pide : $\frac{CF}{\ell_{\widehat{CD}}}$



Se calcula CF.

En el $\triangle CDF$, aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$(CF)^2 = (2r)^2 + \left(3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$(CF)^2 = 4r^2 + 9r^2 + \frac{r^2}{3} - 2r^2\sqrt{3}$$

$$(CF)^2 = r^2\left(\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}\right) ; \quad (CF)^2 = r^2(9{,}87)$$

$\Rightarrow CF = r(3{,}14)$ ..... (I) (valor aproximado)

Ya que $\ell_{\widehat{CD}} = \pi r \Rightarrow \ell_{\widehat{CD}} = 3{,}14r$ ..... (II)

De (I) y (II) : $\frac{3{,}14r}{3{,}14r} = 1$

RPTA : "C"

PROBLEMA 23 :

Sea el exágono regular $ABCDEF$ inscrito en una circunferencia, sobre $\widehat{DE}$ se ubica el punto T, se trazan los segmentos $\overline{AT}$ y $\overline{DF}$ que se cortan en el punto M, siendo M el punto medio de $\overline{DF}$. Si $MT=3$ cm, determine (en cm) el valor del apotema del exágono.

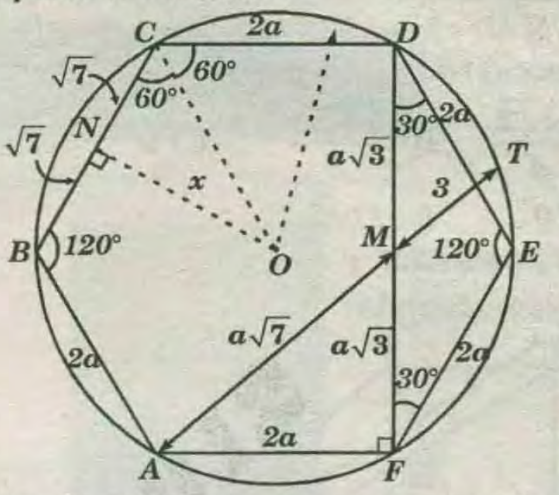
A) $\sqrt{19}$ B) $\sqrt{21}$ C) $\sqrt{23}$ D) $\sqrt{24}$ E) $\sqrt{27}$

RESOLUCIÓN :

Piden el apotema del exágono regular $ABCDEF=x$

Dato :

- $TM=3$
- M es punto medio $\overline{DF}$.



Sea la longitud del lado del exágono igual a $2a$.

En el triángulo isósceles DEF, $m\measuredangle DEF = 120°$, entonces $DF = 2a\sqrt{3}$; pero M es punto medio de $\overline{DF}$, por lo tanto, $DM = MF = a\sqrt{3}$.

En el $\triangle AFM$: teorema de Pitágoras,

$$(AM)^2 = (2a)^2 + (a\sqrt{3})^2, \quad AM = a\sqrt{7}$$

Por el teorema de las cuerdas :

$$(a\sqrt{3})(a\sqrt{3}) = (a\sqrt{7})(3), \quad a = \sqrt{7}$$

Finalmente, en el $\triangle ONC$: notable $30°$ y $60°$:

$$CN = \sqrt{7} \Rightarrow x = 21$$

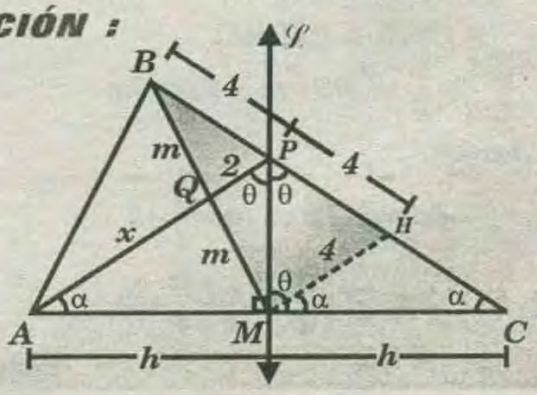
RPTA : "B"

PROBLEMA 24 :

En un triángulo ABC la mediatriz relativa al lado $\overline{AC}$ interseca a $\overline{BC}$ en P. $\overline{AP}$ y $\overline{BM}$ se intersecan en Q. Determine AQ (en cm), si $MQ = QB$ y $BP = 4$ cm. (M como punto medio de $\overline{AC}$)

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

RESOLUCIÓN :



Nos piden AQ

Sea $AQ=x$

Por dato : $BQ=QM$

Ubicamos H en $\overline{PC}$, tal que $BP=PH=4$.

Luego :

QP: base media del $\triangle MBH$

$m\sphericalangle PMH=m\sphericalangle MPH=\theta$

$MH=4 \Rightarrow QP=2$

$\overline{MH} \parallel \overline{AP}$ y $AM=MC$

$\overline{MH}$: base media del $\triangle APC$

$AP=2(MH) \Rightarrow x+2=2(4) \Rightarrow x=6$

RPTA : "C"

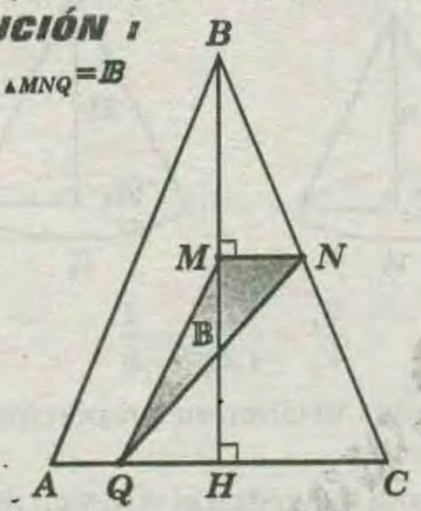
PROBLEMA 25 :

Un triángulo isósceles ABC encierra una región de $16\ m^2$ de área. Por B se traza la altura $\overline{BH}$ relativa al lado desigual $\overline{AC}$. Entonces el área (en m^2) de la región triangular formada al unir los puntos medios de $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ y $\overline{BC}$ es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

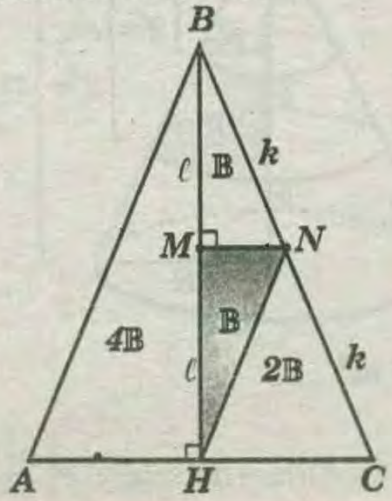
Piden $\mathbb{A}_{\triangle MNQ}=\mathbb{B}$



Al ser M y N puntos medios de $\overline{BH}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, se cumple $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$

Entonces : $\mathbb{A}_{\triangle MNQ}=\mathbb{A}_{\triangle MNH}=B$

Luego por relación de áreas :



$\mathbb{A}_{\triangle ABC}=8B=16$

Entonces $B=2 \Rightarrow \mathbb{A}_{\triangle MNQ}=2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 26 :

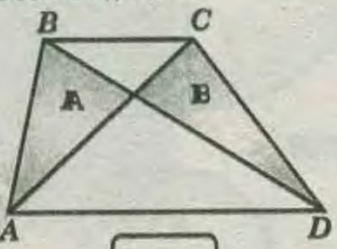
Las diagonales de un trapecio dividen a este en cuatro triángulos. Si las áreas de los triángulos adyacentes a las bases son A_1 y A_2, entonces el área total del trapecio en función de A_1 y A_2 es:

A) $A_1+A_2+\sqrt{A_1A_2}$ B) $2\sqrt{A_1A_2}$ C) A_1A_2

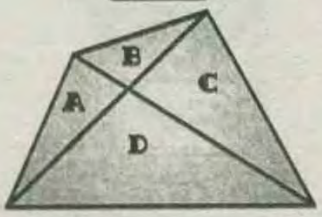
D) $\left(\sqrt{A_1}+\sqrt{A_2}\right)^2$ E) $A_1+A_2-\sqrt{A_1A_2}$

RESOLUCIÓN :

Recuerde que si $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

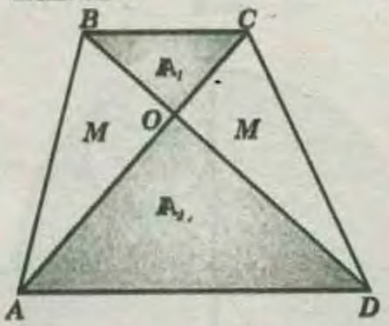


$\mathbb{A}=\mathbb{B}$



Se cumple que: $\boxed{\mathbb{A}+\mathbb{C}=\mathbb{B}\times\mathbb{D}}$

Nos piden $\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}$



- Del gráfico:

  $\mathbb{A}_{\triangle ABO}=\mathbb{A}_{\triangle COD}=M$

- Entonces:

  $\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}=A_1+A_2+2M$ ..... (I)

- Luego $A_1 \times A_2 = M \times M$

  $M=\sqrt{A_1 \times A_2}$ .....(II)

- Reemplazamos (II) en (I)

  $\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}=\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2+2\sqrt{A_1 \times A_2}$

  $\Rightarrow \mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}=\left(\sqrt{A_1}+\sqrt{A_2}\right)^2$

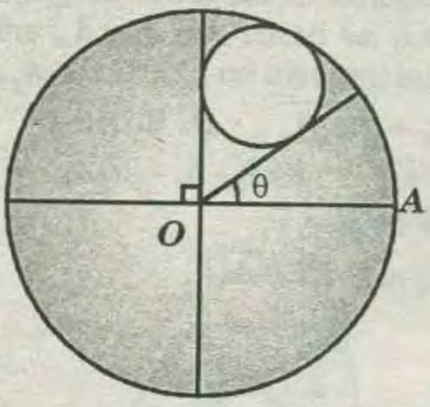
RPTA : "D"

WWW.GRATIS2.COM

PROBLEMA 27 :

En la figura, O es el centro del círculo trigonométrico. Si $OA=1u$ y $tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$,calcule el área de la región sombreada (en u^2).

A) $\frac{7\pi}{9}$
B) $\frac{5\pi}{6}$
C) $\frac{6\pi}{7}$
D) $\frac{7\pi}{8}$
E) $\frac{8\pi}{9}$

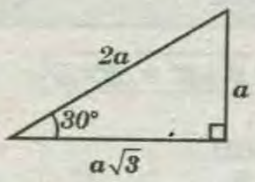


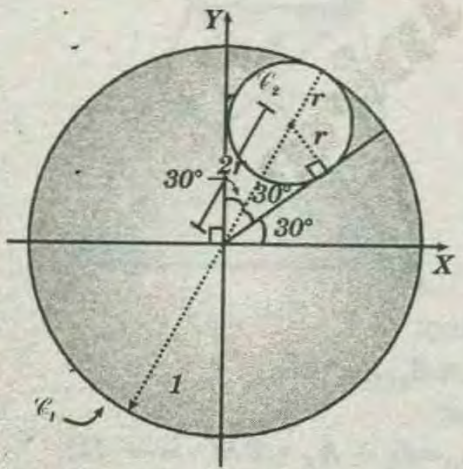
RESOLUCIÓN :

De:

$S=\pi r^2$

Además:





Del dato:

$$Tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \theta=30°$$

Si r es el radio de $\mathscr{C}_2$, según el gráfico se tiene:

$$3r=1\Rightarrow r=\frac{1}{3}$$

Por lo tanto :

$$A_{somb.}=A_{\mathscr{C}_1}-A_{\mathscr{C}_2}$$

$$=\pi(1)^2-\pi\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$=\frac{8\pi}{9}$$

RPTA : "E"

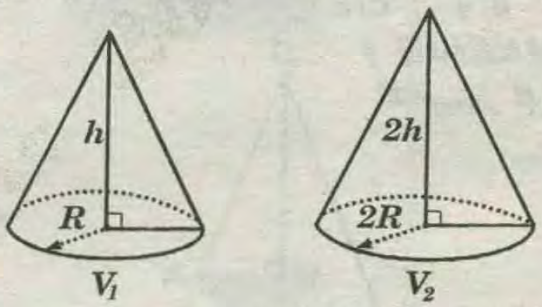
PROBLEMA 28 :

Se divide la altura de un cono circular recto en 3 partes iguales por 2 planos paralelos a la base. Si el volumen del cono es $54m^3$, determine el volumen del tronco de cono con bases en los planos paralelos.

A)$16m^3$ B)$12m^3$ C)$15m^3$ D)$10m^3$ E)$14m^3$

RESOLUCIÓN :

Comparamos los volúmenes de figuras semejantes.

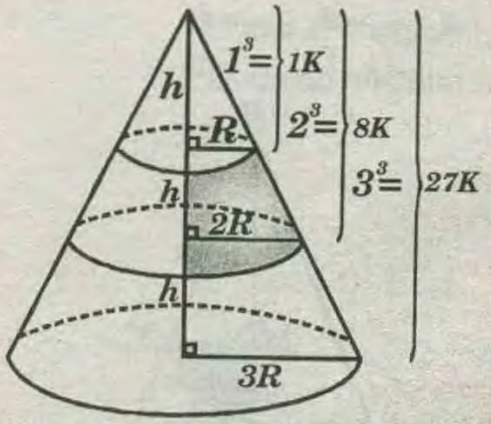


$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{(1)^3}{(2)^3}=\frac{1}{8}$$

Sus volúmenes estarán en proporción de sus medidas al cubo.

En el problema nos piden el volumen del tronco de cono central.

Por ser conos semejantes, sus volúmenes serán



Dato

$$27K=54\ m^3$$

$$K=2\ m^3$$

Por lo tanto, el volumen del tronco de cono central

es $8K-K=7K=14m^3$

RPTA : "E"

PROBLEMA 29 :

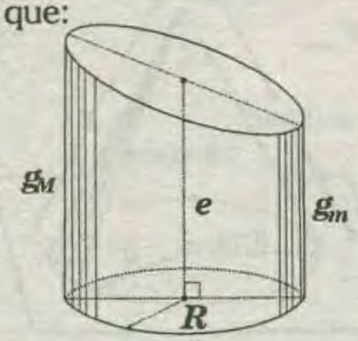
Un tronco de cilindro circular recto se encuentra circunscrito a una esfera de radio $r=\sqrt{2}\ cm$, el eje $\overline{AB}$ de la elipse forma un ángulo de 45° con la generatriz máxima $\overline{BC}$. Calcule el volumen (en cm^3) del tronco de cilindro.

A) $2\pi\left(2+\sqrt{2}\right)$ B) $2\pi\left(1+\sqrt{2}\right)$ C) $\pi\left(2+\sqrt{2}\right)$

D) $2\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$ E) $2\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$

RESOLUCIÓN :

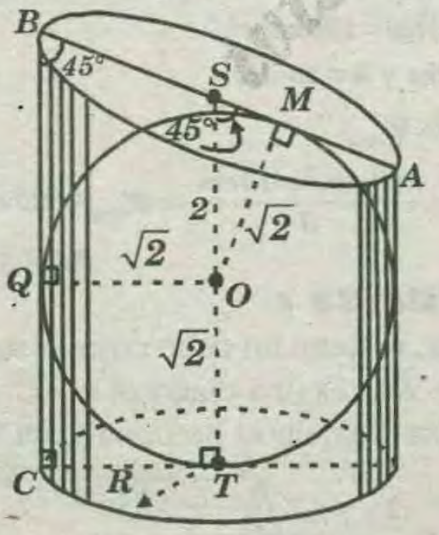
Recordando que:



$$\mathbf{V}_{TC}=\pi R^2\left(\frac{g_M+g_m}{2}\right)$$

$$\mathbf{V}_{TC}=\pi R^2\times e$$

Según los datos del enunciado, tenemos un tronco de cilindro con las siguientes características:



Se nos pide : $\mathbf{V}_{TC}=\pi R^2\times ST$

Según el gráfico, tenemos :

- $OQ=TC \Rightarrow R=\sqrt{2}$
- $\overline{SO}\ //\ \overline{BC} \Rightarrow m\sphericalangle MSO=45^o$
- MSO: $\triangle$ notable $45^o \Rightarrow SO=2$
- $ST=2+\sqrt{2} \Rightarrow \mathbf{V}_{TC}=\pi(\sqrt{2})^2(2+\sqrt{2})$

$\Rightarrow \mathbf{V}_{TC}=2\pi(2+\sqrt{2})$

RPTA : "A"

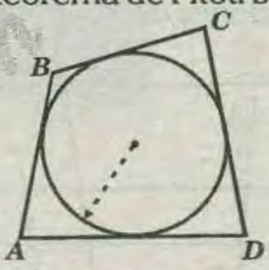
PROBLEMA 30 :

$ABCD$ es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio r y circunscrito a una circunferencia de radio R. Si $\overline{BD}$ interseca a $\overline{AC}$ en I, $3BI=AI$ y $AB+CD=a\ cm\ (a>0)$, calcule la longitud (en cm) de $\overline{BC}$.

A) $\frac{a}{2}$ B) $\frac{a}{3}$ C) $\frac{a}{4}$ D) $\frac{a}{5}$ E) $\frac{a}{6}$

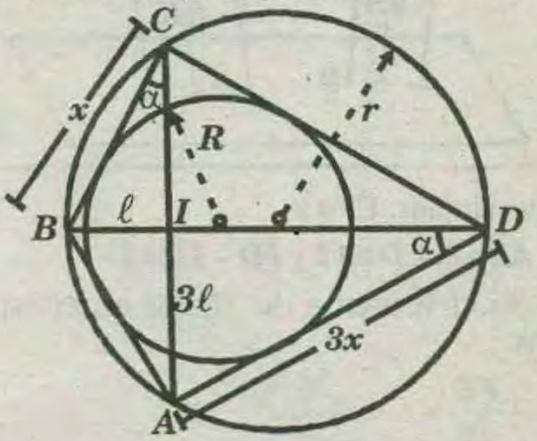
RESOLUCIÓN :

Recordando el teorema de Pitot. Según el gráfico:



se tiene que: $AB+CD=BC+AD$.

Dado el enunciado, nos piden hallar $BC=x$



Del dato : $AI=3(BI)$

Sea $BI=\ell \Rightarrow AI=3\ell$

Del gráfico apreciamos que :

$\triangle BCI \sim \triangle ADI\ (AA)$

$$\frac{\ell}{3\ell}=\frac{x}{AD} \Rightarrow AD=3x$$

Ya que $\square ABCD$ es circunscrito, aplicaremos el teorema de Pitot.

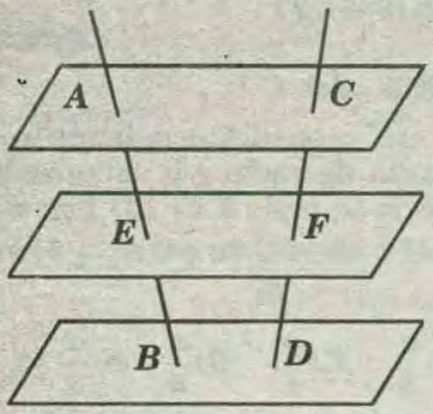
$$\underbrace{AB+CD}_{dato}=x+3x \Rightarrow a=4x \Rightarrow x=\frac{a}{4}$$

RPTA : "C"

WWW.GRATIS2.COM

PROBLEMA 31 :

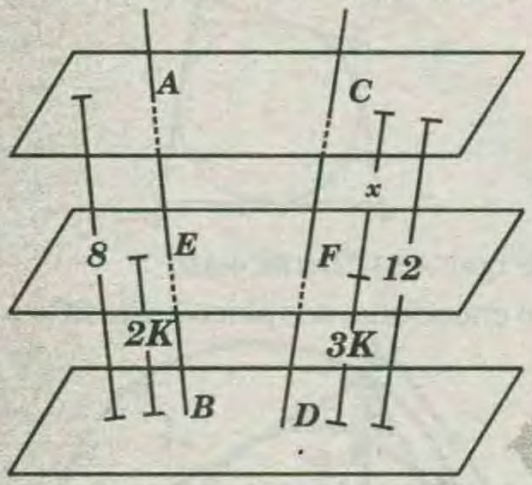
En la figura, las 2 rectas intersecan los tres planos paralelos en los puntos A, E, B, C, F y D. Si $AB=8$ cm, $CD=12$ cm y $FD-EB=1$ cm, halle CF.



A) 7 cm
B) 8 cm
C) 10 cm
D) 11 cm
E) 9 cm

RESOLUCIÓN :

Dadas las condiciones del enunciado, tenemos:



Nos piden hallar: $CF=x$

Datos : $AB=8$, $CD=12$ y $FD-EB=1$

Aplicando el Teorema de Thales en el espacio, tenemos:

$$\frac{EB}{8}=\frac{FD}{12}$$

$$\frac{EB}{2}=\frac{FD}{3} \Rightarrow \begin{matrix} EB=2K \\ FD=3K \end{matrix}$$

Según el enunciado: $FD-EB=1$

$$3K-2K=1 \Rightarrow K=1$$

Del gráfico observamos que:

$$3K+x=12 \Rightarrow 3+x=12 \Rightarrow x=9 \Rightarrow CF=9$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 32 :

Se tiene un cono de revolución con área lateral y área de su base igual a $136\pi\ cm^2$ y $64\pi\ cm^2$ respectivamente. Halle el volumen del cono.

A) $160\pi\ cm^3$ B) $200\pi\ cm^3$ C) $190\pi\ cm^3$
D) $364\pi\ cm^3$ E) $320\pi\ cm^3$

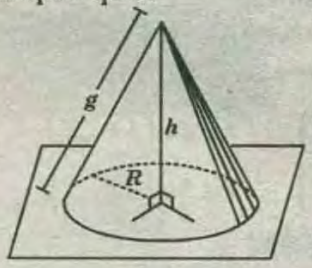
RESOLUCIÓN :

Por teoría sabemos que en todo cono de revolución se cumple que:

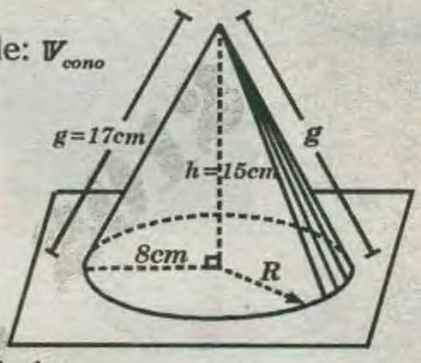
$$A_{base}=\pi R^2$$

$$A_{SL}=\pi Rg$$

$$V_{cono}=\frac{\pi R^2 h}{3}$$



Se nos pide: V_{cono}



Del enunciado:

$$A_{SL}=136\pi cm^2$$

$$A_{base}=64\pi cm^2$$

Según los datos, se tiene:

$$A_{base}=64\pi cm^2$$

$$\pi R^2=64\pi cm^2$$

$$R=8\ cm$$

También: $A_{SL}=136\pi cm^2$

$$\pi(8\ cm)(g)=136\pi cm^2$$

$$g=17\ cm \text{ y } h=15\ cm$$

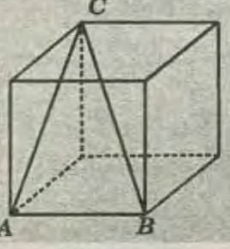
Se nos pide: V_{cono}

$$V_{cono}=\frac{\pi(8cm)^2\times 15cm}{3} \Rightarrow V_{cono}=320\pi cm^3$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 33 :

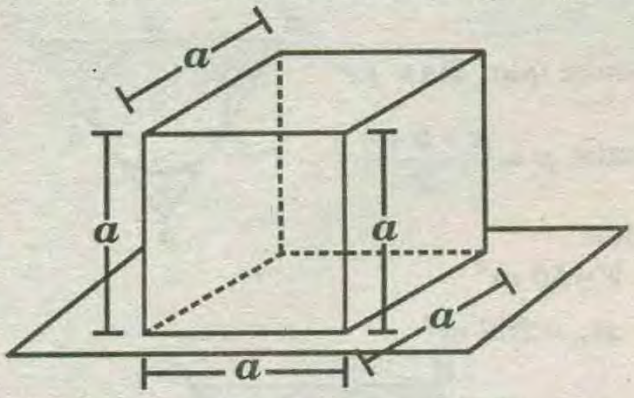
En la figura, se tiene un cubo cuya arista mide a cm, donde $\overline{BC}$ es una diagonal y $\overline{AC}$ diagonal de una cara. Calcule el perímetro del triángulo ABC.



A) $a(1+2\sqrt{2})$ cm B) $a(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$ cm
C) $a(1+\sqrt{3}+\sqrt{5})$ cm D) $a(\sqrt{2}+2\sqrt{3})$ cm
E) $a(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})$ cm

RESOLUCIÓN :

Según el enunciado, tenemos un cubo con a cm de arista, como se muestra en la imagen siguiente:



• Se nos pide hallar el perímetro del triángulo ABC: $2P_{\triangle ABC}$

• Sabemos por el enunciado que la arista del cubo mide a cm.

• Ya que el $\triangle ADC$, notable $45°$, se determina: $AC = a\sqrt{2}$.

• En el $\triangle CAB$ se aplica el teorema de Pitágoras:

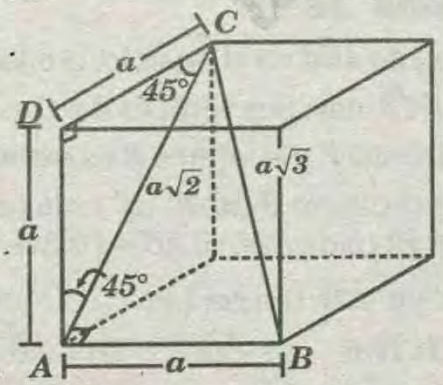
$$(BC)^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2$$

$$BC = a\sqrt{3}$$

• Se nos pide hallar: $2P_{\triangle ABC}$

$$2P_{\triangle ABC} = a + a\sqrt{2} + a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2P_{\triangle ABC} = a(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$$



Se concluye que: $2P_{\triangle ABC}: a(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$ cm

RPTA : "B"

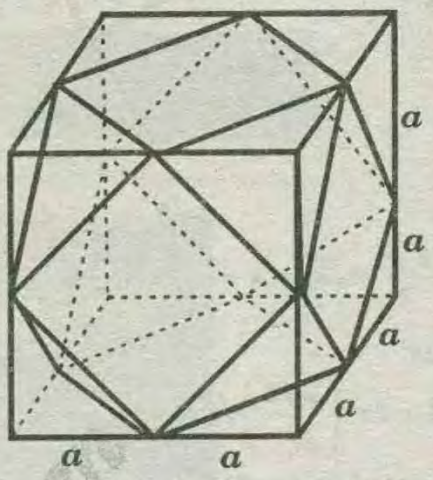
PROBLEMA 34 :

En un exaedro regular los puntos medios de sus aristas son los vértices de un poliedro. Determine la relación $\dfrac{\text{volumen del poliedro}}{\text{volumen del exaedro}}$

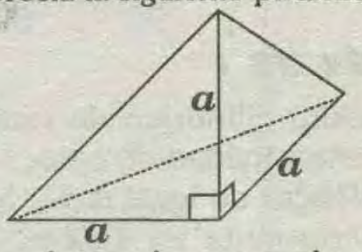
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{6}$ E) 2

RESOLUCIÓN :

Se tiene un exaedro regular:



del cual se aprecia la siguiente pirámide:



Por teoría se determina que el volumen del exaedro regular es $(2a)^3 = 8a^3$.

Para hallar el volumen del poliedro debemos restar del volumen del cubo 8 veces el volumen de la pirámide, así tendríamos que:

$$V_{poliedro} = 8a^3 - 8\left(\frac{1}{3}\frac{a^2}{2}a\right) = \frac{5}{6}(8a^3)$$

Entonces :

$$\frac{\text{volumen del poliedro}}{\text{volumen del exaedro}} = \frac{5}{6}$$

RPTA : "D"

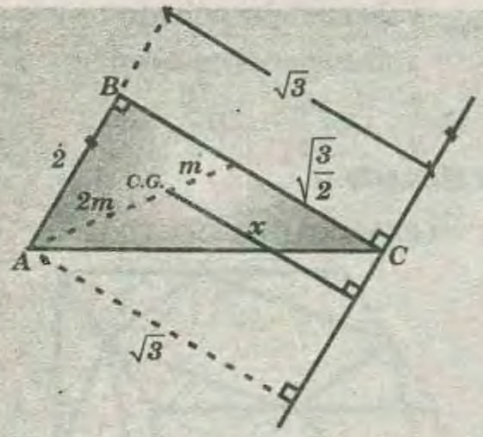
PROBLEMA 35 :

L es una recta que contiene un punto C, ABC es un triángulo rectángulo (recto en B) cuyo cateto $\overline{AB}$ es paralelo a la recta L. Si $BC = \sqrt{3}$ cm y $AB = 2$ cm, entonces el volumen (en cm^3) del sólido de revolución que se obtiene al girar el triángulo alrededor de L es:

A) 2π B) $\frac{5\pi}{2}$ C) 3π D) $\frac{7\pi}{2}$ E) 4π

RESOLUCIÓN :

Según la teoría, el centroide de una región triangular coincide con su baricentro.



$$\mathbb{A}_{(ABC)} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)2m + \left(\sqrt{3}\right)m}{3m} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por Pappus:

$$\mathbb{V} = 2\pi \times \mathbb{A} = 2\pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\sqrt{3} = 4\pi$$

Entonces el volumen del sólido es 4π.

RPTA : "E"

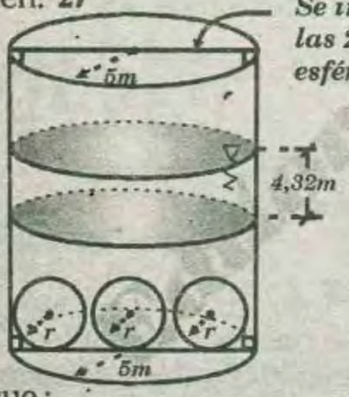
PROBLEMA 36 :

En un depósito cilíndrico de radio **5 m**, que contiene cierta cantidad de agua, se introducen **24** bolas esféricas de igual radio. Si el nivel del agua se incrementa en **4,32m**, entonces el diámetro (en **m**) de las bolas es:

A) 3,0 B) 3,2 C) 3,4 D) 3,6 E) 3,8

RESOLUCIÓN :

Nos piden: $2r$



Es así que:

$$\mathbb{V}\begin{bmatrix}\text{de las 24}\\ \text{bolas esféricas}\end{bmatrix} = \mathbb{V}_{H_2O}\begin{bmatrix}\text{nivel de}\\ \text{incremento}\end{bmatrix}$$

$$24 = \times\frac{4}{3}\pi r^3 = \left(\pi \times 5^2\right) \times 4,32$$

Simplificando:

$$r = 1,5 \Rightarrow 2r = 3$$

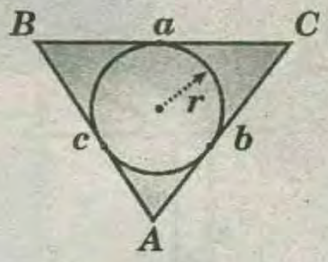
RPTA : "A"

PROBLEMA 37 :

El volumen y el área lateral de un prisma recto de base triangular son $50m^3$ y $200m^2$, respectivamente. Calcule el radio (en **m**) de la circunferencia inscrita en la base del prisma.

A) 0,25 B) 0,5 C) 1 D) 2 E) 3

RESOLUCIÓN :



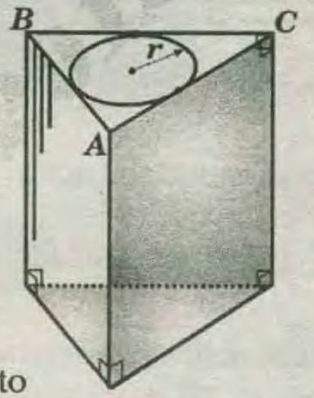
Se sabe que: $\mathbb{A}_{\blacktriangle} = pr$

donde: $p = \frac{a+b+c}{2}$

Datos:

$\mathbb{V} = 50\ m^2$

$\mathbb{A}_{SL} = 200\ m^2$



Se pide r

Del primer dato

$(pr)h = 50\ m^2 \ldots\ldots (I)$

Del segundo dato

$2ph = 200\ m^2 \ldots\ldots (II)$

Del $(I) \div (II)$: $r = 0,5$

RPTA : "B"

PROBLEMA 38 :

En un triángulo **ABC** en el espacio, la altura relativa a $\overline{AC}$ es $5\sqrt{3}$ **cm**. Sus vértices **A** y **C** están en un plano horizontal **P** y el vértice **B** es exterior a **P** de modo que el diedro **B-AC-B'** (**B'** es la proyección de **B** sobre **P**) mide 37°. Si $AB' = 10$ **cm**, entonces la longitud de $\overline{AB}$ (en **cm**) es:

A) 10 B) 10,6 C) $\sqrt{127}$ D) $5\sqrt{6}$ E) $6\sqrt{5}$

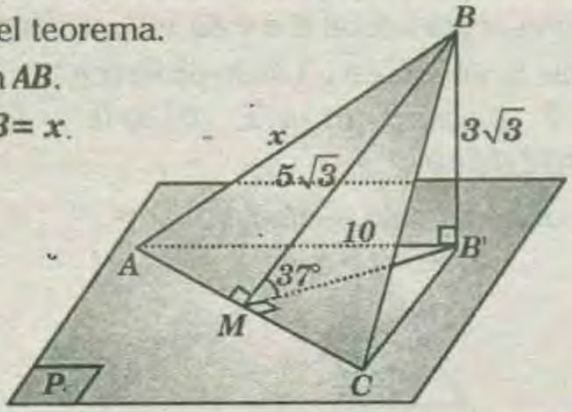
RESOLUCIÓN :

Cuando se pide calcular la medida de un ángulo diedro, recuerde que podemos utilizar el teorema de las tres rectas perpendiculares, y en el caso de que dicha medida sea dato, también podemos

usar el teorema.

Piden AB.

$AB = x$.



• Al trazar $\overline{B'M} \perp \overline{AC}$ por teorema de las tres perpendiculares: $\overline{BM} \perp \overline{AC}$

• Del dato: $m \measuredangle BMB' = 37°$

• $\triangle BB'M$: notable de $37°$ y $53°$

$MB = 5\sqrt{3} \Rightarrow BB' = 3\sqrt{3}$

• Del $\triangle AB'B$:

$x^2 = (3\sqrt{3})^2 + 10^2 \Rightarrow x = \sqrt{127}$

RPTA : "C"

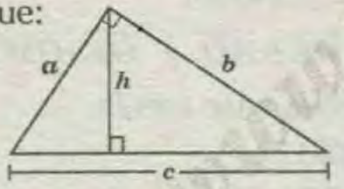
PROBLEMA 39 :

La arista de un octaedro regular mide **6 m**. Calcule la distancia (en **m**) del centro del octaedro a una cara.

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{7}$ D) $\sqrt{8}$ E) 3

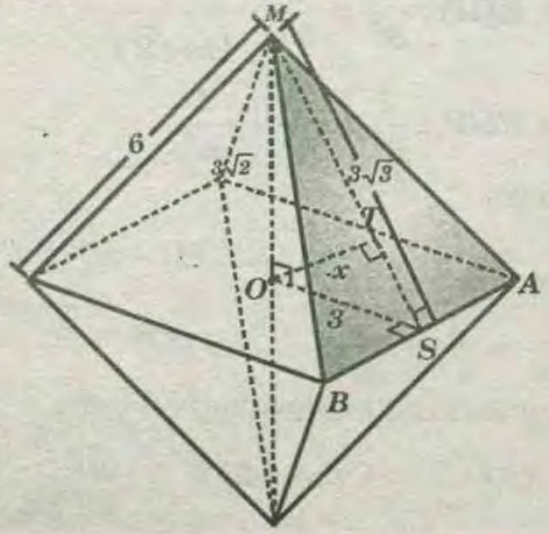
RESOLUCIÓN :

Recordando que:



según el gráfico, se cumple que : $\boxed{a \times b = c \times h}$

Nos piden hallar la distancia del centro a una cara.



Sea O: centro del octaedro

$OM = 3\sqrt{2}$

Teorema (3 perpendiculares)

$\overline{MO}$ – 1.° ; $\overline{OS}$ – 2.°

$\Rightarrow \overline{MS}$ – 3.°

$\overline{OT} \perp \triangle AMB$

$\Rightarrow OT$: distancia del centro a una cara

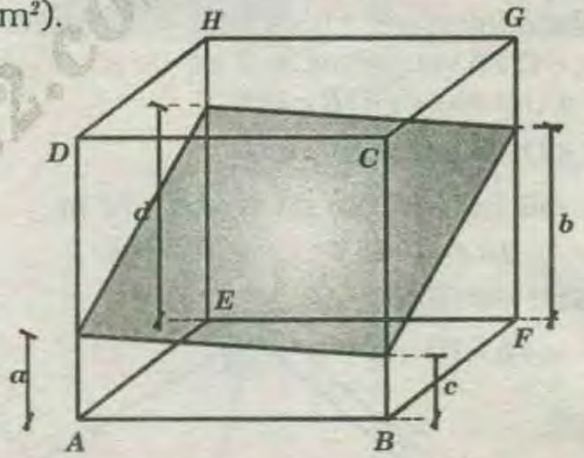
$OT = x$

$\triangle MOS : 3 \times 3\sqrt{2} = 3\sqrt{3} \times x \Rightarrow x = \sqrt{6}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 40 :

Se tiene el cubo $ABCDEFGH$ de arista **2 cm**. Se construye el cuadrilátero achurado como se muestra en la figura; tal que $a = \frac{1}{2}$ **cm**, $b = \frac{3}{2}$ **cm**, $c = \frac{1}{3}$ **cm**. Determine el área del cuadrilátero (en cm^2).

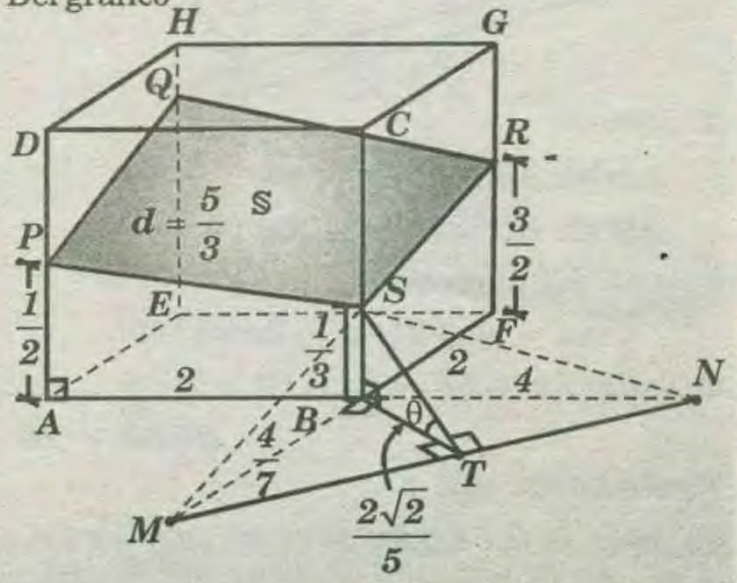


A) 4,64 B) 5,34 C) 6,14 D) 6,64 E) 7,54

RESOLUCIÓN :

Piden $\mathbb{S}$.

Del gráfico



$\triangle PAN \sim \triangle SBN$

$\frac{BN}{BN+2}=\frac{1/3}{1/2} \Rightarrow BN=4$

$\triangle MBS \sim \triangle MFR$

$\frac{MB}{MB+2}=\frac{1/3}{3/2} \Rightarrow MB=\frac{4}{7}$

$\triangle MBN$

$\frac{1}{(BT)^2}=\frac{1}{4^2}+\frac{1}{\left(\frac{4}{7}\right)^2} \Rightarrow BT=\frac{2\sqrt{2}}{5}$

$\triangle SBT$:

$(ST)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2 \Rightarrow ST=\frac{\sqrt{97}}{15}$

$\mathbb{A}\square_{BAEF}=\mathbb{A}\square_{SPQR}.Cos\,\theta$

$$22=S\left(\frac{\frac{2\sqrt{2}}{5}}{\frac{\sqrt{97}}{15}}\right) \Rightarrow S=\frac{\sqrt{194}}{3} \Rightarrow S=4{,}64$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 41 :

Un plano interseca a las aristas de un triedro con vértice O en los puntos A, B y C de modo que:

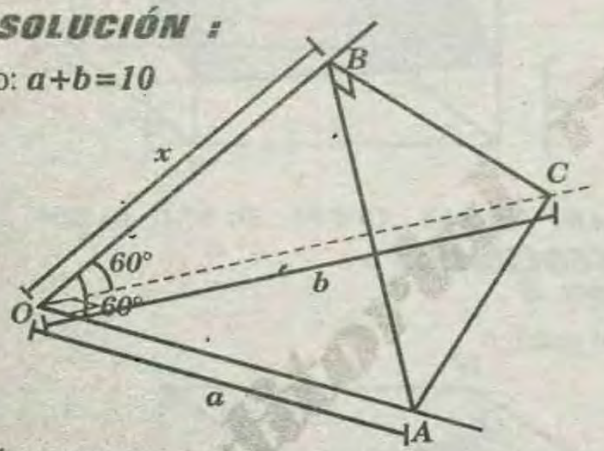
$m\sphericalangle AOB=m\sphericalangle COB=60°$

$m\sphericalangle AOC=m\sphericalangle ABC=90°$.

Halle OB (en metros) si $OA+OC=10\ m$.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN :



Dato: $a+b=10$

T. Cosenos

$\Delta AOB: AB^2=a^2+x^2-ax$

$\Delta BOC: BC^2=b^2+x^2-bx$

$\triangle AOC$: T. Pitágoras :

$a^2+x^2-ax+b^2+x^2-bx=a^2+b^2$

de donde $2x=a+b \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5$

RPTA : "C"

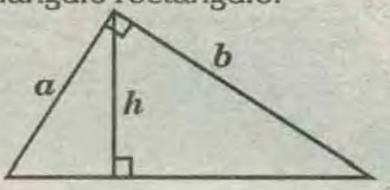
PROBLEMA 42 :

En una pirámide regular de base cuadrangular, el punto medio de la altura dista de una cara lateral y de una arista lateral $6\ u$ y $8u$ respectivamente. Calcule la altura (en u) de la pirámide.

A) $6\sqrt{2}$ B) $12\sqrt{2}$ C) $18\sqrt{2}$ D) $24\sqrt{2}$ E) $34\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

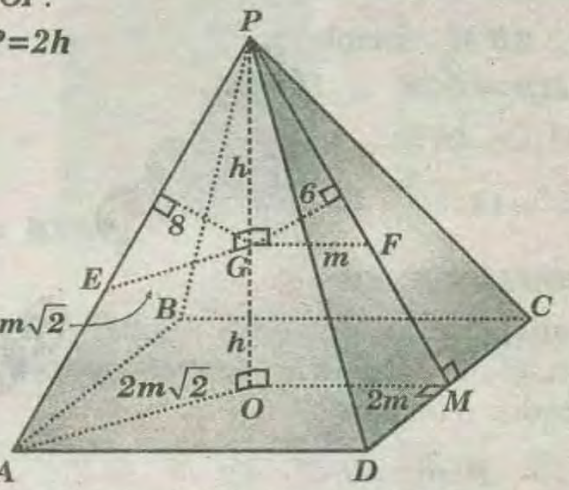
- En todo triángulo rectángulo.



$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

Piden OP.

$OP=2h$



Como O: Centro del cuadrado $ABCD$.

$\Rightarrow OA=\sqrt{2}(OM)$

- Se traza $\overline{GE}\,//\,\overline{AO}$ y $\overline{GF}//\overline{OM}$

Por teoría de la base media.

$AO=2(EG)$

$OM=2(GF)$

- Por relaciones métricas.

$$\triangle EGP: \frac{1}{8^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{(m\sqrt{2})^2}$$

$$\triangle FGP: \frac{1}{6^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{m^2}$$

- Luego:

$$\frac{1}{64}=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{2m^2} \quad .....(I)$$

$$\frac{1}{36}=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{m^2} \quad ..... \ (II)$$

- Operando las expresiones (I) y (II)

$h=12\sqrt{2} \Rightarrow OP=24\sqrt{2}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 43 :

Halle el volumen de una pirámide $V-ABC$ (en cm^3), cuyas caras laterales forman con la base un diedro de $30°$, sabiendo que $AB=13\ cm$, $BC=15\ cm$ y $AC=14\ cm$.

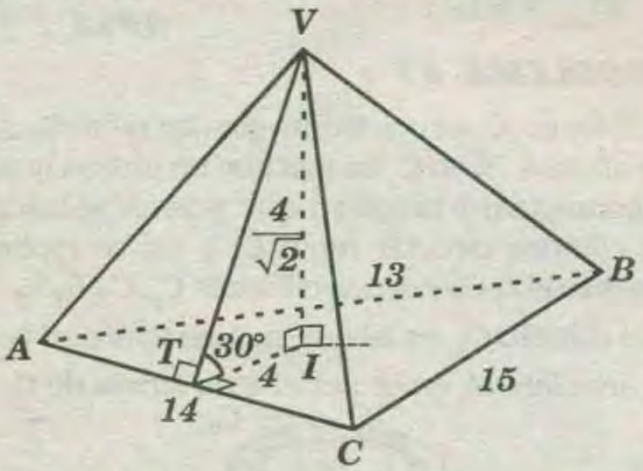
A) $56\sqrt{3}$ B) $112\sqrt{3}/3$ C) $120\sqrt{3}$

D) $127\sqrt{3}$ E) $132\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :

Piden el volumen de la pirámide $V-ABC$.

Datos: $AB=13$; $BC=15$ y $AC=14$



Como los diedros entre una cara lateral y la base son iguales, entonces, el pie de la altura de la pirámide es el incentro de la base ABC.

Para hallar el área de la base ABC, aplicamos la fórmula de Herón, entonces :

$$\mathbb{A}_{\triangle ABC}=\sqrt{21(8)(7)(6)} \Rightarrow \mathbb{A}_{\triangle ABC}=84$$

Como, IT es longitud del inradio, utilizamos la fórmula del inradio, entonces,

$$\mathbb{A}_{\triangle ABC}=(21)(IT);\ 84=21(IT) \Rightarrow IT=4$$

En el $\triangle VIT$ notable $30°$ y $60°$, $IT=4$, entonces,

$$VI=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Finalmente :

$$\mathbb{V}_{\diamond V-ABC}=\frac{(\mathbb{A}_{\triangle ABC})(VI)}{3}$$

$$\mathbb{V}_{\diamond V-ABC}=\frac{(84)\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)}{3} \Rightarrow \mathbb{V}_{\diamond V-ABC}=\frac{112}{\sqrt{3}}$$

RPTA : "B"

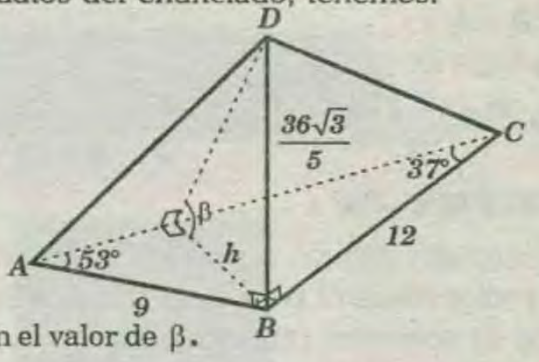
PROBLEMA 44 :

Por el vértice B de un triángulo rectángulo ABC (recto en B). Se traza $\overline{BD}$ perpendicular al plano ABC, el punto D se une con las vértices A y C. Si $AB=9\ u$, $BC=12\ u$ y $BD=\frac{36\sqrt{3}}{5}\ u$, entonces la medida del diedro AC (en grados sexagesimales) es:

A) 37 B) 45 C) 53 D) 54 E) 60

RESOLUCIÓN :

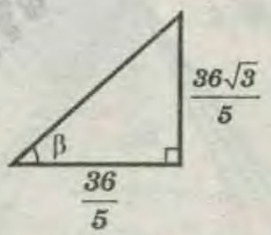
Según datos del enunciado, tenemos:



Piden el valor de β.

$\triangle ABC$ (producto de catetos) : $9(12)=15h \Rightarrow h=\frac{36}{5}$

Entonces:



Finalmente, la medida del diedro AC es $60°$.

RPTA : "E"

PROBLEMA 45 :

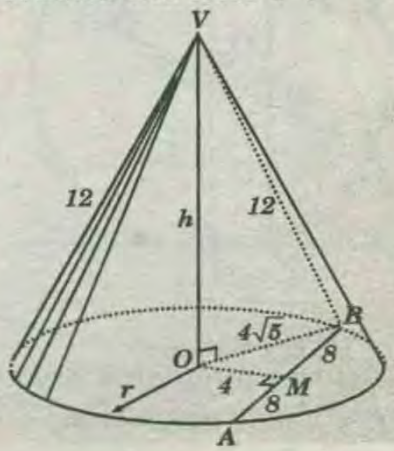
En un cono circular recto la generatriz mide $12cm$ y una cuerda de la circunferencia de la base mide $16cm$. Si la distancia del centro de dicha circunferencia a la cuerda es $4\ cm$, entonces el volumen del cono (en cm^3) es:

A) $\frac{640\pi}{3}$ B) $\frac{641\pi}{3}$ C) $\frac{642\pi}{3}$

D) $\frac{643\pi}{3}$ E) $\frac{644\pi}{3}$

RESOLUCIÓN :

Se pide el volumen del cono $\mathbb{V}$.



• Se sabe que $\mathbb{V} = \frac{\pi r^2 h}{3}$ .....(I)

• Al trazar $\overline{OM} \perp \overline{AB} \Rightarrow MB = MA = 8$

$\triangle OMB = OB = 4\sqrt{5}$

• En el $\triangle VOB = h^2 + (4\sqrt{5})^2 = 12^2$

$\Rightarrow h = 8$

Reemplazando en (I):

$$\mathbb{V} = \frac{\pi(4\sqrt{5})^2 \times 8}{3} \Rightarrow \mathbb{V} = \frac{640\pi}{3}$$

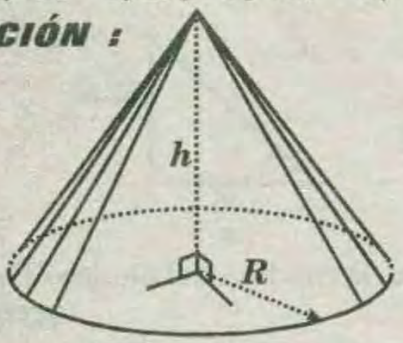
RPTA : "A"

PROBLEMA 46 :

Considere dos esferas tangentes exteriormente, cuyos radios miden **1 cm** y **3 cm** respectivamente. Calcule el volumen (en cm^3) del cono circular recto circunscrito a las dos esferas.

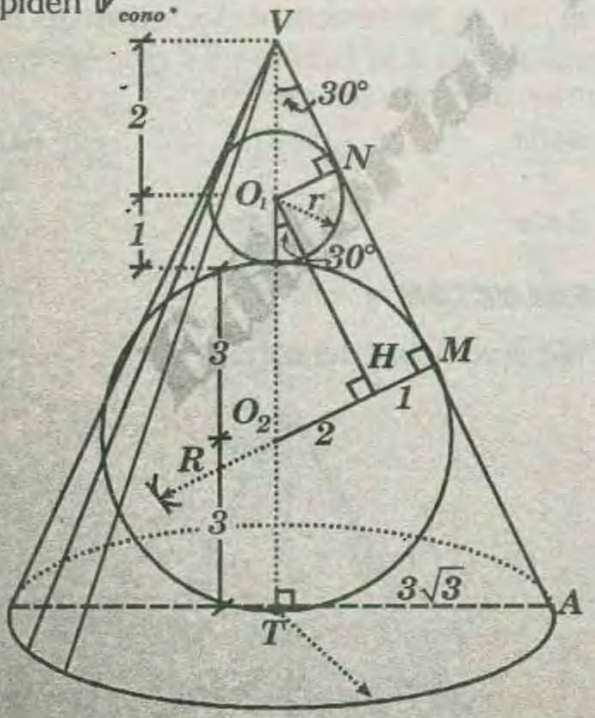
A) 80π B) 81π C) 82π D) 83π E) 84π

RESOLUCIÓN :



$$\mathbb{V}_{cono} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

Nos piden $\mathbb{V}_{cono}$.



Datos: Las esferas tangentes exteriores están inscritas en el cono de revolución.

Además, $r=1$ y $R=3$

Se observa que:

$\triangle O_1O_2H$: Not. de 30° y 60°

$m\sphericalangle HO_1O_2 = 30°$

Como $\overline{O_1H} \parallel \overline{VM}$, entonces

$m\sphericalangle TVA = 30°$

En $\triangle VTA$: $TA = 3\sqrt{3}$

$$\mathbb{V}_{cono} = \frac{\pi(3\sqrt{3})^2 \times 9}{3}$$

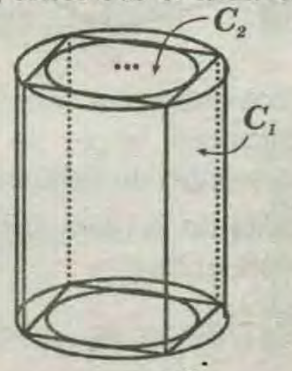
$$\mathbb{V}_{cono} = 81\pi$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 47 :

En la figura, C_1 es un cilindro circular recto de radio R y altura h. Si en C_1 se inscribe un prisma regular cuadrangular y luego en este prisma se inscribe un cilindro circular recto C_2 y así se repite el proceso obteniendo los cilindros $C_3, C_4, C_5, \ldots$

Si el cilindro C_{21} es tal que su área total es **3** veces su área lateral, entonces el área lateral de C_1 es:

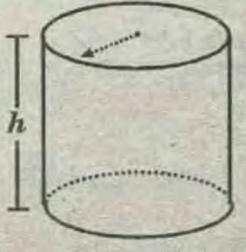


A) $\frac{\pi R^2}{(\sqrt{2})^{40}}$ B) $\frac{\pi R^2}{(\sqrt{2})^{30}}$ C) $\frac{\pi R^2}{(\sqrt{2})^{20}}$

D) $\frac{\pi R^2}{(\sqrt{2})^{15}}$ E) $\frac{\pi R^2}{(\sqrt{2})^{10}}$

RESOLUCIÓN :

Área de la superficie del cilindro.



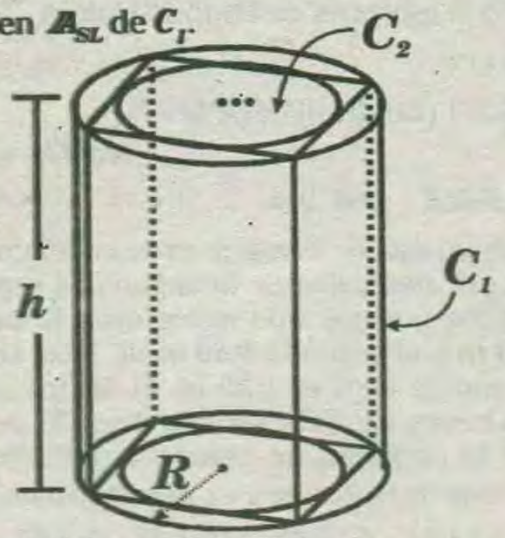
Área total:

$$A_{ST} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$$

Área de la superficie lateral:

$$A_{SL} = 2\pi Rh$$

Nos piden A_{SL} de C_1.



Dato: En el cilindro *21* se tiene:

$$A_{T(C_{21})} = 3A_{SL(C_{21})}$$

Sea R_{21} el radio de la base del cilindro *21*.

Entonces en el dato tenemos:

$$2\pi(R_{21})^2 + 2\pi(R_{21})h = 3(2\pi(R_{21})h)$$

$$R_{21} = 2h \rightarrow h = \frac{R_{21}}{2} \ldots\ldots\ldots (I)$$

Luego:

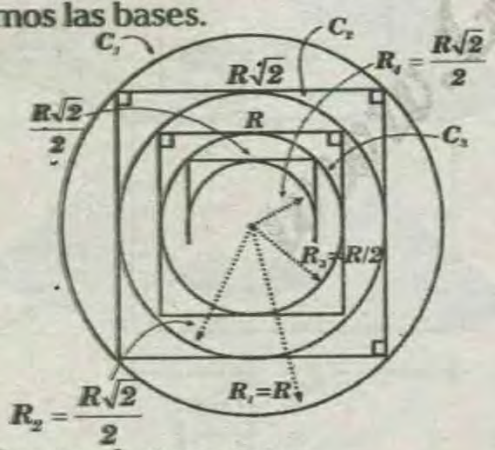
$$A_{SL(C_1)} = 2\pi Rh \qquad (II)$$

Reemplazando *(I)* en *(II)* tenemos

$$A_{SL(C_1)} = \pi R(R_{21}) \quad (III)$$

Hallando R_{21} en función de R tenemos lo siguiente.

Analizamos las bases.



Del gráfico se observa que:

$$C_1 \Rightarrow R_1 = R$$

$$C_2 \Rightarrow R_2 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$C_3 \Rightarrow R_3 = \frac{R}{2}$$

$$C_4 \Rightarrow R_4 = \frac{R\sqrt{2}}{4}$$

$$C_5 \Rightarrow R_5 = \frac{R}{4}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

- Por inducción se tiene que:

$$C_{21} \Rightarrow R_{21} = \frac{R}{1024} = \frac{R}{2^{10}}$$

$$\Rightarrow R_{21} = \frac{R}{2^{10}} \qquad (IV)$$

$$A_{SL(C_1)} = \pi R\left(\frac{R}{2^{10}}\right)$$

$$\Rightarrow A_{SL(C_1)} = \frac{\pi R^2}{(\sqrt{2})^{20}}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 48 :

Un triángulo isósceles cuya base mide $2a$ unidades y cuya altura mide $3a$ unidades, gira alrededor de uno de sus lados. Calcule (en unidades cúbicas) el mayor volumen del sólido que de esta manera se genera.

A) $4\pi a^3$ B) $5\pi a^3$ C) $6\pi a^3$

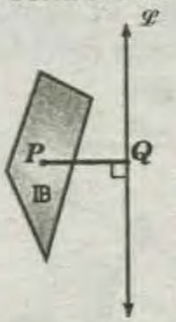
D) $7\pi a^3$ E) $8\pi a^3$

RESOLUCIÓN :

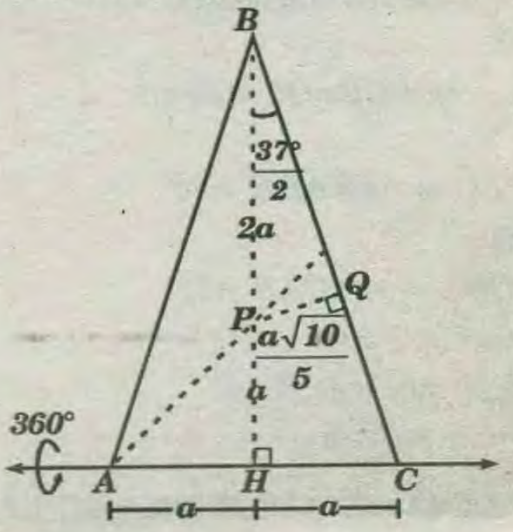
El volumen que genera la región sombreada al girar $360°$ en torno a la recta $\mathcal{L}$ se calcula como

$V_{SG} = \mathcal{B} \times 2\pi(PQ)$

De modo que P es centroide de dicha región



Piden el mayor volumen del sólido que se genera al girar la región ABC en torno a uno de sus lados. Como el área es constante, entonces los volúmenes dependen de PH y PQ siendo P centroide de dicha región.



Luego del grafico, la $m\measuredangle HBC = \frac{37°}{2}$

$$\frac{a\sqrt{10}}{5} < a \Rightarrow PQ < PH$$

Entonces el mayor volumen se calcula como

$$V_{SG} = \frac{2a \times 3a}{2} \times 2\pi \times a \Rightarrow V_{SG} = 6\pi a^3$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 49 :

En un rectángulo *ABCD* la diagonal $\overline{AC}$ tiene una longitud de $2a$ unidades y forma con $\overline{AB}$ un ángulo de $30°$. El rectángulo gira alrededor de una recta paralela a $\overline{AC}$ y que pasa por B. El área de la superficie total generada por el rectángulo es:

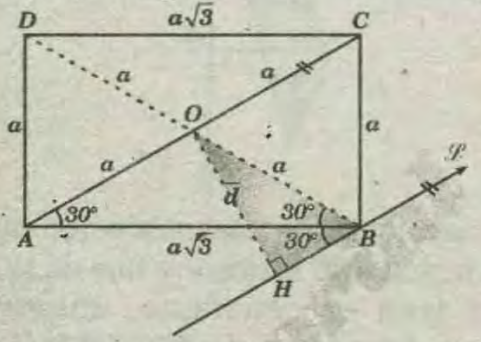
A) $2\pi a^2(3-\sqrt{3})$ B) $\pi a^2(3+\sqrt{3})$

C) $3\pi a^2\sqrt{3}$ D) $\pi a^2(3+2\sqrt{3})$

E) $2\pi a^2(3+\sqrt{3})$

RESOLUCIÓN :

Cuando nos piden calcular el área de una superficie generada por una rotación, es recomendable usar el teorema de Pappus, siempre que se pueda calcular la distancia del centroide al eje de giro.



En un rectángulo, el centroide O es el punto de intersección de sus diagonales.

En *ABCD*

$AC = 2a \Rightarrow AO = OB = OC = OD = a$

Como

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overline{AC} \Rightarrow m\measuredangle ABH = 30°$

En *AOB*

$m\measuredangle OBA = m\measuredangle OAB = 30°$

$\Rightarrow m\measuredangle OBH = 60°$

Sea $\overline{d}$ la distancia de O a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

En el $\triangle BOH$: $\overline{d} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

La linea que gira tiene longitud $\ell = 2a(\sqrt{3}+1)$

Aplicando el teorema de Pappus-Guldin

$A_{SG} = 2\pi\, \overline{d} \times \ell$

$A_{SG} = 2\pi\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)\left(2a(\sqrt{3}+1)\right) = 2\pi a^2(3+\sqrt{3})$

RPTA : "E"

PROBLEMA 50 :

La base de un asta de bandera es de concreto y está formada por dos prismas hexagonales regulares concéntricos puestos uno sobre otro. El primero tiene $1{,}20\ m$ y el segundo $0{,}80\ m$ de lado; la altura de cada uno de ellos es $0{,}30\ m$. Si ambos prismas tienen un hueco central cilíndrico de radio de $8\ cm$, entonces la cantidad de concreto utilizado para construir esta base (en m^3) es aproximadamente

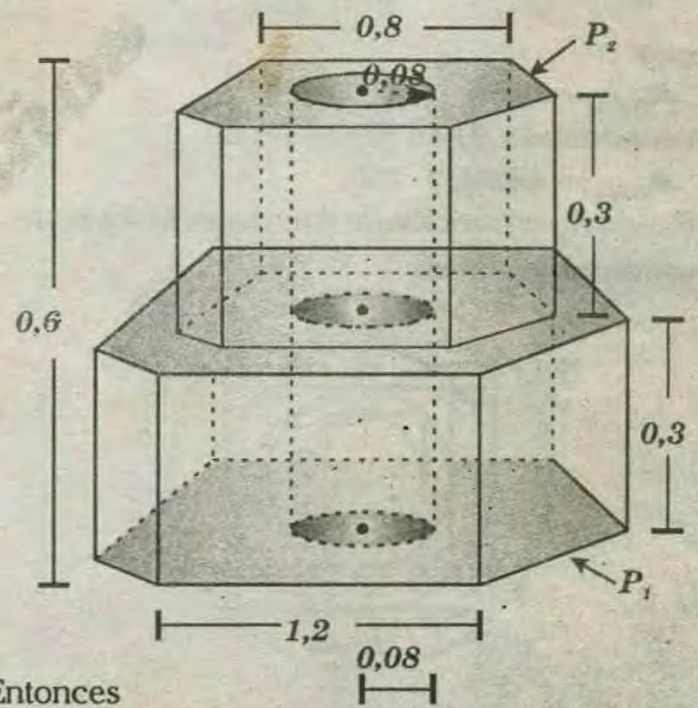
A) 1,55 B) 1,57 C) 1,59 D) 1,61 E) 1,63

RESOLUCIÓN:

Recordemos que el volumen tanto del prisma regular y cilindro de revolución se calculan como el producto del área de la base y su respectiva altura.

Sea $\mathbb{V}_T$: volumen total

$$\mathbb{V}_T = \mathbb{V}_{P(1)} + \mathbb{V}_{P(2)} - \mathbb{V}_{cilindro}$$



Entonces

$$\mathbb{V}_T = \left[\frac{(1,2)^2\sqrt{3}}{4}\right]6 \times 0,3 + \left[\frac{(0,8)^2\sqrt{3}}{4}\right]6 \times 0,3 - \pi(0,08)^2 \times 0,6$$

Consideramos

$\sqrt{3} = 1,73$ y $\pi = 3,14$

$\mathbb{V}_T = 1,12104 + 0,49824 - 0,010576 = 1,6072$

Aproximamos $\mathbb{V}_T = 1{,}61$.

$\Rightarrow$ La cantidad de concreto utilizado en m^3 aproximadamente, es $1{,}61$

RPTA : "D"

COLECCIÓN "RUBIÑOS 2012"

1700 PÁGINAS

Incluye 2 DVDs multimedia

1100 PÁGINAS

Incluye 2 DVDs multimedia

1500 PÁGINAS

Incluye 2 DVDs multimedia

1600 PÁGINAS

Incluye 2 DVDs multimedia

1100 PÁGINAS

Incluye 2 DVDs multimedia

1700 PÁGINAS

Incluye 2 DVDs multimedia

1500 PÁGINAS

Incluye 2 DVDs multimedia

1500 PÁGINAS

Incluye 2 DVDs multimedia

Pedidos al por mayor: 5281921 / 7259505

www . GRATIS2 . com